T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

GAMMA MATRİS VE İLİŞKİLİ DİZİ UZAYLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şeyma ÇELİK

Danışman: Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ

TOKAT-2024

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GAMMA MATRİS VE İLİŞKİLİ DİZİ UZAYLARI

Şeyma ÇELİK

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
2024, 56 sayfa

Danışman: Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ

Dört bölümden oluşan bu tezde $X \in \{c_0, c, \ell_\infty, \ell_p\}$ olmak üzere $X(\Gamma^n)$ dizi uzayları çalışılmıştır.

Birinci bölümde dizi uzayları hakkında temel sayılabilecek kavramlara ve bu alanda yapılan önemli çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde tez çalışması boyunca kullanılan temel tanım ve teoremler sunulmuştur.

Üçüncü ve dördüncü bölüm Gamma dizi uzaylarının tanıtıldığı ve ayrıntılı olarak incelendiği bölümlerdir. Bu bölümlerde bu uzayların hem cebirsel hem de topolojik özellikleri ele alınmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Gamma Matris, Dizi Uzayları, Matris Dönüşümleri

ABSTRACT

Master Thesis

THE GAMMA MATRIX AND ITS ASSOCİATED SEQUENCE SPACES

Şeyma ÇELİK

Tokat Gaziosmanpaşa University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics
2024, 56 pages

Supervisior: Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ

In this four-part thesis, the sequence spaces $X(\Gamma^n)$ have been studied, where $X \in \{c_0, c, \ell_\infty, \ell_p\}$.

In the first part, it can be considered basic about sequence spaces concepts and important studies in this field are included.

In the second part, the basic definitions used throughout the thesis work and theorems are presented.

The third and fourth chapters introduce Gamma sequence spaces and these are the sections in which it is examined in detail. In these sections, both algebraic and topological properties of these spaces are discussed.

KEYWORDS: Gamma Matrix, Sequences Spaces, Matrix Transformations

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ danışmanlığında hazırlamış olduğum Gamma Matris ve İlişkili Dizi Uzayları adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımı kabul edeceğimi beyan ediyorum.

Şeyma ÇELİK

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

"Gamma Matris ve İlişkili Dizi Uzayları" konulu tez çalışmasının konusu seçimi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında beni yönlendiren kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ 'e ve daima yardımlarını hissettiğim aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

Şeyma ÇELİK

Haziran 2024

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
ω	Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin uzayı
c	Reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
c_0	Reel terimli yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_∞	Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı
ℓ_p	p. kuvvetten mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
cs	Kısmi toplamları sınırlı olan bütün reel terimli serilerin uzayı
bs	Kısmi toplamları yakınsak olan bütün reel terimli serilerin uzayı
bv	Sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
cs_0	Sıfıra yakınsayan serilerin uzayı
λ^α	λ dizi uzayının α- duali
λ^β	λ dizi uzayının β- duali
λ^γ	λ dizi uzayının γ- duali
C_1	Birinci mertebede Cesàro matrisi
Δ^1	Fark matrisi
$\Delta^{(1)}$	Fark matrisi
ÇekA	A operatörünün sıfır uzayı(çekirdeği)
S	Toplam matrisi
E^r	Euler ortalaması(matrisi)
R^t	Riesz ortalaması
Γ^n	Gamma matrisi

1. GİRİŞ

Toplanabilme teorisi temel olarak ıraksak olan bir diziye limit atama fikrine dayanır. Yakınsak olan bir dizinin aritmetik ortalamalar dizisinin de yakınsak ve üstelik limitlerinin de aynı olduğu 1890 yılında E. Cesàro tarafından gözlemlenmiştir. Böylece yakınsaklık kavramının genelleştirilmesi görüşü ortaya çıkmıştır. Yakınsaklık kavramını genelleyen yeni dizi uzaylarını inşa etme yaklaşımı toplanabilmenin en yaygın çalışma alanlarından birini oluşturur.

U bir dizi uzayı ve $E = (e_{ij})$ reel terimli bir sonsuz matris olsun. $u = (u_j) \in U$ için $(Eu)_i = \sum_{j=0}^{\infty} e_{ij} u_j \, (i \in \mathbb{N})$ serileri yakınsak ise $Eu = ((Eu)_i)$ dizisine u dizisinin E- dönüşümü denir.

$$U_E = \{u = (u_j) \in \omega : Eu \in U\}$$

cümlesi E matrisinin U etki alanı olarak adlandırılır. Burada ω ile reel veya kompleks terimli bütün dizilerin cümlesi belirtilmektedir. U_E cümlesi diziler üzerinde tanımlanan koordinatsal toplama ve skalar ile çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır, dolayısı ile bir dizi uzayıdır. Buradan hareketle U yerine standart dizi uzayları ve E yerine de özel üçgensel matrisler alınarak U_E etki alanı ile farklı dizi uzayları elde edilmiştir.

1. mertebeden Cesàro matrisi $C_1 = (c_{ij})$

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i} & , \quad (1 \leq j \leq i) \\ 0 & , \quad (j > i) \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu matrisin ℓ_p ve ℓ_∞ dizi uzayları üzerindeki etki alanları kullanılarak X_p ve X_∞ dizi uzayları Ng ve Lee tarafından 1978 yılında

$$X_p = \left\{ v = (v_i) \in \omega : \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} v_j \right|^p < \infty \right\}$$

ve

$$X_\infty = \left\{ v = (v_i) \in \omega : \sup_{i \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} v_j \right| < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlandı (Ng ve Lee, 1978). Bu çalışma üçgensel bir matrisin etki alanı kullanılarak dizi uzayı inşa etme yaklaşımında bir mihenk taşıdır. Daha sonraki yıllarda bu mantıkla pek çok dizi uzayı tanımlanmış ve bu dizi uzayları üzerinde çalışılmıştır [(Wang, 1978), (Aydin ve Başar, 2004), (Altay ve Başar, 2005), (Aydin ve Başar, 2005), (Şengönül ve Başar, 2005), (Mursaleen ve ark., 2006)].

M. Şengönül ve F. Başar, 2005 yılında 1. mertebeden Cesàro matrisinin c ve c_0 etki alanlarını çalıştılar. Yazarlar bu çalışmada $\tilde{c}$ ve $\tilde{c_0}$ dizi uzaylarını

$$\tilde{c} = \left\{ u = (u_i) \in \omega : \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^{j} u_i - \text{mevcut} \right\}$$

ve

$$\tilde{c_0} = \left\{ u = (u_i) \in \omega : \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^{j} u_i = 0 \right\}$$

olarak tanımladı (Şengönül ve Başar, 2005). Cesàro dizi uzayları ve genellemeleri pek çok yazar tarafından toplanabilme teorisinde çalışılmıştır.

Bu bağlamda 2020 yılında H. Roopaei ve arkadaşları n. mertebeden Cesàro matrisini

$$c^n_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n+j-k-1}{j-k}}{\binom{n+j}{j}} & , \quad 0 \leq k \leq j \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{1.0.1}$$

şeklinde tanımlayıp bu matrisin ℓ_p ve ℓ_∞ etki alanlarını çalışmışlardır. Yazarlar C^n_p ve C^n_∞ dizi uzaylarını sırayla

$$C^n_p = \left\{ x = (x_j) \in \omega : \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+j-k-1}{j-k} x_k \right|^p < \infty \right\}$$

ve

$$C^n_\infty = \left\{ x = (x_j) \in \omega : \sup_j \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+j-k-1}{j-k} x_k \right| < \infty \right\}$$

olarak tanımlamışlardır (Roopaei ve ark., 2020).

2022 yılında H. Roopaei ve F. Başar n. mertebeden Gamma matrisini $\Gamma^n = \left(\gamma_{jk}^n\right)$ her $j,k \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma_{jk}^n = \begin{cases} \dfrac{\binom{n+k-1}{k}}{\binom{n+j}{j}} & , \quad 0 \leq k \leq j \\ 0 & , \quad k > j \end{cases} \tag{1.0.2}$$

olarak tanımlayıp bu matrisin c, c_0, ℓ_∞ ve ℓ_p etki alanlarını araştırmışlardır.

Biz bu tez çalışmasında 2022 yılında H.Roopaei ve Başar tarafından tanımlanan $X \in \{c_0, c, \ell_\infty, \ell_p\}$ olmak üzere $X(\Gamma^n)$ dizi uzaylarını ayrıntılı bir biçimde inceleyeceğiz.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda, tezde kullanacağımız temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1. E boş olmayan bir cümle ve $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olsun. Eğer $\forall\, u, v, t \in E$ ve $\forall\, \alpha, \beta \in K$ için

$$\begin{array}{rccc} + : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (u, v) & \longrightarrow & u + v \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot : & K \times E & \longrightarrow & E \\ & (\alpha\ , u) & \longrightarrow & \alpha\ \cdot u \end{array}$$

olarak tanımlanan fonksiyonlar,

1) $u + v = v + u$,
2) $(u + v) + t = u + (v + t)$,
3) $\forall\ u \in E$ için $u + e = e + u = u$ olacak şekilde bir tek $e \in E$ vardır,
4) $\forall\ u \in E$ için $u + (-u) = (-u) + u = e$ olacak şekilde bir tek $(-u) \in E$ vardır,
5) $(\alpha + \beta)\, u = \alpha\, u + \beta\, u$,
6) $\alpha(u + v) = \alpha\, u + \alpha\, v$,
7) $(\alpha\, \beta)\, u = \alpha\, (\beta\, u)$,
8) $1 \cdot u = u$

şartlarını sağlıyorsa E cümlesine K cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) adı verilir.

Tanım 2.1.2. Boş olamayan bir M kümesi ve bir

$$\begin{array}{rccc} d : & M \times M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \longrightarrow & d\,(a, b) \end{array}$$

dönüşümü verilsin. d dönüşümü $\forall\, a, b, c \in M$ için

(M_1) $d\,(a, b) \geq 0$

(M_2) $d\,(a, b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$

(M_3) $d\,(a, b) = d\,(b, a)$ (simetri)

(M_4) $d\,(a, b) \leq d\,(a, c) + d\,(c, b)$ (üçgen eşitsizliği) aksiyomlarını sağlarsa d ye M üzerinde bir metrik (M, d) ikilisine de bir metrik uzay adı verilir (E. Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.3. Bir (M, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsaksa (M, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir (E. Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.4. X, K cismi ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longrightarrow & \|u\| \end{array}$$

dönüşümü $\forall\, u, v \in X$ ve $\forall\, \alpha \in K$ için,

(N_1) $\|u\| \geq 0$

(N_2) $\|u\| = 0 \iff u = \theta$

(N_3) $\|\alpha u\| = |\alpha|\, \|u\|$

(N_4) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

şartlarını sağlarsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu vektör uzayı denir (E. Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.5. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsaksa $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay ya da Banach uzayı denir (E. Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.6. E ile F aynı cisim üzerinde tanımlı iki lineer uzay ve

$$L : E \to F$$

bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall\, u, v \in E$ ve $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ için

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

$$L(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot L(u)$$

ya da buna denk olarak $\forall\, u, v \in E$ ve $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için

$$L(\lambda\, u + \mu\, v) = \lambda\, L(u) + \mu\, L(v)$$

ise L dönüşümüne bir lineer dönüşüm denir (Erdem ve Kılıç, 1983).

Tanım 2.1.7.

$$L : E \to F$$

lineer operatörü verilsin.

$$\text{Çek } L = \{x \in E : L\,x = 0\}$$

kümesine L operatörünün sıfır uzayı veya çekirdeği denir (Şuhubi, 2001).

Lineer bir dönüşümün birebir olduğunu göstermede kullandığımız aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2.1.8. L lineer operatörü birebirdir ancak ve ancak Çek $L = \{0\}$ dır (Şuhubi, 2001).

2.2. Birtakım Eşitsizlikler

Bu kısımda, sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı önemli eşitsizliklere yer vereceğiz.
(**1**) (Minkowski Eşitsizliği): $u = (u_k)$, $v = (v_k) \in \ell_p$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k + v_k|^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^p + \sum_{k=0}^{\infty} |v_k|^p \;\;,\;\; (0 < p \leq 1)$$

ve

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k + v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |v_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \;\;,\;\; (p \geq 1)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

(**2**) (Hölder Eşitsizliği): $u = (u_i) \in \ell_p$, $v = (v_i) \in \ell_q$ ve $p > 1$ olsun. O zaman $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

(3) $\forall u, v \in \mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ olmak üzere

$$|u+v| \leq |u| + |v|$$

eşitsizliği geçerlidir .

2.3. Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Tanım 2.3.1. $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\omega = \{u = (u_j) \in \omega : u : \mathbb{N} \longrightarrow K, j \longrightarrow u_j = (u_j)\}$$

kümesine bütün dizilerin kümesi denir.

ω kümesi,

$$((u_j), (v_j)) \longrightarrow (u_j + v_j)$$

ve

$$(\lambda, (v_j)) \longrightarrow (\lambda\, v_j)$$

ikili işlemleri ile K üzerinde bir vektör uzayıdır. ω'nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir (Boss ve Peter, 2000).

Şimdi en çok kullanılan dizi uzaylarını aşağıdaki örnekte tanıtalım.

Örnek 2.3.2.

$$
\begin{aligned}
\ell_\infty &= \left\{ x=(x_k)\in\omega : \sup_k |x_k| < \infty \right\}, \\
c &= \left\{ x=(x_k)\in\omega : (x_k) \text{ yakınsak yani } \lim_{k\to\infty} x_k - \text{mevcut} \right\}, \\
c_0 &= \left\{ x=(x_k)\in\omega : \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \right\}, \\
bs &= \left\{ x=(x_k)\in\omega : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in \ell_\infty \right\}, \\
cs &= \left\{ x=(x_k)\in\omega : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in c \right\}, \\
\ell_p &= \left\{ x=(x_k)\in\omega : \sum_k |x_k|^p < \infty \right\}, (1\le p<\infty) \\
bv &= \left\{ x=(x_k)\in\omega : |x_0| + \sum_k |x_k - x_{k+1}| < \infty \right\},
\end{aligned}
$$

uzayları birer dizi uzayıdır (Boss ve Peter, 2000).

Tanım 2.3.3. (K-,FK-,BK- Uzayları) λ bir lineer topolojik uzay olsun. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $\rho_k(u)=u_k$ şeklinde tanımlanan $\rho_k:\lambda\to\mathbb{C}$ dönüşümü sürekliyse λ'ya bir K- uzayı denir. Tam lineer metrik bir K- uzayına bir FK- uzayı , normlu FK- uzayına da bir BK- uzayı denir (Altay ve Başar, 2005).

Örnek 2.3.4. ℓ_∞, c ve c_0 uzayları $\|u\|_\infty = \sup_j |u_j|$ normuna göre, $1\le p<\infty$ için ℓ_p uzayı da $\|u\|_p = \left(\sum_{j=0}^{i} |u_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ normuna göre birer BK- uzayıdırlar (Malkowsky, 2001).

Tanım 2.3.5. λ ve μ iki dizi uzayı ve $B=(b_{ij})$ $(i,j=0,1,2,3,...)$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $\forall\, i\in\mathbb{N}$ için $B_i(y)=\sum_j b_{ij}y_j$ yakınsak ise $By=(B_i(y))$ yazılır. Eğer $y=(y_j)\in\lambda$ iken $By=(B_i(y))\in\mu$ ise o zaman B ' ye λ dizi uzayından μ dizi uzayına bir matris dönüşümüdür denir ve bu durum $B:\lambda\longrightarrow\mu$ olarak gösterilir. $(B_i(y))$ dizisine de y' nin B- dönüşümü denir.

$(\lambda:\mu)$ ile $B:\lambda\longrightarrow\mu$ şeklindeki bütün B matrislerinin kümesi, $(\lambda:\mu;p)$ ile de limit ya da toplamı koruyan $B:\lambda\longrightarrow\mu$ şeklindeki bütün B matrislerinin kümesi gösterilecektir. $(\lambda:\mu;p)\subset(\lambda:\mu)$ olduğu açıktır (Nanda, 1983).

Tanım 2.3.6. $B = (b_{ij})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $\forall i = (0, 1, 2, \ldots)$ için $B_i(u) = \sum_j b_{ij}u_j$ mevcut ve $\lim_i B_i(u) = l \in \mathbb{C}$ ise $u = (u_j)$ dizisine l sayısı için B- toplanabilirdir denir. Bu durum u' nun B- limiti l dir şeklinde ifade edilir ve

$$B - \lim_i u_i = l$$

olarak gösterilir (Malkowsky, 2001).

Tanım 2.3.7. $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $k > n$ olan $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine üçgensel matris denir. $A = (a_{nk})$ üçgensel matrisinde $a_{nn} \neq 0$ ise A'ya normal matris denir (Boss ve Peter, 2000).

Teorem 2.3.8. $A \in (c : c)$ olması için ancak ve ancak

i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\exists\ a \in \mathbb{C}$ için $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_k |a_{nk}| = a$

iii) $\forall\, k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_{nk} = a_k$

şartlarının sağlanmasıdır (Nanda, 1983).

Tanım 2.3.9. Teorem 2.3.8 ' deki koşulları sağlayan matrise konservativ matris denir. Bu tip matrisler kısaca K- matrisi olarak ifade edilirler.

Teorem 2.3.10. $A \in (c : c\,; p)$ olması için ancak ve ancak

i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\forall\, k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_{nk} = 0$

iii) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_k a_{nk} = 1$

şartlarının sağlanmasıdır (Nanda, 1983).

Tanım 2.3.11. Teorem 2.3.10 ' daki koşulları sağlayan matrise Teoplitz matrisi veya regüler matris denir. Bu tip matrisler kısaca T- matrisi olarak ifade edilirler.

Burada bazı özel üçgensel matrislerden bahsedeceğiz.

Tanım 2.3.12. $t = (t_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$, $(n \in \mathbb{N})$ olsun. O zaman $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$r_{nk}^{t} = \begin{cases} \dfrac{t_k}{T_n} & , \quad (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $R^t = (r_{nk}^t)$ matrisine Riesz ortalaması ($t = (t_k)$ dizisiyle ilişkili) denir (Polat ve Başar, 2007).

Tanım 2.3.13. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $C_1 = (c_{nk})$ matrisine birinci mertebeden Cesàro ortalaması denir (Polat ve Başar, 2007).

Tanım 2.3.14. $\forall i, j \in \mathbb{N}$ için

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad (0 \leq j \leq i) \\ 0 & , \quad (j > i) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $S = (s_{ij})$ matrisine toplam matrisi denir (Polat ve Başar, 2007).

Tanım 2.3.15. $\forall i, j \in \mathbb{N}$ için

$$\delta_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j} & , \quad (i-1 \leq j \leq i) \\ 0 & , \quad (0 \leq j < i-1 \text{ ya da } j > i) \end{cases}$$

ve

$$d_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j} & , \quad (i \leq j \leq i+1) \\ 0 & , \quad (0 \leq j < i \text{ ya da } j > i+1) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta^{(1)} = \delta_{ij}$ ve $\Delta^1 = d_{ij}$ matrislerine fark matrisleri denir (Polat ve Başar, 2007).

Tanım 2.3.16. $A^r = (a^r_{nk})$ matrisi herhangi bir sabit $r \in \mathbb{R}$ ve her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$a^r_{nk} = \begin{cases} \frac{1+r^k}{n+1} & , \quad (0 \leq k \leq n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matristir (Altay ve Başar, 2005).

Tanım 2.3.17. $r \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$ için

$$e^r_{ab} = \begin{cases} \binom{a}{b} (1-r)^{a-b}\, r^b & , \quad (0 \leq b \leq a) \\ 0 & , \quad (b > a) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $E^r = (e^r_{ab})$ matrisine r. mertebeden Euler ortalaması denir (Boss ve Peter, 2000).

Tanım 2.3.18. λ bir normlu dizi uzayı olsun ve (b_n) dizisi verilsin. $\forall x \in \lambda$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x - (a_0 b_0 + a_1 b_1 + ... + a_n b_n)\| = 0$$

olacak şekilde bir tek (a_n) skaler dizisi varsa (b_n)'ye λ dizi uzayının bir Schauder bazı (kısaca bazı) denir ve bu durumda $x = \sum_k a_k b_k$ yazılır (Altay ve Başar, 2005).

Tanım 2.3.19. λ bir dizi uzayı olmak üzere bir A sonsuz matrisinin λ uzayındaki matris bölgesi (domain) olan λ_A kümesi

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in \omega : Ax \in \lambda\}$$

olarak tanımlanır (Altay ve Başar, 2005).

Şimdi yukarıda tanımları verilen $C_1, R^t, \triangle$ ve A^r matrisleri yardımıyla tanımlanan bazı dizi uzayları örnek olarak verilecektir.

Örnek 2.3.20. $(l_\infty)_{c_1} = X_\infty$, $(l_p)_{c_1} = X_p$, $(l_\infty)_{R^t} = r^t_\infty$, $c^t_R = r^t_c$, $(c_0)_{R^t} = r^t_0$, $(l_p)_\triangle = bv_p$, $(c_0)_{A^r} = a^r_0$, $c_{A^r} = a^r_c$, $(l_p)_{A^r} = a^r_p$, $(l_\infty)_{A^r} = a^r_\infty$ dır (Altay ve Başar, 2005).

Tanım 2.3.21. λ ve μ dizi uzayları için $Z(\lambda,\mu)$ kümesi

$$Z(\lambda,\mu)=\{v=(v_k)\in\omega:\forall u\in\lambda \text{ için } uv=(u_kv_k)\in\mu\}$$

olarak tanımlansın. Bu $Z(\lambda,\mu)$ kümesi yardımı ile λ uzayının α -,β- ve γ- dualleri olan $\lambda^\alpha,\lambda^\beta$ ve λ^γ kümeleri,

$$\lambda^\alpha=Z(\lambda,l_1),\ \lambda^\beta=Z(\lambda,cs),\ \lambda^\gamma=Z(\lambda,bs)$$

olarak tanımlanır (Altay ve Başar, 2002).

Örnek 2.3.22. $bv_0=bv\cap c_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} cs^\alpha &= bv^\alpha=bv_0^\alpha=bs^\alpha=l \\ cs^\beta &= bv,\ bv^\beta=cs,\ bv_0^\beta=bs,\ bs^\beta=bv_0 \\ cs^\delta &= bv,\ bv^\gamma=bs,\ bv_0^\gamma=bs,\ bs^\gamma=bv \end{aligned}$$

dir (Boss ve Peter, 2000).

Teorem 2.3.23. λ ve μ iki dizi uzayı ve $\sigma\in(\alpha,\beta,\gamma)$ olsun. O zaman $\lambda^\alpha\subseteq\lambda^\beta\subseteq\lambda^\gamma$ dir ve $\lambda\subset\mu$ ise $\lambda^\sigma\supset\mu^\sigma$ dir (Polat ve Başar, 2007).

3. $c_0(\Gamma^n)$ ve $c(\Gamma^n)$ GAMMA DİZİ UZAYLARI

3.1. Giriş

Bu bölümde, Gamma dizi uzaylarının bazı temel özelliklerinden bahsedeceğiz. n. mertebeden $\Gamma^n = \left(\gamma_{jk}^n\right)$ Gamma matrisinin Roopaei ve Başar tarafından 2022 yılında her $j, k \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma_{jk}^n = \begin{cases} \dfrac{\binom{n+k-1}{k}}{\binom{n+j}{j}} & , \quad 0 \leq k \leq j \\ 0 & , \quad k > j \end{cases}$$

biçiminde tanımlandı (Roopaei ve Başar, 2022). Bu matrisin klasik dizi uzayları c_0 ve c üzerindeki etki alanları kullanılarak $c_0\left(\Gamma^n\right)$ ve $c\left(\Gamma^n\right)$ Gamma dizi uzayları

$$\begin{aligned} c_0\left(\Gamma^n\right) &= \left\{x = (x_k) \in \omega : \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k = 0\right\} \\ c\left(\Gamma^n\right) &= \left\{x = (x_k) \in \omega : \exists \alpha \in \mathbb{C} \ni \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k = \alpha\right\}, \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Roopaei ve Başar, 2022).

Tanım 2.3.19 yardımıyla bu dizi uzaylarını

$$c_0\left(\Gamma^n\right) = \left(c_0\right)_{\Gamma^n} \quad , \quad c\left(\Gamma^n\right) = (c)_{\Gamma^n}$$

şeklinde yeniden tanımlayabiliriz.

Şimdi herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin Γ^n - dönüşümünü $y = (y_j)$ ile gösterelim.

Matris dönüşümü tanımı yardımıyla her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma^n x\right)_j &= \sum_k \gamma_{jk} x_k \\
&= \sum_{k=0}^{j} \gamma_{jk} x_k + \sum_{k=j+1}^{\infty} \gamma_{jk} x_k \\
&= \sum_{k=0}^{j} \gamma_{jk} x_k + 0 \\
&= \sum_{k=0}^{j} \gamma_{jk} x_k \\
y_j &= \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k
\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$y_j = \left(\Gamma^n x\right)_j = \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \tag{3.1.3}$$

dir. Şimdi gamma matrisinin tersi hakkındaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.1.1. n. mertebeden Γ^n gamma matrisi terslenebilir ve Γ^n matrisinin $\Gamma^{-n} = \left(\gamma_{jk}^{-n}\right)$ ters matrisi $\forall j, k \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma_{jk}^{-n} = \begin{cases} (n+k)/n & , \quad k = j \\ -(k+1)/n & , \quad k = j-1 \\ 0 & , \quad 0 \leq k < j-1 \text{ ya da } k > j \end{cases} \tag{3.1.4}$$

dır.

İspat. n. mertebeden Γ^n gamma matrisi üçgensel bir matris olduğundan tersi mevcuttur. $x = (x_k) \in \omega$ alalım.

$$\Gamma^n x = y$$

eşitliğinden x' i çekersek

$$x = \left(\Gamma^n\right)^{-1} y \tag{3.1.5}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (3.1.5) eşitliği ile bize $(\Gamma^n)^{-1}$ ters matrisin katsayılarını verir. Matris dönüşümü tanımından $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} y_j &= (\Gamma^n x)_j \\ &= \sum_{k=0}^{j} \frac{\binom{n+k-1}{k}}{\binom{n+j}{j}} x_k \\ &= \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \end{aligned}$$

yazılabilir. Yani

$$y_j = (\Gamma^n x)_j = \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \tag{3.1.6}$$

yazılabilir. (3.1.6) eşitliğini kullanarak x_j için bir formül bulalım. Bu durumda

$$\binom{n+j}{j} y_j = \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \tag{3.1.7}$$

olur. (3.1.7) denkleminde j yerine $j-1$ yazılırsa

$$\binom{n+j-1}{j-1} y_{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{n+k-1}{k} x_k \tag{3.1.8}$$

olur. (3.1.7) ve (3.1.8) taraf tarafa çıkarılırsa

$$\binom{n+j}{j} y_j - \binom{n+j-1}{j-1} y_{j-1} = \binom{n+j-1}{j-1} x_j$$

yazılabilir. Son olarak her tarafı

$$\frac{1}{\binom{n+j-1}{j-1}}$$

ile çarpalım. Buradan

$$\begin{aligned}
x_j &= \frac{\binom{n+j}{j}}{\binom{n+j-1}{j-1}}y_j - \frac{\binom{n+j-1}{j-1}}{\binom{n+j-1}{j-1}}y_{j-1} \\
&= \frac{\frac{(n+j)!}{n!\cdot j!}}{\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\cdot j!}}y_j - \frac{\frac{(n+j-1)!}{n!\cdot (j-1)!}}{\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\cdot j!}}y_{j-1} \\
&= \frac{(n+j)!}{n!\cdot j!}\cdot\frac{(n-1)!\cdot j!}{(n+j-1)!}y_j - \frac{(n+j-1)!}{n!\cdot (j-1)!}\cdot\frac{(n-1)!\cdot j!}{(n+j-1)!}y_{j-1} \\
&= \frac{n+j}{n}y_j - \frac{j}{n}y_{j-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$x_j = -\frac{j}{n}y_{j-1} + \frac{n+j}{n}y_j = \left(\Gamma^{-n}y\right)_j \tag{3.1.9}$$

dır. Sonuç olarak $\Gamma^{-n} = \left(\gamma_{jk}^{-n}\right)$ ters matrisi

$$\Gamma^{-n} = \left(\gamma_{jk}^{-n}\right) = \begin{cases} \dfrac{n+k}{n} & , \quad k=j \\ -\dfrac{k+1}{n} & , \quad k=j-1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde verilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Artık ilk teoremimizi verebiliriz. İlk teoremimiz bu uzayların lineer uzaylığı hakkında olacaktır.

Teorem 3.1.2. $c_0(\Gamma^n)$ ve $c(\Gamma^n)$ kümeleri diziler üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre birer lineer uzaydır.

İspat. $x = (x_k)\,,\ y = (y_k) \in c(\Gamma^n)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\lim_{j\longrightarrow\infty}\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\sum_{k=0}^{j}\binom{n+k-1}{k}x_k &= \alpha \\
\lim_{j\longrightarrow\infty}\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\sum_{k=0}^{j}\binom{n+k-1}{k}y_k &= \beta
\end{aligned}$$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mevcuttur. Buradan,

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} (x_k + y_k)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k + \lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} y_k \\ &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

yani $(x+y) \in c(\Gamma^n)$ ve

$$\begin{aligned} \lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} (\lambda \cdot x_k) &= \lambda \cdot \lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \\ &= \lambda \cdot \alpha \end{aligned}$$

yani $(\lambda \cdot x) \in c(\Gamma^n)$ elde edilir. Dolayısı ile $c(\Gamma^n)$ kümesi bir lineer uzaydır. $c_0(\Gamma^n)$ kümesi de benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.1.3. $c_0(\Gamma^n)$ ve $c(\Gamma^n)$ dizi uzayları

$$\|x\|_{c_0(\Gamma^n)} = \|x\|_{c(\Gamma^n)} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \right| \tag{3.1.10}$$

normu ile birer BK- uzayıdır .

İspat. X uzayı c_0 veya c uzaylarından herhangi birini göstersin. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri (3.1.3) bağıntısı ile bağlı olsun. $c_0(\Gamma^n)$ uzayının Banach uzaylığına bakalım. $c_0(\Gamma^n)$ dizi uzayının lineer uzaylığı Teorem 3.1.2 de ispatlanmıştır.

1. Aşama (3.1.10) da tanımlanan fonksiyonunun norm olduğunu gösterelim.

N1) $\forall x \in c_0(\Gamma^n)$ için $\|x_k\| \geqslant 0$ olduğu açıktır.

N2) $\forall x \in c_0(\Gamma^n)$ için

$$
\begin{aligned}
\|x\|_{c_0(\Gamma^n)} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \right| = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ için } \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \right| \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ için } \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k = 0
\end{aligned}
$$

dır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
j &= 0 \text{ için } \frac{1}{\binom{n}{0}} \binom{n-1}{0} x_0 = 0 \;\; \text{eşitliğinden } x_0 = 0 \\
j &= 1 \text{ için } \frac{1}{\binom{n+1}{1}} \left\{ \binom{n-1}{0} x_0 + \binom{n}{1} x_1 \right\} = 0 \;\; \text{eşitliğinden } x_1 = 0 \\
&\vdots \\
j &= k \text{ için } \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \left[\binom{n-1}{0} x_0 + \binom{n}{1} x_1 + \cdots + \binom{n+j-1}{j} x_j \right] = 0
\end{aligned}
$$

eşitliğinden $x_j = 0$ çıkar ki bu bize $\forall j \in \mathbb{N}$ için $x_j = 0$ olduğunu verir.

N3) $\forall x \in c_0(\Gamma^n)$ için

$$
\begin{aligned}
\|\lambda \cdot x\|_{c_0(\Gamma^n)} &= \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} (\lambda \cdot x_k) \right| \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \right| \\
&= |\lambda| \cdot \|x\|_{c_0(\Gamma^n)}
\end{aligned}
$$

N4) $\forall x, y \in c_0(\Gamma^n)$ için

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{c_0(\Gamma^n)} &= \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} (x_k + y_k) \right| \\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \right| + \sup_{j\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} y_k \right| \\
&= \|x\|_{c_0(\Gamma^n)} + \|y\|_{c_0(\Gamma^n)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|x+y\|_{c_0(\Gamma^n)} \leq \|x\|_{c_0(\Gamma^n)} + \|y\|_{c_0(\Gamma^n)}$$

elde edilir. Böylece (3.1.10) da tanımlanan dönüşümün norm aksiyomlarının sağlandığı gösterildi.

2. Aşama $c_0(\Gamma^n)$ dizi uzayının tamlığı

Kabul edelim ki $\left(x^{(n)}\right)$, $c_0(\Gamma^n)$ de keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Burada $\left(x^{(n)}\right)$ dizisinin

$$x^{(n)} = \left(x_i^{(n)}\right) = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots\right)$$

biçiminde olduğuna dikkat edelim. Cauchy dizisinin tanımı gereğince $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \exists \;\; \forall n, m \geq N(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned}
\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_{c_0(\Gamma^n)} &= \left\|\Gamma^n x^{(n)} - \Gamma^n x^{(m)}\right\|_{c_0} \\
&= \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|\Gamma^n x_i^{(n)} - \Gamma^n x_i^{(m)}\right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise $i = 1, 2, \cdots$ ve $n, m \geq N(\varepsilon)$ için

$$\left|\Gamma^n x_i^{(n)} - \Gamma^n x_i^{(m)}\right| < \varepsilon \tag{3.1.11}$$

olduğu anlamına gelir. (3.1.11) eşitsizliği bize her bir i için $\left(\Gamma^n x_i^{(m)}\right)$ dizisinin $\mathbb{R}$ de (veya $\mathbb{C}$ de) bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi her bir i için

$$\lim_m \Gamma^n x_i^{(m)} = x_i \qquad ; \quad x = (x_i)$$

olacak şekilde bir limite sahiptir. Şimdi (3.1.11) eşitsizliğinde n' yi sabitleyip $m \to \infty$ iken limite geçersek

$$\left|\Gamma^n x_i^{(n)} - x_i\right| \leq \varepsilon \qquad ; \quad \forall n \geq \mathbb{N}$$

elde edilir. Buradan $\forall n \geq N$ için

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \left|\Gamma^n x_i^{(n)} - x_i\right| \leq \varepsilon \tag{3.1.12}$$

olur ki bu da

$$\left\|\Gamma^n x^{(n)} - x\right\|_{c_0} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

olduğunu gösterir. Yani $\left(x^{(n)}\right)$ Cauchy dizisi $c_0(\Gamma^n)$ de yakınsaktır.

İspatı tamamlamak için $x \in c_0(\Gamma^n)$ olduğunu göstermemiz gerekir. (3.1.12) den $\forall i, j \geq N(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} \left|\Gamma^n x_i - \Gamma^n x_j\right| &= \left|\Gamma^n x_i - x_i^{(N)} + x_i^{(N)} - x_j^{(N)} + x_j^{(N)} - \Gamma^n x_j\right| \\ &\leq \left|\Gamma^n x_i - x_i^{(N)}\right| + \left|x_i^{(N)} - x_j^{(N)}\right| + \left|x_j^{(N)} - \Gamma^n x_j\right| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu $x \in c_0(\Gamma^n)$ olduğunu ispatlar.

Teorem 3.1.4. $c_0(\Gamma^n)$ ve $c(\Gamma^n)$ uzayları sırasıyla c_0 ve c uzaylarına lineer olarak izomorftur. Yani

$$\begin{aligned} c_0(\Gamma^n) &\cong c_0 \\ c(\Gamma^n) &\cong c \end{aligned}$$

dır.

İspat. İspatı $c(\Gamma^n)$ uzayı için yapacağız. $c_0(\Gamma^n)$ uzayı için benzer şekilde yapılabilir. $x = (x_j)$ ve $y = (y_j)$ dizileri (3.1.3) bağıntısı ile bağlı olsun.

$c(\Gamma^n)$ ile c uzaylarının izomorf olduğunu göstermek için $c(\Gamma^n)$ ile c arasında lineer, 1-1 ve örten bir dönüşümün varlığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} T &: c(\Gamma^n) \longrightarrow c \\ &: x \longrightarrow Tx = y = \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. T dönüşümünün lineerliği açıktır.
T dönüşümünün 1-1 olduğunu gösterelim. Bunu dönüşümün çekirdeğinin sadece sıfır vektöründen oluştuğunu göstererek yapacağız. $Tx = \theta \Longrightarrow x = \theta$ önermesinin sağlandığını göstereceğiz.

$Tx = \theta$ olsun. Yani

$$\frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k = \theta$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} j &= 0 \text{ için } \frac{1}{\binom{n}{0}} \binom{n-1}{0} x_0 = \theta \text{ eşitliğinden } x_0 = 0, \\ j &= 1 \text{ için } \frac{1}{\binom{n+1}{1}} \left\{ \binom{n-1}{0} x_0 + \binom{n}{1} x_1 \right\} = \theta \text{ eşitliğinden } x_1 = 0, \\ &\vdots \\ j &= k \text{ için } \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \left\{ \binom{n-1}{0} x_0 + \binom{n}{1} x_1 + \cdots + \binom{n+j-1}{j} x_j \right\} = \theta \end{aligned}$$

eşitliğinden $x_j = 0$ çıkar ki bu bize $\forall j \in \mathbb{N}$ için $x_j = 0$ olduğunu verir. Dolayısı ile $x = \theta$ elde edilir. Bu ise T dönüşümünün 1-1 olduğunu kanıtlar.

Şimdi, T dönüşümünün örten olduğunu gösterelim. $\forall y \in c$ için $\exists x \in c(\Gamma^n)$ elemanının var olduğunu göstereceğiz.

$$Tx = \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k$$

eşitliğini kullanarak $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right) y_k - \frac{k}{n} y_{k-1}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} Tx &= \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \\ &= \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} \left[\left(1 + \frac{k}{n}\right) y_k - \frac{k}{n} y_{k-1}\right] \\ &= y \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $Tx \in c$ yani $x \in c(\Gamma^n)$ olması anlamına gelir. Dolayısı ile T dönüşümü örtendir. Sonuç olarak yukarıda tanımlanan T dönüşümü lineer, birebir ve örten olduğundan

$$c(\Gamma^n) \cong c$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi yeni dizi uzayları ile ilgili bazı kapsama bağıntıları verelim.

Teorem 3.1.5. $c_0(\Gamma^n) \subset c(\Gamma^n)$ kapsaması kesindir.

İspat. Herhangi bir $s \in c_0(\Gamma^n)$ alalım. O zaman $c_0 \subset c$ olduğunu göz önünde bulundurursak

$$\begin{aligned} s \in c_0(\Gamma^n) &\implies \Gamma^n s \in c_0 \\ &\implies \Gamma^n s \in c \\ &\implies s \in c(\Gamma^n) \end{aligned}$$

$$c_0(\Gamma^n) \subset c(\Gamma^n)$$

kapsamasının geçerliliğini elde ederiz.

Şimdi bu kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. Bunun için

$$x = (x_j) = (1, 1, \cdots)$$

dizisini göz önüne alalım. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
(\Gamma^n x)_j &= \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \\
&= (1, 1, \cdots)
\end{aligned}$$

olup

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} (\Gamma^n x)_j = 1$$

elde edilir. Bu ise

$$\Gamma^n x \in c \Longrightarrow x \in c(\Gamma^n)$$

olduğunu gösterir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\lim_{j \longrightarrow \infty} (\Gamma^n x)_j &= 1 \notin c_0 \\
&\Longrightarrow x \notin c_0(\Gamma^n)
\end{aligned}$$

olur ki bu kapsamanın kesin olduğu anlamına gelir.

Teorem 3.1.6. $\forall j, k \in \mathbb{N}$ için $b^{(k)} = \left(b_j^{(k)}\right)$ dizisini

$$b_j^{(k)} = \begin{cases} \frac{n+k}{n} &, \quad j = k \\ \frac{-(k+1)}{n} &, \quad j = k+1 \\ 0 &, \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde aşağıdaki önermeler sağlanır.

a) $\left(b^{(k)}\right)$ dizisi $c_0(\Gamma^n)$ uzayı için bir bazdır ve $\forall x \in c_0(\Gamma^n)$ dizisi $x = \sum_k (\Gamma^n x)_k b^{(k)}$ biçiminde bir tek temsiline sahiptir.

b) $\left\{e, b^{(k)}\right\}$ kümesi $c(\Gamma^n)$ uzayı için bir bazdır ve $\forall x \in c(\Gamma^n)$ dizisi $x = le + \sum_k \left[(\Gamma^n x)_k - l\right] b^{(k)}$ biçiminde bir tek temsiline sahiptir. Burada $le = \lim_{k \longrightarrow \infty} (\Gamma^n x)_k$ olarak tanımlıdır.

3.2. $c_0(\Gamma^n)$ ve $c\,(\Gamma^n)$ Gamma Uzaylarının α- ve β - Dualleri

Bu kısımda $c_0\,(\Gamma^n)$ ve $c\,(\Gamma^n)$ dizi uzaylarının α - ve β - duallerini hesaplayacağız. İlk olarak, hesaplamalarda ihtiyaç duyacağımız bazı temel matris dönüşümleri ile ilgili lemmayı aşağıda verelim.

Lemma 3.2.1. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) $T=(t_{jk})\in(c_0,\ell_1)=(c,\ell_1)=(\ell_\infty,\ell_1)$ olması için ancak ve ancak

$$\sup_{K\in\mathcal{N}}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{k\in K}t_{jk}\right|<\infty \tag{3.2.13}$$

şartının sağlanmasıdır.

(ii) $T=(t_{jk})\in(c_0,c)=(c,c)$ olması için ancak ve ancak

$$\exists\alpha_k\in\mathbb{C}\ni\lim_{j\longrightarrow\infty}t_{jk}=\alpha_k \text{ için } \forall k\in\mathbb{N} \tag{3.2.14}$$

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{\infty}|t_{jk}|<\infty \tag{3.2.15}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $T=(t_{jk})\in(\ell_\infty,c)$ olması için ancak ve ancak (3.2.14) ve

$$\lim_{j\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|t_{jk}|=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\lim_{j\longrightarrow\infty}t_{jk}\right| \tag{3.2.16}$$

şartının sağlanmasıdır.

Teorem 3.2.2. $\forall j,k\in\mathbb{N}$ için $B=\left(b_{jk}\right)$ matrisini

$$b_{jk}=\begin{cases}-\frac{k+1}{n}b_{k+1} & , \quad k=j-1\\ \frac{n+k}{n}b_k & , \quad k=j\\ 0 & , \quad 0\le k<j-1 \text{ veya } k>j\end{cases} \tag{3.2.17}$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde; $c_0\,(\Gamma^n)$ ve $c\,(\Gamma^n)$ uzaylarının $\alpha-$ duali

$$C_1 = \left\{ b = (b_k) \in \omega : \sup_{K \in \mathcal{N}} \sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} b_{jk} \right| < \infty \right\}$$

dır.

İspat. $b = (b_k) \in \omega$ ve $X \in \{c_0, c\}$ olsun. Verilen herhangi bir $x = (x_k) \in X(\Gamma^n)$ ve $\forall\, k \in N$ için

$$b_k x_k = \left(-\frac{k}{n} y_{k-1} + \frac{n+k}{n} y_k \right) b_k = (By)_k \tag{3.2.18}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $B = \left(b_{jk} \right)$ matrisi (3.2.17) eşitliğinde tanımlanmıştır. O halde (3.2.18) eşitliği ile $x = (x_n) \in X(\Gamma^n)$ için $bx = (b_k x_k) \in \ell_1$ olması, ancak ve ancak $y = (y_n) \in X$ için $By \in \ell_1$ olmasıyla mümkündür " çift gerektirmesine sahip oluruz. Böylece $b \in \{X(\Gamma^n)\}^{\alpha}$ olması için ancak ve ancak $B \in (X, \ell_1)$ önermesini elde ederiz. O halde $X(\Gamma^n)$ uzayının $\alpha-$ duali $B \in (X, \ell_1)$ matris sınıfının karakterizasyonuna indirgenir. Bu aşamada Lemma 3.2.1 ' in (i) şıkkını kullanırsak $X(\Gamma^n)$ uzayının $\alpha-$ dualinin

$$C_1 = \left\{ b = (b_k) \in \omega : \sup_{K \in \mathcal{N}} \sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} b_{jk} \right| < \infty \right\}$$

cümlesi olduğu görülür.

Teorem 3.2.3. C_4 ve C_5 kümelerini şu şekilde tanımlayalım.

$$\begin{aligned} C_4 &= \left\{ b = (b_k) \in \omega : \sup_{j,k \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{n+k}{n} b_k - \frac{k+1}{k} b_{k+1} \right| < \infty \text{ ve } \left(\frac{n+k}{n} b_k \right) \in \ell_\infty \right\} \\ C_5 &= \left\{ b = (b_k) \in \omega : \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{n+k}{n} b_k - \frac{k+1}{k} b_{k+1} \right| < \infty \text{ ve } \left(\frac{n+k}{n} b_k \right) \in c_0 \right\} \end{aligned}$$

Bu taktirde,

(i) $[c_0(\Gamma^n)]^{\beta} = C_4$

(ii) $[c(\Gamma^n)]^{\beta} = C_5$

önermeleri geçerlidir.

İspat.

(i) $b = (b_k) \in [c_0(\Gamma^n)]^\beta$ olsun. Bu taktirde β- dual tanımı gereği $\forall x = (x_k) \in c_0(\Gamma^n)$ için $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x_k$ serisi yakınsaktır. Şimdi, Abel kısmi toplam formülü kullanırsak her $m \in \mathbb{N}$ için elde edilen aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım.

$$\sum_{k=0}^{m} b_k x_k = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n+k}{n} b_k - \frac{k+1}{n} b_{k+1} \right) y_k + \frac{n+m}{n} b_m y_m \tag{3.2.19}$$

$c_0(\Gamma^n) \cong c_0$ izomorfluğu akılda tutup (3.2.19)' de $m \to \infty$ iken limite geçelim. Hipotez gereğince $\sum_k b_k x_k$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_k \left(\frac{n+k}{n} b_k - \frac{k+1}{n} b_{k+1} \right) y_k$ serisi de aynı zamanda yakınsaktır ve de

$$\lim_{m \to \infty} \frac{n+m}{n} b_m = 0$$

olmak zorundadır. $c_0 \subset \ell_\infty$ olması sebebiyle $\left\{ \frac{n+m}{n} b_m \right\} \in \ell_\infty$ yazılır. Şimdi tekrar (3.2.19) eşitliğine dönelim. $\forall j \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n+k}{n} b_k - \frac{k+1}{n} b_{k+1} \right) y_k \\ &= (Cy)_j \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

yazılabilir. Burada $C = (c_{jk})$ matrisi $\forall j, k \in \mathbb{N}$ için

$$c_{jk} = \frac{n+k}{n} b_k - \frac{k+1}{n} b_{k+1}$$

biçiminde tanımlıdır. (3.2.20) eşitliğini yorumlayalım. $\sum_k b_k x_k$ serisi yakınsaktır ancak ve ancak $\lim_{j \to \infty} (Cy)_j$ limiti mevcuttur. Dolayısı ile $\forall y \in c_0$ için $Cy \in c$ olduğundan $C \in (c_0 : c)$ sınıfına ait olmalıdır. Yani

$$b = (b_k) \in [c_0(\Gamma^n)]^\beta \Longleftrightarrow C \in (c_0 : c)$$

önermesinin geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Tam bu noktada Lemma 3.2.1 'in (ii) şıkkı kullanılırsa

$$[c_0(\Gamma^n)]^\beta = C_4$$

elde edilir.

(ii) $[c(\Gamma^n)]^\beta$ kümesi içinde yukarıdaki benzer tartışmalar yapılırsa

$$b = (b_k) \in [c(\Gamma^n)]^\beta \Longleftrightarrow C \in (c : c)$$

önermesine ulaşır. Bu ise bize

$$[c(\Gamma^n)]^\beta = C_5$$

olduğunu gösterir.

4. $\ell_p(\Gamma^n)$ ve $\ell_\infty(\Gamma^n)$ GAMMA DİZİ UZAYLARI

4.1. Giriş

Bu bölümde, Gamma dizi uzaylarının bazı temel özelliklerinden bahsedeceğiz. n. mertebeden $\Gamma^n = \left(\gamma_{jk}^n\right)$ Gamma matrisi Roopaei ve Başar tarafından 2022 yılında her $j,k \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma_{jk}^n = \begin{cases} \dfrac{\binom{n+k-1}{k}}{\binom{n+j}{j}} & , \quad 0 \leq k \leq j \\ 0 & , \quad k > j \end{cases}$$

biçiminde tanımlandı (Roopaei ve Başar, 2022). Bu matrisin klasik dizi uzayları ℓ_p ve ℓ_∞ üzerindeki etki alanları kullanılarak $\ell_p(\Gamma^n)$ ve $\ell_\infty(\Gamma^n)$ Gamma dizi uzayları

$$\begin{aligned} \ell_p(\Gamma^n) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \right|^p < \infty \right\}, (0 < p < \infty), \\ \ell_\infty(\Gamma^n) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{j \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \right| < \infty \right\}, \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Roopaei ve Başar, 2022). Tanım 2.3.19 yardımıyla bu dizi uzaylarını

$$\ell_p(\Gamma^n) = (\ell_p)_{\Gamma^n} \quad , \quad \ell_\infty(\Gamma^n) = (\ell_\infty)_{\Gamma^n}$$

şeklinde yeniden tanımlayabiliriz. Artık ilk teoremimizi verebiliriz. İlk teoremimiz bu uzayların lineer uzaylığı hakkında olacaktır.

Teorem 4.1.1. $\ell_p(\Gamma^n)$ ve $\ell_\infty(\Gamma^n)$ cümleleri dizilerde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre birer lineer uzaydır.

İspat. $\theta=(0)\in\ell_p(\Gamma^n)$ olduğundan, $\ell_p(\Gamma^n)$ cümlesi boş değildir. $x,y\in\ell_p(\Gamma^n)$ ve $\alpha\in\mathbb{C}$ olsun. Şimdi, $\alpha\, x+y\in\ell_p(\Gamma^n)$ olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliği ile,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}(\alpha x_k+y_k)\right| &= \left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}\alpha x_k+\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}y_k\right|\\ &\le \left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}\alpha x_k\right|+\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}y_k\right|\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}(\alpha x_k+y_k)\right|^p$$
$$\le\sum_{j=0}^{\infty}\left[\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}\alpha x_k\right|+\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}y_k\right|\right]^p$$

yazılabilir. $0<p<1$ için Minkowski eşitsizliği ile

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}(\alpha x_k+y_k)\right|^p$$

$$\begin{aligned}&\le \sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}\alpha x_k\right|^p+\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}y_k\right|^p\\ &= |\alpha|^p\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}x_k\right|^p+\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}y_k\right|^p\\ &< \infty\end{aligned}$$

ve $1\le p<\infty$ için yine Minkowski eşitsizliğini kullanarak;

$$\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}(\alpha x_k+y_k)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}\alpha x_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}y_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha|\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}x_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}y_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise, $\alpha x+y\in \ell_p(\Gamma^n)$ olduğunu gösterir. $\ell_\infty(\Gamma^n)$ uzayı için de benzer muhakeme ile yapılabilir.

Teorem 4.1.2. $1<p<\infty$ olsun. Bu taktirde $\ell_p(\Gamma^n)$ uzayı

$$
\|x\|_{\ell_p(\Gamma^n)}=\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}x_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \tag{4.1.1}
$$

ile bir BK- normlu uzaydır.

İspat. Bunun için önce norm aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.
$\forall x\in \ell_p(\Gamma^n)$ için $\|x_k\|\geq 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $(N1)$ aksiyomu sağlanır.

$x\in \ell_p(\Gamma^n)$ olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\|x\|_{\ell_p(\Gamma^n)}=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\sum_{k=0}^{j}\binom{n+k-1}{k}x_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\binom{n+j}{j}}\sum_{k=0}^{j}\binom{n+k-1}{k}x_k=0 \quad , \ (n=0,1,2,\cdots) \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{j}\binom{n+k-1}{k}x_k=0 \quad , \ (n=0,1,2,\cdots) \\
&\Longleftrightarrow \quad x_n=0 \quad , \ (n=0,1,2,\cdots)
\end{aligned}
$$

bulunduğundan $(N2)$ aksiyomu sağlanır.

$x \in \ell_p(\Gamma^n)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_{\ell_p(\Gamma^n)} &= \left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}\alpha x_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha|\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}x_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha|\,\|x\|_{\ell_p(\Gamma^n)}
\end{aligned}$$

olduğundan $(N3)$ aksiyomu sağlanır.

$x, y \in \ell_p(\Gamma^n)$ için

$$\|x+y\|_{\ell_p(\Gamma^n)} = \left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}(x_k+y_k)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}x_k + \frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}y_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Üçgen eşitsizliğinden

$$\|x+y\|_{\ell_p(\Gamma^n)} \leq \left[\sum_{j=0}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}x_k\right| + \left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}y_k\right|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

ve Minkowski eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{\ell_p(\Gamma^n)} &\leq \left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}x_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\binom{n+k-1}{k}y_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \|x\|_{\ell_p(\Gamma^n)} + \|y\|_{\ell_p(\Gamma^n)}
\end{aligned}$$

elde edildiğinden dolayı da $(N4)$ aksiyomu geçerlidir. Şu halde $\ell_p(\Gamma^n)$, bir normlu uzaydır.

Şimdi $\ell_p(\Gamma^n)$ uzayının (4.1.1) ile tanımlanan norma göre tam olduğunu gösterelim.

$x^i = \{x_0^i, x_1^i, x_2^i, \cdots\}$ olmak üzere $(x^i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \ell_p(\Gamma^n)$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda verilen $\forall\,\varepsilon > 0$ sayısı için bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall\, i, j > n_0(\varepsilon)$ için

$$\left\|x^i - x^j\right\|_{\ell_p(\Gamma^n)} = \left\|\Gamma^n x^i - \Gamma^n x^j\right\|_{\ell_p} < \varepsilon$$

olur. Bu taktirde

$$\left|\left(\Gamma^n x^i\right)_k - \left(\Gamma^n x^j\right)_k\right| \leq \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\Gamma^n x^i\right)_k - \left(\Gamma^n x^j\right)_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left\|\left(\Gamma^n x^i\right)_k - \left(\Gamma^n x^j\right)_k\right\|_{\ell_p} < \varepsilon$$

olur. Böylece $\forall\, k \in \mathbb{N}$ için $\{(\Gamma^n x^i)_k\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan $\forall\, k \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\Gamma^n x^i\right)_k \to \left(\Gamma^n x\right)_k \quad , \quad (i \to \infty)$$

yakınsaktır. Şimdi $x \in \ell_p(\Gamma^n)$ ve

$$\left\|x^i - x\right\|_{\ell_p(\Gamma^n)} \to 0 \quad , \quad (i \to \infty)$$

olduğunu gösterelim. $\Gamma^n x^i \in \ell_p$ olduğundan

$$\left\|\Gamma^n x^i\right\|_{\ell_p} \leq K$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $K > 0$ sayısı mevcuttur. Bu taktirde herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left[\sum_{k=0}^{m}\left|\left(\Gamma^n x^i\right)_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \left\|\Gamma^n x^i\right\|_{\ell_p} \leq K$$

yazılabilir. Önce i , sonra da m üzerinden limit alınırsa

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\Gamma^n x^i\right)_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq K$$

bulunur ki bu ise $x = (x_k) \in \ell_p(\Gamma^n)$ olduğunu gösterir. Şimdi

$$\left\|x^i - x\right\| \to 0 \quad , \quad (i \to \infty)$$

olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman,

$$\left\|\Gamma^n x^i - \Gamma^n x^j\right\|_{\ell_p} < \varepsilon \quad , \quad (i, j \geq n_0)$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ tamsayısı vardır. Böylece herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left[\sum_{k=0}^{m} \left|\left(\Gamma^n x^i\right)_k - \left(\Gamma^n x^j\right)_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left\|\Gamma^n x^i - \Gamma^n x^j\right\|_{\ell_p} < \varepsilon \quad , \quad (i, j \geq n_0)$$

olur. Buradan $j \to \infty$ için,

$$\left[\sum_{k=0}^{m} \left|\left(\Gamma^n x^i\right)_k - \left(\Gamma^n x\right)_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \quad , \quad (i \geq n_0)$$

elde edilir. m keyfi olduğundan , $m \to \infty$ için

$$\left\|x^i - x\right\|_{\ell_p(\Gamma^n)} = \left\|\Gamma^n x^i - \Gamma^n x\right\|_{\ell_p} \leq \varepsilon \quad , \quad (i \geq n_0)$$

kalır ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.3. $\ell_\infty(\Gamma^n)$ uzayı

$$\|x\|_{\ell_\infty(\Gamma^n)} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \right|$$

normu ile birer BK- uzayıdır.

İspat. Teorem 3.1.3 ' ün ispatına benzer muhakeme ile yapılabilir.

Teorem 4.1.4. $1 < p < \infty$ olsun. Bu taktirde $\ell_p(\Gamma^n)$ uzayı ℓ_p uzayına lineer olarak norm izomorfiktir.

İspat. $x = (x_j)$ ve $y = (y_j)$ dizileri (3.1.3) bağıntısı ile bağlı olsun. $\ell_p(\Gamma^n)$ ile ℓ_p uzaylarının izomorf olduğunu göstermek için $\ell_p(\Gamma^n)$ ile ℓ_p arasında lineer, 1-1 ve örten bir dönüşümün varlığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} T &: \ell_p(\Gamma^n) \longrightarrow \ell_p \\ &: x \longrightarrow Tx = y, \quad y = (y_n), \quad y_n = \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \ ; \ (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda $x = (x_k)$, $u = (u_k)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} T(x+u) &= \left\{ \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} (x_k + u_k) \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \right\} + \left\{ \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} u_k \right\} \\ &= Tx + Tu \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= \left\{ \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} \alpha x_k \right\} \\ &= \alpha \left\{ \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \right\} \\ &= \alpha T x \end{aligned}$$

bulunduğundan T dönüşümü lineerdir.

Şimdi T dönüşümünün 1-1 olduğunu gösterelim. $Tx = Tu$ olduğunu kabul edelim. $x = u$ olduğunu göstereceğiz. Buna göre

$$Tx = Tu \Longrightarrow Tx - Tu = \theta$$

ve T dönüşümü lineer olduğundan $T\,(x-u)=\theta$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
j &= 0 \text{ için } \frac{1}{\binom{n}{0}}\tbinom{n-1}{0}(x_0-u_0)=0 \text{ eşitliğinden } x_0=u_0, \\
j &= 1 \text{ için } \frac{1}{\binom{n+1}{1}}\left\{\tbinom{n-1}{0}(x_0-u_0)+\tbinom{n}{1}(x_1-u_1)\right\}=0 \text{ eşitliğinden } x_1=u_1 \\
&\vdots \\
j &= k \text{ için } \frac{1}{\binom{n+k}{k}}\left\{\tbinom{n-1}{0}(x_0-u_0)+\tbinom{n}{1}(x_1-u_1)+\cdots+\tbinom{n+j-1}{j}(x_j-u_j)\right\}=0
\end{aligned}$$

eşitliğinden $x_k=u_k$ çıkar ki buradan da $x=u$ elde edilir. Önerme sağlandığından T dönüşümü 1-1 dir.

T dönüşümünün örten olduğunu gösterelim. Bunun için, $\forall\, y\in\ell_p$ için $\exists\, x\in\ell_p(\Gamma^n)$ elemanının var olduğunu göstereceğiz.
$y=(y_k)\in\ell_p$ alalım ve $x=(x_k)$ dizisini,

$$x_k=\left(1+\frac{k}{n}\right)y_k-\frac{k}{n}y_{k-1}\ ;\quad (k\in\mathbb{N})$$

ile tanımlayalım.
Bu durumda; sırasıyla $0<p<1$ ve $1\leq p\leq\infty$ halleri için,

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\ell_p(\Gamma^n)} &= \sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\sum_{k=0}^{j}\tbinom{n+k-1}{k}x_k\right|^p \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\binom{n+j}{j}}\sum_{k=0}^{j}\binom{n+k-1}{k}\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)y_k-\frac{k}{n}y_{k-1}\right]\right|^p \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}|y_n|^p \\
&= \|y\|_{\ell_p}
\end{aligned}$$

olur. Bu ise $x\in\ell_p(\Gamma^n)$ olduğunu ve üstelik T dönüşümünün normu koruduğunu gösterir. Dolayısıyla T dönüşümünü örtendir. O halde $\ell_p(\Gamma^n)$ uzayı ℓ_p uzayına izometrik olarak izomorftur.

Şimdi tanımlanan Gamma dizi uzayları ile standart dizi uzayları arasında ne gibi kapsama bağıntılarının olduğu hususu ile ilgili teoremleri verelim.

Teorem 4.1.5. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(\Gamma^n) \subset \ell_\infty(\Gamma^n)$ kapsama bağıntısı kesin olarak sağlanır.

İspat. Herhangi bir $t \in \ell_p(\Gamma^n)$ alalım. Bu taktirde $\Gamma^n t \in \ell_p$ dır. $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_\infty$ kapsaması sağlandığından $\Gamma^n t \in \ell_\infty$ yani $t \in \ell_\infty(\Gamma^n)$ elde ederiz. Bu da bize

$$\ell_p(\Gamma^n) \subset \ell_\infty(\Gamma^n)$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterir.

Şimdi bu kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. Bunun için

$$x_j = (-1)^j \cdot \left(\frac{2j}{n} + 1\right) \; ; \; j \in \mathbb{N}$$

genel terimi ile tanımlı $x = (x_j)$ dizisini göz önüne alalım. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
(\Gamma^n x)_j &= \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k \\
&= \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} (-1)^k \cdot \left(\frac{2k}{n} + 1\right) \\
&= \begin{cases} -1 & , \; j \text{ tek} \\ 1 & , \; j \text{ çift} \end{cases} \\
&= (-1)^j
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \Gamma^n x = (-1)^j \in \ell_\infty \backslash \ell_p$$

dır. Dolayısıyla $x \in \ell_\infty(\Gamma^n) \backslash \ell_p(\Gamma^n)$ elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.1.6. $1 \leq p < q < \infty$ olmak üzere

$$\ell_p(\Gamma^n) \subset \ell_q(\Gamma^n)$$

kapsaması kesin olarak sağlanır.

İspat. Herhangi bir $t \in \ell_p(\Gamma^n)$ alalım. O zaman $\Gamma^n x \in \ell_p$ olur. $1 \leq p < q < \infty$ için $\ell_p \subset \ell_q$ olması sebebiyle $\Gamma^n x \in \ell_q$ dur. Bu ise $x \in \ell_q(\Gamma^n)$ olması anlamına gelir. Dolayısı ile

$$\ell_p(\Gamma^n) \subset \ell_q(\Gamma^n)$$

kapsamasının geçerlidir. Kapsamanın kesinliği için $y = (y_j) \in \ell_q \backslash \ell_p$ olacak biçimde

$$x_j = \left(1 + \frac{j}{n}\right) y_j - \frac{j}{n} y_{j-1} \;;\; j \in \mathbb{N}$$

$x = (x_j)$ dizisini tanımlarsak her $j \in \mathbb{N}$ için $(\Gamma^n x)_j = y_j$ olur. Bu ise

$$\Gamma^n x \in \ell_q \backslash \ell_p \Longrightarrow x \in \ell_q(\Gamma^n) \backslash \ell_p(\Gamma^n)$$

olduğunu gösterir. Dolayısı ile kapsama kesindir.

4.2. $\ell_p(\Gamma^n)$ ve $\ell_\infty(\Gamma^n)$ Gamma Uzaylarının Dualleri

Bu kısımda $\ell_p(\Gamma^n)$ ve $\ell_\infty(\Gamma^n)$ dizi uzaylarının α - ve β- duallerini hesaplayacağız. İlk olarak, hesaplamalarda ihtiyaç duyacağımız bazı temel matris dönüşümleri ile ilgili lemmaları aşağıda verelim.

Bu kısım boyunca; $\mathcal{N}$ ile $\mathbb{N}$ nin bütün sonlu alt kümelerinin kolleksiyonunu gösteriyoruz. Ayrıca p ile p^* sayılarının $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ eşitliğini sağladığını kabul ediyoruz.

Lemma 4.2.1. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) $T = (t_{jk}) \in (\ell_\infty, \ell_1)$ olması için ancak ve ancak

$$\sup_{K \in \mathcal{N}} \sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} t_{jk} \right| < \infty \qquad (4.2.2)$$

şartının sağlanmasıdır.

(ii) $T = (t_{jk}) \in (\ell_\infty, c)$ olması için ancak ve ancak (3.2.14) ve

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \sum_{k \in 0}^{\infty} |t_{jk}| = \sum_{k \in 0}^{\infty} \left| \lim_{j \longrightarrow \infty} t_{jk} \right| \qquad (4.2.3)$$

şartının sağlanmasıdır.

(iii) $T = (t_{jk}) \in (\ell_\infty, \ell_\infty)$ olması için ancak ve ancak (3.2.14) koşulunun sağlanmasıdır.

(iv) $1 < p < \infty$ olsun. O halde $T = (t_{jk}) \in (\ell_p, \ell_\infty)$ olması için ancak ve ancak

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |t_{jk}|^{p^*} < \infty \tag{4.2.4}$$

şartının sağlanmasıdır.

(v) $1 < p < \infty$ olsun. O halde $T = (t_{jk}) \in (\ell_p, c)$ olması için ancak ve ancak (3.2.14) ve (4.2.4) şartlarının sağlanmasıdır.

Lemma 4.2.2. Aşağıdaki önermeler geçerlidir.

(i) $[7, Teorem$ 5.1.0 ile $p_k = p$ için $\forall k]$ $T = (t_{jk}) \in (\ell_p, \ell_1)$ olması için ancak ve ancak

$$\sup_{N\in\mathcal{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j\in\mathbb{N}} t_{jk} \right|^p < \infty \ , \quad (0 < p \leq 1) \tag{4.2.5}$$

$$\sup_{N\in\mathcal{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j\in\mathbb{N}} t_{jk} \right|^{p^*} < \infty \ , \quad (1 < p < \infty) \tag{4.2.6}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) $[11, Teorem\ 1\,(i)$ ile $p_k = p$ için $\forall k]$ $T = (t_{jk}) \in (\ell_p, \ell_\infty)$ olması için ancak ve ancak

$$\sup_{j,k\in\mathbb{N}} |t_{jk}|^p < \infty \ , \quad (0 < p \leq 1)\,. \tag{4.2.7}$$

şartının sağlanmasıdır.

(iii) $[11, Teorem 1$ için Sonuç ile $p_k = p$ için $\forall k]$ $T = (t_{jk}) \in (\ell_p, c)$ olması için ancak ve ancak (3.2.14) ve (4.2.7) şartlarının sağlanmasıdır.

Bu kısımdaki ilk teoremimiz bu uzayların $\alpha-$ duali ile ilgili olacaktır.

Teorem 4.2.3. $\forall j, k \in \mathbb{N}$ için $B = \left(b_{jk}\right)$ matrisini

$$b_{jk} = \begin{cases} -\frac{k+1}{n} b_{k+1} & , \quad k = j-1 \\ \frac{n+k}{n} b_k & , \quad k = j \\ 0 & , \quad 0 \leq k < j-1 \text{ veya } k > j \end{cases} \tag{4.2.8}$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde; $\ell_\infty(\Gamma^n)$ uzayının α- duali

$$C_1 = \left\{ b = (b_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathcal{N}} \sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} b_{jk} \right| < \infty \right\}$$

dır.

İspat. Teorem 3.2.2 ' nin ispatına benzer muhakemeyle yapılır. Benzer ifadelerin tekrarını önlemek için detayları atlıyoruz.

Teorem 4.2.4. C_2 ve C_3 kümelerini

$$C_2 = \left\{ b = (b_k) \in \omega : \sup_{j,k \in \mathcal{N}} \left| b_{jk} \right|^p < \infty \right\}$$

ve

$$C_3 = \left\{ b = (b_k) \in \omega : \sup_{j \in \mathcal{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| b_{jk} \right|^{p^*} < \infty \right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde

$$[\ell_p(\Gamma^n)]^\alpha = \begin{cases} C_2 & , \quad 0 < p \leq 1 \\ C_3 & , \quad 1 < p < \infty \end{cases}$$

dır.

İspat. İspatı, $0 < p \leq 1$ için yapacağız. $b = (b_k) \in \omega$ alalım.

$$y_j = \frac{1}{\binom{n+j}{j}} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+k-1}{k} x_k$$

olduğu hatırda tutulursa

$$b_k x_k = \left(-\frac{k}{n} y_{k-1} + \frac{n+k}{k} y_k\right) b_k = (By)_k \tag{4.2.9}$$

elde edilir. Burada $B = \left(b_{jk}\right)$ matrisi

$$b_{jk} = \begin{cases} -\frac{k+1}{n} b_{k+1} & , \quad k = j-1 \\ \frac{n+k}{n} b_k & , \quad k = j \\ 0 & , \quad 0 \leq k < j-1 \text{ veya } k > j \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (4.2.9) ile "$x = (x_n) \in \ell_p(\Gamma^n)$ için $bx = (b_k x_k) \in \ell_1$ olması, gerek ve yeter koşul $y = (y_n) \in \ell_p$ için $By \in \ell_1$ olmasıyla mümkündür " çift gerektirmesine sahip oluruz. Bu taktirde $b \in \{\ell_p(\Gamma^n)\}^\alpha$ olması için ancak ve ancak $B \in (\ell_p, \ell_1)$ önermesini elde ederiz. O halde $\ell_p(\Gamma^n)$ uzayının α- duali $B \in (\ell_p, \ell_1)$ matris sınıfının karakterizasyonuna indirgenir. Bu aşamada Lemma 4.2.2 ' nin (i) kısmını kullanırsak $\ell_p(\Gamma^n)$ uzayının α- dualinin

$$C_2 = \left\{ b = (b_k) \in \omega : \sup_{j,k \in \mathcal{N}} \left|b_{jk}\right|^p < \infty \right\}$$

cümlesi olduğu görülür.

Teorem 4.2.5. C_4, C_5 ve C_6 kümelerini şu şekilde tanımlayalım.

$$\begin{aligned} C_4 &= \left\{ b = (b_k) \in \omega : \sup_{j,k \in \mathcal{N}} \left| \frac{n+k}{n} b_k - \frac{k+1}{k} b_{k+1} \right|^p < \infty \text{ ve } \left(\frac{n+k}{n} b_k \right) \in \ell_\infty \right\} \\ C_5 &= \left\{ b = (b_k) \in \omega : \sup_{j \in \mathcal{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{n+k}{n} b_k - \frac{k+1}{k} b_{k+1} \right|^{p^*} < \infty \text{ ve } \left(\frac{n+k}{n} b_k \right) \in \ell_\infty \right\} \\ C_6 &= \left\{ b = (b_k) \in \omega : \sup_{j \in \mathcal{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{n+k}{n} b_k - \frac{k+1}{k} b_{k+1} \right| < \infty \text{ ve } \left(\frac{n+k}{n} b_k \right) \in c_0 \right\} \end{aligned}$$

Bu taktirde,

(i) $$[\ell_p(\Gamma^n)]^\beta = \begin{cases} C_4 & , \quad 0 < p \leq 1 \\ C_5 & , \quad 1 < p < \infty \end{cases}$$

(ii) $[\ell_\infty(\Gamma^n)]^\beta = C_6$

önermeleri geçerlidir.

İspat. İspatı, $1 < p < \infty$ için yapacağız. $b = (b_k) \in [\ell_p(\Gamma^n)]^\beta$ olsun. Bu taktirde her $x = (x_k) \in \ell_p(\Gamma^n)$ için $\sum_k b_k x_k$ serisi yakınsaktır. Şimdi bu serinin m- inci kısmi toplamına Abel kısmi toplam formülü uygulayarak elde edilen eşitliği göz önünde bulunduralım. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{m} b_k x_k = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n+k}{k} b_k - \frac{k+1}{n} b_{k+1} \right) y_k + \frac{n+m}{n} b_m y_m \tag{4.2.10}$$

olur. (4.2.10) da $m \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n+k}{k} b_k - \frac{k+1}{n} b_{k+1} \right) y_k$$

serisi yakınsak ve

$$\lim_{m\to\infty} \frac{n+m}{n} b_m = 0$$

olmalı. Yine de $\ell_p \subset c_0$ olduğundan

$$\left\{ \frac{n+m}{n} b_m \right\} \in \ell_\infty$$

ile mümkündür. Bu nedenle $\forall j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n+k}{k} b_k - \frac{k+1}{n} b_{k+1} \right) y_k = C(y)_j \tag{4.2.11}$$

olur. Burada $C = (c_{jk})$ matrisi ile $\forall j, k \in \mathbb{N}$ için $c_{jk} = \frac{n+k}{k} b_k - \frac{k+1}{n} b_{k+1}$ ile tanımlanır. Dolayısıyla $C = (c_{jk}) \in (\ell_p, c)$ dir. Yani Lemma 4.2.2' in (4.2.7) veya Lemma 4.2.1' in (4.2.4) koşulu C matrisi, $b = (b_k) \in C_4$ veya C_5 tarafından karşılanır. Bu nedenle

$$[\ell_p(\Gamma^n)]^\beta \subset C_4 \text{ veya } [\ell_p(\Gamma^n)]^\beta \subset C_5 \tag{4.2.12}$$

kapsamaları kesindir. Tersine $b = (b_k) \in C_4$ veya C_5 için $y = (y_k) \in \ell_p$ olsun. Yine (4.2.11) bağıntısını (4.2.10) eşitliğini kullanarak elde edilir.

Bu nedenle, $\forall x=(x_k)\in \ell_p(\Gamma^n)$ ve $C=(c_{jk})\in(\ell_p,c)$ için $\sum_k b_k x_k$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla $b=(b_k)\in[\ell_p(\Gamma^n)]^\beta$ ve dolayısıyla

$$C_4\subset[\ell_p(\Gamma)]^\beta \text{ veya } C_5\subset[\ell_p(\Gamma^n)]^\beta \tag{4.2.13}$$

kapsamaları kesindir. Şimdi kapsama bağıntılarını (4.2.12) ve (4.2.13) birleştirerek $\ell_p(\Gamma^n)$ uzayının β- dualini elde ederiz. (ii)' nin ispatı (i)' nin ispatına benzer olarak yapılır.

4.3. $\ell_p(\Gamma^n)$ Gamma Dizi Uzayında Matris Dönüşümleri

Bu bölümde, ilk olarak $\ell_p(\Gamma^n)$ dizi uzayından ℓ_∞ dizi uzayının içerisine matris dönüşümünü karakterize eden teoremi ifade ve ispat edeceğiz. Daha sonra herhangi bir X dizi uzayından gamma dizi uzayları içerisine matris sınıflarını karakterize eden teoremi ispatlayıp bu teoremi kullanarak bir takım sonuçlar elde edeceğiz.
$D=(d_{jk})$ matrisini $\forall j,k\in\mathbb{N}$ için

$$d_{jk}=\frac{n+k}{n}a_{jk}-\frac{k+1}{n}a_{j,k+1} \tag{4.3.14}$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi $(\ell_p(\Gamma^n),\ell_\infty)$ sınıfını karakterize eden teoremimizi verebiliriz.

Teorem 4.3.1. $A=(a_{jk})$ bir sonsuz matris olsun. Bu taktirde aşağıdaki önermeler geçerlidir.

(i) $0<p\le 1$ olsun. $A\in(\ell_p(\Gamma^n),\ell_\infty)$ olması için ancak ve ancak

$$\forall j\in\mathbb{N} \text{ için } \left(\frac{n+k}{n}a_{jk}\right)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell_\infty \tag{4.3.15}$$

$$\sup_{j,k\in\mathbb{N}}\left|\frac{n+k}{n}a_{jk}-\frac{k+1}{n}a_{j,k+1}\right|^p<\infty \tag{4.3.16}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) $1 < p < \infty$ olsun. $A \in (\ell_p(\Gamma^n), \ell_\infty)$ olması için ancak ve ancak (4.3.15) şartının yanı sıra

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{n+k}{n} a_{jk} - \frac{k+1}{n} a_{j,k+1} \right|^{p^*} < \infty \tag{4.3.17}$$

şartının sağlanmasıdır.

İspat. (i) (4.3.15) ve (4.3.16) şartlarının geçerli olduğunu varsayalım ve herhangi bir $x = (x_k) \in \ell_p(\Gamma^n)$ alalım. Bu taktirde, $\forall j \in \mathbb{N}$ için

$$A_j = (a_{jk})_{k\in\mathbb{N}} \in [\ell_p(\Gamma^n)]^\beta$$

ve $D\Gamma^n$ çarpımı mevcuttur. Yani Ax mevcuttur. Böylece (3.1.3) eşitliğini akılda tutarak

$$\sum_{k=0}^{m} d_{jk} y_k = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=k}^{m} \frac{\binom{n+k-1}{k}}{\binom{n+i}{i}} d_{ji} x_k \ ; \ \ (\forall j, m \in \mathbb{N}) \tag{4.3.18}$$

yazılabilir. (4.3.18) de $m \to \infty$ için limit geçilirse

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_{jk} y_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\binom{n+k-1}{k}}{\binom{n+i}{i}} d_{ji} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} x_k \ ; \ \ (\forall j \in \mathbb{N}) \tag{4.3.19}$$

olur. Bu ise bize D matrisinin Lemma 4.2.2 nin (ii) kısmının (4.2.7) koşulunu sağladığını gösterir. O halde $Dy = Ax \in \ell_\infty$ olur ki bu da yeterlilik kısmın ispatını tamamlar.

Tersine olarak kabul edelim ki $A = (a_{jk}) \in (\ell_p(\Gamma^n), \ell_\infty)$ olsun. Bu taktirde Ax dönüşümü mevcuttur ve $\forall x \in \ell_p(\Gamma^n)$ için $(Ax) \in \ell_\infty$ dur. Dolayısıyla buradan $A_j \in [\ell_p(\Gamma^n)]^\beta$ ve $\forall j \in \mathbb{N}$ için $D_j \in \ell_p^\beta$ yazılabilir. Bu ise $\forall y \in \ell_p$ için Dy dönüşümünün mevcut olduğunu gösterir. Şimdi $\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} x_k$ serisinin m. kısmi toplamına $\forall j \in \mathbb{N}$ için Abel kısmi toplam formülü uygulayalım:

$$\sum_{k=0}^{m} a_{jk} x_k = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n+k}{n} a_{jk} - \frac{k+1}{n} a_{j,k+1} \right) y_k + \frac{n+m}{n} a_{jm} y_m \tag{4.3.20}$$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{jk}x_k$ serisi hipotez gereğince yakınsak olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n+k}{n}a_{jk}-\frac{k+1}{n}a_{j,k+1}\right)y_k$$

serisi de aynı zamanda yakınsaktır ve $\frac{n+m}{n}a_{jm}y_m$ kalan terimi $m\to\infty$ iken sıfıra gitmek zorundadır. O halde (4.3.20) eşitliğinde $m\to\infty$ iken limite geçersek

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_{jk}x_k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n+k}{n}a_{jk}-\frac{k+1}{n}a_{j,k+1}\right)y_k\ ;\ \ (\forall j\in\mathbb{N}) \tag{4.3.21}$$

elde edilir. Bu ise $Ax=Dy$ olduğunu yani D matrisinin $D\in(\ell_p,\ell_\infty)$ sınıfına ait olduğunu gösterir. Tam bu noktada Lemma 4.2.2 nin (ii) kısmının, (4.2.7) şartı kullanılırsa (4.3.16) şartının gerekliliği elde edilir.

(ii) (4.3.15) ve (4.3.17) şartlarının sağlandığını kabul edelim ve herhangi bir $x=(x_k)\in\ell_p(\Gamma^n)$ alalım. Bu taktirde $\forall j\in\mathbb{N}$ için $A_j=(a_{jk})_{k\in\mathbb{N}}\in[\ell_p(\Gamma^n)]^\beta$ dır. Yani x' in A- dönüşümü Ax- mevcuttur. $0<p\le 1$ durumunda ispatladığımız benzer yol izlenerek (4.3.21) eşitliği tekrar elde edilir. Böylelikle Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\|Ax\|_{\ell_\infty}}{\|y\|_{\ell_p}} &= \sup_{j\in\mathbb{N}}\frac{\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n+k}{n}a_{jk}-\frac{k+1}{n}a_{j,k+1}\right)y_k\right|}{\|y\|_{\ell_p}}\\
&\le \sup_{j\in\mathbb{N}}\frac{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\frac{n+k}{n}a_{jk}-\frac{k+1}{n}a_{j,k+1}\right)\right|^{p^*}\right]^{1/p^*}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p}}{\|y\|_{\ell_p}}\\
&= \sup_{j\in\mathbb{N}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\frac{n+k}{n}a_{jk}-\frac{k+1}{n}a_{j,k+1}\right)\right|^{p^*}\right]^{1/p^*}<\infty
\end{aligned}$$

yazılır. Bu durumda $A\in(\ell_p(\Gamma^n),\ell_\infty)$ oluğunu gösterir.

Şimdi tersine olarak kabul edelim ki $A=(a_{jk})\in(\ell_p(\Gamma^n),\ell_\infty)$ olsun. Bu taktirde Ax- dönüşümü mevcut ve ℓ_∞ uzayına ait olduğundan $A_j\in[\ell_p(\Gamma^n)]^\beta$ yazılabilir. Bu durumda Teorem 4.2.4 'ün (i) kısmının ispatında kullanılan b_k yerine a_{jk} alındığında (4.3.15) ve (4.3.17) şartlarının gerekliliği elde edilir.

Bu da teoremin ispatını tamamlar. Şimdi bu teoremin bir sonucunu verelim:

Sonuç 4.3.2. $A = (a_{jk})$ bir sonsuz matris olsun. Bu taktirde aşağıdaki önermeler sağlanır.

(i) $0 < p \leq 1$ olsun. Bu taktirde $A \in (\ell_p(\Gamma^n), c)$ olması için ancak ve ancak (4.3.15) ile (4.3.16) şartlarının yanı sıra

$$\lim_{k\to\infty} d_{jk} = \alpha_k \quad ; \quad (j \in \mathbb{N}) \tag{4.3.22}$$

şartının da sağlanmasıdır.

(ii) $1 < p < \infty$ olsun. Bu taktirde $A \in (\ell_p(\Gamma^n), bs)$ olması için ancak ve ancak (4.3.15) , (4.3.17) ve (4.3.22) şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $1 < p < \infty$ olsun. Bu taktirde $A \in (\ell_p(\Gamma^n), cs_0)$ olması için ancak ve ancak (4.3.15) ile (4.3.16) şartlarının yanı sıra (4.3.22) şartının her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k = 0$ alınmasıyla sağlanır.

(iv) $0 < p \leq 1$ olsun. Bu taktirde $A \in (\ell_p(\Gamma^n), cs_0)$ olması için ancak ve ancak (4.3.15) ile (4.3.17) şartlarının yanı sıra (4.3.22) şartının her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k = 0$ alınmasıyla sağlanır.

Teorem 4.3.3. E matrisini Γ^n ve A matrislerinin çarpımı olarak tanımlayalım, yani $A = (a_{ki})$ ve $E = (e_{ji})$ sonsuz matrislerinin elemanları arasında

$$e_{ji} = \sum_{k=0}^{j} \frac{\binom{n+k-1}{k}}{\binom{n+j}{j}} a_{ki} \; ; \; (\forall i, j \in \mathbb{N}) \tag{4.3.23}$$

bağıntısı bulunsun ve μ herhangi bir dizi uzayı olsun. Bu taktirde $A \in (\mu, \lambda(\Gamma^n))$ olması için ancak ve ancak $E \in (\mu, \lambda)$ olmasıdır. Burada λ; klasik dizi uzaylarından ℓ_p, c_0, c veya ℓ_∞ herhangi birini belirtmektedir.

İspat. $z = (z_i) \in \mu$ olsun. Bu taktirde (4.3.23) eşitliği göz önünde bulundurulursa, $\forall j, m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=0}^{m} e_{ji} z_i = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{j} \frac{\binom{n+k-1}{k}}{\binom{n+j}{j}} a_{ki} z_i = \sum_{k=0}^{j} \sum_{i=0}^{m} \frac{\binom{n+k-1}{k}}{\binom{n+j}{j}} a_{ki} z_i \tag{4.3.24}$$

yazılabilir. Şimdi (4.3.24) eşitliğinde $m \to \infty$ iken limite geçersek $(Ez)_j = \{\Gamma^n (Az)\}_j$ elde edilir. Böylelikle, "$z \in \mu$ olduğu her zaman $Az \in \lambda(\Gamma^n)$ olması için ancak ve ancak $z \in \mu$ olduğu her zaman $Ez \in \lambda$ olmasıdır." çift gerektirmesine sahip oluruz. Bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

Altay, B. ve Başar, F., 2005. Some Euler sequence spaces of non-absolute type. Ukrainian Math. J., 57(1),1-17.

Altay, B. ve Başar, F., 2002. On the paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type. Southeast Asian Bull. Math., 26, 701-715.

Aydın, C. ve Başar, F., 2005. Some new sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ . Demonstratio Math., 38(3), 641-656.

Aydın, C. ve Başar, F., 2004. On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c . Hokkaido Math. J., 33, 383-398.

Aydın, C., İzomorfik Dizi Uzayları ve Sonsuz Matrisler.(Doktora Tezi), İnönü Üniversitesi. Matematik Bölümü, Malatya.

Başar, F., 1999. Infinite matrices and Cesàro sequence spaces of non-absolute type. Math. J., Ibaraki Univ., 31.

Başar, F., 2022. Summability Theory and Its Applications. Fatih University, 520 p, New York.

Başarır, M. ve Kara, E. E., 2012. On the B-difference sequence space derived by generalized weighted mean and compact operators. Math. J. Anal. Appl., 391(1),67-81.

Boss, J. ve Peter, C., 2000. Classical and Modern Methods in Summability., Oxford University Press, 586 p, Canada.

Demiriz, S., 2011. Bazı Yeni Paranormlu Fark Dizi Uzayları ve Geometrik Özellikleri Üzerine (Doktora Tezi), İnönü Üniversitesi. Matematik Bölümü, Malatya.

Erdem, M. ve Kılıç, S. A., 1983. Fonksiyonel Analize Giriş. Gazi Üniversitesi, 390 p, Ankara.

Et, M., Çolak, R., 1995. On some generalized difference sequence spaces. Soochow J. Math., 21, 377-386.

Kara, M. I., Roopaei, H., 2022. A weighted mean Hausdorff type operator and its summability matrix domain. J. Inequal. Appl., 27.

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with applications. University of Windsor, John Wiley and Sons., 704, New York

Malkowsky, E., 1997. Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces. Mat. Vesn, 49, 187-196.

Malkowsky, E., 2001. matrix transformations and the Hausdorff measure of noncompactness, Seminar, Van, Turkey.

Maji, A. ve Srivastava, P.D., 2014. On operator ideals using weighted Cesáro sequence space. J. Egypt. Math. Soc., 22, 446-452.

M. Mursaleen, F. Başar, B. Altay, 2006. On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ II. Nonlinear Anal., 65, 707-717.

Nanda, S., 1983. Matrix Transformations and Sequence Spaces, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

NG, P.-N. ve LEE, P.-Y., 1978. Cesaro sequences spaces of non-absolute type. Comment Math. Prace. Mat., 20(2), 429-433.

Polat, H. ve Basar, F., 2007. Some Euler spaces of difference sequences of order . Acta Math. Sci., 27(2), 254-266.

Roopaei, H., & Başar, F., 2022. On the gamma spaces including the spaces of absolutely p-summable, null, convergent and bounded sequences. Numerical Functional Analysis and Optimization, 43(6), 723-754.

Roopaei, H., Foroutannia, D., İlkhan, M., Kara, E. E., 2020. Cesàro spaces and norm of operators on these matrix domains. Mediterr. J. Math., 17(4), 121.

Şengönül M. ve Başar, F., 2005. Some new Cesàro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces $c_0$and c, Soochow J. Math., 31(1), 107-119.

Şuhubi, E.S., 2001. Fonksiyonel Analiz. İTU Vakfı Yayınları, 650 p, İstanbul.

Tripathy, B.C., Esi, A. ve Tripathy, B., 2005. On a new type of generalized difference Cesàro sequence spaces. Soochow J. Math., 31(3), 333-340.

Wang, C.-S., 1978. On Norlund sequence spaces. Tamkang J. Math., 9, 269-274.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	
Kişisel Bilgiler	
İletişim Bilgileri	
Öğrenim Bilgileri	
İş Deneyimi	