

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



STRES ALTINDA ÇALIŞAN TEKNİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

Mine DOĞAN

Doktora Tezi

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

İstatistik Teorisi Bilim Dalı

MAYIS 2024

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İstatistik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

STRES ALTINDA ÇALIŞAN TEKNİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

Tez Yazarı
Mine DOĞAN

Danışman
Prof. Dr. Mehmet GÜRCAN

MAYIS 2024
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İstatistik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Başlığı: Stres altında çalışan teknik sistemlerin analizi
Yazarı: Mine DOĞAN
İlk Teslim Tarihi: 24.04.2024
Savunma Tarihi: 27.05.2024

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Mehmet GÜRCAN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Doç. Dr. Nurhan HALİSDEMİR Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Mehmet Onur KAYA Fırat Üniversitesi Tıp Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Ayşe Metin KARAKAŞ Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Fahrettin ÖZBEY Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım ‘‘Stres altında çalışan teknik sistemlerin analizi’’ Başlıklı Doktora Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

27.05.2024

Mine DOĞAN



ÖNSÖZ

Bir sistemin ve sistem bileşenlerinin güvenilirliğini tahmin etmek istatistiksel güvenilirlik analizinde çalışılan önemli problemlerden biridir. Sistem güvenilirliği analizinde en önemli hususlardan biri sistemin arızalanma davranışını anlamak ve bu davranış için uygun stokastik modeli seçmektir. Günümüzde sistemlerin karmaşık yapısı ve ilerleyen teknoloji sayesinde sistemlerin doğru çalışabilmesi ve kontrol edilebilir durumda olması güvenilirlik konusunu önemli bir hale getirmiştir.

Bu tez, stres altında çalışan teknik sistemlerin analizini ve performanslarını iyileştirmeye yönelik bir araştırma sunmaktadır. Teknolojik gelişmelerle birlikte, birçok alanda kullanılan teknik sistemlerin dayanıklılığı ve performansı, önemli bir konu haline gelmiştir. Endüstriyel sistemlerden akıllı cihazlara kadar, bu sistemlerin güvenilirliği ve dayanıklılığı, kullanıcılar ve işletmeler için kritik bir öneme sahiptir.

Bu çalışma, stres altında çalışan teknik sistemlerin karşılaştığı zorlukları anlamak ve bu zorlukların üstesinden gelmek için stratejiler geliştirmek amacıyla yapılmıştır. Tezin kapsamı, stres altındaki sistemlerin tanımı, stres faktörlerinin analizi, performans ölçütlerinin belirlenmesi ve son olarak sistemlerin performansını artırmak için önerilen çözümleri içermektedir.

Çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren saygıdeğer ve kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Mehmet Gürcan'a şükranlarımı sunarım.

Tez önerisinden itibaren çalışmamı titizlikle takip eden, yapıcı eleştiri ve görüşlerini esirgmeden çalışmamı katkı sağlayan, anlayış ve yardımlarından ötürü Tez izleme Komitesindeki sayın hocalarım Doç. Dr. Nurhan Halisdemir ve Doç. Dr. Mehmet Onur Kaya'ya çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince yardımını esirgemeyen Sayın hocam Dr. Öğretim Üyesi Yunus Güral'a teşekkürlerimi sunarım.

Sadece dinlemekle kalmayıp, aynı zamanda pratik çözümler sunarak ve moral vererek de beni destekleyen, yanımda olduğunu hissettiren sevgili arkadaşım Dr. Seda Beyaz'a,

Lise öğrenimimden bu yana arkadaşım olan ve her konuda yardımını esirgemeyen sevgili kardeşim Mühendis Leyla Aydınolu'na,

Tez sürecimde sonsuz destek ve yardımlarıyla her an yanımda olan sevgili ekip arkadaşım, kardeşim Öğretim Görevlisi Tuba Şekerci'ye,

Doktora dönemimde gösterdiği fedakârlık ve özveri için Burak Tepe'ye teşekkür ediyorum.

Aynı zamanda değerli bilgi ve deneyimleriyle bu zamana kadar İstatistik Bilimine katkı sağlayan kıymetli hocalarıma da en içten duygularıyla teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımda hep ilk sırada olmalarına rağmen bu son satıra yerleşen aileme yürekten teşekkür ederim.

Mine DOĞAN
ELAZIĞ, 2024

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ	ix
1. Giriş	1
2. MATERYAL VE METOT	6
2.1. Hazard Oranı	6
2.2. Arızaya Kadar Geçen Ortalama Süre: Mean Time to Failure (MTTF)	6
2.3. Güvenilirlik.....	7
2.4. Bileşenler Yardımıyla Tanımlanan Sistemler	7
2.5. Tutarlı Sistem	8
2.6. Seri Bağlantı	8
2.7. Seri Sistemlerin Yapı Fonksiyonu	9
2.8. Paralel Bağlantı	9
2.9. Karma Sistemler	11
2.10. n 'den k çıkışlı sistemler	11
2.11. Poisson Geliş Akımı	13
2.12. Geliş Anları	17
2.13. Doğum Süreci	21
2.14. Hizmet Süreci	23
2.15. En Küçük Kareler Yöntemi	30
3. BULGULAR.....	36
3.1. Teknik Sistemler Üzerine Bazı Paradokslar ve Çözüm Önerileri.....	36
3.2. Teknik Sistemin Stres Altında İncelenmesi.....	37
3.3. Sistem Bileşenlerinin Yaşam Sürelerinin Dağılımı	39
3.4. Bozulma Anları Arttırıldığında Bileşenlerin Dağılımı	42
3.5. Geometrik Süreç	42
3.6. Doğal Stres ve Ortalama Yaşam Süresi	43
3.7. Yenileme veya Bakım Durumlarında Ortalama Hesabı	45
3.8. Stres Faktörünün Geometrik Yorumu	48
3.9. Stres Faktörünün Diferansiyel Yorumu	55
4. SONUÇ.....	58
5. TARTIŞMA	63
6. ÖNERİLER.....	65
KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Stres altında çalışan teknik sistemlerin analizi

Mine DOĞAN

Doktora Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Mayıs 2024, Sayfa: ix + 68

Modern teknolojinin temelini oluşturan ve birçok farklı alanda kullanılan teknik sistemler, farklı bileşenlerin bir araya gelerek belirli bir amacı gerçekleştirmek üzere tasarlandığı ve işlevlerini yerine getiren yapılar olması nedeniyle oldukça önemli bir inceleme alanına sahiptir.

Bu çalışma temel olarak stres altında çalışan teknik sistemlerin güvenilirliklerinin hesaplanması ile ilgilidir. İdeal çalışma ortamlarında bulunan sistemler planlandıkları şekilde belirlenen ortalama süre kadar çalışabilirler. Ancak yaşlanma, çevresel bozulma veya çalışma koşulları gibi çeşitli faktörler nedeniyle bu ortalama azalabilir.

Çalışmanın ilk kısmı güvenilirlik hesabında önemli bir materyal olan sıra istatistiklerine ayrılmıştır. Bu bölümde dağılım fonksiyonunun isteğe bağlı deformasyonunun nasıl gerçekleştirileceği fikri üzerinde durulmuştur. Burada ki temel bağlam tüm dağılımların sabitin dağılım fonksiyonundan türediğidir. İkinci kısım sistemi etkileyen stresin yapı üzerine nasıl yerleştirileceğinin incelenmesine ayrılmıştır. Bu inceleme çalışmada üç temel şekilde gerçekleştirilmektedir. Birincisi stres etkisi yapıya şartlı ortalama yerine yönlü ortalama olarak uyarlanmıştır. İkincisinde ise stres faktörleri azalan bir fonksiyon olarak yapıya uyarlanmış ve son olarak da stresin diferansiyellenebilen olabileceği dikkate alınarak yapıya uyarlanmıştır. Tüm durumlarda sayısal örnekler sunularak uyarlanan yapıların uygunluğu gösterilmeye çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Teknik sistem, Stres-dayanıklılık modeli, İstatistiksel dağılım modelleri, Sistem güvenilirliği, Güvenilirlik

ABSTRACT

Analysis of technical systems working under stress

Mine DOĞAN

Ph.D. Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

May 2024, Pages: ix + 68

Technical systems, which form the basis of modern technology and are used in many different fields, have a very important field of study because they are structures where different components come together and are designed to achieve a specific purpose and fulfill their functions. This study is concerned with calculating the reliability of technical systems operating under stress. Systems in ideal operating environments can operate as planned for the average specified time. However, this average may decrease due to various factors such as aging, environmental degradation, or working conditions.

The first part of the study is devoted to order statistics, which is an important material in reliability calculations. This section focuses on how to perform arbitrary deformation of the distribution function. The basic context here is that all distributions derive from the distribution function of the constant. The second part is devoted to examining how the stress affecting the system will be placed on the structure. This analysis is carried out in three basic ways in the study. First, the stress effect is adapted to the structure as a directional average instead of a conditional average. In the second, the stress factors were adapted to the structure as a decreasing function. Finally, they were adapted to the structure while accounting for the possibility of stress being differentiable. In all cases, numerical examples have been presented to demonstrate the suitability of the adapted structures.

Keywords: Technical system, Reliability, Stress-strength model, Statistical distribution models, System reliability

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1. n bileşenden oluşan seri bağlı sistem	9
Şekil 2.2. n bileşenden oluşan paralel bağlı sistem	10
Şekil 2.3. Karma sistem yapısı	11
Şekil 2.4. 3'den 2 çıkışlı F sistem yapısı	12
Şekil 3.1. Sabitin dağılım fonksiyonu	46
Şekil 3.2. F(t) dağılım fonksiyonun grafiği	47
Şekil 3.3. Eğimi sabit olmayan stres faktörü	49
Şekil 3.4. Sabit eğime sahip stres faktörü	50
Şekil 3.5. Azaltma faktörünün açıyla ilişkilendirilmesi	53
Şekil 3.6. Azalma faktörünün iki strese bağlı olarak değişimi	62

TABLolar LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 2.1. Bağlantı şekillerinin yapı fonksiyonları ve güvenilirlikleri	12
Tablo 3.1. Farklı anlarda paralel bağlı ve iki bileşenli sistemin güvenilirliği	41
Tablo 3.2. Belirlenen anlarda R^* için hesaplanan yüzdeler.....	41
Tablo 3.3. Zamana göre hesaplanan güvenilirlikler	51
Tablo 3.4. Stres ortamındaki sistemin bazı şartlı güvenilirlik değerleri.....	52
Tablo 3.5. $t=10$ alınarak hesaplanan stres altındaki güvenilirlikler	54
Tablo 3.6. u için bazı sayısal değerler	57
Tablo 4.1. Normal ve stres durumlarında a süresi üzerinden hesaplanan şartlı ortalamalar	60
Tablo 4.2. Zamana göre gözlenen stres değerinden hesaplanan model parametreleri	61

1. GİRİŞ

Güvenilirlik genellikle bir bileşenin veya genel olarak belirli bir süre boyunca bir dizi bileşenin düzgün işleyişine olan güven derecesini ifade eder. Güvenilirlik, kullanım bakımından yüzdeler olarak ölçüldüğünden tüm güvenilirlik ilişkileri olasılık teorisine dayanır. Sistem güvenilirliği tek bir bileşenin güvenilirliğinin tahmininden daha karmaşıktır. Bu karmaşıklığı çözebilmek için başlangıçta sistem, kendisini temsil eden bileşenlerine ayrılır. Daha sonra bileşenlerin güvenilirlikleri bileşenlerin sistemi tanımlama şekillerine göre tanımlanan kurallarla birleştirilerek sistem güvenilirliği tahmin edilebilir. Her bir bileşenin güvenilirliğinin eldeki istatistiksel verilere dayanarak ve başarısızlık oranı için bir model seçilerek hesaplanması ve ardından eldeki verilere göre parametrelerinin tahmin edilmesi önemli bir süreçtir. Güvenilirliği artırmak için sistemlerin çok sayıda istatistiksel özellikleri incelenebilir.

Güvenilirlik, doğal olarak bir sistemin çalışır durumda olma olasılığıdır. Bu durumda güvenilirlik derecesini tespit edebilmek için, bir bileşenin başarılı çalışma süresi de dikkate alınmalıdır. İlk arızalanma durumuna kadar geçen süre sistemin kesintisiz çalışma süresidir. Bu nedenle kesintisiz çalışma süresi veya ilk arızalanma anı önemli bir tesadüfi değişkendir T . Matematiksel olarak ifade edilecek olursa bu durum bir bileşenin veya bütünde sistemin $t = 0$ anında sahip olduğu özellikleri $t > 0$ iken de göstermesidir. Bu durumda güvenilirlik aşağıdaki gösterimle ifade edilebilir,

$$R(t) = P\{T > t\}$$

Burada T çalışma veya yaşam süresini gösterir. Bu değişkenin üzerinden zaman faktörünün haricinde herhangi bir olumlu veya olumsuz etkinin olmadığı kabul edilir. Ancak gerçekte her zaman bu durum sağlanamaz. Herhangi bir sistemde, bileşenlerinin birlikte çalışması, performansları ve bireysel özellikleri de önemlidir [1].

Güvenilirliği tahmin etmek günümüze kadar olan literatürde önemli bir araştırma alanı olmuştur. Literatüre bakıldığında çeşitli araştırmacılar farklı istatistiksel yöntemlerle bu türlü problemlere çözüm bulmaya çalışmışlardır.

Güvenilirlik analizinde önemli sorunlardan biri, stres-dayanıklılık modellerinde güvenilirliğinin tahminidir. Tek bir bileşen üzerinden bakıldığında doğal çalışma ortamında ortalama çalışma süresi ve dağılımı belli olan bileşenin çalıştığı ortamda herhangi bir strese maruz kaldığında çalışma süresi kısalmaktadır. Bu durum sistemi ve doğal olarak sistemin güvenilirliğini direkt olarak etkiler. Ancak her durumda stres altında çalışan bir sistemin güvenilirliğini hesaplamak o kadar da kolay değildir.

Literatürde istatistiksel dağılımları kullanarak stres-dayanıklılık modelinde güvenilirlik analizini gerçekleştiren çalışmalar mevcuttur. Şu ana kadar stres-dayanıklılık güvenilirliği ile ilgili

yapılan çalışmalarda genellikle stres ve dayanıklılığın Üstel, Weibull, Normal, Gamma, Burr, Pareto gibi aynı dağılım ailesine ait tesadüfi değişkenler olduğu durum incelenmiştir. Bu çalışmalarda dağılımların en çok olabilirlik tahmin edicisi kullanılmıştır. Literatürde stres-dayanıklılık modellemesinin temelleri [2-3] tarafından yapılan çalışmalar ile atılmıştır. Birnbaum'un [2]'de ki çalışmasında, Mann ve Whitney'in [4] tarafından yapılan çalışmadan faydalanılarak, $R=P\{Y<X\}$ olasılığına ilişkin bir tahmin önerilmiştir. Birnbaum ve McCarty'in [3]'de yapılan çalışmasında ise $R=P\{Y<X\}$ olasılığının güven aralığı üzerine bir çalışma yapılmıştır. Owen vd. [5]'de güvenilirliğin tahmini üzerine önemli çalışmalar yapmıştır. Çalışma süresi üstel dağılıma sahip bileşenlerden oluşan sistem için çeşitli tahmin yöntemleri tartışılmıştır [6-7-8]. Bunu takip eden araştırmalarda stres ve dayanıklılık modelleri için farklı istatistiksel olasılık dağılımları kullanılmaya çalışıldı. Awad ve Gharraf [9]'da stres ve dayanıklılık Burr dağılımına sahip olduğunda güvenilirliği tahmin etmiştir. Stres ve dayanıklılık bağımsız gama dağılımına sahip olduğunda güvenilirliği tahmin etmek için bir yöntem Constantine vd. [10] tarafından tartışılmıştır. Baklizi [11]'de güvenilirliği kayıt değerlerine dayalı olarak tahmin etme problemini ele almıştır. Kundu ve Raqap [12]'de güvenilirliği ortak şekil ve konum parametrelerine ancak farklı ölçek parametrelerine sahip üç parametrelili Weibull dağılımı ile tahmin etmiştir.

Genel olarak sistem, özel olarak teknik sistem: Malzeme, enerji ve bilgi gibi bazı girdileri belirli bir amaç doğrultusunda dönüştüren, taşıyan veya kontrol eden bir dizi birbirine bağlı bileşenlerden oluşur. Her sistemin yapısı amaçlara bağlı olarak farklılık gösterir. Bu farklılık teknik sistemlerde temel bileşenlerin bağlantısı olarak düşünülebilir.

Teknik sistemler tamamen çıktıya yani üretime odaklıdır. Sistemin optimizasyonu maksimum üretimi hedef alır. Bu hedefe ulaşabilmek için sistemin bileşenlerinin çalışma sürelerinin maksimum yapılması beklenir. Doğal olarak optimizasyon problemi sistemi oluşturan bileşenlerin kesintisiz çalışma sürelerinin maksimumuna indirgenir. Problemin çözülebilmesi için sistemin iyi tasarlanmış ve ölçülebilir olması önemlidir [13].

Teknik bir sistem veya bileşen, basınç, sıcaklık ve nem gibi rastgele oluşan çevresel streslere maruz kaldığında sistemin yaşam süresi büyük ölçüde dayanıklılığına bağlıdır. Teknik bir sistemin çalışma performansı, çalışma süresi boyunca oluşan dış etkiler nedeniyle, azalma gösterebilmektedir. Bu nedenle sistemin stres altındaki ortalama kesintisiz çalışma süresinin hesaplanması, sistemin verimli çalışmasını etkileyen dış faktörlerin göz önüne alınması açısından oldukça önemlidir. Teknik bir sistemin çalışma performansının değerlendirilmesinde, teorik olarak en önemli göstergelerden biri şüphesiz ortalama kesintisiz çalışma süresidir. Doğal olarak kesintisiz çalışma süresi üretim aşamasında planlanır. Ancak stres altında azalan kesintisiz çalışma süresinin de dağılımının oluşturulması oldukça önemlidir [14]. Gerçek uygulamalardaki teknik sistemlerin sürekli çalışma süreleri, sadece sistemi oluşturan bileşenlerin çalışma süreleri ile ilişkilendirilmez. İlk kez çalışmaya başlayacak bir sistem, üretim aşamasında çeşitli testler yardımıyla hesaplanan bir

çalışma ömrüne sahiptir. Ancak bu süre sistemin çalışmaya başlamasından itibaren dış baskılar sonucunda beklenenden daha az olabilir. Bu nedenle sistemin ortalama çalışma süresi, maruz kaldığı stres dikkate alınarak hesaplanmalıdır. Bu tür teknik sistemlere stres-dayanıklılık modelleri denir. Bu metnin ikinci bölümünün ilk aşamasında bu duruma detaylı olarak yer verilecektir.

Tüm tahmin teknikleri arasında stres-dayanıklılık modelinin parametre tahmini literatürde en popüler olanıdır. Bu popülerliğin nedenlerinden biri, mekanik bileşenlerin arıza davranışını temsil etmesi ve gerçek değerleri tahmin etmedeki hata payının diğer tahmin tekniklerine göre daha küçük olmasıdır. Öte yandan, stres-dayanıklılık güvenilirliği yöntemi, stres altındaki belirsizlikleri ortadan kaldırmayı amaçlar ve daha gerçekçi sonuçlar sunar. Güvenilirlik dayanıklılığın bir ölçüsü, risk ise maruz kalınan stresin bir ölçüsüdür. Stres-dayanıklılık analizinin amacı, dayanıklılığı ve stresi tanımlanan varlık için güvenilirlik ve riski ölçebilmektir. Söz konusu bu ölçüm, stres-dayanıklılık parametreleri olan güvenilirlik ve riskin tahmin edilmesiyle yapılır. Stres-dayanıklılık modelleri, bir sistemin stres altında ne kadar süre boyunca ne kadar kuvvetle çalıştığı veya bir sistemin belirli bir süre boyunca çalışma olasılığının ne kadar olduğu ile ilgilenir. Bir birimin gücü rastgele bir değişken olarak ele alınabilir. Belirsizlik nedeniyle, birimin stresi de çalışma bağlamında rastgele bir değişken olarak ele alınmalıdır.

Stres-dayanıklılık analizinin bazı kullanım alanları [15]'de açıklanmıştır. Sistemlerde, rastgele stresi (X) olan bir ana bileşenin güvenilirliği, rastgele dayanıklılık (Y) ile ilişkilendirilir. Bileşenin güvenilirliği, dayanıklılığın stresten fazla olma olasılığı ile ölçülür. X ve Y 'nin iki cihazın ömrünü temsil ettiği ve bir cihazın diğerinden önce arızalanması olasılığının tahmin edilmek istendiği durumlarda stres-dayanıklılık ilişkileri kullanılmaktadır. Paralel ya da seri sistemlerin güvenilirlikleri sırasıyla $P(X < \max(Y_1, \dots, Y_k))$ ve $P(X < \min(Y_1, \dots, Y_k))$ olarak ifade edilmek üzere, sistemlerin güvenilirlik çalışmalarında bu olasılıkların tahmini ile ilgilenilir [16]. Sistemin veya her bileşenin durumu, çalışma durumunu veya arıza durumunu gösteren yalnızca iki olası değeri alan bir tesadüfi değişkendir, $1 \leq i \leq n$ için i -inci bileşenin durumu şu şekilde verilir,

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{eğer } i - \text{inci başarılıysa} \\ 0 & \text{eğer } i - \text{inci başarızsa} \end{cases}$$

Çalışma süresinin sonsuz olduğu gerçek bir teknik sistem mümkün değildir. Ancak öngörülen toleranslar dahilinde kalan teknik sistemler üretim aşamasında planlanan ortalama yaşam sürelerine sahip olurlar. Stresler belirli bir eşik değeri geçmediği takdirde çok uzun süre çalışabilirler; öte yandan, stresler eşiği aşarsa, başarısız olabilirler. Bu nedenle, sisteme uygulanan stres, öngörülen toleranslar dahilinde çalışması veya arızalanmasında önemli bir rol oynar. Stres, çeşitli nedenlerden veya durumlardan kaynaklanabilir. Örneğin basınç, yük, hız, direnç, sıcaklık, nem, titreşimler ve voltaj, sistemin çalışmasında olumsuz etki yapabilecek olası faktörlerdir. Böylece rastgele güç bileşenlerinden oluşan bir sistem, gücünü rastgele bir değişken olarak alacak

ve ona uygulanan stres de rastgele bir değişken olacaktır. Uygulanan bir stres sistemin dayanıklılığını aştığında bir sistem başarısız olur. Bu tür sistemlere stres-dayanıklılık güvenilirlik modelleri denir. Bu tür modeller, yapısal güvenilirlik çalışmasında önemli bir rol oynar - bir yapının güvenliği için doğal bir kriter, güvenilir olmasıdır. X ve Y sırasıyla bir bileşene uygulanan stresi ve dayanıklılığı ifade ediyorsa, bileşenin güvenilirliği aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$R = P(X < Y)$$

Böylece uygulanan stres rastgele bir değişken olacaktır,

$$P(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F_y(x)dx$$

Burada, $f(x)$ = X değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$F_y(x)$ = Y değişkeninin dağılım fonksiyonudur.

Stres-dayanıklılık güvenilirliğine ilişkin çalışmalarda sıklıkla ele alınan bir diğer varsayım ise stres ve dayanıklılık rasgele değişkenlerinin bağımsız yapıda oldukları varsayımdır. Stres ve dayanıklılık rasgele değişkenlerinin bağımsız oldukları varsayımı altında gerçekleşen çalışmalar bulunmaktadır [8-17-15-18-19-20].

Stres-dayanıklılık modellemesinde bileşen güvenilirliğinden sistem güvenilirliğine geçiş, sistem tasarımına bağlı olarak elde edilen güvenilirlik fonksiyonu üzerinden sağlanmaktadır. Sistem güvenilirliğinin stres-dayanıklılık perspektifinden ele alınması ile sisteme ilişkin dayanıklılık rasgele değişkeni, sistemi oluşturan bileşenlerin dayanıklılık rasgele değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir hale gelmektedir [21]. Stres-dayanıklılık parametresinin tahmini, güvenilirlik analizinde çok önemli bir rol oynar. Örneğin, X değişkeni sistemin maruz kaldığı gücü ve Y değişkeni stresi temsil ediyorsa, o zaman $R(t)$ parametresi sistem performansını ölçer. Ayrıca, $R(t)$ parametresi, uygulanan gerilim sistemin gücünden büyükse sistem arızası olasılığını temsil eder.

Günümüzde, stres-dayanıklılık güvenirliliği tahminindeki çalışmaların çoğu, stresin veya dayanıklılığın veya her ikisinin de zamanla değiştiiği duruma ve dolayısıyla zamana bağlı stres-dayanıklılık güvenilirliği terimine odaklanmaktadır. Zamana bağlı stres-dayanıklılık güvenilirlik modelleri [22-23-24-25] tarafından incelenmiştir. Zamana bağlı sistem güvenilirliği, bir sistemin çıktılarının ilgili bir süre boyunca öngörülen arıza eşiklerini aşmama olasılığı olarak hesaplanır. En yaygın zamana bağlı güvenilirlik yöntemi, Rice [26] tarafından geliştirilen ve günümüzde hala yaygın olarak kullanılan Rice formülüdür. Güncel literatürde zamana bağlı güvenilirlikte birçok gelişme gözlemlenmektedir. Örneğin, bileşen güvenilirlik problemleri için [27-28], Markov stokastik sürecini kullanarak zamana bağlı bir güvenilirlik analizi yöntemi geliştirdi. Singh vd.

[29]'da, zamana bağılı güvenilirliği yaklaşık olarak tahmin etmek için zaman serisi modelleme ve önem örnekleme yöntemi kullanılmıştır.

Sistem güvenilirliğinin hesaplanmasındaki bir diğer önemli öğelerinden biri ise sistem bileşenlerinin bozulmaları sonrası tamir edilebilir olup olmamasıdır. Çünkü güvenilirlik hesaplamalarındaki bozulma sürelerinin dağılımı bu özelliğe göre değişkenlik gösterebilir. Onarılabilir bir sistem, arıza durumunda bileşenlerinden en az birinin onarıldığı veya değiştirildiği bir sistemdir. Yalnızca ilk arızaya kadar onarılabilir olarak değerlendirilen bileşenler ve sistemler, onarılamaz olarak değerlendirilir. Sistem bileşenleri bozulma sonrası tamir edilebilir özellikte ise, bozulmalar arası süreler (interarrival failure time) dikkate alınırken, bozulma sonrası tamir edilemez özellikte ise bozulmaların gerçekleşme süreleri (time to failure) dikkate alınarak dağılım bulunur [30]. Teknik bir öğeye ilişkin güvenilirlik parametreleri şunlardır, ortalama arızaya kadar geçen süre (MTTF), zaman birimi başına arıza sayısı, arıza sıklığı, öğenin $(0, t]$ zaman aralığında arızalanmama olasılığı, hayatta kalma olasılığı, öğenin t zamanında çalışabilme olasılığı, t zamanında kullanılabilirliktir.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Hazard Oranı

Hazard oranı, aşağıdaki şekilde tanımlanır [31].

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} \quad (2.1)$$

Burada, $F(t)$ dağılım fonksiyonu, $f(t)$ ise yoğunluk fonksiyonudur. Dağılım fonksiyonuyla yoğunluk fonksiyonu arasında aşağıdaki ilişki, tesadüfi değişken sürekli olduğunda, mevcuttur.

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= f(t) \\ F(t) &= \int_{-\infty}^t f(x)dx \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bu durumda bir tesadüfi değişkenin dağılım fonksiyonu belli olduğunda hazard oranı rahatlıkla hesaplanabilir. Benzer şekilde hazard oranı belli olan bir tesadüfi değişken için dağılım fonksiyonu da elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{F'(t)}{1-F(t)} \\ F'(t) + \lambda(t)F(t) &= \lambda(t) \\ F(t) &= \exp(-\int \lambda(t)dt) \{ \int \exp(\int \lambda(t)dt) \lambda(t)dt + C \} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bu özellik bir tesadüfi değişken için oldukça önemlidir. Dağılım fonksiyonu belli olduğunda tehlike oranını hesaplayabildiğimiz gibi aksine tehlike oranı belli olan bir tesadüfi değişken için de dağılım fonksiyonunu dolayısıyla meydana gelecek olayların olasılıklarını rahatlıkla elde edebiliriz. Güvenilirlik analizinde, olasılık dağılım fonksiyonunun şekli yerine tehlike oranının şekline göre bir dağılım seçmek genellikle daha uygundur [31].

2.2. Arızaya Kadar Geçen Ortalama Süre: Mean Time to Failure (MTTF)

Ortalama arıza süresi, bozuluncaya kadar geçen ortalama süre veya kesintisiz ortalama çalışma süresi ifadeleri aynı şeyi söylemekle beraber aşağıdaki eşitlikle hesaplanır [31].

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^{\infty} t f(t)dt \\ E(T) &= \int_0^{\infty} R(t)dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

Burada, $f(t)$ yoğunluk fonksiyonu, $R(t)$ ise güvenilirliktir. Pozitif değer alan tesadüfi değişkenlerin ortalaması yoğunluk fonksiyonuyla hesaplanabildiği gibi dağılım fonksiyonu yardımıyla da hesaplanabilir.

$$E(T) = \int_0^{\infty} (1 - F(t))dt \quad (2.5)$$

2.3. Güvenilirlik

Güvenilirlik, sadece teknik sistemlerle kısıtlanacak bir ifade değildir. Aksine daha geniş bir yelpazeyi ilgilendirir. Örneğin üretim sistemlerinde ürün kalitesinin iyileştirilmesi, ticari bir yatırımın optimal gelir düzeyine ulaştırılması gibi konularda bu yelpazenin içindedir. Literatüre bakıldığında Shewhart [32]'de istatistiksel süreç kontrolü anlayışını ortaya koymuştur. İkinci dünya savaşı yıllarında kullanılan savaş ekipmanlarının özellikle savaş uçaklarının güvenilirliği daha bir ön plana çıkmıştır. Wald vd. [33] birçok araştırmacı savaş uçaklarının hasarlı ve hassas gövde elemanlarının verilerine dayanarak geri dönüş sürelerinin ortalamasını araştırmıştır.

Teorik olarak bakıldığında istatistiksel olarak güvenilirlik, yapılan deneyin tutarlılığıdır diyebiliriz. Doğal olarak bu tutarlılığı deneyi yaparken kullanılan ölçüm araçları etkilediği gibi veriler analiz edilirken kullanılan yöntemlerin sağlamlılığı da etkiler. Dolayısıyla güvenilirlik, bir birimin, belirlenen çalışma koşulları altında belirli bir süre boyunca amaçlanan işlevlerini tatmin edici bir şekilde yerine getirme olasılığı olarak da görülebilir. Buna göre güvenilirlik bir olasılık ölçüsüdür. Olasılık teorisi, bileşenlerin güvenilirliğinin yanı sıra bu bileşenlerden oluşan sistemlerin güvenilirliğini analiz etmek için kullanılabilir [34]. Bu bağlamda dört önemli faktör mutlaka dikkate alınmalıdır. Bir cihazın güvenilirliği bir olasılık olarak ifade edilir, cihazın yeterli performans göstermesi gerekmektedir, yeterli bir performans süresi belirtilir, sıcaklık, nem, stres, şok ve bunun gibi çevre koşullarının veya çalışma koşullarının önemi belirtilir [35].

2.4. Bileşenler Yardımıyla Tanımlanan Sistemler

Teknik sistemler, sistemi oluşturan bileşenlerin bağlantı şekillerine göre farklı yapılarda ortaya çıkmaktadır. Temelde bir bileşenin çalışma süresi X bir tesadüfi değişkendir. Dağılımı belirlendiğinde sistemin çalışma süresini veya güvenilirliğini hesaplayabilmek için sistemin bağlantı şeklini temsil eden yapı fonksiyonuna ihtiyaç duyulur.

Her bir bileşenin arızalı veya çalışır durumda olup olmasını aşağıdaki şekilde temsil edelim.

$$x_i = \begin{pmatrix} 1, & i - \text{inci bileşen çalışır} \\ 0, & i - \text{inci bileşen bozuk} \end{pmatrix}$$

Bu durumda $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörü sistemdeki makinaların çalışıp çalışmadığını gösteren bir durum vektörüdür. Benzer şekilde sistem içinde aşağıdaki tanımlama yapılır.

$$\phi(X) = \begin{pmatrix} 1, & \text{sistem çalışır} \\ 0, & \text{sistem bozuk} \end{pmatrix}$$

Bileşenin çalışma olasılığı p ve bozulma olasılığını q ile gösterelim $p = 1 - q$.

$X_i(t)$ i-inci bileşenin t anındaki durumunu gösterebilir

$$\begin{aligned} E[X_i(t)] &= 0 \cdot \Pr(X_i(t) = 0) + 1 \cdot \Pr(X_i(t) = 1) \\ &= p_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ için} \end{aligned}$$

Benzer şekilde sistem için, aşağıdaki ortalama yazılabilir,

$$p_s(t) = E(\phi[X(t)])$$

2.5. Tutarlı Sistem

Genelde yapı fonksiyonu analitik olarak verilebilen sistemlere tutarlı sistemler denir. Yapı fonksiyonu tutarlı bir sistem için oldukça önemli bir araçtır. Analiz ihtiyaçları farklılaştıkça yapı fonksiyonu üzerine bu ihtiyaçları temsil eden birçok parametre eklenebilmektedir. Örneğin, $\phi(x)$ in yukarıdaki tanımına bakıldığında değeri sadece sıfır veya birdir. Bu yazılımda zaman parametresi yoktur. Ancak eklenebilir $\phi(x(t))$. Bu fonksiyon bu halde $p_i(t)$ ile ilintilidir. Bu terim ise i-inci bileşenin t anındaki çalışma olasılığıdır. Bu açıdan bakıldığında yapı fonksiyonu üzerine ihtiyaca yönelik birçok ekstralar eklenebilir. Ancak temelde yapı fonksiyonunun sağlanması gereken en önemli kısıtlar şunlardır [34]. $\phi(0) = 0$, bütün bileşenler çalışmadığında sistem de çalışmaz. $\phi(1) = 1$, bütün bileşenler çalıştığında sistem de çalışır.

2.6. Seri Bağlantı

Seri bağlantı, sistem bileşenlerinden en az birinin arızalanması durumunda tüm sistemin arızalanacağı bir tasarımdır (Şekil 2.1). Temel olarak seri bağlantılı bir sistem ilk arızalanan bileşenle beraber bozuk duruma geçer. Kısaca bu durumu, sistemin seviyesi düşüktür şeklinde ifade ederiz. Sistemlerin çoğu, seviyeleri bir dizi konfigürasyonda düzenlenen temel alt sistemlere sahiptir. Örneğin, seri halinde birkaç bileşenden oluşan bir sistem herhangi bir bileşenin arızalanması durumunda tüm sistemin arızalanmasına neden olacaktır.



Şekil 2.1. n bileşenden oluşan seri bağlı sistem

T_i i . bileşenin yaşam zamanı ve T sistemin yaşam zamanı olarak ifade edilirse, seri bağlı n adet bileşenden oluşan bir sistemin yaşam zamanı aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$T = \min\{T_1, \dots, T_n\}$$

2.7. Seri Sistemlerin Yapı Fonksiyonu

Seri sistemlerde bileşen sayısı arttıkça sistemin güvenilirliği doğal olarak azalır. Bileşenlerin güvenilirliği ne kadar yüksek olursa sistemin güvenilirliği de o ölçüde yüksek olur. Sistem güvenilirliğinin, her bir bileşenin güvenilirlikleri çarpımı ile elde edildiği düşünülürse, sisteme yeni bileşenler eklemek sistemin güvenilirliğinin azalmasına katkı sağlar. Bu durumda sistem güvenilirliği, en küçük güvenilirliğe sahip bileşenden daha düşüktür. Kısaca çalışma zamanları X_1, \dots, X_n olan n bileşenden oluşan bir seri sistemde sıra istatistikleri $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ şeklinde gösterilsin. Bu durumda sistemin çalışma süresi $X_{1:n}$ tesadüfi değişkenidir. Yapı fonksiyonu ise, aşağıdaki şekildedir,

$$\phi[X(t)] = \prod_{i=1}^n X_i(t)$$

Bu durumda sistem güvenilirliği aşağıdaki şekilde olur,

$$h[p(t)] = E(\phi[X(t)]) = E(\prod_{i=1}^n X_i(t)) = \prod_{i=1}^n E[X_i(t)] = \prod_{i=1}^n p_i(t) \quad (2.6)$$

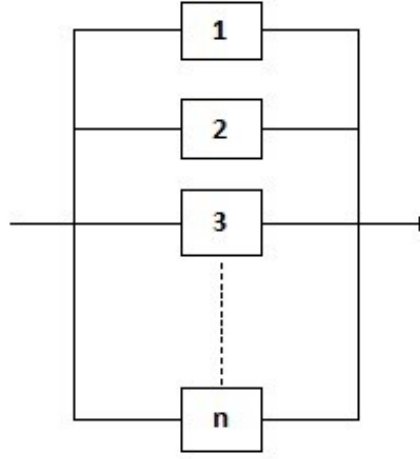
Burada $h[p(t)]$ ile sistemin güvenilirliği gösterilmiştir. $E_i(t)$, i bileşenin t zamanında çalışıyor olması olayı olsun $\Pr[E_i(t)] = p_i(t)$,

$$h[p(t)] = \Pr[E_1(t) \cap E_2(t) \cap \dots \cap E_n(t)]$$

$$\Pr[E_1(t)] \Pr[E_2(t)] \dots \Pr[E_n(t)] = \prod_{i=1}^n p_i(t) \quad (2.7)$$

2.8. Paralel Bağlantı

Teknik bir sistem, tüm bileşenleri arızalandığında bozuluyorsa paralel bağlantılıdır denir (Şekil 2.2.). Paralel bağlantılı sistemin şekli aşağıdaki gibidir,



Şekil 2.2. n bileşenden oluşan paralel bağlı sistem

T_i i . bileşenin yaşam zamanı ve T sistemin yaşam zamanı olarak ifade edilirse, paralel bağlı n adet bileşenden oluşan bir sistemin çalışma süresi aşağıdaki şekilde yazılır,

$$T = \max\{T_1, \dots, T_n\}$$

Paralel sistemlerde, sistemin çalışır durumda olması için bir bileşenin çalışıyor olması yeterlidir. Diğer bileşenlerinde çalışıyor olması sadece sistem güvenilirliğini artırır. Dolayısıyla paralel bir sistemde güvenilirliği arttırmak için sisteme yeni bileşenler eklemek yeterlidir [36]. Çalışma süreleri T_1, \dots, T_n olsun. Bu durumda sistemin çalışma süresi maksimum sıra istatistiği olur,

$$T = T_{n:n}$$

Bileşenlerin durumunu X_j $j = 1, \dots, n$ ile gösterelim. Tüm bileşenlerin bozuk olma olayını aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz,

$$\{X_1 = 0\} \cap \dots \cap \{X_n = 0\}$$

Bu durumda sistem güvenilirliği aşağıdaki şekildedir,

$$R = T_{n:n}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t) \quad (2.8)$$

Burada $F_i(t)$ i -inci bileşenin yaşam süresini gösteren tesadüfi değişkenin dağılım fonksiyonudur. Sistemin yapı fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$\phi[X(t)] = \prod_{i=1}^n X_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - X_i(t)]$$

$$h[p(t)] = E(\phi[X(t)]) = 1 - \left(\prod_{i=1}^n (1 - E[X_i(t)]) \right) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - p_i(t)]$$

$$h[p(t)] = \prod_{i=1}^n p_i(t) \quad (2.9)$$

$E_i^*(t)$ olayı i bileşenin t anında başarısız durumda olması olsun $\Pr[E_i^*(t)] = 1 - p_i(t)$ ve

$$1 - h[p(t)] = \Pr[E_1^*(t) \cap E_2^*(t) \cap \dots \cap E_n^*(t)]$$

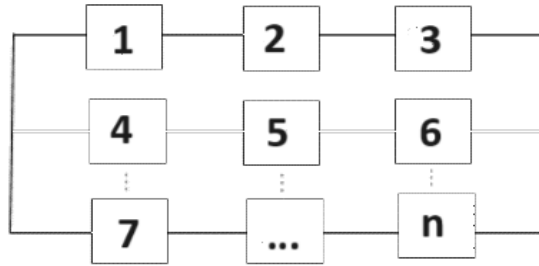
$$\Pr[E_1^*(t)]\Pr[E_2^*(t)] \dots \Pr[E_n^*(t)] = \prod_{i=1}^n [1 - p_i(t)]$$

$$h[p(t)] = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - p_i(t)] \quad (2.10)$$

Bu doğrudan yaklaşım, seri ve paralel yapılar için uygun, ancak daha karmaşık yapılar için zordur. Her iki sistem karşılaştırıldığında, seri sistemlerdeki güvenilirlik bu sistemdeki en zayıf olan tek bir bileşenin güvenilirliğinden bile daha küçük iken, paralel sistemin güvenilirliği ise en yüksek olan bileşenden bile daha yüksektir [37].

2.9. Karma Sistemler

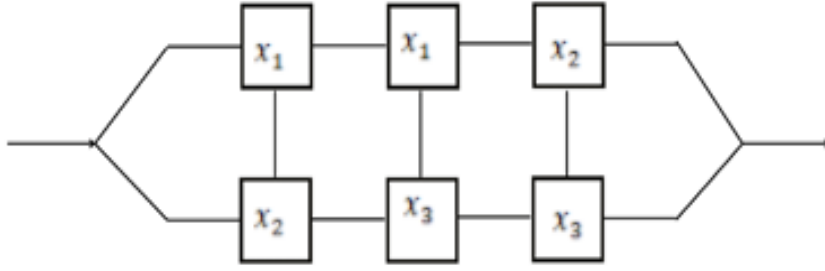
Karma sistemler, seri ve paralel sistemlerin bir arada bulunduğu yapılarıdır (Şekil 2.3). Bu tür sistemlerde güvenilirlik hesaplamaları yaparken seri ve paralel sistemlerin güvenilirlik hesaplamalarından yararlanır.



Şekil 2.3. Karma sistem yapısı

2.10. n' 'den k çıkışlı sistemler

n bileşenli bir teknik sistemde sistemin çalışması için en az k tane bileşenin çalışması gerekiyorsa sistem n' 'den k çıkışlı G sistem olarak adlandırılır. En fazla k tane bileşen bozulduğunda sistem bozuluyorsa bu tip sisteme de n' 'den k çıkışlı F sistem denir (Şekil 2.4). Özel olarak n bileşenli seri sistem n' 'den 1 çıkışlı F sistemidir. n bileşenli paralel sistemde n' 'den n çıkışlı F sistemidir. Örnek olarak, 3'üden 2 çıkışlı bir F sistemi aşağıdaki şekilde şematize edilebilir,



Şekil 2.4. 3'den 2 çıkışlı F sistem yapısı

$$\phi(X) = 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_1x_3)(1 - x_2x_3) \quad (2.11)$$

Aşağıdaki Tablo 2.1'de sık kullanılan bazı bağlantı şekillerinin yapı fonksiyonları ve güvenilirlikleri verilmiştir,

Tablo 2.1. Bağlantı şekillerinin yapı fonksiyonları ve güvenilirlikleri

Sistem	Yapı Fonksiyonu	Güvenilirlik
Seri	$\phi(x) = \prod_{i=1}^n x_i = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$P\left(\sum_{i=1}^n X_i = n\right)$
Paralel	$\phi(x) = \prod_{i=1}^n x_{i=} \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 1\right)$
n'den k çıkışlı F	$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n X_i > n - k \\ 0, & \sum_{i=1}^n X_i \leq n - k \end{cases}$	$P\left(\sum_{i=1}^n X_i > n - k\right)$
n'den k çıkışlı G	$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n X_i \geq k \\ 0, & \sum_{i=1}^n X_i < k \end{cases}$	$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq k\right)$
Ardışık n'den k çıkışlı F	$\phi(x) = \prod_{i=1}^{n-k+1} (1 - \prod_{j=i}^{i+k-1} (1 - x_j))$	$P(L_n^0 < k)$
Ardışık n'den k çıkışlı G	$\phi(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n-k+1} (1 - \prod_{j=i}^{i+k-1} x_j)$	$P(L_n^1 \geq k)$

2.11. Poisson Geliş Akımı

Poisson stokastik sürecinin Markov teorisinin gerek başlangıcı gerekse gelişiminde oynadığı rol oldukça önemlidir. Markov modelleri Poisson sürecinin doğal bir uygulama alanı olarak rahatlıkla görülebilir. Bunun rahat anlaşılabilmesi için ilk önce Poisson dağılımının tanımını göz önünde bulundurmakta büyük önem vardır. Poisson tesadüfi değişkeni doğal sayılarda değer alan bir değişkendir. Gerçek hayatta Poisson tesadüfi değişkeni ile eşleşen değişkenlerin başında bir gözlemlerde gerçekleşen ve ortak bir özelliğe sahip olayların sayısı gelmektedir. Binom dağılımının Poisson dağılımına yaklaşmasının reel yaşamdaki örnekleri de bunu desteklemektedir. Yapılan bir gözlemlerde ilgilenilen değişkene ait durum ya hiç gözlenmez ya da bir veya birden fazla sayıda gözlenebilir. Bu olayların gerçekleşme olasılıkları $n = 0, 1, 2, \dots$ için Poisson dağılımında devamdaki şekilde tanımlanır,

$$Pr\{X = n\} = e^{-\lambda} \lambda^n / n! \quad (2.12)$$

Bu eşitlikte $\lambda > 0$ dağılımın parametresi ve X Poisson dağılımına sahip tesadüfi değişken olarak adlandırılır. Poisson dağılımının beklenen değeri λ parametresine eşit olduğundan bu parametre ortalama gözlem sayısı olarak da yorumlanmaktadır.

Poisson tesadüfi değişkeninin aldığı değerler reel uygulamalarda genel olarak gözlemlenen olay sayısı şeklinde kabul edildiğinden belli bir zaman dilimi içerisinde gerçekleşmesi doğaldır. Bu olgu Poisson dağılımında λ parametresinin yanı sıra bir gözlem zamanı parametresinin de olması gereksinimini ortaya çıkartmıştır. Bu gereksinim zamana bağlı Poisson sürecinin tanımlanmasını zorunlu hale getirmiştir. Bu durumda Poisson dağılımına sahip X tesadüfi değişkeni belli bir gözlemlerde gerçekleşen olay sayısını gösterirken X_t , $t > 0$ tesadüfi değişkeni ise başlangıçtan t zamanına kadar gözlemlenen olay sayısını göstermektedir. Bu tesadüfi değişkende kullanılan zaman parametresinin her bir sabit değeri için X_t tesadüfi değişkeni λt parametrelili Poisson dağılımına sahiptir. Böylelikle X_t tesadüfi değişkeni zamana bağlı bir süreç oluşturur. Her bir olayın gerçekleşme olasılığı ise devamdaki şekilde tanımlanır,

$$Pr\{X_t = n\} = e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n! \quad (2.13)$$

Olasılıkları bu şekilde verilen $\{X_t: t > 0\}$ süreci Poisson stokastik süreci olarak adlandırılır. Bu sürecin beklenen değeri λt olduğundan bu değer başlangıçtan $t > 0$ anına kadar gerçekleşen ortalama olay sayısı olarak yorumlanmaktadır. Şimdi X_t tesadüfi değişkeni ile eşleşebilen ve gerçek hayatta gözlenebilen bir takım değişkenleri düşünelim. Doğal olarak bu değişkenlerin en başında belli bir zaman dilimi içerisinde bir yere gelen kişi sayısı gelmektedir. Bu reel değişken ise kuyruk modellerinde temel rol oynamaktadır. Belli bir zaman dilimi içerisinde bir hizmet sistemine gelen

müşteri hizmet sisteminin geliş akımını oluşturmakta ve gelen müşteri sayısı veya ortalaması ise hizmet sisteminin geliş parametresini tanımlamaktadır.

Bir hizmet sisteminde belli bir zaman diliminde yapılan gözlem hizmet sistemine ait bir örnekleme oluşturur. İyi gözlemlenmiş bir örnekleme hizmet sistemine ait daha sağlıklı bilgi edinmeyi sağlar. Şimdi hizmet sisteminden alınmış bir örneklemin bazı özelliklerini inceleyelim. Başlangıçtan $t > 0$ anına kadar gözlemlenmiş bir sistemde gelen müşteri sayısı mutlaka t anına, zaman dilimine bağlıdır. Bu gözlemin $[0, t]$ zaman aralığında yapılmış olmasıyla $[a, a+t]$ zaman aralığında yapılmış olması arasında bir fark yoktur. Bir hizmet sisteminde yapılan gözlem hangi anda başlamış olursa olsun incelemede başlangıç anı daima sıfır olarak alınabilir.

Hizmet sisteminden alınan örnekleme ait bir diğer özellik ise gözlem zamanına aittir. Gözlem zamanı arttıkça gelen müşteri sayısının veya olasılığının artıp artmayacağı kesin olarak söylenemezken gözlem zamanının daralmasıyla gelen müşteri sayısının azalacağı mutlak bir gerçektir. Bu hizmet sistemine gelen müşteri akımının incelenmesinde oldukça önemli bir özelliktir. Gözlem zamanı yeteri kadar daraldığında t anı sıfıra çok yakın bir değer alacağından bu aralıkta sisteme gelen müşteri sayısı en fazla bir kişi olacaktır. Aynı zamanda λt değeri de birden küçük olacağından bu değer bu aralıkta sisteme bir müşterinin gelme olasılığı olarak alınabilir. Gerçekten de yeteri kadar küçük $[0, t]$ aralığında gelen ortalama müşteri sayısı sıfır veya en fazla bir olacaktır. Bu olasılık servis sistemlerinin geliş akımlarında gerçek olasılığın tahmini olarak kullanılmaktadır. Gerçek olasılık bilinmemekle birlikte sembolik olarak $\lambda t + O(t)$ olarak gösterilebilir. Burada $O(t)$ terimi gerçek olasılık ile tahmini değeri arasındaki hatayı göstermektedir. Tahmini olasılık değeri gibi gerçek olasılık değerinin de zaman aralığının sıfıra yaklaşmasıyla sıfıra yaklaşacağını kesin olmasından dolayı $O(t)$ terimi de t anının sıfıra yaklaşmasıyla sıfıra yaklaşacaktır. Ancak bu yaklaşmanın hızı zaman aralığının sıfıra yaklaşmasının hızından daha yüksektir. Bu durumda yeterince küçük $[0, t]$ aralığında hizmet sistemine bir müşterinin gelme olasılığı devamdaki şekilde yazılır,

$$Pr\{X_t = 1\} = \lambda t + O(t) \quad (2.14)$$

Aynı zamanda $[0, t]$ aralığında hizmet sistemine hiçbir müşterinin gelmemesi olayı (2.14) olayı ile birlikte kesin olay olduğundan bu olayın olasılığı devamdaki şekilde yazılır,

$$Pr\{X_t = 0\} = 1 - \lambda t - O(t) \quad (2.15)$$

Yukarıda (2.14) ve (2.15) eşitlikleri ile verilen olasılıklar Poisson sürecinin (2.13) eşitliği ile tanımlanan olasılık değerinden de elde edilebilir. Bunu görebilmek için (2.13) ile verilen olasılık değerinde sırasıyla $n = 1$ ve $n = 0$ alarak $e^{-\lambda t}$ ifadesini Taylor serisine açmak yeterli olacaktır. (2.13) eşitliğinde $n = 1$ alındığında devamdaki sonuç elde edilir,

$$\begin{aligned}
Pr\{X_t = 1\} &= e^{-\lambda t}(\lambda t) \\
&= \lambda t \{1 - \lambda t + (\lambda t)^2 - (\lambda t)^3 + \dots\} \\
&= \lambda t - (\lambda t)^2 + (\lambda t)^3 + \dots \\
&= \lambda t + O(t)
\end{aligned}$$

Aynı şekilde (2.13) eşitliğinde $n = 0$ alındığında devamdaki sonuç elde edilir,

$$\begin{aligned}
Pr\{X_t = 0\} &= e^{-\lambda t} \\
&= 1 - \lambda t + (\lambda t)^2 - (\lambda t)^3 + \dots \\
&= 1 - \lambda t + O(t)
\end{aligned}$$

Burada $O(t) = \pm(\lambda t)^2 \pm (\lambda t)^3 \pm \dots$ olarak alınmıştır. Aynı zamanda $O(t)$ devamdaki özelliği de sağlar,

$$\frac{O(t)}{t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0$$

Bu özellik $O(t)$ fonksiyonunun sıfıra yaklaşma hızının zaman aralığının sıfıra yaklaşma hızından daha yüksek olduğunu göstermektedir.

Şimdi olasılığın süreklilik özelliğini kullanarak (2.14) ve (2.15) olasılıklarının diferansiyellerini inceleyelim. Bunun için ilk önce (2.15) olasılığına fonksiyon artımı uygulayalım. Bu durumda (2.15) olasılığı $[0, t + h]$ aralığında hizmet sistemine hiçbir müşterinin gelmemesi olasılığı olacaktır. Bu olasılığın hesabı için toplam olasılık özelliğini $[0, t]$ aralığına uygulamalıyız. Bu durumda $[0, t + h]$ aralığında hizmet sistemine hiçbir müşterinin gelmemesi olasılığı toplam olasılık özelliği kullanıldığında devamdaki gibi yazılır,

$$\begin{aligned}
Pr\{X_{t+h} = 0\} &= Pr\{X_{t+h} = 0, (X_t = 0 \text{ veya } X_t = 1 \text{ veya } \dots)\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} Pr\{X_{t+h} = 0, X_t = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} Pr\{X_{t+h} = 0 | X_t = k\} Pr\{X_t = k\} \\
&= Pr\{X_{t+h} = 0 | X_t = 0\} Pr\{X_t = 0\}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Yukarıdaki toplam şartlı olasılıklar türünden ifade edilmiştir. $[0, t + h]$ aralığında hiçbir müşterinin gelmemesi olasılığı ancak $[0, t]$ aralığında hiçbir müşterinin gelmediğinin bilindiği durumda sıfırdan farklı değer alabilir. Aksi halde $[0, t + h]$ aralığında hiçbir müşterinin gelmemesi olasılığı sıfır olacaktır. Bu yüzden yukarıdaki toplama giren şartlı olasılıkların ilk terimi hariç diğer terimleri sıfıra eşittir. İlaveten (2.16) numaralı ifadede bulunan şartlı olasılık da $[0, t]$ aralığında hiçbir müşterinin gelmediği bilindiğinden şartlı olasılık sadece $[t, t + h]$ aralığında hiçbir

müşterinin gelmemesi olasılığıdır. Bu durumda aralık uzunluğu h kadar olduğundan şartlı olasılık devamdaki gibi yazılacaktır,

$$Pr\{X_{t+h} = 0 | X_t = 0\} = 1 - \lambda h + O(h)$$

Elde edilen bu son eşitlik (2.16) numaralı ifadede kullanılırsa ifade devamdaki şekilde yazılır,

$$Pr\{X_{t+h} = 0\} = (1 - \lambda h + O(h))Pr\{X_t = 0\}$$

$$Pr\{X_{t+h} = 0\} - Pr\{X_t = 0\} = -\lambda h Pr\{X_t = 0\} + O(h)Pr\{X_t = 0\}$$

$$\frac{Pr\{X_{t+h} = 0\} - Pr\{X_t = 0\}}{h} = -\lambda Pr\{X_t = 0\} + \frac{O(h)Pr\{X_t = 0\}}{h}$$

Yukarıdaki bu ifadede $h \rightarrow 0$ limiti uygulanırsa devamdaki sonuç elde edilir,

$$\frac{dPr\{X_t = 0\}}{dt} = -\lambda Pr\{X_t = 0\}$$

$$\frac{dPr\{X_t = 0\}}{Pr\{X_t = 0\}} = -\lambda dt$$

$$\ln Pr\{X_t = 0\} = -\lambda t$$

$$Pr\{X_t = 0\} = e^{-\lambda t} \tag{2.17}$$

Şimdi aynı işlemi (2.14) olasılığına uygulayalım. $[0, t + h]$ aralığında bir müşterinin gelmesi olasılığını $[0, t]$ aralığında hiçbir müşterinin gelmemesi veya bir müşterinin gelmesi durumlarının bilinmesine göre şartlı olasılıklar türünden devamdaki şekilde yazalım,

$$Pr\{X_{t+h} = 1\} = Pr\{X_{t+h} = 1, (X_t = 0 \text{ veya } X_t = 1 \text{ veya } \dots)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Pr\{X_{t+h} = 1, X_t = k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Pr\{X_{t+h} = 1 | X_t = k\} Pr\{X_t = k\}$$

$$= Pr\{X_{t+h} = 1 | X_t = 0\} Pr\{X_t = 0\} +$$

$$+ Pr\{X_{t+h} = 1 | X_t = 1\} Pr\{X_t = 1\} \tag{2.18}$$

Yukarıdaki eşitlikte yine şartta yazılan olay sıfır ve bir durumundan daha büyük değer aldığında $[0, t + h]$ aralığında bir müşterinin gelmesi olasılığı sıfır olacağından toplama giren ilk

iki terimden sonraki terimler sıfır olur. (2.18) eşitliğindeki olasılıkları yerine yazacak olursak istenen olasılık devamdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} Pr\{X_{t+h} = 1\} &= (\lambda h + O(h))Pr\{X_t = 0\} + \\ &+(1 - \lambda h + O(h))Pr\{X_t = 1\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Burada yine $[t, t + h]$ aralığında hesaplanmak istenen olasılık buna eşdeğer olan $[0, h]$ aralığında hesaplanmıştır. (2.19) eşitliğini fonksiyon artımı şeklinde düzenlersek ve $h \rightarrow 0$ limiti uygularsak devamdaki diferansiyeli elde ederiz,

$$\begin{aligned} Pr\{X_{t+h} = 1\} - Pr\{X_t = 1\} &= \lambda h Pr\{X_t = 0\} - \lambda h Pr\{X_t = 1\} + \\ &+O(h)(Pr\{X_t = 0\} + Pr\{X_t = 1\}) \\ \frac{Pr\{X_{t+h} = 1\} - Pr\{X_t = 1\}}{h} &= \lambda Pr\{X_t = 0\} - \lambda Pr\{X_t = 1\} + \\ &+(O(h)/h)(Pr\{X_t = 0\} + Pr\{X_t = 1\}) \\ \frac{dPr\{X_t = 1\}}{dt} &= \lambda e^{-\lambda t} - \lambda Pr\{X_t = 1\} \\ \frac{d}{dt} Pr\{X_t = 1\} - \lambda Pr\{X_t = 1\} &= \lambda e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Yukarıdaki homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin çözümünden devamdaki sonuç elde edilir,

$$Pr\{X_t = 1\} = \lambda t e^{-\lambda t} \quad (2.20)$$

Aynı işlemler sırasıyla devam ettirildiğinde $[0, t]$ aralığında sisteme n tane müşteri gelme olasılığının (2.13) eşitliğindeki gibi elde edilebildiği sonucuna ulaşılır. Bu sonuç ise geliş akımının yapısal özelliklerinden yola çıkarak elde edilen olasılıkların Poisson olasılıkları olduğunu gösterir.

2.12. Geliş Anları

Bir kuyruk sisteminde geliş akımının gözlenebilmesi ancak geliş anlarının tespit edilmesiyle mümkün olur. Gözlenmeye başlanan bir kuyruk sisteminde müşterilerin sisteme gelme anları kaydedilmek suretiyle veya ilk geliş anı ve geliş anları arasındaki süreler kaydedilmek suretiyle kuyruk sisteminin geliş akımı belirlenir. Bundan dolayı bir geliş akımında geliş anları, ilk geliş anı ve ardışık gelişler arası süreler oldukça önemlidir. Geliş akımı gözlenirken gözleme başlama anı t_0

, ilk geliş anı t_1 ve bunu takip eden geliş anları t_2, t_3, \dots olmak üzere ardışık geliş anları arasındaki süreler sırasıyla devamdaki gibi ifade edilir,

$$\begin{aligned} T_1 &= t_1 - t_0 \\ T_2 &= t_2 - t_1 \\ &\vdots \\ T_k &= t_k - t_{k-1} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Gözleme başlangıç anı genel olarak sıfır alındığından $t_0 = 0$ olarak kabul edilir. Geliş anları arasındaki süreler ile k -ıncı geliş anı arasında devamdaki ilişki mevcuttur,

$$t_k = T_1 + \dots + T_k \tag{2.22}$$

Burada göz ardı edilmemesi gereken en önemli nokta gözleme başlama anı ile geliş anlarının aynı yapısal özelliğe sahip olmamasıdır. Gözleme başlama anı sıfır olarak alındığında mutlaka ilk geliş anı sıfırdan büyük olmalıdır. İlk geliş anının gözleme başlama anı olarak alınması da geliş akımının gözlemlenmesinin sağlıklı olması açısından uygun değildir. Her bir geliş anı bir tesadüfi değişken olurken gözleme başlama anı keyfi olduğundan tesadüfi değişken olarak alınamaz. Örnek birimleri birbirlerinden bağımsız olmasına karşın geliş anlarına sıra numarası verildiğinden bu tesadüfi değişkenler birbirlerinden bağımsız değildir. Ancak örnek birimlerinin birbirlerinden bağımsız olmalarından dolayı ardışık geliş anları arasındaki süreler birbirlerinden bağımsız olacaktır. Bundan dolayı t_1, t_2, \dots birbirlerinden bağımsız tesadüfi değişkenler değilken T_1, T_2, \dots bağımsız tesadüfi değişkenlerdir. Genelliği bozmaksızın $T_1 = t_1$ olduğundan bu değişken gelişler arası süre olarak değil ilk geliş anı olarak kabul edilmelidir. T_2 ve sonraki tesadüfi değişkenler ise ardışık gelişler arası süreler olarak alınabilir.

Kuyruk sisteminin geliş akımında en önemli incelemelerden birisi geliş akımını temsil eden bu tesadüfi değişkenlerin dağılımlarının belirlenmesidir. Doğal olarak dağılımlarının belirlenebilmesi geliş akımının dağılımının bilinmesine bağlıdır. Birbirlerinden bağımsız olarak aynı kitleden seçilen örnek birimlerinin kitlenin dağılımına sahip ve aynı olası gerekmektedir. Fakat istisnai bir durum olarak geliş anları sıra istatistikleri olduğundan dağılımları birbirlerinden farklı olmaktadır. Buna karşılık ardışık gelişler arası sürelerde böyle bir yapı olmadığından ardışık gelişler arası süreler aynı ortak dağılıma sahip olacaktır. Şimdi Poisson geliş akımında ardışık gelişler arası sürelerin dağılımı belirleyen devamdaki teoremi verelim.

Teorem 1. Poisson (λ) geliş akımında ardışık gelişler arası sürelerin tümü λ parametrelili üstel dağılıma sahiptir.

İspat 1. Ardışık gelişler arası sürelerin dağılımını belirleyebilmek için ilk önce keyfi ardışık iki geliş arasında geçen sürenin bir $x > 0$ sayısından büyük olması olayını inceleyelim. Böyle bir durumda k -ıncı geliş anından sonra geçen $x > 0$ süresince sisteme gelen hiçbir müşteri olmamıştır. Buna göre t_k anındaki müşteri sayısı olan X_{t_k} ile $t_k + x$ anındaki müşteri sayısı olan X_{t_k+x} tesadüfi değişkenlerinin sayısal değerleri aynıdır. Dolayısıyla ilgilenilen olayın olasılığını devamdaki eşitlikle yazabiliriz;

$$\begin{aligned}
Pr\{T_k > x\} &= Pr\{t_k - t_{k-1} > x\} \\
&= Pr\{X_{t_k} - X_{t_k+x} = 0\} \\
&= Pr\{X_x = 0\} \\
&= e^{-\lambda x} \\
Pr\{T_k < x\} &= 1 - e^{-\lambda x}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Yukarıdaki eşitliklerde Poisson (λ) dağılımına sahip iki tesadüfi değişkenin farkının da yine Poisson (λ) dağılımına sahip olması ve olasılığının sadece geçen süreye bağlı olma özellikleri kullanılmıştır. Dikkat edilecek olursa (2.23) eşitliğinde olasılık k sayısına bağlı değildir. Bu tüm k değerleri için gelişler arası sürelerin aynı dağılıma sahip olduğunu göstermektedir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

İlk geliş anı gelişler arası sürelerden farklı tutulduğundan dolayı bu tesadüfi değişkenin dağılımı gelişler arası sürelerin ortak dağılımından ayrı tutulabilir. Ancak genelliği bozmaksızın gelişler arası sürelerin dağılımı ile aynı dağılıma sahip olarak da kabul edilebilir. İlk geliş anının bu şekilde iki farklı duruma sahip olmasının nedeni gözleme başlama anının nasıl kabul edileceğidir. Farklı bir durumda $T_k = t_{k+1} - t_k$ şeklinde de seçilebilir.

Şimdi geliş anlarının dağılımını inceleyelim. Bunun için (2.22) eşitliği ile gösterilen gelişler arası süreler ile geliş anları arasındaki bağıntıyı kullanalım. Gelişler arası sürelerin dağılımını bildiğimiz için geliş anlarının dağılımını bulmakta bu bağıntıyı rahatlıkla kullanabiliriz. Buna göre k -ıncı geliş anının dağılımı k tane gelişler arası sürenin toplamı ile elde edildiğinden keyfi $x > 0$ sayısı için devamdaki olasılığı yazabiliriz,

$$Pr\{t_k < x\} = Pr\{T_1 + \dots + T_k < x\} \tag{2.24}$$

Yukarıdaki eşitliği ilk önce $k = 1$ için kullanalım. Bu durumda T_1 Üstel (λ) dağılımına sahip olduğundan eşitlik devamdaki gibi olur,

$$Pr\{t_1 < x\} = Pr\{T_1 < x\} = 1 - e^{-\lambda x} \tag{2.25}$$

Buradan ilk geliş anının yoğunluk fonksiyonu devamdaki şekilde olacaktır,

$$f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (2.26)$$

İkinci olarak (2.24) eşitliğini $k = 2$ için kullanalım. Bu durumda ikinci geliş anı iki tane gelişler arası sürenin toplamı şeklinde yazılacak ve buna bağlı olarak ikinci geliş anının dağılımı iki tane üstel dağılımın toplamı yardımıyla hesaplanacaktır. Bu hesaplamayı yaparken iki tane üstel dağılımın konvolüsyonunu devamdaki şekilde hesaplayacağız,

$$\begin{aligned} Pr\{t_2 < x\} &= Pr\{T_1 + T_2 < x\} \\ &= Pr\{T_2 < x - T_1\} \\ &= Pr\{T_2 < x - T_1, T_1 \in [0, x]\} \\ &= Pr\{T_2 < x - T_1 | T_1 \in [0, x]\} Pr\{T_1 \in [0, x]\} \\ &= \int_0^x Pr\{T_2 < x - u\} \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= \int_0^x (1 - e^{-\lambda(x-u)}) \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du + \lambda e^{-\lambda x} \int_0^x du \\ &= -e^{-\lambda x} + 1 - \lambda x e^{-\lambda x} \\ Pr\{t_2 < x\} &= 1 - e^{-\lambda x}(1 + \lambda x) \end{aligned}$$

Buradan ikinci geliş anının yoğunluk fonksiyonu devamdaki şekilde elde edilir,

$$f_2(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \quad (2.27)$$

Şimdi k -ıncı geliş anının dağılımını belirleyen devamdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2. Poisson (λ) geliş akımında k -ıncı geliş anının yoğunluk fonksiyonu devamdaki gibidir,

$$f_k(x) = \lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x} / (k - 1)! \quad (2.28)$$

İspat 2. Tümevarım yardımıyla yapalım. $k = 1$ ve $k = 2$ için (2.28) eşitliği ile verilen yoğunluk fonksiyonunun doğru olduğunu (2.26) ve (2.27) eşitliklerinden biliyoruz. Şimdi (2.28) eşitliğinin $k - 1$ için doğru olduğunu kabul ederek k için doğru olduğunu gösterelim,

$$\begin{aligned}
Pr\{t_k < x\} &= Pr\{t_{k-1} + T_k < x\} \\
&= Pr\{T_k < x - t_{k-1}\} \\
&= Pr\{T_k < x - t_{k-1}, t_{k-1} \in [0, x]\} \\
&= \int_0^x Pr\{T_k < x - u\} (\lambda^{k-1} u^{k-2} e^{-\lambda u} / (k-2)!) du \\
&= \int_0^x (1 - e^{-\lambda(x-u)}) (\lambda^{k-1} u^{k-2} e^{-\lambda u} / (k-2)!) du \\
&= \{\lambda^{k-1} / (k-2)!\} \int_0^x u^{k-2} e^{-\lambda u} du - \\
&\quad - \{\lambda^{k-1} e^{-\lambda x} / (k-2)!\} \int_0^x u^{k-2} du \\
&= \{\lambda^{k-1} / (k-2)!\} e^{-\lambda x} \left\{ -\frac{x^{k-2}}{\lambda} - \dots - \frac{(k-2)!}{\lambda^{k-1}} \right\} - \\
&\quad - \lambda^{k-1} u^{k-1} e^{-\lambda x} / (k-1)!
\end{aligned}$$

Buradan türev alındığında k -ıncı geliş anının yoğunluk fonksiyonu (2.28) eşitliğindeki gibi elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

2.13. Doğum Süreci

Bir hizmet sistemi gözlenmeye başlanıldığı anda, o ana kadar, sistemde kaç müşterinin geldiği biliniyor olduğundan gözleme başlama anından kısa bir süre sonra sisteme bir müşterinin gelmesi olasılığı sistemde bulunan müşteri sayısına göre değişebiliyorsa bu tip geliş akımları doğum süreci olarak adlandırılmaktadır. Poisson (λ) geliş akımında gözlem aralığı daralırken sisteme bir müşterinin gelmesi olasılığı (2.14) eşitliği ile tanımlı olup sistemdeki o ana kadar olan müşteri sayısına bağlı değildir. Doğum sürecinde ise bu olasılık o ana kadar olan müşteri sayısına bağlı olduğundan (2.14) olasılığı doğum sürecinde devamdaki gibi ifade edilir,

$$Pr\{X_{t+h} = n + 1 | X_t = n\} = \lambda_n h + O(h) \quad (2.29)$$

Yukarıdaki şartlı olasılık yine Poisson akımında olduğu gibi gözlem aralığına bağlıdır. Burada $t = 0$ anı sistemin çalışmaya başladığı anı değil gözlemin başlangıç anını göstermektedir. Dolayısıyla X_0 sistemin gözlenmeye başladığı anda o ana kadar sisteme gelen müşteri sayısını göstermektedir. Ancak sistem çalışmaya başladığı andan itibaren gözlenmeye başladığı takdirde mutlaka $X_0 = 0$ olacaktır. Bu karmaşaya sebebiyet vermemek için doğum sürecinde şartlı olasılıklarda gözlem aralığı $[t, t + h]$ olarak alınmaktadır. Benzer şekilde aynı gözlem aralığında sisteme hiçbir müşterinin gelmemesi olasılığı Poisson akımındaki (2.15) olasılığına alternatif olarak devamdaki şekilde yazılır,

$$Pr\{X_{t+h} = n | X_t = n\} = 1 - \lambda_n h + O(h) \quad (2.30)$$

Yukarıdaki (2.29) ve (2.30) eşitlikleri ile verilen olasılıklar Poisson sürecinde λ yerine λ_n kullanılmasıyla bir nevi genelleştirilmiş ve süreç daha genel bir geliş akımına genişletilmiştir. Doğum sürecinde $\lambda_n = \lambda$ alındığında Poisson sürecinin elde edileceği açıktır. Ancak bu genişleme neticesinde keyfi $t > 0$ anına kadar sisteme gelen müşteri sayısının olasılıkları (2.13) eşitliğinden farklı olacaktır.

Şimdi (2.16) eşitliğini kullanarak devamdaki diferansiyel denklem yardımıyla bu olasılıkları elde edelim,

$$\begin{aligned} Pr\{X_{t+h} = 0\} &= Pr\{X_{t+h} = 0 | X_t = 0\} Pr\{X_t = 0\} \\ &= (1 - \lambda_0 h + O(h)) Pr\{X_t = 0\} \\ \frac{Pr\{X_{t+h} = 0\} - Pr\{X_t = 0\}}{h} &= -\lambda_0 Pr\{X_t = 0\} + \frac{O(h) Pr\{X_t = 0\}}{h} \\ \frac{dPr\{X_t = 0\}}{dt} &= -\lambda_0 Pr\{X_t = 0\} \end{aligned}$$

Yukarıdaki homojen diferansiyel denklemi çözmeksizin $t \rightarrow \infty$ asimptotik durumu için inceleyelim. $t \rightarrow \infty$ durumunda kuyruk sistemi yeterince uzun bir zaman dilimi içerisinde çalışırken gözleniyor şeklinde yorumlanabilir. Böyle bir durumda, yeterince uzun bir zaman diliminde çalışan bir hizmet sisteminin geliş akımı durağan bir yapıya ulaşabilmiştir. Geliş akımının durağan bir yapıya ulaşması müşterilerin sisteme sabit aralıklarla gelmesi anlamına gelecektir. Müşteriler sisteme sabit aralıklarla geldiğinde keyfi bir $t > 0$ anında sisteme kaç müşterinin geleceği kesin olarak bellidir. Bu durumda $Pr\{X_t = 0\}$ olasılığı sabit ve $dPr\{X_t = 0\}/dt$ diferansiyeli ise sıfır olur ve yukarıdaki diferansiyel denklem devamdaki şekilde yazılır,

$$\lambda_0 Pr\{X_t = 0\} = 0 \quad (2.31)$$

Aynı işlemleri $Pr\{X_t = k\}$ olasılığı için yapalım,

$$\begin{aligned} Pr\{X_{t+h} = k\} &= Pr\{X_{t+h} = k | X_t = k\}Pr\{X_t = k\} + \\ &+ Pr\{X_{t+h} = k | X_t = k - 1\}Pr\{X_t = k - 1\} \\ &= (1 - \lambda_k h + O(h))Pr\{X_t = k\} + (\lambda_{k-1} h + O(h))Pr\{X_t = k - 1\} \\ \frac{Pr\{X_{t+h} = k\} - Pr\{X_t = k\}}{h} &= -\lambda_k Pr\{X_t = k\} + \lambda_{k-1} Pr\{X_t = k - 1\} \\ &+ \frac{O(h)}{h} \{Pr\{X_t = k\} + Pr\{X_t = k - 1\}\} \end{aligned}$$

Yine aynı nedenlerden dolayı $t \rightarrow \infty$ asimptotik durumu için devamdaki eşitliği yazabiliriz,

$$\begin{aligned} -\lambda_k Pr\{X_t = k\} + \lambda_{k-1} Pr\{X_t = k - 1\} &= 0 \\ \lambda_k Pr\{X_t = k\} &= \lambda_{k-1} Pr\{X_t = k - 1\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Elde edilen bu eşitlik keyfi $k = 1, 2, \dots$ için geçerlidir. Bu durumda $k = 1$ için

$$\lambda_1 Pr\{X_t = 1\} = \lambda_0 Pr\{X_t = 0\} = 0$$

ve tüm $k > 1$ için devamdaki eşitlik sağlanır,

$$\lambda_k Pr\{X_t = k\} = 0$$

Bu eşitlik en az bir t_{sbt} değeri ve $t < t_{sbt}$ için $Pr\{X_t = k\} = 0$ ve $t \geq t_{sbt}$ değeri için $\lambda_k = 0$ olduğundan daima sağlanacaktır. $t \rightarrow \infty$ asimptotik durumunda gelişler arası sürelerin sabit olacağı varsayıldığından keyfi $k \geq 1$ değeri için $[0, t]$ zaman aralığı yetersiz olduğunda doğal olarak $Pr\{X_t = k\} = 0$ olur. Aynı şekilde $[0, t]$ zaman aralığı yeterli olduğunda k -ıncı geliş anından sonraki geliş olasılığını gösteren λ_k parametresi sıfır olacaktır.

2.14. Hizmet Süreci

Stokastik servis sistemlerinde geliş akımı kadar hizmet süresi ve hizmet çıkışı da oldukça önemlidir. Bu iki kavram bir servis sisteminde sistemden hizmet olarak ayrılan müşteri ile ilgilidir. Hizmet almak için sisteme gelen müşterinin servis süresi ve servis süresini tamamlamış müşterilerin sistemden çıkışı stokastik servis sisteminin hizmet sürecini oluşturmaktadır. Geliş akımı tek başına incelendiğinde gözlem süresince gelen toplam müşteri sayısını verdiğinden

stokastik servis sisteminin en önemli yapısal göstergesi olan sistemdeki müşteri sayısını incelemede yeterli olmamaktadır. Sistemdeki müşteri sayısı sistemden hizmet alarak ayrılan müşteri sayısı da göze alınarak hesaplanacağından hizmet süreci ve sistemin geliş akımı beraber stokastik servis sistemini temsil eden ve Doğum-Ölüm süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreci oluşturmaktadırlar. Sisteme gelen müşteri doğum süreciyle temsil edilirken sistemden ayrılan müşteri ise ölüm süreciyle temsil edilmektedir. Doğum sürecinde olduğu gibi ölüm süreci veya hizmet sürecinde de müşterilerin sistemden ayrılma olasılıkları sabit parametrelili olmayıp değişken parametrelidir. Sistemde n tane müşteri bulunurken bir müşterinin $[t, t + h]$ aralığında hizmet alarak sistemden ayrılma olasılığı $\mu_n h + O(h)$ ve aynı aralıkta hizmet alan bir müşterinin hizmet süresi bitmediğinden dolayı sistemden ayrılmama olasılığı $1 - \mu_n h + O(h)$ olarak kabul edilmektedir. Bu kabulleniş doğum süreci veya geliş akımı ile hizmet sürecinin yeteri kadar küçük $[t, t + h]$ gözlem aralığında aynı yapısal özelliğe sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Gözlem aralığı daraldıkça müşterinin sisteme gelme olasılığı veya sistemden hizmet alarak ayrılma olasılığı her iki akımda da lineer olarak sifıra yaklaşmaktadır. Bu özellik geliş akımının Poisson akımı olduğunu gösterirken çıkış akımının da aynı şekilde Poisson akımı olduğunu hizmet süresinin ise üstel dağılıma sahip olduğunu göstermektedir.

Şimdi \mathcal{L} “sistemde bulunan müşteri sayısı” olmak üzere \mathcal{L}_0 “sistemde hiçbir müşterinin olmaması ve \mathcal{L}_k “sistemde $k = 1, 2, \dots$ tane müşterinin olması” olaylarını inceleyelim.

\mathcal{L}_0 olayının yeteri kadar küçük bir gözlem diliminde gerçekleşebilmesi için gözleme başlangıç anında sistemde hiçbir müşterinin olmaması ve gözlem süresince de sisteme hiçbir müşterinin gelmemesi gerekmektedir. Sistem \mathcal{L}_0 durumundan \mathcal{L}_0 durumuna geçebileceği gibi gözleme başlangıç anında sistemde bir müşteri varken sistemde bulunan bu müşterinin hizmet alarak sistemden ayrılmasıyla ve bu süre zarfında sisteme hiçbir müşterinin gelmemesi durumunda \mathcal{L}_1 durumundan da \mathcal{L}_0 durumuna geçebilir. Bu durumda şartlı geçiş olasılıkları λ_0 geliş ve μ_1 hizmet parametreleri kullanılarak devamdaki gibi yazılabilir,

$$Pr\{\mathcal{L}_0(t + h) | \mathcal{L}_0(t)\} = 1 - \lambda_0 h + O(h) \quad (2.33)$$

$$Pr\{\mathcal{L}_0(t + h) | \mathcal{L}_1(t)\} = \mu_1 h + O(h) \quad (2.34)$$

\mathcal{L}_k olayının yeteri kadar küçük bir zaman diliminde gerçekleşebilmesi için gözleme başlama anında sistemde bir müşterinin bulunması, bu müşterinin bu zaman diliminde sistemden ayrılmaması ve bu zaman içerisinde de sisteme hiçbir müşterinin gelmemesi gerekmektedir. Sistem \mathcal{L}_k durumundan \mathcal{L}_k durumuna geçebileceği gibi, sistemde başlangıçta $k - 1$ müşteri varken sisteme bir müşterinin gelmesiyle de \mathcal{L}_{k-1} durumundan \mathcal{L}_k durumuna geçebilir. Aynı şekilde sistemde başlangıçta $k + 1$ müşteri bulunurken gözlem zamanı içerisinde bir müşterinin ayrılması ve sisteme

hiçbir müşterinin gelmemesiyle de \mathcal{L}_{k+1} durumundan \mathcal{L}_k durumuna geçebilir. Bu durumda şartlı geçiş olasılıkları devamdaki gibi yazılabilir,

$$Pr\{\mathcal{L}_k(t+h)|\mathcal{L}_k(t)\} = 1 - (\lambda_k + \mu_k)h + O(h) \quad (2.35)$$

$$Pr\{\mathcal{L}_k(t+h)|\mathcal{L}_{k-1}(t)\} = \lambda_{k-1}h + O(h) \quad (2.36)$$

$$Pr\{\mathcal{L}_k(t+h)|\mathcal{L}_{k+1}(t)\} = \mu_{k+1}h + O(h) \quad (2.37)$$

Diğer farklı durumlar arası geçişler mümkün olsa da yeteri kadar küçük gözlem zamanı içerisinde meydana gelme olasılıkları sıfır olacağından dikkate alınmazlar.

Şimdi \mathcal{L}_0 olayının olasılığını (2.31) eşitliğindeki gibi fonksiyon artımı yardımı ile hesaplayalım,

$$\begin{aligned} Pr\{\mathcal{L}_0(t+h)\} &= Pr\{\mathcal{L}_0(t+h)|\mathcal{L}_0(t) \text{ veya } \mathcal{L}_1(t)\} \\ &= Pr\{\mathcal{L}_0(t+h)|\mathcal{L}_0(t)\} + Pr\{\mathcal{L}_0(t+h)|\mathcal{L}_1(t)\} \\ &= (1 - \lambda_0 h + O(h))Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} + (\mu_1 h + O(h))Pr\{\mathcal{L}_1(t)\} \\ \frac{Pr\{\mathcal{L}_0(t+h)\} - Pr\{\mathcal{L}_0(t)\}}{h} &= -\lambda_0 Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} + \mu_1 Pr\{\mathcal{L}_1(t)\} + \\ &+ (O(h)/h)\{Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} + Pr\{\mathcal{L}_1(t)\}\} \\ \frac{dPr\{\mathcal{L}_0(t)\}}{dt} &= -\lambda_0 Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} + \mu Pr\{\mathcal{L}_1(t)\} \\ -\lambda_0 Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} + \mu Pr\{\mathcal{L}_1(t)\} &= 0 \\ Pr\{\mathcal{L}_1(t)\} &= (\lambda_0/\mu_1)Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aynı işlemleri \mathcal{L}_k olayının olasılığının hesaplanması için uygulayalım,

$$\begin{aligned} Pr\{\mathcal{L}_k(t+h)\} &= Pr\{\mathcal{L}_k(t+h)|\mathcal{L}_{k-1}(t) \text{ veya } \mathcal{L}_k(t) \text{ veya } \mathcal{L}_{k+1}(t)\} \\ &= Pr\{\mathcal{L}_k(t+h)|\mathcal{L}_{k-1}(t)\} + \\ &+ Pr\{\mathcal{L}_k(t+h)|\mathcal{L}_k(t)\} + \\ &+ Pr\{\mathcal{L}_k(t+h)|\mathcal{L}_{k+1}(t)\} \\ &= (\lambda_{k-1}h + O(h))Pr\{\mathcal{L}_{k-1}(t)\} + \\ &+ (1 - (\lambda_k + \mu_k)h + O(h))Pr\{\mathcal{L}_k(t)\} + \\ &+ (\mu_{k+1}h + O(h))Pr\{\mathcal{L}_{k+1}(t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{Pr\{\mathcal{L}_k(t+h)\} - Pr\{\mathcal{L}_k(t)\}}{h} &= \lambda_{k-1}Pr\{\mathcal{L}_{k-1}(t)\} - \\
& - (\lambda_k + \mu_k)Pr\{\mathcal{L}_k(t)\} + \\
& + \mu_{k+1}Pr\{\mathcal{L}_{k+1}(t)\} + \\
& + (O(h)/h)\{Pr\{\mathcal{L}_{k-1}(t)\} + Pr\{\mathcal{L}_k(t)\} + Pr\{\mathcal{L}_{k+1}(t)\}\} \\
\frac{dPr\{\mathcal{L}_k(t)\}}{dt} &= \lambda_{k-1}Pr\{\mathcal{L}_{k-1}(t)\} - (\lambda_k + \mu_k)Pr\{\mathcal{L}_k(t)\} + \\
& + \mu_{k+1}Pr\{\mathcal{L}_{k+1}(t)\} \\
\lambda_{k-1}Pr\{\mathcal{L}_{k-1}(t)\} - (\lambda_k + \mu_k)Pr\{\mathcal{L}_k(t)\} + \mu_{k+1}Pr\{\mathcal{L}_{k+1}(t)\} &= 0
\end{aligned}$$

Burada $k = 1$ alındığında ve (2.38) eşitliği kullanıldığında devamdaki sonuç elde edilir,

$$\lambda_0 Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} - (\lambda_1 + \mu_1)Pr\{\mathcal{L}_1(t)\} + \mu_2 Pr\{\mathcal{L}_2(t)\} = 0$$

$$\lambda_0 Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} - (\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_0/\mu_1)Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} + \mu_2 Pr\{\mathcal{L}_2(t)\} = 0$$

$$Pr\{\mathcal{L}_2(t)\} = \frac{1}{\mu_2} Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} \{-\lambda_0 + (\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_0/\mu_1)\}$$

$$= \frac{1}{\mu_2} Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} \left\{ \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1} \right\}$$

$$= \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} Pr\{\mathcal{L}_0(t)\}$$

Aynı işlemler sırasıyla devam ettirildiğinde $k = 0, 1, 2, \dots$ için devamdaki sonuç elde edilir,

$$Pr\{\mathcal{L}_k(t)\} = (\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1} / \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k) Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} \quad (2.39)$$

Burada kolaylık bakımından $(\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1} / \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k) = \ell(k)$ ile gösterirsek toplam olasılığın bir olması özelliğinden $Pr\{\mathcal{L}_0(t)\}$ olasılığını devamdaki gibi elde ederiz,

$$\sum_{k=0}^{\infty} Pr\{\mathcal{L}_k(t)\} = 1$$

$$Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} + \sum_{k=1}^{\infty} Pr\{\mathcal{L}_k(t)\} = 1$$

$$Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} + Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} \sum_{k=1}^{\infty} \ell(k) = 1$$

$$Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \ell(k) \right\} = 1$$

$$Pr\{\mathcal{L}_0(t)\} = 1 / \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \ell(k) \right\}$$

Sonuç olarak $Pr\{\mathcal{L}_k(t)\}$ olasılığı yukarıdaki eşitliğin (2.39) eşitliğinde yerine yazılmasıyla elde edilir,

$$Pr\{\mathcal{L}_k(t)\} = \ell(k) / \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \ell(k) \right\} \quad (2.40)$$

Elde edilen bu son eşitlikte $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{k-1} = \lambda$ ve aynı şekilde $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu$ olarak alındığında ve $\ell(k) = (\lambda/\mu)^k = \rho^k$ ile gösterildiğinde $Pr\{\mathcal{L}_k(t)\}$ olasılığı $\rho < 1$ şartı altında devamdaki formda yazılacaktır,

$$Pr\{\mathcal{L}_k(t)\} = \rho^k / \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \right\}$$

$$Pr\{\mathcal{L}_k(t)\} = \rho^k / \{1/(1 - \rho)\}$$

$$= \rho^k (1 - \rho) \quad (2.41)$$

Doğum sürecinde $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda$ olarak alındığında doğum sürecinin bir Poisson akımına dönüşeceğini biliyoruz. Şimdi ise hizmet sürecinde $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu$ alındığında sistemdeki hizmet süresinin üstel dağılıma sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 3. Hizmet sürecinde $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu$ şartı altında stokastik hizmet sisteminin hizmet süresi üstel dağılıma sahiptir.

İspat 3. Hizmet süresini L ile gösterelim. $\{L > t + h\} \subseteq \{L > t\}$ olduğundan devamdaki ortak olasılığı yazabiliriz,

$$Pr\{L > t + h\} = Pr\{L > t + h, L > t\}$$

$$= Pr\{L > t + h | L > t\} Pr\{L > t\}$$

$$= (1 - \mu h + O(h)) Pr\{L > t\}$$

$$\frac{dPr\{L > t\}}{dt} = -\mu Pr\{L > t\}$$

$$Pr\{L > t\} = e^{-\mu t}$$

$$Pr\{L < t\} = 1 - e^{-\mu t} \quad (2.42)$$

Böylelikle istenen sonuç elde edilmiş olur.

Devamda stokastik hizmet sisteminden çıkış akımının Poisson (λ) dağılımına sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 4. Poisson (λ) geliş akımına sahip bir stokastik servis sisteminin hizmet sürecinde $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu$ ise sistemden çıkış akımı λ parametrelili Poisson akımıdır.

İspat 4. Stokastik sistemden çıkış akımının Poisson akımı olduğunu gösterebilmek için ardışık iki çıkış arası sürenin üstel dağılıma sahip olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için ardışık iki çıkış arası süreyi L ile gösterelim. $n(t)$ sistemden gözlenen son çıkıştan sonraki $t > 0$ anında sistemde bulunan müşteri sayısı olsun. Bu durumda L ile $n(t)$ değişkenlerinin ortak olasılıklarını devamdaki gibi tam olasılık özelliğini kullanarak yazabiliriz,

$$\begin{aligned} Pr\{L > t + h, n(t + h) = 0\} &= \\ &= Pr\{L > t + h, n(t + h) = 0, L > t, n(t) = 0\} \\ &= Pr\{L > t + h, n(t + h) = 0 \mid L > t, n(t) = 0\} \\ &Pr\{L > t, n(t) = 0\} \end{aligned}$$

Burada tam olasılıklı olay kullanılırken $n(t) > 0$ durumu bu şart altında istenen olasılık sıfır olacağından yazılımı ihmal edilmiştir. $\{L > t, n(t) = 0\}$ olayının gerçekleştiği bilindiğine göre $\{L > t + h, n(t + h) = 0\}$ olayının gerçekleşmesi ancak $h > 0$ gözlem uzunluğu içerisinde sisteme kimsenin gelmemesi veya sisteme bir kişi gelmiş ise bunun aynı gözlem süresi içerisinde hizmet alarak sistemden ayrılması ile mümkün olur. Bu durumda istenen olasılığı devamdaki gibi yazabiliriz,

$$\begin{aligned} Pr\{L > t + h, n(t + h) = 0\} &= \\ &= (1 - \lambda h + O(h) + \lambda h(\mu h + O(h)))Pr\{L > t, n(t) = 0\} \end{aligned}$$

Bu eşitlik fonksiyon diferansiyeli oluşturacak şekilde düzenlenerek $h \rightarrow 0$ limiti alınırsa devamdaki diferansiyel denklem ve çözümü elde edilir,

$$\frac{d}{dt} Pr\{L > t, n(t) = 0\} = -\lambda Pr\{L > t, n(t) = 0\}$$

$$Pr\{L > t, n(t) = 0\} = Ce^{-\lambda t}$$

Burada C sabitinin tespit edilebilmesi için $Pr\{L > 0, n(0) = 0\}$ başlangıç şartına dikkat edilmesi gerekmektedir. Sistemden çıkışlar arası süre zaten pozitif reel değişken olacağından $\{L > 0\}$ olayı tam olasılıklı bir olaydır. Bu durumda ortak olasılık sadece $n(t)$ değişkeninin sıfır

değerini alma olasılığına dönüşecektir. Bu ise son çıkış anında gözlenmeye başlayan sistemde bulunan müşteri sayısını verecektir. Bu durumun sonucu olarak devamdaki eşitliği yazabiliriz,

$$Pr\{L > 0, n(0) = 0\} = Pr\{n(0) = 0\}$$

$$= Pr\{\mathcal{L} = 0\}$$

$$= 1 - \rho$$

$$C = 1 - \rho$$

$$Pr\{L > t, n(t) = 0\} = (1 - \rho)e^{-\lambda t}$$

Şimdi aynı işlemleri $n(t) = k, k = 1, 2, \dots$ için yapalım,

$$Pr\{L > t + h, n(t + h) = k\} =$$

$$= Pr\{L > t + h, n(t + h) = 0, L > t, n(t) = k\} +$$

$$+ Pr\{L > t + h, n(t + h) = 0, L > t, n(t) = k - 1\}$$

$$= Pr\{L > t + h, n(t + h) = 0 | L > t, n(t) = k\}$$

$$Pr\{L > t, n(t) = k\} +$$

$$+ Pr\{L > t + h, n(t + h) = 0 | L > t, n(t) = k - 1\}$$

$$Pr\{L > t, n(t) = k - 1\}$$

$$= (1 - (\lambda + \mu)h)Pr\{L > t, n(t) = k\} + \lambda h Pr\{L > t, n(t) = k - 1\}$$

Bu eşitlikten devamdaki homojen olmayan lineer diferansiyel denklem ve çözümü elde edilir,

$$\frac{d}{dt} Pr\{L > t, n(t) = k\} = -(\lambda + \mu)Pr\{L > t, n(t) = k\} + \lambda Pr\{L > t, n(t) = k - 1\}$$

$$\frac{d}{dt} Pr\{L > t, n(t) = k\} + (\lambda + \mu)Pr\{L > t, n(t) = k\}$$

$$= \lambda Pr\{L > t, n(t) = k - 1\}$$

Kısalık bakımından $Pr\{L > t, n(t) = k\} = v_k(t)$ ile gösterelim bu durumda elde edilen diferansiyel denklem ve çözümü devamdadır,

$$\frac{dv_k(t)}{dt} + (\lambda + \mu)v_k(t) = \lambda v_{k-1}(t)$$

$$v_k(t) = \rho^k (1 - \rho) e^{-\lambda t}$$

Burada $v_k(t)$ değişkeni tüm durumları üzerinden toplanacak olursa ortak olasılık L değişkeninin olasılığını verecektir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Pr\{L > t, n(t) = k\}$$

$$= Pr\{L > t\}$$

$$= e^{-\lambda t}$$

$$Pr\{L < t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

İstenen sonuç elde edilmiş olur.

Yukarıdaki sonuca dikkat edilecek olursa sistemden çıkış akımı hizmet parametresine bağlı olmaksızın sisteme geliş akımıyla aynıdır. Doğal olarak bir stokastik hizmet sisteminde Poisson (λ) geliş akımı arada bir işleme tabi tutularak çıkış akımı elde edilmektedir. Çıkış akımı da Poisson (λ) dağılımına sahip olduğundan arada yapılan işlem Poisson (λ) geliş akımının özelliğini bozmamaktadır. Geliş akımına arada yapılan işlem ise servis sisteminde geliş akımına verilen ve üstel dağılıma sahip olan hizmettir. Buradan elde edilen önemli bir sonuç ise geliş akımının üstel dağılıma sahip olarak bekletilmesi işlemini Poisson (λ) dağılımını bozmamasıdır. Bu bir Markov süreci olan Poisson (λ) akımının önemli bir özelliğidir. Kısaca tüm bu özelliklere sahip olan stokastik hizmet sistemlerini Markov kuyruk modelleri olarak adlandırmakta ve Markov (λ, μ) olarak göstermekteyiz.

Gözden kaçırılmaması gereken önemli bir nokta sistemin boş olmadığı durumlarda sistemden ardışık iki ayrılış anı arasındaki sürenin sistemden son çıkanın hizmet süresi olmasıdır. Bu durumda Teorem (3) ile Teorem (4) birbiri ile çelişkiymiş gibi gözükabilir. Bu algılamadan kaynaklanan doğal bir yanlışlık olup Teorem (4)'ün sistemin boş olmadığı durumda değil keyfi durumda geçerli olduğu unutulmamalıdır.

2.15. En Küçük Kareler Yöntemi

En Küçük Kareler yöntemi regresyon modeli belirlendiğinde model parametrelerinin, model katsayılarının, hesaplanmasında kullanılan en etkili yöntemlerden biridir. Yöntemin temel fikri, artık kareler toplamının minimum olması ve böylelikle tahminden kaynaklanan hataların minimum

yapılmasıdır. Cevap değişkeninin i -inci değeri Y_i ve modelden tahmin edilen değeri \hat{Y}_i olmak üzere i -inci hata teriminin değeri ε_i aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

Bu durumda artık kareler toplamı (AKT) aşağıdaki şekildedir,

$$AKT = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

Model parametrelerini hesaplayabilmek için aşağıdaki optimizasyon probleminin AKT'ye bağlı olarak çözülmesi gerekir.

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \|Y_i - \hat{Y}_i\|$$

Burada β regresyon model parametrelerinin vektörüdür. $\| \cdot \|$ operatörünün nasıl seçileceği araştırmacının veriyi nasıl analiz edeceğine bağlı olarak değişir. Genelde kullanılan Öklid metriğidir.

$$\frac{\partial AKT}{\partial \beta} = \frac{\partial \varepsilon^t \varepsilon}{\partial \beta}$$

Regresyon modeli $Y = X\beta + \varepsilon$ olarak seçildiğinde yukarıdaki ifadenin alacağı şekli gösterelim,

$$\frac{\partial AKT}{\partial \beta} = \frac{\partial (Y - X\beta)^t (Y - X\beta)}{\partial \beta} = 0$$

$$-Y^t X - X^t Y + 2X^t X\beta = 0$$

$$2X^t X\beta = 2X^t Y$$

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t Y \quad (2.43)$$

Yukarıda çözülen optimizasyon probleminin en önemli özelliği hata toplamlarının sıfır olmasıdır. Literatürdeki bazı kaynaklarda bu varsayım olarak geçer. En küçük kareler yöntemi temel olarak bakıldığında parametrik olmayan bir yöntemdir. Kısaca dağılımdan bağımsız uygulanır. Bundan dolayı üzerine koyulan bazı kısıtlar aslında optimizasyon probleminin çözümünün varlığını garanti etmek içindir. Ancak temelde veri normal dağılıma sahip olmasa da yöntem uygulanabilir. Çözüm global bir minimumu verir. Tahminlerin gerçeği yansıtması için bazı durumların istenmesi doğaldır. Bunların başında verinin normal dağılıma sahip olması gelmektedir.

Sağlanması gereken en önemli ikinci şartta açıklayıcı değişkenlerin aralarında korelasyon olmamasıdır. Açıklayıcı değişkenler arasındaki korelasyon $X^t X$ matrisinin determinantını küçültür. Bu durum matrisin singüler olmasını sağlar. Dolayısıyla tersinin alınması güçleşir. Hata terimlerinin sabit varyanslı olup olmama durumu içeriği itibariyle tartışmalıdır. Hata terimleri regresyon modeli belirlendiğinde hesaplanan sayısal değerlerdir. Doğal olarak sabit bir varyansa sahiptir. Ancak stokastik modellerde bu anlayış değişebilir.

En küçük kareler yöntemi temelde amaç fonksiyonuna bağlıdır. Amaç fonksiyonu hata teriminin seçilişine göre farklılık gösterir. Yukarıdaki çözümlerde hata terimi $\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$ şeklinde seçilmiştir. Şimdi hata terimini aşağıdaki şekilde seçelim.

$$\varepsilon_i = y_i^{-1} - x_i$$

Bu durumda artık kareler toplamı aşağıdaki şekilde olur,

$$\begin{aligned} AKT &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i^{-1} - x_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - b_0}{b_1} - x_i \right)^2 \\ \frac{\partial AKT}{\partial b_0} &= 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - b_0}{b_1} - x_i \right) \left(\frac{-1}{b_1} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

$$\frac{\partial AKT}{\partial b_1} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - b_0}{b_1} - x_i \right) \left(\frac{-(y_i - b_0)}{b_1^2} \right) = 0$$

$$b_1 = \frac{\sum y^2 - 2n\bar{y}b_0 + nb_0^2}{\sum xy - n\bar{x}b_0} \quad (2.44)$$

Burada model denklemini aşağıdaki şekilde varsayılmıştır.

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + \varepsilon_i$$

Özellikle bu yöntem kalibrasyon problemlerinin çözümünde etkilidir. Benzer şekilde aynı model denklemini varsayarak amaç fonksiyonunu aşağıdaki şekilde alalım,

$$L = \sum_{j=1}^n (Y_j - y_j)^2 + (X_j - x_j)^2 - 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j (Y_j - b_0 - b_1 X_j)$$

Amaç fonksiyonunu bu şekilde aldığımızda, gözlem değerinin regresyon tahmin doğrusuna en yakın uzaklıklarını hata olarak seçmiş bulunuruz. Bu durumda toplam hatayı minimum yapabilmek için yukarıda verilen zarar fonksiyonu L 'nin sırasıyla türevlerini alalım,

$$\frac{\partial L}{\partial Y_j} = 2(Y_j - y_j) - 2\lambda_j = 0 \Rightarrow Y_j = y_j + \lambda_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_j} = 2(X_j - x_j) + 2\lambda_j b_1 = 0 \Rightarrow X_j = x_j - b_1 \lambda_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_0} = \sum_{j=1}^n \lambda_j = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_1} = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j = 0$$

Yukarıdaki denklemlere dikkat edilecek olunursa $\lambda_j = Y_j - y_j$ ve $Y_j = b_0 + b_1 X_j$ eşitliklerinde aşağıdaki şekilde λ_j parametresini elde edebiliriz.

$$\lambda_j = b_0 + b_1 X_j - y_j$$

$$= b_0 + b_1(x_j - b_1 \lambda_j) - y_j$$

$$= b_0 + b_1 x_j - b_1^2 \lambda_j - y_j$$

$$\lambda_j(1 + b_1^2) = b_0 + b_1 x_j - y_j$$

$$\lambda_j = \frac{b_0 + b_1 x_j - y_j}{1 + b_1^2} \quad (2.45)$$

Elde edilen bu değerler $\partial L / \partial b_0 = 0$ ve $\partial L / \partial b_1 = 0$ denklemlerinde kullanılırsa regresyon katsayılarının tahminini veren çözüme ulaşılabilir.

$$\sum_{j=1}^n \frac{b_0 + b_1 x_j - y_j}{1 + b_1^2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n b_0 + b_1 \sum_{j=1}^n x_j - \sum_{j=1}^n y_j = 0$$

$$n b_0 + b_1 n \bar{x} - n \bar{y} = 0$$

$$\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}$$

Burada elde edilen $b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$ ifadesi $\partial L/\partial b_1 = 0$ denklemini de kullanılırsa aşağıdaki çözümü elde ederiz.

$$\sum_{j=1}^n \frac{b_0 + b_1x_j - y_j}{1 + b_1^2} \left(x_j - b_1 \frac{b_0 + b_1x_j - y_j}{1 + b_1^2} \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\bar{y} - b_1\bar{x} + b_1x_j - y_j}{1 + b_1^2} \left(x_j - b_1 \frac{\bar{y} - b_1\bar{x} + b_1x_j - y_j}{1 + b_1^2} \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n (b_1(x_j - \bar{x}) - (y_j - \bar{y})) \left(x_j(1 + b_1^2) - b_1(b_1(x_j - \bar{x}) - (y_j - \bar{y})) \right) = 0 \quad (2.46)$$

Burada $x_j - \bar{x} = u_j$ ve $y_j - \bar{y} = v_j$ diyelim.

$$(1 + b_1^2) \sum_{j=1}^n \{b_1u_j - v_j\} (u_j + \bar{x}) - b_1 \sum_{j=1}^n \{b_1u_j - v_j\}^2 = 0$$

$$(1 + b_1^2) \left[b_1 \sum_{j=1}^n u_j^2 + b_1\bar{x} \sum_{j=1}^n u_j - \sum_{j=1}^n u_jv_j - \bar{x} \sum_{j=1}^n v_j \right]$$

$$- b_1^3 \sum_{j=1}^n u_j^2 - b_1 \sum_{j=1}^n v_j^2 - 2b_1^2 \sum_{j=1}^n u_jv_j = 0$$

Uygun sadeleştirmeler yapıldığında b_1 'e göre aşağıdaki ikinci derece denklem elde edilmiş olur,

$$\left(\sum_{j=1}^n u_jv_j \right) b_1^2 + \left(\sum_{j=1}^n u_j^2 - \sum_{j=1}^n v_j^2 \right) b_1 - \sum_{j=1}^n u_jv_j = 0$$

Çözüm olarak bu denklemin pozitif kökü alınmalıdır. Şimdide amaç fonksiyonunu hata alanı tanımlayacak şekilde oluşturalım,

$$L = \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j) \left(x_j - \frac{y_j - b_0}{b_1} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n (y_j - (b_0 + b_1x_j)) \left(x_j - \frac{y_j - b_0}{b_1} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_0} = \sum_{j=1}^n \left(-x_j + \frac{y_j - b_0}{b_1} + \frac{y_j - b_0 - b_1 x_j}{b_1} \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n (-2b_1 x_j + 2y_j) = 0$$

$$b_1 = \frac{\sum y_j}{\sum x_j}$$

Benzer şekilde amaç fonksiyonunun b_1 parametresine göre de türevini alırsak, aşağıdaki denklemleri elde ederiz,

$$\frac{\partial L}{\partial b_1} = \sum_{j=1}^n -x_j \left(x_j - \frac{y_j}{b_1} + \frac{b_0}{b_1} \right) + \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_j) \left(\frac{y_j - b_0}{b_1^2} \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n -b_1 x_j (b_1 x_j - y_j + b_0) + \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_j) \left(\frac{y_j - b_0}{b_1^2} \right) = 0$$

$$-b_1^2 \sum x^2 + b_1 \sum xy - b_1 b_0 \sum x + \sum y^2 - 2b_0 \sum y + nb_0^2 - b_1 \sum xy + b_0 b_1 \sum x = 0 \quad (2.47)$$

Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında b_0 parametresine göre düzenlenen ikinci dereceden denklem aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$nb_0^2 - 2b_0 \sum y - b_1^2 \sum x^2 + \sum y^2 = 0 \quad (2.48)$$

Çözüm olarak denklemin pozitif kökü alınır.

3. BULGULAR

3.1. Teknik Sistemler Üzerine Bazı Paradokslar ve Çözüm Önerileri

Endüstriyel üretimin önemli bir kısmında araştırma ve geliştirme (AR-GE) çalışmalarının ne kadar önemli olduğu aşikârdır. Üretilen bir ürünün önemli özelliklerinin standartlaştırılması tüketici açısından önemli bir tercih sebebidir. Üretimde ürünün standart ilk özelliği ortalama çalışma süresi ya da kısaca ürünün yaşam süresidir. Bu özellik üretimden çıkan bir ürün için ideal şartlarda hesaplanmakta ve buna bağlı olarak ürünün garanti süresi belirlenmektedir. Ancak ideal şartların sağlanmadığı ortamlarda ürünün yaşam süresinin beklenenden kısaldığı görülmektedir. Kısa bir örnek üzerinde açıklanan bu durum stres altında hizmet veren sistemlerin incelenmesini zorunlu hale getirmiş ve son literatürün önemli bir inceleme alanı olmuştur. Mazzanti [38]'de yaptığı incelemesinde gerilim ve yük çevrimleri nedeniyle yüksek elektro termal stres altın çalışan yüksek gerilim kablolarının yaşam süresini tahmin etmek için önemli bir yöntem ortaya koymuştur. Döngüsel akım değişimlerinin bir sonucu olarak termal geçişler kablo yalıtımı üzerinde önemli bir stres oluşturmaktadır. Bu çalışma sayesinde kablo izolasyonunun belirlenen stres altındaki ortalama yaşam süresi hesaplanabilmektedir. Pfanzt vd. [39]'da yoğun hava kirliliği ve seyrek orman dokusunda ladin ağacının iğne yapraklarının yaşam süresini araştırmıştır. Doğal olarak kendi tabii ortamında yaşayan türlerinden farklı olarak iğne yapraklar hava ve çevre koşullarının oluşturduğu stres altında daha düşük bir yaşam süresi göstermektedirler. Chandra vd. [40]'da yaptıkları incelemede mekanik stres ve kimyasal koşulların kalça implantlarının yaşam süresi üzerindeki etkisini araştırmıştır. Farklı malzeme, işlem ve yaşam koşullarının oluşturduğu stres altında implantın kullanım süresinin belirlenmesi bu alanda kullanılan malzeme ve yöntemlerin optimal bir şekilde kullanılmasına zemin oluşturmaktadır. Bu gibi araştırma örneklerini çoğaltmak mümkündür. Burada verilen üç örneğin araştırma alanları birbirlerinden oldukça farklı olmalarına rağmen amaçları birdir. Bu ise stres altında hizmet veren sistemlerin araştırılmasının önemini ortaya koymaktadır.

Yukarıda verilen örnekler genelde tek bir bileşenin yaşam süresi şeklindedir. Ancak teknik sistemler daha karmaşık yapılardır. Bu yapıların incelenebilmesi için daha detaylı analizlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu aşamada biraz bu yöntemlere değinelim. Sistemde stresin etkisini araştıran benzer bir çalışma alanı da stres-dayanıklılık modelleridir. Ancak stres-dayanıklılık modellerinden elde edilen sonuçlar direkt olarak stres altında çalışan sistemlere uygulanamaz. Stres-dayanıklılık modelleri daha çok var olan stresin etkisinin sistemin dayanıklılığı ile karşılaştırılmasıdır. Kısaca X sistemin dayanıklılığını gösteren değişken ve Y ise stresin gücünü gösteren bir değişken olmak üzere stres-dayanıklılık modeli $\{X > Y\}$ olayının olasılığı ile ilgilidir. Stres-dayanıklılık modelinde sistemin güvenilirliği bu olasılıkla ifade edilir,

$$R = Pr\{X > Y\}$$

Ancak stres-dayanıklılık modelinde sistem dayanıklılığının nasıl tanımlanacağı oldukça önemlidir. Bir sistemin yaşam süresi sistemin dayanıklılığı olarak algılanabilir. Ancak sistemin yaşam süresi birim olarak stres miktarı ile karşılaştırılmayacağından $\{X > Y\}$ olayı anlamsız hale gelir. Bu olayın ölçülebilir olması için sistem dayanıklılığın biriminin stres birimi ile uyumlu olması gerekmektedir. Sistem güvenilirliği yüzdelik bir ifade olduğundan olasılık ile ifade edilmesi doğaldır. Bu bakımdan güvenilirliği ifade eden olayın anlamlı olması şarttır.

Literatürde stres-dayanıklılık modeliyle ilgili önemli çalışmalar bulunabilir. Johnson [41]'de yayınladığı kitapta bileşenin güvenilirliğini tespit ederken çalışma ortamının stres koşullarını da dikkate almak gerektiğini vurgulamıştır. Sistem çalışırken ortaya çıkabilecek olumsuz şartların veya kısaca stresin modellenmesinin önemi oldukça fazladır. Modelde hem stres hem de dayanıklılık tesadüfi değişken olarak ele alınır. Güvenilirlik ise sistemin stresin üstesinden gelebilecek kadar güçlü olma olasılığı olarak tanımlanır. Bu bakımdan stres-dayanıklılık modeli inşaat, mekanik ve havacılık mühendisliğinde oldukça fazla sayıda uygulamaya sahiptir. Eryılmaz [42]'de yaptığı çalışmada stres-dayanıklılık modelinin iki durumlu yapısını seviyelendirerek çok durumlu stres-dayanıklılık modelini ortaya koymuştur. Bu seviyelendirme stres ile dayanıklılık arasındaki farka bağlı olarak yapılmıştır. Stres-dayanıklılık modelinde stres ile dayanıklılık arasındaki farka bağlı olarak güvenilirliğin seviyelendirilmesine Gökdere ve Gürcan'ın [46]'da ki çalışmasında da rastlanmaktadır. Bu çalışmada üstel stres etkilerine karşı Erlang dağılımına bağlı dayanıklılığın durumu araştırılmıştır.

Ayrıca literatürde stres-dayanıklılık modellerinde dağılım parametrelerinin tahminine yönelik çalışmalarda bulmak mümkündür. Burada bu çalışmaların tamamını zikretmek imkânımız olmadığından derlemeyi bu kadarıyla sınırlı tutmak yerinde olur.

3.2. Teknik Sistemin Stres Altında İncelenmesi

Ortamda var olan stres etkisi sistemin çalışmasına yansıtılmak istendiğinde üç farklı durum söz konusu olabilir. Birinci durumda stres etkisi sistemin yaşam süresini temsil eden değişkene yansıtılır,

$$X^* = YX \quad (3.1)$$

Burada Y stresin etkisi, X sistemin ideal yaşam süresi ve X^* var olan stres altında sistemin yaşam süresidir. Doğal olarak ortamdaki stres etkisi sistemin ideal yaşam süresini kısaltacağından $0 \leq Y \leq 1$ olarak seçilir. Bu seçimin alternatif durumları mevcuttur. Örneğin $U \sim Exp(\mu)$ dağılımına sahipken Y değişkeni aşağıdaki şekilde seçilebilir,

$$Y = \frac{1}{1+U} \quad (3.2)$$

Burada $U = 0$ olduğunda, stres yokken, $Y = 1$ ve $X^* = X$, $U \rightarrow \infty$ iken $Y = 0$ ve $X^* = 0$ özelliğini sağladığı görülür. Bu iki özellik stres altında incelenen sistemler için temel şarttır. Dağılımından alınan bir stres değişkeni için dağılım parametresinin tahmini geleneksel tahmin yöntemlerine göre her zaman sonuç vermeyebilir. Bu durum halen literatür için önemli bir inceleme alanıdır. Burada kısaca şunu da not edelim ki; Y değişkeninin seçimi stres altındaki sistemin dayanıklılığına ve stres etkisinin değişkenliğine bağlı olarak seçilmelidir. $0 \leq Y \leq 1$ aralığındaki hassas değişimlerde Mittag-Leffler fonksiyonu kullanılabilir [48]. İkinci durumda stres etkisi sistemin güvenilirlik fonksiyonuna yansıtılabilir. Bu durumda sistemin stres altındaki güvenilirliği $R^*(t) = YPr\{X > t\} = YR(t)$ şeklinde olur. Bu durumda da Y değişkeninin seçimi birinci durumla aynıdır. Ancak burada,

$$R^*(t) = e(t) + YR(t) \quad (3.3)$$

şeklindeki regresyon denkleminde bağlı kaldığı dikkate alınmalıdır. Üçüncü durumda ise stres etkisi bozulmalar arasındaki sürelerle yansıtılabilir. Bu durum daha çok, çok bileşenli sistemlerin incelenmesinde veya tamir prensibi altında çalışan sistemlerde kullanılabilir. Literatüre bakıldığında ardışık bozulmalar arasındaki süreleri dikkate alarak sistem güvenilirliğinin analizi yok denecek kadar azdır. Gürcan vd. [49]' da ki çalışmalarında n'den k-çıkışlı sistemlerde ardışık bozulmalar arasında geçen süreleri temel olarak sistemi temsil eden yarı Markov sürecini oluşturmuş ve sistemin bozulma olasılığını hesaplamışlardır. Literatürde bu şekildeki çalışmaların azlığının nedeni sistemin daha çok yaşam süresiyle temsil edilmesinden ve sistemin her zaman ardışık bozulmalar arası süreler ile temsil edilememesinden kaynaklanmaktadır. Stres etkisi ardışık bozulmalar arasında geçen sürelerle yansıtılmak istendiğinde aşağıdaki ardışık denklem dikkate alınmalıdır,

$$A_{k+1}(t) = e(t) + \int_0^{\infty} A_k(t/y) dF_Y(t) \quad (3.4)$$

Burada A_k ile ardışık iki bozulma arasında geçen sürenin t zamanından büyük olması olasılığı gösterilmiştir. Yukarıdaki eşitliğinde yine bir regresyon denklemi formatında olduğu unutulmamalıdır. Burada vurgulanması gereken en önemli nokta, üçüncü kategoride değerlendirilen stres modelinin bileşenlerin çalışma süreleri üzerinden değil bozulmalar arası geçen sürelerin dağılımından yararlanmasıdır. Literatürdeki bazı yayınlarda teknik sistemi temsil eden Markov süreci bileşenlerin çalışma sürelerinin üstel olmasına rağmen bozulmalar arasında geçen süreleri de üstel olarak alınmıştır [47]. Bu önemli paradoks üstel dağılımdan alınan sıra istatistiklerinin ardışık farklarının da üstelden farklı olmasına karşılık üstele yakın davranış sergilemesinden kaynaklanmaktadır.

3.3. Sistem Bileşenlerinin Yaşam Sürelerinin Dağılımı

Sistem bileşenlerinin yaşam sürelerinin dağılımı sistemin güvenilirliğinin hesaplanabilmesi için en önemli bilgidir. Bu bakımdan bileşenin çalışma süresini temsil eden dağılımın seçilmesi oldukça önemlidir. Yaşam süresi için kullanılan dağılımların en temeli üstel dağılımdır. $Exp(\lambda)$ dağılımında ortalama yaşam süresi $1/\lambda$ olup bu parametrenin küçük değerleri için yaşam süresi büyük ve büyük değerleri için de yaşam süresi küçük olur. Birçok analitik hesaplamada üstel dağılım kolaylık sağladığından dolayı yaşam dağılımı olarak seçilmesi doğaldır. Ancak üstel dağılımın yaşam dağılımı olarak kullanılmasında bazı olumsuz durumlarda söz konusudur. Bu durumların en başında üstel dağılımın belleksizlik özelliği gelmektedir. Kısaca belleksizlik özelliği herhangi bir anda bileşenin çalıştığı biliniyorsa bu an çalışma süresinin başlangıcı olarak alınmaktadır. Belleksizlik özelliği şartlı olaylarla ilgilenir. Şart dağılım fonksiyonunun değişkenine direkt olarak yansıdığı için birçok hesaplamada da kolaylık sağlamaktadır. Ancak teknik sistemde bir bileşenin çalışma süresinin gözleendiği andan öncesine bağlı olmaması ve bu andan sonra sıfırdan çalışmaya başlayan bir bileşen gibi değerlendirilmesi doğal olarak her zaman doğru değildir. Bu özellik çalışan bileşenin yapısına bağlıdır. Gözlem anı $c > 0$ olmak üzere üstel formdaki yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda(t - c)), \quad t \geq c, \lambda > 0, c > 0 \quad (3.5)$$

Yaşam süresi $c > 0$ anından başlamış olup ortalama yaşam süresi $c + 1/\lambda$ olur. Bu özellikler bir sistemin yaşam süresini analiz etmek için oldukça elverişlidir. Herhangi bir $t \geq 0$ anında çalıştığı bilinen sistemin bu andan sonra $h \geq 0$ zamanı kadar daha çalışma olasılığı sadece h zamanına bağlıdır. Sistemin geçmiş çalışma zamanından bağımsız olduğundan çalışan sisteme eskime veya yıpranma özelliği katmaz. Stres altında çalışan sistemlerde de stresin etkisini $\lambda = \lambda(t)$ şeklinde parametreye yansıtmak oldukça güçtür. Bu nedenlerden dolayı λ parametresine stresin etkisini yansıtmak için stres değişkeninin bulunduğu bir çarpana sahip olması gerekmektedir. Literatürde yer alan, Eryılmaz [42] ile Gökdere'nin [46] iki çalışmasına bakıldığında da sözü edilen bu durum açık bir şekilde görülebilmektedir.

Bu gibi hataların ortadan kaldırılabilmesi için yaşam süresini temsil eden dağılımın titizlikle seçilmesi ya da uygun olarak bilinen bir dağılımdan deforme edilmesi gerekmektedir. Bu durumu paralel bağlı iki bileşenden oluşan bir teknik sistem için yaşam süresini üstel dağılımdan deforme ederek açıklayalım.

İki bileşenli paralel bağlı bir sistemde ilk bozulma anı, bozulma gerçekleşinceye kadar bilinemez. İkinci bozulma anı ise aynı zamanda sistemin bozulma anıdır. Bozulma anını $c > 0$ ile gösterelim. Buna göre sistemi oluşturan her iki bileşenin de yaşam süresinin dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde alınabilir,

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\alpha_1}{1 - \exp(-\lambda_1 c)} (1 - \exp(-\lambda_1 t)) : 0 < t < c \\ 1 - \alpha_2 \exp(-\lambda_2 (t - c)) : t \geq c \end{cases} \quad (3.6)$$

Burada $\alpha_1 = Pr\{t < c\}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ eşitliğini sağlar. Aynı zamanda bu üstel dağılımdan deforme edilmiş bir dağılım fonksiyonudur. Bu fonksiyon bileşenlerin yaşam süreleri üstel olduğunda sistem güvenilirliğinin hesaplanabilmesi için oldukça önemlidir. İlk bakışta (3.6) ile verilen dağılım fonksiyonu geçmiş literatüre uyumsuz bir yapı olarak algılanabilir. Ancak (3.6) ile önerilen dağılım fonksiyonu aslında aşağıdaki dağılım fonksiyonunun parçalı olarak yazılmış şeklidir,

$$(1 + \delta_c(t))F(t) = \alpha_1 \left(1 + \frac{F_1(t)}{F_1(c)}\right) + (1 - \alpha_1)F_2(t - c), \quad t \geq 0 \quad (3.7)$$

Burada $\delta_c(t) = 1, t = c$, ve $\delta_c(t) = 0, t \neq c$, $F_j(t) \sim \text{Exp}(\lambda_j), j = 1, 2$ dir. (3.5) eşitliğinde $0 < t < c$ olduğunda $\alpha_1 = 1$ ve $t \geq c$ olduğunda $\alpha_2 = 1$ olacağından bu ifadelerin (3.5) eşitliğinde fazlalıktan yazılmış olmasının nedeni bu ifadenin (3.7) formundan nasıl gelmiş olduğunun görülebilmesi veya tersine (3.6) ifadesinin aslında bir konveks birleşim olduğunun anlaşılabilir olması içindir. İlk bozulma gerçekleştikten sonra artık bozulan bileşen birinci, çalışan bileşen ise ikinci bileşen konumundadır. Dikkat edilmesi gereken bir başka husus da $F_1(c)$ olasılığıdır. Gerçekte $t < c$ durumunda bozulma gerçekleşmediği için hangi bileşenin önce bozulacağı belli olmadığı gibi bozulma anı doğal olarak bileşenlerin çalışma sürelerinden büyük olmalıdır. Bu durumda da $F_1(c) = 1$ olur. Kısacası (3.6) eşitliği ile verilen dağılım fonksiyonu gerçekte (3.5) ile verilen dağılıma özdeştir. (3.7) ile verilen dağılım fonksiyonunda F_1 ve F_2 olarak bozulma anından sonra dağılım parametrelerinin yarılmaları keyfidir. Şayet birinci bozulma anından sonra bozulan bileşen diğerine yük anlamında bir stres aktarmak durumundaysa ikinci bileşenin dağılım parametresi buna uygun olarak seçilebilmektedir. Son olarak üstel dağılımın belleksizlik özelliğinin de (3.7) ile verilen dağılımda kullanıldığını da vurgulayalım.

Paralel bağlı sistemlerde sistem güvenilirliği maksimum sıra istatistiğinin dağılımından hesaplanmaktadır. Bu hesaplama anında sistemde herhangi bir bileşenin bozulmadığı varsayılır. Ancak sistem çalışırken gözlenen bozulma anları gözlenebilen bir değişkendir. Bundan dolayı bozulma anları sistem güvenilirliğinin hesabına dahil edilmesi gereken bir değişkendir. Bu durumu kısa bir örnekle gösterelim. Bunun için $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0,01$ ve $c = 50$ olarak aşağıdaki Tablo 3.1'i oluşturalım,

Tablo 3.1. Farklı anlarda paralel bağlı ve iki bileşenli sistemin güvenilirliği

t	R	R^*
10	0,9909	0,9909
25	0,9510	0,9510
70	0,7465	0,8187
90	0,6478	0,6703
100	0,6004	0,6065
120	0,5116	0,4965
150	0,3964	0,3678
180	0,3032	0,2725

Burada R ile maksimum sıra istatistiğinden hesaplanan sistem güvenilirliği R^* ile de ilk bozulma anı belli olduğunda buna bağlı olarak hesaplanan sistem güvenilirliği gösterilmiştir. Burada ilgilenilen teknik sistemde R ve R^* 'dan hangisinin geçerli olduğuna karar verebilmek için küçük bir simülasyon senaryosunu aşağıda oluşturalım.

Simülasyon Senaryosu: İlk olarak Tablo 3.2'ye uygun olması açısından $\lambda = 0,01$ parametrelili üstel dağılımdan ikişer bozulma anını $N = 10000$ defa üretelim. Daha sonra üretilen bozulma anlarından ilk bozulma anı $c_1 = 50$ olanları seçerek n tane ikinci bozulma anlarını dikkate alalım. Tablo 3.2'de ilk bozulma anından sonra hesaplanan anlar ilk olarak $t = 70$ ile başladığından bu süreden büyük olan ikinci bozulma anlarının sayısını n 'ye bölerek bir güvenilirlik skoru elde edelim. Daha sonra bu işlemi $M = 100$ defa tekrar ederek güvenilirlik skorunun ortalamasını bulalım. Bunun devamında bulunan bu ortalama skoru R ve R^* ile karşılaştırarak hata kareler ortalamasını $S = 1000$ tekrar ile hesaplayalım. Son olarak tüm bu döngüyü $K = 100$ kez tekrar ederek bu tekrarlardan kaç tanesinde R^* için hata kareler ortalamasının küçük olduğuna bakalım. Aşağıdaki tablo bu senaryoya göre keyfi belirlenen anlarda hesaplanan yüzdeleri R^* için göstermektedir.

Tablo 3.2. Belirlenen anlarda R^* için hesaplanan yüzdeler

t :	70	90	100	120	150	180
%:	100	100	98	100	100	100

Uygulanan simülasyon senaryosu hata kareler ortalaması üzerinden işlem yapmaktadır. Bu durumda önerilen dağılım fonksiyonu üzerinden hesaplanan güvenilirliğin ilgilenilen bu teknik sistemde maksimum sıra istatistiği üzerinden hesaplanan güvenilirlikten daha gerçekçi olduğunu Tablo 3.3'ün verilerinden rahatlıkla söyleyebiliriz. Burada dipnot olarak önemle şunu vurgulayabiliriz; bileşen sayısı n tane olan paralel bağlı bir teknik sistemde k tane bileşen

bozulduktan sonra sistemin güvenilirliği geriye kalan $n - k$ bileşen üzerinden maksimum sıra istatistiği ile hesaplanır. Geriye kalan $n - k$ bileşenin dağılımları ise üstelden deforme edilmiş aşağıda verilen (3.8) numaralı eşitlikteki gibi olmalıdır. Teknik sistemin bozulma anları uzunlamasına bir veri olup sıra istatistikler veriye göre adapte edilmelidir. Bu durum uzunlamasına bir veride sıra istatistiklerinin hesaplanmasının önemini ortaya koymaktadır. Bunun için önce bozulma anları artırıldığında bileşenlerin dağılımını daha sonra da uzunlamasına bir veride sıra istatistiklerinden elde edilen bazı bulguları verelim.

3.4. Bozulma Anları Artırıldığında Bileşenlerin Dağılımı

Bozulma anları artırıldığında bu dağılım fonksiyonu aşağıdaki formu alır,

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\alpha_1}{F_1(c_1)} F_1(t) : 0 < t < c_1 \\ S_{k-1} + \frac{\alpha_k}{F_k(c_k - c_{k-1})} F_k(t - c_{k-1}) : c_{k-1} < t < c_k \\ 1 - \alpha_r (1 - F_r(t - c_r)) : t > c_r \end{cases} \quad (3.8)$$

Burada r son bozulan makinanın indisi, $\alpha_1 = Pr\{t < c_1\}$, $\alpha_j = Pr\{c_{j-1} < t < c_j\}$, $\alpha_r = Pr\{t > c_r\}$, $S_k = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ olarak alınmıştır.

3.5. Geometrik Süreç

Ardışık olarak gerçekleşen olayların stokastik olarak incelenmesinde olayın gerçekleşme olasılığı veya başarılı olma olasılığının yanı sıra ardışık olaylar arasında geçen sürelerin de stokastik yapısı oldukça önemlidir. İşin gerçeği, ardışık gerçekleşen olayların iki temel bileşeninin olmasıdır. Bunlardan ilki gerçekleşme olasılığı ikincisi ise bu olayın bir önceki olaydan ne kadar süre sonra gerçekleşebileceğidir. Bu iki bilgi güvenilirlik teorisinin temelinde yatan ana unsurlardır. Güvenilirlik teorisine ait çoğu problem bu iki bilginin üzerine kurulmaktadır. Geometrik süreç temelde bir olayın gerçekleşme olasılığının tanımlanan parametrelerle ayarlanmasıdır. Bu ayarlama literatürde genelde olayın gerçekleşme olasılığından yapılır. Bazı çalışmalarda tekrarlar arasında geçen süreler önemli olduğunda da geometrik sürece başvurulmaktadır. Bu durumda geometrik süreç basit olarak şu şekilde tanımlanmaktadır,

$$Y_i = a^{i-1} X_i \quad (3.9)$$

Burada X_i ardışık iki olay arasında yani $i - 1$ inci ve i inci olaylar arasında geçen süredir. Dikkat edildiğinde geometrik süreci tanımlarken kullanılan parametrenin sıfırdan büyük olması gerektiği aşıkardır. Aynı düşünceyle birden büyük olması da bize ekstra bir kazanç sağlamayacağından güvenilirlik teorisinde bu parametrenin birden küçük seçilmesi uygundur. Özel olarak X_i standart bir sistemde bozulmalar arası geçen süre olarak kabul edildiğinde buna karşılık

Y_i aynı sistemin stres altında çalışması durumunda bozulmalar arası geçen süre olarak görülür. Kısacası geometrik süreç bu anlamda kullanılırken ortalama yaşam süresinin kılmasını incelemek için önemli bir araçtır. Sonuç olarak tesadüfi değişkenin önüne gelen bir katsayı değişken değerini küçültürken olasılık değerini aynı değişken değerinde artırmaktadır. Bu bağlamda değişkeni bir katsayı ile çarpmak aynı değişkene ait dağılım fonksiyonunu buna uygun katsayı ile çarpmakla eşdeğer tutulabilir. Literatürde bununla ilgili çalışmalardan önemli olanları şu şekilde sıralanabilir [50-51-52-53-54].

3.6. Doğal Stres ve Ortalama Yaşam Süresi

Kurulu bir sistemin sonsuza kadar çalışmasını engelleyen şey nedir? Aslında bu başlık altında bu sorunun cevabını araştırmak istiyoruz. Şayet hiçbir stres yoksa çalışan sistemin sonsuza kadar devam etmesi gerekliliği bize yaşadığımız ortamın alışkın olduğumuz doğal bir stresinin zaten var olduğunu gösteriyor. Satışa sürülen ürünlerin garanti süreleri, ortalama çalışma sürelerinin belirlenmesi çabası da bunun bir göstergesidir. Bu durumda X çalışma süresini gösteren tesadüfi değişken olduğunda EX doğal stres altındaki ortalama çalışma süresidir. Bu ortalama sürenin hesaplandığı ortam ise sistemin doğal ortamıdır. Şayet bu doğal ortamdan çalışma süresini azaltacak şekilde farklı ortamlarda sistemi çalışmaya maruz bırakıyorsak iki ortam arasındaki fark bize ekstra bir stresin varlığını gösteriyor. Bu durumda stresin ölçüsü nasıl olmalıdır? Ortamlar arasında var olan farklılıklar ile çalışma süresinin kılması ve bozulma olasılığı arasındaki ilişki nasıl açıklanmalıdır?

Bu gibi soruların cevabı hala aranmakta dursun biz ilk önce var olan doğal stres ile ortalama değer hesabını birleştirmeye çalışalım. İlk adım olarak aşağıdaki eşitlik ile başlayalım,

$$\oint \vec{u} d\vec{F}(t) = EX \quad (3.10)$$

Burada \vec{u} bir vektör alan, $F(t)$ ise X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu ve $\vec{F}(t)$ dağılım fonksiyonunun parametrik veya vektörel yazılımıdır. Bu durumda (3.10) eşitliğinin sol tarafı eğri integrali, sağ tarafı ise tesadüfi değişkenin ortalama değeridir. Bu eşitliği sağlayacak şekildeki vektörel alan aşağıdaki şekilde olmalıdır,

$$\vec{u}(x, y) = (0, x) \quad (3.11)$$

Yukarıdaki vektörel alanın ikinci bileşeninin ortamda var olan doğal strese ait olduğunu ve birinci bileşeninin ise ortalama çalışma süresini azaltan stres faktörü olduğunu kabul edelim. Bu durumda çalışma ortamının yapısı bir vektör alanla açıklanmış olur. (3.11) eşitliğinde birinci bileşen değeri sıfır olduğundan ortamda ekstra bir stres bulunmamaktadır. Vektörel alan aşağıdaki şekilde seçilecek olursa ortalama çalışma süresinde azalma görülecektir,

$$\vec{u}(x, y) = (-y, x) \quad (3.12)$$

Bu durumda (3.10) eşitliği aşağıdaki forma gelir,

$$\oint \vec{u} d\vec{F}(t) = -y_0 + EX \quad (3.13)$$

Burada $0 \leq y_0 \leq EX$ kabul edilir. Sonuç olarak doğal çalışma ortamını ifade eden vektörel alan sadece dik bileşene sahip olan bir alandır. Bu vektör alanın dağılım fonksiyonu üzerinde bıraktığı yük ise sistemin ortalama çalışma süresidir. Şayet bu vektörel alan yatay eksenin sol tarafına kaydırılacak olursa ortalama çalışma süresinde belli bir azalma meydana gelir. Bu durumda stres altındaki ortamlar sol tarafa doğru akış gösteren vektörel alanlardır. Sağ tarafa doğru akış gösteren vektörel alanlar ortalama yaşam süresini artıracığından sistem güvenilirliğini de artırır.

Açıklayıcı Bir Örnek:

Dağılım fonksiyonu olarak λ parametrelili üsteli alalım, $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$. Dağılım fonksiyonunun parametrik gösterimi aşağıdaki şekilde olur,

$$C := \{t, 1 - \exp(-\lambda t)\}$$

Vektörel alan (3.11) eşitliğindeki gibi alınır (3.10) eşitliğindeki eğri integrali şu şekilde yazılır,

$$\oint \vec{u} d\vec{F}(t) = \int_0^{\infty} (0, t) \cdot (1, \lambda \exp(-\lambda t)) dt = \int_0^{\infty} \lambda t \exp(-\lambda t) dt = 1/\lambda$$

Alışılmış doğal stresli ortamda ortalama çalışma süresi $1/\lambda$ olur. Şimdi vektörel alanı aşağıdaki şekilde seçelim,

$$\vec{u}(x, y = \exp(-\lambda x)) = (-\exp(-\lambda x), x) \quad (3.14)$$

Bu durumda eğri integrali aşağıdaki şekilde hesaplanır,

$$\begin{aligned} \oint \vec{u} d\vec{F}(t) &= \int_0^{\infty} (-\exp(-\lambda t), t) \cdot (1, \lambda \exp(-\lambda t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} (-\exp(-\lambda t) + \lambda t \exp(-\lambda t)) dt = 0 \end{aligned}$$

Elde edilen bu sonuç bize (3.14) eşitliği ile seçilen stresli ortamda sistemin kesinlikle çalışmayacağını gösterir. Şayet vektörel alan aşağıdaki şekilde seçilirse bu durumda ortalama çalışma süresi doğal ortamda çalışma süresinin iki katına çıkartılırdı,

$$\vec{u}(x, y = \exp(-\lambda x)) = (\exp(-\lambda x), x) \quad (3.16)$$

Burada not edilmesi gereken en önemli nokta, değer aralığı sınırsız olan değişkenlerde ortam stresinin sabit alınmamasıdır. Buda bize sınırsız sürede ortamdaki stresin kararlı bir şekilde sabit olarak kalamayacağını gösterir. Bu örneğe ilave olarak vektörel alanı aşağıdaki şekilde seçelim,

$$\vec{u}(x, y = \lambda/(x + 1)^2) = (-\lambda/(x + 1)^2, x) \quad (3.17)$$

Bu durumda (3.10) integrali şu şekilde hesaplanır,

$$\begin{aligned} \oint \vec{u} d\vec{F}(t) &= \int (-\lambda/(t + 1)^2, t) \cdot (1, \lambda \exp(-\lambda t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} (-\lambda/(t + 1)^2 + \lambda t \exp(-\lambda t)) dt = -\lambda + 1/\lambda \end{aligned} \quad (3.17)$$

Yukarıdaki hesaba göre $\lambda = 1/10$ olduğunda doğal çalışma şartlarında ortalama 10 birim çalışan bir sistem (3.16) ile seçilen bir strese tabii olduğunda ortalama 9.9 birim çalışacaktır. (3.16) ile verilen vektörel alanda yer alan ortalamayı azaltma parametresi geometrik süreçte olduğu gibi ayarlama katsayısı ile çarpım durumunda kontrol edilerek mevcut duruma uyum sağlayabilmektedir. Bu ve bunun gibi örnekler uygun senaryolar üretildikçe çoğaltılabilir.

Genel olarak bir teknik sistemin çalıştırılarak kontrol edilmeden sonsuza kadar bırakılması pek de olası bir durum değildir. Bu yüzden çalışma süresi sınırsız bir aralıkta tanımlanan değişkenler yerine genelde bakım ve yenileme gibi işlemler de dikkate alınarak sınırlı bir aralıkta tanımlanan değişkenlerin kullanılması daha mantıklıdır. Ancak üstel dağılımın belleksizlik özelliği bu problemi bir nebze ortadan kaldırmaktadır.

Sonuç olarak yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı gibi doğal çalışma ortamına ilave bir stres dahil edildiğinde sistemin ortalama çalışma süresinin aşağıdaki şekilde hesaplanacağı tezini bu bölümde savunmaktayız,

$$\vec{E}X = \oint \vec{u} d\vec{F}(t) \quad (3.18)$$

Bu şekilde ortalama geometrik süreçte olduğu gibi dağılım fonksiyonunun üzerinden bir azaltmaya giderek hesaplanmaz. Bunun yerine belirlenen stres vektörel alana bileşen olarak eklenir. Bu durumda ortalama hesabı tek bileşen üzerinden değil vektörel alan üzerinden hesaplanır.

3.7. Yenileme veya Bakım Durumlarında Ortalama Hesabı

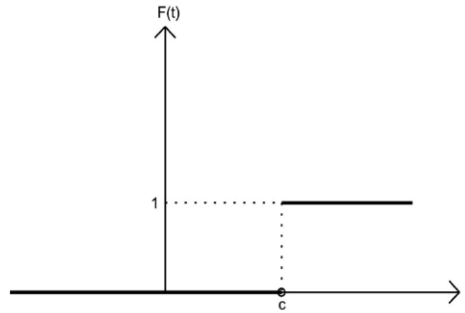
Çalışan bir sistem bozulduğu anda değişim veya onarım maliyeti göz ardı edilemeyecek derecede ise belirlenen zamanlarda yenileme işlemi tercih edilir. Burada kullandığımız yenileme terimi sistemi yenisiyle değiştirme olabileceği gibi bakım ve onarım işlemi de kastedilmektedir.

Genellikle yenileme işleminden sonra sistemin sıfırdan çalışmaya başladığı varsayımı geçerlidir. Literatürdeki nadir birkaç çalışmada yenileme anlarından sonra sistemin çalışma performansı düşürülmektedir. Bu çalışmalara [55] önemli bir örnektir. Bu alanda klasik denebilecek sayılı çalışmalardandır. Yenileme prensibi altında sistem analizi Laplace-Stieltjes dönüşümü yardımıyla gerçekleştirilirken sisteme yaşlanma prensibi de eklenmiştir.

Bu başlık altında bizim amacımız bir çalışma periyodu içerisinde ekstra bir stres söz konusu olduğunda sistemin ortalama çalışma zamanını tahmin ederek periyot aralığı üzerinde sistemin bozulmaması için bir öngöründe bulunmaktır. Bunun için ilk önce sabit çalışma süreleri için bir dağılım fonksiyonu tanımlayalım,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & ; t < c \\ 1 & ; t \geq c \end{cases} \quad (3.19)$$

Yukarıdaki dağılım fonksiyonunun tanımlanmasından da anlaşılacağı gibi sabit olan yenileme süresi $c > 0$ olur. Bu tip dağılım fonksiyonları tek bir sıçrama anına sahiptir ve sabit bir $X = c$ tesadüfi olayı tasvir ederler. Aşağıda dağılım fonksiyonunun grafiği Şekil 3.1'de gösterilmiştir,

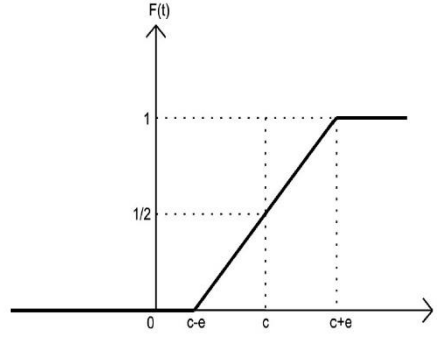


Şekil 3.1. Sabitin dağılım fonksiyonu

Bu şekilde tanımlanan bir dağılım fonksiyonunu $c > 0$ noktası civarında biraz değiştirelim,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & ; t < c - \varepsilon \\ (t - c + \varepsilon)/2\varepsilon & ; c - \varepsilon \leq t \leq c + \varepsilon \\ 1 & ; t > c + \varepsilon \end{cases} \quad (3.20)$$

Buradaki amacımız dağılım fonksiyonuna $c > 0$ noktası civarında diferansiyel atfedebilmektir. Bu uğraşımız aşağıdaki Şekil 3.2'den anlaşılabilir.



Şekil 3.2. $F(t)$ dağılım fonksiyonunun grafiği

Artık (3.20) ile verilen bir dağılım fonksiyonundan yoğunluk fonksiyonunu rahatlıkla elde edebiliriz,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; t < c - \varepsilon \\ 1/2\varepsilon & ; c - \varepsilon \leq t \leq c + \varepsilon \\ 0 & ; t > c + \varepsilon \end{cases} \quad (3.21)$$

Burada kısaca şu bilgiyi de not etmekte yarar var,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t) = \delta_c(t) = \begin{cases} 0 & ; t \neq c \\ \infty & ; t = c \end{cases} \quad (3.22)$$

Sonuç olarak bu şekilde tanımlanan bir tesadüfi değişkenin, $X = c$ özünde tesadüfi ancak gözlem değerinde sabit, doğal ortamdaki ortalamasını aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz,

$$\oint \bar{u}d\vec{F}(t) = \oint (0, t) \cdot (1, f(t)) dt = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} t/2\varepsilon dt = c = EX$$

Burada dikkat ettiğimiz en önemli unsur seçilen tesadüfi değişkenin $c > 0$ civarında sürekli olduğudur. Bu iddianın doğruluğu altında değişkene $c > 0$ civarında diferansiyel atfedilebilmiştir. Bazı reel olaylara bakıldığında sabit gibi görülen bir tekrarlama süresi gerçekten de sabit değildir. Örneğin bir aracın yıllık bakımı sabit bir süre gibi lanse edilir. Ancak bakım için verilen randevular göz önüne alınırsa bu sürenin gerçekten de sabit olmadığı aşikardır. Benzer şekilde rutin olarak alınan bir ilaç, örneğin günde bir kere, gerçekten de tam olarak 24 saat dakikası veya saniyesi olmadan mı alınıyor? Bu gibi örnekleri güncel yaşamdan sıralamak mümkündür. Bundan dolayı (3.20) ile verilen genişleme gerçek yaşamın doğal bir sonucudur. Bu genişleme sadece bir örnek olup tek türlü seçilme mecburiyetinin olmadığı aşikardır.

Şimdi sabit yenileme zamanına sahip olan bir sistem için ekstra bir stres faktörünün olduğunu ve bu varsayım altında yenileme zamanının nasıl etkileneceği üzerinde duralım. Kabul edelim ki ortamda var olan stresi aşağıdaki vektörel alan temsil etsin,

$$\vec{u}(x, y = (1/c)/(x + 1)^2) = (- (1/c)/(x + 1)^2, x) \quad (3.23)$$

Buna göre ortalama çalışma süresi aşağıdaki şekilde hesaplanır,

$$\begin{aligned} \vec{E}X &= \oint \vec{u} d\vec{F}(t) = \oint (- (1/c)/(t + 1)^2, t) \cdot (1, f(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} (- (1/c)/(t + 1)^2) dt + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} t/2\varepsilon dt = -1/c + c \end{aligned}$$

Elde edilen bu değere göre kabul edilen yenileme süresi var olan stres dikkate alındığında $1/c$ kadar kısalmaktadır.

Bu bölümde son olarak aşağıdaki eşitliği not etmek faydalıdır,

$$\vec{E}X = \int_0^{\infty} y(t) dt + EX \quad (3.24)$$

$$\int_0^{\infty} y(t) dt = \vec{E}X - EX \quad (3.25)$$

Var olan stres faktörünün hesabı (3.25) eşitliğinde olduğu gibidir. Her bir farklı stres ortamı için bu eşitlik sonuçta sabit değer alacaktır. Deneysel verilerde farklı stres ortamlarında gözlenen değerler yardımıyla $y(t)$ fonksiyonunun regresif ifadesi tahmin edilebilir. Strese dayalı vektörel alan aslında aşağıdaki şekilde yazılan bir iki değişkenli fonksiyonun tam diferansiyelinden elde edilmektedir,

$$z(x, y) = xy \quad (3.26)$$

Böylelikle kullandığımız vektörel alan doğal olarak aşağıdaki gibidir,

$$\vec{u} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad (3.27)$$

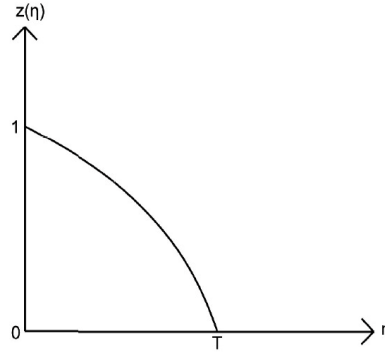
Bu ifade bize geometrik sürecin yapısını hatırlatır. (3.26) eşitliğinde y bileşeni stresi, x bileşeni ise ortalama çalışma süresini temsil eder. Bu ifadede doğal olarak geometrik süreçte de olduğu gibi stres bileşeni ortalama çalışma süresini azaltır.

3.8. Stres Faktörünün Geometrik Yorumu

Matematiksel modeller genelde uygulamaya konulduğunda birtakım teville ihtiyaç duyarlar. Uygulama verilerinin modelde nasıl değerlendirileceği, hangi parametrelerin hesaplanacağı ve en

önemlisi faktörlerin birbirlerini nasıl etkilediğinin belirlenmesi için modelin mümkün olduğu kadar görsel dökülebilmesi önemlidir. Bundan dolayı bu bölümde bazı geometrik yorumlara yer vermeyi uygun bulduk.

Unutmayalım ki temel olan stres bileşeni ile geometrik süreçte olduğu gibi azaltma faktörünün ilişkisinin incelenmesidir. İlk olarak tek bir stres altında sistemin güvenilirliğini strese bağlı olarak temsil etmeye çalışalım. Bunun için aşağıdaki grafiği Şekil 3.3'ü dikkate alalım,



Şekil 3.3. Eğimi sabit olmayan stres faktörü

Yukarıdaki grafikte z değişkeninin η stres faktörüne nasıl bağlanacağını tasvir etmektedir. Stres faktörünün değişim aralığı $0 \leq \eta \leq T$ şeklinde seçilmiştir. Stres faktörü maksimum değerine ulaştığında sistem bozulacaktır. Burada geometrik model aşağıdaki gibidir,

$$p_s = zp \quad (3.28)$$

Doğal ortamdaki güvenilirlik p ve stres altındaki güvenilirlik p_s ile gösterilmiştir. Stres ölçüm değerinin $t \geq 0$ parametresiyle ilişkilendirilmesi temelde iki farklı şekilde yapılabilir,

$$0 \leq \eta \leq T \Leftrightarrow 0 \leq t < \infty \text{ veya } 0 \leq t \leq EX \quad (3.29)$$

Yukarıdaki seçime göre iki farklı modelden biri tercih edilecektir. Burada ilk olarak $0 \leq t < \infty$ seçimini yapalım. Böylelikle $\eta = \eta(t)$ stres faktörünü aşağıdaki şekilde seçebiliriz,

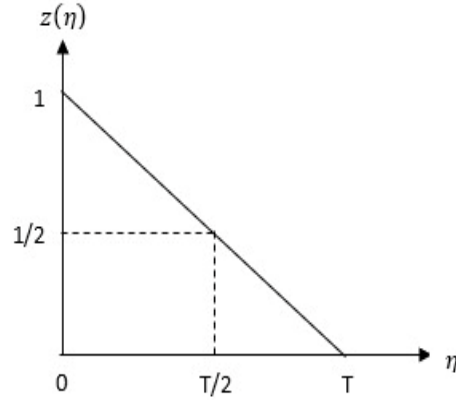
$$\eta = TF_M(t) \quad (3.30)$$

Burada $M \sim F_M(t)$ bir M tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonudur. Aynı zamanda M ile sistemin çalışma süresinin ilişkisi yoktur.

Şimdi $z = z(\eta)$ eşitliğini örnek olarak aşağıdaki şekilde alalım,

$$z = 1 - \eta/T \quad (3.31)$$

Bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki Şekil 3.4'de ki gibidir,



Şekil 3.4. Sabit eğime sahip stres faktörü

Buna ilaveten (3.30) eşitliğindeki dağılım fonksiyonunu da aşağıdaki şekilde seçelim,

$$F_M(t) = 1 - \exp(-mt) \quad (3.32)$$

Böylelikle η stres faktörünün değeri dikkate alınırsa azaltma değişkeni ve stres altındaki güvenilirlik sırasıyla aşağıdaki şekilde olacaktır,

$$z = \exp(-mt) \quad (3.33)$$

$$p_s = \exp(-mt) p \quad (3.34)$$

Sistemin çalışma süresi $Exp(\lambda)$ seçildiğinde $p_s = \exp(-(m + \lambda)t)$ olarak elde edilir. Bu sonuç bize stres altında çalışan sistemin çalışma süresinin dağılımının $m + \lambda$ parametrelili üstel olduğunu gösterir. Tüm bunları dikkate alarak gelinen bu noktada aşağıdaki şartlı olasılığı da hesaplayabiliriz,

$$\begin{aligned} Pr\{X_s > t - h | X > t\} &= Pr\{M > t - h | X > t\} Pr\{X > t - h | X > t\} \\ &= Pr\{M > t - h | X > t\} : Pr\{X > t - h | X > t\} = 1 \\ &= Pr\{M > t - h\} = \exp(-m(t - h)) : M \text{ ile } X \text{ bağımsız} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Burada hesaplanan şartlı olasılık stres faktörünün öneminin vurgulanması için oldukça önemlidir. Sistemin normal ortamda çalışma zamanının t 'den büyük olduğu biliniyorken $h > 0$ kadarlık bir azalma durumunda sistemin stres altındaki güvenilirliğini gösterir.

Aşağıdaki tabloda $m = 0.5$, $\lambda = 0.1$ için sistemin doğal ve stresli ortamlardaki güvenilirlikleri verilmiştir,

Tablo 3.3. Zamana göre hesaplanan güvenilirlikler

p	p_s	t
1.000	1.000	0.0
0.990	0.942	0.1
0.980	0.887	0.2
0.970	0.835	0.3
0.960	0.787	0.4
0.951	0.741	0.5
0.941	0.698	0.6
0.932	0.657	0.7
0.923	0.619	0.8
0.913	0.583	0.9
0.904	0.549	1.0
0.895	0.517	1.1
0.886	0.487	1.2
0.878	0.458	1.3
0.869	0.432	1.4
0.860	0.406	1.5
0.852	0.383	1.6
0.843	0.361	1.7
0.835	0.340	1.8
0.826	0.320	1.9
0.818	0.301	2.0
0.810	0.283	2.1
0.802	0.267	2.2
0.794	0.252	2.3
0.786	0.237	2.4
0.778	0.223	2.5
0.771	0.210	2.6
0.763	0.200	2.7
0.755	0.186	2.8
0.748	0.175	2.9
0.740	0.165	3.0
0.733	0.155	3.1
0.726	0.146	3.2
0.718	0.138	3.3
0.711	0.130	3.4
0.704	0.122	3.5
0.697	0.115	3.6
0.690	0.109	3.7
0.683	0.102	3.8
0.677	0.096	3.9
0.670	0.090	4.0

Tabloda 3.4’de yer alan sistem güvenilirliklerine dikkat edildiğinde bu örnek için seçilen stres faktörünün güvenilirlikleri $1/(m + \lambda) = 5/3$ ölçeğinde azalttığı görülebilir. Bu tabloya ilaveten aşağıdaki tabloda bazı şartlı olasılık değerleri gösterilmiştir,

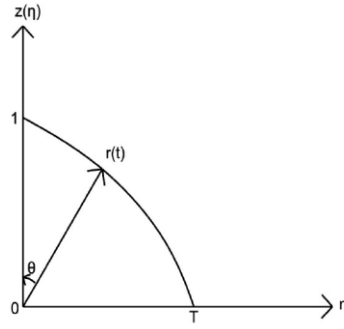
Tablo 3.4. Stres ortamındaki sistemin bazı şartlı güvenilirlik değerleri

$Pr\{X_s > t - h X > t\}$	t	h	$t - h$
0.637	1	0.1	0.9
0.670		0.2	0.8
0.704		0.3	0.7
0.740		0.4	0.6
0.778		0.5	0.5
0.386	2	0.1	1.9
0.406		0.2	1.8
0.427		0.3	1.7
0.449		0.4	1.6
0.472		0.5	1.5
0.234	3	0.1	2.9
0.246		0.2	2.8
0.259		0.3	2.7
0.272		0.4	2.6
0.286		0.5	2.5
0.142	4	0.1	3.9
0.149		0.2	3.8
0.157		0.3	3.7
0.165		0.4	3.6
0.173		0.5	3.5

Tablo 3.5’de yer alan şartlı güvenilirlikler Tablo 3.4’de yer alan stres altındaki sistem güvenilirliklerinden daha büyüktür. Burada kullanılan şart gözlem durumu değildir. Doğal ortamda belirlenen andaki güvenilirliği ya da çalışma olasılığı belli olan bir sistemin stres altında bu süreden daha küçük bir andaki güvenilirliğidir.

Bu örnekte sistemin güvenilirliği ve stres için seçilen dağılım keyfi olmakla birlikte farklı dağılımlar için benzer örnekler artırılabilir. Kullanılan yöntem literatürde başvurulan bazı yöntemlerden içerik olarak farklıdır. Örneğin [39-40] yayınlarında da benzer bir problem ele alınmış ancak yöntemde farklılık gözlenmektedir. Bizim örneğimizde ve literatürdeki bu iki çalışmada uygulanan yöntemlerin farklı oluşu veri yapısından kaynaklanır. Bu iki literatürün yöntemleri bizim örneğimize uyarlanamazken bizim örnekte kullandığımız yöntem bu iki literatür verisinde rahatlıkla uyarlanabilir. Burada kurgulanan örnekte (3.29) ifadesinin $0 \leq \eta \leq T \Leftrightarrow 0 \leq t < \infty$ bölümü kullanıldı. Benzer şekilde $0 \leq \eta \leq T \Leftrightarrow 0 \leq t \leq EX$ bölümü de rahatlıkla kullanılabilir.

Şimdi bu kısmın devamında Şekil 3.3’de görselleştirilen azaltma faktörü kutupsal ya da açısalsal olarak da yapılandırılabilceğini göstereyim. Bunun için aşağıdaki Şekil 3.5’i dikkate alalım,



Şekil 3.5. Azaltma faktörünün açıyla ilişkilendirilmesi

Yukarıdaki şekil boyu $\|r(0)\| = 1$ 'den $\|r(T)\| = T$ 'ye kadar uzanan bir vektör ve bu vektörün stres ölçüsü olan bileşenle yaptığı açıdan ibarettir. Geometrik gösterimlerde sadece iki ve üç boyutlu çizimler imkân dahilinde olduğundan sadece bir veya iki stres faktörüne yer verebilmekteyiz. Sistemin güvenilirliği p ve azaltma bileşeni z olmak üzere stres faktörü altındaki güvenilirlik (3.28) eşitliğindeki gibi alınmıştır.

Şekil 3.5'de $r(t)$ vektörünün z ile yaptığı açı $\theta = \pi/2$ iken $t = 0$, $z = \|r(0)\| = 1$ olup $p_s = p$ 'dir. Bu bize başlangıçta stres faktörünün olmadığını gösterir. Açı sıfırdan $\pi/2$ 'ye doğru arttıkça z bileşeni de birden sıfıra doğru azalacaktır. Bu ise p_s güvenilirliğini p 'den sıfıra doğru azaltacaktır. Şekil 3.5'de yatay eksen değerleri $rsint$ ve dikey eksen değerleri ise $rcost$ 'ye eşittir. Burada kısaca $\|r(t)\| = r$ ile temsil edilmektedir.

Yine iki stres faktörü altında azaltma faktörünün değerlerini Şekil 3.4'deki gibi temsil edelim. Bu durumda vektörün boyu aşağıdaki eşitlikte olduğu gibidir,

$$r = \sqrt{\eta^2 + \left(1 - \frac{\eta}{T}\right)^2} \quad (3.36)$$

Burada η değişkeninin aşağıdaki şekilde elde edileceğini unutmayalım,

$$\eta = \frac{tg\theta}{1 + tg\theta/T} \quad (3.37)$$

Azaltma faktörü hem r hem de θ parametresine bağlı olacağından θ parametresini de dağılım fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlayalım,

$$\theta = \frac{\pi}{2} F_M(t) \quad (3.38)$$

Yukarıdaki iki eşitlik dikkate alındığında azaltma faktörü şu şekilde elde edilir,

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} F_M(t)\right) \sqrt{\eta^2 + \left(1 - \frac{\eta}{T}\right)^2} \quad (3.39)$$

Burada yine F_M bir M tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonudur. Şimdi Tablo 3.4 değerlerini bu kabul altında hesaplayalım.

Tablo 3.5. $t=10$ alınarak hesaplanan stres altındaki güvenilirlikler

p	p_5	z	θ	r	η	t
1.000	1.000	1	0	1		0.0
0.990	0.982	0.992	0.076	0.995	0.075	0.1
0.980	0.965	0.984	0.149	0.996	0.147	0.2
0.970	0.947	0.977	0.218	1.001	0.216	0.3
0.960	0.932	0.971	0.284	1.012	0.283	0.4
0.951	0.917	0.965	0.347	1.026	0.349	0.5
0.941	0.902	0.958	0.407	1.043	0.413	0.6
0.932	0.887	0.952	0.463	1.064	0.476	0.7
0.923	0.873	0.946	0.517	1.088	0.539	0.8
0.913	0.858	0.940	0.569	1.115	0.601	0.9
0.904	0.844	0.933	0.618	1.145	0.663	1.0
0.895	0.830	0.927	0.664	1.178	0.726	1.1
0.886	0.816	0.921	0.708	1.213	0.789	1.2
0.878	0.803	0.914	0.750	1.250	0.853	1.3
0.869	0.789	0.908	0.790	1.291	0.917	1.4
0.860	0.775	0.902	0.828	1.334	0.983	1.5
0.852	0.762	0.895	0.864	1.379	1.050	1.6
0.843	0.749	0.888	0.899	1.427	1.117	1.7
0.835	0.736	0.881	0.932	1.478	1.187	1.8
0.826	0.722	0.874	0.963	1.531	1.257	1.9
0.818	0.709	0.867	0.992	1.587	1.329	2.0
0.810	0.696	0.860	1.021	1.645	1.403	2.1
0.802	0.684	0.852	1.047	1.706	1.478	2.2
0.794	0.671	0.845	1.073	1.769	1.555	2.3
0.786	0.658	0.837	1.097	1.835	1.634	2.4
0.778	0.645	0.829	1.120	1.904	1.714	2.5
0.771	0.633	0.821	1.142	1.975	1.797	2.6
0.763	0.620	0.812	1.163	2.049	1.882	2.7
0.755	0.607	0.804	1.183	2.126	1.968	2.8
0.748	0.595	0.795	1.202	2.205	2.057	2.9
0.740	0.582	0.786	1.220	2.286	2.147	3.0
0.733	0.569	0.777	1.237	2.371	2.240	3.1
0.726	0.557	0.767	1.253	2.457	2.335	3.2
0.718	0.544	0.758	1.269	2.547	2.432	3.3
0.711	0.532	0.748	1.283	2.638	2.530	3.4
0.704	0.519	0.738	1.297	2.733	2.631	3.5
0.697	0.507	0.728	1.311	2.829	2.734	3.6
0.690	0.495	0.717	1.323	2.928	2.839	3.7
0.683	0.483	0.707	1.335	3.029	2.946	3.8
0.677	0.471	0.696	1.347	3.133	3.055	3.9
0.670	0.459	0.685	1.358	3.239	3.166	4.0

Tablo 3.5’de hesaplanan stres altındaki güvenilirlikler Tablo 3.4’dekine nazaran daha yüksektir. Ancak her iki tablo için varsayılan senaryolar benzer olup üstel dağılımların parametreleri aynı alınmıştır. Buna rağmen bu farklılığın nedeni Tablo 3.6’da kullanılan azaltma faktörünün farklı bir hikâyeye sahip olmasıdır. Bu durum kullanılan yöntemlerde çeşitliliğin ne kadar önemli olduğunu açıkça gösterir.

3.9. Stres Faktörünün Diferansiyel Yorumu

Çalışan sistemlerin parametreleri doğal olarak sürekli değişken türünden benzetimlerle tahmin edilmeye çalışılır. Bu nedenle stres faktörünün de geometrik yorumunun yanı sıra diferansiyel özelliklerinin de incelenerek yorumlanması analizlerde bazı ayrıntılar sunabilir. Diferansiyel kavramı genel haliyle bir eğrinin veya bir yüzeyin belli bir yöndeki gidişatı tanımlar. Bu gidişat kısaca fonksiyon artımına bağlı olarak incelenir. Bu nedenle diferansiyel fonksiyon artımının lineer baş kısmı olarak tanımlanır. Tabii ki matematiksel kaynaklarda detaylı bir sürü tanımlaması mevcuttur. Ancak yorumlamaya başlandığında tamamı yaptığımız kısa tanıma denk olmaktadır. Diferansiyelli denklemler daha genel fonksiyon sınıflarını barındırdığından olayların tanımlanmasında bizlere daha fazla yardımcı olurlar. Bu bakımdan (3.28) ile verilen ilişkinin her iki tarafının türevi alınarak ve bazı güvenilirlikler için geçerli olan aşağıdaki ilişki de göz önünde bulundurularak birinci türevden oluşan bir diferansiyel denklem oluşturmak kolaydır. Bazı güvenilirlikler için geçerli olan ilişki şu şekildedir,

$$p' = gp \quad (3.40)$$

Burada g türevin alındığı değişkenden bağımsız sabit çarpandır. Örneğin,

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t) \Rightarrow p(t) = \exp(-\lambda t) \Rightarrow p' = \lambda \exp(-\lambda t) \Rightarrow g = -\lambda$$

Şimdi $p_s = up$ olmak üzere aşağıdaki adımlara dikkat edelim,

$$p_s' = u'p + up' : p' = gp$$

$$p_s' = u'p + gp_s : p_s = up$$

$$p_s' - gp_s = u'p \quad (3.41)$$

Son adımda bir lineer diferansiyel denklem elde edilmiştir. Bu denklem elde edilirken güvenilirlik için $p' = gp$ özelliğinin kullanıldığı göz ardı edilmemelidir. (3.41) ile verilen diferansiyel denklemin çözümü bize stres altında çalışan sistemin güvenilirliğini rahatlıkla verir. Ancak çözüm ailesi içerisinde özel bir tanesini seçmek istediğimizde sistemin özel şartlarını

belirleyerek kullanmamız gerekmektedir. (3.41) ile verilen diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki şekilde olacaktır,

$$p_s = \exp\left\{\int g dt\right\}\left\{\int \exp\left\{\int -g dt\right\}u' p dt + K\right\}$$

$$p_s = \exp\{gt\}\left\{\int \exp\{-gt\}u' p dt + K\right\} \quad (3.42)$$

Benzer şekilde (3.41) denkleminin farklı bir versiyonu da elde edilebilir,

$$pu' + gpu = p_s'$$

$$u' + gu = p_s'/p \quad (3.43)$$

Bu denklemin çözümü ise şu şekildedir,

$$u = \exp\{-gt\}\left\{\int \exp\{gt\}(p_s'/p)dt + K\right\} \quad (3.44)$$

Doğal olarak bu çözümde bize azaltma faktörünün ifadesini vermektedir. Sistem için elde edilen bilgiler hangi denkleme çözmemizi sağlıyorsa o denkleme kullanmak uygundur. Gerek (3.42) gerekse (3.44) çözümlerinde integral analitik olarak alınmadığından sayısal çözüme başvurulmalıdır. (3.42)'de p biliniyorken azaltma faktörünün analitik ifadesi yerine sayısal değerleri, (3.44)'de ise p biliniyorken stres altındaki güvenilirliğin sayısal değerleri gözlenmiş olmalıdır. Örnek olarak Tablo 3.3'ün değerleri kullanılarak (3.44) denkleminin sayısal çözümleri elde edilebilir. Aşağıdaki tablo bazı $t > 0$ değerleri için azaltma faktörünün sayısal değerlerinin hesaplanmasını göstermektedir $K = 1$,

Tablo 3.6. u için bazı sayısal değerler

p	p_s	p_s'	p_s'/p	$u(\text{tahmin})$	$u(\text{gerçek})$	t
1.000	1.000					0.0
0.990	0.942	-0.58	-0.58	0.9318	0.95	0.1
0.980	0.887	-0.55	-0.56	0.8691	0.91	0.2
0.970	0.835	-0.52	-0.53	0.8120	0.86	0.3
0.960	0.787	-0.48	-0.50	0.7647	0.82	0.4
0.951	0.741	-0.46	-0.48	0.7157	0.78	0.5
0.941	0.698	-0.43	-0.46	0.6739	0.74	0.6
0.932	0.657	-0.41	-0.44	0.6349	0.70	0.7
0.923	0.619	-0.38	-0.41	0.6079	0.67	0.8
0.913	0.583	-0.36	-0.39	0.5783	0.64	0.9
0.904	0.549	-0.34	-0.38	0.5432	0.61	1.0
0.895	0.517	-0.32	-0.36	0.5208	0.58	1.1
0.886	0.487	-0.30	-0.34	0.5024	0.55	1.2
0.878	0.458	-0.29	-0.33	0.4758	0.52	1.3
0.869	0.432	-0.26	-0.30	0.4774	0.50	1.4
0.860	0.406	-0.26	-0.30	0.4428	0.47	1.5
0.852	0.383	-0.23	-0.27	0.4529	0.45	1.6
0.843	0.361	-0.22	-0.26	0.4372	0.43	1.7
0.835	0.340	-0.21	-0.25	0.4234	0.41	1.8
0.826	0.320	-0.20	-0.24	0.4117	0.39	1.9
0.818	0.301	-0.19	-0.23	0.4018	0.37	2.0
0.810	0.283	-0.18	-0.22	0.3939	0.35	2.1
0.802	0.267	-0.16	-0.20	0.4076	0.33	2.2
0.794	0.252	-0.15	-0.19	0.4041	0.32	2.3
0.786	0.237	-0.15	-0.19	0.3812	0.30	2.4
0.778	0.223	-0.14	-0.18	0.3806	0.29	2.5
0.771	0.210	-0.13	-0.17	0.3818	0.27	2.6
0.763	0.200	-0.10	-0.13	0.4558	0.26	2.7
0.755	0.186	-0.14	-0.19	0.2918	0.25	2.8
0.748	0.175	-0.11	-0.15	0.3707	0.23	2.9
0.740	0.165	-0.10	-0.14	0.3780	0.22	3.0
0.733	0.155	-0.10	-0.14	0.3603	0.21	3.1
0.726	0.146	-0.09	-0.12	0.3975	0.20	3.2
0.718	0.138	-0.08	-0.11	0.4097	0.19	3.3
0.711	0.130	-0.08	-0.11	0.3947	0.18	3.4
0.704	0.122	-0.08	-0.11	0.3798	0.17	3.5
0.697	0.115	-0.07	-0.10	0.3954	0.16	3.6
0.690	0.109	-0.06	-0.09	0.4124	0.16	3.7
0.683	0.102	-0.07	-0.10	0.3677	0.15	3.8
0.677	0.096	-0.06	-0.09	0.3864	0.14	3.9
0.670	0.090	-0.06	-0.09	0.3736	0.13	4.0

4. SONUÇ

Çalışan bir sistemin yapısını anlamak temelde basit gibi görülse de oldukça güç bir süreçtir. ‘Temelde basit gibi görülse’ ifadesiyle anlatmak istediğimiz çalışan bir sistemin ilk bakışta sadece yapısal özelliğiyle değerlendirilmesidir. Hâlbuki çalışan bir sistem çalışma ortamıyla beraber değerlendirilerek çalışma sürecinin birden fazla faktörle ilişkili olduğunu unutmamalıyız. Bu çalışmada en başından beri vurgulamak istediğimiz en önemli kabul ideal ortamda çalıştırılan bir sistemin sonsuza kadar çalışabileceği fikridir. Ancak ortalama bir çalışma süresine sahip olan sistemlerin çalıştıkları ortamlar ise sistemin çalışmasını engelleyen faktörlere sahiptir. Basit bir örnek olarak yerçekimi ve sürtünmesi olmayan bir ortamda fırlatılan bir nesne fırlatıldığı yönde sonsuza kadar aynı hızla gitmelidir. Buna karşılık dünyada yani yerçekimi ve sürtünmenin olduğu bir ortamda atılan bir nesne ise fizikte adlandırıldığı gibi eğik atış şekli gösterip bir süre sonra yerçekimine yenik düşerek hareketi sonlanır. Bu yüzden doğal çalışma ortamlarında tasarlanan sistemler bir süre sonra doğal ortamlarından kaynaklanan strese yenik düşerek çalışma süresini tamamlamaktadır. Kısaca doğal ortamlardaki strese doğal stres adı veriyoruz. Varsayılan bu doğal stresin üzerine ilave olarak başka streslerde eklendiğinde sistemin çalışma süresi tasarlanan ortalamasının altına düşmektedir. Literatürde buna ait sayısı belirsiz çalışmaya rastlamak mümkündür. İlgili paragraflarda da söz ettiğimiz gibi bu çalışmamızda cüzi bir kısmından bahsetme imkânımız oldu [38-39-40]. Birden fazla bileşenden oluşan bir sistemin bozulan keyfi bir bileşeni her zaman sistemi bozmak zorunda değildir. Bozulma anlarıyla, sistemin bozulma anı arasında ilk bakışta ilişki yok gibi gözükse de bu durum bileşenlerin çalışma sürelerinin dağılım fonksiyonlarıyla yakından ilişkilidir. Örneğin paralel bağlı bir sistemde ortalama çalışma süresi en büyük olan bileşen bozulduğunda sistemin bozulması gerekirken, sistemin güvenilirliğini maksimum sıra istatistiğinin dağılımından hesaplamak zorunda kalmaktayız. Bunun nedeni çalışma süresi dağılımlarının $t > 0$ 'dan başlamasıdır. Ortalama çalışma süresi en büyük olan bileşeninde üretiminde çalışma süresi ortalamanın çok çok altında olan mamuller olabilir. Bundan dolayı sıra istatistikleri güvenilirlik teorisinin temelini oluşturur. Bundan dolayı bulguların ilk bölümünde bozulma anı bilindiğinde sıra istatistiklerinin hesabına yer verilmiştir. Bununla ilgili olan (3.8) numaralı eşitlik bizim için önemlidir. Bu eşitlikte varsayılan dağılım fonksiyonu aslında $c_{k-1} < t < c_k$ şartı altında, yani birbirini takip eden ardışık iki bozulma anı arasında bir sonraki bozulma gerçekleşmemişken, aşağıdaki şekilde verilen bir tesadüfi değişkeni tanımlamaktadır,

$$M \sim U(0, F_k(c_k - c_{k-1}))$$

Bu bulgu çalışan sistemi tanımlayan oldukça önemli yardımcı bir faktörü ortaya çıkarmamızı sağlar. Özellikle, Gökdere [47] ve Eryılmaz [42] bu iki çalışmada kullanılmamış olsa bile böyle bir M değişkenine ait faktörün eksikliği hissedilmektedir. Neden? Bileşenlerinin çalışma süreleri üstel

olan bir sistemin ardışık bozulma anları arasında geçen sürelerin üstel kabul edilmesi ve hatta sistemdeki, sıraya bağlı, bozulma anlarının üstel kabul edilmesi pek de doğru bir kabul değildir. Bunun yerine herhangi bir bozulma anı bilindiğinde, artık üstel alınabilir, bunun belleksizlik özelliği kullanılarak inceleme yapılması daha doğrudur. Bu duruma literatürde Gürçan vd. [49]'da rastlamaktayız. Bu çalışmada müstakil olarak sistem ardışık bozulma anları arasındaki süreler ile tanımlanmıştır.

Bulguların ikinci kısmında daha çok sistemi etkileyen streslerin ortalama çalışma süresine olan etkilerinin nasıl tanımlanacağı üzerinde durulmuş ve stresin geometrik ve diferansiyel yorumlarına yer verilmiştir. Bu kısmın başlangıcında ortalama çalışma süresi özel olarak tanımlanan bir vektör alanın dağılım fonksiyonu üzerinde bıraktığı yük olarak tasarlanmıştır. Bu yük ne kadar büyük olursa ortalama çalışma süresi o kadar artar. Yükü azaltan faktörler vektör alanı sola kaydıran yapılar, artıran faktörler ise vektör alanı sağa kaydıran yapılardır. Doğal ortam ise yatay bileşeni olmayan vektör alanlardır. Bu da oldukça önemli bir tanımlamadır. Dağılım fonksiyonunun dikey eksenindeki genişliği sadece bir birimdir. Bu durumda doğal ortamdaki ortalama çalışma süresinin sonsuz olma şansı yoktur. Çünkü yatay bileşeni olmayan bir vektör alanın eğimi olmayan bölgede dağılım fonksiyonu üzerine bırakacağı yük sıfırdır. Tüm tanım aralığı üzerinden bakıldığında $\vec{E}X$ stres altındaki ortalama çalışma süresidir. Ancak herhangi bir anda stresin ortalama çalışma süresi üzerinde bıraktığı etkiyi ölçmek pek de kolay değildir. Özellikle ortalama çalışma süresi belirli bir anda hesaplanan bir değer değildir. Ancak tüm tanım aralığı yerine kısıtlanmış bir alt aralıkta ortalama hesaplamak istiyorsak bunu şartlı dağılım yardımıyla hesaplamamız mümkündür. Örneğin Tablo 3.4'de kullanılan $\lambda = 0,1$ parametrelili üstel dağılımın tüm tanım aralığı üzerinden ortalaması $EX = 10$ olmakla birlikte aşağıdaki Tablo 4.1' de her iki sistemin bazı şartlı ortalamaları hesaplanmıştır.

Tablo 4.1. Normal ve stres durumlarında a süresi üzerinden hesaplanan şartlı ortalamalar

p	f	$E\{X X < a\}$	p_s	f_s	$\bar{E}\{X X < a\}$	t
1.000	0		1.000	0		0.0
0.990	0.01		0.942	0.058		0.1
0.980	0.01		0.887	0.055		0.2
0.970	0.01		0.835	0.052		0.3
0.960	0.01		0.787	0.048		0.4
0.951	0.009		0.741	0.046		0.5
0.941	0.01		0.698	0.043		0.6
0.932	0.009		0.657	0.041		0.7
0.923	0.009		0.619	0.038		0.8
0.913	0.01		0.583	0.036		0.9
0.904	0.009	0.542	0.549	0.034	0.500	1.0
0.895	0.009		0.517	0.032		1.1
0.886	0.009		0.487	0.030		1.2
0.878	0.008		0.458	0.029		1.3
0.869	0.009		0.432	0.026		1.4
0.860	0.009		0.406	0.026		1.5
0.852	0.008		0.383	0.023		1.6
0.843	0.009		0.361	0.022		1.7
0.835	0.008		0.340	0.021		1.8
0.826	0.009		0.320	0.020		1.9
0.818	0.008	1.015	0.301	0.019	0.856	2.0
0.810	0.008		0.283	0.018		2.1
0.802	0.008		0.267	0.016		2.2
0.794	0.008		0.252	0.015		2.3
0.786	0.008		0.237	0.015		2.4
0.778	0.008		0.223	0.014		2.5
0.771	0.007		0.210	0.013		2.6
0.763	0.008		0.200	0.010		2.7
0.755	0.008		0.186	0.014		2.8
0.748	0.007		0.175	0.011		2.9
0.740	0.008	1.474	0.165	0.010	1.123	3.0
0.733	0.007		0.155	0.010		3.1
0.726	0.007		0.146	0.009		3.2
0.718	0.008		0.138	0.008		3.3
0.711	0.007		0.130	0.008		3.4
0.704	0.007		0.122	0.008		3.5
0.697	0.007		0.115	0.007		3.6
0.690	0.007		0.109	0.006		3.7
0.683	0.007		0.102	0.007		3.8
0.677	0.006		0.096	0.006		3.9
0.670	0.007	1.913	0.090	0.006	1.557	4.0

Tablo 4.2’de şartlı ortalamalar Tablo 3.4’den alınan dağılım değerleriyle hesaplanmıştır. Dikkat edildiğinde stres altındaki ortalamaların diğer ortalamalardan daha düşük olduğu görülür. Aradaki farklar (3.24) eşitliğinden alınan fonksiyonun hesap değerleridir,

$$g(s) = \int_0^s y(t) dt$$

Böylelikle $g(0) = 0, g(1) = 0.042, g(2) = 0.201, g(3) = 0.552, g(4) = 0.908$ hesap değerleri rahatlıkla elde edilir. Dikkat dildiğinde bu değerler sıfır ve bir aralığında değer alan temelde $x/(1+x)$ den deforme edilen bir fonksiyona aittir. Bundan dolayı $g(s)$ fonksiyonunun regresyon tahmini rahatlıkla yapılabilir. Hal böyle iken hesaplama prosedürü tam tersi yönde de çalışabilir.

Stres faktörünün geometrik yorumu yapılırken (3.28) eşitliğinin temel alındığını unutmamalıyım. Bundan dolayı parametreye bağlı olarak azaltma faktörü olarak kullanılan z değişkeni birden sıfıra doğru bir değişim göstermektedir. Örnek olarak basit doğrusal azalan bir yapı ilgili kısımda kullanılmıştır.

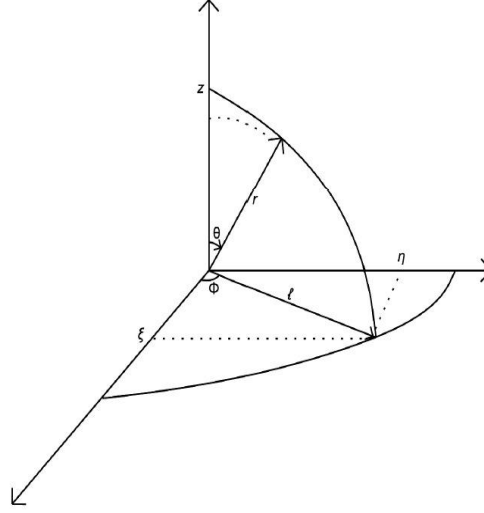
Örnek olarak aşağıdaki veriyi göz önüne alalım. Veride $\lambda = 0.01$ alınmıştır,

Tablo 4.2. Zamana göre gözlenen stres değerinden hesaplanan model parametreleri

t	η	p	p_s	z	r	θ
0-5	2	0.95	0.87	0.92	2.2	65.29
5-10	2.2	0.9	0.74	0.83	2.35	69.33
10-15	2.5	0.86	0.62	0.72	2.6	73.93
15-20	2.7	0.82	0.57	0.7	2.78	75.46
20-25	2.8	0.78	0.5	0.65	2.87	76.93
25-30	3	0.74	0.47	0.64	3.06	77.95
30-35	3.4	0.7	0.4	0.58	3.45	80.32
35-40	4.5	0.67	0.38	0.57	4.53	82.78
40-45	5	0.64	0.33	0.52	5.02	84.06
45-50	6	0.6	0.27	0.45	6.02	85.71
50-55	9	0.58	0.23	0.4	9	87.45
55-60	12	0.55	0.2	0.38	12	88.18

Bu örnekte stres faktörü, η , artan değerlere göre tasarlanmış ve zamana göre gözlenmiştir. Sistemin çalışma performansı normal ortamda belli olduğundan güvenilirlik değerleri hesaplanabilir. Ancak deneyde p_s değerlerinin de gözlenmiş olması gerekmektedir. Bunun için senaryo η stres değerinde çalışan sistemlerin t zaman aralığının sonunda çalışan sistem sayısına göre tasarlanmalıdır. Tabii ki bu durum önemli bir veri kaynağını da beraberinde getirir. Bundan dolayı senaryoyu bunun aksine tasarlamak her zaman daha faydalıdır. Bunun kitle dağılımlarının bilinmesi demektir.

Temel olarak geometrik yorum yapılırken şekiller düzlemsel olarak seçilmiştir. Ancak üç boyuta da taşınabilir. Aşağıdaki Şekil 3.6 bu durumu rahatlıkla açıklar,



Şekil 3.6. Azalma faktörünün iki strese bağlı olarak değişimi

Burada eksen değerleri parametrik olarak aşağıdaki şekildedir,

$$z = r \cos \theta$$

$$l = r \sin \theta$$

$$\eta = r \sin \theta \cos \phi$$

$$\xi = r \sin \theta \sin \phi$$

Stres faktörünün diferansiyel yorumunun yapıldığı kısımda (3.42) ve (3.44) eşitlikleriyle verilen iki adet çözüm öne sürülmüştür. Bu çözümlerden (3.42) numaralı olanı stres altındaki güvenilirlik değerlerini verir. Bu integralin hesaplanabilmesi için azaltma faktörünün analitik olarak bilinmesi birinci önceliktir. Elimizde bu imkân yoksa yaklaşık olarak hesaplanması da bize yaklaşık bir çözüm verebilir. Gözlem değerlerinin daha küçük zaman aralıklarına sahip olması gerekir. Ancak bu faktörün kitle dağılımı biliniyorsa bu durum işlemleri kolaylaştıracaktır. Aynı durum (3.44) eşitliği için de geçerlidir.

5. TARTIŞMA

Sistem analizi temelde stokastik süreçlerin önemli bir uygulama alanıdır. Sistem güvenilirliği direkt olarak olasılıksal bir ifade olup sistem analizi içerisinde sıkça başvurulan bir parametredir. Olasılıksal ifadeler mümkün sonuçlar içerisinde deneysel olarak seçilebildiği gibi kitlesel özelliklere bağlı olarak da önümüze gelebilmektedir. Olasılıkta pek de dikkat etmediğimiz bir kullanım hatası, eskilerin deyimleriyle galatı meşhur, ‘Bir madeni para havaya atılıp yere düştüğünde tura gelme olasılığı nedir?’ veya ‘Bir madeni para havaya atılsa yere düştüğünde tura gelme olasılığı nedir?’ şeklindeki iki sorudan hangisi olasılıkla ilişkilendirilebilir? Tabii ki ikincisi. Çünkü birincisi gerçekleşmiş bir olaydır ve olasılığını konuşmak yerine yere düşen paraya bakmak daha mantıklıdır. Kısa bir şekilde hikâye bu durum aslında bize ‘gözlem’ ile ‘varsayılan’ durumlar arasındaki farkı anlatmaktadır. Çalışmamızın ilk kısmında sıra istatistikleri için kullanılan paradoks aslında buna aittir. Çalışan bir teknik sistem gözlem anında yapı değiştirmektedir. Örneğin 10’dan 5 çıkışlı bir F sistemi ikinci bileşenin bozulma anından itibaren artık 8’den 3 çıkışlı bir F istemine dönmüştür. Ancak sistem güvenilirliği yapısal olarak sistem çalışmaya başlamadan önce hesaplandığından bu durum göz ardı edilir. Literatürde buna ait birçok örnek bulunabilir, Eryılmaz [43-44-45] deki çalışmaları tamamen varsayılan durumlar üzerinde n ’den k çıkışlı sistemlerin incelemesine aittir.

Çalışan sistemlerin veya genel ifadeyle birazda çekinmeden söylersek yaşayan sistemlerin stokastik analizi birçok bilim dalının başvurduğu bir inceleme türüdür. Genelde fiziksel temellere dayanan araştırmalar mühendislik alanında, biyolojik temellere dayanan araştırmalar ise genetik mühendisliği gibi hem mühendislik alanında hem de tıp alanındaki çalışmalardır. Bu çalışmaların büyük bir kısmını yaşayan sistemlerin büyüme veya küçülmeyle ilintili olan alanlar tutar. Örnek olarak [56]’da biyolojik araştırmalar için geliştirilmiş özel diferansiyel denklem tiplerini ve çözümlerini araştırmışlardır. Biyolojik araştırmalar için geliştirilen diferansiyel denklem yapıları genelde büyüme veya küçülme eğiliminde olan eğri tiplerinin sınıfı üzerinden çalışırlar. Bunun en temel örneği lojistik modeldir. Tabii ki araştırmalar gelişikçe denklem aileleri de çoğalarak farklı çözüm yöntemleri aramanın derdine düşülmüştür. Literatürde buna ait birçok örnekten İlatı [57] ve Corti [58] sadece ikisidir. Bu çalışmalardan ilki Kolmogorov denklemi için Galerkin yöntemini kullanırken ikincisi süreksiz Galerkin yönteminin kullanılmasını incelemiştir. Sürekli zamanlı ve sürekli durum uzayına sahip Markov zincirleri için Kolmogorov diferansiyel denklemi oldukça önemli bir yapıdır. Tabii ki bu denklem genel bir sınıfı kapsadığından çözüm ailesi birçok araştırmayı içine alabilecek kapasitededir. Bizim çalışmamızın ‘stresin diferansiyel yorumu’ kısmında sabit katsayılı homojen olmayan iki adet lineer diferansiyel denkleme yer verilmiştir. Bu denklemlerin çözümü (3.42) ve (3.44) eşitliklerinde mevcuttur. Bu bakımdan çözüm için Galerkin metodu gibi yöntemlere başvurulmamıştır. Ancak sayısal hesaplamalar yine bu denklemler içinde

geçerlidir. Tabii ki verilen diferansiyel denklemler $p' = gp$ fonksiyon sınıfı içerisinde. Burada unutulmamalıdır ki (3.42) ve (3.44) denklemleri birbirlerini ardışık takip eden çözümleri sunmaktadırlar. Bu ise bir ardışık hesaplama sürecini bize sunmaktadır. Ancak biz güvenilirlik hesaplaması içerisinde genelde stresin kitle dağılımının bilindiği kabulü altında işlem yapmayı tercih etmekteyiz. Örnek olarak [46-49].

Stresin diferansiyel yorumunu yaparken atlanmaması gereken önemli bir özelliği hemen aşağıda not edelim,

$$t_0 = \max\{t : u(t) = 1\}$$

$$p_s(t_0 + h) = u(h)p(t)$$

$$p_s(t) = p(t), \quad t \leq t_0$$

$$\frac{p_s(t_0 + h) - p_s(t_0)}{h} = \frac{u(h) - 1}{h} p(t_0)$$

$$p'_s(t_0) = u'(0)p(t_0)$$

Bu özellik hemen hemen geometrik süreçlerin çoğunda dikkate alınmaz. Örnek olarak Bhattacharyya [59], Brown [60] ve benzeri çalışmalar literatürde görülebilir. Bu gibi azalma faktörü içeren çalışmalarda kullanılan matematiksel modeller azalma faktörünü analitik bir ifadeyle sunma çabasında olduklarından bu özelliği dikkate alamazlar. Diferansiyel denklem içeren modellerde de kırılma noktalarında diferansiyel tanımlı olmadığından yine bu özelliğe vurgu yapılamaz. Bundan dolayı azalma süreci başladıktan sonra incelenir. Hal böyle olmakla beraber (3.42) ve (3.44) çözümlerini sunan denklemlerde de aynı sorun geçerlidir. Ancak bizim çözümlerimiz yukarıdaki özelliği sağlayan fonksiyon sınıfında olacağından matematiksel modelde incelenme imkânına sahiptir.

Danışmanın yorumu: Literatürde yer alan bilimsel çalışmalara bakıldığında doktora unvanı verilirken Ph. veya Sc. sıfatlandırmaları kullanılır. İkisi arasındaki fark; birincisinin kati delillere ihtiyacı olmazken ikincisinin şüphesiz yargı ve delillere ihtiyaç duymasıdır. Bu durum göz önüne alındığında yapılan çalışmanın stres altında çalışan sistemlerin incelenmesi çatısı altında Ph. sıfatını fazlası ile hak ettiği kanısındayım. Çalışmada kullanılan tanımlamalar ve bu alanda şimdiye kadar kullanılmayan matematiksel yapıların sistem güvenilirliğine montajı bu alanı araştırmacılara fazlası ile genişletmektedir. Çalışma literatüre sunulduktan sonra göreceği kabule göre Sc. sıfatını hak etme yolunda aday olarak görünmektedir.

6. ÖNERİLER

Çalışma bu haliyle doğal olarak birçok ispata ihtiyaç duymaktadır. Örnek olarak kullanılan ardışık hesaplamada yakınsama şartlarının bulunması gibi. Bulgular kısmında yer alan teorik çatı genel modeli ifade etmektedir. Sonuç kısmı ise bu genel modelin bazı kullanım şekillerinin ispatını sunar. Bu bütünlük içerisinde tamamlanan çalışmada özellikle bulgular kısmında tanımlanan değişkenlere ait korelasyon yapılarının incelenmesi sonraki çalışmalara bırakılmıştır. Bunun yanı sıra ortalama hesabında kullanılacak vektör alanları sınıfının esaslı olarak tanımlanması da dikkat çekici bir araştırma alanı olabilir. Buna ilaveten Bugatekin [61] de kullanılan analitik yöntem bu çalışmadaki sonuçlarla birleştirilebilir. Bu sayede stres altında hesaplanan sistem güvenilirliğinde karşılaşılan bazı problemler de çözüme kavuşturulabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Rouse, W.B. (2005). Enterprises as systems: Essential challenges and enterprise transformation, *Systems Engineering*, 8(2), 138–150.
- [2] Birnbaum, Z.W. (1956). On a use of Mann-Whitney statistics, *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1, 13-17.
- [3] Birnbaum, Z.W.; McCarty, B.C. (1958). A distribution-free upper confidence bounds for $P(Y < X)$ based on independent samples of X and Y , *The Annals of Mathematical Statistics*, 29, 558-562.
- [4] Mann, H.B.; Whitney, D.R. (1947). On a test of whether one of 2 random variables is stochastically larger than the other, *Annals of Mathematical Statistics*, 18, 50-60.
- [5] Owen, D.B.; Craswell, K.J.; Hanson, D.L. (1964). Nonparametric upper confidence bounds for $P(Y < X)$ and confidence limits for $P(Y < X)$ when X and Y are normal, *Journal of the American Statistical Association*, 59(307), 906-924.
- [6] Kelley, G.D.; Kelley, J.A.; Schucany, W.R. (1976). Efficient estimation of $P(Y < X)$ in the exponential case, *Technometrics*, 18(3), 359–360.
- [7] Chao, A. (1982). On comparing estimators of $P(Y < X)$ in the exponential case, *IEEE Transactions on Reliability*, 31(4), 389–392.
- [8] Tong, H. (1974). A note on the estimation of $P(Y < X)$ in the exponential case, *Technometrics*, 16(4), 625.
- [9] Awad, A.M.; Gharraf, M.K. (1986). Estimation of $P(Y < X)$ in the burr case: A comparative study, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 15(2), 389–403.
- [10] Constantine, K.; Karson, M.; Tse, S. (1986). Estimation of $P(Y < X)$ in the gamma case, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 15(2), 365–388.
- [11] Baklizi, A. (2008). Estimation of $\Pr(X < Y)$ using record values in the one and two parameter exponential distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 37(5), 692–698.
- [12] Kundu, D.; Raqab, M.Z. (2009). Estimation of $R = \Pr(Y < X)$ for three-parameter weibull distribution, *Statistics & Probability Letters*, 79(17), 1839–1846.
- [13] Armendáriz, M. Á. (2012). *Teknoloji III. Teknolojik Alanlardan ve Kültürel Çeşitlilikten Elde Edilen: tecnologia3miguelavalos.blogspot.com.ar*.
- [14] Harwood, C.; Compton, V. (2017). The importance of the conceptual in progressing technology teaching and learning, *Handbook of Technology Education*, 251-265.
- [15] Kotz, S.; Lumelskii, Y.; Pensky, M. (2003). *The Stress-Strength Model And Its Generalizations: Theory and Application*, World Scientific Publishing, Singapore
- [16] Esen, P. (2010). *Zaman Serisi Modelleri ile Stres-Dayanıklılık Analizi ve Su Tüketiminde Riske İlişkin Bir Uygulama*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [17] Beg, M.A. (1980). On the estimation of $\Pr(Y < X)$ for the two-parameter exponential distribution, *Metrika*, 27, 29-34.
- [18] Mokhlis, N.A. (2005). Reliability of a stress-strength model with Burr type III distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 34(7), 1643-1657.
- [19] Kundu, D.; Gupta, R.D. (2006). Estimation of $P(Y < X)$ for Weibull distributions, *IEEE Transactions Reliability* 55(2), 270-280.
- [20] Krishnamoorthy, K.; Mukherjee, S.; Guo, H. (2007). Inference on reliability in two-parameter exponential stress–strength model, *Metrika* 65, 261–273.
- [21] Bhattacharya, D.; Roychowdhury, S. (2013). Reliability of a coherent system in a multicomponent stress-strength model, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 32(1), 40-52.

- [22] Gopalan, M.N.; Venkateswarlu, P. (1982). Reliability analysis of time-dependent cascade system with deterministic cycle times, *Microelectronics Reliability*, 22(4), 841-872.
- [23] Gopalan, M.N.; Venkateswarlu, P. (1983). Reliability analysis of time-dependent cascade system with random cycle time, *Microelectronics Reliability*, 23(2), 355-366.
- [24] Yadav, R.P.S. (1973). A reliability model for stress vs strength problem, *Microelectronics Reliability*, 12(2), 119-123.
- [25] Eryilmaz, S. (2013). On stress-strength reliability with a time-dependent strength. *Journal of Quality and Reliability Engineering*.
- [26] Rice, S O. (1944). Mathematical Analysis of Random Noise, *Bell System Technical Journal*, 23(3), 282–332.
- [27] Yang, J.N.; Shnozuka, M. (1971). On the first excursion probability in stationary narrow-band random vibration, *Journal of Applied Mechanics*, 38(4), 1017-1022.
- [28] Yang, J.N. (1975). Approximation to first passage probability, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 101(4), 361-372.
- [29] Singh, A.; Mourelatos, Z.; Nikolaidis, E. (2011). Time-dependent reliability of random dynamic systems using time-series modeling and importance sampling, *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*, 4(1), 929-946.
- [30] Uzuner, M. (2015). Bir İşletmede Güvenilirlik Analizlerine Dayalı Sistem Tasarımı, Yüksek Lisans Tezi, Başkent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [31] Rathaur, B.K. (2017). *Bayesian inferences reliability life time distributions under stress-strength setup*, PhD Thesis, PU
- [32] Shewhart, W. A. (1926). Quality control charts. *Bell System Technical Journal*, 5(4), 593–603.
- [33] Wald, A.; Wolfowitz, J. (1944). Statistical tests based on permutations of the observations. *The Annals of Mathematical Statistics*, 15(4), 358-372.
- [34] Kuo, W.; Zuo, M.J. (2003). *Optimal Reliability Modelling: Principles and Applications*, John Wiley and Sons, Canada
- [35] Bazovsky, I. (2004). *Reliability Theory and Practice*, Courier Corporation
- [36] Özler B.Ş. (2011). *Modeling of the aging process in stress-strength models*, Master Thesis, Dokuz Eylül University, Institute of Sciences
- [37] Uzun, A.; Özdoğan, A. (2011). Güvenirlik Analizlerine Dayalı Önleyici Bakım Planlanması, *Journal of the Cukurova University Institute of Social Sciences*, 20(1), 303-320.
- [38] Mazzanti, G. (2007). Analysis of the combined effects of load cycling, thermal transients, and electrothermal stress on life expectancy of high-voltage ac cables, *IEEE Transactions on Power Delivery*, 22(4), 2000-2009.
- [39] Pfanz, H.; Vollrath, B.; Lomsky, B.; Oppmann, B.; Hynek, V.; Beyschlag, W.; Bilger, W.; White, M.V.; Materna, J. (1994). Life expectancy of spruce needles under extremely high air pollution stress: Performance of trees in the Ore Mountains, *Trees*, 8(5), 213-222.
- [40] Chandra, A.; Ryu, J.J.; Karra, P.; Shrotriya, P.; Tvergaard, V.; Gaisser, M.; Weik, T. (2011). Life expectancy of modular Ti6Al4V hip implants: influence of stress and environment, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 4(8), 1990-2001.
- [41] Johnson, R.A. (1988). 3 Stress-strength models for reliability, *Handbook of Statistics*, 7, 27-54.
- [42] Eryilmaz, S. (2011). A new perspective to stress–strength models, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 63, 101-115.
- [43] Eryilmaz, S. (2009). Reliability properties of consecutive k-out-of-n systems of arbitrarily dependent components, *Reliability Engineering & System Safety*, 94(2), 350-356.
- [44] Eryilmaz, S. (2010). Mixture representations for the reliability of consecutive-k systems, *Mathematical and Computer Modelling*, 51(5-6), 405-412.

- [45] Eryilmaz, S. (2020). Age-based preventive maintenance for coherent systems with applications to consecutive-k-out-of-n and related systems, *Reliability Engineering & System Safety*, 204, 107143.
- [46] Gökdere, G.; Gürcan, M. (2015). Erlang strength model for exponential effects, *Open Physics*, 13(1), 395-399.
- [47] Gökdere, G.; Tony Ng, H.K. (2022). Time-dependent reliability analysis for repairable consecutive-k-out-of-n: F system, *Statistical Theory and Related Fields*, 6(2), 139-147.
- [48] Mittag-Leffler, G.M. (1903). Sur la nouvelle fonction $Ea(x)$. *Comptes Rendus Academie Sciences Paris*, 137(2), 554-558.
- [49] Gürcan, M.; Güral, Y.; Gökdere, G. (2018). Analysis of repairable k-out-of-n system model using inter-arrival failure times, *ITM Web of Conferences*, 22, 01054.
- [50] Biçer, C.; Bakouch, H.S.; Biçer, H.D. (2021). Inference on parameters of a geometric process with scaled Muth distribution, *Fluctuation and Noise Letters*, 20(01), 2150006.
- [51] Biçer, C.; Biçer, H.D.; Kara, M.; Yılmaz, A. (2021). Statistical inference for geometric process with the generalized rayleigh distribution, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 35(4), 1107-1125.
- [52] Lam, Y.; Zhu, L.X.; Chan, J.S.; Liu, Q. (2004). Analysis of data from a series of events by a geometric process model, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 20(2), 263-282.
- [53] Zhang, Y.L.; Wang, G.J. (2009). A geometric process repair model for a repairable cold standby system with priority in use and repair, *Reliability Engineering & System Safety*, 94(11), 1782-1787.
- [54] Zhang, Y.L.; Wang, G.J. (2007). A geometric process repair model for a series repairable system with k dissimilar components, *Applied Mathematical Modelling*, 31(9), 1997-2007.
- [55] Gökdere, G.; Gürcan, M. (2016). Laplace-stieltjes transform of the system mean lifetime via geometric process model, *Open Mathematics*, 14(1), 384-392.
- [56] Khain, E.; Sander, L.M. (2008). Generalized Cahn-Hilliard equation for biological applications, *Physical Review E*, 77(5), 051129.
- [57] İlatı, M. (2020). Analysis and application of the Galerkin method of interpolated elements for Fisher-Kolmogorov equations arising in the context of brain tumor dynamics, *Numerical Algorithms*, 85(20), 485-502.
- [58] Corti, M.; Antonietti, P.F.; Bonizzoni, F.; Dede, L.; Quarteroni, A. (2023). Discontinuous galerkin methods for fisher-kolmogorov equation with application to α - synuclein spreading in parkinson's disease, *ArXiv*, 2302, 07126v4.
- [59] Bhattacharyya, G.K.; Johnson, R.A. (1974). Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model, *Journal of the American Statistical Association*, 69(348), 966-970.
- [60] Brown, K.S.; Forbes, W.F. (1974). A mathematical model of aging processes, *Journal of Gerontology*, 29(1), 46-51.
- [61] Bugatekin, A.T.; Gurcan, M., Gural, Y. (2019). Combined technical system. *Thermal Science*, 23(6), 1833-1838.

