



**KONVEKSİYON DİFÜZYON REAKSİYON DENKLEMLERİNİN
NİTSCHÉ YÖNTEMİ İLE AYRIK ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIĞI**

Tuğba Hilal SARAÇ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Tuğba Hilal SARAÇ

08/07/2024

KONVEKSİYON DİFÜZYON REAKSİYON DENKLEMLERİNİN NİTSCHÉ YÖNTEMİ İLE AYRIK ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIĞI

(Yüksek Lisans Tezi)

Tuğba Hilal SARAÇ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2024

ÖZET

Bu çalışmada, homojen olmayan Dirichlet sınır koşulları altında konveksiyon difüzyon reaksiyon denkleminin Nitsche yöntemi ile ayrik çözümleri ve kararlılığı incelenmiştir. Öncelikle çalışma içinde kullanılan matematiksel ifadeler ve uzaylar tanıtılmıştır. Problemin formülasyonu yapıldıktan sonra Transpozisyon yöntemi kullanılarak çözümün sınırlılığı gösterilmiştir. Daha sonra denklemin zayıf formu yazılarak incelenmiştir. Sayısal çözümler için sonlu elemanlar yöntemi ile ayriklaştırma yapılmıştır. Sınır koşullarını ayrik zayıf forma eklemek için Nitsche yöntemi uygulanmıştır. Elde edilen yeni zayıf formun kararlılık analizi yapılmıştır. Daha sonra baskın konveksiyon denklemlerinin düzgün sayısal çözümlerini elde etmek için SUPG stabilizasyon tekniği kullanılmıştır. Son olarak farklı parametreler seçimi altında sayısal örnekler ele alınıp Freefem++ programlama dili kullanılarak sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Konveksiyon difüzyon reaksiyon denklemleri, Nitsche yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, kararlılık, ayrik çözüm, transpozisyon yöntemi, SUPG yöntemi
Sayfa Adedi : 69
Danışman : Prof. Dr. Fikriye Nuray YILMAZ

DISCRETE SOLUTIONS AND STABILITY OF CONVECTION DIFFUSION
REACTION EQUATIONS WITH THE NITSCHKE METHOD

(M. Sc. Thesis)

Tuğba Hilal SARAÇ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2024

ABSTRACT

In this study, the discrete solutions and stability of the convection-diffusion reaction equation having inhomogeneous Dirichlet boundary conditions are investigated by using Nitsche method. First, the mathematical expressions and spaces used in the study are introduced. After the formulation of the problem, the boundedness of the solution is shown by using the transposition method. Then the weak form of the equation is obtained and analyzed. For numerical solutions, discretization is performed by using the finite element method. The boundary conditions are given in the discrete weak form with the help of Nitsche method. The stability analysis of the new weak form is performed. Then SUPG stabilization technique is used to obtain smooth numerical solutions of the dominant convection equations. Finally, numerical examples are considered under different choice of parameters and numerical results are obtained by using Freefem++ programming language.

Science Code : 20406

Key Words : Convection diffusion reaction equation, Nitsche method, discrete solution, stability, SUPG method, finite element method.

Page Number : 69

Supervisor : Prof. Dr. Fikriye Nuray YILMAZ

TEŞEKKÜR

Çalıőmam boyunca bilgisi, tecrübesi ve sabırlı yaklaşımıyla bana daima yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Fikriye Nuray YILMAZ'a, hayatıma girdiği andan itibaren desteğini her zaman hissettiğim canım eőim Gökhan SARAÇ'a, tez yazma sürecimde minik kalbiyle bana destek olan biricik oğlum Uras Efe SARAÇ'a, takıldığım her noktada benden yardımlarını esirgemeyen dostum Aysun ATMACA'ya, çalıőmam sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli arkadaőım Merve TOSUN'a ve her daim yanımda olan aileme sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI MATEMATİKSEL KAVRAMLAR.....	5
2.1. Fonksiyonel Uzaylar ve Temel Kavramlar	5
3. KONVEKSİYON DİFÜZYON REAKSİYON PROBLEMİ.....	13
3.1. Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Probleminin Zayıf Formu	13
3.2. Problemin Tanımı.....	15
4. TRANSPOZİSYON YÖNTEMİ.....	17
5. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İÇİN GENEL KAVRAMLAR.....	23
5.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi	23
5.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) Formülasyonu	25
5.3. Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Denkleminin Sonlu Eleman Modeli (Varyasyonel Hal)	26
6. NİTSCHÉ YÖNTEMİ	29
6.1. Yöntem ve Tutarlılık	30
6.2. Ayrık Denklemin Zayıf Formülasyonu	31
6.3. Nitsche Yöntemi.....	32
7. KONVEKSİYON DİFÜZYON REAKSİYON DENKLEMİNİN KARARLILIĞI.....	37

8. SINIR DEĞER KONVEKSİYON DİFÜZYON REAKSİYON DENKLEMİ İÇİN SUPG YÖNTEMİ.....	49
9. NÜMERİK KISIMLAR	57
10. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	63
KAYNAKLAR.....	65
ÖZGEÇMİŞ.....	69



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 9.1. $\epsilon = 0,1, \sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ ile elde edilen çözüm	58
Şekil 9.2. $\epsilon = 0,1, \sigma = 0,00000001$ ve $\gamma = 0,001$ için elde edilen çözüm	59
Şekil 9.3. $\epsilon = 0,00001, \sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ için elde edilen çözüm	60
Şekil 9.4. $\epsilon = 0,1, \sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ için elde edilen çözüm	61
Şekil 9.5. $\epsilon = 0,1, \sigma = 0,00000001$ ve $\gamma = 0,001$ için elde edilen çözüm	62
Şekil 9.6. $\epsilon = 0,00001, \sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ için elde edilen çözüm	62

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
Ω	Tanım Bölgesi
Γ	Ω bölgesinin sınırı
∇y	Gradyan operatörü
Δy	Laplace Operatörü
$(.,.)$	İç çarpım
$\ .\ $	Norm
$(x, (.,.))$	İç çarpım uzayı
$(x, \ .\)$	Normlu vektör uzayı
$L^2(\Omega)$	Karesi integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$L_0^2(\Omega)$	Ω sınırlarında sıfır değerini alan $L^2(\Omega)$ nın alt uzayı
$H^1(\Omega)$	$L^2(\Omega)$ 'nın Sobolev alt uzayı
$H_0^1(\Omega)$	Ω sınırlarında sıfır değerini alan $H^1(\Omega)$ nın alt uzayı
ϵ	Difüzyon katsayısı
$\vec{\beta}$	Konveksiyon katsayısı
s	Reaksiyon katsayısı
\vec{n}	Normal vektör
w	Ağırlık foksiyonu
$W_p^k(\Omega)$	Sobolev uzayı
\tilde{a}	Eliptiklik katsayısı
$D^\alpha(u)$	Zayıf yönlü türev
Kısaltmalar	Açıklamalar
FEM	Sonlu elemanlar yöntemi
SUPG	Streamline upwind Petrov–Galerkin

1. GİRİŞ

Bir ortamda ısı enerjisinin artmasıyla sıcaklık da artar ve sıcaklığın arttığı bölgelerde hacimde de genişleme olur. Hacimde meydana gelen bu genişleme ise maddenin ortalama yoğunluğunun azalmasına sebep olur. Maddenin ortalama yoğunluğu azalınca madde ortamda yükselmeye başlar. Isınan madde yükselirken onun yerine sıcaklığı ondan daha düşük yani ortalama yoğunluğu daha yüksek olan madde geçer. Isınmış olan madde yükseldikçe soğur ve yoğunluğu artar. Yoğunluğun artışı çekim etkisini de artırır. Böylece madde ortam içinde alçalmaya başlar. Bu sırada yükselen maddenin yerine geçen nispeten daha soğuk madde de ısınır ve bu olaylar sürekli tekrarlanır. Isı enerjisinin ortam içinde sebep olduğu bu yer değiştirme hareketine konveksiyon (taşınım) hareketi denir [1].

Difüzyon bir maddenin moleküllerinin yoğun olduğu bir ortamdan, daha az yoğun olduğu başka bir ortama hareketi olarak tanımlanır. Bu, her iki ortam arasındaki yoğunluk eşit oluncaya kadar devam eden bir süreçtir. Maddenin katı, sıvı, gaz hallerinde meydana gelebilir [2].

Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemleri, akışkanlar dinamiği, kimyasal reaksiyonlar ve malzeme bilimi gibi bilim ve mühendisliğin birçok alanında yaygın olarak karşılaşılan önemli bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemler malzeme miktarlarının hareketini (konveksiyon), yayılmasını (difüzyon) ve kimyasal reaksiyonlarını modellemek için kullanılır. Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemlerinin genel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$-\epsilon \Delta y + \vec{\beta} \nabla y + sy = f, \Omega \text{ içinde} \quad (1.1)$$

$$y = q, \Gamma \text{ üzerinde} \quad (1.2)$$

Yukarıda verilen konveksiyon difüzyon reaksiyon problemi Dirichlet sınır koşulları altında tanım bölgesi Ω olan poligonal sınırlara sahip çokgen bir alan, bölgenin sınırı $\Gamma = \partial\Omega$ ile tanımlıdır. Burada ϵ difüzyon katsayısı, $\vec{\beta}$ hız vektörü (konveksiyon), s ise reaksiyon katsayısıdır. $\Delta y = y_{x_1 x_1} + y_{x_2 x_2}$ ile ifade edilir. $\nabla y = (y_{x_1}, y_{x_2})$ ifadesi ise y fonksiyonunun her bir bağımsız değişkenine göre kısmi türevlerinin bir vektörüdür. $y(x)$, x konumunda madde miktarını ifade eder ve $f \in L^2(\Omega)$, $q \in H^{1/2}(\Gamma)$ 'dir.

Literatürde Konveksiyon difüzyon reaksiyon denklemleriyle ilgili birçok çalışma vardır. Codina (1998), konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemini çözmek için farklı sonlu elemanlar yöntemlerini açıklamaktadır. Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemlerin sayısal çözümleri için sonlu elemanlar yöntemi kullanılmaktadır [3-6].

Nitsche metodu homojen olmayan sınır koşullarına sahip diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde kullanılır. Joachim A. Nitsche tarafından 1971 yılında geliştirilmiş bir yöntemdir [7]. Bu yöntem özellikle sınır değer problemlerinin çözümünde ve belirli koşullar altında sonlu elemanlar analizinde sıklıkla tercih edilir. Metot birbirine bağlı iki farklı alanın sınırını oluşturan eşleşme problemlerini çözmek için geliştirilmiştir. Bu yöntem, sınır değer problemlerini integral denklemler olarak ifade eder ve bu denklemleri sonlu elemanlar yöntemiyle çözer. Ayrıca sınır şartlarını doğrudan uygulamak yerine, sınır şartlarını zayıf bir formda ifade eder. Sonlu elemanlar yöntemiyle çözümü sırasında bu zayıf formu kullanır. R. Stenberg (2019) tarafından yazılan makalede genel sınır koşulları ele alınarak Nitsche'nin yöntemi tüm problem sınıfı kapsayacak şekilde genişletilmiştir [8].

Konveksiyon terimi baskın olan denklemlerde, klasik sonlu elemanlar yönteminin verdiği sayısal çözümler kararlı değildir. Bu sebeple sonlu elemanlar yöntemini kararlı hale getirecek farklı stabilizasyon (kararlaştırma) teknikleri uygulanmaktadır. Klasik Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) yönteminin, Karakteristik-Galerkin yönteminin açık versiyonuna çok benzer olduğu, Taylor-Galerkin yönteminin ise kabarcık (bubble) fonksiyonlarıyla ilişkili alt ızgara ölçek modeline benzer bir dengeleyici etkiye sahip olduğu gösterilmiştir [9].

SUPG yöntemi, akışkanlar dinamiği problemlerinin sayısal çözümlerinde kullanılmak üzere Hughes ve Brooks (1982) tarafından yayınlanan stabilizasyon tekniğidir [10]. Bu makalede, SUPG yöntemi konvektif hakim akışlar için kararlı ve verimli bir çözüm yöntemi olarak sunulmuştur. Bu yöntem akışkan dinamiği problemlerinde konvektif terimlerin etkisini dengelerken aynı zamanda sayısal kararlılığını artırmak amacıyla tasarlanmıştır. Daha sonra, T. J. R. Hughes ve L. P. Franca tarafından 1987 yılında yayınlanan makalede SUPG yöntemi daha da geliştirilmiştir. Bu çalışmada Petrov-Galerkin formülasyonu SUPG yöntemi ile entegre edilerek sayısal kararlılığı artırılmıştır [11]. Tezduyar ve Park (1986), konveksiyon ve reaksiyon baskın akışlarda keskin iç sınır

tabakaları ile ilgili salınımları en aza indirmek amacıyla SUPG yöntemini tanımlamışlardır [12].

Bu tezde homojen olmayan Dirichlet sınır koşulları altında konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemlerinin sayısal çözümlerinde Nitsche yöntemi kararlılık terimleri ile beraber uygulanacaktır. Literatürde Nitsche yöntemi farklı problemlerde uygulanmış olmasına rağmen konveksiyon difüzyon reaksiyon denklemlerinde difüzyon katsayısının durumuna göre analizi yapılmamıştır.

Bu tezin planı şu şekildedir: Tezin ikinci bölümünde, tezde kullanılan bazı matematiksel kavram, teorem ve açıklamalar verilmiştir. Üçüncü bölümde, tezi oluşturan konveksiyon difüzyon reaksiyon problemi tanıtılmış ve problem hakkında genel bilgiler verilmiştir. Ayrıca bu bölümde konveksiyon difüzyon reaksiyon probleminin zayıf formu detaylı olarak yazılmıştır. Dördüncü bölümde, Transpozisyon yöntemi ile denklemin sınırlılığı gösterilmiştir. Beşinci bölümde, sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Ardından konveksiyon difüzyon reaksiyon probleminin sonlu elemanlar yöntemi ile yazımı yapılmıştır. Altıncı bölümde, Nitsche yöntemi tanıtılmış ve denklemin ayrık çözümü incelenmiştir. Yedinci bölümde, çalışmamızın temel konusu olan konveksiyon difüzyon reaksiyon denklemi için kararlılık analizi yapılmıştır. Sekizinci bölümde, SUPG yöntemi tanıtılıp denkleme uygulanmış olup kararlılık analizi yapılmıştır. Dokuzuncu bölümde, nümerik sonuçlar elde edilmiştir. Onuncu bölümde, yapılabilecek çalışmalarla ilgili öneriler verilmiştir.



2. BAZI MATEMATİKSEL KAVRAMLAR

2.1. Fonksiyonel Uzaylar ve Temel Kavramlar

Bu bölümde, tezde kullanılan tanım, teorem, lemma ve notasyonların özeti yer almaktadır. Fonksiyonel uzaylar [13]'deki gibi alınmıştır. Eşitsizlik ve normlar için [14] kullanılmıştır.

2.1.1. Tanım

X reel bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ eşlemesine norm denir. $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki koşullar sağlanır:

- (i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(X, \|\cdot\|)$ ikilisi normlu uzay olarak adlandırılır [13].

2.1.2. Tanım

Herhangi bir Cauchy dizisinin (x_n) bir limiti varsa, yani $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$, $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ oluyorsa normlu uzay tam olarak adlandırılır. Tam olan normlu uzaya Banach uzayı denir [13].

2.1.3. Tanım

H bir reel vektör uzayı olsun. Eğer $x, y, z \in H$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, $(\cdot, \cdot): H \rightarrow \mathbb{R}$ eşlemesine H üzerinde iç çarpım denir.

- (i) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
- (ii) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
- (iii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
- (iv) $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(H, (\cdot, \cdot))$ ikilisi iç çarpım uzayı olarak adlandırılır [15].

2.1.4. Tanım

Bir ön Hilbert uzayı $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ normu altında tam ise Hilbert uzayı denir [13].

2.1.5. Tanım

$L^2(\Omega)$, Ω bölgesinde karesi integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada $u, v \in L^2(\Omega)$ ve $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. (\cdot, \cdot) , $L^2(\Omega)$ Hilbert uzayında iç çarpım aşağıdaki gibidir,

$$(u, v)_\Omega = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx. \quad (2.1)$$

$L^2(\Omega)$ uzayının normu

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2}$$

şeklindedir [15].

2.1.6. Tanım (Lebesgue uzayı)

$p \in [1, \infty)$ için $L^p(\Omega)$ uzayı şu şekilde tanımlanır:

$$L^p(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Bu uzaya ait $L^p(\Omega)$ normu şu şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} \quad [15].$$

2.1.7. Tanım

$L^\infty(\Omega)$ normu şu şekilde tanımlanır.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}\{|u(x)| : x \in \Omega\}$$

Burada essential supremum $\{x \in \Omega : |u(x)| > c\}$ nin sıfır ölçümüne sahip olduğu yani sıfır hacme (3D) veya alana (2D) sahip olduğu en küçük reel c sayısıdır [15].

2.1.8. Teorem

$p \in [1, \infty)$ için tüm Lebesgue uzayları Banach uzayıdır. $p=2$ seçimi için bir Hilbert uzayıdır [15].

2.1.9. Tanım (Sobolev Uzayı)

$\Omega \subset R^n$, $k \in N$ ve $p \in [1, \infty)$ olmak üzere,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. $D^\alpha u$ ile zayıf türev ifade edilmektedir.

$1 < p < \infty$ olmak üzere Sobolev uzayında normlar aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\|u\|_{k,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| < k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p}$$

$$\|u\|_{k,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad [14].$$

Özel olarak $p = 2$ ise $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ ile $p = 0$ ise $W^{k,0}(\Omega) = H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ notasyonlarıyla ifade edilir [13].

2.1.10. Teorem (Hölder Eşitsizliği)

$p, q \in [1, \infty]$ öyle ki $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Böyle bir çiftin elemanlarına Hölder eşlenikleri denir. Eğer $f \in L^p(\Omega)$ ve $g \in L^q(\Omega)$ ise o zaman $fg \in L^1(\Omega)$ ve

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

ile ifade edilir [14].

2.1.11. Teorem (Üçgen Eşitsizliği)

$u, v \in X$ olsun. O zaman

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| .$$

2.1.12. Teorem (Young Eşitsizliği)

$a, b \geq 0$, $p, q \leq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği elde edilir. Young eşitsizliğinin en çok kullanılan hali aşağıda verilmiştir.

$$a \cdot b \leq \frac{1}{2\varepsilon} a^2 + \frac{\varepsilon}{2} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ [14].}$$

2.1.13. Teorem (Cauchy Schwarz Eşitsizliği)

Bir Hilbert Uzayı X ve herhangi bir $u, v \in X$ için

$$|(u, v)_X| \leq \|u\|_X \|v\|_X \text{ [16].}$$

2.1.14. Teorem (Poincoré Eşitsizliği)

$u \in H_0^1$ ise, C , u 'dan bağımsız sınırlı bir sabit sayı ve $C(\Omega)$, Ω 'ya bağlı olmak üzere, $\|u\| \leq C(\Omega)\|\nabla u\|$ olur [15].

2.1.15. Teorem (Trace Teoremi)

$V_h \subset H^1(\Omega)$ sürekli sonlu eleman uzayı poligonal Ω bölgesinde tanımlı, bir üçgenleme \mathcal{T} üzerinde tanımlanmış olsun. Ω 'nın sınırı Γ ve

$$L^2(\Gamma) = \left\{ u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Gamma} |u(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

olmak üzere, o zaman

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

yazılır. Burada C yalnızca Ω 'nın geometrisine bağlı bir sabittir [17].

2.1.16. Tanım (Dual Uzay)

H bir Hilbert uzay olsun. Dual uzayı H^* , sürekli veya sınırlı lineer fonksiyonların uzayıdır. L bir operatör olmak üzere, $L = H \rightarrow \mathbb{R}$ [18].

2.1.17. Tanım (Dual Norm)

L, H üzerinde sürekli bir lineer fonksiyon olsun. O zaman,

$$\|L\|_{H^*} = \sup_{0 \neq v \in H} \frac{L(v)}{\|v\|_H}$$

şeklinde ifade edilir [18].

2.1.18. Teorem (Divergens Teoremi)

Vektör analizinde divergens teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot v dv = \iint_{\Gamma} v \vec{n} ds$$

Burada \vec{n} birim normal vektördür. Ayrıca del operatörü $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ile ifade edilir [19].

2.1.19. Tanım (1. Green Özdeşliği)

Bu özdeşlik, $\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \cdot \nabla(\nabla v)$ şeklinde çarpım kuralının bir uzantısı olarak $F = u \nabla v$ vektör alanına uygulanan divergens teoreminden türetilmiştir. Burada u ve v , $\Omega \subset R^d$ bölgesinde tanımlı skaler fonksiyonlar olsun. Ayrıca v iki kez, u bir kez sürekli türevlenebilir olduğunu varsayalım. Yukarıdaki çarpım kuralı kullanılarak Ω üzerinde $\nabla \cdot (u \nabla v)$ integrali alınır,

$$\int_{\Omega} (u \nabla v + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\Gamma} u (\nabla v \cdot \vec{n}) ds = \int_{\Gamma} u \cdot \nabla v ds$$

olur. Burada $\Delta = \nabla^2$ Laplace operatörü, Γ , Ω bölgesinin sınırı, $\vec{n} ds$ yüzey elemanının dik birim normali ve $ds = \vec{n} ds$ yönlendirilmiş yüzey elemanıdır. Bu teorem divergens teoreminin özel bir durumudur. Ayrıca,

$$(i) \quad \int_{\Omega} (u \Delta v) dx = (u, \Delta v)_{\Omega} = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma} (\vec{n} \cdot \nabla v) u ds, \quad \left(\vec{n} \cdot \nabla v = \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) \quad (2.2)$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) dx = (\nabla u, \nabla v)_{\Omega} = - \int_{\Omega} (\Delta u) v d\Omega + \int_{\Gamma} v (\nabla u \cdot \vec{n}) ds, \quad \left(\nabla u \cdot \vec{n} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \quad (2.3)$$

yazılır [20].

2.1.20. Tanım (Kompakt Operatör)

X, Y Banach uzayları olsun. $T: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa kompakttır.

- (i) T sınırlıdır. Yani $C > 0$ olmak üzere, $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$
- (ii) Her sınırlı dizi $\{x_n\} \subset X$ için $\{T(x_n)\}$ yakınsak alt dizisi vardır.





3. KONVEKSİYON DİFÜZYON REAKSİYON PROBLEMİ

Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi bilim ve mühendislikte özellikle biyomedikal, çevre ve kimya mühendisliği alanlarında ve fizik alanında ısı, kütle veya momentum taşınımı süreçlerini modellemek amacıyla kullanılan bir diferansiyel denklemdir. Bu denklem bir enerjinin veya bir maddenin taşınımının konveksiyon, difüzyon ve kimyasal reaksiyonlarla nasıl değiştiğini tanımlar. Eş. 1.1 ve Eş. 1.2 ile ifade edilen konveksiyon difüzyon reaksiyon denklemi aşağıdaki gibidir:

$$-\epsilon\Delta y + \vec{\beta}\nabla y + sy = f, \Omega \text{ içinde}$$

$$y = q, \Gamma \text{ üzerinde}$$

Yukarıda verilen konveksiyon difüzyon reaksiyon problemi Dirichlet sınır koşulları altında tanım bölgesi Ω , sınırı $\Gamma = \partial\Omega$ ile tanımlıdır. Burada ϵ difüzyon katsayısı, $\vec{\beta}$ hız vektörü (konveksiyon), s ise reaksiyon katsayısıdır. $\nabla \cdot \vec{\beta} = 0$ sıkıştırılabilirlik koşulu kabul edilir.

3.1. Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Probleminin Zayıf Formu

Konveksiyon difüzyon reaksiyon denkleminin sayısal çözümleri elde edilmek istenildiği için öncelikle denklemin zayıf hali bulunur. Bu işlem sırasında türev mertebesi de azaldığı için işlem kolaylaşmaktadır. Konveksiyon difüzyon reaksiyon probleminin zayıf formunu elde etmek için Eş. 1.1 denklemini problemin tanım bölgesindeki bir ω ağırlık fonksiyonu ile iç çarpım anlamında çarpılıp düzenlenir. Bu yöntemle ağırlıklı rezidü yöntemi denir ve Eş. 1.1 denklemini için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\int_{\Omega} (-\epsilon\Delta y + \vec{\beta}\nabla y + sy - f)\omega d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} -\epsilon\Delta y\omega d\Omega + \int_{\Omega} \omega \cdot (\vec{\beta}\nabla y) d\Omega + \int_{\Omega} sy\omega d\Omega - \int_{\Omega} f\omega d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır. Burada $-\Delta y\omega$ terimi için Eş. 2.2 uygulanırsa;

$$\int_{\Omega} \Delta y \omega d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 y) \omega d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla y \nabla \omega d\Omega + \int_{\Gamma} \omega \cdot (\vec{n} \nabla y) ds \quad (3.3)$$

ifadesi elde edilir. Eş. 3.3 denklemi Eş. 3.2'de yerine yazılırsa,

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla y \nabla \omega d\Omega - \int_{\Gamma} \epsilon \cdot \omega \cdot (\vec{n} \nabla y) ds + \int_{\Omega} \omega (\vec{\beta} \nabla y) d\Omega + \int_{\Omega} s y \omega d\Omega - \int_{\Omega} f \omega d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

elde edilir. Eş. 3.4 denklemi düzenlenirse,

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla y \nabla \omega + \omega (\vec{\beta} \nabla y) + s y \omega - \omega f d\Omega - \int_{\Gamma} \epsilon \cdot \omega \cdot (\vec{n} \nabla y) ds = 0 \quad (3.5)$$

yazılır. Burada $\vec{n} = (n_x, n_y)$, Γ sınırında birim normal vektördür.

$$q_n = \epsilon \cdot (\vec{n} \nabla y) = n_x \left(\epsilon \frac{\partial y}{\partial x} \right) + n_y \left(\epsilon \frac{\partial y}{\partial y} \right) \quad (3.6)$$

Eş. 3.6 denklemi Eş. 3.5 de yerine yazılırsa,

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla y \nabla \omega + \omega (\vec{\beta} \nabla y) + s y \omega - \omega f d\Omega - \int_{\Gamma} \omega q_n ds = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Elde edilen bu Eş. 3.7 denklemi ise problemin zayıf halidir.

$a(.,.)$ bilinear form ve $L(.)$ lineer form olmak üzere Eş. 3.7 denklemi

$$a(y, \omega) = L(\omega) \quad (3.8)$$

eşitliğine denk olarak yazılabilir. Bu durumda

$$a(y, \omega) = \int_{\Omega} \epsilon \nabla y \nabla \omega + \omega (\vec{\beta} \nabla y) + s y \omega d\Omega \quad (3.9)$$

ve

$$L(\omega) = \int_{\Omega} \omega f d\Omega + \int_{\Gamma} \omega q_n ds \quad (3.10)$$

olarak yazılırsa, Eş. 3.7 denklemi kısaca

$$a(y, \omega) = L(\omega)$$

şeklinde yazılır.

3.2. Problemin Tanımı

İlk önce durum denklemini ele alalım.

$$\begin{aligned} -\epsilon \Delta y_1 + \vec{\beta} \nabla y_1 + s y_1 &= f, \quad \Omega \text{ içinde} \\ y_1 &= q, \quad \Gamma \text{ üzerinde} \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2.1. Teorem

$f \in H^{-1}(\Omega)$ ve $q \in H^{1/2}(\Gamma)$ olsun. O zaman Eş. 1.1 ve Eş. 1.2'den oluşan denklemin tek çözümünü $y \in H^1(\Omega)$ kabul eder. Ayrıca aşağıdaki tahmin de geçerlidir.

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|q\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right)$$

Γ da $q = 0$ durumunda, $f \in L^2(\Omega)$ üzerinde ve Ω konveks, çözümün daha yüksek bir düzenliliğini elde edebiliriz [22].

3.2.2. Teorem

Γ sınırı $f \in L^2(\Omega)$ ve $q = 0$ olsun. O halde Eş. 1.1 ve Eş. 1.2'den oluşan denklemin $y \in H^2(\Omega)$ şeklinde tek bir çözümü vardır ve aşağıdaki tahmin de geçerlidir.

$$\|y\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \text{ [23].}$$



4. TRANSPOZİSYON YÖNTEMİ

Transpozisyon yöntemi ile aşağıdaki şekilde denklemin çözümünün sınırlılığını gösterilir [24-25]. Burada q , yeterince düzgün (pürüzsüz) $\phi \in L^2(\Omega)$ ve y ve z sırasıyla aşağıdaki eşitliklerin çözümü olsun.

$$-\epsilon \Delta y + \vec{\beta} \nabla y + sy = 0, \Omega \text{ içinde}$$

$$y = q, \Gamma \text{ üzerinde}$$

ve

$$-\epsilon \Delta z - \nabla(\vec{\beta} z) + sz = 0, \Omega \text{ içinde}$$

$$z = 0, \Gamma \text{ üzerinde}$$

Kısmi integrasyon yapıp Γ üzerinde $z = 0$ olduğu kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir. Ayrıca burada $L^2(\Omega)$ ve $L^2(\Gamma)$ üzerindeki iç çarpımlar sırasıyla $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ ve $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} 0 &= (-\epsilon \Delta y + \vec{\beta} \cdot \nabla y + sy, z)_{\Omega} \\ &= (-\epsilon \Delta y, z)_{\Omega} + (\vec{\beta} \cdot \nabla y, z)_{\Omega} + (sy, z)_{\Omega} \\ &= \epsilon \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla y - \epsilon \int_{\Gamma} (\vec{n} \cdot \nabla y) z - \int_{\Omega} \vec{\beta} y (\nabla z) + \int_{\Gamma} y \vec{\beta} \cdot \vec{n} z + \int_{\Omega} syz \end{aligned}$$

Eş. 2.3'ten,

$$= (\nabla y, \epsilon \nabla z)_{\Omega} - \left(\frac{\partial y}{\partial \vec{n}}, \epsilon z \right)_{\Gamma} + (y \vec{\beta} \cdot \vec{n}, z)_{\Gamma} - \left(y, \nabla \cdot (\vec{\beta} z) \right)_{\Omega} + (sy, z)_{\Omega}$$

z , Γ da sıfır olduğu için

$$= (\nabla y, \epsilon \nabla z)_{\Omega} - \left(y, \nabla \cdot (\vec{\beta} z) \right)_{\Omega} + (sy, z)_{\Omega}$$

İlk ifadeye Divergens Teoremi Eş. 2.3 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&= (y, -\epsilon(\Delta z))_{\Omega} + (y, \epsilon(\nabla z \cdot \vec{n}))_{\Gamma} - (y, \nabla(\vec{\beta}z))_{\Omega} + (y, sz)_{\Omega} \\
&= (y, -\epsilon(\Delta z))_{\Omega} + \left(y, \epsilon \left(\frac{\partial z}{\partial \vec{n}} \right) \right)_{\Gamma} - (y, \nabla(\vec{\beta}z))_{\Omega} + (y, sz)_{\Omega} \\
&= (y, -\epsilon(\Delta z) - \nabla(\vec{\beta}z) + sz)_{\Omega} + \left(y, \epsilon \left(\frac{\partial z}{\partial \vec{n}} \right) \right)_{\Gamma} \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Burada Ω bölgesinde $-\epsilon(\Delta z) - \nabla(\vec{\beta}z) + sz = \phi$ ve Γ da $y = q$. Bu eşitlikler Eş. 4.4'de yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(y, \phi)_{\Omega} = - \left(q, \epsilon \left(\frac{\partial z}{\partial \vec{n}} \right) \right)_{\Gamma}$$

Yukarıdaki formül $L^2(\Omega)$ dan $H^{1/2}(\Gamma)$ ya lineer ve sürekli bir $S : \phi = -\epsilon \left(\frac{\partial z}{\partial \vec{n}} \right)$ eşlemesi tanımlar.

$H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Omega)$ dönüşümü kompakt olduğundan S , $L^2(\Omega)$ dan $L^2(\Gamma)$ ya kompakt bir operatördür. Dolayısıyla eşleniği S^* , $L^2(\Gamma)$ dan $L^2(\Omega)$ ya kompakt bir operatördür.

$$(y, \phi)_{\Omega} = - \int_{\Gamma} q \frac{\partial z}{\partial \vec{n}} = \langle q, \Lambda \phi \rangle_{L^2(\Gamma)}$$

ve

$$\langle q, S\phi \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle S^*q, \phi \rangle_{\Omega} \text{ olduğundan } y = S^*q \text{ sonucuna varılır.}$$

Yukarıdakileri kullanarak $L^2(\Gamma)$ da Dirichlet verileri için Eş. 1.1 ve Eş. 1.2'den oluşan denklemin “ultra zayıf” bir çözümü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Aşağıdaki durumlarda $y \in L^2(\Omega)$ nın Eş. 1.1 ve Eş. 1.2'den oluşan denklem için tek bir ultra zayıf çözümü olduğunu söylenebilir.

$$\int_{\Omega} y\phi = (f, p) \langle H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega) \rangle - \int_{\Gamma} q \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}, \quad \forall \phi \in L^2(\Omega)$$

Buradan p şunları sağlar,

$$-\Delta p - \nabla(\vec{\beta}p) + sp = \phi, \Omega \text{ içinde}$$

$$p = 0, \Gamma \text{ üzerinde}$$

Bu durumda aşağıdaki düzenlilik sonucu söylenebilir.

4.1. Teorem

Herhangi bir $f \in H^{-1}(\Omega)$ ve $q \in L^2(\Gamma)$ için Eş. 1.1 ve Eş. 1.2'den oluşan problemin tek bir ultra zayıf $y \in L^2(\Omega)$ çözümü vardır. Ayrıca aşağıdaki tahmin de geçerlidir.

$$\|y\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|q\|_{L^2(\Gamma)}) \text{ [25].}$$

İspat

Çözümün varlığı bölüm 3.2 de oluşturulmuştur. Teklik için y_1 ve y_2 Eş. 1.1 ve Eş. 1.2 den oluşan problemin farklı iki çözümü ve $u = y_1 - y_2$ olsun. O zaman,

$$-\Delta u - \nabla(\vec{\beta}u) + su = \phi, \Omega \text{ içinde}$$

$$u = 0, \Gamma \text{ üzerinde}$$

$H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ içinde yoğun olduğundan $u \in H^1(\Omega)$ y1 dikkate almak yeterlidir. Teorem 3.2.1 ile $\|u\|_{H^1(\Omega)} = 0$ olduğu bilindiğinden $u = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $y_1 = y_2$ olur ve bu çelişki tekliği kanıtlar.

Teorem 3.2.2 deki tahmini göstermek için bir dualite argümanı kullanacağız. w problemin bir çözümü olsun.

$$-\epsilon \Delta w - \nabla(\vec{\beta}w) + sw = y, \Omega \text{ içinde}$$

$$w = 0, \Gamma \text{ üzerinde}$$

Yukarıdaki dualite argümanını kullanarak ve parçalara ayırarak integral alınır. Γ 'da $w = 0$ alınırsa aşağıdakiler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|y\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (y, -\epsilon\Delta w - \nabla(\vec{\beta}w) + sw)_{\Omega} \\
&= (y, -\epsilon\Delta w)_{\Omega} + (y, -\nabla(\vec{\beta}w))_{\Omega} + (y, sw)_{\Omega} \\
&= -\int_{\Omega} y \cdot \epsilon\Delta w d\Omega - \int_{\Omega} y \cdot \nabla(\vec{\beta}w) d\Omega + \int_{\Omega} y \cdot sw d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \epsilon \nabla y \cdot \nabla w d\Omega - \int_{\Gamma} \epsilon (\vec{n} \nabla w) \cdot y ds + \int_{\Omega} (\vec{\beta} \nabla y) \cdot w d\Omega - \int_{\Gamma} y \cdot w (\vec{\beta} \vec{n}) ds + \int_{\Omega} y \cdot sw d\Omega
\end{aligned}$$

İlk terime Eş. 2.3 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\Omega} \epsilon (\Delta y) \cdot w d\Omega + \int_{\Gamma} \epsilon w \cdot (\nabla y \cdot \vec{n}) - \int_{\Gamma} \epsilon \left(\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right) \cdot y ds + \int_{\Omega} (\vec{\beta} \nabla y) \cdot w d\Omega - \\
&\int_{\Gamma} y \cdot w (\vec{\beta} \vec{n}) ds + \int_{\Omega} y \cdot sw d\Omega \\
&= (-\epsilon \Delta y, w)_{\Omega} + \left(\epsilon \frac{\partial y}{\partial \vec{n}}, w \right)_{\Gamma} - \left(y, \epsilon \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right)_{\Gamma} + (\vec{\beta} \nabla y, w)_{\Omega} - \left(y, w (\vec{\beta} \vec{n}) \right)_{\Gamma} + (sy, w)_{\Omega}
\end{aligned}$$

Γ 'da $w = 0$ olduğu kullanılır ve düzenlenirse,

$$= (-\epsilon \Delta y + \vec{\beta} \nabla y + sy, w)_{\Omega} - \left(y, \epsilon \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right)_{\Gamma}$$

elde edilir. Son elde edilen ifadede Eş. 1.1 ve Eş. 1.2 deki eşitlikler kullanılırsa

$$= (f, w)_{\Omega} - \left(q, \epsilon \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right)_{\Gamma}$$

olur ve

Trace ve Cauchy-Schwarz eşitsizlikleri ve Teorem 3.2.2'yi kullanarak

$$\|y\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (f, w)_{\Omega} - \left(q, \epsilon \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right)_{\Gamma}$$

Üçgen eşitsizliğinden,

$$\leq (f, w)_\Omega + \left(q, \epsilon \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right)_\Gamma$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$\leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \cdot \|w\|_{H^1(\Omega)} + \epsilon \|q\|_{L^2(\Gamma)} \cdot \left\| \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(\Gamma)}$$

$\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \nabla w$ olduğundan ve \vec{n} birim normal olmak üzere

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(\Gamma)} = \|\nabla w\|_{L^2(\Gamma)}$$

Trace teoreminden,

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Gamma)} \leq c \cdot \|\nabla w\|_{H^1(\Omega)} \leq c \cdot \|w\|_{H^2(\Omega)} \text{ olur.}$$

$$\|y\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_1 \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \cdot \|w\|_{H^2(\Omega)} + c_2 \|q\|_{L^2(\Gamma)} \cdot \|w\|_{H^2(\Omega)}$$

$\max\{c_1, c_2\} = c$ olsun. Böylece,

$$\|y\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c (\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|q\|_{L^2(\Gamma)}) \cdot \|w\|_{H^2(\Omega)} \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3.2.2 den

$$\|y\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c (\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|q\|_{L^2(\Gamma)}) \cdot \|y\|_{L^2(\Omega)}$$

Eşitsizliğin her iki tarafı $\|y\|_{L^2(\Omega)}$ ifadesine bölünürse,

$$\|y\|_{L^2(\Omega)} \leq c (\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|q\|_{L^2(\Gamma)})$$

elde edilir ve istenilen tahmin kanıtlanır.



5. SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İÇİN GENEL KAVRAMLAR

Sonlu elemanlar yöntemi (FEM); bilim, teknoloji ve mühendislik alanında yaygın olarak kullanılan hesaplama yöntemidir.

Bu yönteminin temel düşüncesi, çözümü uzun süren karmaşık problemlerin kısa sürede çözülebilmesi için bu problemlere eş değerde daha basit durumdaki problemlerin çözülmesidir. Basitleştirme yapıldığı için genellikle doğru sonuç yerine yaklaşık bir sonuç bulunur. Sonlu elemanlar yöntemi günümüzde bilgisayarlarda uygulandığı için neredeyse tüm problemlerin istenilen değerler arasında yaklaşık sonuçlarına ulaşılır [26].

Yöntemin amacı sonsuz boyutlu uzaydaki çözümü sonlu boyutlu uzayda fonksiyonların lineer kombinasyonları yoluyla tahmin etmektir.

5.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Genellikle FEM'in başlangıç noktası varyasyonel denklemlerdir. Problem aşağıdaki şekilde olsun. $w \in W$ bulun öyle ki,

$$a(y, w) = L(w), \forall w \in W \quad (5.1)$$

Burada W bir Hilbert uzayıdır.

Yukarıdaki denklemin çözümünün varlığını ve tekliğini garanti eden ana araç Lax-Milgram Lemması aşağıdaki gibidir.

5.1.1. Lemma (Lax-Milgram)

W bir Hilbert uzay ve $a(.,.)$, $(W \times W)$ üzerinde bir bilinear forma karşılık gelen normlar sırasıyla $\|\cdot\|_W$, $\|\cdot\|_{W'}$, aşağıdakilerin geçerli olduğunu varsayalım:

- (i) $a(.,.)$ süreklidir yani $|a(y, w)| \leq C \|y\|_W \|w\|_W$,
- (ii) $a(.,.)$ zorlayıcı (coercive) yani $a(y, w) \geq \alpha \|y\|_W^2$, $\alpha > 0$ için $\forall y \in W$

(iii) $L(\cdot, \cdot)$ süreklidir yani $|L(w)| \leq \gamma \|w\|_W$, $\gamma > 0$ [22].

O halde Eş. 5.1 probleminin $y \in W$ tek bir çözümü vardır. Ayrıca $\|y\|_W \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{W'}$ sağlanır.

FEM'in ana fikri, sonlu boyutlu bir uzayda tanımlanan W_h yi, yaklaşık W de iyi bir şekilde inşa etmektir. Galerkin FEM'in amacı $y_h \in W_h$ bulmaktır öyle ki,

$$a_h(y_h, w) = L_h(w), \quad \forall w \in W_h \quad (5.2)$$

Burada W_h sonlu boyutlu bir uzay ve h bir ayrıklaştırma parametresidir.

Kolayca görülür ki $a_h(\cdot, \cdot)$ Lax-Milgram Lemma koşullarını sağlıyorsa Eş. 5.2 probleminin her h için benzersiz bir çözümü vardır. Ayrıca y_h temel fonksiyonların lineer kombinasyonu cinsinden ifade edersek, Eş. 5.2'nin aşağıdaki formda bir kare lineer denklem sistemine eşdeğer olduğu görülür.

$$K Y = F \quad (5.3)$$

Burada K bir matris ve F bir vektördür.

Lax-Milgram Lemmasının bir sonucu olarak K singüler değildir. Ve y_h, y için iyi bir yaklaşımdır. Yani $y_h \rightarrow y$, $\dim(W_h) \rightarrow \infty$ dur. Burada temel sorun deneme uzayı W_h yi istenen yaklaşım için seçmektir. Bu nedenle amaçlanan seçim için şu adımlar takip edilmeli,

- (i) W_h, W ye iyi bir şekilde yaklaşmalıdır.
- (ii) Baz fonksiyonu K matrisini ve F vektörünü oluşturmak için yeterince basit olmalıdır.
Yöntemin matris formu $K Y = F$ dir.
- (iii) $K Y = F$ yi iyi bir şekilde çözer.

5.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) Formülasyonu

Tanım

- (i) $K \subset \mathbb{R}^n$ parçalı düzgün sınırlara sahip bir alan olsun. (Eleman alanı)
- (ii) P , K üzerinde sonlu boyutlu bir fonksiyon uzayı olsun. (Şekil Fonksiyonu)
- (iii) $N = \{N_1, N_2, \dots, N_k\}$, P' için bir baz olsun. (Düğüm değişkenleri)

O zaman (K, P, N) bir sonlu eleman olarak adlandırılır.

Tanım (K, P, N) bir sonlu eleman olsun ve $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\}$ baz olsun. P nin N ye duali için $(N_i(\phi_j) = \delta_{ij})$. Buna P nin düğüm bazı denir.

Adımları açıklarken, FEM yerel polinomların sonlu elemanlara lineer birleşimi ile yaklaşık çözüm y_h 'ı bulmaktır. Bu kolayca türevlenebilir, integrallenebilir ve her eleman üzerinde yerel desteklere sahiptir. Parçalanış sıfıra gittiği için iyi bir yaklaşımdır.

Böylece

$$y_h = \sum_{j=1}^d N_j \phi_j \quad (5.4)$$

burada $d = \dim(W_h)$ aşağıda Eş. 5.2 probleminin ayrık formuna yol açar.

$$\sum_{j=1}^d N_j a_h(\phi_j, \phi_i) = L_h(f, \phi_i) \quad 1 \leq i \leq d \quad (5.5)$$

Böylece matris denklemini çözmeye eşdeğerdir.

$$K Y = F ,$$

Burada $K = a_h(\phi_j, \phi_i)$ bir moment matrisi, $F = L_h(f, \phi_i)$ bir vektördür ve $Y = N_i$,

$1 \leq i \leq \dim(W_h)$ için y_h in koordinat vektörüdür. Bu kurulum çözmek istediğimiz denklemlerin sistemine götürür.

5.3. Konveksiyon Difüzyon Reaksiyon Denkleminin Sonlu Eleman Modeli (Varyasyonel Hal)

Ω bölgesi üzerinde sonlu eleman y fonksiyonu her bir e elemanı üzerinde

$$y(x_1, x_2) \approx y_h^e(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n y_i^e N_i^e(x_1, x_2) \quad (5.6)$$

şeklinde ayrıklaştırılmış olarak tanımlansın.

Elemanın i düğümünde (x_i, y_i) , y_h nin y_i olduğu durumda N_i Eş. 3.7 denkleminde yani denklemin zayıf formunda y yerine Eş. 5.6 daki yaklaşım yazılır ve

$$\int_{\Omega_e} \left\{ \epsilon \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \sum_{i=1}^n y_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_1} + \epsilon \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \sum_{i=1}^n y_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_2} + \vec{\beta}_1 \omega \sum_{i=1}^n y_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_1} + \vec{\beta}_2 \omega \sum_{i=1}^n y_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_2} \right. \\ \left. + s \cdot \omega \sum_{i=1}^n y_i^e N_i^e - \omega f \right\} dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma_e} \omega q_n ds = 0 \quad (5.7)$$

elde edilir. Bu elde edilen denklem problemin ayrıklaşmış halidir.

Galerkin yöntemiyle $y_1^e, y_2^e, \dots, y_n^e$ fonksiyonlarına karşılık gelen lineer bağımsız denklem sistemi elde edilir. $N_1^e, N_2^e, \dots, N_n^e$ şekil fonksiyonları ve ω ağırlık fonksiyonu olmak üzere:

$$\nabla \omega = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x_1}, \frac{\partial N_j^e}{\partial x_2} \right), \quad \nabla y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x_1}, \frac{\partial N_i^e}{\partial x_2} \right) y_i^e,$$

Burada $\omega = N_j^e$, $y = N_i^e$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Omega_e} \left(\epsilon \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial N_i^e}{\partial x_1} + \frac{\partial N_j^e}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial N_i^e}{\partial x_2} \right) + \vec{\beta}_1 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_1} + \vec{\beta}_2 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_2} \right. \right. \\
\left. \left. + s \cdot N_j^e N_i^e \right) dx_1 dx_2 \right\} y_j^e - \int_{\Omega_e} f N_j^e dx_1 dx_2 \\
- \int_{\Gamma_e} N_j^e q_n ds = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n
\end{aligned} \tag{5.8}$$

En son elde edilen Eş. 5.8 denklemi aşağıdaki gibi

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \left\{ \epsilon \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial N_i^e}{\partial x_1} + \frac{\partial N_j^e}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial N_i^e}{\partial x_2} \right) + \vec{\beta}_1 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_1} + \vec{\beta}_2 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_2} + s \cdot N_j^e N_i^e \right\} \tag{5.9}$$

$$f_i^e = \int_{\Omega_e} f N_j^e dx_1 dx_2 \tag{5.10}$$

$$Q_i^e = \int_{\Gamma_e} N_j^e q_n ds \tag{5.11}$$

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^e y_j^e = f_i^e + Q_i^e, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{5.12}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca Eş. 5.12 denklemi aşağıdaki genel matris formunda da ifade edilebilir.

$$[K^e] \{y^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

$[K^e]$ $n \times n$ tipinde simetrik matris, $\{Q^e\}$ ve $\{f^e\}$, $n \times 1$ tipinde eleman vektördür. Elemanların her biri için eleman matrisi ve vektörü hesaplanır [6, 27-28].



6. NITSCHKE YÖNTEMİ

Nitsche yöntemi sonlu elemanlar ile sayısal çözümlerin elde edilmesinde son yıllarda sıklıkla kullanılmaktadır. Bu yöntem temel olarak homojen olmayan Dirichlet sınır koşullarını diferansiyel denklemin ayrık zayıf formuna eklenmesini sağlar [8]. Eş. 1.1 ve Eş. 1.2 ile verilen denklem aşağıdaki gibidir:

$$-\epsilon \Delta y + \vec{\beta} \nabla y + sy = f, \Omega \text{ içinde}$$

$$y = q, \Gamma \text{ üzerinde}$$

Nitsche tekniğine geçmeden önce sınır değer problemlerinde sıklıkla yapılan pertürbe şu şekildedir:

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}} = \frac{1+|\vec{\beta}|}{\sigma \epsilon} (q - y), \Gamma \text{ üzerinde} \quad (6.1)$$

Sınır koşulu Eş. 6.1 düzenlenirse,

$$\frac{\sigma \epsilon}{1+|\vec{\beta}|} \frac{\partial y}{\partial \vec{n}} + y = q, \Gamma \text{ üzerinde} \quad (6.2)$$

elde edilir.

Burada $\sigma > 0$ çok küçük bir parametredir. Bu yaklaşımın dezavantajlarına, yani ‘‘Penalty’’ parametresinin ağ boyutuna bağlanmasını gerektiren uyumsuzluğa ve Penalty parametresi çok küçük olduğundan ayrık sistemin olası kötü koşullanmasına işaret etmektedir. Yani analizlerde σ nın ağ boyutundan bağımsız tutulması olası kötü koşullanmaları engellemektedir.

Dirichlet problemi yerine, problemi Eş. 6.2 sınır koşulu ile ele alırsak, sürekli problemin çözümü $\sigma \rightarrow 0$ olduğunda Dirichlet probleminin çözümüne yakınsar. $\sigma = 0$ limitinde, Dirichlet koşulunu uygulamak için geleneksel yaklaşım veya Nitsche’nin tekniği gibi başka bir yönteme geçmemiz gerekir. Genel sınır koşullarını ele alarak Nitsche’nin yöntemi tüm problem sınıfını ele alacak şekilde genişletilecektir.

6.1. Yöntem ve Tutarlılık

Aşağıdaki problemi ele alıyoruz:

$$-\epsilon \Delta y + \vec{\beta} \nabla y + sy = f, \Omega \text{ içinde} \quad (6.3)$$

$$\frac{\sigma \epsilon}{1+|\vec{\beta}|} \frac{\partial y}{\partial \vec{n}} + y = q, \Gamma \text{ üzerinde} \quad (6.4)$$

Burada Ω poligonal sınırlara sahip çokgen bir alan $f \in L^2(\Omega)$, $q \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \sigma < 1$ olsun. σ parametresinin sınır değerleri saf Dirichlet problemini verir. Yani

$$\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow y = q, \Gamma \text{ sınırında} \quad (6.5)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ alanının \mathcal{T}_h ' sini üçgenler ve dörtyüzlüler gibi basit parçalara ayıran bir şekil düzenleyici sonlu eleman düşünülür. Bu parçalama Γ sınırında \mathcal{G}_h ile gösterilen bir ağa neden olur. $K \in \mathcal{T}_h$ aynı ağın bir elemanı ve E , \mathcal{G}_h deki bir kenarı gösterir. $\cup E \subseteq \Gamma$ şeklinde gösterilir. h_K ile $K \in \mathcal{T}_h$ elemanının çapı ve h_E ile $E \in \mathcal{G}_h$ 'nin çapı ifade edilir. Ayrıca

$$h := \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$$

ve

$$V_h := \{w \in H^1(\Omega) : w|_K \in P_p(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

tanımlanır. Burada $P_p(K)$, p dereceli polinomların uzayıdır. Burada γ yukarıdan sınırlandırılması gereken pozitif bir parametredir [8].

6.1.1. Lemma

Belirli bir tamsayı $1 \leq s \leq r$ için Y^h 'i sürekli parçalı yaklaşım özelliklerinin uzayı ve $y \in (Y \cap H^{s+1}(\Omega))$ olmak üzere

$$\inf_{y^h \in Y^h} (\|y - y^h\| + h\|\nabla(y - y^h)\|) \leq Ch^{s+1}\|y\|_{s+1}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $u \in U \cap H^{s+1}(\Omega)$ kontrol değişkeni ve $\tilde{u} \in L^2: U \rightarrow U^h$

$$\|u - \tilde{u}\| \leq Ch^{s+1}\|u\|_{s+1}$$

6.2. Ayrık Denklemin Zayıf Formülasyonu

Öyle bir $y_h \in W_h$ bulun ki

$$a_h(y_h, w_h) = L_h(w_h), \quad \forall w_h \in W_h \quad (6.6)$$

olsun.

Denklem Eş. 1.1 w_h ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp integrali alınırsa aşağıdaki ifade yazılır.

$$(-\epsilon \Delta y_h + \vec{\beta} \nabla y_h + s y_h, w_h)_\Omega = (f, w_h)_\Omega$$

$$(-\epsilon \Delta y_h, w_h)_\Omega + (\vec{\beta} \nabla y_h, w_h)_\Omega + (s y_h, w_h)_\Omega = (f, w_h)_\Omega$$

Elde edilen ilk terime kısmi integrasyon yapıp Eş. 2.2 Divergens teoremi uygulanırsa,

$$(\epsilon \nabla y_h, \nabla w_h)_\Omega - \langle \epsilon \vec{n} \nabla y_h, w_h \rangle_\Gamma + (\vec{\beta} \nabla y_h, w_h)_\Omega + (s y_h, w_h)_\Omega = (f, w_h)_\Omega$$

yazılır. Ayrıca $\vec{n} \nabla y_h = \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}$ olduğundan

$$(\epsilon \nabla y_h, \nabla w_h)_\Omega - \langle \epsilon \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_\Gamma + (\vec{\beta} \nabla y_h, w_h)_\Omega + (s y_h, w_h)_\Omega = (f, w_h)_\Omega \quad (6.7)$$

elde edilir.

Burada

$$a_h(y_h, w_h) = (\epsilon \nabla y_h, \nabla w_h)_\Omega - \langle \epsilon \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_\Gamma + (\vec{\beta} \nabla y_h, w_h)_\Omega + (s y_h, w_h)_\Omega \quad (6.8)$$

ve

$$L_h(w_h) = (f, w_h)_\Omega$$

olur.

6.3. Nitsche Yöntemi

Nitsche yöntemi, Dirichlet sınır koşullarını diferansiyel denklemin ayrık zayıf formununa eklemek için kullanılan bir yöntemdir. Yöntemi uygulamak için öncelikle Eş. 6.4 koşulunda $y = y_h$ alınıp w_h ile çarpılır ve bir E elemanı üzerinde integrali alınırsa,

$$\frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_E + \langle y_h, w_h \rangle_E = \langle q, w_h \rangle_E \quad (6.9)$$

elde edilir. Daha sonra elde edilen Eş. 6.9 denkleminin her iki tarafı

$$\sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E}$$

ifadesi ile çarpılıp düzenlenirse, (K_1 daha sonra seçilecektir.)

$$\sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_E + \langle y_h, w_h \rangle_E \right\} = \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \{ \langle q, w_h \rangle_E \} \quad (6.10)$$

elde edilir. Ardından istenilen terimi elde edebilmek için Eş. 6.9 denkleminde $w_h = \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}}$ alınıp eşitliğin her iki tarafı

$$\sum_{E \in \mathcal{G}_h} - \frac{\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E}$$

ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{G}_h} -\frac{\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \left\langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\rangle_E + \left\langle y_h, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\rangle_E \right\} \\ = \sum_{E \in \mathcal{G}_h} -\frac{\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\langle q, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\rangle_E \end{aligned} \quad (6.11)$$

elde edilir. Şimdi Eş. 6.7, Eş. 6.10 ve Eş. 6.11 toplanırsa,

$$\begin{aligned} (\epsilon \nabla y_h, \nabla w_h)_\Omega - \left\langle \epsilon \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \right\rangle_\Gamma + (\vec{\beta} \nabla y_h, w_h)_\Omega + (s y_h, w_h)_\Omega \\ + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \left\langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \right\rangle_E + \left\langle y_h, w_h \right\rangle_E \right\} \\ + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} -\frac{\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \left\langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\rangle_E + \left\langle y_h, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\rangle_E \right\} \\ = (f, w_h)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \left\langle q, w_h \right\rangle_E \\ + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} -\frac{\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\langle q, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\rangle_E \end{aligned} \quad (6.12)$$

Eş. 6.9 denkleminin her iki tarafı \tilde{a} ile çarpılırsa,

$$\frac{\tilde{a} \sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \left\langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \right\rangle_\Gamma + \tilde{a} \left\langle y_h, w_h \right\rangle_\Gamma = \tilde{a} \left\langle q, w_h \right\rangle_\Gamma \quad (6.13)$$

elde edilir. Eş. 6.12 ile Eş. 6.13 toplanırsa,

$$\begin{aligned}
& (\epsilon \nabla y_h, \nabla w_h)_\Omega - \langle \epsilon \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_\Gamma + (\vec{\beta} \nabla y_h, w_h)_\Omega + (s y_h, w_h)_\Omega \\
& + \frac{\tilde{\alpha} \sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_\Gamma + \tilde{\alpha} \langle y_h, w_h \rangle_\Gamma \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_E + \langle y_h, w_h \rangle_E \right\} \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} -\frac{\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E + \langle y_h, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E \right\} \\
& = (f, w_h)_\Omega + \tilde{\alpha} \langle q, w_h \rangle_\Gamma + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \{ \langle q, w_h \rangle_E \} \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} -\frac{\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \langle q, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E \right\}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Burada $\tilde{\alpha}$ eliptiklik koşulunu sağlayacak şekilde seçilecektir. Daha sonra ayrıntılı incelenecektir. Ayrıca $\langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_\Gamma$ ifadesinin katsayısı,

$$-\epsilon + \frac{K_1 \sigma \epsilon}{\sigma + \gamma h_E} \frac{1}{1 + |\vec{\beta}|} + \frac{\tilde{\alpha} \epsilon \sigma}{1 + |\vec{\beta}|} \tag{6.15}$$

$$K_1 = K_2 \cdot (1 + |\vec{\beta}|) \tag{6.16}$$

ve

$$K_2 = 1 - \frac{\tilde{\alpha} \sigma}{1 + |\vec{\beta}|}, \quad K_2 < 1 \tag{6.17}$$

olduğu kullanılarak Eş. 6.15 ifadesi düzenlenirse,

$$-\epsilon \left(1 - \frac{\tilde{\alpha} \sigma}{1 + |\vec{\beta}|} \right) + \frac{K_1 \sigma \epsilon}{\sigma + \gamma h_E} \frac{1}{1 + |\vec{\beta}|}$$

$$\begin{aligned}
&= -\epsilon K_2 + \frac{K_1 \sigma \epsilon / (1 + |\vec{\beta}|)}{\sigma + \gamma h_E} \\
&= \left(-\epsilon K_2 \sigma - \epsilon K_2 \gamma h_E + \frac{K_1 \sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \right) \frac{1}{\sigma + \gamma h_E}
\end{aligned}$$

Eş. 6.16 deki K_1 eşitliği yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&= \left(-\epsilon K_2 \sigma - \epsilon K_2 \gamma h_E + \frac{K_2 \cdot (1 + |\vec{\beta}|) \sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \right) \frac{1}{\sigma + \gamma h_E} \\
&= \frac{-\epsilon K_2 \gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \tag{6.18}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eş. 6.16 ve Eş. 6.17 eşitliklerinden $K_1 > 0$ dır. Yani,

$$K_1 = \left(1 - \frac{\tilde{a} \sigma}{1 + |\vec{\beta}|} \right) (1 + |\vec{\beta}|) > 0$$

olup, buradan

$$\left(1 - \frac{\tilde{a} \sigma}{1 + |\vec{\beta}|} \right) > 0$$

ve

$$\tilde{a} < \frac{1 + |\vec{\beta}|}{\sigma}$$

elde edilir. Ayrıca Eş. 6.18 te elde edilen $\langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_\Gamma$ nın katsayısı Eş. 6.14 da düzenlenerek yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& (\epsilon \nabla y_h, \nabla w_h)_\Omega + (\vec{\beta} \nabla y_h, w_h)_\Omega + (s y_h, w_h)_\Omega + \tilde{a} \langle y_h, w_h \rangle_\Gamma \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\epsilon K_2 \gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle y_h, w_h \rangle_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E + \langle y_h, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E \right\} \\
& = (f, w_h)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{a} \right) \langle q, w_h \rangle_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle q, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E
\end{aligned} \tag{6.19}$$

elde edilir. Burada bilinear form a_h ve lineer form L_h 'i oluşturuyoruz. Eş. 6.19 denkleminde sol taraf $a_h(y_h, w_h)$, sağ taraf $L_h(w_h)$ elde edildi.

$$\begin{aligned}
a_h(y_h, w_h) &= (\epsilon \nabla y_h, \nabla w_h)_\Omega + (\vec{\beta} \nabla y_h, w_h)_\Omega + (s y_h, w_h)_\Omega + \tilde{a} \langle y_h, w_h \rangle_\Gamma \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\epsilon K_2 \gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle y_h, w_h \rangle_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E + \langle y_h, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E \right\}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

$$L_h(w_h) = (f, w_h)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{a} \right) \langle q, w_h \rangle_E + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle q, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E \tag{6.21}$$

Eş. 6.20 ve Eş. 6.21 den,

$$a_h(y_h, w_h) = L_h(w_h), \quad \forall w_h \in W_h \tag{6.22}$$

elde edildi.

7. KONVEKSİYON DİFÜZYON REAKSİYON DENKLEMİNİN KARARLILIĞI

7.1. Lemma

Bir c_1 pozitif sabiti vardır öyle ki,

$$\sum_{E \in \mathcal{G}_h} h_E \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \leq c_1 \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2, \forall w_h \in W_h \quad [3]. \quad (7.1)$$

Formülasyon için aşağıdaki kararlılık sonucuna sahibiz. Burada c , hem ağ parametresi h den hem de σ parametresinden bağımsız genel pozitif bir sabiti ifade etmektedir.

7.2. Teorem

Kabul edelim ki $0 < 2\gamma c_1 < \min\left(\frac{\epsilon}{(\epsilon+1)^2}, \frac{1}{2}\right)$ olsun. O zaman öyle bir pozitif c sabiti vardır ki,

$$a_h(w_h, w_h) \geq c. \|w_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 + c. \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2, \forall w_h \in W_h \quad (7.2)$$

İspat

Eş. 6.20'de $y_h = w_h$ alınırsa,

$$\begin{aligned} a_h(w_h, w_h) &= (\epsilon \nabla w_h, \nabla w_h)_\Omega + (\vec{\beta} \nabla w_h, w_h)_\Omega + (s w_h, w_h)_\Omega + \tilde{a}(w_h, w_h)_\Gamma \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\epsilon K_2 \gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}}, w_h \right\rangle_E \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle w_h, w_h \rangle_E \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \left\langle \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}}, w_h \right\rangle_E + \left\langle w_h, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\rangle_E \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Cauchy- Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\geq |\epsilon| \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\epsilon K_2 \gamma h_E - \gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \left\langle \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}}, w_h \right\rangle_E \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \|w_h\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E \cdot \sigma \epsilon / (1 + |\vec{\beta}|)}{\sigma + \gamma h_E} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \end{aligned}$$

$\left\langle \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}}, w_h \right\rangle_E$ ifadesinin katsayısı düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &= |\epsilon| \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E (\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}}, w_h \right\rangle_E + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \|w_h\|_{L^2(E)}^2 \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E \cdot \sigma \epsilon / (1 + |\vec{\beta}|)}{\sigma + \gamma h_E} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

elde edilir.

Elde edilen Eş. 7.3 eşitsizliğinde,

$$\frac{-\gamma h_E (\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}}, w_h \right\rangle_E = I$$

denilirse, Young eşitsizliğinden,

$$I \geq \frac{-\gamma h_E (\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \left[\frac{1}{2\delta \cdot (\epsilon + 1) / \epsilon \gamma h_E} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 + \frac{\delta (\epsilon + 1)}{2\epsilon \gamma h_E} \|w_h\|_{L^2(E)}^2 \right] \quad (7.4)$$

elde edilir.

Elde edilen Eş. 7.4 eşitsizliği Eş. 7.3 te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
a_h(w_h, w_h) &\geq |\epsilon| \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E (\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \left[\frac{1}{2\delta \cdot (\epsilon + 1) / \epsilon \gamma h_E} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \right. \\
&+ \left. \frac{\delta(\epsilon + 1)}{2\epsilon \gamma h_E} \|w_h\|_{L^2(E)}^2 \right] + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \|w_h\|_{L^2(E)}^2 \\
&+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E \cdot \sigma \epsilon / (1 + |\vec{\beta}|)}{\sigma + \gamma h_E} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
&= |\epsilon| \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} + \frac{-\gamma h_E (\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \cdot \frac{\delta(\epsilon + 1)}{2\epsilon \gamma h_E} \right) \|w_h\|_{L^2(E)}^2 \\
&+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E \cdot \sigma \epsilon}{(\sigma + \gamma h_E)(1 + |\vec{\beta}|)} - \frac{\gamma h_E (\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \cdot \frac{\epsilon \gamma h_E}{2\delta \cdot (\epsilon + 1)} \right) \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2
\end{aligned}$$

ifadesi düzenlenir ve $K_1 = K_2 \cdot (1 + |\vec{\beta}|)$ olduğu yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&= |\epsilon| \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_2 \cdot (1 + |\vec{\beta}|)}{\sigma + \gamma h_E} - \frac{(\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \cdot \frac{\delta(\epsilon + 1)}{2\epsilon} \right) \|w_h\|_{L^2(E)}^2 \\
&+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E \cdot \sigma \epsilon}{(\sigma + \gamma h_E)(1 + |\vec{\beta}|)} - \frac{\gamma^2 h_E^2 (\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \cdot \frac{\epsilon}{2\delta \cdot (\epsilon + 1)} \right) \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
a_h(w_h, w_h) &\geq |\epsilon| \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_2}{\sigma + \gamma h_E} - \frac{(\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \cdot \frac{\delta(\epsilon + 1)}{\epsilon} \right) \|w_h\|_{L^2(E)}^2 \\
&+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E \cdot \sigma \epsilon}{(\sigma + \gamma h_E)} - \frac{\gamma^2 h_E^2 (\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \cdot \frac{\epsilon}{\delta \cdot (\epsilon + 1)} \right) \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2
\end{aligned} \tag{7.5}$$

elde edilir. Burada

$$I_1 = \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_2}{\sigma + \gamma h_E} - \frac{(\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \cdot \frac{\delta(\epsilon + 1)}{\epsilon} \right) \|w_h\|_{L^2(E)}^2 \tag{7.6}$$

ve

$$I_2 = \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E \cdot \sigma \epsilon}{(\sigma + \gamma h_E)} - \frac{\gamma^2 h_E^2 (\epsilon K_2 + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \cdot \frac{\epsilon}{\delta \cdot (\epsilon + 1)} \right) \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \tag{7.7}$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
I_1 &\geq \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_2}{\sigma + \gamma h_E} - \frac{(\epsilon + 1)}{\sigma + \gamma h_E} \cdot \frac{\delta(\epsilon + 1)}{\epsilon} \right) \|w_h\|_{L^2(E)}^2 \\
&= \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(K_2 - \frac{\delta(\epsilon + 1)^2}{\epsilon} \right) \frac{1}{\sigma + \gamma h_E} \|w_h\|_{L^2(E)}^2
\end{aligned} \tag{7.8}$$

elde edilir. Burada

$$K_2 - \frac{\delta(\epsilon + 1)^2}{\epsilon} > 0$$

ve Eş. 6.17'de $K_2 < 1$ olduğu bilindiğinden,

$$\delta < \frac{K_2 \epsilon}{(\epsilon + 1)^2} < \frac{\epsilon}{(\epsilon + 1)^2} \tag{7.9}$$

elde edilir.

Şimdi Eş. 7.7’de Eş. 6.17’deki K_2 ifadesinin eşiti yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E \cdot \sigma \epsilon}{(\sigma + \gamma h_E)} - \frac{\gamma^2 h_E^2 \left(\epsilon - \epsilon \frac{\tilde{\alpha} \sigma}{1 + |\beta|} + 1 \right)}{\sigma + \gamma h_E} \cdot \frac{\epsilon}{\delta \cdot (\epsilon + 1)} \right) \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \\
&\geq \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E \cdot \sigma \epsilon}{\sigma} - \frac{\gamma^2 h_E^2 (\epsilon + 1)}{\gamma h_E} \cdot \frac{\epsilon}{\delta \cdot (\epsilon + 1)} \right) \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \\
&= \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(-\gamma h_E \cdot \epsilon - \frac{\gamma h_E \epsilon}{\delta} \right) \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \\
&= \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(-\gamma \cdot \epsilon - \frac{\gamma \epsilon}{\delta} \right) h_E \left\| \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2
\end{aligned}$$

olur ve Lemma 7.1’den

$$I_2 \geq c_1 \left(-\gamma \cdot \epsilon - \frac{\gamma \epsilon}{\delta} \right) \cdot \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (7.10)$$

olur. Eş. 7.5 eşitsizliğinde Eş. 7.10’da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
a_h(w_h, w_h) &\geq |\epsilon| \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + I_1 + c_1 \left(-\gamma \cdot \epsilon - \frac{\gamma \epsilon}{\delta} \right) \cdot \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left(\epsilon - c_1 \gamma \cdot \epsilon - c_1 \frac{\gamma \epsilon}{\delta} \right) \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + I_1
\end{aligned} \quad (7.11)$$

elde edilir ve

$$\epsilon \left(1 - c_1 \gamma - \frac{c_1 \gamma}{\delta} \right) > 0 \quad (7.12)$$

olur. Ayrıca Eş. 7.8'den

$$\begin{aligned}
I_1 &\geq \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{1}{\sigma + \gamma h_E} \left(K_2 - \frac{\delta(\epsilon + 1)^2}{\epsilon} \right) \|w_h\|_{L^2(E)}^2 \\
&\geq \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{1}{\sigma + \gamma |\Gamma|} \left(K_2 - \frac{\delta(\epsilon + 1)^2}{\epsilon} \right) \|w_h\|_{L^2(E)}^2, \\
&\geq \frac{1}{\sigma + \gamma |\Gamma|} \cdot \left(K_2 - \frac{\delta(\epsilon + 1)^2}{\epsilon} \right) \|w_h\|_{L^2(\Gamma)}^2
\end{aligned} \tag{7.13}$$

olur ve son olarak Eş. 7.11 ve Eş. 7.13'ten

$$a_h(w_h, w_h) \geq \left(\epsilon - c_1 \gamma \epsilon - \frac{\gamma \epsilon c_1}{\delta} \right) \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\sigma + \gamma |\Gamma|} \cdot \left(K_2 - \frac{\delta(\epsilon + 1)^2}{\epsilon} \right) \|w_h\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

olup buradan Eş. 7.9, Eş. 7.11 ve Eş. 7.13'ten,

- 1) $\delta < \frac{K_2 \epsilon}{(\epsilon + 1)^2} < \frac{\epsilon}{(\epsilon + 1)^2}$
- 2) $\left(1 - c_1 \gamma - \frac{c_1 \gamma}{\delta} \right) > 0$

ve

$$0 < 2 \cdot c_1 \gamma < \delta < \min \left(\frac{\epsilon}{(\epsilon + 1)^2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$c = \min \left(\epsilon - c_1 \gamma \epsilon - \frac{\gamma \epsilon c_1}{\delta}, \quad \frac{1}{\sigma + \gamma |\Gamma|} \cdot \left(K_2 - \frac{\delta(\epsilon + 1)^2}{\epsilon} \right) \right)$$

olsun.

$$a_h(w_h, w_h) \geq c \cdot \|\nabla w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \cdot \|w_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \tag{7.14}$$

elde edilir ve $\epsilon - c_1\gamma\epsilon - \frac{\gamma\epsilon c_1}{\delta} > 0$, ve $\frac{1}{\sigma+\gamma|\Gamma|} \cdot \left(K_2 - \frac{\delta(\epsilon+1)^2}{\epsilon}\right) > 0$ olduğundan ispat tamamlanmış olur.

7.3. Teorem

Eş. 6.21 denklemini için

$$\frac{3c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{c}{2} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{M}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{M_1}{\sigma^2 \cdot c} \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

sağlanır. Ayrıca burada c, σ, M_1 pozitif sabit sayıları h den bağımsızdır.

İspat

Eş. 6.21 denklemini

$$L_h(w_h) = (f, y_h)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{a} \right) \langle q, w_h \rangle_E + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle q, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E$$

olduğu biliniyor. Burada $w_h = y_h$ alınırsa

$$L_h(y_h) = (f, y_h)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{a} \right) \langle q, y_h \rangle_E + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle q, \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E \quad (7.15)$$

elde edilir. Eş. 7.15 eşitliğinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|y_h\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{a} \right) \|q\|_{L^2(E)} \|y_h\|_{L^2(E)} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left| \left(\frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle q, \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E \right| \end{aligned}$$

K_1 değeri yerine yazılır ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|y_h\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_2 \cdot (1 + |\vec{\beta}|)}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{\alpha} \right) \|q\|_{L^2(E)} \cdot \|y_h\|_{L^2(E)} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left| \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right| \|q\|_{L^2(E)} \cdot \left\| \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)} \end{aligned}$$

K_2 yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|y_h\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{\left(1 - \frac{\tilde{\alpha}\sigma}{1 + |\vec{\beta}|}\right) \cdot (1 + |\vec{\beta}|)}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{\alpha} \right) \|q\|_{L^2(E)} \cdot \|y_h\|_{L^2(E)} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left| \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right| \|q\|_{L^2(E)} \cdot \left\| \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)} \end{aligned}$$

düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|y_h\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{1 + |\vec{\beta}| - \tilde{\alpha}\sigma}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{\alpha} \right) \|q\|_{L^2(E)} \cdot \|y_h\|_{L^2(E)} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left| \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right| \|q\|_{L^2(E)} \cdot \left\| \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)} \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|y_h\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha}\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \|q\|_{L^2(E)} \cdot \|y_h\|_{L^2(E)} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left| \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right| \|q\|_{L^2(E)} \cdot \left\| \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)} \end{aligned} \tag{7.16}$$

Burada

$$I_1 = \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|y_h\|_{L^2(\Omega)} \tag{7.17}$$

$$I_2 = \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha}\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \|q\|_{L^2(E)} \cdot \|y_h\|_{L^2(E)} \tag{7.18}$$

ve

$$I_3 = \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left| \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right| \|q\|_{L^2(E)} \cdot \left\| \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)} \quad (7.19)$$

olsun.

Ayrıca $\|y_h\|_{L^2(\Omega)} \leq M \cdot \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}$ olduğundan, $I_1 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot M \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}$ elde edilir.

Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2M/c}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{M}{2(2M/c)} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{M}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{4} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma h_E}{\sigma} \right) \|q\|_{L^2(E)} \cdot \|y_h\|_{L^2(E)} \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma |\Gamma|}{\sigma} \right) \|q\|_{L^2(E)} \cdot \|y_h\|_{L^2(E)} \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma |\Gamma|}{\sigma} \right) \|q\|_{L^2(\Gamma)} \cdot \|y_h\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \left(\frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma |\Gamma|}{\sigma} \right) \|q\|_{L^2(\Gamma)} \cdot \|y_h\|_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\leq \frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma |\Gamma|}{\sigma} \left[\frac{1}{2 \cdot \frac{c}{2 \cdot \frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma |\Gamma|}{\sigma}}} \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{c / 2 \cdot \frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma |\Gamma|}{\sigma}}{2} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right]$$

düzenlenirse,

$$= \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha}\gamma|\Gamma|}{\sigma} \right)^2 \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (7.21)$$

elde edilir.

$$I_3 = \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left| \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right| \|q\|_{L^2(E)} \cdot \left\| \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)} \leq \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{|\gamma| h_E}{\sigma} \cdot \|q\|_{L^2(E)} \cdot \left\| \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}$$

Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{\gamma}{\sigma} h_E \left[\frac{2\gamma c_1 / \sigma \cdot c}{2} \|q\|_{L^2(E)}^2 + \frac{1}{2(2\gamma c_1 / \sigma \cdot c)} \left\| \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \right] \\ &= \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{\gamma}{\sigma} h_E \left[\frac{\gamma c_1}{\sigma \cdot c} \|q\|_{L^2(E)}^2 + \frac{\sigma \cdot c}{4\gamma c_1} \left\| \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \right] \\ &= \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{\gamma}{\sigma} h_E \frac{\gamma c_1}{\sigma \cdot c} \|q\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{\gamma}{\sigma} h_E \frac{\sigma \cdot c}{4\gamma c_1} \left\| \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \\ &= \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{\gamma^2 c_1}{\sigma^2 \cdot c} h_E \|q\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{c}{4c_1} h_E \left\| \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\|_{L^2(E)}^2 \end{aligned}$$

Lemma 7.1 den,

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{\gamma^2 c_1}{\sigma^2 \cdot c} |\Gamma| \|q\|_{L^2(E)}^2 + \frac{c}{4c_1} c_I \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{|\Gamma| \gamma^2 c_1}{\sigma^2 \cdot c} \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{c}{4c_1} c_I \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{|\Gamma| \gamma^2 c_1}{\sigma^2 \cdot c} \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{c}{4} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (7.22) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen Eş. 7.20, Eş. 7.21 ve Eş. 7.22 eşitsizlikleri Eş. 7.16'da yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{M}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{4} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha}\gamma|\Gamma|}{\sigma} \right)^2 \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
&\quad + \frac{|\Gamma|\gamma^2 c_1}{\sigma^2 \cdot c} \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{c}{4} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \frac{M}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{c}{4} + \frac{c}{4} \right) \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{c} \cdot \left(\frac{1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha}\gamma|\Gamma|}{\sigma} \right)^2 + \frac{|\Gamma|\gamma^2 c_1}{\sigma^2 \cdot c} \right] \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
&= \frac{M}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{2} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2 \cdot c} \left[(1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha}\gamma|\Gamma|)^2 + |\Gamma|\gamma^2 c_1 \right] \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2
\end{aligned}$$

O halde

$$\begin{aligned}
L_h(y_h) &\leq \frac{M}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{2} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2 \cdot c} \left[(1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha}\gamma|\Gamma|)^2 + |\Gamma|\gamma^2 c_1 \right] \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2
\end{aligned} \tag{7.23}$$

elde edilir.

Eş. 7.14'te $w_h = y_h$ alınır ve $a_h(y_h, y_h) = L_h(y_h)$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
c \cdot \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \cdot \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq a_h(y_h, y_h) = L_h(y_h) \\
&\leq \frac{M}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{2} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
&\quad + \frac{1}{\sigma^2 \cdot c} \left[(1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha}\gamma|\Gamma|)^2 + |\Gamma|\gamma^2 c_1 \right] \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
\frac{c}{2} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 & \\
&\leq \frac{M}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\sigma^2 \cdot c} \left[(1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha}\gamma|\Gamma|)^2 + |\Gamma|\gamma^2 c_1 \right] \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2
\end{aligned} \tag{7.24}$$

elde edilir. Burada $\left[(1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha}\gamma|\Gamma|)^2 + |\Gamma|\gamma^2 c_1 \right] = M_1$ denilirse,

$$\frac{c}{2} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \frac{M}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{M_1}{\sigma^2 \cdot c} \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (7.25)$$

elde edilir ve denklemin kararlı olduğu ispatlanmış olur.



8. SINIR DEĞER KONVEKSİYON DİFÜZYON REAKSİYON DENKLEMİ İÇİN SUPG YÖNTEMİ

Brooks ve Hughes tarafından (Brook ve Hughes, 1982), (Hughes ve Brooks, 1979) ve (Hughes ve Mallet, 1986)'da tanıtılan SUPG yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi (FEM), konveksiyon ağırlıklı problemlerde salınımları önlemek için ilk başarılı stabilizasyon tekniği olarak kabul edilebilir. Ana adımlar şunlardır: sadece akış çizgisi yönünde yapay difüzyon tanıtmak, bunu adveksiyon terimlerinin test fonksiyonunun modifikasyonu olarak yorumlamak ve son olarak, bu modifiye edilmiş test fonksiyonunun zayıf formun tüm terimlerine uygulanacağı şekilde tutarlılığı zorlamak. Bu durumda yapay difüzyon terimi tam olarak uygulanabilir değildir. Çünkü stabilize edilmiş zayıf form genel olarak sadece difüzyon terimi çıkarılacak şekilde manipüle edilemez. Problemin kesin çözümü hala SUPG stabilize zayıf formunu karşılamaktadır [29].

Eş. 1.1 ve Eş. 1.2 ile ifade edilen konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi

$$-\epsilon \Delta y + \vec{\beta} \nabla y + sy = f, \Omega \text{ içinde}$$

$$y = q, \Gamma \text{ üzerinde}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Bu denklemin klasik varyasyonel hali için $y \in H^1(\Omega)$ vardır öyle ki, Eş. 3.9 ve Eş. 3.10'dan

$$a(y, w) = (f, w) + \langle q, w \rangle, \forall w \in H^1(\Omega) \quad (8.1)$$

Burada Eş. 3.9'dan,

$$a(y, w) = \int_{\Omega} \epsilon \nabla y \nabla w + \int_{\Omega} w (\vec{\beta} \nabla y) + \int_{\Omega} syw \quad (8.2)$$

$H^1(\Omega)$ Hilbert uzayı üzerinde sürekli ve zorlayıcı (coercive) bir bilinear formdur.

Eş. 1.1 ve Eş. 1.2'den oluşan problemin Galerkin yaklaşımı, $H^1(\Omega)$ nın sonlu boyutlu bir alt uzayı olan W_h nin alınması ve ardından Eş. 8.1 varyasyonel probleminin W_h da çözülmesinden oluşur. Kolaylık açısından, şu andan itibaren sürekli, parçalı lineer

elemanları, yani aşağıdaki sonlu eleman uzayını dikkate alınacak.

$$W_h = \{w \in H^1(\Omega), \quad w|_K \text{ linear } \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (8.3)$$

Böylece Eş. 8.1 yaklaşımı şöyle okunur, öyle bir $y_h \in W_h$ bulun ki,

$$a(y_h, w_h) = (f, w_h) + \langle q_n, w_h \rangle, \quad \forall w_h \in W_h \quad (8.4)$$

Eğer problem konveksiyon ağırlıklı ise o zaman ağ boyutu h ile aynı büyüklükte olmadığı sürece $\epsilon/|\beta|$, Eş. 8.4'ün çözümü tüm alana yayılan güçlü salınımlar sergileyecektir.

SUPG yönteminin arkasındaki fikir, orijinal bilineer form $a(.,.)$ ya akış çizgileri yönünde uygun miktarda yapay difüzyon getiren ancak tutarlılığı bozmayan bir terim eklemektir.

Problem Eş. 1.1 ve Eş. 1.2 durumunda, lineer elemanlarla, SUPG metoduna göre öyle bir $y_h \in W_h$ bulun ki,

$$a(y_h, w_h) + \sum_K \mathcal{J}_K \int_K (\vec{\beta} \nabla y_h - f)(\vec{\beta} \nabla w_h) = (f, w_h) + \langle q_n, w_h \rangle, \quad \forall w_h \in W_h \quad (8.5)$$

olsun. Burada \mathcal{J}_K ayırıklaştırmanın yerel parametresine bağlı bir stabilizasyon parametresidir. $P_{eK} = \frac{|\beta|_K h_K}{6\epsilon}$ nin boyutuna göre \mathcal{J}_K eleman eleman tanımlanırsa,

$$\mathcal{J}_K = \begin{cases} \frac{h_K}{2|\beta|_K}, & P_{eK} \geq 1 \\ \frac{h_K^2}{12\epsilon}, & P_{eK} < 1 \end{cases}$$

Konveksiyon difüzyon reaksiyon denkleminde Nitsche yöntemi kullanılarak SUPG terimi eklenirse aşağıdaki form elde edilir. Yani Eş. 6.19'da ve Eş. 8.5'te $w_h = y_h$ alınıp, Eş. 6.19 ifadesi ile Eş. 8.5'teki SUPG terimi olan

$$\sum_K \mathcal{J}_K \int_K (\vec{\beta} \nabla y_h - f)(\vec{\beta} \nabla w_h)$$

ifadesi toplanırrsa,

$$\begin{aligned} & (\epsilon \nabla y_h, \nabla y_h)_\Omega + (\vec{\beta} \nabla y_h, y_h)_\Omega + (s y_h, y_h)_\Omega + \tilde{\alpha} \langle y_h, y_h \rangle_\Gamma \\ & + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\epsilon K_2 \gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, y_h \rangle_E \\ & + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle y_h, y_h \rangle_E \\ & + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, y_h \rangle_E + \langle y_h, \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E \right\} + \sum_K \mathcal{J}_K \int_K (\vec{\beta} \nabla y_h \\ & - f)(\vec{\beta} \nabla y_h) \\ & = (f, y_h)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{\alpha} \right) \langle q, y_h \rangle_E + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle q, \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E \end{aligned}$$

düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & (\epsilon \nabla y_h, \nabla y_h)_\Omega + (\vec{\beta} \nabla y_h, y_h)_\Omega + (s y_h, y_h)_\Omega + \tilde{\alpha} \langle y_h, y_h \rangle_\Gamma \\ & + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\epsilon K_2 \gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, y_h \rangle_E \\ & + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle y_h, y_h \rangle_E \\ & + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, y_h \rangle_E + \langle y_h, \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E \right\} \\ & + \sum_K \mathcal{J}_K \vec{\beta}^2 \|\nabla y_h\|^2 = (f, y_h)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{\alpha} \right) \langle q, y_h \rangle_E \\ & + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle q, \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E + \sum_K \mathcal{J}_K \int_K f \cdot \vec{\beta} \nabla y_h \end{aligned} \tag{8.6}$$

elde edilir. Burada Eş. 8.6'nın sol tarafı $\hat{a}(y_h, w_h)$, sağ tarafı $\hat{L}(y_h)$ olsun. Eş. 8.6'da SUPG terimi eklenmiş denklemin sol tarafı için işlem yapılır ve

$$\sum_K \mathcal{J}_K |\vec{\beta}|^2 \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = A$$

denilirse,

$$\begin{aligned} a_h(y_h, y_h) + A &= (\epsilon \nabla y_h, \nabla y_h)_\Omega + (\vec{\beta} \nabla y_h, y_h)_\Omega + (s y_h, y_h)_\Omega + \tilde{a}(y_h, y_h)_\Gamma \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\epsilon K_2 \gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, y_h \right\rangle_E \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle y_h, y_h \rangle_E \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \left\langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, y_h \right\rangle_E + \left\langle y_h, \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\rangle_E \right\} + \sum_K \mathcal{J}_K |\vec{\beta}|^2 \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Eş. 7.14'te $w_h = y_h$ alınırsa,

$$a_h(y_h, y_h) \geq c \cdot \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \cdot \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \text{ olur ve}$$

$$a_h(y_h, y_h) + A \geq c \cdot \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \cdot \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 + A \text{ elde edilir.}$$

Bu kısımda $a_h(y_h, y_h) + A = \hat{a}_h(y_h, y_h)$ denilirse,

$$\hat{a}_h(y_h, y_h) \geq c \cdot \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \cdot \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 + A \text{ olur.}$$

Burada A yerine yazılırsa,

$$\hat{a}_h(y_h, y_h) \geq c \cdot \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \cdot \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_K \mathcal{J}_K |\vec{\beta}|^2 \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (8.7)$$

olur.

Eş. 7.15 denkleminde SUPG teriminin f'li kısmı eklenirse, Eş. 8.6 denkleminin sağ tarafı elde edilir. Bu kısma $\hat{L}_h(y_h)$ denilirse,

$$\hat{L}_h(y_h) = L_h(y_h) + \sum_K \mathcal{J}_K \int_K f \cdot \vec{\beta} \nabla y_h \quad (8.8)$$

olur ve

$$\begin{aligned} \hat{L}_h(y_h) = & (f, y_h)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{a} \right) \langle q, y_h \rangle_E \\ & + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle q, \frac{\partial y_h}{\partial n} \rangle_E + \sum_K \mathcal{J}_K \int_K f \cdot \vec{\beta} \nabla y_h \end{aligned} \quad (8.9)$$

elde edilir. Burada

$$I_4 = \sum_K \mathcal{J}_K \int_K f \cdot \vec{\beta} \nabla y_h$$

olsun.

$$I_4 \leq \sum_K \mathcal{J}_K \langle f, \vec{\beta} \cdot \nabla y_h \rangle_K$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \leq \sum_K \mathcal{J}_K \cdot |\vec{\beta}| \cdot \|f\|_{L^2(K)} \cdot \|\nabla y_h\|_{L^2(K)} \\ & \leq |\vec{\beta}| \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)} \cdot \sum_K \mathcal{J}_K \end{aligned}$$

$$\sum_K \mathcal{J}_K = N \quad \text{olmak üzere}$$

$$\leq |\vec{\beta}| \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)} \cdot N$$

Young Eşitsizliği uygulanırsa,

$$\leq |\vec{\beta}| \cdot N \left(\frac{1}{\delta} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

$$\delta = \frac{c}{2 \cdot N \cdot |\vec{\beta}|}$$

seçilirse,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2 \cdot N^2 \cdot |\vec{\beta}|^2}{2 \cdot c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\vec{\beta} \cdot N}{2} \left(\frac{c}{2N \cdot |\vec{\beta}|} \right) \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{N^2 \cdot |\vec{\beta}|^2}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{4} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (8.10)$$

elde edilir. Eş. 7.23 ve Eş. 8.10 eşitsizlikleri Eş. 8.8 de yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \hat{L}_h(y_h) &\leq \frac{M}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{2} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2 \cdot c} \left[(1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma |\Gamma|)^2 + |\Gamma| \gamma^2 c_1 \right] \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{N^2 \cdot |\vec{\beta}|^2}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{c}{4} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{M + N^2 |\vec{\beta}|^2}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3c}{4} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2 \cdot c} \left[(1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma |\Gamma|)^2 + |\Gamma| \gamma^2 c_1 \right] \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

O halde

$$\begin{aligned} \hat{L}_h(y_h) &\leq \frac{M + N^2 |\vec{\beta}|^2}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3c}{4} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2 \cdot c} \left[(1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma |\Gamma|)^2 + |\Gamma| \gamma^2 c_1 \right] \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned} \quad (8.11)$$

olur.

Eş. 8.7 ve Eş. 8.11 denklemleri ile $\hat{a}_h(y_h, y_h) = \hat{L}_h(y_h)$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} c. \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + c. \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_K \mathcal{J}_K |\vec{\beta}|^2 \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \hat{a}_h(y_h, y_h) = \hat{L}_h(y_h) \\ &\leq \frac{M + N^2 |\vec{\beta}|^2}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3c}{4} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2 \cdot c} \left[(1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma |\Gamma|)^2 + |\Gamma| \gamma^2 c_1 \right] \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{c}{4} \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3c}{4} \|y_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_K \mathcal{J}_K |\vec{\beta}|^2 \|\nabla y_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{M + N^2 |\vec{\beta}|^2}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\sigma^2 \cdot c} \left[(1 + |\vec{\beta}| + \tilde{\alpha} \gamma |\Gamma|)^2 + |\Gamma| \gamma^2 c_1 \right] \|q\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.



9. NÜMERİK KISIMLAR

Bu bölümde uygulanan yöntemin kararlılığını nümerik olarak test etmek ve yöntemin etkisini sayısal olarak gözlemlemek amacıyla sayısal bir test uygulanmıştır. Testte kullanılan yazılım, ücretsiz lisans programı Freefem++'dır [30]. Bu program sonlu elemanlar yazılımı ve kodlama programıdır.

Bu testte problem birim kare üzerinde yatay ve dikeyde 8 parçaya ayrılarak çözülmüştür. Sonlu eleman ağ üzerinde üçgenleme işlemi yapılarak yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Üçgenleme işlemi, bu üçgenler üzerinde yerel çözümlerin üretilmesi, yerel çözümlerin birleştirilerek genel çözüm matrisinin oluşturulması ve son olarak genel çözüm matrisini içeren doğrusal sistemin çözümlenmesi aşamalarının tamamı Freefem++ yazılımı tarafından otomatik olarak yapılır. Bu yazılıma kullanıcılar tarafından sınır koşulları, parametreler, çözüm yapılan bölge ve denklemin zayıf hali girdi olarak yazılır. Ardından yukarıda anlatılan süreçler Freefem++ programı tarafından yapılır. Son olarak çözümün istenilen bölge üzerindeki grafik görünümü elde edilir.

Üzerinde çalıştığımız ana denklem Eş. 1.1 ve Eş. 1.2 ile ifade edilen konveksiyon difüzyon denklemi aşağıdaki gibidir:

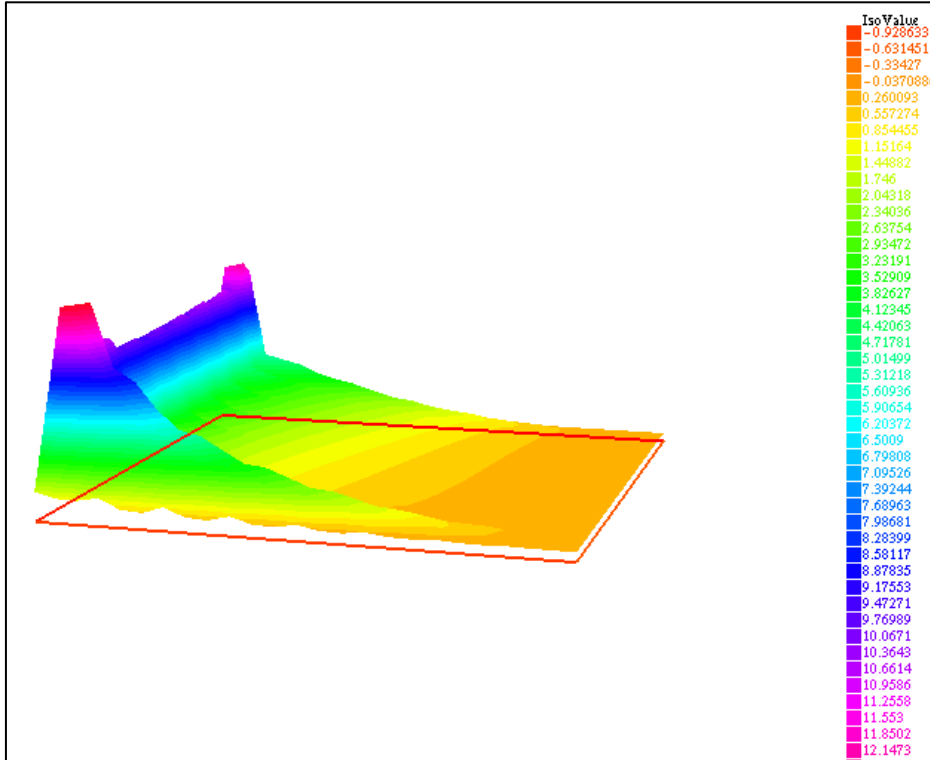
$$-\epsilon \Delta y + \vec{\beta} \nabla y + sy = f, \Omega \text{ içinde}$$

$$y = q, \Gamma \text{ üzerinde}$$

Yapılacak test için öncelikle yukarıdaki konveksiyon difüzyon reaksiyon denkleminin zayıf hali olan Eş. 6.19 denklemi:

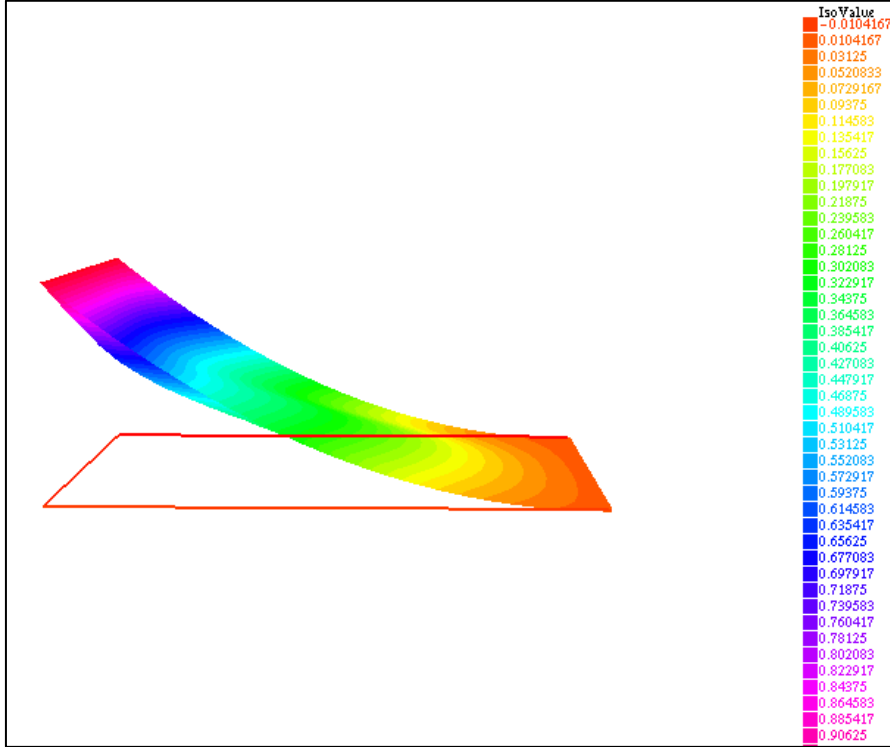
$$\begin{aligned}
& (\epsilon \nabla y_h, \nabla w_h)_\Omega + (\vec{\beta} \nabla y_h, w_h)_\Omega + (s y_h, w_h)_\Omega + \tilde{\alpha} \langle y_h, w_h \rangle_\Gamma \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\epsilon K_2 \gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, w_h \rangle_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle y_h, w_h \rangle_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E + \langle y_h, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E \right\} \\
& = (f, w_h)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{\alpha} \right) \langle q, w_h \rangle_E + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle q, \frac{\partial w_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E
\end{aligned}$$

Freefem++ programına girilmiştir. $H^1(\Omega)$ sonlu eleman uzayı üzerinde işlem yapılmıştır. Denklem sağı tarafında bulunan f fonksiyonu $f(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ olarak alınmıştır. s reaksiyon katsayısı $s=0$ olarak alınmıştır. Yöntemin kararlılığını gözlemleyebilmek için farklı iki difüzyon katsayısı kullanılmıştır. İlk örnekte $\epsilon = 0,1$, $\sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ seçilmiştir. Bu değer ile elde edilen çözüm grafiğı (Bkz. Şekil 9.1) de gösterilmiştir.



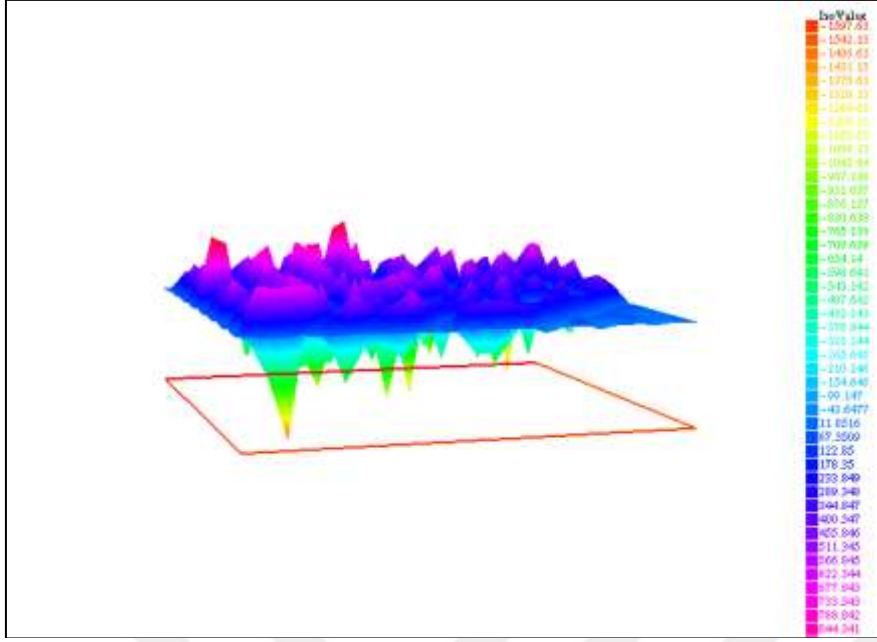
Şekil 9.1. $\epsilon = 0,1$, $\sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ ile elde edilen çözüm

İkinci örnekte $\epsilon = 0,1$, $\sigma = 0,00000001$ ve $\gamma = 0,001$ seçilmiştir. Yani ilk örnekteki σ değeri üzerinde değişiklik yapıp denklemin çözümüne etkisi gözlenmek istenmiştir. (Bkz. Şekil 9.2)



Şekil 9.2. $\epsilon = 0,1$, $\sigma = 0,00000001$ ve $\gamma = 0,001$ için elde edilen çözüm

Üçüncü örnekte $\epsilon = 0,0001$ alınmıştır. Bunun yanı sıra $\sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ seçilmiştir, yani bu iki değer ilk örnekle aynı seçilmiştir. Bu değer ile elde edilen çözüm grafiği (Bkz. Şekil 9.3) de gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi çözümde bozulmaların olduğu gözlemlenmiştir. Bunun nedeni ϵ değeri küçüldükçe denklemin konveksiyon baskın hale gelerek çözümün bozulmasıdır.



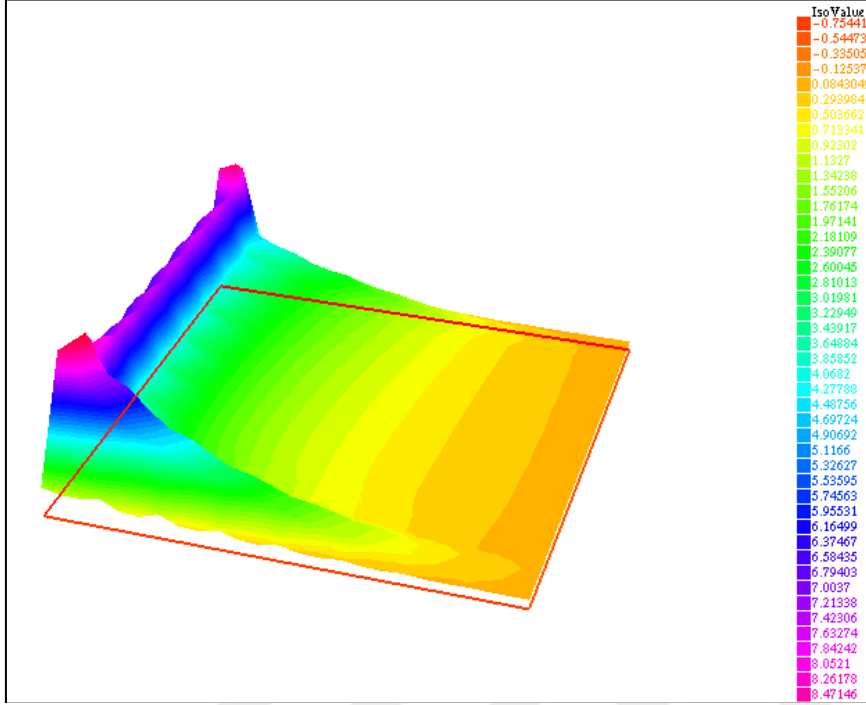
Şekil 9.3. $\epsilon = 0,00001$, $\sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ için elde edilen çözüm

Şimdi de konveksiyon difüzyon reaksiyon denkleminin SUPG terimi eklenmiş formu üzerinde test uygulansın. Öncelikle test uygulanacak denklem olan Eş. 8.6 denklemini

$$\begin{aligned}
& (\epsilon \nabla y_h, \nabla y_h)_\Omega + (\vec{\beta} \nabla y_h, y_h)_\Omega + (s y_h, y_h)_\Omega + \tilde{\alpha} (y_h, y_h)_\Gamma \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\epsilon K_2 \gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, y_h \right\rangle_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle y_h, y_h \rangle_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \left\{ \frac{\sigma \epsilon}{1 + |\vec{\beta}|} \left\langle \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}}, y_h \right\rangle_E + \left\langle y_h, \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \right\rangle_E \right\} \\
& + \sum_K \mathcal{J}_K \vec{\beta}^2 \|\nabla y_h\|^2 = (f, y_h)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{K_1}{\sigma + \gamma h_E} + \tilde{\alpha} \right) \langle q, y_h \rangle_E \\
& + \sum_{E \in \mathcal{G}_h} \left(\frac{-\gamma h_E}{\sigma + \gamma h_E} \right) \langle q, \frac{\partial y_h}{\partial \vec{n}} \rangle_E + \sum_K \mathcal{J}_K \int_K f \cdot \vec{\beta} \nabla y_h
\end{aligned}$$

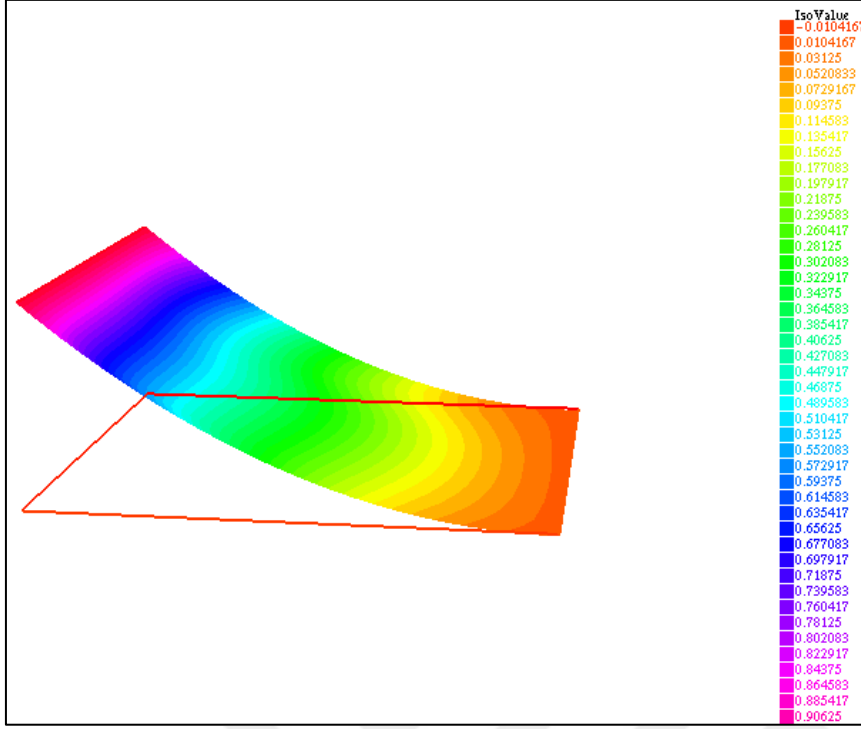
Freefem++ programına girilmiştir. Yukarıda Eş. 6.19 için yapılan örnekler bu denklem için de yapıp aradaki fark gözlemlenmiştir.

İlk örnekte $\epsilon = 0,1$, $\sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ alınmış ve çözümün grafiği (Bkz. Şekil 9.4) gösterilmiştir.



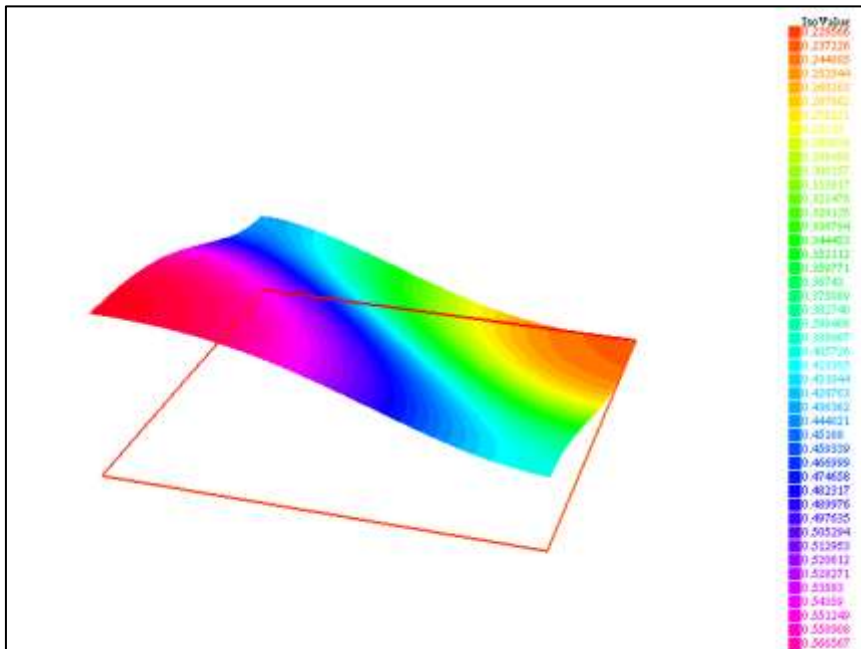
Şekil 9.4. $\epsilon = 0,1$, $\sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ için elde edilen çözüm

İkinci örnekte $\epsilon = 0,1$, $\sigma = 0,00000001$ ve $\gamma = 0,001$ alınmıştır. Elde edilen çözümün grafiği (Bkz. Şekil 9.5) gösterilmektedir.



Şekil 9.5. $\epsilon = 0,1$, $\sigma = 0,00000001$ ve $\gamma = 0,001$ için elde edilen çözüm

Son olarak $\epsilon = 0,00001$, $\sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ değerleri alınmış ve çözüm için elde edilen grafik (Bkz. Şekil 9.6) gösterilmektedir. Bu örnek daha önce üçüncü örnekte elde edilen (Bkz. Şekil 9.3) ile karşılaştırıldığında SUPG teriminin etkisi net bir şekilde gözlemlenmektedir.



Şekil 9.6. $\epsilon = 0,00001$, $\sigma = 0,1$ ve $\gamma = 0,001$ için elde edilen çözüm

10. SONUÇ VE ÖNERİLER

Homojen olmayan Dirichlet sınır koşullarına sahip konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemlerine Nitsche yöntemi uygulayıp kararlılık analizi yaptık. Teorik olarak elde ettiğimiz sonuçların doğruluğunu göstermek için nümerik deneyler verdik.

Elde edilen sonuçlar optimal kontrol problemi ile birleştirilerek yeni çalışmalar yapılabilir. Ayrıca lineer olmayan akış problemleri üzerinde bizim tekniğimize benzer yeni yöntemler oluşturulabilir. Çalıştığımız bu denklemin sonlu elemanlar yöntemi ile hata analizi ileride başka bir çalışmanın konusu olabilir.





KAYNAKLAR

1. Sanver, M. (1983). *Yerkürenin ısı evrimi ve günümüzde yeriçinin sıcaklığı*, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 45-52.
2. İnce, E. (2001). İkili sıvı sistemlerinin difüzyon katsayılarının tayini. *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 7(3), 409-413.
3. Reddy, J. N. (2006). *An introduction to the finite element method*. New York: The McGraw-Hill Companies, 36-38.
4. Liu, G. R., Quek, S. S. (2003). *The finite element method: A practical course*. Elsevier Science Ltd., Oxford, 129-160.
5. Braess, D. (2001). *Finite elements: Theory, fast solvers and applications in solid mechanics* (2nd ed.). Cambridge University Press, 122-135.
6. Çiftci, C. (2012). *Değişken difüzyon katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü*. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 78-85.
7. Nitsche, J. A. (1971). Über ein variationsprinzip zur lösung von dirichlet-problemen bei verwendung von teilträumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 36(1), 9–15.
8. Juntunen, M., Stenberg, R. (2008). Nitsche's method for general boundary conditions. *Mathematics Of Computation*, 78(267), 1353-1374.
9. Codina R. (1998). Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156, 185-210.
10. Brooks, A. N., Hughes, T. J. R. (1982). Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection-dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, 32, 199– 259, 09.
11. Hughes, T. J. R., Franca L. P. (1987). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the babuška-brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15(3), 269-278.
12. Tezduyar, T. E., Park, Y. J. (1986). Discontinuity-capturing finite element formulations for nonlinear convection-diffusion-reaction equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(3), 307-325.
13. Evans, L. C. (2000) *Partial differential equations* (19. Edition). California: American Mathematical Society, 1-662.

14. Adams, R. A. (1975). *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1-268.
15. Robinson, J. C. (2001). *Infinite dimensional dynamical systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1-462.
16. Çelebi, A. O., Kalantarov, V. K. and Uğurlu, D. (2005) Continuous dependence for the convective Brinkman-Forchheimer equations. *Applicable Analysis*, 84, 877-888.
17. Gagliardo, Emilio (1957). Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*. 27, 284–305.
18. Reed, M., Simon, B. (1980). *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis* (Vol. 1). New York: Academic Press, 48-52.
19. Anar, E. İ. (2005). *Kısmi diferansiyel denklemler*, Ankara: Palme Yayınları, 214-215.
20. Green, G. (1828). *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*. Nottingham. (Reprinted in *Mathematical papers*, Chelsea, 1970), 1–82.
21. Rudin, W. (1991). *Functional analysis* (Second edition). New York: Mc. Graw-Hill, 1-424.
22. Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations*. New York: American Mathematical Society, 1-22.
23. Grisvard, P. (1985). *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, Boston, London, Melbourne.
24. Lions, J.-L., Magenes, E. (1972). *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181. New York: Springer-Verlag, 122-136.
25. Çörekli, Ç. (2016). *Finite element methods of dirichlet boundary optimal control problems with weakly imposed boundary conditions*, Doctoral Dissertation, Connecticut University, Storrs, 85-93.
26. Güler, M. S. ve Şen, S (2015). Sonlu elemanlar yöntemi hakkında genel bilgiler. *Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 5(1), 56-66.
27. Türk, Ö. (2008). *The finite element method solution of reaction-diffusion-advection equations in air pollution*, Master's Thesis, Middle East Technical University, Ankara, 26-32.
28. Yıldırım, M. (2016). *Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 78-82.
29. Şendur, A. (2012). *Enriched finite elements method for convection-diffusion-reaction problems*, Doktora Tezi, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, 45-62.

30. Hecht, F. (2012). New development in FreeFem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4), 251-266.







Gazili olmak ayrıcalıktır