T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORANSAL DİNAMİK SİSTEMLER

Canan YANILMAZ

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

HAZİRAN 2024

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

ORANSAL DİNAMİK SİSTEMLER

Tez Yazarı
Canan YANILMAZ

Danışman
Doc. Dr. Tuba GÜLŞEN

HAZİRAN 2024
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Oransal Dinamik Sistemler
Yazarı:	Canan YANILMAZ
İlk Teslim Tarihi:	23.05.2024
Savunma Tarihi:	25.06.2024

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Doc. Dr. Tuba GÜLŞEN — Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Başkan: Prof. Dr. Emrah YILMAZ — Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Üye: Doç. Dr. Sertaç GÖKTAŞ — Onayladım
Mersin Üniversitesi, Fen Fakültesi

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ..../......../20....... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Oransal Dinamik Sistemler” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

25.06.2024

Canan YANILMAZ

ÖNSÖZ

Fizik ve mühendislikteki karmaşık sistemleri çözmek için birçok farklı tanımı ve uygulaması olan kesirli analizi klasik analizin bir genelleştirmesi olarak düşünmek mümkündür. Bu çalışmada, doğrusal zamanla değişen dinamik-cebirsel denklem sistemleri, oransal dinamik sistem ve onun keyfi zaman skalalarındaki özellikleri temel alınarak incelenmiştir. Ek olarak, zaman skalasında klasik duruma benzer şekilde birinci mertebeden doğrusal zamanla değişen oransal dinamik-cebirsel denklem sistemi ve eşdeğer oransal sistemleri elde edilmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanmasında emeği geçen danışmanım Doç. Dr. Tuba GÜLŞEN'e teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Canan YANILMAZ
ELAZIĞ, 2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Oransal Dinamik Sistemler

Canan YANILMAZ

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2024, Sayfa: viii + 47

Bu çalışmanın ilk bölümünde oransal türevin literatürdeki yeri ve önemi verilmiştir. İkinci bölümde zaman skalasında oransal türev ve başlıca özellikleri verilmiş, tez çalışması boyunca kullanılacak temel tanım ve teoremler tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde zaman skalasında oransal dinamik sistemler ve bunların çözümleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde doğrusal zamanla değişen dinamik-cebirsel denklemler ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Son bölüm çalışmanın orijinal kısmı olup bu bölümde doğrusal zamanla değişen dinamik-cebirsel denklemler oransal türev cinsinden elde edilmiş ve eşdeğer sistemleri bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Zaman Skalası, Oransal Delta Türev, Oransal Dinamik Sistem.

ABSTRACT

Proportional Dynamic Systems

Canan YANILMAZ

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

June 2024, Pages: viii + 47

In the first part of this study, the place and importance of proportional derivative in the literature is given. In the second part the proportional derivative and its main properties on the time scale are given, and the basic definitions and theorems that will be used throughout the thesis are defined. In the third chapter, proportional dynamic systems and their solutions on time scales are examined. In the fourth chapter, linear time-varying dynamic-algebraic equations are given in detail. The last chapter is the original part of the study, and in this chapter, linear time-varying dynamical-algebraic equations are obtained in terms of proportional derivatives and their equivalent systems are found.

Keywords: Time scale, Proportional delta derivative, Proportional dynamic system.

SİMGELER

N, R	: Doğal sayılar kümesi, Reel sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	: Keyfi zaman skalası
$\mathbb{T}^k, \mathbb{T}_k, \mathbb{T}_k^k$	: Zaman skalasından türetilmiş türevlenebilirlik bölgeleri
σ, ρ	: İleri sıçrama operatörü, geri sıçrama operatörü
μ, v	: İleri, geri graininess fonksiyonları
Δ, ∇	: Delta, nabla türev operatörleri
f^{Δ}, f^{∇}	: f fonksiyonunun birinci mertebeden delta türevi, nabla türevi
$C_{rd}(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlı rd-sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_{ld}(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlı ld-sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_{rl}(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlı rl-sürekli fonksiyonlar uzayı
$D^{\alpha} f$	: f fonksiyonunun α. mertebeden oransal delta türevi

1. GİRİŞ

Herhangi bir mertebeden türevin ve integralin uzantısı kesirli hesap teorisi olarak bilinir. Bu hesap Leibniz, Gauss ve Newton'un bu tür hesaplamaları icat etmesiyle ortaya çıkmıştır. Günümüzde pek çok bilim adamı ve mühendis kesirli hesapla ilgili çalışmalar yapmaktadır. Bu hesabın kontrol teorisi, fizik, kimya ve mekanik bu matematiksel olguyu içeren çeşitli kullanım alanları vardır [1-5].

Zaman skalası, $\mathbb{T}$, dinamik bir sürecin evrim alanını belirten reel sayıların kapalı, boş olmayan bir alt kümesidir. Farklı tür ve sürelerde değişen dinamik süreçleri ve sistemleri araştırmak için kapsamlı bir çerçeve sunar. Düzensiz veya eşit olmayan zaman aralıkları olan zaman skalası, sürekli, ayrık veya hibrit zaman skalaları kullanılarak modellenebilir. Stefan Hilger [6] tarafından 1988'de tanıtılmasından bu yana, zaman skalası hesabı, geniş bir zamansal özelliklere sahip dinamik sistemlerin incelenmesi için önemli bir araç haline geldi. Mühendislik, fizik, biyoloji, ekonomi ve finans gibi çok sayıda disiplin zaman skalası hesabının kullanımından yararlanmıştır. Zaman skalası dinamik sistemleri modellemek ve anlamak için populasyon dinamiği, matematiksel biyoloji, kontrol teorisi, sinyal işleme ve diğer alanlara uygulanır. Zaman skalasında kesirli hesap teorisi Bastos'un doktora tezinde ilk kez tanımlanmıştır [7].

"Oransal kesirli türev", Leibniz, Gauss ve Newton tarafından türevin limit tanımına dayalı olarak geliştirilen bir kesirli türevdir [8]. Kesirli türevler için yapılan birçok çalışma mevcuttur [9–10].

Zaman skalasına ait temel tanımlar ve özellikler [11–13]'te verilmiştir. Her ne kadar Rahmat [14] özelliklerini ve teorisini açıklayan ilk kişi olsa da, [15] zaman skalasında oransal delta türevinin potansiyel bir tanımını sunmaktadır. Oransal nabla türevi Rahmat ve Noorani [16], oransal self-adjoint Sturm-Liouville dinamik problemi Gülşen ve Acar [17], oransal dinamik denklemler Anderson ve Georgiev [18] ve Sturm-Liouville ve Riccati oransal dinamik denklemler Çetinkaya ve Cuchta [19] tarafından incelenmiştir.

Lineerlik, değişme ve zincir kuralı açısından, k_0 ve k_1 parametrelerine sahip oransal kesirli türev, klasik kesirli türevlerin bazı faydalı özelliklerini de sağlar. Ayrıca, karmaşık sistemleri kesirli dereceli dinamiklerle modellerken, daha fazla esneklik ve uyarlanabilirlik sağlar. Bu kesirli türevin sinyal işleme, fizik, mühendislik, biyoloji ve finans alanlarında çeşitli uygulamaları vardır. Kesirli dereceli davranış sergileyen olgular arasında viskoelastisite, anormal difüzyon, kesirli dereceli kontrol sistemleri vb. yer alır. Ayrıca bu türevin özellikleri ve davranışları arasında, deneysel doğrulama, sayısal simülasyonlar ve analitik teknikler kullanılarak matematiksel modelleme ve analiz de yer almaktadır. Kesirli türev operatörü, k_0 ve k_1 parametrelerinin sunduğu esneklik nedeniyle, incelenen sistemin benzersiz özelliklerine göre uyarlanabilir. Standart kesirli hesap operatörleriyle karşılaştırıldığında daha fazla esneklik ve çok yönlülük sunarak, kesirli derece davranışına sahip karmaşık sistemlerin dinamiklerini karakterize etmek ve kavramak için yararlı bir araç haline getirir.

Bu çalışmada, doğrusal zamanla değişen dinamik-cebirsel denklem sistemleri, oransal dinamik sistem ve onun keyfi zaman skalalarındaki özellikleri temel alınarak incelenmiştir. Klasik durumdan farklı olarak, burada ele alınan denklemler oransal kesirli türevleri içerir. Bu nedenle, keyfi zaman skalalarında doğrusal oransal sistemler için kesirli mertebeli türevler açısından daha genel sonuçlar verilmektedir. Kesirli hesabın fizik ve mühendislikteki karmaşık sistemleri çözmek için birçok farklı tanımı ve uygulaması vardır [20-25]. Bu analizi klasik analizin bir genellemesi olarak düşünmek mümkündür. Bu çalışmada kesirli hesabın zaman skalasındaki diğer tanımlarından farklı olarak, zaman skalasında klasik duruma benzer birinci mertebeden doğrusal zamanla değişen oransal dinamik-cebirsel denklem sistemi [26] ve eşdeğer oransal sistemleri elde edilmiştir.

2. ZAMAN SKALASINDA ORANSAL TÜREV VE BAŞLICA ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde zaman skalasında oransal türev hesabı ve temel özellikleri verilecektir [18].

D^0 birim operatör ve D^1 klasik zaman skalasındaki delta türev operatörü olmak üzere, yeni bir $\alpha \in [0,1]$ mertebesinden D^α oransal türevi [18]'de tanımlanarak ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

$\mathbb{T}$, ileri sıçrama operatörü ve delta türev operatörü sırasıyla σ ve Δ olan bir zaman skalası olsun. $\alpha \in [0,1]$, $k_0, k_1 : [0,1] \times \mathbb{T} \to [0,\infty)$ fonksiyonları mevcut ve sürekli olsun. Bu çalışma boyunca k_0, k_1 fonksiyonlarının

$$\begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0^+} k_1(\alpha,t) = 1, \quad \lim\limits_{\alpha\to 1^-} k_1(\alpha,t) = 0, \ t \in \mathbb{T}, \\ \lim\limits_{\alpha\to 0^+} k_0(\alpha,t) = 0, \quad \lim\limits_{\alpha\to 1^-} k_0(\alpha,t) = 1, \ t \in \mathbb{T}, \\ k_1(\alpha,t) \neq 0, \ \alpha \in [0,1), \ t \in \mathbb{T}, \ k_0(\alpha,t) \neq 0, \ \alpha \in (0,1], \ t \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{2.1}$$

koşullarını sağladığı varsayılacaktır.

2.1. Oransal Türevlenebilme

Kontrol teorisi, dinamik sistemlerin davranışlarıyla ve istenen çıktıları elde etmek için değişkenlerinin nasıl manipüle edileceğiyle ilgilenen bir mühendislik ve matematik dalıdır. Kararlılığı korumak ve performans hedeflerine ulaşmak için sistem geri bildirimlerine göre girdileri ayarlayan denetleyicilerin tasarlanmasını içerir. Yaygın kontrolörler, geniş bir uygulama yelpazesindeki etkinlikleri nedeniyle yaygın olarak kullanılan oransal-integral-türevli kontrolörleri içerir. Oransal türev, viskoelastik malzemeler, belirli biyolojik sistemler ve hatta hafıza etkilerinin önemli olduğu finansal piyasalar gibi kesirli davranış sergileyen sistemler için daha doğru modeller sağlayabilir. Kontrol sistemlerinde oransal türevin kullanılması, kontrolörlerin kesirli dereceli dinamikleri doğrudan yönetebilmesine olanak tanır ve bu da potansiyel olarak daha iyi kararlılığa ve geleneksel tamsayı dereceli kontrolörlere göre gelişmiş performansa yol açar.

Oransal türevin tanımının temel ilkesi, t zamanındaki U kontrolör çıkışlı oransal-türev kontrolör kullanımına dayanmaktadır. Bu kontrolör

$$U(t) = k_p E(t) + k_d \frac{d}{dt} E(t),$$

algoritmasına sahiptir. Burada k_p orantılı kazanç, k_d türev kazanımı ve E durum değişkeni ile süreç değişkeni arasındaki hatadır [18].

Tanım 2.1.1 [18] f'nin bazı $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında delta türevlenebilir olduğunu varsayalım. f'nin t noktasındaki oransal delta türevi

$$D^{\alpha} f(t) = k_1(\alpha, t) f(t) + k_0(\alpha, t) f^{\Delta}(t), \tag{2.2}$$

ile tanımlanır. Burada k_1 , k_p oransal kazancın bir çeşidi k_0 , k_d türev kazanımının bir çeşidi f hata ve $D^{\alpha} f(t)$ kontrolör çıkışıdır.

Açıklama 2.1.2 [18] $D^0 f(t) = f(t)$, $D^1 f(t) = f^{\Delta}(t)$ dir.

Teorem 2.1.3 [18] f *ve* g, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ da Δ−türevlenebilir olsun. Herhangi $a \in \mathbb{T}$ sayısı için

i) $D^{\alpha}(f+g)(t) = D^{\alpha} f(t) + D^{\alpha} g(t)$,

ii) $D^{\alpha}(af)(t) = aD^{\alpha} f(t)$,

iii) $D^{\alpha}(fg)(t) = (D^{\alpha} f(t)) g(t) + f^{\sigma}(t)\big(D^{\alpha} g(t)\big) - k_1(\alpha, t) f^{\sigma}(t) g(t)$

$$= (D^{\alpha} f(t)) g^{\sigma}(t) + f(t)\big(D^{\alpha} g(t)\big) - k_1(\alpha, t) f(t) g^{\sigma}(t),$$

iv) $g(t) g^{\sigma}(t) \neq 0$ olmak şartıyla;

$$D^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{g(t) D^{\alpha} f(t) - f(t) D^{\alpha} g(t)}{g(t) g^{\sigma}(t)} + k_1(\alpha, t) \frac{f(t)}{g(t)},$$

özellikleri sağlanır.

Açıklama 2.1.4 [18] $\alpha, \beta \in [0,1]$, k_1 ve k_0 $t \in \mathbb{T}^{\kappa^2}$ da ikinci mertebeden Δ −türevlenebilir olsun. Genel durumda

$$D^{\alpha}\big(D^{\beta} f\big)(t) \neq D^{\beta}(D^{\alpha} f)(t),$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.5 [18] Bir $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna

$$k_0(\alpha, t) - \mu(t) k_1(\alpha, t) \neq 0,$$

ve

$$k_0(\alpha, t) + \mu(t)(f(t) - k_1(\alpha, t)) \neq 0,$$

ise oransal regresif fonksiyon denir.

Herhangi bir $\alpha \in (0,1]$ ve herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için, $\mathbb{T}$ üzerindeki tüm oransal regresif fonksiyonların kümesi $\mathcal{R}_c$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 [18] Varsayalım ki $\alpha \in (0,1]$, $p \in \mathcal{R}_c$ olsun. $t, t_0 \in \mathbb{T}$ için oransal üstel fonksiyon ve bu fonksiyonun oransal türevi aşağıda verilmiştir:

$$E_p(t,t_0) = e_{\frac{p-k_1}{k_0}}(t,t_0).$$

$$D^\alpha E_p(t,t_0) = k_1(\alpha,t) e_{\frac{p-k_1}{k_0}}(t,t_0) + k_0 e^{\Delta}_{\frac{p-k_1}{k_0}}(t,t_0)$$

$$= p(t)E_p(t,t_0), \qquad t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

Oransal üstel fonksiyonun bazı özelliklerini verelim:

Teorem 2.1.7 (Yarı Grup Özelliği) [18] Tanım 2.1.6'de tanımlanan oransal üstel fonksiyon

$$E_p(t,s)E_p(s,r) = E_p(t,r), \; t,s,r \in \mathbb{T},$$

yarı grup özelliğini sağlar.

Teorem 2.1.8 [18]

$$E_{k_1}(t,t_0) = 1 \, , E_p(t,t) = 1 \, , \; t,t_0 \in \mathbb{T} \text{ dir.}$$

Teorem 2.1.9 [18] $t, t_0 \in \mathbb{T}$ için

$$E_p(\sigma(t),t_0) = \left(1 + \mu(t)\frac{p(t) - k_1(\alpha,t)}{k_0(\alpha,t)}\right) E_p(t,t_0),$$

sağlanır.

Tanım 2.1.10 [18] $\pm f \in \mathcal{R}_c$ olsun. $\cos h_f$ ve $\sin h_f$ oransal hiperbolik fonksiyonları

$$\cos h_f = \frac{E_f + E_{-f}}{2}, \qquad \sin h_f = \frac{E_f - E_{-f}}{2},$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.11 [18] $\pm f \in \mathcal{R}_c$ olsun.

$$D^\alpha \cos h_f = f \sin h_f \, , \;\; D^\alpha \sin h_f = f \cos h_f,$$

$$cos\,h_f^2 - sin\,h_f^2 = E_g,\ g = -k_1 - \frac{\mu}{k_0}(f^2 - k_1^2).$$

Tanım 2.1.12 [18] $\pm if \in \mathcal{R}_c$ olsun. cos_f ve sin_f oransal trigonometrik fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$cos_f = \frac{E_{if} + E_{-if}}{2},\quad sin_f = \frac{E_{if} - E_{-if}}{2}.$$

Teorem 2.1.13 [18] $\pm if \in \mathcal{R}_c$ olsun.

$$D^\alpha cos_f = -f sin_f\ ,\ \ D^\alpha sin_f = f cos_f,$$

$$cos_f^2 + sin_f^2 = E_{(if)}.E_{(-if)}.$$

Tanım 2.1.14 [18] $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ olsun ve

$$k_0(\alpha, t) - \mu(t)k_1(\alpha, t) \neq 0\,,\ \ \alpha \in (0,1],\ \ t \in \mathbb{T}\,, \tag{2.3}$$

koşulunun geçerli olduğunu varsayalım. Oransal ters türev

$$\int D^\alpha f(t)\Delta_\alpha t = f(t) + cE_0(t, t_0), \qquad c\ \in \mathbb{R}, \qquad t \in \mathbb{T},$$

şeklinde, $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ üzerinde f'nin oransal delta integrali

$$\int_a^t f(s)\Delta_{\alpha,t} s = \int_a^t f(s)\frac{E_0\big(t, \sigma(s)\big)}{k_0(\alpha, s)}\Delta s, \qquad t \in [a, b],$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.15 [18] $\alpha \in (0,1], f \in C_{rd}(\mathbb{T}), a, b \in \mathbb{T}, a < b$ olsun ve (2.3) sağlansın. Bu durumda

$$D^\alpha\Big(\int_a^t f(s)\Delta_{\alpha,t} s\Big) = f(t), \qquad t \in [a, b]^\kappa,$$

olarak tanımlanır.

3. ZAMAN SKALASINDA ORANSAL DİNAMİK SİSTEMLER

$\mathbb{T}$, sırasıyla ileri sıçrama operatörü ve oransal delta türev operatörü σ ve Δ olan bir zaman skalası olsun. $\alpha \in (0,1]$ ve k_0, k_1 regresif fonksiyonlar olsunlar [18].

3.1. Zaman Skalasında Oransal Dinamik Sistemlerin Yapısı

A bir $m \times n$ matris $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $a_{ij}: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ olsun.

Tanım 3.1.1 [18] A bir oransal Δ-türevlenebilir matris olmak üzere

$$D^{\alpha}A = (D^{\alpha}a_{ij}),$$

şeklindedir.

Örnek 3.1.2 [18] $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$, $k_1(\alpha, t) = (1-\alpha)t^{4\alpha}$, $k_0(\alpha, t) = \alpha t^{4(1-\alpha)}$, $\alpha \in (0,1]$, $t \in \mathbb{T}$, ve

$$\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t & t \\ t-1 & t^3 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{T},$$

olmak üzere

$$D^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{A}(t),\ t \in \mathbb{T},$$

ifadesini hesaplayalım. Burada

$$\sigma(t) = 2t,\ k_1\left(\frac{1}{4}, t\right) = \frac{3}{4}t,\ k_0\left(\frac{1}{4}, t\right) = \frac{1}{4}t^3,$$

$$a_{11}(t) = t^2 + t, \quad a_{12}(t) = t, \quad a_{21}(t) = t - 1, \quad a_{22}(t) = t^3, \quad t \in \mathbb{T},$$

olup

$$a_{11}^{\Delta}(t) = \frac{a_{11}^{\sigma}(t) - a_{11}(t)}{2t - t} = 3t + 1,\ a_{12}^{\Delta}(t) = 1,\ a_{21}^{\Delta}(t) = 1,\ a_{22}^{\Delta}(t) = \frac{a_{22}^{\sigma}(t) - a_{22}(t)}{2t - t} = 7t^2,$$

bulunur. Böylelikle,

$$D^{\frac{1}{4}}a_{11}(t) = k_1\left(\frac{1}{4}, t\right)a_{11}(t) + k_0\left(\frac{1}{4}, t\right)a_{11}^{\Delta}(t)$$

$$= \frac{3}{4}t^4 + t^3 + \frac{3}{4}t^2,$$

$D^{\frac{1}{4}}\, a_{12}(t) = k_1\left(\frac{1}{4}, t\right) a_{12}(t) + k_0\left(\frac{1}{4}, t\right) a_{12}^{\Delta}(t)$

$= \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^3,$

$D^{\frac{1}{4}}\, a_{21}(t) = k_1\left(\frac{1}{4}, t\right) a_{21}(t) + k_0\left(\frac{1}{4}, t\right) a_{21}^{\Delta}(t)$

$= \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}t^3,$

$D^{\frac{1}{4}}\, a_{22}(t) = k_1\left(\frac{1}{4}, t\right) a_{22}(t) + k_0\left(\frac{1}{4}, t\right) a_{22}^{\Delta}(t)$

$= \frac{7}{4}t^5 + \frac{3}{4}t^4, \qquad t \in \mathbb{T},$

elde edilir. Öyleyse

$$D^{\frac{1}{4}}\, A(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t^4 + t^3 + \frac{3}{4}t^2 & \frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t^2 \\ \frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{4}t & \frac{7}{4}t^5 + \frac{3}{4}t^4 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Tanım 3.1.3 [18] Eğer A, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında oransal Δ-türevlenebilir bir matris ise

$$A^{\sigma}(t) = (a_{ij}{}^{\sigma}(t)),$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.4 [18] Eğer A, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında oransal Δ-türevlenebilir bir matris ise $\alpha \in (0,1]$ için

$$A^{\sigma}(t) = \left(1 - \frac{\mu(t)}{k_0(\alpha,t)} k_1(\alpha, t)\right) A(t) + \frac{\mu(t)}{k_0(\alpha,t)}\, D^{\alpha}\, A(t),$$

sağlanır.

Teorem 3.1.5 [18] A ve B, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında oransal Δ-türevlenebilir matrisler olsunlar. $\alpha \in (0,1]$ için

$$D^{\alpha}(A + B)(t) = D^{\alpha}\, A(t) + D^{\alpha}\, B(t),$$

sağlanır.

Teorem 3.1.6 [18] $a \in \mathbb{R}$ ve A, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında oransal Δ-türevlenebilir matris olsun. Öyleyse

$$D^{\alpha}\,(aA)(t) = aD^{\alpha}A(t),$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.7 [18] $m = n$ ve A, B $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında oransal Δ-türevlenebilir matrisler olsunlar. Bu durumda

$$D^{\alpha}\,(AB)(t) = D^{\alpha}A(t)B(t) + A^{\sigma}(t)\,D^{\alpha}B(t) - k_1(\alpha,t)\,A^{\sigma}(t)B(t),$$

$$= D^{\alpha}A(t)B^{\sigma}(t) + A(t)D^{\alpha}B(t) - k_1(\alpha,t)A(t)B^{\sigma}(t),$$

ile verilir.

Örnek 3.1.8 [18] $\mathbb{T}=2^{\mathbb{N}_0}$,

$$k_1(\alpha,t) = (1-\alpha)t^{4\alpha}, \quad k_0(\alpha,t) = \alpha t^{4(1-\alpha)}, \qquad \alpha \in (0,1], \ t \in \mathbb{T},$$

ve

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 2t \\ t+1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{T},$$

olmak üzere

$$D^{\frac{1}{2}}\,(AB)(t), \qquad t \in \mathbb{T},$$

ifadesini hesaplayalım.

$$\sigma(t) = 2t, \qquad k_0\left(\frac{1}{2},t\right) = \frac{1}{2}t^2,$$

olup

$C(t) = A(t)B(t),\ t \in \mathbb{T}$ olarak tanımlanırsa,

$$C(t) = \begin{pmatrix} t^2+4t & 7t \\ t^2+t+2 & t+4 \end{pmatrix},$$

bulunur. Buradan

$c_{11}(t) = t^2+4t, \ \ c_{12}(t) = 7t, \ \ c_{21}(t) = t^2+t+2, \ \ c_{22}(t) = t+4,$

$c_{11}^{\Delta}(t) = \sigma(t)+t+4 = 3t+4, \ \ c_{12}^{\Delta}(t) = 7, \qquad c_{21}^{\Delta}(t) = \sigma(t)+t+1 = 3t+1,$

$c_{21}^{\Delta}(t) = \sigma(t)+t+1 = 3t+1, \qquad c_{22}^{\Delta}(t) = 1,$

$$D^{\frac{1}{2}}\,c_{11}(t) = k_1\left(\tfrac{1}{2},t\right)c_{11}(t) + k_0\left(\tfrac{1}{2},t\right)c_{11}^{\Delta}(t)$$

$$= \frac{1}{2}t^4 + \frac{7}{2}t^3 + 2t^2,$$

$$D^{\frac{1}{2}}\,c_{12}(t) = k_1\left(\frac{1}{2},t\right)c_{12}(t) + k_0\left(\frac{1}{2},t\right)c_{12}^{\Delta}(t)$$

$$= \frac{7}{2}t^3 + \frac{7}{2}t^2,$$

$$D^{\frac{1}{2}} c_{21}(t) = k_1\left(\frac{1}{2}, t\right) c_{21}(t) \; + \; k_0\left(\frac{1}{2}, t\right) c_{21}^{\Delta}(t)$$

$$= \frac{1}{2}t^4 + 2t^3 + \frac{3}{2}t^2,$$

$$D^{\frac{1}{2}} c_{22}(t) = k_1\left(\frac{1}{2}, t\right) c_{22}(t) \; + \; k_0\left(\frac{1}{2}, t\right) c_{22}^{\Delta}(t)$$

$$= \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t^2, \;\; t \in \mathbb{T},$$

elde edilir. Bu yüzden

$$D^{\frac{1}{2}} (AB)(t) = \; D^{\frac{1}{2}} C(t)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^4 + \frac{7}{2}t^3 + 2t^2 & \frac{7}{2}t^3 + \frac{7}{2}t^2 \\ \frac{1}{2}t^4 + 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t^2 \end{pmatrix},$$

olup

$$a_{11}(t) = t, \quad a_{12}(t) = 2t, \quad a_{21}(t) = t + 1, \quad a_{22}(t) = 1,$$

$$b_{11}(t) = t, \quad b_{12}(t) = 1, \quad b_{21}(t) = 2, \quad b_{22}(t) = 3,$$

$$a_{11}^{\Delta}(t) = 1, \; a_{12}^{\Delta}(t) = 2, \; a_{21}^{\Delta}(t) = 1, \; a_{22}^{\Delta}(t) \; = 0,$$

$$b_{11}^{\Delta}(t) = 1, \; b_{12}^{\Delta}(t) = 0, \; b_{21}^{\Delta}(t) = 0, \; b_{22}^{\Delta}(t) \; = 0,$$

$$D^{\frac{1}{2}} a_{11}(t) \; = \; k_1\left(\frac{1}{2}, t\right) a_{11}(t) \; + \; k_0\left(\frac{1}{2}, t\right) a_{11}^{\Delta}(t)$$

$$= \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2,$$

$$D^{\frac{1}{2}} a_{12}(t) \; = \; k_1\left(\frac{1}{2}, t\right) a_{12}(t) \; + \; k_0\left(\frac{1}{2}, t\right) a_{12}^{\Delta}(t)$$

$$= t^3 + t^2,$$

$$D^{\frac{1}{2}} a_{21}(t) \; = \; k_1\left(\frac{1}{2}, t\right) a_{21}(t) \; + \; k_0\left(\frac{1}{2}, t\right) a_{21}^{\Delta}(t)$$

$$= \frac{1}{2}t^3 + t^2,$$

$$D^{\frac{1}{2}} a_{22}(t) = k_1\left(\frac{1}{2}, t\right) a_{22}(t) + k_0\left(\frac{1}{2}, t\right) a_{22}^{\Delta}(t)$$

$$= \frac{1}{2}t^2,$$

$$D^{\frac{1}{2}} b_{11}(t) = k_1\left(\frac{1}{2}, t\right) b_{11}(t) + k_0\left(\frac{1}{2}, t\right) b_{11}^{\Delta}(t)$$

$$= \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2,$$

$$D^{\frac{1}{2}} b_{12}(t) = k_1\left(\frac{1}{2}, t\right) b_{12}(t) + k_0\left(\frac{1}{2}, t\right) b_{12}^{\Delta}(t)$$

$$= \frac{1}{2}t^2,$$

$$D^{\frac{1}{2}} b_{21}(t) = k_1\left(\frac{1}{2}, t\right) b_{21}(t) + k_0\left(\frac{1}{2}, t\right) b_{21}^{\Delta}(t)$$

$$= t^2,$$

$$D^{\frac{1}{2}} b_{22}(t) = k_1\left(\frac{1}{2}, t\right) b_{22}(t) + k_0\left(\frac{1}{2}, t\right) b_{22}^{\Delta}(t)$$

$$= \frac{3}{2}t^2,$$

$$b_{11}^{\sigma}(t) = \sigma(t) = 2t, \qquad b_{12}^{\sigma}(t) = 1, \qquad b_{21}^{\sigma}(t) = 2, \quad b_{22}^{\sigma}(t) = 3,$$

şeklindedir. Öyleyse,

$$D^{\frac{1}{2}} A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 & t^3 + t^2 \\ \frac{1}{2}t^3 + t^2 & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix},$$

$$D^{\frac{1}{2}} B(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^2 \\ t^2 & \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix},$$

$$B^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D^{\frac{1}{2}}A(t)B^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^2 & t^3+t^2 \\ \frac{1}{2}t^3+t^2 & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t^4+3t^3+2t^2 & \frac{7}{2}t^3+\frac{7}{2}t^2 \\ t^4+2t^3+t^2 & \frac{1}{2}t^3+\ \frac{5}{2}t^2 \end{pmatrix},$$

$$A(t)\, D^{\frac{1}{2}}B(t) = \begin{pmatrix} t & 2t \\ t+1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^2 \\ t^2 & \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^4+\frac{5}{2}t^3 & \frac{7}{2}t^3 \\ \frac{1}{2}t^4+t^3+\frac{3}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^3+2t^2 \end{pmatrix},$$

$$D^{\frac{1}{2}}A(t)B^{\sigma}(t)+A(t)D^{\frac{1}{2}}B(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} t^4+3t^3+2t^2 & \frac{7}{2}t^3+\frac{7}{2}t^2 \\ t^4+2t^3+t^2 & \frac{1}{2}t^3+\ \frac{5}{2}t^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^4+\frac{5}{2}t^3 & \frac{7}{2}t^3 \\ \frac{1}{2}t^4+t^3+\frac{3}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^3+2t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t^4+\frac{11}{2}t^3+2t^2 & 7t^3+\ \frac{7}{2}t^2 \\ \frac{3}{2}t^4+3t^3+\frac{5}{2}t^2 & t^3+\ \frac{9}{2}t^2 \end{pmatrix},$$

$$A(t)\, B^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} t & 2t \\ t+1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2t^2+4t & 7t \\ 2t^2+2t+2 & t+4 \end{pmatrix},$$

$$k_1\left(\frac{1}{2},t\right)A(t)\, B^{\sigma}(t) = \frac{1}{2}t^2\begin{pmatrix} 2t^2+4t & 7t \\ 2t^2+2t+2 & t+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t^4+2t^3 & \frac{7}{2}t^3 \\ t^4+t^3+t^2 & \frac{1}{2}t^3+2t^2 \end{pmatrix},$$

ve

$$D^{\frac{1}{2}}A(t)B^{\sigma}(t)+A(t)D^{\frac{1}{2}}B(t)-k_1\left(\frac{1}{2},t\right)A(t)\, B^{\sigma}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^4 + \frac{7}{2}t^3 + 2t^2 & \frac{7}{2}t^3 + \frac{7}{2}t^2 \\ \frac{1}{2}t^4 + 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

$$= D^{\frac{1}{2}}(AB)(t),$$

bulunur.

Teorem 3.1.9 [18] $m = n$ ve farzedelim ki A^{-1}, $\mathbb{T}$ üzerinde mevcut olsun. Öyleyse,

$$(A^{\sigma})^{-1} = (A^{-1})^{\sigma},$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.10 [18] $m = n$, A oransal Δ-türevlenebilir matris olsun. $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ve farzedelim ki A^{-1}, $(A^{\sigma})^{-1}$ mevcut olsun. Bu durumda

$$D^{\alpha} A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)(D^{\alpha}A(t))\ (A^{\sigma})^{-1}(t) + k_1(\alpha,\mathrm{t})\ (A^{\sigma})^{-1}(t),$$

$$= (A^{\sigma})^{-1}(t)(D^{\alpha}A(t))\ A^{-1}(\mathrm{t}) + k_1(\alpha,\mathrm{t})\ A^{-1}(t),$$

özellikleri sağlanır.

Tanım 3.1.11 [18] Eğer A'nın her girdisi rd-sürekli ise, A matrisine $\mathbb{T}$ üzerinde rd-sürekli denir. Bu tür rd-sürekli $m \times n$ matris öz fonksiyonlarının kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{m\times n}),$$

ile gösterilir. Aşağıdaki A ve B matrislerinin $n \times n$ tipinde matrisler olduklarını kabul edelim.

Tanım 3.1.12 [18] A matrisinin oransal regresif olma şartı

$$k_0\mathrm{I} + \mu(A - k_1\mathrm{I}),$$

olması ve A matrisinin tersinir olmasıdır. $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ve $\mathbb{T}$ üzerinde $k_0 - \mu k_1 \neq 0$ olsun. Bu tür regresif ve rd-sürekli fonksiyonların sınıfı skaler durumuna benzer şekilde

$$\mathbb{R}_c = \mathbb{R}_c(\mathbb{T}) = \mathbb{R}_c(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{m\times n}),$$

ile gösterilir.

Teorem 3.1.13 [18] A matris değerli fonksiyonuna eğer A'nın λ_j oransal özdeğerleri tüm $1 \leq i \leq n$ için oransal regresif fonksiyonlar ise ve (2.3) sağlanıyorsa, oransal regresiftir denir.

Teorem 3.1.14 [18] A, 2×2 tipinde matris-değerli fonksiyon olsun. A'nın $\mathbb{T}$ üzerinde oransal regresif olması için gerek ve yeter şart

$$k_0{}^2 + \mu^2 k_1 + \mu(k_0 - \mu k_1) trA + \mu^2 detA \neq 0,$$

olması ve (2.3)'ün sağlanmasıdır.

Tanım 3.1.15 [18] A ve B, $\mathbb{T}$ üzerinde oransal regresif olsunlar. Bu durumda

$$\mathrm{A} \oplus_c B = (\mathrm{A} + B - k_1 \mathrm{I}) + \mu\, k_0{}^{-1}\ (\mathrm{A} - k_1 \mathrm{I})\ (B - k_1 \mathrm{I}),$$

$$\ominus_c \mathrm{A} = -k_0 (k_0 I + \ \mu (A - k_1 I)^{-1} (A - k_1 I),$$

$$A \ominus_c B = A \oplus (\ominus_c B),$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.16 [18] ($\mathbb{R}_c$,$\oplus_c$) bir gruptur.

Örnek 3.1.17 [18] $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$,

$$k_1(\alpha, t) = (1-\alpha) t^{\alpha}, \quad k_0(\alpha, t) = \alpha t^{(1-\alpha)}, \qquad \alpha \in (0,1], \ t \in \mathbb{T}$$

ve

$$A\,(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t+1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B\,(t) = \begin{pmatrix} -1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix},$$

olsun. $(A \oplus_c B)(t)$, $t \in \mathbb{T}$ ifadesini hesaplayalım.

Burada

$$\mu(t) = t, \ \ t \in \mathbb{T},$$

olup

$$B(t) - k_1(\alpha, t) I = \begin{pmatrix} -1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix} - (1-\alpha) t^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1-(1-\alpha)t^{\alpha} & t \\ t & 2-(1-\alpha)t^{\alpha} \end{pmatrix},$$

$$A(t) - k_1(\alpha, t)\, I = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t+1 & 3 \end{pmatrix} - (1-\alpha) t^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-(1-\alpha)t^{\alpha} & t \\ t+1 & 3-(1-\alpha)t^{\alpha} \end{pmatrix},$$

$$(A(t) - k_1(\alpha, t) I)(B(t) - k_1(\alpha, t) I) = \begin{pmatrix} -1-(1-\alpha)t^{\alpha} & t \\ t & 2-(1-\alpha)t^{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1-(1-\alpha)t^{\alpha} & t \\ t+1 & 3-(1-\alpha)t^{\alpha} \end{pmatrix},$$

$$=\begin{pmatrix} -1+(1-\alpha)^2t^{2\alpha}+t^2 & 3t-2(1-\alpha)t^{1+\alpha} \\ 2t-1-(1-\alpha)t^{\alpha} & t^2+t+6-(1-\alpha)t^{\alpha}-(1-\alpha)^2t^{2\alpha} \end{pmatrix},$$

$$\mu(t)(\,k_0(\alpha,t))^{-1}(A(t)-\,k_1(\alpha,t)I)(B(t)-\,k_1(\alpha,t)I)=$$

$$=\frac{t}{\alpha t^{1-\alpha}}\begin{pmatrix} -1+(1-\alpha)^2t^{2\alpha}+t^2 & 3t-2(1-\alpha)t^{1+\alpha} \\ 2t-1-(1-\alpha)t^{\alpha} & t^2+t+6-(1-\alpha)t^{\alpha}-(1-\alpha)^2t^{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\alpha}t^{\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}t^{3\alpha}+\frac{1}{\alpha}t^{2+\alpha} & \frac{3}{\alpha}t^{1+\alpha}-\frac{2}{\alpha}(1-\alpha)t^{1+2\alpha} \\ \frac{2}{\alpha}t^{1+\alpha}-\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)t^{2\alpha} & \frac{1}{\alpha}(t^2+t+6)t^{\alpha}-\frac{1-\alpha}{\alpha}t^{\alpha}-\frac{1-\alpha}{\alpha}t^{2\alpha}-\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}t^{3\alpha} \end{pmatrix},$$

$$A(t)+B(t)-\,k_1(\alpha,t)I=\begin{pmatrix} 1 & t \\ t+1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix}-(1-\alpha)t^{\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (\alpha-1)t^{\alpha} & 2t \\ 2t+1 & 5+(\alpha-1)t^{\alpha} \end{pmatrix},$$

$$(A\oplus_c B)(\,t)=$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha-1-\frac{1}{\alpha})t^{\alpha}+\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}t^{3\alpha}+\frac{1}{\alpha}t^{2+\alpha} & 2t+\frac{3}{\alpha}t^{1+\alpha}-\frac{2}{\alpha}(1-\alpha)t^{1+2\alpha} \\ 1+2t+\frac{2}{\alpha}t^{1+\alpha}-\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}-\frac{1-\alpha}{\alpha}t^{2\alpha} & \left(\frac{t^2+t+6}{\alpha}+\alpha-1\right)t^{\alpha}+5+\frac{3}{\alpha}t^{1+\alpha}-\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}t^{1+2\alpha} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.18 [18] $A,B\in\mathbb{R}_c$ ve $A^*=(\bar{A})^T$ olsun**.** Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) $A^*\in\mathbb{R}_c$.

ii) $(\ominus_c A)^*=\ominus_c A^*$.

iii) $(A\oplus_c B)^*=B^*\oplus_c A^*$.

Tanım 3.1.19 (Oransal Matris Üstel Fonksiyon) [18] $A\in\mathbb{R}_c$ ve $t_0\in\mathbb{T}$ olsun.

$$D^{\alpha}Y=A(t)Y\ ,\quad Y(\,t_0)=I,$$

başlangıç değer probleminin (BDP'nin) tek çözümüne oransal matris üstel fonksiyonu denir ve $E_A(.,t_0)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.1.20 [18] $A,B\in\mathbb{R}_c$ ve $t,s,r\in\mathbb{T}$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

1. $E_A(t\,,t)=I$.

2. $E_A(\sigma(t),s)=\left(\left(1-\mu(t)\frac{k_1(\alpha,t)}{k_0(\alpha,t)}\right)I+\frac{\mu(t)}{k_0(\alpha,t)}A(t)\right)E_A(t\,,s)$.

3. Ters matris şu şekilde verilir.

$E_A(s,t) = \left(E_A(t,s)\right)^{-1} = (E_C(t,s))^*,$

burada

$C = k_0(-A^* + k_1 I)\ (k_0 I + \mu(A^* - k_1 I))^{-1},$

ile verilir.

4. $E_A(t,r) = E_A(t,s)E_A(s,r)$.

5. $E_A(t,s)E_B(t,s) = E_{A\oplus_c B}(t,s)$.

Teorem 3.1.21 [18] $A \in \mathbb{R}_c$, ve $s,t \in \mathbb{T}$ olsun.

$$D_t^\alpha(E_A(s,t)) = (-A(t) + k_1(\alpha,t)I)E_A\left(s,\sigma(t)\right),\ \alpha \in (0,1].$$

Teorem 3.1.22 (Sabitlerin Varyasyonu) [18] $A \in \mathbb{R}_c$ ve $q : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ rd-sürekli, ayrıca, $t_0 \in \mathbb{T}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $k_0 I + \mu A$, $\mathbb{T}$ üzerinde tersinir olsun. Öyleyse,

$$D^\alpha y = A(t)y + q(t),\ y(t_0) = y_0, \tag{3.1}$$

BDP

$$y(t) = y_0 E_A(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} E_B(\sigma(s),t)\, q(s)\Delta_{\alpha,t} s, \tag{3.2}$$

şeklindeki bir tek $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ çözümüne sahiptir. Burada

$$B = (\mu k_1 - k_0)A(k_0 I + \mu A)^{-1},$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.23 [18] $A \in \mathbb{R}_c$ 2×2 tipinde bir matris ve farzedelim ki X bu sistemin bir çözümü olsun, yani

$$D^\alpha X = A(t)X,$$

olsun. Öyleyse X matrisi için Liouville formülü

$$detX(t) = E_C(t,t_0)detX(t_0),\quad t \in \mathbb{T}^\kappa,$$

olup burada

$$C(t) = trA(t) + \frac{\mu(t)}{k_0(\alpha,t)}detA(t) - k_1(\alpha,t)\left(1 - \frac{\mu(t)}{k_0(\alpha,t)}k_1(\alpha,t) + \frac{\mu(t)}{k_0(\alpha,t)}trA(t)\right),\ \ t \in \mathbb{T},$$

ile verilir.

3.2. Sabit Katsayılar

Bu kısımda A'nın $n \times n$ tipinde sabit bir matris ve $A \in \mathbb{R}_c$ $t_0 \in \mathbb{T}$ olduğunu varsayalım.

$$D^{\alpha}x = A(t)x, \tag{3.3}$$

sistemini göz önüne alalım.

Teorem 3.2.1 [18] u ve v (3.3) sisteminin çözümleri olsun. Öyleyse

$$x = au + bv, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

bu sistemin bir çözümüdür.

Teorem 3.2.2 [18] λ, ξ A'nın özdeğer çifti olsun. Öyleyse

$$x(t) = E_{\lambda}(t, t_0)\xi,\ t \in \mathbb{T}^{\kappa},$$

(3.3) sisteminin bir çözümü olur.

Örnek 3.2.3 [18]

$$\begin{cases} D^{\alpha}x_1(t) = -3x_1 - 2x_2, \\ D^{\alpha}x_2(t) = 3x_1 + 4x_2, \end{cases}$$

sistemi için

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

olup buradan

$$0 = det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda + 3) + 6$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 6,$$

ve

$$\lambda_1 = 3,\ \ \lambda_2 = -2,$$

bulunur. Ele alınan sistem herhangi bir zaman skalası için oransal regresiftir ve $-2 \in \mathbb{R}_c$ dir. Dikkat edilirse

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

λ_1 ve λ_2 ye karşılık gelen öz vektörlerdir. c_1 ve c_2 sabit olmak üzere

$$x(t) = c_1 E_3(t,t_0)\xi_1 + c_2 E_{-2}(t,t_0)\xi_2$$

$$= c_1 E_3(t,t_0)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 E_{-2}(t,t_0)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dikkate alınan sistemin herhangi bir zaman skalası için bir çözümüdür.

Teorem 3.2.4 [18] $A \in \mathbb{R}_c$ olsun. $u(t)$ ve $v(t)$, $\mathbb{T}$ üzerinde reel vektör değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$x(t) = u(t) + iv(t), \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa},$$

(3.3) sisteminin kompleks vektör değerli çözümü ise, $u(t)$ ve $v(t)$ (3.3) sisteminin $\mathbb{T}$ üzerinde reel vektör değerli çözümleridir.

Örnek 3.2.5 [18]

$$\begin{cases} D^{\alpha}x_1(t) = x_1(t) + x_2(t), \\ D^{\alpha}x_2(t) = -x_1(t) + x_2(t), \end{cases}$$

sistemi gözönüne alınsın. Burada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

olup

$$0 = det\,(A - \lambda I)$$

$$= det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$= (\lambda - 1)^2 + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

bulunur. Buna göre,

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i,$$

olup

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

$\lambda = 1 + i$'ye karşılık gelen özvektördür.

$$x(t) = E_{1+i}(t,t_0)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

$$= E_1(t,t_0)\left(Cos_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0) + iSin_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\right)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

$$= E_1(t,t_0)\left(\begin{pmatrix}Cos_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\\ iCos_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}iSin_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\\ -Sin_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\end{pmatrix}\right)$$

$$= E_1(t,t_0)\begin{pmatrix}Cos_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\\ -Sin_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\end{pmatrix} + iE_1(t,t_0)\begin{pmatrix}Sin_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\\ Cos_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\end{pmatrix}.$$

elde edilir. Buradan,

$$E_1(t,t_0)\begin{pmatrix}Cos_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\\ -Sin_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\end{pmatrix} \quad ve \quad E_1(t,t_0)\begin{pmatrix}Sin_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\\ Cos_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\end{pmatrix},$$

ele alınan sistemin çözümleridir. Dolayısıyla

$$x(t) = c_1E_1(t,t_0)\begin{pmatrix}Cos_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\\ -Sin_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\end{pmatrix} + c_2E_1(t,t_0)\begin{pmatrix}Sin_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\\ Cos_{\frac{1}{1+\mu}}(t,t_0)\end{pmatrix}.$$

dikkate alınan sistemin genel bir çözümüdür (c_1 , $c_2 \in \mathbb{R}$).

4. DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞEN DİNAMİK-CEBİRSEL DENKLEMLER

Bu bölümde doğrusal zamanla değişen dinamik-cebirsel denklemler incelenmiştir. Bu denklemler birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü olarak sınıflandırılır. Burada izlenebilirlik indeksi 1 ile düzenli oldukları durum göz önüne alınmıştır.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası, σ ve Δ sırasıyla ileri sıçrama operatörü ve delta türev operatörü olduğunu varsayalım. $I \subseteq \mathbb{T}$ olsun [26].

4.1. Birinci Türden Doğrusal Zamanla Değişen Dinamik-Cebirsel Denklemler

Bu bölümde aşağıdaki doğrusal zamanla değişen dinamik-cebirsel denklemler incelenecektir:

$$A^{\sigma}(t)(Bx)^{\Delta}(t) = C^{\sigma}(t)x^{\sigma}(t) + f(t), \quad t \in I, \tag{4.1}$$

Burada $A: I \to \mathcal{M}_{n\times m}$, $B: I \to \mathcal{M}_{n\times m}$, $C: I \to \mathcal{M}_{n\times m}$, $ve \;\; f: I \to \mathbb{R}^n$ ve $\mathcal{M}_{p\times q}$ ile tüm $p \times q$ tipindeki reel matrislerin kümesi belirtilmiştir [26].

Tanım 4.1.1 [26] (4.1) denklemine birinci türden doğrusal zamanla değişen dinamik-cebirsel bir denklemdir denir.

(4.1) denkleminin çözümlerini C_B^1 uzayı içinde ele alacağız. Aşağıda gösterim basitliği adına t'ye olan bağımlılık belirtilmemiştir.

4.2. Özel Bir Durum

$A, C: I \to \mathcal{M}_{n\times m}$ olduğunu varsayalım. Aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$A^{\sigma}x^{\Delta} = C^{\sigma}x^{\sigma} + f. \tag{4.2}$$

Burada (4.2) denkleminin (4.1) denklemine indirgenebileceğini göstereceğiz. P'nin A^{σ} boyunca bir C^1-projektör olduğunu varsayalım. Öyleyse

$$A^{\sigma}P = A^{\sigma},$$

ve

$$A^{\sigma}x^{\Delta} = A^{\sigma}Px^{\Delta} = A^{\sigma}(Px)^{\Delta} - A^{\sigma}P^{\Delta}x^{\sigma}.$$

şeklindedir. Dolayısıyla (4.2) denklemi şu şekli alır:

$$A^{\sigma}(Px)^{\Delta} - A^{\sigma}P^{\Delta}x^{\sigma} = C^{\sigma}x^{\sigma} + f,$$

ya da

$$A^{\sigma}(Px)^{\Delta} = \left(A^{\sigma}P^{\Delta} + C^{\sigma}\right)x^{\sigma} + f,$$

olup burada

$$C_1^{\sigma} = \mathrm{A}^{\sigma}P^{\Delta} + C^{\sigma},$$

olarak isimlendirilirse (4.2) denkleminin son hali

$$A^{\sigma}(Px)^{\Delta} = C_1^{\sigma}x^{\sigma} + f, \tag{4.3}$$

olur. Yani (4.2) denklemi (4.1) denkleminin özel bir durumudur [26].

Örnek 4.2.1 [26] $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$, $A\,(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C\,(t) = \begin{pmatrix} -t & 1 & t \\ 0 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{T},$ (4.4)

olsun. Burada

$$\sigma(t) = 2t\ , \quad t \in \mathbb{T},$$

ve

$$A^{\sigma}\,(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} -2t & 1 & 2t \\ 0 & 1 & 4t \\ 2t & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

olup aşağıdaki çözüm olan vektör matrisi bulunacaktır.

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Böylece

$$A^{\sigma}\,(t)y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{T},$$

göz önüne alınırsa

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ -2\mathrm{t}y_2(t) + y_3(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{T},$$

ve

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

bulunur. Burada $A^{\sigma}(t)$'ye null projektör olan matris

$$Q\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{T}$$

olur. Buradan

$$P(t) = I - Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-2t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{T},$$

$$P^{\Delta}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C_1^{\sigma}(t) = \mathrm{A}^{\sigma}(t)P^{\Delta}(t) + C^{\sigma}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t & 1 & 2t \\ 0 & 1 & 4t \\ 2t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2t & 1 & 2t \\ 0 & 1 & 4t-2 \\ 2t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{\Delta}(t) \\ x_2^{\Delta}(t) \\ x_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t & 1 & 2t \\ 0 & 1 & 4t \\ 2t & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{\sigma}(t) \\ x_2^{\sigma}(t) \\ x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix},$$

$$x_1^{\Delta}(t) = -2tx_1^{\sigma}(t) + x_2^{\sigma}(t) + 2tx_3^{\sigma}(t) + f_1(t),$$

$$-2tx_2^{\Delta}(t) + x_3^{\Delta}(t) = x_2^{\sigma}(t) + 4tx_3^{\sigma}(t) + f_2(t),$$

$$0 = 2tx_1^{\sigma}(t) + x_3^{\sigma}(t) + f_3(t), \ \ t \in \mathbb{T},$$

bulunur. Bu sistem (4.3) kullanılarak şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}\right)^{\Delta}$$

$$= \begin{pmatrix} -2t & 1 & 2t \\ 0 & 1 & 4t-2 \\ 2t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^\sigma(t) \\ x_2^\sigma(t) \\ x_3^\sigma(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T},$$

ya da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) - x_3(t) \\ (1-2t)x_3(t) \end{pmatrix}^\Delta = \begin{pmatrix} -2tx_1^\sigma(t) + x_2^\sigma(t) + 2tx_3^\sigma(t) + f_1(t) \\ x_2^\sigma(t) + (4t-2)x_3^\sigma(t) + f_2(t) \\ 2tx_1^\sigma(t) + x_3^\sigma(t) + f_3(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^\Delta(t) \\ x_2^\Delta(t) - x_3^\Delta(t) \\ (1-2t)x_3^\Delta(t) - 2x_3^\sigma(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2tx_1^\sigma(t) + x_2^\sigma(t) + 2tx_3^\sigma(t) + f_1(t) \\ x_2^\sigma(t) + (4t-2)x_3^\sigma(t) + f_2(t) \\ 2tx_1^\sigma(t) + x_3^\sigma(t) + f_3(t) \end{pmatrix},$$

elde edilir. Buradan

$$x_1^\Delta(t) = -2tx_1^\sigma(t) + x_2^\sigma(t) + 2tx_3^\sigma(t) + f_1(t),$$

$$-2t(x_2^\Delta(t) - x_3^\Delta(t)) + (1-2t)x_3^\Delta(t) - 2x_3^\sigma(t)) = x_2^\sigma(t) + (4t-2)x_3^\sigma(t) + f_2(t),$$

$$0 = 2tx_1^\sigma(t) + x_3^\sigma(t) + f_3(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

sistemi bulunur.

4.3. Standart Form İndeksi 1 Problemleri

Bu kısımda aşağıdaki denklem incelenecektir.

$$A^\sigma (Px)^\Delta = C^\sigma x^\sigma + f, \tag{4.5}$$

Burada *ker* A bir $\mathcal{C}^1$ uzaydır. $C \in \mathcal{C}(I)$, P ise *ker* A boyunca $\mathcal{C}^1$ projektör matristir. O zaman

$$AP = A,$$

olup ek olarak

$$Q = I - P,$$

ve

B1)

$$A_1 = A + CQ,$$

tersi alınabilir matris olsun [26].

Araştırmalarımıza aşağıdaki faydalı lemma ile başlayacağız.

Lemma 4.3.1 [26] (B1)'in geçerli olduğunu varsayalım. Böylece

$$A_1^{-1}A = P,$$

ve

$$A_1^{-1}CQ = Q,$$

şeklindedir.

İspat [26] $A_1P = (A + CQ)P = AP + CQP = A,$
olup $Q = I - P$ ve $\ker P = \ker A$ olduğundan $im\ Q = \ker A$ diyebiliriz ve

$$AQ = 0,$$

ve buradan

$$A_1Q = (A + CQ)Q = AQ + CQQ = CQ,$$

olup bu da ispatı tamamlar.

Şimdi (4.5) denklemini $(A_1^{-1})^\sigma$ ile çarparsak

$$(A_1^{-1})^\sigma A^\sigma (Px)^\Delta = (A_1^{-1})^\sigma C^\sigma x^\sigma + (A_1^{-1})^\sigma f,$$

şeklinde olup Lemma 4.3.1'in ilk denklemini kurarız ve şunu elde ederiz:

$$P^\sigma (Px)^\Delta = (A_1^{-1})^\sigma C^\sigma x^\sigma + (A_1^{-1})^\sigma f. \tag{4.6}$$

Burada x'i aşağıdaki şekilde ayrıştırabiliriz.

$$x = Px + Qx.$$

Bu durumda (4.6) denklemi

$$P^\sigma \big(Px\big)^\Delta = (A_1^{-1})^\sigma C^\sigma (P^\sigma x^\sigma + Q^\sigma x^\sigma\big) + (A_1^{-1})^\sigma f.$$

$$= (A_1^{-1})^\sigma C^\sigma P^\sigma x^\sigma + (A_1^{-1})^\sigma C^\sigma Q^\sigma x^\sigma + (A_1^{-1})^\sigma f,$$

şeklini alır. Lemma 4.3.1'in ikinci denklemi kullanılarak ikinci denklem aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$P^{\sigma}(Px)^{\Delta} = (A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + Q^{\sigma}x^{\sigma} + (A_1^{-1})^{\sigma}f. \tag{4.7}$$

Denklem (4.7) ‘yi projektör P^{σ}ile çarparsak

$$PP = P, \quad PQ = 0,$$

buluruz.

$$P^{\sigma}P^{\sigma}(Px)^{\Delta} = P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + P^{\sigma}Q^{\sigma}x^{\sigma} + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}f,$$

Buradan

$$P^{\sigma}(Px)^{\Delta} = P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}f, \tag{4.8}$$

olur. Dikkat edersek

$$P^{\sigma}(Px)^{\Delta} = (PPx)^{\Delta} - P^{\Delta}Px = (Px)^{\Delta} - P^{\Delta}Px,$$

olup dolayısıyla (4.8) denklemini kullanarak şunu buluruz:

$$(Px)^{\Delta} - P^{\Delta}Px = P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}f.$$

$$(Px)^{\Delta} = P^{\Delta}Px + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}f. \tag{4.9}$$

Şimdi (4.7) denklemini Q^{σ} ile çarparsak

$$Q^{\sigma}\, P^{\sigma}(Px)^{\Delta} = Q^{\sigma}\, (A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}\, P^{\sigma}x^{\sigma} + Q^{\sigma}\, Q^{\sigma}x^{\sigma} + Q^{\sigma}\, (A_1^{-1})^{\sigma}f,$$

$$0 = Q^{\sigma}\, (A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}\, P^{\sigma}x^{\sigma} + Q^{\sigma}x^{\sigma} + Q^{\sigma}\, (A_1^{-1})^{\sigma}f, \tag{4.10}$$

şeklinde hesaplanır. Son ifadede

$$u = Px, \qquad v = Qx,$$

olarak seçilirse

$$u^{\Delta} = P^{\Delta}u + P^{\sigma}\left(A_1^{-1}\right)^{\sigma}C^{\sigma}u^{\sigma} + P^{\sigma}\left(A_1^{-1}\right)^{\sigma}f,$$

$$v^{\sigma} = -Q^{\sigma}\, \left(A_1^{-1}\right)^{\sigma}C^{\sigma}u^{\sigma} - Q^{\sigma}\left(A_1^{-1}\right)^{\sigma}f, \tag{4.11}$$

bulunur. (4.11) denklem sisteminden ilk olarak $u^{\Delta} \in C^1(I)$ çözümünü, ikinci olarak $v^{\sigma} \in C^1(I)$ elde ederiz. Dolayısıyla (4.5) denkleminin x çözümünü aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$x^{\sigma} = u^{\sigma} + v^{\sigma} = P^{\sigma}x^{\sigma} + Q^{\sigma}x^{\sigma}.$$

Örnek 4.3.2 [26] $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, $A\,(t) = \begin{pmatrix} -1 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t+2 & -2 \end{pmatrix}, C\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$

$$P\,(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+1) & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{4.12}$$

olsun. Burada

$$\sigma(t) = t+1\,, \quad t \in \mathbb{T},$$

olup

$$A(t)P(t) = \begin{pmatrix} -1 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t+2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+1) & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t+2 & -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{T},$$

bulunur. Bundan dolayı P, ker A boyunca projektördür. O halde

$$Q(t) = I - P(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+1) & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T},$$

ve

$$A_1(t) = A(t) + C(t)Q(t)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t+2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2(t+1) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3t+5 & -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{T},$$

olup dikkat edersek

$$detA_1(t) = 2 \neq 0, \ t \in \mathbb{T},$$

olup böylece A_1 tersinir matristir. Şimdi bu matrisin kofaktörlerini bulacağız.

$$a_{11}(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3t+5 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad a_{12}(t) = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \ a_{13}(t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3t+5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$a_{21}(t) = -\begin{vmatrix} 2(t+1) & -1 \\ 3t+5 & -2 \end{vmatrix} = t-1, a_{22}(t) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$a_{23}(t) = -\begin{vmatrix} -1 & 2(t+1) \\ 0 & 3t+5 \end{vmatrix} = 3t+5,\ a_{31}(t) = \begin{vmatrix} 2(t+1) & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$a_{32}(t) = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ a_{33}(t) = \begin{vmatrix} -1 & 2(t+1) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,\quad t \in \mathbb{T}.$$

Sonuç olarak,

$$A_1^{-1}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & t-1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3t+5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{t-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3t+5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad t \in \mathbb{T},$$

bulunur.

$$A^\sigma(t) = \begin{pmatrix} -1 & t+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t+4 & -2 \end{pmatrix},\qquad \left(A_1^{-1}\right)^\sigma(t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{t}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3t+8}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$C^\sigma\ (\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t-1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\qquad P^\sigma\ (\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+2) & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^\sigma\ (\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t+2 & 0 \end{pmatrix},\qquad P^\Delta\ (\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{T}.$$

Ayrıca

$$P^\sigma\ (t)\left(A_1^{-1}\right)^\sigma(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -t-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \frac{t}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3t+8}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{t}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t+4}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$P^\sigma\ (t)\left(A_1^{-1}\right)^\sigma(t)C^\sigma\ (t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{t}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t+4}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t-1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{(t+2)(t-1)}{2} & \dfrac{t-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{(t+2)(t+3)}{2} & \dfrac{t+3}{2} \end{pmatrix},
$$

$$
Q^{\sigma}\,(t)\left(A_1^{-1}\right)^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t+2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{t}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{3t+8}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t+2 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
Q^{\sigma}\,(t)\left(A_1^{-1}\right)^{\sigma}(t)C^{\sigma}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t+2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t-1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t-1 & 1 \\ 0 & (t+2)(-t-1) & t+2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T},
$$

şeklinde olup (4.5) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$
\begin{pmatrix} -1 & t+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t+4 & -2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \right)^{\Delta}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t-1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{\sigma}(t) \\ x_2^{\sigma}(t) \\ x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T}.
$$

Buradan

$$
\begin{pmatrix} -1 & t+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t+4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{\Delta}(t) \\ 0 \\ -x_2^{\sigma}(t) - (t+1)\,x_2^{\Delta}(t) + x_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} x_3^{\sigma}(t) \\ -(t+1)x_2^{\sigma}(t) + x_3^{\sigma}(t) \\ 2x_2^{\sigma}(t) + x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T}.
$$

$$
-x_1^{\Delta}(t) + x_2^{\sigma}(t) + (t+1)x_2^{\Delta}(t) - x_3^{\Delta}(t) = x_3^{\sigma}(t) + f_1(t),
$$

$$0=-(t+1)x_2^\sigma(t)+x_3^\sigma(t)+f_2(t),$$

$$2x_2^\sigma(t)+2(t+1)x_2^\Delta(t)-2x_3^\Delta(t)=2x_2^\sigma(t)+x_3^\sigma(t)+f_3(t),\ \ t\ \in\ \mathbb{T},$$

elde edilir. (4.11) denklemi şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{pmatrix}u_1^\Delta(t)\\u_2^\Delta(t)\\u_3^\Delta(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\u_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-\dfrac{(t+2)(t-1)}{2}&\dfrac{t-1}{2}\\0&0&0\\0&-\dfrac{(t+2)(t+3)}{2}&\dfrac{t+3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^\sigma(t)\\u_2^\sigma(t)\\u_3^\sigma(t)\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}-1&\dfrac{t}{2}&\dfrac{1}{2}\\0&0&0\\0&\dfrac{t+4}{2}&-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\f_3(t)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\v^\sigma(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-t-1&1\\0&(t+2)(-t-1)&t+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^\sigma(t)\\u_2^\sigma(t)\\u_3^\sigma(t)\end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&t+2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\f_3(t)\end{pmatrix},\quad t\ \in\ \mathbb{T}.$$

Buradan

$$u_1^\Delta(t)=-\frac{(t+2)(t-1)}{2}u_2^\sigma(t)+\frac{t-1}{2}u_3^\sigma(t)-f_1(t)+\frac{t}{2}f_2(t)+\frac{1}{2}f_3(t),$$

$$u_2^\Delta(t)=0,$$

$$u_3^\Delta(t)=-u_2(t)-\frac{(t+2)(t+3)}{2}u_2^\sigma(t)+\frac{t+3}{2}u_3^\sigma(t)+\frac{t+4}{2}f_2(t)-\frac{1}{2}f_3(t),$$

$$0=0$$

$$0=(-t-1)u_2^\sigma(t)+u_3^\sigma(t)-f_2(t)$$

$$v^\sigma(t)=(t+2)(-t-1)u_2^\sigma(t)+(t+2)u_3^\sigma(t)-(t+2)f_2(t),\qquad t\ \in\ \mathbb{T},$$

bulunur.

4.4. İkinci Türden Doğrusal Zamanla Değişen Dinamik-Cebirsel Denklemler

Bu kısımda aşağıdaki doğrusal zamanla değişen dinamik-cebirsel denklemleri ele alınacaktır.

$$A^{\sigma}(t)(Bx)^{\Delta}(t) = C(t)x(t) + f(t), \qquad t \in I. \tag{4.13}$$

Burada $A, B, C: I \to \mathcal{M}_{n\times m}$ ve $f: I \to \mathbb{R}^m$ dir. (4.13) denklemi ikinci türden doğrusal zamanla değişen dinamik-cebirsel bir denklem olarak adlandırılır. (4.13) denkleminin $\mathcal{C}_B^1$ uzayı içinde çözümleri araştırılacaktır [26].

4.5. Özel Bir Durum

Aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$A^{\sigma}x^{\Delta} = Cx + f\,. \tag{4.14}$$

(4.14) denkleminin (4.13) denklemine indirgenebileceğini göstereceğiz. P'nin ker A boyunca bir projektör olduğunu varsayalım. O halde

$$AP = A,$$

ve

$$A^{\sigma}x^{\Delta} = A^{\sigma}P^{\sigma}x^{\Delta} = A^{\sigma}(Px)^{\Delta} - A^{\sigma}P^{\Delta}x,$$

olup dolayısıyla (4.14) şu formu alır.

$$A^{\sigma}(Px)^{\Delta} - A^{\sigma}P^{\Delta}x = Cx + f\,,$$

ya da

$$A^{\sigma}(Px)^{\Delta} = (A^{\sigma}P^{\Delta} + C)x + f,$$

şeklini alır. Burada

$$C_1 = A^{\sigma}P^{\Delta} + C,$$

alınırsa, (4.14) denkleminin yeni formu şu şekilde olur.

$$A^{\sigma}(Px)^{\Delta} = C_1x + f, \tag{4.15}$$

Yani (4.14) denklemi (4.13) denkleminin özel bir durumudur [26].

Örnek 4.5.1 [26] $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C(t) = \begin{pmatrix} -t & 1 & t \\ 0 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{T}$ olsun.

Burada

$$\sigma(t) = 2t\;, \qquad t \in \mathbb{T},$$

$$A^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{T},$$

olup

$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{T},$ vektörü bulunacaktır. Böylece

$$A(t)y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{T},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ -ty_2(t) + y_3(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{T},$$

bulunur. Bunun üzerine

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T},$$

ve $A(t)$'ye olan projektör

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T},$$

şeklindedir. Buradan

$$P(t) = I - Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T},$$

Ker A boyunca bir projektördür. O halde

$$P^{\Delta}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C_1(t) = \mathrm{A}^{\sigma}(t)\mathrm{P}^{\Delta}(t) + C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & 1 & t \\ 0 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & 1 & t \\ 0 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & 1 & t \\ 0 & 1 & 2t-1 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ve böylece

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{\Delta}(t) \\ x_2^{\Delta}(t) \\ x_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & 1 & t \\ 0 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T},$$

elde edilir. Buradan

$$x_1^{\Delta}(t) = -tx_1(t) + x_2(t) + tx_3(t) + f_1(t),$$

$$-2tx_2^{\Delta}(t) + x_3^{\Delta}(t) = x_2(t) + 2tx_3(t) + f_2(t),$$

$$0 = tx_1(t) + x_3(t) + f_3(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

şeklinde olup bu sistem (4.15) kullanılarak şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \right)^{\Delta}$$

$$= \begin{pmatrix} -t & 1 & t \\ 0 & 1 & 2t-1 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Buradan

$$x_1^{\Delta}(t) = -tx_1(t) + x_2(t) + tx_3(t) + f_1(t),$$

$$-2t(x_2^{\Delta}(t) - x_3^{\Delta}(t)) + (1-t)x_3^{\Delta}(t) - x_3^{\sigma}(t) = x_2(t) + (2t-1)x_3(t) + f_2(t),$$

$$0 = tx_1(t) + x_3(t) + f_3(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

olup bulduğumuz iki sistemin sonucunun eşit olduğu görülmektedir.

5. DOĞRUSAL ZAMANLA DEĞİŞEN ORANSAL DİNAMİK-CEBİRSEL DENKLEMLER

Bu bölümde yukarıda verilen (4.1) denkleminin oransal türev cinsinden çözümleri incelenecektir.

$\gamma \in (0,1]$, $k_0, k_1 : [0,1] \times \mathbb{T} \to [0,\infty)$ fonksiyonları mevcut ve sürekli olsun.

$$A^{\sigma}(t)D^{\gamma}(Bx)(t) = C^{\sigma}(t)x^{\sigma}(t) + f(t), \qquad t \in I, \tag{5.1}$$

şeklindeki doğrusal zamanla değişen oransal dinamik-cebirsel denklemler incelenecektir.

5.1. Birinci Türden Doğrusal Zamanla Değişen Oransal Dinamik-Cebirsel Denklemlerin Özel Bir Durumu

$A, C: I \to \mathcal{M}_{n\times m}$ olduğunu varsayalım. Aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$A^{\sigma}D^{\gamma}x = C^{\sigma}x^{\sigma} + f. \tag{5.2}$$

Burada (5.2) denkleminin (5.1) denklemine indirgenebileceğini göstereceğiz. P'nin A^{σ} boyunca bir $\mathcal{C}^1$-projektör olduğunu varsayalım. Öyleyse

$$A^{\sigma}P = A^{\sigma},$$

ve

$$A^{\sigma}D^{\gamma}x = A^{\sigma}P(D^{\gamma}x) = A^{\sigma}D^{\gamma}(Px) - A^{\sigma}D^{\gamma}Px^{\sigma} + k_1A^{\sigma}Px^{\sigma},$$

olup (5.2)'den

$$A^{\sigma}D^{\gamma}(Px) - A^{\sigma}D^{\gamma}Px^{\sigma} + k_1A^{\sigma}Px^{\sigma} = C^{\sigma}x^{\sigma} + f,$$

$$A^{\sigma}D^{\gamma}(Px) = A^{\sigma}D^{\gamma}Px^{\sigma} - k_1A^{\sigma}Px^{\sigma} + C^{\sigma}x^{\sigma} + f,$$

$$= (A^{\sigma}D^{\gamma}P - k_1A^{\sigma}P + C^{\sigma})x^{\sigma} + f,$$

bulunur. Burada

$A^{\sigma}D^{\gamma}P - k_1A^{\sigma}P + C^{\sigma} = C_1^{\sigma}$, denirse

$$A^{\sigma}D^{\gamma}(Px) = C_1^{\sigma}x^{\sigma} + f, \tag{5.3}$$

olarak (5.2) denklemi (5.1) denkleminin özel bir durumu bulunur.

Örnek 5.1.1 $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C(t) = \begin{pmatrix} -t & 1 & t \\ 0 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{T}, \tag{5.4}$$

olsun. Burada

$$\sigma(t) = 2t, \quad t \in \mathbb{T},$$

ve

$$A^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} -2t & 1 & 2t \\ 0 & 1 & 4t \\ 2t & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{T}$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-2t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{T},$$

ve böylece

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1x_1(t) + k_0x_1^{\Delta}(t) \\ k_1x_2(t) + k_0x_2^{\Delta}(t) \\ k_1x_3(t) + k_0x_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t & 1 & 2t \\ 0 & 1 & 4t \\ 2t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{\sigma}(t) \\ x_2^{\sigma}(t) \\ x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}.$$

$$k_1x_1(t) + k_0x_1^{\Delta}(t) = -2tx_1^{\sigma}(t) + x_2^{\sigma}(t) + 2tx_3^{\sigma}(t) + f_1(t),$$

$$-2tk_1x_2(t) - 2\mathrm{t}k_0x_2^{\Delta}(t) + k_1x_3(t) + k_0x_3^{\Delta}(t) = x_2^{\sigma}(t) + 4tx_3^{\sigma}(t) + f_2(t),$$

$$0 = 2tx_1^{\sigma}(t) + x_3^{\sigma}(t) + f_3(t),$$

elde edilir. Bu sistem (5.3) kullanılarak şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$D^{\gamma}P = k_1P + k_0P^{\Delta} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-2t \end{pmatrix} + k_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 & (1-2t)k_1 - 2k_0 \end{pmatrix},$$

olup

$$C_1^{\sigma}(t) = A^{\sigma}D^{\gamma}P - k_1A^{\sigma}P + C^{\sigma}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 & (1-2t)k_1 - 2k_0 \end{pmatrix} - k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-2t \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} -2t & 1 & 2t \\ 0 & 1 & 4t \\ 2t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2t & 1 & 2t \\ 0 & 1 & -2k_0+4t \\ 2t & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

bulunur. Böylece,

$$P(t)x(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)-x_3(t) \\ (1-2t)x_3(t) \end{pmatrix},$$

$$(Px)^{\Delta}=\begin{pmatrix} x_1^{\Delta}(t) \\ x_2^{\Delta}(t)-x_3^{\Delta}(t) \\ (1-2t)x_3^{\Delta}(t)-2x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix},$$

$$P^{\sigma}(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-4t \end{pmatrix},$$

olup (5.3)'den

$$A^{\sigma}(k_1Px+k_0(Px)^{\Delta})=C_1^{\sigma}x^{\sigma}+\mathrm{f}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\left(k_1\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)-x_3(t) \\ (1-2t)x_3(t) \end{pmatrix}+k_0\begin{pmatrix} x_1^{\Delta}(t) \\ x_2^{\Delta}(t)-x_3^{\Delta}(t) \\ (1-2t)x_3^{\Delta}(t)-2x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} -2\mathrm{t} & 1 & 2t \\ 0 & 1 & -2k_0+4t \\ 2t & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{\sigma}(t) \\ x_2^{\sigma}(t) \\ x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix},$$

ve açık yazılırsa

$$k_1x_1(t)+k_0x_1^{\Delta}(t)=-2tx_1^{\sigma}(t)+x_2^{\sigma}(t)+2tx_3^{\sigma}(t)+f_1(t),$$

$$-2tk_1\big(x_2(t)-x_3(t)\big)-2\mathrm{t}k_0\left(x_2^{\Delta}(t)-x_3^{\Delta}(t)\right)+k_1(1-2t)x_3(t)+k_0(1-2t)x_3^{\Delta}(t)$$
$$-2k_0x_3^{\sigma}(t)=x_2^{\sigma}(t)+(4t-2k_0)x_3^{\sigma}(t)+f_2(t),$$

$$0=2tx_1^{\sigma}(t)+x_3^{\sigma}(t)+f_3(t),$$

bulunur.

5.2. Standart Form İndeksi 1 Problemleri

Bu kısımda aşağıdaki denklem incelenecektir.

$$A^{\sigma}D^{\gamma}(Px) = C^{\sigma}x^{\sigma} + f. \tag{5.5}$$

Burada

$$AP = A,$$

$$Q = I - P,$$

olmak üzere (B1)'in sağlandığı varsayılsın.

Lemma 5.2.1 (B1)'in geçerli olduğunu varsayalım. Daha sonra

$$A_1^{-1}A = P,$$

ve

$$A_1^{-1}CQ = Q.$$

olup (5.5) denkleminin her iki tarafını $(A_1^{-1})^{\sigma}$ ile çarpalım:

$$(A_1^{-1})^{\sigma}\, A^{\sigma}D^{\gamma}(Px) = (A_1^{-1})^{\sigma}\, C^{\sigma}x^{\sigma} + (A_1^{-1})^{\sigma}\, f,$$

Lemma 5.2.1'in ilk denklemini kullanırız ve şunu elde ederiz.

$$P^{\sigma}D^{\gamma}(Px) = (A_1^{-1})^{\sigma}\, C^{\sigma}x^{\sigma} + (A_1^{-1})^{\sigma}\, f. \tag{5.6}$$

Burada x

$$x = Px + Qx,$$

olarak ayrıştırılır. Bu durumda (5.6) denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$P^{\sigma}D^{\gamma}(Px) = (A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + (A_1^{-1})^{\sigma}\, C^{\sigma}Q^{\sigma}x^{\sigma} + (A_1^{-1})^{\sigma}f, \tag{5.7}$$

$$PP = P, \quad PQ = 0,$$

olduğu göz önüne alınırsa ve denklem (5.7) projektör P^{σ}ile çarpılırsa

$$P^{\sigma}P^{\sigma}D^{\gamma}(Px) = P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}\, C^{\sigma}Q^{\sigma}x^{\sigma} + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}f,$$

$$P^{\sigma}D^{\gamma}(\mathrm{Px}) = P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}f, \tag{5.8}$$

olur. Dikkat edersek

$$P^{\sigma}D^{\gamma}(Px) = D^{\gamma}PPx - D^{\gamma}PPx = D^{\gamma}Px - D^{\gamma}PPx,$$

olup (5.8) denklemi kullanılarak aşağıdaki ifade bulunur:

$$D^{\gamma}(Px) - (D^{\gamma}P)Px + k_1P^{\sigma}Px = P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}f$$

$$D^{\gamma}(Px) = (D^{\gamma}P)Px + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}f - k_1P^{\sigma}Px. \tag{5.9}$$

Şimdi (5.7) denklemini Q^{σ} ile çarparsak

$$Q^{\sigma}\,P^{\sigma}D^{\gamma}(Px) = Q^{\sigma}\,(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + Q^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}\,\mathrm{C}^{\sigma}\,Q^{\sigma}x^{\sigma} + Q^{\sigma}\,(A_1^{-1})^{\sigma}f,$$

$$0 = Q^{\sigma}\,(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + Q^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}\,\mathrm{C}^{\sigma}\,Q^{\sigma}x^{\sigma} + Q^{\sigma}\,(A_1^{-1})^{\sigma}f, \tag{5.10}$$

olur.

$$u = Px, \qquad v = Qx,$$

olarak alınırsa

$$D^{\gamma}u = (D^{\gamma}P)u + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} + P^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}f - k_1P^{\sigma}u,$$

$$v^{\sigma} = -Q^{\sigma}\,(A_1^{-1})^{\sigma}C^{\sigma}P^{\sigma}x^{\sigma} - Q^{\sigma}(A_1^{-1})^{\sigma}f, \tag{5.11}$$

şeklini alır. (5.11) denklem sisteminden ilk olarak $D^{\gamma}u \in C^1(I)$ çözümünü, ikinci olarak $v^{\sigma} \in C^1(I)$ elde ederiz. Dolayısıyla (5.5) denkleminin x çözümünü aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$x^{\sigma} = u^{\sigma} + v^{\sigma} = P^{\sigma}x^{\sigma} + Q^{\sigma}x^{\sigma}.$$

Örnek 5.2.2 $\mathbb{T} = \mathbb{N},\ A\,(t) = \begin{pmatrix} -1 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t+2 & -2 \end{pmatrix},\ C\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$

$$P\,(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+1) & 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{T}. \tag{5.12}$$

Burada

$$\sigma(t) = t + 1\,, \quad t \in \mathbb{T}.$$

$$A(t)P(t) = \begin{pmatrix} -1 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t+2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{T},$$

olup P, *ker A* boyunca projektördür. O halde

$$Q(t) = I - P(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{T},$$

ve

$$A_1(t) = A(t) + C(t)Q(t)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2(t+1) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3t+5 & -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T},$$

$$A_1^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{t-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3t+5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T},$$

olup

$$A^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} -1 & t+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t+4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \left(A_1^{-1}\right)^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{t}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3t+8}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$C^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t-1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+2) & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t+2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{\Delta}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{T}.$$

şeklinde hesaplanmıştı. Ayrıca

$$P^{\sigma}(t)\left(A_1^{-1}\right)^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{t}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t+4}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$P^{\sigma}(t)\left(A_1^{-1}\right)^{\sigma}(t)C^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{(t+2)(t-1)}{2} & \dfrac{t-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{(t+2)(t+3)}{2} & \dfrac{t+3}{2} \end{pmatrix},$$

$$Q^{\sigma}(t)\left(A_1^{-1}\right)^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (t+2) & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^{\sigma}(t)\left(A_1^{-1}\right)^{\sigma}(t)C^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+1) & 1 \\ 0 & (t+2)(-t-1) & (t+2) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{T},$$

$$P(t)x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+1) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ 0 \\ -(t+1)x_2(t) + x_3(t) \end{pmatrix},$$

$$D^{\gamma}(Px)(t) = k_1 Px + k_0 (Px)^{\Delta}$$

$$= k_1\begin{pmatrix} x_1(t) \\ 0 \\ -(t+1)x_2(t) + x_3(t) \end{pmatrix} + k_0\begin{pmatrix} x_1^{\Delta}(t) \\ 0 \\ -(t+1)x_2^{\Delta}(t) - x_2^{\sigma}(t) + x_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 x_1(t) + k_0 x_1^{\Delta}(t) \\ 0 \\ -(t+1)k_1 x_2(t) + k_1 x_3(t) - k_0(t+1)x_2^{\Delta}(t) - k_0 x_2^{\sigma}(t) + k_0 x_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix},$$

olup (5.5) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} -1 & t+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t+4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 x_1(t) + k_0 x_1^{\Delta}(t) \\ 0 \\ -(t+1)k_1 x_2(t) + k_1 x_3(t) - k_0(t+1)x_2^{\Delta}(t) - k_0 x_2^{\sigma}(t) + k_0 x_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t-1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{\sigma}(t) \\ x_2^{\sigma}(t) \\ x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix},$$

$$-k_1 x_1(t) - k_0 x_1^{\Delta}(t) + (t+1)k_1 x_2(t) - k_1 x_3(t) + k_0(t+1)x_2^{\Delta}(t) + k_0 x_2^{\sigma}(t) - k_0 x_3^{\Delta}(t)$$

$$= x_3^{\sigma}(t) + f_1(t),$$

$$0 = -(t+1)x_2^{\sigma}(t) + x_3^{\sigma}(t) + f_2(t),$$

$$2(t+1)k_1 x_2(t) - 2k_1 x_3(t) + 2k_0(\mathrm{t}+1)x_2^{\Delta}(t) + 2k_0 x_2^{\sigma}(t) - 2x_3^{\Delta}(t) +$$
$$= 2x_2^{\sigma}(t) + x_3^{\sigma}(t) + f_3(t).$$

Bu sistem (5.11) kullanılarak şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$D^{\gamma}P = k_1 P + k_0 P^{\Delta} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+1) & 1 \end{pmatrix} + k_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1(t+1) - k_0 & k_1 \end{pmatrix}.$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \text{ olup}$$

$$D^{\gamma}u = k_1 \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} + k_0 \begin{pmatrix} u_1^{\Delta}(t) \\ u_2^{\Delta}(t) \\ u_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 u_1(t) + k_0 u_1^{\Delta}(t) \\ k_1 u_2(t) + k_0 u_2^{\Delta}(t) \\ k_1 u_3(t) + k_0 u_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix},$$

$$(D^{\gamma}P)u = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1(t+1) - k_0 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 u_1(t) \\ 0 \\ -k_1(t+1)u_2(t) - k_0 u_2(t) + k_1 u_3(t) \end{pmatrix},$$

bulunur. (5.11) şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} k_1 u_1(t) + k_0 u_1^{\Delta}(t) \\ k_1 u_2(t) + k_0 u_2^{\Delta}(t) \\ k_1 u_3(t) + k_0 u_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 u_1(t) \\ 0 \\ -k_1(t+1)u_2(t) - k_0 u_2(t) + k_1 u_3(t) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(t+2)(t-1)}{2} & \frac{t-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(t+2)(t+3)}{2} & \frac{t+3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{\sigma}(t) \\ x_2^{\sigma}(t) \\ x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -1 & \frac{t}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t+4}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} - k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}.$$

Buradan

$$k_1 u_1(t) + k_0 u_1^{\Delta}(t) = \frac{-(t+2)(t-1)}{2} x_2^{\sigma}(t) + \frac{(t-1)}{2} x_3^{\sigma}(t) - f_1 + \frac{t}{2} f_2 + \frac{1}{2} f_3,$$

$$k_1u_2(t) + k_0u_2^{\Delta}(t) = 0,$$

$$k_1u_3(t) + k_0u_3^{\Delta}(t) = -k_1(t+1)u_2(t) - k_0u_2(t) + k_1u_3(t) - \frac{(t-2)(t+3)}{2}x_2^{\sigma}(t)$$

$$+\tfrac{(t+3)}{2}x_3^{\sigma}(t) + \tfrac{t+4}{2}f_2 - \tfrac{1}{2}f_3 + k_1(t+2)u_2(t) - k_1u_3(t),$$

olur.

$$v = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} \text{ ve böylece } v^{\sigma} = \begin{pmatrix} v_1^{\sigma}(t) \\ v_2^{\sigma}(t \\ v_3^{\sigma}(t \end{pmatrix} \text{ olup (5.11) denkleminden}$$

$$\begin{pmatrix} v_1^{\sigma}(t) \\ v_2^{\sigma}(t \\ v_3^{\sigma}(t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+1) & 1 \\ 0 & (t+2)(-t-1) & (t+2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(t+2) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{\sigma}(t) \\ x_2^{\sigma}(t) \\ x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (t+2) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} v_1^{\sigma}(t) \\ v_2^{\sigma}(t) \\ v_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (t+2)x_2^{\sigma}(t) - x_3^{\sigma}(t) - f_2 \\ (t+2)^2x_2^{\sigma}(t) - (t+2)x_3^{\sigma}(t) - (t+2)f_2 \end{pmatrix},$$

ve buradan

$$v_1^{\sigma}(t) = 0,$$

$$v_2^{\sigma}(t) = (t+2)x_2^{\sigma}(t) - x_3^{\sigma}(t) - f_2,$$

$$v_3^{\sigma}(t) = (t+2)^2x_2^{\sigma}(t) - (t+2)x_3^{\sigma}(t) - (t+2)f_2,$$

elde edilir.

5.3. İkinci Türden Doğrusal Zamanla Değişen Oransal Dinamik-Cebirsel Denklemlerin Özel Bir Durumu

$A, C\colon I \to \mathcal{M}_{n\times m}$ olduğunu varsayalım. Aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$A^{\sigma}D^{\gamma}x = Cx + f. \tag{5.13}$$

Burada (5.13) denkleminin (5.12) denklemine indirgenebileceğini göstereceğiz. P'nin *kerA* boyunca bir $\mathcal{C}^1$-projektör olduğunu varsayalım. Öyleyse

$$AP = A,$$

ve

$$A^{\sigma}D^{\gamma}x = \quad A^{\sigma}P(D^{\gamma}x) = \quad A^{\sigma}D^{\gamma}(Px) - A^{\sigma}D^{\gamma}Px^{\sigma} + k_1A^{\sigma}Px^{\sigma}.$$

olup

$$A^{\sigma}D^{\gamma}(Px) = A^{\sigma}D^{\gamma}Px^{\sigma} - k_1A^{\sigma}Px^{\sigma} + Cx + f$$

$$= (A^{\sigma}D^{\gamma}P - k_1A^{\sigma}P)x^{\sigma} + Cx + f\ ,$$

$C_1 = A^{\sigma}D^{\gamma}P - k_1A^{\sigma}P$ denirse,

$$A^{\sigma}D^{\gamma}(Px) = C_1x^{\sigma} + Cx + f, \tag{5.14}$$

olarak (5.13) denkleminin özel bir hali bulunur.

Örnek 5.4.1 $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0}$, $A\,(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}\,(t) = \begin{pmatrix} -t & 1 & t \\ 0 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{T}$.

Burada

$$\sigma(t) = 2t\ , \quad t \in \mathbb{T}.$$

ve

$$A^{\sigma}\,(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{T}.$$

şeklindedir. Biz aşağıdaki çözüm olan vektör matrisi bulacağız.

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{T}.$$

Böylece

$$A\,(t)y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{T},$$

ve buradan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ -ty_2(t) + y_3(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{T},$$

bulunur. Böylece

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{T},$$

olup

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{T},$$

$$P(t) = I - Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix},$$

$$P^{\Delta}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(Px)(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) - x_3(t) \\ (1-t)x_3(t) \end{pmatrix},$$

$$D^{\gamma}P = k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} + k_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 & (1-t)k_1 - k_0 \end{pmatrix},$$

$$D^{\gamma}x = \begin{pmatrix} k_1 x_1(t) + k_0 x_1^{\Delta}(t) \\ k_1 x_2(t) + k_0 x_2^{\Delta}(t) \\ k_1 x_3(t) + k_0 x_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix},$$

hesaplamalarından hareketle (5.13) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 x_1(t) + k_0 x_1^{\Delta}(t) \\ k_1 x_2(t) + k_0 x_2^{\Delta}(t) \\ k_1 x_3(t) + k_0 x_3^{\Delta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & 1 & t \\ 0 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix},$$

$$k_1 x_1(t) + k_0 x_1^{\Delta}(t) = -t x_1(t) + x_2(t) + t x_3(t) + f_1(t),$$

$$-2t k_1 x_2(t) - 2t k_0 x_2^{\Delta}(t) + k_1 x_3(t) + k_0 x_3^{\Delta}(t) = x_2(t) + 2t x_3(t) + f_2(t),$$

$$0 = t x_1(t) + x_3(t) + f_3(t).$$

$$D^{\gamma}(Px) = k_1\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) - x_3(t) \\ (1-t)x_3(t) \end{pmatrix} + k_0\begin{pmatrix} x_1^{\Delta}(t) \\ x_2^{\Delta}(t) - x_3^{\Delta}(t) \\ (1-t)x_3^{\Delta}(t) - x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1x_1(t) + k_0x_1^{\Delta}(t) \\ k_1x_2(t) - k_1x_3(t) + k_0x_2^{\Delta}(t) - k_0x_3^{\Delta}(t) \\ (1-t)k_1x_3(t) + (1-\mathrm{t})k_0x_3^{\Delta}(t) - k_0x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix},$$

$$C_1 = A^{\sigma}D^{\gamma}P - k_1A^{\sigma}P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & -k_1 \\ 0 & 0 & (1-t)k_1 - k_0 \end{pmatrix} - k_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O halde (5.14) denklemi şu formu alır:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1x_1(t) + k_0x_1^{\Delta}(t) \\ k_1x_2(t) - k_1x_3(t) + k_0x_2^{\Delta}(t) - k_0x_3^{\Delta}(t) \\ (1-t)k_1x_3(t) + (1-\mathrm{t})k_0x_3^{\Delta}(t) - k_0x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{\sigma}(t) \\ x_2^{\sigma}(t) \\ x_3^{\sigma}(t) \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} -t & 1 & t \\ 0 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix},$$

$$k_1x_1(t) + k_0x_1^{\Delta}(t) = -tx_1(t) + x_2(t) + tx_3(t) + f_1(t),$$

$$-2tk_1x_2(t) + 2tk_1x_3(t) - 2tk_0x_2^{\Delta}(t) + 2tk_0x_3^{\Delta}(t) + (1-t)k_1x_3(t) + (1-\mathrm{t})k_0x_3^{\Delta}(t)$$
$$- k_0x_3^{\sigma}(t) = -k_0x_3^{\sigma}(t) + x_2(t) + 2tx_3(t) + f_2(t),$$

$$0 = tx_1(t) + x_3(t) + f_3(t).$$

6. SONUÇLAR

Birim operatörü içermesi ve k_0 ve k_1 parametrelerinin keyfi seçimine bağlı olarak farklı tanımları mevcut olan zaman skalasındaki oransal kesirli türev, kesirli mertebenin bire eşit olması durumunda reel sayılardaki oransal türev tanımını vermesi Hilger analizinin bir genelleştirmesidir. Bu çalışmada, zaman skalalarındaki projektör analizini yapmak için gerekli olan doğrusal zamanla değişen dinamik-cebirsel denklem sistemleri farklı türden ele alınarak incelenmiştir. Klasik durumdan farklı olarak, burada ele alınan denklemler oransal kesirli türevleri içerdiğinden, keyfi zaman skalalarında doğrusal oransal sistemler için kesirli mertebeli türevler açısından daha genel sonuçlar verilmektedir. Kesirli hesabın fizik ve mühendislikteki karmaşık sistemleri çözmek için birçok farklı tanımı ve uygulaması vardır. Bu analizi klasik analizin bir genellemesi olarak düşünmek mümkündür. Bu çalışmada kesirli hesabın zaman skalasındaki diğer tanımlarından farklı olarak, zaman skalasında klasik duruma benzer birinci mertebeden doğrusal zamanla değişen oransal dinamik-cebirsel denklem sistemi ve eşdeğer oransal sistemleri elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Miller, K., Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, New York: Wiley

[2] Oldham, K. B., Spanier, J. (1974). The fractional calculus, Academic Press, New York and London

[3] Hermann, R. (2014). Fractional Calculus: An Introduction for Physicists, World Scientific Singapore

[4] Meilanov, R. P., Magomedov, R. A. (2014). Thermodynamics in Fractional Calculus, Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 87(6), 1521–1531

[5] Carpinteri, A., Cornetti, P., Sapora, A. (2014). Nonlocal elasticity: an approach based on fractional calculus, Meccanica, 49(11), 2551–2569

[6] Hilger, S. (1988). Ein Makettenkalkl mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, Ph. D. Thesis, Universtat Wurzburg

[7] Bastos, N. R. O. (2012). Fractional Calculus on Time Scales, Ph.D. thesis, Instituto Politecnico de Viseu (Portugal)

[8] Khalil, R., Horani, M. Al., Yousef, A., Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 57–66

[9] Benkhettou, N., Hassani, S., Torres, D. F. M. (2016). A conformable fractional calculus on arbitrary time scales, Journal of King Saud University (Science), 28(1), 93-98

[10] Benkhettou, N., Brito da Cruz, A. M. C., Torres, D. F. M. (2015). A fractional calculus on arbitrary time scales: Fractional differentiation and fractional integration, Signal Processing, 107, 230– 237

[11] Bohner, M., Peterson, A. (2001). Dynamic equations on time scales. An introduction with applications, Birkhauser, Boston, MA

[12] Bohner, M., Peterson, A. (2004). Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhauser, Boston

[13] Bohner, M. and Svetlin, G. (2016). Multivariable dynamic calculus on time scales, Springer

[14] Segi Rahmat, M. R. (2019). A new definition of conformable fractional derivative on arbitrary time scales, Advances in Difference Equations, 2019(1), 1-16.

[15] Anderson, D. R., Ulness, D. J. (2015). Newly defined conformable derivatives, Advances in Dynamical Systems and Applications, 10(2), 109-137.

[16] Segi Rahmat, M. R., Noorani, M. S. M. (2021). A new conformable nabla derivative and its application on arbitrary time scales, Advances in Difference Equations, 2021(1), 1-27.

[17] Gülşen, T., Acar, M. (2023). Self-Adjoint Sturm-Liouville Dynamic Problem via Proportional Derivative, Journal of the Institute of Science and Technology, 13(4), 2945-2957.

[18] Anderson, D. R., Georgiev, S. G. (2020). Conformable Dynamic Equations on Time Scales. Chapman and Hall/CRC.

[19] Cetinkaya, F. A., Cuchta, T. (2020). Sturm–Liouville and Riccati Conformable Dynamic Equations, Advances in Dynamical Systems and Applications, 15(1), 1-13.

[20] Owolabi, K. M. (2018). Modelling and simulation of a dynamical system with the Atangana-Baleanu fractional derivative. The European Physical Journal Plus, 133(1), 15.

[21] Noeiaghdam, S., Sidorov, D. (2020). Caputo-Fabrizio Fractional Derivative to Solve the Fractional Model of Energy Supply-Demand System. Mathematical Modelling of Engineering Problems, 7(3).

[22] Chen, W., Sun, H., Li, X. (2022). Fractional derivative modeling in mechanics and engineering. Springer Nature.

[23] Abu-Shady, M., Kaabar, M. K. (2021). A generalized definition of the fractional derivative with applications. Mathematical Problems in Engineering, 2021, 1-9.

[24] Wu, W., Ma, X., Zeng, B., Zhang, H., Zhang, P. (2022). A novel multivariate grey system model with conformable fractional derivative and its applications. Computers and Industrial Engineering, 164, 107888.

[25] Riewe, F. (1997). Mechanics with fractional derivatives. Physical Review E, 55(3), 3581.

[26] Georgiev, S. G. (2023). Dynamic Calculus and Equations on Time Scales. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.

ÖZGEÇMİŞ

Canan YANILMAZ

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

AKADEMİK FAALİYETLER

Bildiriler:

1. Canan YANILMAZ, Tuba GULSEN, (2024). Linear Time-Varying Dynamic-Algebraic Equations via the Proportional Fractional Derivative, 2nd International Conference on Scientific and Innovative Studies ICSIS 2024, Konya-Turkey, 18-19 April 2024.