GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ-RECURRENT TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Aslı KALKAN ALTINTAŞ

Kütahya - 2024

T.C.
KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ-RECURRENT TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

Danışman:
Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER

Hazırlayan:
Aslı KALKAN ALTINTAŞ

Kütahya – 2024

Kabul ve Onay

KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Matematik Ana Bilim dalında, 202285211015 öğrenci numaralı, Aslı KALKAN ALTINTAŞ'ın hazırlamış olduğu "*GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ-RECURRENT TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI*" başlıklı yüksek lisans tez çalışması ile ilgili tez savunma sınavı jüri tarafından yapılmış ve adayın tezinin OY BİRLİĞİ ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

26/06/2024

Tez Jürisi	**İmza**	
	Kabul	**Ret**
Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER		
Prof. Dr. Cumali EKİCİ		
Prof. Dr. Mine TURAN		

Onay

Doç. Dr. Eray ACAR

Enstitü Müdürü

Bilimsel Etik Bildirimi

Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığım “*Genelleştirilmiş Ricci-recurrent Trans-Sasakian Yarı Finsler Manifoldları*” adlı çalışmanın öneri aşamasından sonuçlandığı aşamayakadar geçen süreçte bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle uyduğumu, tez içindeki tüm bilgileri bilimsel ahlak ve gelenek çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığımı, bu çalışmamda doğrudan veya dolaylı olarak yaptığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu beyan ederim.

26/06/2024

Aslı KALKAN ALTINTAŞ

Özgeçmiş

Gazi ilköğretim okulunda öğrenimini tamamladı. 2009 yılında Cumhuriyet lisesinden mezun oldu. Lisans Eğitimimi Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladı.

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ-RECURRENT TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

KALKAN ALTINTAŞ, Aslı
Yüksek Lisans Tezi Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Pof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER
Haziran, 2024, 120 sayfa

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır. Çalışmamızın ilk bölümünde literatür taramasına yer verildi ve tezin literatürdeki yeri ifade edildi. İkinci bölümde yarı-Riemann manifoldları üzerinde hemen hemen değme yarı-metrik yapılar tanımlandı. Üçüncü bölümde yarı Finsler manifoldları üzerinde değme yapılar, hemen hemen değme Finsler yapılar, hemen hemen değme yarı metrik yapılar, değme yapıların integrallenebilir tensör alanları ve ε-Sasakian yapılar incelendi. Dördüncü bölümde ise (α,β)-tipinden trans- Sasakian yarı Finsler manifoldları ve bu manifoldların özel halleri olarak α-Sasakian ve β-Kenmotsu yarı Finsler manifoldları tanımlandıktan sonra özgün çalışmamız olan genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları çalışıldı. Son olarak da cyclic-ricci tensörlü genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları incelendi. Son bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrıldı.

Anahtar Kelimeler: Değme Manifold, Ricci-recurrent Manifold, Trans-Sasakian Manifold, Yarı Finsler Manifoldu, Yarı Finsler Metrik,α-Sasakian Manifold, β-Kenmotsu Manifold

ABSTRACT

RICCI-RECURRENT TRANS-SASAKIAN INDEFINITE FINSLER MANIFOLDS

KALKAN ALTINTAŞ, Aslı
Master Thesis, Deparment of Matematik
Supervisor: Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER
June, 2024, 120 pages

This thesis consists of 4 chapters. In the first part of our study, a literature review was included and the place of the thesis in the literature was stated. In the second part, almost contact pseudo-metric structures were defined on semi-Riemann manifolds. In the third chapter, contact structures on indefinite Finsler manifolds, almost contact Finsler structures, almost contact pseudo-metric structures, integrable tensor fields of contact structures and ε-Sasakian structures were examined. In the fourth chapter, after defining (α,β)-type trans-Sasakian indefinite Finsler manifolds and special cases of these manifolds, α-Sasakian and β-Kenmotsu indefinite Finsler manifolds, our original work, generalized Ricci-recurrent trans-Sasakian indefinite Finsler manifolds, was studied. Finally, generalized Ricci-recurrent trans-Sasakian indefinite Finsler manifolds with cyclic-ricci tensor were examined. The last section is divided into discussion and conclusion.

Keywords: Contact Manifold, İndefinite Finsler Manifold, Pseudo Finsler Metric, Ricci-recurrent Manifold, Trans-Sasakian Manifold, α-Sasakian Manifold, β-Kenmotsu Manifold

ÖNSÖZ

Tanıştığımız günden beri bana desteklerini ve güler yüzünü esirgemeyen, yüksek lisans eğitimimin her aşamasında beni destekleyen, engin bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, her daim yanımda olan danışman hocam Sayın Ayşe Funda SAĞLAMER hocama sonsuz teşekkürlerimi bildiriyorum. Her daim yanımda olan canım aileme beni hep destekledikleri için teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

BEŞİNCİ BÖLÜM

SONUÇ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
$(M')^v$	Dikey vektör demeti
(T^*M')	TM' nün dual vektör uzayı
$(TM')^H$	Yatay distrübüsyon
$(TM')^V$	Dikey distrübüsyon
$(M')^h$	Yatay vektör demeti
M'	M nin bir açık altmanifoldu
$[\,,]$	Lie operatörü
∇	Konneksiyon
C^∞	Düzgün fonksiyonların kümesi
F^*	Yarı Finsler fonksiyonu
F^{2n+1}	Yarı Finsler manifoldu
F	Finsler fonksiyonu
G	Sasaki metrik
g^{F^*}	Yarı Finsler metrik
g^F	Finsler metrik
K^*	Kesit eğriliği
M	$2n+1$ boyutlu düzgün manifold
R	Riemann eğrilik tensörü
S	Ricci eğrilik tensörü
T	Torsiyon tensörü
TM'	M nin double tanjant demeti
TM	M nin tanjant demeti
π	Kanonik projeksiyon dönüşümü
π_*	Türev dönüşümü
Ω	İkinci temel form

TEZ METNİ

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

1.1. GİRİŞ

Yarı metrik manifoldlar teorisi, modern diferensiyel geometri için önemli bir araştırma konusudur, özellikle matematiksel fizikte uygulama alanı bulmaktadır. Oubina, (α,β) tipinden trans-Sasakian manifoldun sınıflandırılması fikrini ortaya atmıştır. Yarı Sasakian manifoldu , $\alpha=1$ ve $\beta=0$ için yarı trans-Sasakian manifoldunun dikkate değer bir kategorisidir. Ayrıca, yarı kosimplektik manifold , $\alpha=0$ ve $\beta=0$ için yarı trans-Sasakian manifoldun diğer kategorisidir. Yarı Kenmotsu manifoldu , $\alpha=0$ ve $\beta=1$ ile verilebilir.

Yarı metrikli manifoldlar birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bejancu ve Duggal (Bejancu ve Duggal, 1993) (ϵ)-Sasakian manifold kavramını tanıtmış ve Xufeng ve Xiaoli (Xufeng ve Xiaoli, 1998) bu manifoldların yarı Kahlerian manifoldların reel hiperyüzeyleri olduğunu ortaya koymuştur. Kumar ve diğerleri (Kumar, Rani ve Nagaich, 2007) bu manifoldların eğrilik koşullarını incelemiştir.

Bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde yarı-simetrik lineer koneksiyon kavramı Friedmann ve Schouten (Friedmann ve Schouten, 1924) tarafından tanıtılmış ve bir Riemann manifoldu üzerinde torsiyonlı (burulmalı) metrik koneksiyon Hayden (Hayden, 1932) tarafından çalışılmıştır. Riemann manifoldu üzerinde yarı simetrik metrik koneksiyon Yano (Yano, 1970) tarafından verilmiş ve daha sonra Bagewadi (Bagewadi, 1982), Amur ve Pujar (Amur Kumar ve Pujar, 1978), Sharafuddin ve Hussain (Hussain ve Sharafuddin, 1976), De ve diğerleri (De ve Absos Ali Shaikh, 1997) ve Bagewadi ve diğerleri (Bagewadi ve Gatti, 2003) tarafından çalışılmıştır. Daha önce K-değme, Kenmotsu ve trans-Sasakian manifoldlar üzerinde projektif, pseudo projektif, konformal, dairesel, quasi konformal eğrilik tensörleri üzerine bazı sonuçlar sunmuşlardır. Hem Sasakian hem de Kenmotsu manifoldlarının doğal bir genellemesi olarak, trans-Sasakian manifold kavramı Oubina tarafından tanıtılmıştır (Oubina, 1985). Trans-Sasakian manifold yerel konformal Kahler manifoldu ile yakından ilişkilidir. Ayrıca, trans-Sasakian manifoldların yerel yapıları ile ilgili çalışma Marrero tarafından yapılmıştır (Marrero,1992). $(\alpha,0)$, $(0,\beta)$ ve $(0,0)$ tipindeki trans-Sasakian manifoldlar α, β skaler fonksiyonlar olmak üzere, sırasıyla, α- Sasakian, β-Kenmotsu ve kosimplektik manifoldlar olarak adlandırılır. Dolayısıyla trans-Sasakian yapılar genelleştirilmiş quasi-Sasakian yapıların geniş bir sınıfını verir.

Klasik makaleler Riemann metrikli veya yarı Riemann metrikli değme yapıları ile ilgilenir, ancak bu tezimizde yarı Finsler metrikli değme yapılar ile çalıştık. Bilindiği gibi, Finsler eğriler ve yüzeyler hakkındaki tezini yayınladıktan sonra, Finsler geometrisine adanmış birçok makale yayınlandı, referanslara bakınız (Antonelli 2003, Miron 1982, Matsumoto 1986, Sinha ve Yadav 1988, Szilazi ve Vincze 2000, Asanov 1985), ancak İndefinite Finsler manifold teorisi birkaç araştırmacı tarafından incelenmiştir (Bejancu ve Farran 2013, Beem 1970, Bejancu ve Farran 1999). Bu çalışmamızda yarı Finsler manifoldları üzerinde trans-Sasakian yapıyı kurduktan sonra genelleştirilmiş Ricci-recurrent olabilmesi şartlarını inceledik. Bu yapılar $(M')^h$ ve $(M')^v$ alt vektör demetleri üzerinde kuruldu, burada M, (2n+1)-boyutlu C^∞ manifold, $M' = (M')^h \oplus (M')^v$ de TM'nin boştan farklı bir açık alt manifoldudur. F^* temel yarı Finsler fonksiyonu olmak üzere $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$, q indeksli bir yarı Finsler manifoldu olur. Çalışmamızda $G = G^H + G^V = g_{ij}^{F^*} dx^i \otimes dx^j + g_{ij}^{F^*}\, \delta y^i \otimes \delta y^i$ Sasaki Finsler metriğini kullandık. $g_{ij}^{F^*} = g^{F^*}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)$ ve $g_{ij}^{F^*} = g^{F^*}(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j})$ yarı Finsler metrikleri olarak adlandırılırlar. Son olarak gösterdik ki; Cyclic Ricci tensörlü $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları, $A^H(\xi^H)$ ve $A^V(\xi^V)$ sıfırdan farklı olmak üzere, $(\varepsilon) - \alpha -$ Sasakian, $(\varepsilon) -$ Sasakian, $(\varepsilon) -$ β-Kenmotsu ve $(\varepsilon) -$Kenmotsu manifoldlarından herhangi birisi iseler Einstein ve Ricci simetrik manifoldlar olurlar, burada α ve β fonksiyonları $(M')^h$ ve $(M')^v$ yatay ve dikey manifoldları üzerinde tanımlanmış olan sabit fonksiyonlardırlar.

İKİNCİ BÖLÜM

DEĞME YARI-RİEMANN MANİFOLDLARI

2.1. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARI

Tanım 2.1.1. M bir (2n+l)-boyutlu manifold, $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ da M üzerinde, sırasıyla, (1,1) - tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsun. Eğer , $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ için, M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere

$$\eta(\xi) = 1 \qquad (2.1.1)$$

ve

$$\phi^2 X = -X + \eta(X).\xi \qquad (2.1.2)$$

özellikleri sağlanıyorsa o zaman (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapısı ve bu yapı ile birlikte M ye de bir hemen hemen değme manifold denir (Yano, K. and Kon, M., 1984).

Teorem 2.1.1. (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için

i) $\phi\xi = 0,$ (2.1.3)

ii) $\eta(\phi X) = 0,$ (2.1.4)

iii) rank $\phi = 2n$ (2.1.5)

dir (Yano, K. and Kon, M., 1984).

İspat: (i) $\forall$ X, $\in \chi$ (M) için Tanım 2.1.1 den

$$\phi^2 X = -X + \eta(X).\xi$$

olduğunu biliyoruz. Burada özel olarak $X = \xi$ alınır ise,

$$\phi^2 \xi = -\xi + \eta(\xi).\xi$$

olur. Gene Tanım 2.1.1 gereğince

$$\eta(\xi) = 1$$

olduğu gözönüne alındığında

$$\phi^2\xi = -\xi + 1.\xi = 0$$

bulunur. O zaman ya $\phi\xi = 0$ dır, ya da $\phi\xi$ vektörü, ϕ nin sıfır özdeğerine karşılık gelen aşikâr olmayan bir özvektördür. İkinci halde $\phi\xi \neq 0$ olmalıdır. Eğer $\phi\xi \neq 0$ ise

$\phi^2 X = -X + \eta(X).\xi$ eşitliği gereğince

$$\phi^2(\phi\xi) = -\phi\xi + \eta(\phi\xi).\xi$$

veya $\phi^2(\phi\xi) = 0$ olduğuna göre buradan da

$$\phi\xi = \eta(\phi\xi).\xi$$

elde edilir. Böylece

$$\phi\xi \neq 0$$

olması $\eta(\phi\xi) \neq 0$ olmasını da gerektirir. Bu durumda

$$\phi\xi = \eta(\phi\xi).\xi$$

eşitliğinde her iki tarafa ϕ uygulanırsa

$$\phi\,(\phi\xi) = \phi(\eta\,(\phi\xi).\xi\,)$$

veya

$$\phi^2\xi = \eta\,(\phi\xi)\,.\,\phi\xi$$

elde edilir. Burada $\phi^2\xi = 0$ olduğundan

$$0 = \eta\,(\phi\xi)\,.\,\phi\xi$$

dır. Burada $\eta\,(\phi\xi) \neq 0$ kabulümüz bizi

$$\phi\xi = 0$$

sonucuna götürür.

(ii) Tanım 2.1.1 den

$$\phi^2 X = -X + \eta\,(X).\xi$$

dır. Bu eşitliğin iki yanına ϕ uygulanırsa

$$\phi\,(\phi^2 X) = \phi\,(-X + \eta\,(X).\xi)$$

$$\Rightarrow \phi^3 X = -\phi X + \eta\,(X).\phi\,\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\phi^2 X = -X + \eta\,(X).\xi$$

denkleminde X yerine ϕX yazılırsa,

$$\phi^2(\phi X) = -\phi X + \eta(\phi X).\xi$$

$$\Rightarrow \phi^3 X = -\phi X + \eta\,(\phi X).\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

bulunur. (*) ve (**) eşitliklerinden, $\eta(X).\phi\xi = \eta(\phi X).\xi$ elde edilir. $\phi\xi = 0$ olduğundan, $\eta(\phi X)\xi = 0$ ve $\xi \neq 0$ olması nedeniyle de $\eta(\phi X) = 0$ bulunur.

(iii) $\phi_P : T_M(P) \longrightarrow T_M(P), \ \forall \ p \in M$

olması nedeniyle

$$\text{Rank } \phi + \text{Sıfirlık } \phi = 2n + 1 = \text{boy}(M)$$

dir. $\forall X \in \text{Ker } \phi$ için

$$\phi X = 0$$

olacağından

$$\phi^2 X = -X + \eta(X).\xi$$

$$\Rightarrow 0 = -X + \eta(X).\xi$$

$$\Rightarrow X = \eta(X).\xi$$

eşitliği elde edilir. Burada $X \in S_p\{\xi\} = \text{Ker } \phi$ dir. O halde Ker ϕ nin bir bazı ξ dır. O halde

$$\text{Sıfirlık } \phi = \text{boy}(\text{Ker } \phi) = 1$$

dir. Böylece

$$\text{Rank } \phi + \text{Sıfirlık } \phi = 2n + 1$$

$$\Rightarrow \text{Rank } \phi + 1 = 2n + 1$$

$$\Rightarrow \text{Rank } \phi = 2n$$

bulunur.

2.2. HEMEN HEMEN DEĞME YARI-METRİK MANİFOLDLARI

Tanım 2.2.1. Herbir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde bir g yarı-Riemann metriği

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}) = \varepsilon . \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \tag{2.2.1}$$

ve

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \varepsilon . \eta(X)\eta(Y) \tag{2.2.2}$$

olacak şekilde vardır. Burada $\varepsilon = \mp 1$ dir (Calvaruso, G. and Perrone, D., 2010).

Sonuç 2.2.1. M hemen hemen değme manifoldu üzerinde

$\eta(X) = \varepsilon . g(\xi, X)$

$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \varepsilon . \eta(X)\eta(Y)$

olacak şekilde g yarı- Riemann metriği için

$$g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0 \tag{2.2.3}$$

dır, yani ϕ anti – simetrik olacak şekilde M üzerinde bir g yarı - Riemann metriği vardır (Calvaruso, G. and Perrone, D., 2010).

İspat. $g(X,Y) = g(\phi X, \phi Y) + \varepsilon . \eta(X)\eta(Y)$

denkleminde X yerine ϕX konumu yapılırsa

$$\begin{aligned} g(\phi X, Y) &= g(\phi^2 X, \phi Y) + \varepsilon . \eta(\phi X)\eta(Y) \\ &= g(-X + \eta(X).\xi, \phi Y) + \varepsilon .0 \\ &= -g(X, \phi Y) + \eta(X). g(\xi, \phi Y) \\ &= -g(X, \phi Y) + \eta(X).\left(\varepsilon . \eta(\phi Y)\right) \\ &= -g(X, \phi Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.2. Teorem 2.2.1. de verilen g yarı- metrik tensör alanını verilen (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile birleştirilmiş bir yarı- Riemann metrik tensör alanı olarak adlandıracağız. (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile birleştirilmiş bir yarı- Riemann metrik tönsör alanı g olmak üzere, M de (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne bir hemen hemen değme yarı metrik yapı ve bu (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme yarı metrik yapısı ile birlikte M ye bir hemen hemen değme yarı metrik manifold denir (Calvaruso, G. and Perrone, D., 2010).

Özel olarak $g(\xi, \xi) = \varepsilon$ dur. Yani ξ karakteristik vektör alanı $\varepsilon = 1$ iken space-like $\varepsilon = -1$ iken time-like ‘ dır. (light-like olamaz).

2.3. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARININ TORSİYON TENSÖRÜ

Hemen hemen değme yapısı $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ olan bir (2n+l) boyutlu hemen hemen değme manifold M olsun. O zaman IR , bir reel doğruyu göstermek üzere MxIR çarpım manifoldunu düşünelim. O zaman MxIR üzerinde herbir vektör alanı $(\mathbf{X}, \mathbf{f}\ \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}})$ biçimindedir. Burada X ve M ye teğet bir vektör alanı, t ile IR nin bir noktasının koordinatı ve f ile de MxIR de bir fonksiyon gösterilmektedir. MxIR nin tanjant uzayı üzerinde bir j lineer dönüşümü

$$\mathbf{j}(\mathbf{X}, \mathbf{f}\ \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}) = (\boldsymbol{\phi}\mathbf{X} - \mathbf{f}\ \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\ (\mathbf{X})\ \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}) \tag{2.3.1}$$

şeklinde tanımlayalım . Ozaman j^2= -I elde ederiz ve bu yüzden j lineer dönüşümü MxIR üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olur (Yano, K. and Kon, M., 1984).

Tanım 2.3.1. Eğer hemen hemen kompleks yapı olan j nin Nijenhuis torsiyon tensörü N_j için $N_j = 0$ ise j integrallenebilirdir denir. MxIR üzerindeki j (h.h.k.y) integrallenebilir ise o zaman (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano, K. and Kon, M., 1984). Aşağıda ;

$$N_\phi(X, Y) = \phi^2\ [X, Y] + [\ \phi X, \phi Y] - \phi[\ \phi X, Y] - \phi[X, \phi Y] \tag{2.3.2}$$

ile tanımlı N_ϕ Nijenhuis torsiyon tensörü yardımıyla h.h.k.y nin normallik şartına karşılık gerek ve yeter şartları ifade edeceğiz. N_j (1,2) tipinde bir tensör alanı olduğundan M üzerindeki her X ve Y vektör alanı için N_j ((X,0),(Y,0)) ve N_j $(X, 0), (0, \frac{d}{dt}))$ hesaplanırsa N_j nin değerini hesaplamış oluruz.

$$\begin{aligned}
N_j\ ((X, 0), (Y, 0)) &= j^2[(X,0), (Y,0)] + [j(X,0), j(Y,0)] \\
&\quad -j[\ j(X,0), (Y,0)] - j[(X,0), j(Y,0)] \\
&= -([X, Y], 0) + \left[\left(\Phi x, \eta(X)\frac{d}{dt}\right), \left(\Phi y, \eta(Y)\frac{d}{dt}\right)\right] \\
&\quad -j\left[\left(\phi X, \eta(X)\frac{d}{dt}\right), (Y, 0)\right] - j\left[(X, 0), \left(\phi Y, \eta(Y)\frac{d}{dt}\right)\right] \\
&= -([X, Y], 0) + \left([\phi X, \phi Y] - \left[\eta(X)\frac{d}{dt}, \eta(Y)\frac{d}{dt}\right], \left[\phi X, \eta(Y)\frac{d}{dt}\right]\right. \\
&\quad \left. + \left[\eta(X)\frac{d}{dt}, \phi Y\right]\right) - j\left([\phi X, Y], \left[\eta(X)\frac{d}{dt}, Y\right]\right) \\
&\quad - j([X, \phi Y], \left[X, \eta(Y)\frac{d}{dt}\right])
\end{aligned}$$

$$-j\left([\phi X, Y], \left[\eta(X)\frac{d}{dt}, Y\right]\right) - j([X, \phi Y], \left[X, \eta(Y)\frac{d}{dt}\right])$$

$$= -([X,Y],0) + \Big([\phi X,\phi Y] - \eta(X)\eta(Y).0 + 0.\frac{d}{dt}, \phi X\big(\eta(Y)\big)\frac{d}{dt}$$

$$- \phi Y\big(\eta(X)\big)\frac{d}{dt}\Big)$$

$$-j\Big([\phi X,Y],\eta(X).0 - Y\eta(X)\frac{d}{dt}\Big) - j([X,\phi Y],\eta(Y).0 + X\big(\eta(Y)\big)\frac{d}{dt})$$

$$= -([X,Y],0) + ([\phi X,\phi Y],(\phi X(\eta(Y)) - \phi Y(\eta(X))\frac{d}{dt})$$

$$-(\phi[\phi X,Y] + Y\eta(X)\xi,\eta[\phi X,Y]\frac{d}{dt}) - (\phi[X,\phi Y]$$

$$- X(\eta(Y))\xi,\eta[X,\phi Y]\frac{d}{dt})$$

$$N_j((X,0),(Y,0)) = (-[X,Y] + [\phi X,\phi Y] - \phi[\phi X,Y]$$

$$-\phi[X,\phi Y] + X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)))\xi, (\phi X(\eta(Y)) - \phi Y(\eta(X)$$

$$-\eta[\phi X,Y] - \eta[X,\phi Y]\frac{d}{dt})$$

dir.

$$N_\phi(X,Y) = -[X,Y] + \eta[X,Y]\xi + [\phi X,\phi Y] - \phi[\phi X,Y] - \phi[X,\phi Y]$$

$$2d_\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta[X,Y] \tag{2.3.3}$$

$$(L_{\phi X}\eta)Y = \phi X(\eta(Y)) - \eta[\phi X,Y] \tag{2.3.4}$$

$$(L_{\phi Y}\eta)X = \phi Y(\eta(X)) - \eta[\phi Y,X] \tag{2.3.5}$$

olduğundan

$$N_j((X,0),(Y,0)) = (N_\phi(X,Y) + 2d_\eta(X,Y)\xi, ((L_{\phi X}\eta)Y - (L_{\phi Y}\eta)X)\frac{d}{dt})$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$N_j((X,0),(0,\frac{d}{dt})) = (\phi[X,\xi] - [\phi X,\xi],(\xi\eta(X) + \eta[X,\xi])\frac{d}{dt}) \quad \text{olup}$$

$$(L_X w)(Y_1,\dots\dots,Y_r) = L_X(w(Y_1,\dots\dots,Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} w(Y_1,\dots[X,Y_i]\dots,Y_r) \tag{2.3.6}$$

olduğundan

$$(L_\xi\phi)X = L_\xi(\phi X) - \phi[\xi,X] = [\xi,\phi X] + \phi[X,\xi] \tag{2.3.7}$$

$$= \phi[X,\xi] - [\phi X,\xi]$$

ve

$$(L_{\xi}\eta)X = (L_{\xi}(\eta(X)) - \eta[\xi, X] \quad (2.3.8)$$

olur. Böylece;

$$N_j\ ((X,0),(0,\frac{d}{dt})) = ((L_{\xi}\phi)X, (L_{\xi}\eta)X\frac{d}{dt})$$

dir. Şimdi dört tane tensör alanı $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$ ü sırasıyla,

$$N^1(X,Y) = N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \quad (2.3.9)$$

$$N^2(X,Y) = (L_{\phi X}\eta)Y - (L_{\phi Y}\eta)X \quad (2.3.10)$$

$$N^3(X) = (L_{\xi}\phi)X \quad (2.3.11)$$

$$N^4(X) = (L_{\xi}\eta)X \quad (2.3.12)$$

olarak tanımlayalım.

Yardımcı Teorem 2.3.1. Eğer $N^{(1)}=0$ ise o zaman $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)}=0$ dır (Yano, K. and Kon, M., 1984).

İspat. $N^1(X,Y) = N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y).\xi$

olduğundan

$$N^1(X,\xi) = N_\phi(X,\xi) + 2d\eta(X,\xi).\xi$$

dir.

$$\begin{aligned} N_\phi(X,\xi) &= -[X,\xi] + [\phi X,\phi\xi] - \phi[\phi X,\xi] - \phi[X,\phi\xi] + \eta[X,\xi].\xi \\ &= -[X,\xi] + [\phi X,0] - \phi[\phi X,\xi] - \phi[X,0] + \eta[X,\xi].\xi \\ &= [\xi,X] - \phi[\phi X,\xi] + \eta[X,\xi].\xi \\ &= [\xi,X] + \phi[\xi,\phi X] + \eta[X,\xi].\xi \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 2d\eta(X,\xi) &= X(\eta(\xi)) - \xi(\eta(X)) - \eta[X,\xi] \\ &= X(1) - \xi(\eta(X)) - \eta[X,\xi] \end{aligned}$$

olduğundan

$$N^1(X,\xi) = [\xi,X] + \phi[\xi,\phi X] + \xi(\eta(X)).\xi$$

dir.

$$N^1 = 0$$

olduğundan

$$[\xi, X] + \phi[\xi, \phi X] - \xi(\eta(X)).\xi = 0$$

olmalıdır.

$$\eta([\xi, X] + \phi[\xi, \phi X] - \xi(\eta(X)).\xi) = \eta(0)$$

$$\Rightarrow \eta([\xi, X] + \eta(\phi[\xi, \phi X] - \eta(\xi(\eta(X))).\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \eta([\xi, X] - \xi(\eta(X)).\eta(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \eta([\xi, X] - \xi(\eta(X)) = 0$$

ve buradan da

$$\eta([\xi, X] = \xi(\eta(X))$$

olduğu görülür. Bu eşitlik

$$N^4(X) = (L_{\xi}\eta)X = \xi(\eta(X)) - \eta([\xi, X]$$

de kullanılırsa

$$N^4(X) = \xi(\eta(X)) - \xi(\eta(X)) = 0$$

bulunur.

$$\phi([\xi, X] + \phi[\xi, \phi X] - \xi(\eta(X))\ \xi) = \phi(0)$$

$$\Rightarrow \phi[\xi, X] + \phi^2[\xi, \phi X] - \xi(\eta(X))\ \phi\ \xi = 0$$

$$\Rightarrow \phi[\xi, X] - [\xi, \phi X] + \eta([\xi, \phi X])\ \xi - \xi.\eta(X).0 = 0$$

$$\Rightarrow \phi[\xi, X] - [\xi, \phi X] + \xi(\eta(\phi X))\ \xi = 0$$

$$\Rightarrow \phi[\xi, X] - [\xi, \phi X] = 0$$

$$\Rightarrow \phi[\xi, X] = [\xi, \phi X]$$

olduğundan

$$\phi[X, \xi] = [\phi X, \xi]$$

dır. Bu eşitlik

$$N^3(X,Y) = (L_{\xi}\phi)X = \phi[X, \xi] - [\phi X, \xi]$$

de kullanılırsa

$$N^3(X,Y) = [\phi X,\xi] - [\phi X,\xi] = 0$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$0 = N_\phi(\phi X,Y) + 2d\eta(\phi X,Y).\xi$$

eşitliğinde,

$$\begin{aligned}
N_\phi(\phi X,Y) &= [\phi X,Y] + [\phi^2 X,\phi Y] - \phi[\phi^2 X,\phi Y] - \phi[\phi X,\phi Y] + \eta[\phi X,Y].\xi \\
&= -[\phi X,Y] + [-X+\eta(X).\xi,\phi Y] - \phi[-X+\eta(X).\xi,Y] \\
&\quad - \phi[\phi X,\phi Y] + \eta[\phi X,Y].\xi \\
&= -[\phi X,Y] - [X,\phi Y] + [\eta(X).\xi,\phi Y] \\
&\quad + \phi[X,Y] - \phi[\eta(X).\xi,Y] - \phi[\phi X,\phi Y] + \eta[\phi X,Y].\xi \\
&= -[\phi X,Y] - [X,\phi Y] + \eta(X)[\xi,\phi Y] - \phi Y(\eta(X)).\xi \\
&\quad + \phi[X,Y] - \eta(X)\phi([\xi,Y]) + \phi(Y(\eta(X)).\xi - \phi[\phi X,\phi Y] + \\
&\quad \eta[\phi X,Y].\xi
\end{aligned}$$

dır. Burada

$$\boldsymbol{\phi}[\boldsymbol{\xi},\mathbf{Y}] = [\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\phi}\mathbf{Y}]$$

eşitliği de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
N_\phi(\phi X,Y) &= [Y,\phi X] + [\phi Y,X] - \phi Y(\eta(X)).\xi \\
&\quad + \phi[X,Y] + Y(\eta(X)).\phi\xi - \phi[\phi X,\phi Y] + \eta[\phi X,Y].\xi
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
2d\eta(\phi X,Y).\xi &= [\phi X(\eta(Y)) - Y(\eta(\phi X))].\xi - \eta[\phi X,Y].\xi \\
&= (\phi X(\eta(Y)) - Y(0)).\xi - \eta[\phi X,Y].\xi \\
&= \phi X(\eta(Y)).\xi - \eta[\phi X,Y].\xi
\end{aligned}$$

Bulunan değerler $\mathbf{N^1} = 0$ da kullanılarak;

$$\begin{aligned}
0 &= N_\phi(\phi X,Y) + 2d\eta(\phi X,Y).\xi \\
&= [Y,\phi X] - [X,\phi Y] - \phi Y(\eta(X)).\xi + \phi[X,Y]
\end{aligned}$$

$- \phi\, [\phi X, \phi Y] + \phi X\, (\eta(Y)).\, \xi$

$\Rightarrow 0 = \eta\, [Y, \phi X] - \eta\, [X, \phi Y] - \phi Y\, (\eta(X)).\eta\, (\xi)$

$+ \eta(\phi\, [X, Y]) - \eta\, (\phi\, [\phi X, \phi Y]) + \phi X\, (\eta(Y))\, .\eta(\xi)$

$\Rightarrow 0 = \eta\, [Y, \phi X] - \eta\, [X, \phi Y] - \phi Y\, (\eta(X)) + \phi X\, (\eta(Y))$

$\Rightarrow 0 = N^2\, (X, Y)$

dolayısıyla

$N^2 = 0$

dır.

Önerme 2.3.1. M nin bir (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı normaldir.

$$\Leftrightarrow N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0 \tag{2.3.13}$$

dır (Yano, K. and Kon, M., 1984).

Tanım 2.3.2. Değme yarı-metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan (2n + 1) - boyutlu bir değme yarı-metrik manifold M olsun. Eğer ξ karakteristik vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerindeki değme yarı-metrik yapıya bir K - değme yarı-metrik yapı ve M ye de bu yapı ile birlikte bir K - değme yarı-Riemann manifold denir.

Önerme 2.3.2. M bir değme yarı-Riemann manifold olsun. O zaman M nin bir K - değme manifold olması için gerek ve yeter koşul

$\nabla_X \xi = -\varepsilon\, \phi X$

olmasıdır

İspat. M bir K - değme manifold olsun. O zaman **ξ** vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanıdır, yani

$L_\xi g = 0$

dır.

$\forall$ X, Y $\in \chi$ (M) için

$(L_\xi g)\, (X, Y) = L_\xi\, (g(X, Y)) - g\, (L_\xi X, Y) - g\, (X, L_\xi\, Y)$

$= \xi\, (g(X, Y)) - g(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi\, .\, Y) - g(X, \nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi)$

$$= \xi\,(g(X,Y)) - g\,(\nabla_\xi X, Y) + g\,(\nabla_X\, \xi\,, Y)$$

$$- g(X, \nabla_\xi Y) + g\,(X, \nabla_Y \xi)$$

$$= \xi\,(g(X, Y)) - g\,(\nabla_\xi X, Y) - g\,(X, \nabla_\xi Y)$$

$$+ g(\nabla_X\, \xi\,, Y) + g\,(X, \nabla_Y \xi)$$

$$0 = (L_\xi g)\,(X, Y) = g\,(\nabla_X\, \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi)$$

olduğundan

$$g\,(\nabla_X\, \xi, Y) = -g(X, \nabla_Y \xi)$$

dir. g ye göre ∇ Riemann koneksiyonu için;

$$2g(\nabla_X Y\,, Z) = X\, g\,(Y, Z) + Y\, g\,(X, Z) - Z\, g\,(X, Y)$$
$$+ g\,([X, Y], Z) + g\,([Z, X], Y) - g\,([Y, Z]\,, X)$$

dir. Y yerine ξ, Z yerine de Y yazılırsa

$$2g\,(\nabla_X \xi, Y) = X\, g(\xi, Y) + \xi\, g(X, Y) - Yg\,(X, \xi)$$
$$+g\,([X, \xi]\,, Y) + g([Y, X]\,\xi\,) - g\,([\xi\,, Y]\,, X)$$
$$= \varepsilon . X\eta\,(Y) + \xi\, g\,(X, Y) - \varepsilon\, Y\eta(X) + g\,([X\,, \xi]\,, Y])$$
$$+\varepsilon\,.\,\eta[Y, X] - g\,([\xi\,, Y]\,, X)$$

olur. Benzer şekilde

$$2g\,(\nabla_Y \xi, X) = \varepsilon\, Y\, \eta(X) + \xi\, g\,(Y, X) - \varepsilon\, X\, \eta(Y)$$
$$+ g\,([Y, \xi]\,, X) + \varepsilon\, \eta[X, Y] - g\,([\xi, X], Y)$$

bulunur. Böylece

$$2g\,(\nabla_X \xi, Y) - 2g(X, \nabla_Y \xi) = 2\varepsilon\,(X\, \eta(Y) - Y\, \eta(X) + \eta[Y, X])$$
$$= 2.\varepsilon.\,(2d\, \eta(X, Y))$$

olacağından

$$g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_Y \xi\,) = 2\varepsilon\, d\eta\,(X, Y)$$

g ye göre Killing vektör alanı ξ iken $g(\nabla_X \xi, Y) = -g\,(X, \nabla_Y \xi\,)$ olduğundan

$$2g\,(\nabla_X\xi, Y) = 2\mathcal{E}\, d\eta\,(X, Y)$$

$$g(\nabla_X\xi, Y) = \mathcal{E}\, d\eta\,(X, Y)$$

$$d\,\eta(X, Y) = g(X, \phi Y) = -\,g\,(\phi X, Y)$$

eşitliğinin kullanılmasıyla

$$g(\nabla_X\,\xi, Y) = -\,\mathcal{E}\,g(\phi X, Y) = g\,(-\,\mathcal{E}\phi X, Y)$$

bulunur. $\forall$ Y $\in \chi$ (M)   için

$$g(\nabla_X\xi, Y) = g\,(-\,\mathcal{E}(\phi X), Y)$$

olduğundan

$$\nabla_X\,\xi = -\,\mathcal{E}.\,\phi X$$

dir.

Yardımcı Teorem 2.3.2. M nin bir $(\phi\,, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme yarı- metrik yapısı için

$$\begin{aligned} 2g\,((\nabla_X\,\phi)Y, Z) = {} & 3d\Phi\,(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\ & + g\,(N^{(1)}\,(Y, Z), \phi X) + \mathcal{E}.\,N^{(2)}\,(Y, Z)\,\eta(X) \\ & + 2\mathcal{E}.\,d\eta(\phi Y, X)\,\eta(Z) - 2\mathcal{E}d\eta\,(\phi Z, X)\,\eta\,(Y) \text{ dir.} \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

($\forall$ X,Y,Z için) $\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$ alınmıştır.

İspat. g ye göre ∇ Riemann koneksiyonu için; Koszul formülünden

$$\begin{aligned} 2g\,(\nabla_X Y, Z) = {} & X\,g\,(Y, Z) + Y\,g\,(X, Z) - Z\,g\,(X, Y) \\ & + g\,([X, Y], Z) + g\,([Z, X], Y) - g\,([Y, Z], X) \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$3d\phi\,(X, Y, Z) = X\Phi(Y, Z) + Y\Phi(Z, X) + Z\Phi(X, Y) - \Phi([X, Y], Z) - \Phi\,([Z, X], Y) - \Phi([Y, Z], X)$$

dir. Bu denklemlerden ve

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

eşitliğinden sonucu elde ederiz.

$$2g((\nabla_X\phi)Y,Z) = 2g(\nabla_X(\phi Y) - \phi\nabla_X Y, Z)$$

$$= 2g(\nabla_X(\phi Y),Z) - 2g(\phi\nabla_X Y, Z)$$

$$= 2g(\nabla_X(\phi Y),Z) + 2g(\nabla_X Y, \phi Z)$$

$$= Xg(\phi Y, Z) + \phi Y g(X,Z) - Zg(X,\phi Y)$$

$$+ g([X,\phi Y],Z) + g([Z,X],\phi Y) - g([\phi Y, Z],X])$$

$$+ Xg(Y,\Phi Z) + Yg(X,\phi Z) - \phi Z g(X,Y)$$

$$+ g([X,Y],\phi Z) + g([\phi Z, X], Y) - g([Y,\phi Z],X)$$

$$\Rightarrow 2g((\nabla_X\phi)Y,Z) = -X\,\Phi(Y,Z) + \phi Y g(X,Z) - Z\,\Phi(X,Y)$$

$$+ g([X,\phi Y],Z) + \Phi([Z,X],Y) - g([\phi Y,Z],X)$$

$$+ X\Phi(Y,Z) + Y\Phi(X,Z) - \phi Z g(X,Y)$$

$$+ \Phi([X,Y],Z) + g([\phi Z,X],Y) - g([Y,\phi Z],X)$$

$$3d\Phi(X,\phi Y,\phi Z) = X\Phi(\phi Y,\phi Z) + \phi Y\Phi(\phi Z,X) + \phi Z\Phi(X,\phi Y)$$

$$- \Phi([X,\phi Y],\phi Z) - \Phi([\phi Z,X],\phi Y) - \Phi([\phi Y,\phi Z],X)$$

eşitliğinde

$$X\Phi(\phi Y,\phi Z) = X\Phi(Y,Z)$$

$$\phi Y\Phi(\phi Z,X) = \phi Y g(\phi Z,\phi X)$$

$$= \phi Y(g(Z,X) - \mathcal{E}\eta(Z)\eta(X))$$

$$= \phi Y(g(Z,X)) - \mathcal{E}\,.\,\phi Y(\eta(Z)\,\eta(X))$$

$$\phi Z\Phi(X,\phi Y) = \phi Z g(X,\phi^2 Y)$$

$$= \phi Z g(X, -Y + \eta(Y)\xi)$$

$$= -\phi Z g(X,Y) + \mathcal{E}\phi Z\eta(Y)\eta(X)$$

$$\Phi([X,\phi Y],\phi Z) = g([X,\phi Y],\phi^2 Z) = g([X,\phi Y], -Z + \eta(Z)\xi)$$

$$= -g([X,\phi Y],Z) + \mathcal{E}\,.\,\eta[X,\phi Y].\,\eta(Z)$$

$$\Phi([\phi Z,X],\phi Y) = g([\phi Z,X],\phi^2 Y) = g([\phi Z,X], -Y + \eta(Y)\xi)$$

$$= -g([\phi Z,X],Y) + \mathcal{E}\eta(Y)\eta[\phi Z,X]$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$3d\Phi(X,\phi Y,\phi Z) = X\Phi(Y,Z) + \phi Y g(Z,X) - \varepsilon\phi Y(\eta(Z)\eta(X)) + \varepsilon\phi Z(\eta(Y)\eta(X))$$
$$- \phi Z g(X,Y) + g([X,\phi Y],Z) - \varepsilon\eta[X,\phi Y]\eta(Z) + g([\phi Z,X],Y)$$
$$-\varepsilon\eta(Y)\eta[\phi Z,X] - \phi([\phi Y,\phi Z],X)$$

olur.

$$-3d\phi(X,Y,Z) = -X\Phi(Y,Z) + Y\Phi(X,Z) - Z\Phi(X,Y) + \Phi([X,Y],Z)$$
$$+ \Phi([Z,X],Y) + \Phi([Y,Z],X)$$

$$g\big(N^{(1)}(Y,Z),\phi X\big) = g(-[Y,Z] + [\phi Y,\phi Z] - \phi[\phi Y,Z] - \phi[Y,\phi Z] + Y(\eta(Z))\xi$$
$$-Z(\eta(Y)).\xi,\phi X)$$
$$= -g([Y,Z],\phi X) + g([\phi Y,\phi Z],\phi X) - g(\phi[\phi Y,Z],\phi X)$$
$$-g(\phi[Y,\phi Z],\phi X) + g(Y\eta(Z).\xi,\phi X) - g(Z(\eta(Y)))\xi,\phi X)$$

$$g\big(N^{(1)}(Y,Z),\phi X\big) = -\Phi([Y,Z],X) + \Phi([\phi Y,\phi Z],X) - g([\phi Y,Z],X)$$
$$+ \varepsilon.\eta[\phi Y,Z].\eta(X) - g([Y,\phi Z],X) + \varepsilon\eta[Y,\phi Z]\eta(X)$$

$$N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) = \big(\phi Y(\eta(Z)) - \phi Z(\eta(Y)) - \eta[\phi Y,Z] - \eta[Y,\phi Z]\big).\eta(X)$$
$$= \phi Y(\eta(Z))\eta(X) - \phi Z(\eta(Y)).\eta(X) - \eta[\phi Y,Z].\eta(X) - \eta[Y,\phi Z]\eta(X)$$

$$2d\eta(\phi Y,X)\,\eta(Z) = \phi Y(\eta(X))\eta(Z) - \eta[\phi Y,X].\eta(Z)$$

$$-2d\eta\,(\phi Z,X)\eta(Y) = -\phi Z(\eta(X))\eta(Y) + \eta[\phi Z,X].\eta(Y)$$

eşitliklerinden

$$3d\Phi(X,\phi Y,\phi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) + g\big(N^{(1)}(Y,Z),\phi X\big) + \varepsilon\, N^{(2)}(Y,Z)\,\eta(X)$$
$$+ 2\,\varepsilon\, d\eta(\phi Y,X)\eta(Z) - 2\,\varepsilon\, d\eta(\phi Z,X)\,\eta(Y)$$
$$= X\Phi(Y,Z) + \phi Y g\,(Z,X) - \varepsilon\,\phi Y\,\big(\eta(Z)\eta(X)\big) + \varepsilon\,\phi Z\big(\eta(Y)\eta(X)\big) - \phi Z g\,(X,Y)$$
$$+ g\,([X,\phi Y],Z) - \varepsilon\,\eta\,[X,\phi Y]\,\eta(Z) + g\,([\phi Z,X],Y) - \varepsilon\,\eta(Y)\eta\,[\phi Z,X]$$
$$- \Phi([\phi Y,\phi Z],X) - X\,\Phi(Y,Z) + Y\,\Phi(X,Z) - Z\Phi(X,Y) + \Phi([X,Y],Z)$$
$$+\Phi([Z,X],Y) + \Phi([Y,Z],X) + \Phi([\phi Y,\phi Z],X) - \Phi\,([Y,Z],X) - g\,([\phi Y,Z],X)$$
$$+\varepsilon\,\eta\,[\phi Y,Z]\eta(X) - g([Y,\phi Z],X) + \varepsilon\,\eta[Y,\phi Z]\eta(X) + \varepsilon.\,\phi Y\,(\eta(Z))\eta(X)$$
$$-\varepsilon\phi Z\,(\eta(Y))\eta(X) - \varepsilon\eta\,[\phi Y,Z]\eta(X) - \varepsilon\eta[Y,\phi Z]\eta(X) + \varepsilon\,\phi Y\,(\eta(X))\eta(Z)$$

$- \mathcal{E}.\eta\ [\phi Y, X]\ \eta(Z) - \mathcal{E}\phi Z(\eta(X))\eta(Y) + \mathcal{E}\eta[\phi Z, X]\eta(Y)$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte

$$\phi Y\ (\eta(Z))\eta(X) + \phi Y\ (\eta(X))\eta(Z) = \phi Y\ (\eta(X)\eta(Z))$$

ve

$$-\phi Z\ (\eta(Y))\eta(X)) - \phi Z\ (\eta(X))\eta(Y)) = -\phi Z(\eta(X)\eta(Y))$$

olduğundan da

$$3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g\ (N^{(1)}\ (Y, Z), \phi X) + \mathcal{E}.N^{(2)}\ (Y, Z)\ \eta(X)$$
$$+ 2\ \mathcal{E}d\eta\ (\phi Y, X)\ \eta(Z) - 2\mathcal{E}d\eta(\phi Z, X)\ \eta(Y)$$
$$= \phi Yg\ (Z, X) - \phi Zg\ (X, Y) + g\ ([X, \phi Y], Z) + g\ ([\phi Z, X], Y)$$
$$-\phi([\ \phi Y\ , \phi Z], X) + Y\ \Phi(X, Z) - Z\Phi(X, Y) + \Phi([X, Y], Z) + \Phi([Z, X], Y)$$
$$+ \Phi([Y, Z], X) + \Phi([\phi Y, \phi Z], X] - \Phi([Y, Z], X) - g([\phi Y, Z], X) - g([Y, \phi Z], X)$$
$$= \phi Yg\ (Z, X) - \phi Zg\ (X, Y) + g\ ([X, \phi Y], Z) + g\ ([\phi Z, X], Y) + Y\ \Phi(X, Z) -$$
$$Z\Phi(X, Y) + \Phi([X, Y], Z) + \Phi([Z, X], Y) - g([\phi Y, Z], X) - g\ ([Y, \phi Z], X)$$
$$= 2g((\nabla_X\phi)Y, Z)$$

olur.

Tanım 2.3.3. Eğer uyumlu g yarı-Riemann metriği

$$g(X, \phi Y) = (d\eta)(X, Y) \qquad (2.3.16)$$

eşitliğini sağlıyor ise η ya M üzerinde bir değme formdur denir. ξ Reeb vektör alanı,g birleştirilmiş yarı-metrik ve η değme form olmak üzere (M, ϕ, ξ, η, g) bir değme yarı-Riemann manifoldu olur. (M^{2n+1}, η, g) bir değme yarı-Riemann manifoldu olsun. ∇ ile M nin Levi-Civita konneksiyonunu gösterelim.

$$0 = (d\eta)(\xi, X) = -g(X, \phi\xi)$$

Yardımcı Teorem 2.3.3. M nin

$$\Phi = d\eta \text{ ve } N^{(2)} = 0$$

ile bir (ϕ, ξ, η, g) değme yarı- metrik yapısı için

$$2g((\nabla_X\phi)Y, Z) = g\ (N^{(1)}(Y, Z), \phi X) + 2\mathcal{E}d\eta\ (\phi Y, X)\ \eta(Z)$$

$$- 2\varepsilon d\eta\,(\phi Z, X)\,\eta(Y) \qquad (2.3.17)$$

dır ve özellikle de

$$\nabla_\xi \phi = 0 \qquad \text{dır.} \qquad (2.2.18)$$

İspat: (a) Söz konusu denklem aşikârdır.(Yardımcı Teorem 2.3.2 den)

(b) $\nabla_\xi \phi = 0$

olduğunu gösterelim.

$$N^{(2)}(X, Y) = \phi X(\eta(Y)) - \phi Y(\eta(X)) - \eta[\phi X, Y] - \eta[X, \phi Y] \qquad \text{ve}$$

$$N^{(2)} = 0$$

olduğundan

$$N^{(2)}\,(X, \xi) = \phi X\,\eta(\xi)) - \phi\xi\,(\eta(X)) - \eta[\phi X, \xi] - \eta[X, \phi\xi]$$

$$\Rightarrow 0 = \phi X(1) - \eta\,[\phi X, \xi]$$

$$0 = -\eta\,[\phi X, \xi]$$

elde edilir. Ayrıca

$$2\,d\eta(\phi X, \xi) = \phi X\big(\eta(\xi)\big) - \xi\,\big(\eta(\phi X)\big) - \eta[\phi X, \xi]$$

$$= \phi X(1) - \xi(0) - \eta[\phi X, \xi]$$

$$= -\,\eta[\phi X, \xi] = 0$$

Bulduğumuz bu değeri (a) daki denklemde yerine yazarsak

$$2g\,((\nabla_\xi \phi\,)X, Z) = g\,(N^{(1)}(X, Z), \phi\,\xi) + \varepsilon.\,2d\eta\,(\phi X, \xi)\eta(Z)$$

$$-\varepsilon.\,2d\eta\,(\phi Z, \xi)\,\eta(X) = 0$$

olduğunu görürüz. Bu da

$$(\,\forall\, X, Y, Z\,)\ , \qquad \nabla_\xi \phi = 0$$

olmasına karşılık gelir.

Yardımcı Teorem 2.3.3. ün hipotezi geçerli iken ξ nin integral eğrilerinin geodezikler olduğunu, yani

$$\nabla_\xi\, \xi = 0$$

olduğunu kolayca söyleyebiliriz.

Yardımcı Teorem 2.3.4. Değme yarı-metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan bir değme yarı-Riemann manifoldu M olsun. O zaman $N^{(2)}$ ve $N^{(4)}$ sıfıra eşittir. Bundan başka $N^{(3)}$ ün de sıfıra eşit olması için gerek ve yeter koşul ξ nin g ye göre bir Killing vektör alanı olmasıdır.

İspat: M yarı-Riemann manifoldu üzerinde bir değme yarı-metrik yapı (ϕ, ξ, η, g) olduğundan

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \quad \ldots\ldots \; *$$

dir. X yerine ϕX, Y yerine de ϕY alırsak

$$g(\phi X, \phi^2 Y) = d\eta(\phi X, \phi Y)$$

$$-g(\phi X, Y) + \eta(Y) g(\phi X, \xi) = d\eta(\phi X, \phi Y)$$

$$-g(\phi X, Y) = d\eta(\phi X, \phi Y)$$

olur. Ayrıca g ye göre ϕ anti-simetrik olduğundan

$$g(X, \phi Y) = d\eta(\phi X, \phi Y) \quad \ldots\ldots \; **$$

dir. * ve ** eşitliklerinden

$$d\eta(X, Y) = d\eta(\phi X, \phi Y)$$

olduğunu görürüz. Bu eşitlikte de X yerine ϕX alırsak

$$dn(\phi X, Y) = d\eta(\phi^2 X, \phi Y) = d\eta(-X + \eta(X)\xi, \phi Y) = -d\eta(X, \phi Y)$$

olacağından

$$d\eta(\phi X, Y) + d\eta(X, \phi Y) = 0$$

olur. η bir 1-form olduğundan

$$2d\eta(X, Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta[X, Y]$$

dir. Burada önce X yerine ϕX sonra da Y yerine ϕY alırsak

$$2d\eta(\phi X, Y) = \phi X(\eta(Y)) - Y(\eta(\phi X)) - \eta[\phi X, Y]$$

ve

$$2d\eta(X, \phi Y) = X(\eta(\phi Y)) - \phi Y(\eta(X)) - \eta[X, \phi Y]$$

toplanırsa

$$2[d\eta(\phi X, Y) + d\eta(X, \phi Y)] = 0$$

$$\phi X(\eta(Y)) - \phi Y(\eta(X)) - \eta[\phi X, Y] - \eta[X, \phi Y] = 0$$

yada

$$N^{(2)}(X,Y) = 0$$

olur. Diğer taraftan

$$0 = g(X, \phi\xi) = d\eta(X, \xi)$$

$$= \frac{1}{2}(X(\eta(\xi)) - \xi(\eta(X)) - \eta[X, \xi])$$

$$= \frac{1}{2}(-\xi(\eta(X)) - \eta[X, \xi])$$

dir.O halde

$$0 = \xi(\eta(X)) + \eta[X, \xi]$$

$$0 = \xi(\eta(X)) - \eta[\xi, X]$$

$$0 = (L_\xi\eta)(X) = N^{(4)}(X)$$

dir. Yani bir M değme yarı-Riemann manifoldu için

$$N^{(4)} = 0$$

dır. Bundan başka

$$\left(L_\zeta g\right)(X, \xi) = \xi\left(g(x, \xi)\right) - g([\xi, X], \xi) - g(X, [\xi, \xi])$$

$$= \xi(g(x, \xi)) - g([\xi, X], \xi)$$

$$= \mathcal{E}.\xi(\eta(X)) - \mathcal{E}.\eta[\xi, X]$$

$$= \mathcal{E}.(L_\xi\eta)(X)$$

$$= \mathcal{E}.N^{(4)}(X)$$

$$= 0$$

dır. Diğer taraftan

$$\left(L_\xi\, d\eta\right)(X, Y) = L_\xi\left(d\eta(X, Y)\right) - d\eta\left(L_\xi X, Y\right) - d\eta\left(X, L_\xi Y\right)$$

$$= \xi(g(X, \phi Y)) - g(L_\xi X, \phi Y) - g(X, \phi L_\xi Y)$$

$$\Rightarrow (L_\xi\, d\eta)(X, Y) = \xi(g(X, \phi Y)) - g(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi, \phi Y) - g(X, \phi(\nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi))$$

$$= \xi\,(g\,(X,\phi Y)) - g\,(\nabla_\xi X,\phi Y) + g(\nabla_X\,\xi,\phi Y) - g(X,\phi\nabla_\xi Y)) + g(X,\phi\nabla_Y\xi)$$

$$= \xi\,(g(X,\phi Y)) - g\,(\nabla_\xi X\,,\phi Y) - g(X,\phi\nabla_\xi Y\,)) + g(\nabla_X\,\xi,\phi Y) + g(X,\phi\nabla_Y\xi)$$

dır. Ayrıca

$$\xi\,(g(X,\phi Y)) - g\,(\nabla_\xi X,\phi Y) - g\,(X,\nabla_\xi(\phi Y)) = 0$$

ve

$$\nabla_\xi(\phi Y) = (\nabla_\xi\phi)Y + \phi\,\nabla_\xi Y$$

$$= 0 + \phi\,\nabla_\xi Y$$

$$= \phi\,\nabla_\xi Y$$

olduğundan

$$\xi\,(g(X,\phi Y)) - g(\nabla_\xi X,\phi Y) - g\,(X,\phi\,\nabla_\xi Y) = 0$$

dır. Böylece

$$(L_\zeta\, d\eta)\,(X,Y) = g\,(\nabla_X\,\xi,\phi Y) + g\,(X,\phi\,\nabla_Y\xi\,)$$

bulunur. **ξ** vektör alanı g yarı-Riemann metriğine göre Killing olduğundan

$$\nabla_X\,\xi = -\,\mathcal{E}.\,\phi X$$

ve

$$\phi\nabla_Y\,\xi = -\mathcal{E}\,\phi^2\,Y = \mathcal{E}(Y-\eta(Y)\xi)$$

olmalıdır. Böylece

$$(L_\zeta\, d\eta)\,(X,Y) = g\,(-\mathcal{E}\phi X,\phi Y) + g\,(X,\mathcal{E}(Y-\eta(Y)\xi))$$

$$= -\,\mathcal{E}.\,g\,(\phi X,\phi Y) + \mathcal{E}.\,g\,(X,Y-\eta(Y)\,\xi)$$

$$= \mathcal{E}.\,(-\,g\,(X,Y) + \mathcal{E}\eta(X)\eta(Y)) + \mathcal{E}.\,g\,(X,Y) - \mathcal{E}\eta\,(Y)\,g\,(X,\xi)$$

$$= -\,\mathcal{E}.\,g\,(X,Y) + \eta(X)\eta(Y) + \mathcal{E}.\,g\,(X,Y) - \eta\,(X)\,\eta(Y)$$

$$= 0$$

dır.

$$0 = (L_\xi\, d\eta)\,(X,\,Y) = \xi\,(d\eta\,(X,\,Y)) - d\eta\,(L_\xi X,Y) - d\eta\,(X,\,L_\xi Y)$$

$$0 = \xi\,\big(g(X,\phi Y)\big) - g\,\big(L_\xi\,X,\phi Y\big) - g\,\big(X,\phi\,L_\xi Y\big)$$

$$= \xi\,(g(X,\phi Y)) - g\,([\xi,X],\phi Y) - g\,(X,\phi[\xi,Y])$$

ve

$$(L_\xi g)\,(X,\phi Y) = \xi(g(X,\phi Y)) - g\,([\xi,X],\phi Y) - g(X,[\xi,\phi Y])$$

olduğundan

$$0 = (L_\xi\, d\eta)\,(X,Y) = (L_\xi\, g)\,(X,\phi Y) + g\,(X,[\xi,\phi Y]) - g(X,\phi[\xi,Y])$$

$$0 = (L_\xi g)\,(X,\phi Y) + g\,(X,[\xi,\phi Y] - \phi\,[\xi,Y])$$

$$0 = (L_\xi g)\,(X,\phi Y) + g\,(X,N^{(3)}(Y))$$

dir. Böylece

$$(L_\xi\, g)(X,\phi(Y)) = -g(X,N^{(3)}(Y))$$

elde edilir.

$$L_\xi\, g = 0 \iff g\,(X, N^{(3)}(Y)) = 0, \qquad (\forall X,Y\in \chi\,(M))$$

$$\iff N^{(3)}(Y) = 0,$$

$$\iff N^{(3)} = 0$$

Yardımcı Teorem 2.3.4. yardımıyla aşağıdaki karakterizasyon verilebilir.

Önerme 2.3.3. M bir değme yarı-Riemann manifoldu olsun. O zaman M nin bir K- değme manifold olması için gerek ve yeter koşul $N^{(3)} = 0$ olmasıdır.

$$h = \frac{1}{2} L_\xi \phi = \frac{1}{2} N^{(3)} \qquad (2.3.19)$$

tensörü, değme yarı-metrik manifold geometrisinde önemli bir rol oynar. Yardımcı Teorem 2.3.3 de Y yerine ξ , Z yerine de X alırsak

$$2g((\nabla_X\phi)\xi,X) = g\,(N^{(1)}(\xi,X),\phi X) + 2\varepsilon d\eta\,(\phi\xi,X)\,\eta(X) - 2\varepsilon d\eta\,(\phi X,X)\,\eta(\xi)$$

$$2g(\nabla_X(\phi\xi) - \phi(\nabla_X\xi),X) = g\,(N^{(1)}(\xi,X),\phi X) - 2\varepsilon g\,(\phi X,\phi X)$$

$$-2g(\phi(\nabla_X\xi),X) = g\,(-[\xi,X] - \phi[\xi,\phi X] + \xi(\eta(X)).\xi\,,\phi X) - 2\varepsilon g\,(\phi X,\phi X)$$

$$2g(\nabla_X\xi,\phi X) = g([X,\xi] - \phi[\xi,\phi X] + \xi(\eta(X))\xi - 2\varepsilon\,\phi X,\phi X)$$

$$\nabla_X\xi = \frac{1}{2}\,([X,\xi] - \phi[\xi,\Phi x] + \xi(\eta(X))\xi) - \varepsilon\phi X)$$

$$(L_\xi\,\phi)X = [\xi,\phi X] + \phi[X,\xi] = N^{(3)}(X) = 2h(X)$$

$$2\phi h = \phi\,[\xi, \phi X] + \phi^2\,[X, \xi]$$

$$= \phi\,[\xi, \phi X] - [X, \xi] + \eta([X, \xi]).\,\xi$$

$$\nabla_X \xi = \frac{1}{2}\,(-2\phi h X) - \mathcal{E}\phi X$$

$$\nabla_X \xi = -\,\mathcal{E}\phi X - \phi h X \tag{2.3.20}$$

buluruz. Riemann durumunda h tensör self-adjoint olur,

$h\phi = -\phi h$

ve

$h\,\xi = trh = 0$ dır.

Üstelik $\mathcal{T} = L_\xi\, g$ olarak

$$\mathcal{T}(X,Y) = 2g(X, h\phi Y) \tag{2.3.21}$$

yazabiliriz.

Her bir (M^{2n+1}, η, g) (h.h.d) yarı-metrik manifoldu ϕ- bazı olarak adlandırılan özel bir çeşit lokal yarı-ortanormal baza sahiptir. Böylece bir baz $\{\xi, e_1, \dots \dots, e_n, \phi e_1, \dots \phi e_n\}$ formundadır. Eğer e_i $(1 \leq i \leq n)$ space-like vektör ise ϕe_i $(1 \leq i \leq n)$ de space- like; $e_i (1 \leq i \leq n)$ time- like vektör ise $\phi\, e_i (1 \leq i \leq n)$ de time-like vektördür. Özellikle bir h.h.d yapı ile birleştirilmiş yarı-Riemann metrik (2p+1, 2n-2p) ya da (2p, 2n-2p+1) işaretlidir. Bunu belirleyen ξ vektör alanının space - like ya da time- like olmasıdır.

Önerme 2.3.4. $(M^{2n+1}, \phi, \xi\, \eta, g)$ değme yarı-metrik manifoldunda div $\xi = 0$, div$\eta = 0$ dır.

İspat: M^{2n+1} de lokal ϕ- bazı $\{\xi, e_1, \dots \dots, e_n, \phi e_1, \dots \phi e_n\}$ olsun.

$$\text{div}\, \xi = tr\, \nabla_\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i\, g\big(\nabla_{e_i} \xi, e_i\big) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i\, g\big(\nabla_{\phi e_i} \xi, \phi_{e_i}\big)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i\, g(-\mathcal{E}\phi e_i) - \phi h e_i, e_i) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i\, g(-\mathcal{E}(\phi^2 e_i) - \phi h(\phi e_i), \phi e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i[(-\mathcal{E}) g(\phi e_i, e_i) - \mathcal{E}_i g(\phi h e_i, e_i)] + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i\, [\mathcal{E}.\, g(e_i, \phi e_i)$$

$$- g(\phi h \phi e_i, \phi e_i)]$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i\, g(\phi h e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i g(\phi h \phi e_i\,, \phi e_i)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i\, g(\phi h e_i, e_i) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i g(\phi h e_i\,, e_i) = 0$$

Ayrıca

$$\mathrm{div}\eta = -\mathrm{tr}\nabla\eta = -\mathcal{E}.\,\mathrm{div}\xi = 0$$

dır.

2.4. SASAKIAN YARI-METRİK YAPILAR

Tanım 2.4.1. (M, η, g) değme yarı-metrik manifoldu

Normal ise $([\phi,\phi] + 2d\eta\otimes\xi = 0)$ Sasakian'dır. h=0 ise yani ξ karakteristik vektör alanı g'ye göre Killing vektör alanı ise K-değmedir.

Teorem2.4.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ h.h.d. yarı-metrik manifoldunun Sasakian olması için gerek ve yeter koşul,

$$(\nabla_X\phi)Y = g(X,Y)\xi - \mathcal{E}.\,\eta(Y)X \tag{2.3.22}$$

olmasıdır.

İspat: M Sasakian olsun. O zaman $\mathbf{N}^{(1)}$= 0 dır.

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big) = g\big(N^{(1)}(Y,Z),\phi X\big) + 2\mathcal{E}d\eta(\phi Y,X)\eta(Z) - 2\mathcal{E}d\eta(\phi Z,X)\eta(Y)$$

$$= 2\mathcal{E}g(\phi Y,\phi X)\eta(Z) - 2\mathcal{E}g(\phi Z,\phi X)\eta(Y)$$

$$= 2\mathcal{E}\big(g(Y,X) - \mathcal{E}\eta(Y)\eta(X)\big)\eta(Z) - 2\mathcal{E}\big(g(Z,X) - \mathcal{E}\eta(Z)\eta(X)\big)\eta(Y)$$

$$= 2\mathcal{E}g(X,Y)\eta(Z) - 2\eta(Y)\eta(X)\eta(Z) - 2\mathcal{E}g(Z,X)\eta(Y) + 2\eta(Z)\eta(X)\eta(Y)$$

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big) = 2\mathcal{E}g(X,Y)\big(\mathcal{E}g(\xi,Z)\big) - 2\mathcal{E}g(\eta(Y)X,Z)$$

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big) = 2g(X,Y)g(\xi,Z) - 2\mathcal{E}g(\eta(Y)X,Z)$$

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big) = 2g(g(X,Y)\xi,Z) - 2g(\mathcal{E}\eta(Y)X,Z)$$

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big) = 2g(g(X,Y)\xi - \mathcal{E}\eta(Y)X,Z)$$

$$2g\big((\nabla_X\phi)Y,Z\big) = 2g(g(X,Y)\xi - \mathcal{E}\eta(Y)X,Z)$$

Buradan ∀ $Z \in \chi(M)$ için doğru olduğundan,

$$(\nabla_X\phi)Y = g(X,Y)\xi - \mathcal{E}\eta(Y)X$$

Bulunur. Y yerini ξ alırsak;

$$(\nabla_X\phi)\xi = g(X,\xi)\xi - \mathcal{E}\eta(\xi)X$$

$$\nabla_X(\phi\xi) - \phi(\nabla_X\xi) = \mathcal{E}.\eta(X)\xi - \mathcal{E}.X = \mathcal{E}(-X + \eta(X)\xi)$$

$$-\phi^2\,(\nabla_X\xi) = \mathcal{E}(-\phi X)$$

$$\nabla_X\xi = -\mathcal{E}\phi X$$

böylece M Sasakiandır.

$$2(d\eta)(X,Y) = \mathcal{E}.g(\nabla_X\xi, Y) - \mathcal{E}g(\nabla_Y\xi, X)$$

$$= -g(\phi X, Y) + g(\phi Y, X)$$

$$= 2g(X, \phi Y)$$

$$[\phi,\phi](X,Y) = N_\phi(X,Y) = \phi^2[X,Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y]$$

$$= \phi(\phi\nabla_X Y - \phi\nabla_Y X) + \nabla_{\phi X}\phi Y - \nabla_{\phi Y}\phi X$$

$$-\phi\nabla_{\phi X}Y + \phi\nabla_Y\phi X - \phi\nabla_X\phi Y + \phi\nabla_{\phi Y}X$$

$$= -\phi[g(X,Y)\xi - \mathcal{E}\eta(Y)X] + \phi[g(Y,X)\xi - \mathcal{E}\eta(X)Y]$$

$$+g(\phi X, Y)\xi - \mathcal{E}\eta(Y)\phi X - g(\phi Y, X)\xi + \mathcal{E}\eta(X)\phi Y$$

$$= 2g(\phi X, Y)\xi = -2(d\eta)(X,Y)\xi$$

$$N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0$$

dır.

Sonuç.2.4: Bir Sasakian yarı-metrik manifold K-değmedir.

$$(\nabla_X\phi)\xi = g(X,\xi)\xi - \mathcal{E}.\eta(\xi)X$$

$$\nabla_X(\phi\xi) - \phi(\nabla_X\xi) = \mathcal{E}.\eta(X)\xi - \mathcal{E}.X - \phi(\nabla_X\xi) = \mathcal{E}(-X + \eta(X)\xi) = \mathcal{E}.\phi^2 X$$

$$\nabla_X\xi = -\mathcal{E}\phi X$$

2.5. DEĞME YARI-METRİK MANİFOLDUN EĞRİLİK TENSÖRÜ

(M^{2n+1}, η, g) değme yarı-metrik manifoldunun eğrilik tensörünü R ile gösterelim.

$$R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$$

dir.

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

$$R(X,\xi)\xi = \nabla_{[X,\xi]}\xi - [\nabla_X, \nabla_\xi]\xi$$

$$= \mathcal{E}.\phi[X,\xi] - \phi h[X,\xi] - \nabla_X(\nabla_\xi \xi) + \nabla_\xi(\nabla_X \xi)$$

$$= -\mathcal{E}.\phi(\nabla_X \xi - \nabla_\xi X) - \phi h(\nabla_X \xi - \nabla_\xi X) - \nabla_X 0 + \nabla_\xi(-\mathcal{E}\phi X - \phi h X)$$

$$= -\mathcal{E}\phi(\nabla_X \xi) + \mathcal{E}.\phi(\nabla_\xi X) - \phi h(\nabla_X \xi) + \phi h(\nabla_\xi X) - \mathcal{E}.\nabla_\xi(\phi X) - \nabla_\xi(\phi h X)$$

$$= -\mathcal{E}\phi(\nabla_X \xi) - \phi h(\nabla_X \xi) + \mathcal{E}.\{\, \phi(\nabla_\xi X) - \nabla_\xi(\phi X) \,\} + \phi h(\nabla_\xi X) - \nabla_\xi(\phi h X)$$

$$= -\phi\left((\nabla_\xi h)(X)\right) - \mathcal{E}.\phi\nabla_X \xi - \phi h \nabla_X \xi$$

$$= -\phi\left((\nabla_\xi h)(X)\right) - \mathcal{E}.\phi(-\mathcal{E}\phi X - \phi h X) - \phi h(-\mathcal{E}\phi X - \phi h X)$$

$$= -\phi\left((\nabla_\xi h)(X)\right) + \mathcal{E}^2\phi^2 X + \mathcal{E}\phi^2 h X - \mathcal{E}\phi^2 h X + h^2 X$$

$$R(X,\xi)\xi = -\phi\left((\nabla_\xi h)(X)\right) + \phi^2 X + h^2 X$$

yani

$$l := \mathrm{I}R(.,\xi)\xi = -\phi(\nabla_\xi h) + \phi^2 + h^2 \qquad (2.3.23)$$

$$\phi\, l\, X = (\nabla_\xi h)X - \phi X + h^2 \phi X$$

$$\phi\, l\, \phi X = \left((\nabla_\xi h)\phi\right)X - \phi^2 X - h^2 X$$

$$l - \phi\, l\, \phi = 2(\phi^2 + h^2) \qquad (2.3.24)$$

2.6. DEĞME LORENTZ MANİFOLDLARI

Tanım 2.6.1: (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısıyla (2n+1)-boyutlu bir manifold M olsun. M üzerinde bir g Lorentz metriği

$$\eta(X) = -g(\xi, X) \qquad (2.6.1)$$

ve

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y) \qquad (2.6.2)$$

olacak şekilde vardır.

Sonuç 2.6.1: M h.h.d manifoldu üzerindeki (2.6.1) ve (2.6.2) yi sağlayan g Lorentz metriği için

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y)$$

dir, yani ϕ anti-simetrik olacak şekilde M üzerinde bir g Lorentz metriği vardır.

Tanım 2.6.2: (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısıyla birleştirilmiş bir Lorentz metriği g olmak üzere M de (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne bir h.h.d. Lorentzian metrik yapı ve bu (ϕ, ξ, η, g) h.h.d. Lorentzian metrik yapı ile birlikte M' ye de bir hemen hemen değme Lorentz manifoldu denir. Özel olarak $g(\xi, \xi) = -1$ dir, yani ξ karakteristik vektör alanı time-like'dır.

Tanım 2.6.3: (ϕ, ξ, η) h.h.d. yapısıyla birleştirilmiş g Lorentz metriği

$$g(X, \phi Y) = (d\eta)(X, Y)$$

eşitliğini sağlıyorsa η'ya M üzerinde bir değme formdur denir. ξ karakteristik vektör alanı, η değme form ve g, (ϕ, ξ, η) değme yapısıyla birleştirilmiş Lorentz metriği olmak üzere (M, ϕ, ξ, η, g) bir değme Lorentz manifoldu olur.

(M^{2n+1}, η, g) bir değme Lorentz manifoldu olsun. ∇ ile M'nin Levi-Civita konneksiyonunu gösterelim.

$$(d\eta)(\xi, X) = -g(X, \phi\xi) = 0$$

dır.

Tanım 2.6.4. Değme Lorentzian metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan (2n+1)-boyutlu bir değme Lorentz manifoldu M olsun. Eğer ξ time-like karakteristik vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerindeki değme Lorentzian yapısı bir K-değme Lorentzian yapı ve M'ye de bu yapı ile birlikte K-değme Lorentz manifoldu denir.

Önerme 2.6.1. M bir Lorentz manifoldu olsun. O zaman M nin bir K-değme manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$\nabla_X \xi = \phi X$$

olmasıdır.

İspat: Önerme 2.3.2 de ε = -1 alrsak sonucu buluruz.

Yardımcı Teorem 2.6.1: M'nin bir (ϕ, ξ, η, g) h.h.d. Lorentzian metrik yapısı için

$$2g\big((\nabla_X \phi)Y, Z\big) = 3d\phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\phi(X, Y, Z) + g\big(N^{(1)}(Y, Z), \phi X\big)$$
$$-N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) - 2d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) + 2d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \qquad (2.6.4)$$

dir. $(\forall\, X, Y, Z$ için$)$

$$\Phi(X,Y) = g(X,\phi Y) \tag{2.6.5}$$

alınmıştır.

İspat: Yardımcı Teorem 2.3.2 de $\mathcal{E}$ = -1 alarak soncu buluruz.

Yardımcı Teorem 2.6.2: M nin $\Phi = d\eta$ ve $N^{(2)} = 0$ ile bir (ϕ,ξ,η,g) değme Lorentzian metrik yapısı için

(a) $$2g((\nabla_X\phi)Y,Z) = g(N^{(1)}(Y,Z),\phi X) - 2d\eta(\phi Y,X)\eta(Z) + 2d\eta(\phi Z,X)\eta(Y) \tag{2.6.6}$$

dir ve özellikle de

(b) $\nabla_\xi\phi = 0$ dir. (2.6.7)

İspat: Yardımcı Teorem 2.3.3 de $\mathcal{E}$ = -1 alırsak sonucu buluruz.

Yardımcı Teorem 2.6.3. Değme Lorentzian metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) olan bir değme Lorentz manifoldu M olsun. O zaman $N^{(2)}$ ve $N^{(4)}$ sıfıra eşittir. Bundan başka $N^{(3)}$ün de sıfıra eşit olması için gerek ve yeter koşul ξ' nin g' ye göre bir Killing vektör alanı olmasıdır.

İspat: M Lorentz maifoldu üzerinde bir değme Lorentzian metrik yapı (ϕ,ξ,η,g) olduğundan $g(X,\phi Y) = d\eta(X,Y)$ dir. X yerine ϕX, Y yerine ϕY alırsak;

$$g(\phi X,\phi^2 Y) = d\eta(\phi X,\phi Y)$$

$$g(\phi X,-Y+\eta(Y)\xi) = d\eta(\phi X,\phi Y)$$

$$-g(\phi X,Y)+\eta(Y)g(\phi X,\xi) = d\eta(\phi X,\phi Y)$$

$$-g(\phi X,Y)+\eta(Y)(-\eta(\phi X)) = d\eta(\phi X,\phi Y)$$

$$-g(\phi X,Y) = d\eta(\phi X,\phi Y)$$

$$g(X,\phi Y) = d\eta(\phi X,\phi Y)$$

$$d\eta(X,Y) = d\eta(\phi X,\phi Y) \tag{2.6.8}$$

olur. X yerine ϕX alırsak (2.6.8)

den

$$d\eta(\phi X,Y) = d\eta(\phi^2 X,\phi Y)$$

$$= d\eta(-X+\eta(X)\xi,\phi Y)$$

$$= -d\eta(X,\phi Y)+\eta(X)d\eta(\xi,\phi Y)$$

$$= -d\eta(X, \phi Y) - \eta(X)g(\phi\xi, Y)$$

$$= -d\eta(X, \phi Y)$$

$$d\eta(\phi X, Y) + d\eta(X, \phi Y) = 0$$

olur. η , 1-form olduğundan,

$$2d\eta(\phi X, Y) = \phi X\big(\eta(Y)\big) - Y\big(\eta(\phi X)\big) - \eta[\phi X, Y]$$

ve

$$2d\eta(X, \phi Y) = X\big(\eta(\phi Y)\big) - \phi Y\big(\eta(X)\big) - \eta[X, \phi Y]$$

dir. Toplam alarak,

$$2[d\eta(\phi X, Y) + d\eta(X, \phi Y)] = 0$$

$$\phi X(\eta(Y)) - \phi Y\big(\eta(X)\big) - \eta[\phi X, Y] - \eta[X, \phi Y] = 0$$

ya da

$$N^{(2)}(X, Y) = 0$$

olur. Diğer taraftan

$$0 = g(X, \phi\xi) = d\eta(X, \xi)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(X\big(\eta(\xi)\big) - \xi\big(\eta(X)\big) - \eta[X, \xi]\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(-\xi\big(\eta(X)\big) - \eta[X, \xi]\Big)$$

dir. O halde

$$\xi\big(\eta(x)\big) + \eta[X, \xi] = 0$$

$$\big(L_\xi \eta\big)(X) = N^{(4)}(X) = 0$$

dır. Yani bir M değme Lorentz manifoldu için $N^{(4)} = 0$ olur. Bundan başka

$$\big(L_\xi g\big)(X, \xi) = \xi\big(g(X, \xi)\big) - g([\xi, X], \xi) - g(X, [\xi, \xi])$$

$$= -\xi\big(\eta(X)\big) + \eta[\xi, X]$$

$$= -\xi\big(\eta(X)\big) - \eta[X, \xi]$$

$$= -\big(L_\xi \eta\big)(X)$$

$$= -N^{(4)}(X)$$

$$= 0$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
(L_\xi d\eta)(X,Y) &= L_\xi\big(d\eta(X,Y)\big) - d\eta\big(L_\xi X, Y\big) - d\eta\big(X, L_\xi Y\big) \\
&= \xi\big(g(X,\phi Y)\big) - g\big(L_\xi X, \phi Y\big) - g\big(X, \phi L_\xi Y\big) \\
&= \xi\big(g(X,\phi Y)\big) - g\big(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi, \phi Y\big) \\
&\quad -g\left(X, \phi\big(\nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi\big)\right) \\
&= \xi\big(g(X,\phi Y)\big) - g\big(\nabla_\xi X, \phi Y\big) + g(\nabla_X \xi, \phi Y) \\
&\quad -g\big(X, \phi\nabla_\xi Y\big) + g(X, \nabla_Y \xi)
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\xi\big(g(X,\phi Y)\big) - g\big(\nabla_\xi X, \phi Y\big) - g\left(X, \nabla_\xi(\phi Y)\right) = 0$$

ve

$$\nabla_\xi(\phi Y) = \big(\nabla_\xi \phi\big)Y + \phi\nabla_\xi Y$$

$$\nabla_\xi(\phi Y) = \phi\nabla_\xi Y$$

olduğundan

$$\xi\big(g(X,\phi Y)\big) - g\big(\nabla_\xi X, \phi Y\big) - g\big(X, \phi\nabla_\xi Y\big) = 0$$

olur. Böylece

$$(L_\xi d\eta)(X,Y) = g(\nabla_X \xi, \Phi Y) + g(X, \phi\nabla_Y \xi)$$

bulunur. ξ vektör alanı g Lorentz metriğine göre Killing olduğundan

$$\nabla_X \xi = \phi X \quad \text{ve} \quad \phi\nabla_Y \xi = \phi(\phi Y) = \phi^2 Y = -Y + \eta(Y)\xi$$

olmalıdır. Böylece

$$\begin{aligned}
\big(L_\xi d\eta\big)(X,Y) &= g(\phi X, \phi Y) + g(X, -Y + \eta(Y)\xi) \\
&= g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y) - g(X,Y) + \eta(Y)g(X,\xi) \\
&= \eta(X)\eta(Y) - \eta(X)\eta(Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır.

$$0 = \left(L_\xi d\eta\right)(X,Y) = \xi\left(d\eta(X,Y)\right) - d\eta\left(L_\xi X, Y\right) - d\eta\left(X, L_\xi Y\right)$$

$$0 = \xi\left(g(X,\phi Y)\right) - g\left(L_\xi X, \phi Y\right) - g\left(X, \phi L_\xi Y\right)$$

$$0 = \xi\left(g(X,\phi Y)\right) - g([\xi,X],\phi Y) - g(X,\phi[\xi,Y])$$

ve

$$\left(L_\xi g\right)(X,\phi Y) = \xi\left(g(X,\phi Y)\right) - g([\xi,X],\phi Y) - g(X,[\xi,\phi Y])$$

olduğundan

$$0 = \left(L_\xi d\eta\right)(X,Y) = \left(L_\xi g\right)(X,\phi Y) + g(X,[\xi,\phi Y]) - g(X,\phi[\xi,Y])$$

$$0 = \left(L_\xi g\right)(X,\phi Y) + g(X,[\xi,\phi Y] - \phi[\xi,Y])$$

$$0 = \left(L_\xi g\right)(X,\phi Y) + g(X,N^{(3)}(Y))$$

$$\left(L_\xi g\right)(X,\phi Y) = -g\left(X, N^{(3)}(Y)\right)$$

elde edilir.

$$L_\xi g = 0 \Leftrightarrow g\left(X, N^{(3)}(Y)\right) = 0 \qquad \left(\forall\, X, Y \in \chi(M)\right)$$

$$\Leftrightarrow N^{(3)}(Y) = 0$$

$$\Leftrightarrow N^{(3)} = 0$$

Yardımcı Teorem 2.6.3 yardımıyla aşağıdaki karakterizasyon verilebilir.

Önerme 2.6.2. M bir değme Lorentz manifoldu olsun. O zaman M nin bir K-değme manifold olması için gerek ve yeter koşul $N^{(3)} = 0$ olmasıdır.

$$h = \frac{1}{2} L_\xi \phi = \frac{1}{2} N^{(3)}$$

tensörü, (2.3.19) da verilmiştir. Değme Lorentz manifold geometrisinde de aynı tensörü kullanarak

$$\nabla_X \xi = \phi X - \phi h X$$

olduğunu görebiriz.

Yardımcı Teorem 2.6.2 de Y yerine ξ , Z yerini X alırsak

$$2g\left((\nabla_X \phi)\xi, X\right) = g\left(N^{(1)}(\xi,X), \phi X\right) - 2d\eta(\phi\xi, X)\eta(X)$$

$$+2d\eta(\phi X, X)\eta(\xi)$$

$$2g((\nabla_X(\phi\xi) - \phi(\nabla_X\xi), X) = g\big(N^{(1)}(\xi, X), \phi X\big) + 2g(\phi X, \phi X)$$

$$-2g(\phi(\nabla_X\xi), X) = g\big([X,\xi] - \phi[\xi, \phi X] + \xi\big(\eta(X)\big)\xi, \phi X\big) + 2g(\phi X, \phi X)$$

$$2g(\nabla_X\xi, \phi X) = g([X,\xi] - \phi[\xi, \phi X] + \xi\big(\eta(X)\big)\xi + 2\phi X, \phi X)$$

$$\nabla_X\xi = \frac{1}{2}\big([X,\xi] - \phi[\xi, \phi X] + \xi\big(\eta(X)\big)\xi\big) + \phi X$$

burada

$$\big(L_\xi\phi\big)X = [\xi, \phi X] + \phi[X,\xi] = N^{(3)}(X) = 2h(X)$$

$$2\phi h(X) = \phi[\xi, \phi X] + \phi^2[X,\xi]$$

$$= \phi[\xi, \phi X] - [X,\xi] + \xi\big(\eta(X)\big)\xi$$

olduğundan

$$\nabla_X\xi = \frac{1}{2}(-2\phi hX) + \phi X$$

ya da

$$\nabla_X\xi = \phi X - \phi hX \qquad (2.6.11)$$

buluruz. Riemann durumda h tensörü self-adjoint olup $h\phi = -\phi h$ ve $h\xi = trh = 0$ dır. Üstelik $\mathcal{T} = L_\xi g$ alarak

$$\mathcal{T}(X,Y) = 2g(X, h\phi Y) \qquad (2.6.12)$$

yazabiliriz.

Her bir (M^{2n+1}, η, g) h.h.d. Lorentz Manifoldu ϕ bazı olarak adlandırılan özel bir çeşit lokal yarı-ortanormal baza sahiptir. Böyle bir baz $\{\xi, e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n\}$ formundadır. Sadece ξ vektörü time-like, diğerleri space-like ‘dır.

$$\forall X \in \chi(M), \quad X \in Sp\,\{\xi, e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n\}$$

$$X = x_1\xi + x_2 e_1 + \cdots + x_n e_n + x_{n+1}\phi e_1 + \cdots + x_{2n+1}\phi e_n$$

$$g(X,X) = x_1^2 g(\xi,\xi) + x_2^2 g(e_1, e_1) + \cdots + x_n^2 g(e_n, e_n) + x_{n+1}^2 g(\phi e_1, \phi e_1)$$

$$+ \cdots + x_{2n+1}^2 g(\phi e_n, \phi e_n)$$

$$g(X,X) = -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{2n+1}^2$$

Önerme 2.6.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ değme Lorentz manifoldunda $\mathrm{div}\xi = 0, \mathrm{div}\eta = 0$ dır.

İspat: M^{2n+1} de lokal ϕ bazı $\{\xi, e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n\}$ olsun.

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\xi = \mathrm{tr}\nabla\xi &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}\xi, e_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\phi e_i}\xi, \phi e_i) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} g(\phi e_i - \phi h e_i, e_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\phi^2 e_i - \phi h(\phi e_i, \phi e_i) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} g(\phi e_i, e_i) - g(\phi h e_i, e_i) + \sum_{i=1}^{n} g(-e_i - \phi h(\phi e_i), \phi e_i) \\
&= \textstyle -\sum_{i=1}^{n} g(\phi h e_i, e_i) + \sum_{i=1}^{n} -g(e_i, \phi e_i) - g(\phi h(\phi e_i), \phi e_i) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} g(h e_i, \phi e_i) + \sum_{i=1}^{n} g(h\phi^2 e_i, \phi e_i) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} g(h e_i, \phi e_i) - \sum_{i=1}^{n} g(h e_i, \phi e_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\mathrm{div}\eta = -\mathrm{tr}\nabla\eta = \mathrm{div}\xi = 0$$

Tanım 2.6.5. (M, η, g) değme Lorentz manifoldu

(i) Normal ise yani $[\phi, \phi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$ ise Sasakian'dır.

(ii) h=0 ise yani ξ karakteristik vektör alanı g Lorentz metriğine göre Killing vektör alanı ise K-değmedir.

Teorem 2.6.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ h.h.d. Lorentz manifoldunun Sasakian olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X\phi)Y = g(X, Y)\xi + \eta(Y)X$$

olmasıdır.

İspat: M Sasakian manifoldu olsun. O zaman $N^{(1)} = 0$ dır.

(2.6.6) dan

$$\begin{aligned}
2g\big((\nabla_X\phi)Y, Z\big) &= -2d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) + 2d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \\
&= -2g(\phi Y, \phi X)\eta(Z) + 2g(\phi Z, \phi X)\eta(Y) \\
&= -2\big(g(Y, X) + \eta(Y)\eta(X)\big)\eta(Z) + 2(g(Z, X) \\
&\quad + \eta(Z)\eta(X))\eta(Y) \\
&= -2g(X, Y)\eta(Z) - 2\eta(Y)\eta(X)\eta(Z) + 2g(X, Z)\eta(Y) \\
&\quad + 2\eta(Z)\eta(X)\eta(Y)
\end{aligned}$$

$$= +2g(X,Y)g(\xi,Z) + 2g(X,Z)\eta(Y)$$

$$= 2g(g(X,Y)\xi,Z) + 2g(\eta(Y)X,Z)$$

$$= 2g(g(X,Y)\xi + \eta(Y)X,Z)$$

$$(\nabla_X\phi)Y = g(X,Y)\xi + \eta(Y)X$$

olur.

$(\nabla_X\phi)Y = g(X,Y)\xi + \eta(Y)X$ olsun.

Y yerine ξ alırsak

$$(\nabla_X\phi)\xi = g(X,\xi)\xi + \eta(\xi)X$$

$$\nabla_X(\phi\xi) - \phi(\nabla_X\xi) = -\eta(X)\xi + X$$

$$-\phi(\nabla_X\xi) = -\eta(X)\xi + X$$

$$-\phi^2(\nabla_X\xi) = \phi(-\eta(X)\xi + X)$$

$$\nabla_X\xi = -\eta(X)\phi\xi + \phi X$$

$$\nabla_X\xi = \phi X,$$

böylece M, Sasakiandır.

$$2(d\eta)(X,Y) = g(\nabla_Y\xi,X) - g(\nabla_X\xi,Y)$$

$$= g(\phi Y,X) - g(\phi X,Y)$$

$$= g(\phi Y,X) + g(X,\phi Y)$$

$$= 2g(X,\phi Y)$$

$$[\phi,\phi](X,Y) = N_\phi(X,Y) = \phi^2[X,Y] + [\phi X,\phi Y] - \phi[\phi X,Y] - \phi[X,\phi Y]$$

$$= \phi(\phi\nabla_X Y - \phi\nabla_Y X) + \nabla_{\phi X}\phi Y - \nabla_{\phi Y}\phi X - \phi\nabla_{\phi X}Y + \phi\nabla_Y\phi X$$

$$-\phi\nabla_X\phi Y + \phi\nabla_{\phi Y}X$$

$$= -\phi(g(X,Y)\xi + \eta(Y)X) + \phi(g(Y,X)\xi + \eta(X)Y) + g(\phi X,Y)\xi$$

$$+\eta(Y)\phi X - g(\phi Y,X)\xi - \eta(X)\phi Y$$

$$= 2g(\Phi x,Y)\xi = -2(d\eta)(X,Y)\xi$$

olup

$N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0$ dır.

Sonuç 2.6.2. Bir Sasakian Lorentz manifoldu K-değmedir.

$$(\nabla_X \phi)\xi = g(X, \xi)\xi + \eta(\xi)X$$

$$\nabla_X(\phi\xi) - \phi(\nabla_X \xi) = -\eta(X)\xi + X$$

$$-\phi(\nabla_X \xi) = -\phi^2 X$$

$$\nabla_X \xi = \phi X$$

(M^{2n+1}, η, g) değme Lorentz manifoldunun eğrilik tensörünü R ile gösterelim.

$$R(X, Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$$

dir.

$$\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$$

için,

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

$$\begin{aligned}
R(X, \xi)\xi &= \nabla_{[X,\xi]}\xi - \left[\nabla_X, \nabla_\xi\right]\xi \\
&= \phi[X, \xi] - \phi h[X, \xi] - \nabla_X\left(\nabla_\xi \xi\right) + \nabla_\xi(\nabla_X \xi) \\
&= \phi\left(\nabla_X \xi - \nabla_\xi X\right) - \phi h\left(\nabla_X \xi - \nabla_\xi X\right) - \nabla_X(0) + \nabla_\xi(\phi X - \phi h X) \\
&= \phi(\nabla_X \xi) - \phi\left(\nabla_\xi X\right) - \phi h(\nabla_X \xi) + \phi h\left(\nabla_\xi X\right) + \nabla_\xi(\phi X) - \nabla_\xi(\phi h X) \\
&= \phi(\nabla_X \xi) - \phi h(\nabla_X \xi) + \left(\nabla_\xi(\phi X) - \phi\left(\nabla_\xi X\right)\right) + \phi h\left(\nabla_\xi X\right) - \nabla_\xi(\phi h X) \\
&= \phi(\phi X - \phi h X) - \phi h(\phi X - \phi h X) + \left(\nabla_\xi \phi\right)X - \phi\left(\left(\nabla_\xi h\right)(X)\right) \\
&= -\phi\left(\left(\nabla_\xi h\right)(X)\right) + \phi^2 X - \phi^2 h X - \phi h(\phi X) + \phi h(\phi h X) \\
&= -\phi\left(\left(\nabla_\xi h\right)(X)\right) + \phi^2 X - \phi^2 h X + \phi^2 h X + h^2 X
\end{aligned}$$

$$R(X, \xi)\xi = -\phi\left(\left(\nabla_\xi h\right)(X)\right) + \phi^2 X + h^2 X$$

yani

$$l := lR(.\,, \xi)\xi = -\phi\left(\nabla_\xi h\right) + \phi^2 + h^2$$

dir.

$$\phi l X = \left(\nabla_\xi h\right)X - \phi X + h^2 \phi X$$

$$\phi l \phi X = \left(\left(\nabla_{\xi} h \right) \phi \right) X - \phi^2 X - h^2 X$$

$$l - \phi l \phi = 2(\phi^2 + h^2)$$

olur.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

YARI FİNSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DEĞME YAPILAR

3.1. YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

M, m boyutlu düzgün bir reel manifold ve TM ise bu manifolda ait tanjant demeti olsun. $\mathcal{U}$, M manifoldunun açık bir alt kümesi olmak üzere M üzerinde bir koordinat sistemi $\{(\mathcal{U},\varphi);\ x^1,\dots,x^m\}$ ya da kısaca $\{(\mathcal{U},\varphi);\ x^i\}$ ile gösterilir.

$\Pi : TM \rightarrow M$ kanonik projeksiyonu ile $x \in M$ noktasında T_xM fibresi bulunur , yani $T_xM = \pi^{-1}(x)$ olur ve M'deki koordinat sistemi sayesinde TM de

$$\{(\mathcal{U}^*,\Phi);\ x^1,\dots,x^m, y^1,\dots,y^m\} = \{(\mathcal{U}^*,\Phi)\ ; x^i, y^i\}$$

şeklinde yeni bir koordinat sistemi tanımlanabilir , burada

$\mathcal{U}^* = \pi^{-1}(\mathcal{U})$ olur ve $\Phi: \mathcal{U}^* \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ diffeomorfizmi her $x \in \mathcal{U}$ ve $y_x \in T_xM$ için $(x^1,\dots,x^m,\ y^1,\dots,y^m)= \Phi(y_x)$ şeklinde tanımlıdır. y_x in koordinatları kısaca (x,y) ile gösterilir. Şimdi M de $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir diğer koordinat sistemi olan $\{(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\varphi})\ ;\ \tilde{x}^i\}$ yi ele alalım. Böylece TM üzerinde (x,y) ve $(\tilde{x},\tilde{y})$ lokal koordinatlar arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \tilde{x}^i = \tilde{x}^i\,(x^1,\dots,x^m), \\ \tilde{y}^i = B^i_j\,(x) y^j \end{cases} \tag{3.1}$$

burada $B^i_j\,(x) = \partial\tilde{x}^i/\partial x^j$ şeklindedir. Ayrıca (3.1) ifadesinden $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ ve $\left\{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i}\right\}$ lokal çatıları aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$B^j_{ik}\,(x) = \frac{\partial^2\tilde{x}^j}{\partial x^i \partial x^k}\ ,\ \frac{\partial}{\partial x^i} = B^i_j\,(x)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + B^j_{ik}\,(x) y^k\,\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \tag{3.2}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = B^i_j\,(x)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}\,. \tag{3.3}$$

Diğer taraftan M manifoldunun T^*M kotanjant demeti üzerindeki $\{dx^i, dy^i\}$ ve $\{d\tilde{x}^i, d\tilde{y}^i\}$ lokal dual çatıları arasındaki bağıntılar ise aşağıdaki gibidir:

$$d\tilde{x}^i = B^i_j\,(x) dx^j \tag{3.4}$$

ve

$$d\tilde{y}^i = B^i_{jk}\,(x) y^j dx^k + B^i_j\,(x) dy^j \tag{3.5}$$

TM' nin sıfır kesiti θ olmak üzere $\theta(M) \cap M' = \emptyset$ ve $\pi(M') = M$ için TM nin boştan farklı bir açık alt manifoldu M' ile gösterilsin. $M'_x = T_xM \cap M'$ pozitif konik set yani her k > 0 ve $y \in M'_x$ için $ky \in M'_x$ olur. Açıkcası M' bir Finsler manifoldu tanımı için gerekli olan

$TM^0 = TM \setminus \theta(M)$ eşitliğini sağlar.

$F: M' \to (0, \infty)$ düzgün fonksiyon ve $F^* = F^2$ olsun. M deki her $\{(U', \Phi'); x^i, y^i\}$ koordinat sistemi için aşağıdaki koşullar sağlanır:

(F1) F'in $(y^1, \dots, y^m)$ e göre pozitif olarak homojenlik derecesi 1 dir. Yani her $(x, y) \in \Phi'(U')$ ve k > 0 için

$$F(x^1, \dots, x^m, ky^1, \dots, ky^m) = k.F(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m) \tag{3.6}$$

eşitliği sağlanır.

(F2) Her $(x, y) \in \Phi'(U')$ noktasında

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^*}{\partial y^i \partial y^j}(x, y) \quad i, j \in (1, \dots, m) \tag{3.7}$$

ifadeleri $\mathbb{R}^m$' de pozitif tanımlı kuadratik formun bileşenleridir. (F_1) ve (F_2) koşullarını gerçekleyen F temel fonksiyonu ile birlikte $F^m = (M, M', F)$ bir Finsler manifoldu olur. Ancak (F_2) koşulu Finsler geometrisinin bazı uygulamaları için uygun değildir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için q < m olmak üzere F^*: $M' \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu tanımlansın. Ayrıca M deki her $\{(U', \Phi'); x^i, y^i\}$ koordinat sistemi için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

$\boldsymbol{F_1^*}$ **)** F^*'ın $(y^1, \dots, y^m)$ e göre pozitif olarak homojenlik derecesi 2'dir. Yani her $(x, y) \in \Phi'(U')$ $ve\ k > 0\ için$

$$F^*(x^1, \dots, x^m, ky^1, \dots, ky^m) = k^2.F^*(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m) \tag{3.8}$$

eşitliği sağlanır.

$\boldsymbol{F_2^*}$**)** Her $(x, y) \in \Phi'(U')$ noktasında $g_{ij}(x, y)$, (3.7) deki gibi tanımlı olup $\mathbb{R}^m$ de q negatif özdeğerli ve *m-q* pozitif özdeğerli, 0<q<m, bir kuadratik formun bileşenleridir. Böylece

$F^m = (M, M', F^*)$ q indekli bir yarı Finsler manifoldu olur (Bejancu ve Farran, 2000).

Özel olarak q=1 ise F^m Lorentz Finsler Manifoldu ve q=0 ise Finsler Manifoldu olur. Finsler fonksiyonu ile yarı Finsler fonksiyonu arasındaki bağıntı ise

$$F(x,y) = |F^*(x,y)|^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

eşitliği ile verilir. (3.8) ve (3.9) kullanılarak

$$\begin{aligned} F(x^1,\dots,x^m\,,ky^1,\dots,ky^m) &= |F^*(x^1,\dots,x^m\,,ky^1,\dots,ky^m)|^{\frac{1}{2}} \\ &= |\,k^2F^*(x^1,\dots,x^m\,,y^1,\dots,y^m)|^{\frac{1}{2}} \\ &= k|F^*(x^1,\dots,x^m\,,y^1,\dots,y^m)|^{\frac{1}{2}} \\ &= kF(x^1,\dots,x^m\,,y^1,\dots,y^m) \end{aligned}$$

bulunur. Yani F^m yarı Finsler manifoldunun temel fonksiyonu olan F, (2.6) yı sağlar. Şimdi (3.6) ifadesinin k' ya göre diferensiyelini alalım.

$$y^i\frac{\partial F}{\partial y^i} = F \quad , \tag{3.10}$$

buradan

$$y^i\frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} = 0. \tag{3.11}$$

olur. (2.7) ifadesinde F^* yerine F^2 alınırsa

$$g_{ij} = F\frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial F}{\partial y^i}\frac{\partial F}{\partial y^j} \tag{3.12}$$

bulunur. Ayrıca (2.10) ve (2.12) ifadelerinden de

$$g_{ij}y^j = F\frac{\partial F}{\partial y^i} \tag{3.13}$$

ve

$$g_{ij}y^jy^i = F^* \tag{3.14}$$

bulunur.

(3.14) eşitliği yarı Finsler manifoldu için geçerlidir. (2.8) ifadesinde k' ya göre türev alıp k=1 yazılırsa

$$y^i\frac{\partial F^*}{\partial y^i} = 2F^* \tag{3.15}$$

olur. Elde edilen son ifadenin y^j ye göre türevi alınırsa

$$2y^i g_{ij} = y^i \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^i \partial y^j} = \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^j} \tag{3.16}$$

elde edilir. Son olarak (3.16) ifadesinin y^k ya göre türevi alınırsa

$$y^i \frac{\partial^3 F}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} = 0$$

bulunur. Buradan her F^m yarı Finsler manifoldu için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(x,y)y^i = 0\,, \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(x,y)y^j = 0\,, \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(x,y)y^k = 0 \tag{3.17}$$

(F_2) ve (F_2^*) ifadelerinden $\forall(x,y) \in \Phi'(U')$ için

$$det\big[g_{ij}(x,y)\big] \neq 0 \tag{3.18}$$

olduğunu yani, $\big[g_{ij}(x,y)\big]$ nin m×m tipinde tersi alınabilir bir matris olduğunu söyleyebiliriz. Karşıt olarak (3.11) den

$$det\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}\right] = 0\,,$$

olup (3.12) ile birlikte

$$det\left[g_{ij} - \frac{\partial F}{\partial y^i}\frac{\partial F}{\partial y^j}\right] = 0 \tag{3.19}$$

olur.

$\mathbb{R}^m$'in bir açık pozitif konik alt cümlesi D ve D üzerinde bir düzgün reel fonksiyon olan f fonksiyonunu ele alalım. Tensör alanlarının lokal bileşenlerinin çoğu pozitif homojen fonksiyonlar olduğundan aşağıdaki tanım verilebilir:

f pozitif homojenlik derecesi r olan bir fonksiyon ise ∀ k>0 ve $(y^1, \dots, y^m) \in D$ için

$$f(ky^1, \dots, ky^m) = k^r f(y^1, \dots, y^m) \tag{3.20}$$

olur. Buradan $i \in \{1, \dots, m\}$ için $\frac{\partial f}{\partial y^i}$ 'nin pozitif homojenlik derecesinin r-1 olduğunu söyleyebiliriz (Bejancu ve Farran ,2000).

Teorem 3.1.1. (Euler teoremi)

D üzerinde düzgün bir f fonksiyonunun pozitif homojenlik derecesinin r olması için gerek ve yeter koşul

$$y^i \frac{\partial f}{\partial y^i} = rf \tag{3.21}$$

olmasıdır.

Önerme 3.1.1.

i) $\frac{\partial F^*}{\partial y^i}$ ′ nin (y^1 ,…,y^m) ′e göre pozitif homojenlik derecesi 1'dir.

ii) $\frac{\partial F}{\partial y^i}$ ve g_{ij}′ nin (y^1 ,…,y^m) ′e göre pozitif homojenlik derecesi 0'dır.

iii) (3.10), (3.11), (3.15) ve (3.17) numaralı denklemler aynı zamanda (3.21) ve burada yer alan fonksiyonların homojenliği kullanılarak da elde edilebilir.

∀ x ∈ M , $M'_x = T_x M \cap M'$ alınıp $F^m = (M, M', F^*)$ yarı Finsler manifoldunun her tanjant uzayında üç hiperyüzey tanımlanır. Bu yüzeyler aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathrm{I}M_x^+ = \{y \in M'_x : F^*(x, y) = 1\}$$

$$\mathrm{I}M_x^- = \{y \in M'_x : F^*(x, y) = -1\}$$

$$\wedge M_x = \{y \in M'_x : F^*(x, y) = 0\}$$

$T_x M$ ′de alınan $\mathrm{I}M_x^+$, $\mathrm{I}M_x^-$ ve $\wedge M_x$ hiperyüzeyleri, sırasıyla, pozitif indikatriks, negatif indikatriks ve x noktasındaki null (lightlike) Finsler koni olarak adlandırılır. $\mathrm{I}M_x^-$ ve $\wedge M_x$ sadece yarı Finsler manifoldlarında tanımlıdır. Özel olarak F^m bir Riemann manifoldu olduğundan $\mathrm{I}M_x^+$, $\mathrm{I}M_x^-$ ve $\wedge M_x$, sırasıyla, birim yarı küre ,birim yarı hiperbolik uzay ve null(lightlike) koni olarak adlandırılır. Ayrıca

$$\mathrm{I}M^+ = \bigcup_{x \in M} \mathrm{I}M_x^+ \quad , \mathrm{I}M^- = \bigcup_{x \in M} \mathrm{I}M_x^- \quad , \qquad \wedge \mathrm{M} = \bigcup_{x \in M} \wedge M_x$$

yazılabilir.

F^m bir Riemann manifoldu olduğundan $\mathrm{I}M^+$ M üzerinde bir küre demeti olur (Bejancu ve Farran, 2000).

Örnek 3.1.1. M indeksi 0≤q<m olan $g = (g_{ij})$ yarı Riemann metriği ile verilmiş m boyutlu bir yarı Riemann manifoldu olsun. Böylece $F^m = \{\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \backslash 0 \, , F^*\}$ bir yarı Finsler manifoldu olur. Burada $F^*(x, y) = g_{ij}(\mathrm{x}) y^i y^j$ şeklindedir.

$\mathbb{R}^m$ ′de öklidyen yapı

$$\mathrm{F(x,y)} = \left(\sum_{i=1}^{m}(y^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.22}$$

ve $\mathbb{R}^m$ ′de 0≤q<m indeksli yarı öklidyen yapı

$$F^*(\mathrm{x,y}) = -\sum_{i=1}^{q}\left(y^i\right)^2 + \sum_{a=q+1}^{m}(y^a)^2 \tag{3.23}$$

ile verilir (Bejancu ve Farran, 2000).

Örnek 3.1.2. $\mathrm{M} = \{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3 \ ; y^1 > 0, y^2 > 0, y^3 > 0\}$ ve $M' = \mathbb{R}^3 \times M$ olsun. $\mathrm{F} : M' \to (0,\infty)$ Finsler fonksiyonu

$$F(x,y) = (y^1)^2 \ / \ \sqrt{y^2 y^3} \tag{3.24}$$

şeklinde tanımlansın.

(3.7) ve (3.24) den

$$\left[g_{ij}(x,y)\right] = \frac{(y^1)^2}{y^2 y^3}\begin{bmatrix} 6 & -2\frac{y^1}{y^2} & -2\frac{y^1}{y^3} \\ -2\frac{y^1}{y^2} & \left(\frac{y^1}{y^2}\right)^2 & \frac{1}{2}\frac{(y^1)^2}{y^2 y^3} \\ -2\frac{y^1}{y^3} & \frac{1}{2}\frac{(y^1)^2}{y^2 y^3} & \left(\frac{y^1}{y^3}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

buluruz. $\left[g_{ij}(x,y)\right]$ matrisi M' üzerinde pozitif tanımlıdır. Böylece $F^3 = (\mathbb{R}^3, M', F)$ bir Minkowski uzayıdır.

Örnek 3.1.3. $\mathrm{M} = \{(y^1, y^2, y^3, y^4) \in \mathbb{R}^4 \ ; y^1 > 0, y^2 > 0, y^3 > 0\}$ ve $M' = \mathbb{R}^4 \times M$ olsun.

$$F^*(x,y) = (y^4)^2 + \left(\frac{y^2 y^3}{y^1}\right)^2 \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanan $F^* : M' \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\left[g_{ij}(x,y)\right] = \begin{bmatrix} 3\frac{(y^2y^3)^2}{(y^1)^4} & -2\frac{y^2(y^3)^2}{(y^1)^3} & -2\frac{(y^2)^2y^3}{(y^1)^3} & 0 \\ -2\frac{y^2(y^3)^2}{(y^1)^3} & \left(\frac{y^3}{y^1}\right)^2 & 2\frac{y^2y^3}{(y^1)^2} & 0 \\ -2\frac{(y^2)^2y^3}{(y^1)^3} & 2\frac{y^2y^3}{(y^1)^2} & \left(\frac{y^2}{y^1}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

bulunduğundan $F^4 = (\mathbb{R}^4, M', F^*)$ bir yarı Minkowski uzayıdır ve indeksi 1’dir(q=1). Yani F^4 bir Lorentzian Finsler manifoldudur.

Örnek 3.1.4. $\mathrm{M} = \{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y^1 \neq 0\,, y^2 \neq 0,\ \frac{y^1}{y^2} + \sqrt[3]{4}\ > 0\}$ ve $M' = \mathbb{R}^2 \times M$ olsun. $F^*(x,y) = \ (y^2)^2 + \frac{(y^1)^3}{y^2}$ şeklinde tanımlanan $F^* : M' \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$[g_{ij}(x,y)] = \begin{bmatrix} 3\dfrac{y^1}{y^2} & -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y^1}{y^2}\right)^2 \\ -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y^1}{y^2}\right)^2 & 1 + \left(\dfrac{y^1}{y^2}\right)^3 \end{bmatrix}$$

dir. O halde $M^* = \left\{(x^1, x^2, y^1, y^2) \in M'; \frac{y^1}{y^2} > 0\right\}$ için $F^2 = (\mathbb{R}^2, M^*, F^*)$ bir Minkowski uzayıdır. Aksi halde $\tilde{F}^2 = (\mathbb{R}^2\,, M' \backslash M^*, F^*)$ indeksi q=1 olan bir yarı Minkowski uzayı olur.

Örnek 3.1.5. $\mathbb{R}^2$ nin bir D açık cümlesi için $f\,:\,D \to \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon olsun. $(\,m, n) \in \mathbb{R}^2\ /\{(2{,}0), (0{,}2)\}'$ yi m+n=2 olacak şekilde seçelim ve

$$F^*(x,y) = 2e^{f(x^1x^2)}(y^1)^m(y^2)^n \tag{3.28}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. F^* fonksiyonunun $(y^1, y^2)'$ ye göre pozitif homojenlik derecesi 2'dir. Üstelik F^* , $M' = D \times M$ üzerinde düzgün bir fonksiyon tanımlar, burada M olarak $\mathbb{R}^2$ de açık bir cümle alınmıştır. Sonuç olarak

$$\mathrm{g_{ij}(x,y) = e^{f(x^1x^2)}(y^1)^{m-2}(y^2)^{n-2}} \begin{bmatrix} \mathrm{m(m-1)(y^2)^2} & \mathrm{mny^1y^2} \\ \mathrm{mny^1y^2} & \mathrm{n(n-1)(y^1)^2} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

bulunur. *m=1* ve *n=1* alarak D üzerinde bir Lorentzian yapı buluruz.

$m \in (0, \infty)\backslash\{1\}$ ve $n \in (0, \infty)\backslash\{1\}$ alırsak da $F^2 = (D, M', F^*)$ bir yarı Finsler manifoldu olur.

Örnek 3.1.6. $(M, \alpha = (\alpha_{ij}(x)))$ m boyutlu bir Riemann manifoldu ve M manifoldu üzerinde tanımlı 1-form $\beta = \ (\beta_i(x))$ olsun. M de bir $\{(U\,, \varphi)\,; x^i\}$ koordinat sistemini düşünelim ve $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ üzerinde

$$F(x,y) = \left(\alpha_{ij}(x)y^iy^j\right)^{\frac{1}{2}} + \left|\beta_i(x)y^i\right| \tag{3.30}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. F fonksiyonu TM 'nin $\pi(M') = M\,, \theta(M) \cap M' = \emptyset$ olacak şekilde tanımlı M' açık alt manifoldu üzerinde düzgün bir fonksiyondur ve $\forall\ x \in M\,, M'_x$ bir pozitif konik cümledir.

Teorem 3.1.2. m boyutlu bir Riemann manifoldu $(M, \alpha = \left(\alpha_{ij}(x)\right))$ ve M üzerinde 1-form $\beta = (\beta_i(x))$ olsun. O zaman $F^m = (M, M', F)$ bir Finsler manifoldudur, buradaki F fonksiyonu (3.30) da tanımlandığı gibidir.

İspat: F fonksiyonunun (F1) şartını sağladığını görmek kolaydır. (F2) şartı için $(x_0, y_o) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ noktasını alalım öyle ki $\beta_i(x_0)y_o > 0$ olsun. O zaman (x_0, y_o) noktasının bir $\vee \subset \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ koordinat komşuluğu her $(x, y) \in \vee$ için $\beta_i(x)y^i > 0$ olacak şekilde mevcuttur. Böylece (3.30) dan

$$F(x, y) = \|y\| + \beta_i(x)y^i \quad , \forall (x, y) \in \vee \tag{3.31}$$

yazabiliriz. Burada $\|y\| = \left(\alpha_{ij}(x)y^i y^j\right)^{\frac{1}{2}}$ dir. (3.12) ve (3.31) den

$$\mathrm{g_{ij}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = F(x, y)\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y^i}\frac{\partial F(x, y)}{\partial y^j}$$

$$\mathrm{g_{ij}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{F(x,y)}{\|y\|^3}\left(\alpha_{ij}(x)\|y^2\| - y^i y^j\right) + \left(\frac{y^i}{\|y\|} + \beta_i(x)\right)\left(\frac{y^j}{\|y\|} + \beta_j(x)\right) \tag{3.32}$$

bulunur, burada $y^i = \alpha_{ik}(x)y^k$ aldık.

Şimdi sıfırdan farklı $\vee = \left(\vee^i\right) \in \mathbb{R}^m$ vektörünü alıp $\alpha_{ij}(x)$ e göre Couchy–Schwarz eşitsizliğini kullanalım. (3.32) den

$$\mathrm{g_{ij}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \vee^i \vee^j = \frac{F(x, y)}{\|y\|^3}(\|\vee\|^2\|y\|^2 - (\alpha(\vee, y))^2) + \left(\frac{y_i}{\|y\|}\beta_i(x)\, \vee^i\right)^2 \geq 0$$

buluruz.

Yukarıdaki eşitsizliğin sadece $\vee = 0$ için sağlandığını göstermeliyiz.

Eğer $\|\vee\|^2\|y\|^2 - \left(\alpha(\vee, y)\right)^2 = 0 \quad (\vee \neq 0)$ ise $\lambda \neq 0$ için $\vee = \lambda y$ vardır: Böylece

$$\mathrm{g_{ij}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \vee^i \vee^j = \lambda^2 F^2(x, y) > 0$$

olur. Yani $\mathrm{g_{ij}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ bileşenleri $\mathbb{R}^m$ üzerinde pozitif tanımlı kuadratik formun bileşenleridir.

$\beta_i(x_0)y_0 < 0$ durumunda ispat için $\beta_i(x)$ yerine $-\beta_i(x)$ almamız gerekir.

1941’de Randers tarafından tanımlanan

$$F(x,y) = (\alpha_{ij}(x)y^i y^j)^{\frac{1}{2}} + \beta_i(x)y^i \tag{3.33}$$

fonksiyonu ile birlikte $F^m = (M, M', F)$ manifolduna Randers manifoldu denir.

3.2. DİKEY VEKTÖR DEMETİ VE FİNSLER TENSÖR ALANLARI

$0 \leq q < m$ indeksli bir yarı Finsler manifoldu $F^m = (M, M', F^*)$ olsun.

$\pi: M \to M'$ submersiyonunun tanjant dönüşümü $\pi_*: TM' \to TM$ olmak üzere Ker $\pi_* = VM'$ vektör demetini tanımlayalım. $U' \subset M'$ koordinat komşuluğu üzerinde $\pi^i(x,y) = x^i$ lokal koordinatları için;

$$\pi_*^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_j^i \quad ve \quad \pi_*^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0\,,$$

olur. VM' vektör demeti, M' üzerinde rankı m olan bir integrallenebilir distribüsyondur ve $\{\partial/\partial y^i\}$, $\Gamma(VM'_{|U'})$ 'nun bir bazıdır. VM' vektör demetine F^m in dikey vektör demeti denir.

$\pi': TM' \to M'$ kanonik projeksiyonu için $\pi' \circ X = I_{M'}$ olacak şekilde düzgün bir dönüşüm $X: M' \to VM'$ olmak üzere $U' \subset M'$ lokal koordinat komşuluğunda

$$X = X^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{3.34}$$

dır, buradaki X^i fonksiyonları U' üzerinde düzgün fonksiyonlardır. (2.3) ve (2.34) eşitlikleri kullanılarak

$$\tilde{X}^i(\tilde{x}, \tilde{y}) = X^j(x,y)B_j^i(x) \tag{3.35}$$

bulunur, bu eşitlik M' üzerinde alınan U ve U' lokal koordinat komşulukları arasındaki bağıntıyı gösterir.

Özellikle her $U' \subset M'$ koordinat komşuluğunda

$$L = y^i\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{3.36}$$

vektör alanını tanımlayabiliriz. Bu vektör alanına M' üzerinde Liouville vektör alanı denir.

Finsler vektör alanları dikey vektör demetlerinin kesitleri olduklarından Finsler tensör cebirini M manifoldu üzerindeki tensör cebiri gibi kurabiliriz ancak TM yerine VM' dikey vektör demetini almamız gerekir. VM' dikey vektör demetinin dual vektör demetini V^*M' ile gösteririz. O zaman Finsler 1-formu V^*M' dual vektör demetinin düzgün bir kesiti olur. $\left\{{\partial}/_{\partial y'}, \dots, {\partial}/_{\partial y^m}\right\}$ bazına dual olan baz $\{\theta^1, \dots, \theta^m\}$ olsun, burada $\theta^i\left({\partial}/_{\partial y^j}\right) = \delta_j^i$ dır. O zaman her $w \in \Gamma\ (V^*M')\ için\ w_j(x,y) = w(\frac{\partial}{\partial y^i})$ lokal koordinatları cinsinden

$$w = w_i(x,y)\theta^i \tag{3.37}$$

şeklindedir. (3.3) ve (3.37) kullanılarak lokal koordinatlar arasındaki bağıntıyı

$$w_i(x,y) = \widetilde{w_J}\ (\tilde{x},\tilde{y})B_j^i(x) \tag{3.38}$$

$$\widetilde{\theta^\iota}\ (\tilde{x},\tilde{y}) = \ \theta^j(x,y).\, B_j^i(x) \tag{3.39}$$

olarak buluruz.

Genel olarak F^m üzerinde (r, s) tipindeki bir Finsler tensör alanı

$T{:}\,(\Gamma(V^*M'))^r \times\ (\Gamma(VM'))^s\ \rightarrow \mathcal{F}(M')$

şeklinde tanımlı (r+ s) – çoklineer dönüşümdür Lokal koordinatlar cinsinden

$$T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}\,(x,y) = T\left(\theta^{i1}, \dots, \theta^{ir}, \frac{\partial}{\partial y^{j1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{js}}\right)(x,y) \tag{3.40}$$

olup (2.1) deki lokal koordinatlar arasındaki bağıntıya göre de

$$\widetilde{T}\ = {}^{h_1,\dots,h_r}_{k_1,\dots,k_s}\,(\tilde{x},\tilde{y})B_{j_1}^{k_1}(x), \dots, B_{j_s}^{k_s}(x) = T^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}\,(x,y)B_{i_1}^{h_1}(x), \dots, B_{i_r}^{h_r}(x) \tag{3.41}$$

yazılabilir.

$y_x \in\ M'_x$ noktasında (r, s) tipinde bir Finsler tensör alanı

$T_s^r(VM')_{y_x} = L_{r+s}((V^*M')^r_{y_x} \times (VM')^s_{y_x}\,;\ \mathbb{R})$ vektör uzayının bir elemanıdır.

$T_s^r(VM') = \bigcup_{y_x \epsilon M'} T_s^r(VM')_{y_x}$ vektör demetine F^m Finsler manifoldunun (r, s) tipindeki Finsler tensör demeti denir. Örneğin $T_1^0(VM') = VM'$ ve

$T_1^0(VM') = V^*M'\ F^m$ in, sırasıyla Finsler vektör demeti ve Finsler kovektör demeti olur.

Her $T \in\ \Gamma\big(L((VM')^r, VM')\big)$, $\quad w \in \Gamma\ (V^*M'), X_a \in \Gamma(VM')\ \ a \in \{1,2\,\dots, r\}$ için

$$\mathrm{H}: \Gamma\big(L((VM')^r, VM')\big) \to \Gamma\big(T_r'(VM')\big)$$

$$\mathrm{H(T)}(\mathrm{w}, X_1, \dots, X_r) = \mathrm{w}(\mathrm{T}(X_1, \dots, X_r)) \tag{3.42}$$

olur.

$(V^*M')^r$, $((VM')^s)$ deki bileşenlerinin herhangi ikisinin yer değiştirmesiyle invaryant kalan (r,s) tipindeki bir T Finsler tensör alanına kontravaryant simetrik (kovaryant simetrik) tensör alanı denir. Eğer T tensör alanının işareti değişiyorsa kontravaryant çarpık simetrik (kovaryant çarpık simetrik) olur. Özel olarak , r≥2 için (r,0) tipinde ve (0,r) tipindeki Finsler tensör alanları için kısaca simetrik ya da çarpık simetrik Finsler tensör alanları deriz. (0,r) tipinde çarpık simetrik Finsler tensör alanı Finsler r-form olarak adlandırılır.

M' deki U' koordinat komşuluğu üzerinde

$$g|_{U'}: \Gamma(VM'|_{U'}) \times \Gamma(VM'|_{U'}) \to \mathcal{F}(M')$$

$$g|_{U'}(V, W)(x, y) = g_{ij}(x, y)V^i(x, y)W^j(x, y) \tag{3.43}$$

tensörünü tanımlayalım, burada V ve W Finsler vektör alanlarının lokal koordinatları, sırasıyla, V^i ve W^j ile gösterilmiştir ayrıca g_{ij} fonksiyonları (2.7) de tanımlandığı gibidir. (3.43) den

$$g_{ij}(x, y) = g|_{U'}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)(x, y) \tag{3.44}$$

buluruz, (3.7) ve (3.3) den de

$$\tilde{g}_{kh}(\tilde{x}, \tilde{y})B_i^k(x)B_j^h(x) = g_{ij}(x, y) \tag{3.45}$$

olduğu görülür. Her $U' \subset M'$ lokal koordinat komşuluğunda tanımlı (g_{ij}) lokal bileşenlerine sahip olan g fonksiyonu F^m üzerinde (0,2) tipinde bir Finsler tensör alanıdır ve simetriktir. (F_2) şartını sağlayan g metriğine Finsler metriği (F_2^*) şartını sağlayan g metriğine de yarı Finsler metriği denir.

3.3. VEKTÖR DEMETLERİ ÜZERİNDE LİNEER KONNEKSİYONLAR

$\xi = (E, \pi, M)$ bir vektör demeti olsun, burada M, π ve E, sırasıyla, m-boyutlu manifold, E den M ye projeksiyon dönüşümü, ξ nin (m+r) boyutlu reel total uzayıdır. ξ nin her $E_x = \pi^{-1}(x)$ fibresi r- boyutlu olduğundan ξ rankı r olan bir vektör demetidir diyebiliriz. Yani E, M üzerinde bir vektör demetidir. M nin her N alt manifoldu için vektör demetini de $E|_N$ ile gösteririz ($\forall\, x \in N\ için\ E_x\ fibrelerine\ sahiptir$).

M'deki $\{(U,\varphi); x^i\}$ koordinat sisteminden indirgenmiş olan E vektör demetinin $\{(U^*,\Phi); x^i, y^a\},\ i \in \{1,\dots,m\},\ a \in \{1,\dots,r\}$ vektör demeti kesitini düşünelim. E üzerindeki koordinat dönüşümleri aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1,\dots,x^m)$$

$$\tilde{y}^a = L_b^a(x^1,\dots,x^m)y^b \tag{3.46}$$

Burada L_b^a ile M üzerinde tanımlı düzgün fonksiyonlar gösterilmiştir. M'nin bir U açık cümlesi üzerinde E'nin düzgün bir kesiti $X: U \to E$ şeklinde düzgün bir dönüşümdür ve $\pi \circ X = \mathrm{I}_u$ olur, I_u ile M üzerinde özdeşlik dönüşümü gösterilmiştir.

Eğer $\forall\, x \in M$, E nin bir $\{U^*,\phi\}$ vektör demeti kesiti $1 \le p < r$ sayısı için $\Phi(\pi^{-1}(U) \cap F) = U \times \mathbb{R}^p$ olacak şekilde var ise E nin bir F alt cümlesine bir vektör alt demeti denir. Yani F , M üzerinde bir vektör demetidir ve her F_x fibresi $\mathbb{R}^p$ ye izomorftur. Özellikle M nin TM tanjant demetinin bir vektör alt demeti M üzerinde bir distribüsyon olarak adlandırılır.

Lokal koordinatları $\{X^i\}$ olan ve her $X \in \Gamma(\mathrm{TM})$ için $f \in \mathcal{F}(M)$ olmak üzere

$$X(f) = X^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{3.47}$$

dir. M üzerinde X ve Y vektörlerinin Lie braket operatörü $[X,Y]$ olup bir vektör alanıdır ve $\forall\, f \in \mathcal{F}(M)$ için aşağıdaki gibi tanımlıdır;

$$[X,Y](f) = X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big). \tag{3.48}$$

D , M üzerinde rankı p olan bir distribüsyon olsun. Eğer her X , $Y \in \Gamma(\mathrm{D})$ için $[X,Y] \in \Gamma(\mathrm{D})$ ise D distribüsyonuna bir involitive denir. D nin bir integral alt manifoldu her $x \in N$ için $T_xN \subset D_X$ olacak şekildeki M nin bir N alt manifoldudur. D integrallenebilirdir deriz eğer her $x \in M$ için $\{(U,\varphi); x^i\}$ koordinat sistemi vardır öyle ki $x^a = c^a$, $a \in \{p+1,\dots,m\}$ $c^a \in \mathbb{R}$ ile verilen her U alt manifoldu D nin integral manifoldlarıdır.

Teorem 3.3.1. M üzerinde bir D distribüsyonunun integrallenebilir olabilmesi için gerek ve yeter koşul involutive olmasıdır. Üstelik $\forall\, x \in M$, D nin tek lifi N_x olup x'i içeren diğer bağlantılı integral manifoldları N_x in alt manifoldudur.

M üzerinde E vektör demetinin bir kesiti $\Gamma(\mathrm{E})$ ve $\mathcal{F}(M)-$ modül olmak üzere bir diferansiyel 1-form $w : \Gamma(\mathrm{E}) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ şeklinde tanımlıdır. E nin dual vektör demetini E^* ile gösterelim ve (p+q) çok lineer dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlayalım ;

$$S: (\Gamma(E^*))^p \times (\Gamma(\mathrm{E}))^q \rightarrow \mathcal{F}(M).$$

Bu dönüşüm E vektör demeti üzerinde (p, q) tipinde bir tensör alanıdır. M üzerinde E ve F vektör demetleri için F değerli diferansiyel q-form bir q-çok lineer dönüşüm olup {1,…,q} nun her σ permütasyonu için

$$w : (\Gamma(\mathrm{E}))^q \rightarrow \Gamma(\mathrm{F})$$

$$w\big(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(q)}\big) = sgn\sigma\, w(X_1, \dots, X_q)$$

şeklinde tanımlıdır.

M deki her X vektör alanına göre ∇_X diferansiyel operatörü ξ vektör demeti üzerinde bir lineer konneksiyon olup $\forall\, Y \in \Gamma(\mathrm{E})$ için

$$\nabla_X : \Gamma(\mathrm{E}) \rightarrow \Gamma(\mathrm{E}) \qquad , \; Y \rightarrow \nabla_X Y$$

şeklinde tanımlıdır ve $\forall\, X, Y \in \Gamma(\mathrm{TM}), \mathrm{Z}, U \in \Gamma(\mathrm{E})$ ve $f \in \mathcal{F}(M)$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlar;

$$\nabla_{f\,X+Y} Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z \tag{3.49}$$

$$\nabla_X(fZ + U) = f\nabla_X Z + X(f)Z + \nabla_X U \tag{3.50}$$

∇_X operatörüne X' e göre kovaryant türev operatörü denir. E üzerinde tanımlı bir w 1-formunun kovaryant türevi

$$(\nabla_X w)(Z) = X\big(w(Z)\big) - w(\nabla_X Z) \tag{3.51}$$

şeklinde tanımlıdır ($\forall\, X \in \Gamma(\mathrm{TM})$ ve $Z \in \Gamma(\mathrm{E})$).

E üzerinde tanımlı (p, q) tipindeki bir S tensör alanının kovaryant türevi

$$\forall\, w^s \in \Gamma(E^*)\,,\; Z_t \in \Gamma(\mathrm{E})\,, s \in \{1, \dots, p\}\;, t \in \{1, \dots q\}$$

$$(\nabla_X S)\big(w^1, \dots, w^p, Z_1, \dots, Z_q\big) = X(S\big(w^1, \dots, w^p, Z_1, \dots, Z_q\big))$$

$$-\textstyle\sum_{s=1}^{p}(S\big(w^1, \dots, \nabla_X w^s, \dots, w^p, Z_1, \dots, Z_q\big))$$

$$-\textstyle\sum_{t=1}^{q}(S\big(w^1, \dots, w^p\, Z_1, \dots, \nabla_X Z_1, \dots, Z_q\big)) \tag{3.52}$$

şeklinde tanımlıdır. E de tanımlı (1, q) tipindeki bir tensör alanının kovaryant türevi de

$$(\nabla_X S)\,(Z_1, \dots, Z_q) = \nabla_X(S(Z_1, \dots, Z_q))$$

$$-\sum_{t=1}^{q} S(\,Z_1, \dots, \nabla_X\, Z_t\,, \dots, Z_q) \tag{3.53}$$

şeklinde verilebilir, burada $S : (\,\Gamma(\mathrm{E}))^q \rightarrow \Gamma(\mathrm{E})$ bir q-lineer dönüşümdür, $X \in \Gamma(\mathrm{TM})$ ve $Z_t \in \Gamma(\mathrm{E})$ alınmıştır. Eğer S tensör alanı ∇ ye göre paralel tensör alanı ise $\forall\, X \in \Gamma(\mathrm{TM})$, $\nabla_X S = 0$ dır. Özel olarak E vektör demeti üzerinde ∇ ye göre paralel olan g yarı Riemann metriği varsa ∇ bir metrik lineer konneksiyondur deriz.

M üzerinde $(\mathrm{E}, E'\ ve\ E'')$ vektör alanlarının sırasıyla $(\nabla\,, \nabla'\ ve\ \nabla'')$ lineer konneksiyonlarıyla verilmiş olduklarını düşünelim. O zaman

$S :\ \Gamma(\mathrm{E}) \times \Gamma(E') \rightarrow\ \Gamma(E'')$ bilineer dönüşümünün ∇^* kovaryant türevi

$\forall\, X\ \in\ \Gamma(\mathrm{TM}),\ Y \in\ \Gamma(\mathrm{E})$ ve $Z\ \in \Gamma(E')$

$$(\nabla^*_X S)(Y, Z) = \nabla''_X\big(S(Y, Z)\big) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla'_X Z) \tag{3.54}$$

şeklinde tanımlıdır.

E üzerinde tanımlı bir ∇ lineer konneksiyonunun eğrilik formu M üzerinde

L(E, E) değerli bir 2-formdur ve $\forall\, X, Y \in\ \Gamma(\mathrm{TM})$ için

$$\Omega(X, Y) = \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \tag{3.55}$$

şeklinde tanımlıdır. E=TM ise ∇ konneksiyonu M' de bir lineer konneksiyondur. Ω eğrilik formu R eğrilik tensör alanını aşağıdaki gibi tanımlar:

$$R(X, Y)Z = \Omega(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Z} = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \big(\nabla_{[X,Y]} Z\big) \tag{3.56}$$

burada $\forall\, X, Y, Z \in\ \Gamma(\mathrm{TM})$ dir.

$\forall\, X, Y \in\ \Gamma(\mathrm{TM})$ için T torsiyon tensör alanı

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{3.57}$$

şeklinde tanımlıdır.

M üzerinde tanımlı bir yarı Riemann metriği g olsun. O zaman M de aşağıdaki şartları sağlayan bir tek ∇ lineer konneksiyonu vardır:

(i) g, ∇ ye göre paraleldir.

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X\big(g(Y, Z)\big) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0 \tag{3.58}$$

$(\forall\, X, Y, Z \in\ \Gamma(\mathrm{TM}))$

(ii) ∇ torsiyonsuz lineer konneksiyondur.

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{3.59}$$

$(\forall\, X, Y \in \Gamma(\mathrm{TM}))$

$\forall\, X, Y, Z \in \Gamma(\mathrm{TM})$, Levi-civita konneksiyonu

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X\big(g(Y,Z)\big) + Y\big(g(X,Z)\big) - Z\big(g(X,Y)\big) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X) \tag{3.60}$$

şeklinde tanımlıdır.

L_X X'e göre Lie türevi göstermek üzere eğer X bir killing vektör alanı ise $L_X g = 0$ olacağından $\forall\, Y, Z \in \Gamma(\mathrm{TM})$

$$L_X g(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) \tag{3.61}$$

olur.

$U \subset M$ ve $\Gamma(E|_U)$ deki lokal bazlar sırasıyla $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\, , i = 1, \dots, m\right\}$ ve $\{S_\alpha\, , \alpha = 1, \dots, r\}$ olsun. ∇ lineer koneksiyonunun $\Gamma_a^b(x)$ lokal bileşenlerini

$$\nabla_{\partial/_{\partial x^i}} S_\alpha = \Gamma_{a\,i}^{b}(x) S_b \tag{3.62}$$

şeklinde tanımlayalım. $\mathrm{U} \cap \widetilde{\mathrm{U}} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir diğer $\widetilde{\mathrm{U}} \subset \mathrm{M}$ koordinat komşuluğu için

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = B_i^j(x) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \tag{3.63}$$

$$S_\alpha = G_a^b(x) \widetilde{S_b} \tag{3.64}$$

elde ederiz. G_a^b fonksiyonları $\forall$ x $\in \mathrm{U} \cap \widetilde{\mathrm{U}}$ için $[G_a^b(x)]$ $r \times r$ tipinde tersi alınabilir bir matris olacak şekilde $\mathrm{U} \cap \widetilde{\mathrm{U}}$ üzerinde tanımlı düzgün fonksiyonlardır.(3.49), (3.50) ,(3.62) ve (3.64) eşitliklerinden

$$\Gamma_{a\,i}^{b}(x) G_b^d(x) = B_i^j(x) G_a^c(x) \tilde{\Gamma}_{c\,j}^{d}(\tilde{x}) + \frac{\partial G_a^d(x)}{\partial x^i} \tag{3.65}$$

buluruz.

Teorem 3.3.2. $\xi = (E, \pi, M)$ vektör demeti üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonu vardır ancak ve ancak M'nin her bir lokal koordinat komşuluğunda (3.65)'i sağlayan mr^2 tane $\Gamma_{a\,i}^{b}(x)$ düzgün fonksiyonu vardır.

$X = X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})$ ve $Z = Z^a S_a$ alarak (2.49),(2.50) ve (2.62)' den

$$\nabla_X Z = Z^a_{|i} x^i S_a \tag{3.66}$$

buluruz, burada

$$Z^a_i = \frac{\partial z^a}{\partial x^i} + z^b \Gamma^b_a \tag{3.67}$$

benzer şekilde (3.51) nın lokal karşılıkları

$$(\nabla_X w)Z = w_{\alpha|i} X^i Z^a \tag{3.68}$$

olup burada

$$w_{\alpha|i} = \frac{\partial w_a}{\partial x^i} - w_b \Gamma^b_a \tag{3.69}$$

ve

$$w_a = w(S_a)$$

olur.

Şimdi $\{S_a\}$ nın $\{\theta^a\}$ dual bazını alıp E üzerinde tanımlı (p, q) tipinden S tensör alanının lokal bileşenlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$S^{b_1,\dots,b_p}_{a_1,\dots,a_q} = S(\theta^{b_1}, \dots, \theta^{b_p}, S_{a_1}, \dots, S_{a_q})$$

(2.52), (2.66) ve (2.69) dan

$$(\nabla_x S)(w^1, \dots, w^p, Z_1, \dots, Z_q) = S^{b_1,\dots,b_p}_{a_1,\dots,a_{q|i}} X^i w^1_{b_1}, \dots, w^p_{b_p}\, Z^{a_1}_1, \dots, Z^{a_q}_q$$

buluruz ki burada $w^h = w^h_{b_h} \theta^{b_h}$, $Z_k = Z^{a_k}_k S_{a_k}$,$\{h \in 1, \dots, p\}$

$\{k \in 1, \dots, q\}$ ve

$$S^{b_1,\dots,b_p}_{a_1,\dots,a_{q|i}} = \frac{\partial S^{b_1,\dots,b_p}_{a_1,\dots,a_q}}{\partial x^i} + \sum_{h=1}^{p} S^{b_1,\dots,b_{h-1} c b_{h+1},\dots,b_p}_{a_1,\dots,a_q} \Gamma^{b_h}_c$$
$$- \sum_{k=1}^{q} S^{b_1,\dots,b_p}_{a_1,\dots,a_{k-1} c a_{k+1},\dots,a_q}\, \Gamma^c_{ak_i} \tag{3.70}$$

(3.48) deki Lie braket operatörü de lokal bileşenler cinsinden

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = (X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.71}$$

olur. (3.55), (3.66),(3.57) ve (3.58) den

$$\Omega(X,Y)Z = R^{a}_{b\,ij} Z^b Y^i X^j S_a$$

buluruz, burada $R^{a}_{b\,ij}$ yerine

$$R^{a}_{b\,ij} = \frac{\partial \Gamma^{a}_{b_i}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{a}_{b_j}}{\partial x^i} + \Gamma^{c}_{b_i} \Gamma^{a}_{c_j} - \Gamma^{c}_{b_j} \Gamma^{a}_{c_i} \tag{3.72}$$

ve M'nin ∇ lineer konneksiyonu yerine de $\nabla_{\partial/_{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma^{k}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$ alıp (3.56) ve (3.57) den

$\mathrm{R(X,Y)Z} = R^{k}_{hij} Z^h Y^i X^j \frac{\partial}{\partial x^k}$ ve $T(X,Y) = T^{k}_{ij} Y^i X^j \frac{\partial}{\partial x^k}$ bulabiliriz, burada

$$R^{k}_{hij} = \frac{\partial \Gamma^{k}_{h_i}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{k}_{h_j}}{\partial x^i} + \Gamma^{l}_{h_i} \Gamma^{k}_{l_j} - \Gamma^{l}_{h_j} \Gamma^{k}_{l_i} \tag{3.73}$$

ve

$$T^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ij} - \Gamma^{k}_{ji} \tag{3.74}$$

olur.

Levi-civita konneksiyonunun lokal bileşenleri Christoffel sembolleri olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma^{k}_{ij} = \frac{1}{2} g^{kh} \left(\frac{\partial g_{h_i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{h_j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right) \tag{3.75}$$

3.4. VEKTÖREL FİNSLER KONNEKSİYONLARI

$0 < q < 2n + 1$ indeksli yarı Finsler manifoldu $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ olsun. $\pi : M' \to M$ submersiyonunun π_*: $TM' \to TM$ tanjant dönüşümünü ele alalım ve $(TM')^{\mathcal{V}} = \ker\pi_*$ vektör demetini tanımlayalım. $U' \subset M'$ koordinat komşuluğunda $\pi^i(x,y) = x^i$ lokal koordinatlar cinsinden $\pi^i_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$ ve $\pi^i_*\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0$ bulunur. Yani $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}$, $\Gamma(TM'|_{U'})^{\mathcal{V}}$ nin bir bazıdır. Böylece $(TM')^{\mathcal{V}}$, F^{2n+1} in dikey vektör demeti olarak adlandırılır.

Lokal olarak $U' \subset M'$ koordinat komşuluğunda X^i ler U' üzerinde düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$X^{\mathcal{V}} = X^i(x,y) \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{3.76}$$

olur. Ayrıca $(TM')^{\mathcal{V}}$ nin dual vektör demeti $(T^*M')^{\mathcal{V}}$ ile gösterilir. Böylece Finsler 1-Form $(T^*M')^{\mathcal{V}}$ nin düzgün kesitidir. $\{\frac{\partial}{\partial y^1},\dots,\frac{\partial}{\partial y^{2n+1}}\}$ nin dual bazının $\{\delta y^1,\dots,\delta y^{2n+1}\}$ olduğunu kabul edelim. Böylece $\delta y^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=\delta_j^i$ olur. Yani $w\in(T^*M')^{\mathcal{V}}$ için $w_i(x,y)=w\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$ olmak üzere

$$w^{\mathcal{V}}=w_i(x,y)\delta y^i \tag{3.77}$$

yazılır.

TM' de $(TM')^{\mathcal{V}}$ nin tamamlayıcı distribüsyonu $(TM')^{\mathcal{H}}$ ile gösterilir ve nonlineer konneksiyon ya da yatay distribüsyon olarak adlandırılır. Böylece

$$TM'=(TM')^{\mathcal{H}}\oplus(TM')^{\mathcal{V}} \tag{3.78}$$

eşitliği yazılır.

$\left\{\frac{\delta}{\delta x^1},\dots,\frac{\delta}{\delta x^{2n+1}}\right\}$ lokal vektör alanlarının seti $\Gamma(TM'|_{U'})^{\mathcal{H}}$ üzerinde bir bazdır yani

$$\frac{\delta}{\delta x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}-N_i^j\frac{\partial}{\partial y^j} \tag{3.79}$$

olur.

M' üzerinde X vektör alanını düşünelim. $X\in TM'$ için lokal olarak

$$X=X^i(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i}+\tilde{X}^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{2.80}$$

yazılır. Açık olarak $\tilde{X}^i(x,y)=0$ için $(M')^h\subset M'$ ve $X^i(x,y)=0$ için $(M')^{\mathcal{V}}\subset M'$ elde edilir. $\left\{\frac{\delta}{\delta x^1},\dots,\frac{\delta}{\delta x^{2n+1}}\right\}$ nin dual bazı $\{dx^1,\dots,dx^{2n+1}\}$, yani $dx^i\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)=\delta_j^i$ olsun. Böylece her bir $w\in\Gamma(T^*M'|_{U'})^{\mathcal{H}}$ için

$\widetilde{w}_i(x,y)=w(dx^i)$ ve $\widetilde{w}_i=w_i-N_i^jw_j$ olmak üzere

$$w^{\mathcal{H}}=\widetilde{w}_i(x,y)\,dx^i \tag{3.81}$$

eşitliği yazılır. Buradan

$$\delta y^i=dy^i+N_j^i(x,y)dx^j \tag{3.82}$$

olur (Bejancu ve Farran, 2000).

w 1-form ve $w=\widetilde{w}_i(x,y)dx^i+w_i(x,y)\,\delta y^i$ ve $w=w^{\mathcal{H}}+w^{\mathcal{V}}$ olmak üzere

$$w^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{V}}) = 0\,, w^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{H}}) = 0 \tag{3.83}$$

yazılır. M' üzerinde $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ tipinde bir Finsler tensör alanı aşağıdaki lokal forma sahiptir (Sinha ve Yadav, 1988).

$$T = T^{i_1,\dots,i_p,a_1,\dots,a_r}_{j_i,\dots,j_q,b_1,\dots,b_s}(x,y)\frac{\delta}{\delta x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\delta}{\delta x^{i_p}} \otimes dx^{a_1} \otimes \dots \otimes dx^{a_r} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{j_1}} \otimes$$
$$\dots \otimes \qquad \frac{\partial}{\partial y^{j_q}} \otimes \delta y^{b_1} \otimes \dots \otimes \delta y^{b_s} \tag{3.84}$$

Tanım 3.4.1. M' üzerinde tanımlı ∇ Finsler konneksiyonu, yine M' üzerinde tanımlanan ∇=$F\Gamma$ lineer konneksiyonudur ve bu konneksiyon $y_x \in M'$ olmak üzere $(T_{y_x}M')^{\mathcal{H}}$ yatay lineer uzayı ∇ ya göre paraleldir. Benzer şekilde $y_x \in M'$ için $(T_{y_x}M')^{\mathcal{V}}$ dikey lineer uzayı da ∇ ya göre paraleldir.

M' üzerinde ∇ lineer konneksiyonunun M' üzerinde Finsler konneksiyonu olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X Y^{\mathcal{H}})^{\mathcal{V}} = 0\,, (\nabla_X Y^{\mathcal{V}})^{\mathcal{H}} = 0\,, \forall X, Y \in T_{y_x}M' \tag{3.85}$$

$$\nabla_X Y = (\nabla_X Y^{\mathcal{H}})^{\mathcal{H}} + (\nabla_X Y^{\mathcal{V}})^{\mathcal{V}} \tag{3.86}$$

$$\nabla_X w = (\nabla_X w^{\mathcal{H}})^{\mathcal{H}} + (\nabla_X w^{\mathcal{V}})^{\mathcal{V}}\,, \forall\, w \in T^*_{y_x}M' \tag{3.87}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.(Sinha ve Yadav, 1991).

Uyarı 3.4.1. ∇, M' üzerinde bir Finsler konneksiyonu olsun. Böylece aşağıdaki eşitlikler elde edilir (Szilasi ve Vincze, 2000).

$$Y \in \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{V}} \Rightarrow \forall X \in T_{y_x}M'\,; \nabla_X Y \in \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{V}},$$
$$Y \in \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{H}} \Rightarrow \forall X \in T_{y_x}M'\,; \nabla_X Y \in \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{H}} \tag{3.88}$$

Tanım 3.4.2. M' üzerinde bir ∇ Finsler konneksiyonu için Finsler tensör alanları cebirinde *h* ve *v* kovaryant türev operatörleri mevcuttur.

$\forall X \in T_{y_x}M'$ için

$$\nabla^{\mathcal{H}}_X Y = \nabla_{X^{\mathcal{H}}} Y\,, \nabla^{\mathcal{H}}_X f = X^{\mathcal{H}}(f),\ \forall Y \in T_{y_x}M'\,,\ \forall f \in \Im(M') \tag{3.89}$$

olsun. Eğer $w \in T^*_{y_x}M'$ ise $\forall Y \in T_{y_x}M'$ için

$$(\nabla^{\mathcal{H}}_X w)(Y) = X^{\mathcal{H}}\big(w(Y)\big) - w(\nabla^{\mathcal{H}}_X Y) \tag{3.90}$$

yazılır ve $\nabla^{\mathcal{H}}_X$,*h* kovaryant türev operatörü olarak adlandırılır.

Benzer şekilde $\forall X \in T_{y_x}M'$ için

$$\nabla_X^{\mathcal{V}} Y = \nabla_{X^{\mathcal{V}}} Y\ ,\ \nabla_X^{\mathcal{V}} f = X^{\mathcal{V}}(f),\ \forall Y \in T_{y_x}M'\ ,\ \forall f \in \Im(M') \tag{3.91}$$

olsun. Eğer $w \in T_{y_x}^{*}M'$ ise $\forall Y \in T_{y_x}M'$ için

$$(\nabla_X^{\mathcal{V}} w)(Y) = X^{\mathcal{V}}\big(w(Y)\big) - w(\nabla_X^{\mathcal{V}} Y) \tag{3.92}$$

yazılır ve $\nabla_X^{\mathcal{V}}$,v kovaryant türev operatörü olarak adlandırılır (Antonelli, 2003).

Tanım 3.4.3. $w \in T_{y_x}^{*}M'$, M' üzerinde bir diferensiyel q-form, ∇; M' üzerinde bir lineer koneksiyon ve T; ∇ nin torsiyon tensörü olsun. Bu durumda dw dış diferansiyeli $\forall X_i \in T_{y_x}M'$ için

$$dw\left(X_1, \dots, X_{q+1}\right) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+j} \left(\nabla_{X_i} w\right)\left(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{q+1}\right)$$

$$- \textstyle\sum_{1 \le i \le j \le q+1} (-1)^{i+j} w\big(T\big(X_i, X_j\big), X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{q+1}\big) \tag{3.93}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Sinha ve Yadav, 1988).

Önerme 3.4.1. ∇, M' üzerinde bir Finsler koneksiyonu ve $w \in T_{y_x}^{*}M'$ 1-form olmak üzere $\forall X, Y \in T_{y_x}M'$ için dw dış diferansiyeli aşağıdaki eşitlikler ile ifade edilir (Miran, 1982).

$$dw\,(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = \left(\nabla_X^{\mathcal{V}} w\right)(Y^{\mathcal{V}}) - \left(\nabla_X^{\mathcal{V}} w\right)(X^{\mathcal{V}}) + w(T(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})) \tag{3.94}$$

$$dw\,(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \left(\nabla_X^{\mathcal{H}} w\right)(Y^{\mathcal{H}}) - \left(\nabla_Y^{\mathcal{H}} w\right)(X^{H}) + w(T(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}))$$

Bu Finsler konneksiyonunun T torsiyon tensör alanı beş Finsler tensör alanı ile karakterize edilir. Bu tensör alanları aşağıdaki gibi ifade edilir (Miron, 1982):

$$[T(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})]^{\mathcal{V}}, [T(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{V}})]^{\mathcal{V}}, [T(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{V}})]^{\mathcal{H}}, [T(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})]^{\mathcal{V}}, [T(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})]^{\mathcal{H}}$$

3.5. FİNSLER KONNEKSİYON EĞRİLİKLERİ

$\forall X, Y, Z \in T_{y_x}M'$ için ∇ konneksiyon eğriliği

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{3.95}$$

eşitliği ile verilir. $R(X, Y)Z$ operatörü yatay vektör alanlarını yatay vektör alanlarına ve dikey vektör alanlarını dikey vektör alanlarına dönüştürür. Sonuç olarak her $X, Y, Z \in T_{y_x}M'$ için

$$R(X,Y)Z = R^{\mathcal{H}}(X,Y)Z^{\mathcal{H}} + R^{\mathcal{V}}(X,Y)Z^{\mathcal{V}} \quad (3.96)$$

yazılır. $R(X,Y)Z, X\ ve\ Y$ ye göre skew simetriktir. Böylece aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 3.5.1. $T_{y_x}M'$ tanjant uzayı üzerinde ∇ Finsler konneksiyon eğriliği aşağıda verilen altı Finsler tensör alanı ile ifade edilir (Antonelli, 2003).

$$R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} = \nabla_X^{\mathcal{H}}\nabla_Y^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{H}} - \nabla_Y^{\mathcal{H}}\nabla_X^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{H}} - \nabla_{[X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}]}Z^{\mathcal{H}} \quad (3.97)$$

$$R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} = \nabla_X^{\mathcal{V}}\nabla_Y^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{H}} - \nabla_Y^{\mathcal{H}}\nabla_X^{\mathcal{V}}Z^{\mathcal{H}} - \nabla_{[X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{H}}]}Z^{\mathcal{H}} \quad (3.98)$$

$$R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{V}} = \nabla_X^{\mathcal{H}}\nabla_Y^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{V}} - \nabla_Y^{\mathcal{H}}\nabla_X^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{V}} - \nabla_{[X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}]}Z^{\mathcal{V}} \quad (3.99)$$

$$R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{H}} = \nabla_X^{\mathcal{V}}\nabla_Y^{\mathcal{V}}Z^{\mathcal{H}} - \nabla_Y^{\mathcal{V}}\nabla_X^{\mathcal{V}}Z^{\mathcal{H}} - \nabla_{[X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}}]}Z^{\mathcal{H}} \quad (3.100)$$

$$R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{H}})Z^{v} = \nabla_X^{\mathcal{V}}\nabla_Y^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{V}} - \nabla_Y^{\mathcal{H}}\nabla_X^{\mathcal{V}}Z^{\mathcal{V}} - \nabla_{[X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{H}}]}Z^{\mathcal{V}} \quad (3.101)$$

$$R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})Z^{v} = \nabla_X^{\mathcal{V}}\nabla_Y^{\mathcal{V}}Z^{\mathcal{V}} - \nabla_Y^{\mathcal{V}}\nabla_X^{\mathcal{V}}Z^{\mathcal{V}} - \nabla_{[X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}}]}Z^{\mathcal{V}} \quad (3.102)$$

Böylece ∇ Finsler koneksiyon eğrilik tensörü Berwald bazına göre üç farklı şekilde ifade edilir.

$$R\left(\frac{\delta}{\delta x^k},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\frac{\delta}{\delta x^h} = R^i_{hjk}\frac{\delta}{\delta x^i} \quad (3.103)$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\frac{\delta}{\delta x^h} = P^i_{hjk}\frac{\delta}{\delta x^i} \quad (3.104)$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\frac{\delta}{\delta x^h} = S^i_{hjk}\frac{\delta}{\delta x^i} \quad (3.105)$$

Bu üç bileşen Teorem 2.5.1 de ifade edilen birinci, üçüncü ve beşinci Finsler tensörlerine karşılık gelmektedir. Diğer üç Finsler tensörü ise aşağıda verilen eşitliklere karşılık gelmektedir.

$$R\left(\frac{\delta}{\delta x^k},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^h} = R^i_{hjk}\frac{\partial}{\partial y^i} \quad (3.106)$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^h} = P^i_{hjk}\frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial y^k},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^h} = S^i_{hjk}\frac{\partial}{\partial y^i}$$

Böylece $\nabla\Gamma = (N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk})$ Finsler koneksiyonları $R^i_{hjk}, P^i_{hjk}\ ve\ S^i_{hjk}$ olmak üzere üç lokal bileşene sahiptir (Antonelli, 2003).

3.6. HEMEN HEMEN DEĞME FİNSLER YAPILAR

M' üzerinde ϕ tensör alanı, η 1-form ve ξ vektör alanı olmak üzere

$$\phi = \phi^{\mathcal{H}} + \phi^{\mathcal{V}} = \phi_j^i(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i} \otimes dx^j + \tilde{\phi}_j^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \delta y^j \tag{3.107}$$

$$\eta = \eta^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{V}} = \eta_i(x,y)dx^i + \tilde{\eta}_i(x,y)\delta y^i$$

$$\xi = \xi^{\mathcal{H}} + \xi^{\mathcal{V}} = \xi^i(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i} + \tilde{\xi}^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{3.108}$$

olsun.

Tanım 3.6.1. M' üzerinde, ϕ, η ve ξ (3.107) ve (3.108) deki gibi tanımlansın. Böylece

$$\eta^{\mathcal{H}} = \eta_i(x,y)dx^i, \qquad \eta^{\mathcal{V}} = \tilde{\eta}_i(x,y)\delta y^i$$

$$\xi^{\mathcal{H}} = \xi^i(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i}, \qquad \xi^{\mathcal{V}} = \tilde{\xi}^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

olmak üzere

$$(\phi^{\mathcal{H}})^2 = -I^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}} \otimes \xi^{\mathcal{H}}, (\phi^{\mathcal{V}})^2 = -I^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}} \otimes \xi^{\mathcal{V}} \tag{3.109}$$

$$\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 1 \tag{3.110}$$

eşitlikleri varsa, bu durumda $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ yapıları sırasıyla, $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde hemen hemen değme Finsler yapılar olarak adlandırılırlar. Burada $M' = (M')^h \oplus (M')^v$ bir Finsler vektör demetidir (Kılıç, N., 2019).

Teorem 3.6.1. $(M')^h$ ve $(M')^v$ Finsler vektör demetleri üzerindeki hemen hemen değme Finsler yapılar $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ olsunlar. Böylece

$$\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = \phi^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 0, \ \eta^{\mathcal{H}} \circ \phi^{\mathcal{H}} = \eta^{\mathcal{V}} \circ \phi^{\mathcal{V}} = 0 \tag{3.111}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (3.109) yardımıyla

$$(\phi^{\mathcal{H}})^2(\xi^{\mathcal{H}}) = -\xi^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})\,\xi^{\mathcal{H}}$$

yazılır. Ayrıca $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = 0$ ya da $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})$, sıfır özdeğerine karşılık gelen $\phi^{\mathcal{H}}$ın nontrivial özvektörüdür. (3.109) kullanılarak

$$0 = (\phi^{\mathcal{H}})^2(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})) = -\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}(\phi(\xi^{\mathcal{H}}))\,\xi^{\mathcal{H}}$$

veya

$$\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{H}}(\phi(\xi^{\mathcal{H}}))\,\xi^{\mathcal{H}}$$

elde edilir. Eğer $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})$ nontrivial özvektör ise $\eta^{\mathcal{H}}(\phi(\xi^{\mathcal{H}})) \neq 0$ olur. Böylece

$$0=(\phi^{\mathcal{H}})^2(\xi^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}))\,\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})=(\eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}))^2\,\xi^{\mathcal{H}} \neq 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Yani $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = 0$ olur. Benzer şekilde

$\phi^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 0$ ifadesi de elde edilir.

Diğer taraftan $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})= 0$ olduğundan $\forall X^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$, $X^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$\eta^{\mathcal{H}}\left(\phi(X^{\mathcal{H}})\right)\xi^{\mathcal{H}} = \phi^3(X^{\mathcal{H}}) + \phi(X^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{H}}\left(\phi^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\right)\xi^{\mathcal{H}} = 0$$

ve

$$\eta^{\mathcal{V}}\left(\phi^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\right)\xi^{\mathcal{V}} = 0$$

elde edilir. Böylece $\eta^{\mathcal{H}} \circ \phi^{\mathcal{H}} = 0$ ve $\eta^{\mathcal{V}} \circ \phi^{\mathcal{V}} = 0$ olur (Kılıç, N., 2019).

Teorem 3.6.2. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde sırasıyla $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Finsler yapılar ise $\mathrm{rank}\phi^{\mathcal{H}} = \mathrm{rank}\phi^{\mathcal{V}} = 2n$ dir.

İspat.

$\phi^{\mathcal{H}}: \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{H}} \to \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{H}}$, $\forall y_x \in M'$,

$$\mathrm{rank}\phi^{\mathcal{H}} + \ker\phi^{\mathcal{H}} = 2n + 1 = dimM'_x \ (\forall x \in M) \tag{3.112}$$

$\forall X^{\mathcal{H}} \in \ker\phi^{\mathcal{H}}$ için $\phi^{\mathcal{H}}X^{\mathcal{H}} = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$0 = \phi^2X^{\mathcal{H}} = -X^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\,\xi^{\mathcal{H}}$ ya da $X^{\mathcal{H}} = \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\,\xi^{\mathcal{H}}$ elde edilir. Yani $X^{\mathcal{H}} \in Sp\{\xi^{\mathcal{H}}\} = ker\phi^{\mathcal{H}}$ olur. Buradan $ker\phi^{\mathcal{H}} = \dim(ker\phi^{\mathcal{H}}) = 1$ olur ve (3.112) dan $\mathrm{rank}\phi^{\mathcal{H}} = 2n$ bulunur.

Benzer şekilde

$\phi^{\mathcal{V}}: \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{V}} \to \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{V}}$, $\forall y_x \in M'$,

$$\mathrm{rank}\phi^{\mathcal{V}} + \ker\phi^{\mathcal{V}} = 2n + 1 = dimM'_x \ (\forall x \in M) \tag{3.113}$$

$\forall X^{\mathcal{V}} \in \ker\phi^{\mathcal{V}}$ için $\phi^{\mathcal{V}}X^{\mathcal{V}} = 0$ olduğundan $0 = \phi^2X^{\mathcal{V}} = -X^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\,\xi^{\mathcal{V}}$ ya da $X^{\mathcal{V}} = \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\, \xi^{\mathcal{V}}$ elde edilir. Böylece $X^{\mathcal{V}} \in Sp\{\xi^{\mathcal{V}}\} = ker\phi^{\mathcal{V}}$ olur. Buradan $ker\phi^{\mathcal{V}} = \dim(ker\phi^{\mathcal{V}}) = 1$ olur ve (3.113) den rank$\phi^{\mathcal{V}} = 2n$ bulunur. (Kılıç, N. 2019)

Uyarı 3.6.1: $(M')^h$ ve $(M')^v$ tek boyutlu olmak üzere $(M')^h$ ve $(M')^v$ alt demetleri üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}\ , \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}},\ \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme yapıları ile birlikte $((M')^h, \phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}\ , \eta^{\mathcal{H}})$ ve $((M')^v, \phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}},\ \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Finsler manifoldları olarak adlandırılırlar (Kılıç, N., 2019).

3.7. YARI FİNSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE HEMEN HEMEN DEĞME YARI METRİK YAPILAR

F^{2n+1} = (M, M', F^*) yarı Finsler manifoldu olsun. (V^i) ve (W^j) lokal bileşenler ile birlikte V ve W vektör alanları için

$g_{ij}^{F^*}$, $g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ $i, j \in \{1,2 \dots ,2n+1\}$ eşitliğindeki gibi tanımlanmak üzere,

$$g^{F^*} : \Gamma(TM')^{\mathcal{V}} \times \Gamma(TM')^{\mathcal{V}} \to \mathfrak{H}(\, M')$$

$$g^{F^*}(V, W)(x, y) = g_{ij}^{F^*}(x, y) V^i(x, y)\, W^j(x, y) \tag{3.114}$$

tanımlayalım. Böylece

$$g_{ij}^{F^*}(x, y) = \ g^{F^*}(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j})(x, y) \tag{3.115}$$

yazılır. Açık olarak g^{F^*} simetrik Finsler tensör alanı olur. g^{F^*} , yarı Finsler metrik olarak adlandırılır. Ayrıca g^{F^*}, $(TM')^{\mathcal{V}}$ Finsler vektör demeti üzerinde yarı-Riemann metrik olarak düşünülebilir.

Benzer şekilde $g_{ij}^{F^*}$, $g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ $i, j \in \{1,2 \dots ,2n+1\}$ deki gibi olmak üzere,

$$g^{F^*} : \Gamma(TM')^{\mathcal{H}} \times \Gamma(TM')^{\mathcal{H}} \to \mathfrak{H}(\, M')$$

$$g^{F^*}(V, W)(x, y) = g_{ij}^{F^*}(x, y) V^i(x, y)\, W^j(x, y) \tag{3.116}$$

$$g_{ij}^{F^*}(x, y) = \ g^{F^*}(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j})(x, y) \tag{3.117}$$

tanımlanabilir. g^{F^*}, yarı Finsler metrik olarak adlandırılır. Ayrıca g^{F^*}, $(TM')^{\mathcal{H}}$ Finsler vektör demeti üzerinde yarı Riemann metrik olarak düşünülebilir (Bejancu ve Farran, 2000).

Bir Finsler vektörü X $\in (TM')^{\mathcal{V}}$ (X $\in (TM')^{\mathcal{H}}$) için

$g^{F^*} = g_{y_x}^{F^*}(y_x), (y_x) = (x, y) \in M'$

olmak üzere

$$g_{y_x}^{F^*}(X,X) > 0 \text{ veya } X = 0 \Rightarrow space-like,$$

$$g_{y_x}^{F^*}(X,X) < 0 \Rightarrow time-like, \tag{3.118}$$

$$g_{y_x}^{F^*}(X,X) = 0 \;\; X \neq 0 \Rightarrow light-like(null)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Diğer taraftan bir Finsler normu (uzaklık)

$$\|X\| = \left| g_{y_x}^{F^*}(X,X)\right|^{\frac{1}{2}} \tag{3.119}$$

eşitliği ile verilir (Bejancu ve Farran, 2000).

$g_{y_x}^{F^*}(X,X) = 1$ ise X birim $space-like$ Finsler vektör $g_{y_x}^{F^*}(X,X) = -1$ ise X birim $time-like$ Finsler vektör olarak adlandırılır. X birim Finsler vektör ise ε= $g_{y_x}^{F^*}(X,X)$ ifadesinde yer alan ε, X in işareti olarak adlandırılır.

$\forall X, Y \in \Gamma(TM')$ için

$$G: \Gamma(TM') \times \Gamma(TM') \to \mathfrak{H}(M')$$

$$G(X,Y) = G^{\mathcal{H}}(X,Y) + G^{\mathcal{V}}(X,Y) \tag{3.120}$$

tanımlayalım. Açık olarak G, M' üzerinde (0,2) tipinde bir simetrik tensör alanı olur. Ayrıca G non-dejenere ve sabit indekslidir. q yarı Finsler metriğinin indeksi olmak üzere M' üzerinde G yarı Riemann metriğinin indeksi $2q$ olur.

$$G = g_{y_x}^{F^*} dx^i \otimes dx^j + g_{y_x}^{F^*} \delta y^i \otimes \delta y^j = G^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{V}} \tag{3.121}$$

M' üzerinde G Sasaki Finsler metriği olarak adlandırılır.

Tanım 3.7.1. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ yatay vektör demeti ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ dikey vektör demeti üzerinde sırasıyla $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme yapılar olsunlar. $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ metrik yapıları

$$G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - \varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}),$$

$$G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) - \varepsilon\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) \tag{3.122}$$

$$G(\phi X, \phi Y) = G^{\mathcal{H}}(\phi X, \phi Y) + G^{\mathcal{V}}(\phi X, \phi Y)$$

eşitliklerini sağlarsa bu durumda ($\phi^{\mathcal{H}}$, $\xi^{\mathcal{H}}$, $\eta^{\mathcal{H}}$, $G^{\mathcal{H}}$) yapısı $(M')^{\boldsymbol{h}}$ üzerinde hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapı olarak ve ($\phi^{\mathcal{V}}$, $\xi^{\mathcal{V}}$, $\eta^{\mathcal{V}}$, $G^{\mathcal{V}}$) yapısıda $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerinde hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapı olarak adlandırılır. Burada $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) = \varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}),\ \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) = \varepsilon G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) \quad (3.123)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Sonuç 3.7.1. ($\phi^{\mathcal{H}}$, $\xi^{\mathcal{H}}$, $\eta^{\mathcal{H}}$, $G^{\mathcal{H}}$) ve ($\phi^{\mathcal{V}}$, $\xi^{\mathcal{V}}$, $\eta^{\mathcal{V}}$, $G^{\mathcal{V}}$), sırasıyla, $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerinde hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapılar olsunlar.

(3.122) ve (3.123) ifadelerinden

$$G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = -G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}),$$

$$G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = -G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) \quad (3.124)$$

ve

$$G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = -G^{\mathcal{H}}(\phi^2 X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

$$G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = -G^{\mathcal{V}}(\phi^2 X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \quad (3.125)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitlikler yardımıyla

$$\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}})$$

$$\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) \quad (3.126)$$

İkinci temel form tanımlanabilir (Sinha ve Yadav,1991).

Önerme 3.7.1. Yukarıda tanımlanan ikinci temel form için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\Omega(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = \Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}),$$

$$\Omega(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \quad (3.127)$$

ve

$$\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = -\Omega(Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}),$$

$$\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = -\Omega(Y^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) \quad (3.128)$$

(Sinha ve Yadav,1991).

Önerme 3.7.2. ∇, M' üzerinde Finsler konneksiyonu ve Ω; $\Omega(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = d\eta(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ şartını sağlayan ikinci temel form olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\Omega(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}) = \left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta\right)(Y^{\mathcal{H}}) - \left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta\right)(X^{\mathcal{H}}) + \eta(\mathrm{T}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})),$$

$$\Omega(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}}) = \left(\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta\right)(Y^{\mathcal{V}}) - \left(\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta\right)(X^{\mathcal{V}}) + \eta(\mathrm{T}(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})) \quad (3.129)$$

Böylece M' üzerinde hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapı hemen hemen ε-Sasakian Finsler yapı olarak adlandırılır. Ayrıca

$(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapıları, sırasıyla, $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerinde hemen hemen ε-Sasakian yapılar olarak adlandırılır.

Teorem 3.7.1. Ω ikinci temel form ve M' üzerinde torsiyonu sıfır olan ∇ hemen hemen ε-Sasakian Finsler koneksiyonu olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\Omega(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}) = \left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta\right)Y^{\mathcal{H}} - \left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta\right)X^{\mathcal{H}},$$

$$\Omega(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}}) = \left(\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta\right)Y^{\mathcal{V}} - \left(\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta\right)X^{\mathcal{V}} \quad (3.130)$$

(Sinha ve Yadav,1991).

Tanım 3.7.2. M' üzerinde hemen hemen ε-Sasakian Finsler yapı, η 1-formu Killing vektör alanı olduğunda ε-Sasakian Finsler yapı olarak adlandırılır.

$$\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta\right)(Y^{\mathcal{H}}) + \left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta\right)(X^{\mathcal{H}}) = 0,$$

$$\left(\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta\right)(Y^{\mathcal{V}}) + \left(\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta\right)(X^{\mathcal{V}}) = 0. \quad (3.131)$$

M' üzerindeki ∇ torsiyonsuz Finsler konneksiyonu Sasakian Finsler konneksiyonu olarak adlandırılır (Sinha ve Yadav,1991).

Teorem 3.7.2. M' üzerinde ε-Sasakian Finsler yapı ile birlikte ∇ torsiyonsuz Finsler konneksiyonu ve Ω ikinci temel form olsun. Böylece aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\Omega(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}) = 2\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta\right)(Y^{\mathcal{H}}) = -2\left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta\right)(X^{\mathcal{H}})$$

$$\Omega(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}}) = 2\left(\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta\right)(Y^{\mathcal{V}}) = -2\left(\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta\right)(X^{\mathcal{V}}) \quad (3.132)$$

(3.20) ve (3.23) ifadelerinden $G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}}) = d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})$ ve $G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},\phi Y^{\mathcal{V}}) = d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})$ yazılır. Böylece

$$d\eta(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}}) = \Omega^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}) \quad (3.133)$$

ve

$$d\eta(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = \Omega^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \quad (3.134)$$

elde edilir (Sinha ve Yadav,1991).

3.8. YARI FİNSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DEĞME YAPILARIN İNTEGRALLENEBİLİR TENSÖR ALANLARI

F^{2n+1} = (M, M', F^*), 0≤q≤2n+1 indeksli yarı Finsler manifoldu olsun. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{v}$ üzerinde ($\phi^{\mathcal{H}}$, $\xi^{\mathcal{H}}$, $\eta^{\mathcal{H}}$) ve ($\phi^{\mathcal{V}}$, $\xi^{\mathcal{V}}$, $\eta^{\mathcal{V}}$) hemen hemen değme Finsler yapılarının integrallenebilir tensör alanları $\forall\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $\forall\xi^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} N^{\mathcal{H}}(X,Y) = [\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}] - \phi[\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] - \phi[X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}] \\ + \phi^2[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N^{\mathcal{V}}(X,Y) = [\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}] - \phi[\phi X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}] - \phi[X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}] + \phi^2[X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}] \\ + d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

ayrıca $\forall\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ ve $\forall\xi^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için N^1, N^2, N^3 ve N^4 tensör alanı aşağıdaki gibidir.

$$N^1(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = N_{\phi}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) + d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} \quad (3.135)$$

$$N^2(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = L^{\mathcal{H}}_{\phi X}\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) - L^{\mathcal{H}}_{\phi Y}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})$$

$$N^3(X^{\mathcal{H}}) = L^{\mathcal{H}}_{\xi}\phi(X^{\mathcal{H}}),\ N^4(X^{\mathcal{H}}) = L^{\mathcal{H}}_{\xi}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})$$

ve

$$N^1(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = N_{\phi}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) + d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}} \quad (3.136)$$

$$N^2(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = L^{\mathcal{V}}_{\phi X}\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) - L^{\mathcal{V}}_{\phi Y}\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})$$

$$N^3(X^{\mathcal{V}}) = L^{\mathcal{V}}_{\xi}\phi(X^{\mathcal{V}}),\ N^4(X^{\mathcal{V}}) = L^{\mathcal{V}}_{\xi}\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})$$

Hemen hemen değme Finsler yapının normal olması için gerek ve yeter şart yukarıda tanımlanan dört tensör alanının sıfır olmasıdır.

Yardımcı Teorem 3.8.1. $N^1 = 0$ ise $N^2 = N^3 = N^4 = 0$ (Yalınız ve Çalışkan 2003).

Önerme 3.8.1. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ Finsler vektör demetleri üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Finsler yapılarının normal olması için gerek ve yeter şart

$$N_{\phi}^{\mathcal{H}} + d\eta^{\mathcal{H}} \otimes \xi^{\mathcal{H}} = 0,$$

$$N_{\phi}^{\mathcal{V}} + d\eta^{\mathcal{V}} \otimes \xi^{\mathcal{V}} = 0 \tag{3.137}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

F^{2n+1} = (M, M', F^*) manifoldunun yarı Finsler metriği ile birlikte $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ vektör demetleri üzerindeki hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapıları, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ olsunlar. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ vektör demetleri üzerinde, $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ yarı Riemann metrik olarak düşünülebilir. Eğer $\xi^{\mathcal{H}}$ karakteristik vektör alanı $G^{\mathcal{H}}$ yarı Riemann metriğine göre ve $\xi^{\mathcal{V}}$ karakteristik vektör alanı da $G^{\mathcal{V}}$ yarı Riemann metriğine göre bir Killing vektör alanı ise bu durumda $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerindeki değme yarı metrik yapılar K-değme yarı metrik yapılar ve $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ demetleri de K- değme yarı metrik Finsler vektör demetleri olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 3.8.2. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme yarı Finsler metrik yapılar olsunlar. Böylece N^2 = 0 ve N^4 = 0 olur. Diğer taraftan N^3 = 0 olması için gerek ve yeter şart $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ metriklerine göre $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ vektör alanlarının Killing vektör alanı olmasıdır.

İspat. (3.126) ve (3.133) ifadelerinden

$$\begin{aligned} d_{\eta}^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) &= \Omega(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi^2 Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) \\ &= d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $d\eta^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$+ $d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = 0$ olur. Böylece $N^2 =$ 0 olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} 0 = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi\xi^{\mathcal{H}}) &= d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) \\ &= X^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) - \xi^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - \eta^{\mathcal{H}}[X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\xi^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}]) = 0$$

olur. Buradan $L_{\xi}^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}} = 0$ elde edilir. Yani $N^4 = 0$ olur. Ayrıca

$$(L_{\xi}^{\mathcal{H}}G)(X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})=\varepsilon\xi^{\mathcal{H}}\left(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\right)-\varepsilon\eta^{\mathcal{H}}[\xi^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}}]=\varepsilon(L_{\xi}^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}=0$$

olduğundan $(L_{\xi}^{\mathcal{H}}d\eta^{\mathcal{H}}) = 0$ bulunur. Sonuç olarak

$$(L_{\xi}^{\mathcal{H}}d\eta^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}) = (L_{\xi}^{\mathcal{H}}\Omega)(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}0 &= \xi^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}([\xi^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}}],\phi Y^{\mathcal{H}}) - G(X^{\mathcal{H}},\phi[\xi^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}])\\ &= (L_{\xi}^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}((X^{\mathcal{H}},(L_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}})\\ &= (L_{\xi}^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}})(X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},N^3(Y^{\mathcal{H}}))\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $N^3 = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\xi^{\mathcal{H}}$ ın Killing vektör alanı olmasıdır. Benzer sekilde $N^2 = 0$ ve $N^4 = 0$ olur. Ayrıca $N^3 = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\xi^{\mathcal{V}}$ nın Killing vektör alanı olmasıdır (Kılıç, N., 2019)

Yardımcı Teorem 3.8.3. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ Finsler vektör demetleri üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}},\eta^{\mathcal{H}},G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}},\eta^{\mathcal{V}},G^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapılar olsunlar.

Böylece $\forall\, X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$2G^{\mathcal{H}}((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})=G^{\mathcal{H}}(N^1(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}),\phi X^{\mathcal{H}}) - d\Omega(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}) + d\Omega(X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}},\phi Z^{\mathcal{H}}) + \varepsilon N^2(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) - \varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Z^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) + \varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}) \qquad (3.139)$$

ve $\forall\, X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$2G^{\mathcal{V}}((\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})=G^{\mathcal{V}}(N^1(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}}),\phi X^{\mathcal{V}}) - d\Omega(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}}) + d\Omega(X^{\mathcal{V}},\phi Y^{\mathcal{V}},\phi Z^{\mathcal{V}}) + \varepsilon N^2(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) - \varepsilon d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Z^{\mathcal{V}},X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) + \varepsilon d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}},X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}) \qquad (3.140)$$

olur.

İspat. ∇ bir Finsler koneksiyonu olmak üzere

$$2G^{\mathcal{H}}\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\right) = X^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}) + Y^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}) - Z^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})$$
$$+G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}],Z^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}([Z^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}}],Y^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}],X^{\mathcal{H}}) \qquad (3.141)$$

ve

$$2G^{\mathcal{V}}\left(\nabla_X^{\mathcal{V}} Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}\right) = X^{\mathcal{V}} G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) + Y^{\mathcal{V}} G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) - Z^{\mathcal{V}} G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})$$

$$+G^{\mathcal{V}}([X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}], Z^{\mathcal{V}}) + G^{\mathcal{V}}([Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}], Y^{\mathcal{V}}) - G^{\mathcal{V}}([Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}}) \quad (3.142)$$

eşitlikleri mevcuttur. Ayrıca

$$d\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = X^{\mathcal{H}}\Omega(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) + Y^{\mathcal{H}}\Omega(Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) + Z^{\mathcal{H}}\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

$$-\Omega([X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}], Z^{\mathcal{H}}) - \Omega([Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) - \Omega([Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \quad (3.143)$$

ve

$$d\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = X^{\mathcal{V}}\Omega(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) + Y^{\mathcal{V}}\Omega(Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) + Z^{\mathcal{V}}\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})$$

$$-\Omega([X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}], Z^{\mathcal{V}}) - \Omega([Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}], Y^{\mathcal{V}}) - \Omega([Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}}) \quad (3.144)$$

yazılır. (3.126) ve (3.131) kullanılarak

$$2G^{v}\left((\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}\right) = \phi Y^{\mathcal{V}} G^{v}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) - Z^{\mathcal{V}}\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) + G^{v}([X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}], Z^{\mathcal{V}})$$

$$+\Omega([Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}], Y^{\mathcal{V}}) - G^{v}([\phi Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}}) + Y^{\mathcal{V}}\,\Omega(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) - \phi Z^{\mathcal{V}} G^{v}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})$$

$$+\Omega([X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}], Z^{\mathcal{V}}) + G^{v}([\phi Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}], Y^{\mathcal{V}}) - G^{v}([Y^{\mathcal{V}}, \phi Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}}) \quad (3.145)$$

elde edilir. (3.144) ifadesinden, (3.126), (3.127) ve (3.128) kullanılarak

$$d\Omega(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = X^{\mathcal{V}}\Omega(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) + \phi Y^{\mathcal{V}} G^{v}(Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) - \varepsilon\phi Y^{\mathcal{V}}\left(\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\right)$$

$$+\varepsilon\phi Z^{\mathcal{V}}\left(\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\right) - \phi Z^{\mathcal{V}} G^{v}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) + G^{v}([X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}], Z^{\mathcal{V}})$$

$$-\varepsilon\eta^{\mathcal{V}}[X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}]\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}) + G^{v}([\phi Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}], Y^{\mathcal{V}}) - \varepsilon\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}[\phi Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}]$$

$$-\Omega([\phi Y^{\mathcal{V}}, \phi Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}}) \quad (3.146)$$

bulunur. Diğer taraftan (3.136) ve (3.126) kullanılarak

$$G^{v}(N^1(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}), \phi X^{\mathcal{V}}) = -\Omega([Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}}) + \Omega([\phi Y^{\mathcal{V}}, \phi Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}})$$

$$-G^{v}([\phi Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}}) + \varepsilon\eta^{\mathcal{V}}[\phi Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}]\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) - G^{v}([Y^{\mathcal{V}}, \phi Z^{\mathcal{V}}], X^{\mathcal{V}})$$

$$+\varepsilon\eta^{\mathcal{V}}[Y^{\mathcal{V}}, \phi Z^{\mathcal{V}}]\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) \quad (3.147)$$

eşitliği elde edilir. (3.135) ifadesinden

$$N^2(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) = \phi Y^{\mathcal{V}}\left(\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})\right) - \phi Z^{\mathcal{V}}\left(\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\right) - \eta^{\mathcal{V}}[\phi Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}]$$

$$-\eta^{\mathcal{V}}[Y^{\mathcal{V}}, \phi Z^{\mathcal{V}}]\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) \quad (3.148)$$

bulunur. (3.144), (3.146), (3.147) ve (3.148) kullanılarak (3.140) elde edilir. Benzer şekilde

$$d\Omega(X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}},\phi Z^{\mathcal{H}})-d\Omega(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})+G^{\mathcal{H}}(N^1(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}),\phi X^{\mathcal{H}})$$

$$+\varepsilon N^2(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})+\varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})$$

$$-\varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Z^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})$$

$$=\ \phi Y^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})-\phi Z^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})+G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}}],Z^{\mathcal{H}})$$

$$+G^{\mathcal{H}}([\phi Z^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}}],Y^{\mathcal{H}})-\Omega([\phi Y^{\mathcal{H}},\phi Z^{\mathcal{H}}],X^{\mathcal{H}})+Y^{\mathcal{H}}\Omega(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})$$

$$-Z^{\mathcal{H}}\Omega(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})+\Omega([X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}],Z^{\mathcal{H}})+\Omega([Z^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}}],Y^{\mathcal{H}})+\Omega([Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}],X^{\mathcal{H}})$$

$$+\Omega([\phi Y^{\mathcal{H}},\phi Z^{\mathcal{H}}],X^{\mathcal{H}})-\ \Omega([Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}],X^{\mathcal{H}})-G^{\mathcal{H}}([\phi Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}],X^{\mathcal{H}})$$

$$-G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}},\phi Z^{\mathcal{H}}],X^{\mathcal{H}})=2G^{\mathcal{H}}((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})$$

elde edilir (Kılıç, N., 2019).

Yardımcı teorem 3.8.3. $\Omega=d\eta$ ve $N^2=0$ ile birlikte $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerinde sırasıyla $(\phi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}},\eta^{\mathcal{H}},G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}},\eta^{\mathcal{V}},G^{\mathcal{V}})$ değme yarı metrik yapılar olmak üzere $\forall\, X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\in(TM')^{\mathcal{H}}$ ve $\forall\, X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}}\in(TM')^{\mathcal{V}}$ için

(a) $$2G^{\mathcal{H}}\left(\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi\right)Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\right)=G^{\mathcal{H}}(N^1(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}),\phi X^{\mathcal{H}})$$

$$+\varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})-\varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(\phi Z^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) \qquad (3.149)$$

ve

$$2G^{\mathcal{V}}\left(\left(\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi\right)Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}}\right)=G^{\mathcal{V}}(N^1(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}}),\phi X^{\mathcal{V}})$$

$$+\varepsilon d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}},X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})-\varepsilon d\eta^{\mathcal{V}}(\phi Z^{\mathcal{V}},X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) \qquad (3.150)$$

(b) $$\nabla_\xi^{\mathcal{H}}\phi=0,\ \nabla_\xi^{\mathcal{V}}\phi=0 \qquad (3.151)$$

(Kılıç, 2019).

İspat. (a) (3.149) ve (3.150) ifadelerinden elde edilmek istenilen eşitliğin varlığı aşikardır.

(b) $N^2(X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})=0$ olmasından

$$N^2(X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})=\eta^{\mathcal{H}}[\phi X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}}]=-\,d\eta^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})=0$$

olur. Böylece (3.149) dan $\forall\, X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$G^{\mathcal{H}}\left((\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi)X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}\right) = 0$$

elde edilir. Yani $\nabla_{\xi}^{\mathcal{H}}\phi = 0$ olur. Benzer şekilde $\forall\, X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$G^{\mathcal{V}}\left((\nabla_{\xi}^{\mathcal{V}}\phi)X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}\right) = 0$$

olur. Yani $\nabla_{\xi}^{\mathcal{V}}\phi = 0$ bulunur.

Önerme 3.8.2. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme yarı Finsler metrik yapılar olmak üzere, bu yapıların K-değme yarı Finsler metrik yapılar olması için gerek ve yeter şart $N^3 = 0$ olmasıdır.

Sonuç 3.8.1. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerinde ε-Sasakian Finsler yapılar K-değme yarı-metrik yapılardır (Kılıç, N., 2019).

Teorem 3.8.1. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme yarı Finsler metrik yapılar olmak üzere, bu yapıların K-değme yarı metrik Finsler yapılar olmaları için gerek ve yeter şart

$$\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}} = -\frac{\varepsilon}{2}\,\phi X^{\mathcal{H}},\ \nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}} = -\frac{\varepsilon}{2}\,\phi X^{\mathcal{V}} \tag{3.152}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Kılıç, 2019).

İspat. $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapıları birer K-değme yarı metrik yapı olsun. Böylece , $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ Killing vektör alanı olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$L_{\xi}^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}} = L_{\xi}^{\mathcal{V}}G^{\mathcal{V}} = 0.$$

Ayrıca

$$G^{\mathcal{H}}\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}\right) = -G^{\mathcal{H}}\left(X^{\mathcal{H}}, \nabla_Y^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}\right),$$

$$G^{\mathcal{V}}\left(\nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}\right) = -G^{\mathcal{V}}\left(X^{\mathcal{V}}, \nabla_Y^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}}\right) \tag{3.153}$$

elde edilir. Diğer taraftan Koszul formülünden

$$2G^{\mathcal{H}}\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}\right) = \varepsilon X^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}) + \xi^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - \varepsilon Y^{\mathcal{H}}\left(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\right)$$
$$+G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) + \varepsilon\eta^{\mathcal{H}}[Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}] + G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) \tag{3.154}$$

ve

$$2G^{\mathcal{H}}\left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}\right) = \varepsilon Y^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) + \xi^{\mathcal{H}}G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) - \varepsilon X^{\mathcal{H}}\left(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\right)$$

$$+G^{\mathcal{H}}([Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], X^{\mathcal{H}}) + \varepsilon\eta^{\mathcal{H}}[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] + G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}}) \tag{3.155}$$

bulunur. (3.154) ve (3.155) ifadelerinden

$$G^{\mathcal{H}}\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}\right) - G^{\mathcal{H}}\left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}\right) = \varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

olur ve (3.147), (3.153) kullanılarak, $\forall\, X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$G^{\mathcal{H}}\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}\right) = G^{\mathcal{H}}(-\frac{\varepsilon}{2}\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})$$

bulunur. Böylece $\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}} = (-\frac{\varepsilon}{2}\phi X^{\mathcal{H}})$ olur. Benzer şekilde $\forall\, X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için $\xi^{\mathcal{V}}$ Killing vektör alanı oldugundan, Koszul formülünden $\forall\, Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ olmak üzere

$$G^{\mathcal{V}}\left(\nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}\right) = G^{\mathcal{V}}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\phi X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}} = (-\frac{\varepsilon}{2}\phi X^{\mathcal{V}})$$

bulunur.

ξ^H ın Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $N^3 = 0$ olmasıdır. $L_{\xi^{\mathcal{H}}}\eta^{\mathcal{H}} = 0$ olmasından

$$0 = \left(L_\xi^{\mathcal{H}} d\eta^{\mathcal{H}}\right)(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \xi^{\mathcal{H}}\left(d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\right) - d\eta^{\mathcal{H}}([\xi^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}], Y^{\mathcal{H}})$$

$$-d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, [\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]) = L_\xi^{\mathcal{H}} G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}\phi Y^{\mathcal{H}}) + G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \left(L_\xi^{\mathcal{H}}\phi\right)Y^{\mathcal{H}})$$

elde edilir ve böylece $L_\xi^{\mathcal{H}} G^{\mathcal{H}} = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $L_\xi^{\mathcal{H}}\phi = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Böylece

$$h = \frac{1}{2}L_\xi^{\mathcal{H}}\phi = \frac{1}{2}N^3 \tag{3.156}$$

şeklinde bir tensör ortaya çıkar. Bu tensör değme yarı Finsler metrik yapıların geometrisinin tanımlanmasında önemli bir rol oynar. Ayrıca (3.149) ve (3.150) kullanılarak kovaryant türev operatörüne ait aşağıdaki özellikler ispatlanabilir.

$$\nabla_\xi^{\mathcal{H}}\phi = 0,\ \nabla_\xi^{\mathcal{V}}\phi = 0 \tag{3.157}$$

ve

$$\nabla^{\mathcal{H}}_{X}\xi^{\mathcal{H}} = -\frac{\varepsilon}{2}\phi X^{\mathcal{H}} - \phi h X^{\mathcal{H}},$$

$$\nabla^{\mathcal{V}}_{X}\xi^{\mathcal{V}} = -\frac{\varepsilon}{2}\phi X^{\mathcal{V}} - \phi h X^{\mathcal{V}} . \tag{3.158}$$

Riemann durumda (3.157) ve (3.158) ifadeleri kullanılarak h tensörünün self-adjoint olduğu, yani $h\phi = -\phi h$ ve $h\xi = trh = 0$ olduğu ispatlanabilir. Ayrıca $\tau = L_{\xi}G$ alınırsa

$$\tau(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = 2G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, h\phi Y^{\mathcal{V}})$$

$$\tau(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = 2G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, h\phi Y^{\mathcal{H}})$$

bulunur.

Standart ortonormalleştirme işlemi ile birlikte her bir $((M')^{\boldsymbol{h}}, \phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ (hemen hemen) değme yarı Finsler metrik manifoldu $\phi^{\mathcal{H}}-$ bazı olarak adlandırılan özel bir çeşit lokal yarı ortonormal baza sahiptir. Böyle bir baz $\{E_1^{\mathcal{H}}, \dots, E_n^{\mathcal{H}} \phi E_1^{\mathcal{H}}, \dots, \phi E_n^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}\}$ formundadır.

Benzer şekilde $((M')^{\mathcal{V}}, \phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ (hemen hemen) değme yarı Finsler metrik manifoldu ise $\phi^{\mathcal{V}}-$ bazı olarak adlandırılan özel bir çeşit lokal yarı ortonormal baza sahiptir. Böyle bir baz $\{E_1^{\mathcal{V}}, \dots, E_n^{\mathcal{V}}, \phi E_1^{\mathcal{V}}, \dots, \phi E_n^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}\}$ formundadır. Özel olarak, yarı Riemann metrik, ξ nin space-like yada time-like olmasına göre, $(q, 2n+1-q)$ya da $(q+1, 2n-q)$ olması durumunda hemen hemen değme Finsler yapı ile uyumludur. Şimdi bununla ilgili aşağıdaki yardımcı teoremi verelim (Kılıç, 2019).

Yardımcı Teorem 3.8.5. $((M')^{\boldsymbol{h}}, \phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $((M')^{\mathcal{V}}, \phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme yarı metrik Finsler manifoldları olsunlar. Böylece

$$div\xi^{\mathcal{H}} = 0, \qquad div\eta^{\mathcal{H}} = 0$$

$$div\xi^{\mathcal{V}} = 0, \qquad div\eta^{\mathcal{V}} = 0$$

olur.

İspat. $(TM')^{\boldsymbol{h}}$ üzerinde $\{E_1^{\mathcal{H}}, \dots, E_n^{\mathcal{H}}, \phi E_1^{\mathcal{H}}, \dots, \phi E_n^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}\}$ $\phi^{\mathcal{H}}-$ bazını ele alalım. Böylece $\nabla^{\mathcal{H}}_{\xi}\xi^{\mathcal{H}} = 0$ ve $h\phi = -\phi h$ olduğundan,

$$div\xi^{\mathcal{H}} = tr\nabla\xi^{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, G^{\mathcal{H}}\left(\nabla^{\mathcal{H}}_{E_i}\xi^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}\right) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, G^{\mathcal{H}}\left(\nabla^{\mathcal{H}}_{\phi E_i}\xi^{\mathcal{H}}, \phi E_i^{\mathcal{H}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, \mathrm{G}^{\mathcal{H}}\left(\varepsilon\phi E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}\right) - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, \mathrm{G}^{\mathcal{H}}\left(\phi h E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, \mathrm{G}^{\mathcal{H}}(\varepsilon E_i, \phi E_i)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, \mathrm{G}^{\mathcal{H}}(\phi h E_i, E_i) = -\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, \mathrm{G}^{\mathcal{H}}\left(\phi h E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}\right) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, \mathrm{G}^{\mathcal{H}}\left(\phi h E_i^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}\right)$$

$$= 0$$

ve

$$div\eta^{\mathcal{H}} = -tr\nabla_{\eta}^{\mathcal{H}} = -\varepsilon div\xi^{\mathcal{H}} = 0$$

bulunur. Benzer olarak $(TM')^{\mathcal{V}}$ üzerinde $\{E_1^{\mathcal{V}}, \dots, E_n^{\mathcal{V}}, \phi E_1^{\mathcal{V}}, \dots, \phi E_n^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}\}$ $\phi^{\mathcal{V}}$ bazı ele alınırsa

$$div\eta^{\mathcal{V}} = -tr\nabla_{\eta}^{\mathcal{V}} = -\varepsilon div\xi^{\mathcal{V}} = 0$$

elde edilir.

3.9. YARI FİNSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE ε-SASAKİAN YAPILAR

Tanım 3.9.1. $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, \mathrm{G}^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, \mathrm{G}^{\mathcal{V}})$ değme yarı Finsler metrik yapıları

(i) Normal, yani $[\phi^{\mathcal{H}}, \phi^{\mathcal{H}}] + d\eta^{\mathcal{H}} \otimes \xi^{\mathcal{H}} = 0$, $[\phi^{\mathcal{V}}, \phi^{\mathcal{V}}] + d\eta^{\mathcal{V}} \otimes \xi^{\mathcal{V}} = 0$ ise Sasakian olarak adlandırılır.

(ii) $h = 0$, yani $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ Killing vektör alanları ise K-degme olarak adlandırılır.

Teorem 3.9.1. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\mathcal{V}}$ üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, \mathrm{G}^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, \mathrm{G}^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapıların ε-Sasakian yapı olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}[G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} - \varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}] \quad (3.159)$$

$$(\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}[G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}} - \varepsilon\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}}] \quad (3.160)$$

olmasıdır (Kılıç, 2019).

İspat. Yapı normal ise $N^1 = N^2 = 0$ ve $\Omega = d\eta$ olur. Böylece (3.149) ifadesini kullanarak

$$2G^{\mathcal{H}}\big((\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}}\big)=\varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})-\varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})$$

$$=\varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\varepsilon G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})-\varepsilon G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})$$

$$=G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})-\varepsilon G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})$$

$$=G^{\mathcal{H}}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}-\varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca , $\forall\, X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}}\in(TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}=\frac{1}{2}[G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}-\varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}]$$

olur. Benzer şekilde (3.150) ifadesini kullanarak , $\forall\, X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}}\in(TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$(\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)Y^{\mathcal{V}}=\frac{1}{2}[G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}-\varepsilon\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}}]$$

bulunur. Diğer taraftan yapı (3.159) ve (3.160) eşitliklerini sağlar. Ayrıca (3.160) eşitliğinde $Y^{\mathcal{H}}=\xi^{\mathcal{H}}$ alınırsa

$$(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)\xi^{\mathcal{H}}=\frac{1}{2}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}-\varepsilon X^{\mathcal{H}}),$$

$$-\phi(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}})=\frac{1}{2}\varepsilon(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}-X^{\mathcal{H}})$$

$$-\phi^2(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}})=-\frac{\varepsilon}{2}(\phi X^{\mathcal{H}})$$

$$\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}=-\frac{\varepsilon}{2}\phi X^{\mathcal{H}}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.161) eşitliğinde de $Y^{\mathcal{V}}=\xi^{\mathcal{V}}$ alınırsa

$$\nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}}=-\frac{\varepsilon}{2}\phi X^{\mathcal{V}}$$

olur. ξ skew-simetrik olduğundan $\xi^{\mathcal{H}}$ ve $\xi^{\mathcal{V}}$ nin Killing vektör alanı olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca

$$N_\phi(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})+d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}=-\phi(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi Y^{\mathcal{H}}-\phi\nabla_X^{\mathcal{H}}Y^{\mathcal{H}})$$

$$+\phi(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\phi X^{\mathcal{H}}-\phi\nabla_Y^{\mathcal{H}}X^{\mathcal{H}})+(\nabla_{\phi X}^{\mathcal{H}}\phi Y^{\mathcal{H}}-\phi\nabla_{\phi X}^{\mathcal{H}}Y^{\mathcal{H}})-(\nabla_{\phi Y}^{\mathcal{H}}\phi X^{\mathcal{H}}$$
$$-\phi\nabla_{\phi Y}^{\mathcal{H}}X^{\mathcal{H}})$$

$$+d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}$$

$$=-\phi(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}+\phi(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)X^{\mathcal{H}}+(\nabla_{\phi X}^{\mathcal{H}}\phi)Y^{\mathcal{H}}-(\nabla_{\phi Y}^{\mathcal{H}}\phi)X^{\mathcal{H}}$$

$$=\frac{1}{2}\{-\phi(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}-\varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}})$$

$$+\phi(G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}-\varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}})+G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}-\varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}$$

$$-G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}-\varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}}\}+d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}$$

$$=-G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}+d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}$$

$$=-d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}+d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}$$

$$=0$$

elde edilir ve benzer şekilde

$$N_{\phi}(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})+d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}=0$$

olup yapı ε-Sasakian yapı olur.

Teorem 3.9.2. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{v}$ üzerinde sırasıyla $(\phi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}},\eta^{\mathcal{H}},G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}},\eta^{\mathcal{V}},G^{\mathcal{V}})$ yapılarının K-değme olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen iki durumun sağlanmasıdır.

(1) $(M')^{\boldsymbol{h}}$ üzerinde $\xi^{\mathcal{H}},G^{\mathcal{H}}$ metriğine göre Killing vektör alanı ve $(M')^{v}$ üzerinde $\xi^{\mathcal{V}},G^{\mathcal{V}}$ metriğine göre Killing vektör alanıdır.

(2) $(M')^{\boldsymbol{h}}$ demetinin her noktasında flag eğriliği $\frac{\varepsilon}{4}$ ve $(M')^{v}$ demetinin her noktasında flag eğriliği $\frac{\varepsilon}{4}$ tür (Kılıç, N., 2019).

İspat. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}},\eta^{\mathcal{H}},G^{\mathcal{H}})$ K-değme yapı olsun. $X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}}$ a ortogonal birim vektör alanı olmak üzere (3.152) ifadesinden,

$$G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})=G^{\mathcal{H}}\left(\nabla^{\mathcal{H}}_{X}\nabla^{\mathcal{H}}_{\xi}\xi^{\mathcal{H}}-\nabla^{\mathcal{H}}_{\xi}\nabla^{\mathcal{H}}_{X}\xi^{\mathcal{H}}-\nabla^{\mathcal{H}}_{[X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}}]}\xi^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}}\right)$$

$$=G^{\mathcal{H}}(\frac{\varepsilon}{2}\nabla^{\mathcal{H}}_{\xi}(\phi X^{\mathcal{H}})+\frac{\varepsilon}{2}\left(-\frac{\varepsilon}{2}(\phi^{2}X^{\mathcal{H}})-\frac{\varepsilon}{2}\phi\left(\nabla^{\mathcal{H}}_{\xi}X^{\mathcal{H}}\right),X^{\mathcal{H}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})-\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})\}$$

$$=\frac{1}{4}G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})$$

bulunur. $X^{\mathcal{H}}$ bir space-like vektör ise $\xi^{\mathcal{H}}$ bir time-like vektör olur veya $X^{\mathcal{H}}$ bir time-like vektör ise $\xi^{\mathcal{H}}$ bir space-like vektör olur. Şimdi $(M')^{v}$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}},\eta^{\mathcal{V}},G^{\mathcal{V}})$

K-değme yapı olsun. Benzer olarak, $X^{\mathcal{V}}$, $\xi^{\mathcal{V}}$ a ortogonal birim vektör alanı olmak üzere, (3.152) ifadesinden

$$\mathrm{G}^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}},X^{\mathcal{V}}) = \frac{1}{4}\{\mathrm{G}^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},X^{\mathcal{V}}) - \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}},X^{\mathcal{V}})\}$$
$$= \frac{1}{4}\mathrm{G}^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},X^{\mathcal{V}})$$

bulunur. $X^{\mathcal{V}}$ bir space-like vektör ise $\xi^{\mathcal{V}}$ bir time-like vektör olur ya da $X^{\mathcal{V}}$ bir time-like vektör ise $\xi^{\mathcal{V}}$ bir space-like vektör olur. Böylece

$$K(X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}}) = \frac{\mathrm{G}^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})}{\varepsilon\mathrm{G}^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})} = \frac{\varepsilon}{4}$$

ve

$$K(X^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}}) = \frac{\mathrm{G}^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}},X^{\mathcal{V}})}{\varepsilon\mathrm{G}^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},X^{\mathcal{V}})} = \frac{\varepsilon}{4}$$

elde edilir. Diğer taraftan $(M')^{\boldsymbol{h}}$ üzerinde $\xi^{\mathcal{H}}$, $\mathrm{G}^{\mathcal{H}}$ metrigine göre Killing vektör alanı olduğundan $\forall X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$\varepsilon d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}) = \mathrm{G}^{\mathcal{H}}\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}\right) - \mathrm{G}^{\mathcal{H}}\left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}}\right)$$
$$= -2\mathrm{G}^{\mathcal{H}}\left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}}\right)$$
$$= -2\mathrm{G}^{\mathcal{H}}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\phi Y^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}}\right)$$
$$= \varepsilon\mathrm{G}^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}})$$
$$d\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}) = \mathrm{G}^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}})$$

bulunur. Sonuç olarak $(M')^{\boldsymbol{h}}$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}},\eta^{\mathcal{H}},\mathrm{G}^{\mathcal{H}})$ yapısı K-değme yapı olur. Benzer şekilde $(M')^{v}$ üzerinde $\xi^{\mathcal{V}}$, $\mathrm{G}^{\mathcal{V}}$ metriğine göre Killing vektör alanı olduğundan $\forall X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$d\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}}) = \mathrm{G}^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},\phi Y^{\mathcal{V}})$$

elde edilir ki bu da $(M')^{v}$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}},\eta^{\mathcal{V}},\mathrm{G}^{\mathcal{V}})$ yapısının K-değme yapı olduğunu gösterir.

Teorem 3.9.3. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{v}$ Finsler vektör demetleri üzerinde, sırasıyla, $(\phi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}},\eta^{\mathcal{H}},\mathrm{G}^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}},\eta^{\mathcal{V}},\mathrm{G}^{\mathcal{V}})$ ε-Sasakian Finsler yapılar olsunlar. Böylece ∇ Finsler koneksiyonunun Riemann eğriliği aşağıdaki gibidir:

$$R(\mathrm{X}^{\mathcal{V}},\mathrm{Y}^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}=\tfrac{1}{4}\{\eta^{\mathcal{V}}(\mathrm{Y}^{\mathcal{V}})\mathrm{X}^{\mathcal{V}}-\eta^{\mathcal{V}}(\mathrm{X}^{\mathcal{V}})\mathrm{Y}^{\mathcal{V}}\} \tag{3.161}$$

$$R(\mathrm{X}^{\mathcal{H}},\mathrm{Y}^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}=\tfrac{1}{4}\{\eta^{\mathcal{H}}(\mathrm{Y}^{\mathcal{H}})\mathrm{X}^{\mathcal{H}}-\eta^{\mathcal{H}}(\mathrm{X}^{\mathcal{H}})\mathrm{Y}^{\mathcal{H}}\} \tag{3.162}$$

(Kılıç, 2019).

İspat. $(\phi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}},\eta^{\mathcal{H}},\mathrm{G}^{\mathcal{H}})$ $(M')^{\boldsymbol{h}}$ üzerinde ε-Sasakian Finsler yapı olsun. (3.152) ifadesinden

$$R(\mathrm{X}^{\mathcal{H}},\mathrm{Y}^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}=\nabla_X^{\mathcal{H}}\nabla_Y^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}-\nabla_Y^{\mathcal{H}}\nabla_X^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}-\nabla_{[X^{\mathcal{H}},\mathrm{Y}^{\mathcal{H}}]}^{\mathcal{H}}\xi^{\mathcal{H}}$$

$$=\nabla_X^{\mathcal{H}}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\phi\mathrm{Y}^{\mathcal{H}}\right)-\nabla_Y^{\mathcal{H}}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\phi\mathrm{X}^{\mathcal{H}}\right)-\nabla_{\nabla_X^{\mathcal{H}}\mathrm{Y}^{\mathcal{H}}-\nabla_Y^{\mathcal{H}}\mathrm{X}^{\mathcal{H}}}\xi^{\mathcal{H}}$$

$$=-\frac{\varepsilon}{2}(\nabla_X^{\mathcal{H}}\phi)\mathrm{Y}^{\mathcal{H}}+\frac{\varepsilon}{2}(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\phi)\mathrm{X}^{\mathcal{H}}=\frac{1}{4}(\eta^{\mathcal{H}}(\mathrm{Y}^{\mathcal{H}})\mathrm{X}^{\mathcal{H}}-\eta^{\mathcal{H}}(\mathrm{X}^{\mathcal{H}})\mathrm{Y}^{\mathcal{H}})$$

elde edilir. Benzer şekilde $(\phi^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}},\eta^{\mathcal{V}},\mathrm{G}^{\mathcal{V}})$ $(M')^{v}$ üzerinde ε -Sasakian Finsler yapı olsun. (3.152) ifadesinden

$$R(\mathrm{X}^{\mathcal{V}},\mathrm{Y}^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}=\nabla_X^{\mathcal{V}}\nabla_Y^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}}-\nabla_Y^{\mathcal{V}}\nabla_X^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}}-\nabla_{[X^{\mathcal{V}},\mathrm{Y}^{\mathcal{V}}]}^{\mathcal{V}}\xi^{\mathcal{V}}$$

$$=\nabla_X^{\mathcal{V}}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\phi\mathrm{Y}^{\mathcal{V}}\right)-\nabla_Y^{\mathcal{V}}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\phi\mathrm{X}^{\mathcal{V}}\right)-\nabla_{\nabla_X^{\mathcal{V}}\mathrm{Y}^{\mathcal{V}}-\nabla_Y^{\mathcal{V}}\mathrm{X}^{\mathcal{V}}}\xi^{\mathcal{V}}$$

$$=-\frac{\varepsilon}{2}(\nabla_X^{\mathcal{V}}\phi)\mathrm{Y}^{\mathcal{V}}+\frac{\varepsilon}{2}(\nabla_Y^{\mathcal{V}}\phi)\mathrm{X}^{\mathcal{V}}$$

$$=\frac{1}{4}(\eta^{\mathcal{V}}(\mathrm{Y}^{\mathcal{V}})\mathrm{X}^{\mathcal{V}}-\eta^{\mathcal{V}}(\mathrm{X}^{\mathcal{V}})\mathrm{Y}^{\mathcal{V}})$$

bulunur.

Teorem 3.9.5. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{v}$ **,**üzerinde, sırasıyla $(\phi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}},\eta^{\mathcal{H}},\mathrm{G}^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}},\eta^{\mathcal{V}},\mathrm{G}^{\mathcal{V}})$ ε -Sasakian Finsler yapılar olmak üzere

$$R(X,Y)\phi Z=R(X,Y)\phi Z^{\mathcal{H}}+R(X,Y)\phi Z^{\mathcal{V}} \tag{3.163}$$

$$R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})\phi Z^{\mathcal{V}}=\phi R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}}+\frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}-G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}}$$

$$+G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi Y^{\mathcal{V}}-G^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}}\} \tag{3.164}$$

$$R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\phi Z^{\mathcal{H}}=\phi R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}+\frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}$$

$$-G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}+G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}}-G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}\} \tag{3.165}$$

eşitlikleri sağlanır (Kılıç, N., 2019).

İspat. (3.152) ve (3.159) ifadelerini kullanarak

$$R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\phi Z^{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\nabla_X^{\mathcal{H}}(G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}) - \frac{\varepsilon}{2}\nabla_X^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}})$$

$$+\frac{1}{2}\left\{G^{\mathcal{H}}\left(X^{\mathcal{H}},\nabla_Y^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{H}}\right)\xi^{\mathcal{H}} - \varepsilon\eta^{\mathcal{H}}\left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{H}}\right)X^{\mathcal{H}}\right\} + \phi R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}$$

$$-\frac{1}{2}\nabla_Y^{\mathcal{H}}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}) + \frac{\varepsilon}{2}\nabla_Y^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}) - \frac{1}{2}G^{\mathcal{H}}\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}\right)\xi^{\mathcal{H}}$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\left(\eta^{\mathcal{H}}\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}Z^{\mathcal{H}}\right)Y^{\mathcal{H}}\right) - \frac{1}{2}G^{\mathcal{H}}([X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}],Z^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}} + \frac{\varepsilon}{2}(\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})[X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}}]$$

$$= \phi R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} + \frac{\varepsilon}{4}(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}}) - \frac{\varepsilon}{4}(G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}})$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\left(\left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}\right)Z^{\mathcal{H}}X^{\mathcal{H}} - \left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta^{\mathcal{H}}\right)Z^{\mathcal{H}}Y^{\mathcal{H}}\right) = \phi R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}\{(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}}) - (G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}) + \Omega(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}$$

$$-\Omega(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}\} = \phi R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}} + \frac{\varepsilon}{4}\{(G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}})$$

$$-(G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}) - G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}\}$$

elde ederiz. Ayrıca (3.152) ve (3.160) ifadelerini kullanarak

$$R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})\phi Z^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}\nabla_X^{\mathcal{V}}(G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}) - \frac{\varepsilon}{2}\nabla_X^{\mathcal{V}}(\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}})$$

$$+\frac{1}{2}\left\{G^{\mathcal{V}}\left(X^{\mathcal{V}},\nabla_Y^{\mathcal{V}}Z^{\mathcal{V}}\right)\xi^{\mathcal{V}} - \varepsilon\eta^{\mathcal{V}}\left(\nabla_Y^{\mathcal{V}}Z^{\mathcal{V}}\right)X^{\mathcal{V}}\right\} + \phi R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}}$$

$$-\frac{1}{2}\nabla_Y^{\mathcal{V}}(G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}) + \frac{\varepsilon}{2}\nabla_Y^{\mathcal{V}}(\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}}) - \frac{1}{2}G^{\mathcal{V}}\left(\nabla_X^{\mathcal{V}}Z^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}}\right)\xi^{\mathcal{V}}$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\left(\eta^{\mathcal{V}}\left(\nabla_X^{\mathcal{V}}Z^{\mathcal{V}}\right)Y^{\mathcal{V}}\right) - \frac{1}{2}G^{\mathcal{V}}([X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}}],Z^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}} + \frac{\varepsilon}{2}(\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})[X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}}]$$

$$= \phi R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}} + \frac{\varepsilon}{4}(G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi Y^{\mathcal{V}}) - (G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}})$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\left(\left(\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta^{\mathcal{V}}\right)Z^{\mathcal{V}}X^{\mathcal{V}} - \left(\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta^{\mathcal{V}}\right)Z^{\mathcal{V}}Y^{\mathcal{V}}\right) = \phi R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}}$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}\{(G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi Y^{\mathcal{V}}) - (G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}}) + \Omega(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}}$$

$$-\Omega(X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}\} = \phi R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}} + \frac{\varepsilon}{4}\{(G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi Y^{\mathcal{V}})$$

$$-(G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}})-G^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}}+G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}\}$$

bulunur.

Sonuç 3.9.1. (3.163), (3.164), (3.165) eşitliklerini kullanarak

$$R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}=-\phi R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})\phi Z^{\mathcal{H}}+\frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}$$

$$-G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}-G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}+G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}}\} \quad (3.166)$$

$$R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}}=-\phi R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})\phi Z^{\mathcal{V}}+\frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}}$$

$$-G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}-G^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}}+G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi Y^{\mathcal{V}}\} \quad (3.167)$$

ve

$$G^{\mathcal{H}}(R(\phi X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}})\phi Z^{\mathcal{H}},\phi W^{\mathcal{H}})=G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}})$$

$$+\frac{1}{4}\{-\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}})-\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(W^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})$$

$$+\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(W^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})+\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}})\} \quad (3.168)$$

$$G^{\mathcal{V}}(R(\phi X^{\mathcal{V}},\phi Y^{\mathcal{V}})\phi Z^{\mathcal{V}},\phi W^{\mathcal{V}})=G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}},W^{\mathcal{V}})$$

$$+\frac{1}{4}\{-\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},W^{\mathcal{V}})-\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(W^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})$$

$$+\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(W^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})+\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},W^{\mathcal{V}})\} \quad (3.169)$$

olur. (Kılıç, 2019)

İspat. (3.164) eşitliğinden

$$R(\phi X^{\mathcal{V}},\phi Y^{\mathcal{V}})\phi Z^{\mathcal{V}}=\phi R(\phi X^{\mathcal{V}},\phi Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}}+\frac{\varepsilon}{4}\{-G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi Y^{\mathcal{V}}$$

$$+\varepsilon\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})\phi Y^{\mathcal{V}}+G^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}}-G^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}$$

$$-G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}+\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}+G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}}$$

$$-\varepsilon\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}}\}$$

ve

$$G^{\mathcal{V}}(R(\phi X^{\mathcal{V}},\phi Y^{\mathcal{V}})\phi Z^{\mathcal{V}},\phi W^{\mathcal{V}})=G^{\mathcal{V}}(\phi R(\phi X^{\mathcal{V}},\phi Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}},\phi W^{\mathcal{V}})$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}\{-G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}},\phi W^{\mathcal{V}})+\varepsilon\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}},\phi W^{\mathcal{V}})$$

$$+G^{\mathcal{V}}(\phi Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},\phi W^{\mathcal{V}})-G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},\phi W^{\mathcal{V}})$$

$$+G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}},\phi W^{\mathcal{V}})-\varepsilon\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}},\phi W^{\mathcal{V}})$$

$$=G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}},Y^{\mathcal{V}})Z^{\mathcal{V}},W^{\mathcal{V}})+\frac{1}{4}\{-\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},W^{\mathcal{V}})$$

$$-\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(W^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})+\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(W^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},Z^{\mathcal{V}})$$

$$+\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}},W^{\mathcal{V}})\}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.165) eşitliğinden

$$R(\phi X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}})\phi Z^{\mathcal{H}}=\phi R(\phi X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}}+\frac{\varepsilon}{4}\{-G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}}$$

$$+\varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})\phi Y^{\mathcal{H}}+G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}}-G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}$$

$$-G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}+\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}+G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}$$

$$-\varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}\}$$

ve

$$G^{\mathcal{H}}(R(\phi X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}})\phi Z^{\mathcal{H}},\phi W^{\mathcal{H}})=G^{\mathcal{H}}(\phi R(\phi X^{\mathcal{H}},\phi Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}},\phi W^{\mathcal{H}})$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}\{-G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},\phi W^{\mathcal{H}})+\varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},\phi W^{\mathcal{H}})$$

$$+G^{\mathcal{H}}(\phi Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\phi W^{\mathcal{H}})-G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},\phi W^{\mathcal{H}})$$

$$+G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}},\phi W^{\mathcal{H}})-\varepsilon\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}},\phi W^{\mathcal{H}})$$

$$=G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}},Y^{\mathcal{H}})Z^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}})+\frac{1}{4}\{-\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}})$$

$$-\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(W^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})+\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(W^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},Z^{\mathcal{H}})$$

$$+\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}},W^{\mathcal{H}})\}$$

bulunur.

$X^{\mathcal{H}}\in(TM')^{\mathcal{H}}$ birim vektörü $\xi^{\mathcal{H}}$ a ortogonal ise $(TM')^{\mathcal{H}}$ deki düzlem kesit olan $\{X^{\mathcal{H}},\phi X^{\mathcal{H}}\}$ yatay ϕ -kesit olarak adlandırılır. Benzer olarak $X^{\mathcal{V}}\in(TM')^{\mathcal{V}}$ birim vektörü $\xi^{\mathcal{V}}$a ortogonal ise $(TM')^{\mathcal{V}}$deki düzlem kesit olan $\{X^{\mathcal{V}},\phi X^{\mathcal{V}}\}$dikey ϕ -kesit olarak adlandırılır. Böylece yatay flag eğriliği $K^*(X^{\mathcal{H}})$ ile dikey flag eğriliği ise $K^*(X^{\mathcal{V}})$ ile gösterilir. Ayrıca

$$K^*(X^{\mathcal{H}}, \phi X^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, \phi X^{\mathcal{H}})\phi X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}) \tag{3.170}$$

$$K^*(X^{\mathcal{V}}, \phi X^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, \phi X^{\mathcal{V}})\phi X^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) \tag{3.171}$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Sırasıyla, yatay, ϕ -kesitsel eğrilik ve dikey ϕ -kesitsel eğrilik olarak adlandırılır.

Sasakian yarı Finsler manifoldunda ϕ -kesitsel eğrilik

$$K^*(X) = K^*(X^{\mathcal{H}}) + K^*(X^{\mathcal{V}})$$

formundadır (Kılıç, 2019).

Önerme 3.9.1. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ yapısı K-değme Finsler yapı olsun. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ lokal olarak simetrik ise, ε-Sasakian Finsler yapının sabit egriligi $\frac{\varepsilon}{4}$ tür (Kılıç, N., 2019).

İspat. (3.159) ve (3.162) eşitliklerinden $\forall X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}}$ için

$$(\nabla_Z^{\mathcal{H}} R)(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(Z^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}\}$$
$$- R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) \tag{3.172}$$

elde edilir. $(M')^{\boldsymbol{h}}$ lokal simetrik yani $(\nabla_Z^{\mathcal{H}} R) = 0$ olduğundan (3.172) yardımıyla

$$R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}}) = \frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}} - G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Z^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}\} \tag{3.173}$$

yazılır. $\{X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}\}$ortonormal çifti için, $X^{\mathcal{H}}$ time-like bir vektör olduğunda, $Y^{\mathcal{H}}$ space-like olmak zorundadır. Çünkü aynı anda iki vektör time-like ya da space-like olduğu zaman birbirine dik olamaz. Böylece

$$K(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \frac{G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})}{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})} = \frac{\varepsilon}{4}\left\{\frac{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})}{G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})}\right\} = \frac{\varepsilon}{4}$$

elde edilir.

Önerme 3.9.2. $(M')^{v}$ üzerinde $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapısı K-değme Finsler yapı olsun. $(M')^{\boldsymbol{v}}$ lokal olarak simetrik ise, ε-Sasakian Finsler yapının sabit egriligi $\frac{\varepsilon}{4}$ tür (Kılıç, N., 2019).

İspat. (3.160) ve (3.161) eşitliklerinden $\forall X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$(\nabla_Z^{\mathcal{V}} R)(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) = \frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}} - G^{\mathcal{V}}(Z^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}\} - R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) \tag{3.174}$$

elde edilir. $(M')^{\mathcal{V}}$ lokal simetrik yani $(\nabla_Z^{\mathcal{V}} R) = 0$ olduğundan (3.67) yardımıyla

$$R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}}) = \frac{\varepsilon}{4}\{G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})X^{\mathcal{V}} - G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Z^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}\} \tag{3.175}$$

yazılır. $\{X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}\}$ortonormal çifti için, $X^{\mathcal{V}}$ time-like bir vektör olduğunda, $Y^{\mathcal{V}}$ space-like olmak zorundadır. Çünkü aynı anda iki vektör time-like ya da space-like olduğu zaman birbirine dik olamaz. Böylece

$$K(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = \frac{G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})Y^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})}{G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})} = \frac{\varepsilon}{4}\left\{\frac{G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})}{G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}})G^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})}\right\} = \frac{\varepsilon}{4}$$

elde edilir.

$(M')^h$**,** ε-Sasakian Finsler manifoldun $S^{\mathcal{H}}$ yatay Ricci tensörü, $\{E_1^{\mathcal{H}}, \dots, E_{2n}^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}\}$, $(TM')^{\mathcal{H}}$ nin lokal ortonormal çatısı olmak üzere

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) &= \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}\left(R\left(X^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}\right)E_i^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}\right) + G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}\left(R\left(E_i^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}\right)Y^{\mathcal{H}}, E_i^{\mathcal{H}}\right) + G^{\mathcal{H}}(R(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \end{aligned} \tag{3.176}$$

eşitliği ile verilir.

$(M')^v$**,** ε-Sasakian Finsler manifoldun $S^{\mathcal{V}}$ dikey Ricci tensörü, $\{E_1^{\mathcal{V}}, \dots, E_{2n}^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}\}$, $(TM')^{\mathcal{V}}$ nin lokal ortonormal çatısı olmak üzere

$$S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{V}}\left(R\left(X^{\mathcal{V}}, E_i^{\mathcal{V}}\right)E_i^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}\right) + G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{V}}\left(R\left(E_i^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}\right)Y^{\mathcal{V}}, E_i^{\mathcal{V}}\right) + G^{\mathcal{V}}(R(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}})\xi^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \tag{3.177}$$

eşitliği ile verilir.

Önerme 3.9.3. q indeksli $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ değme yarı metrik yapıların K- değme olması için gerek ve yeter koşul

$$S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}) = \begin{cases} \left(\dfrac{2n-q}{4}\right), & \xi^{\mathcal{H}}\ space-like\ ise \\ \left(\dfrac{2n-q+1}{4}\right), & \xi^{\mathcal{H}}\ time-like\ ise \end{cases}$$

$$S^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}}) = \begin{cases} \left(\dfrac{2n-q}{4}\right) \quad , \ \xi^{\mathcal{V}} \ space-like\ ise \\ \left(\dfrac{2n-q+1}{4}\right), \ \xi^{\mathcal{V}} \ time-like\ ise \end{cases}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Kılıç, 2019).

İspat. (3.162) ve (3.176) göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}}) &= \sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}\left(R\left(E_i^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}}\right)\xi^{\mathcal{H}},E_i^{\mathcal{H}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}\left(\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})E_i^{\mathcal{H}} - \eta^{\mathcal{H}}\left(E_i^{\mathcal{H}}\right)\xi^{\mathcal{H}},E_i^{\mathcal{H}}\right) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2n} G^{\mathcal{H}}\left(E_i^{\mathcal{H}},E_i^{\mathcal{H}}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{2n}}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. F^{2n+1} = (M, M', F^*), q indeksli yarı Finsler manifoldu olduğundan,

$G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})$ =ε = 1 ise $\xi^{\mathcal{H}}$ space-like vektör olur. Böylece

$$S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}}) = \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i=1}^{q} G^{\mathcal{H}}\left(E_i^{\mathcal{H}},E_i^{\mathcal{H}}\right) + \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i=q+1}^{2n} G^{\mathcal{H}}\left(E_i^{\mathcal{H}},E_i^{\mathcal{H}}\right) = \tfrac{2n-q}{4}$$

bulunur. $G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})$= ε = -1 ise $\xi^{\mathcal{H}}$ time-like vektör olur. Böylece

$$S^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{q-1} G^{\mathcal{H}}\left(E_i^{\mathcal{H}},E_i^{\mathcal{H}}\right) + \frac{1}{4}\sum_{i=q+1}^{2n} G^{\mathcal{H}}\left(E_i^{\mathcal{H}},E_i^{\mathcal{H}}\right) = \frac{2n-q+1}{4}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.161) ve (3.177) göz önünde bulundurulursa, $\xi^{\mathcal{V}}$ space-like vektör için

$$S^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}}) = \frac{2n-q}{4}$$

elde edilir. $\xi^{\mathcal{V}}$ time-like vektör için ise

$$S^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}}) = \frac{2n-q+1}{4}$$

eşitliği bulunur.

Yardımcı Teorem 3.9.1. $(M')^h$ ε-Sasakian Finsler manifoldun $S^{\mathcal{H}}$ yatay Ricci tensörü ve $(M')^v$, ε-Sasakian Finsler manifoldun $S^{\mathcal{V}}$ dikey Ricci tensörü aşağıda verilen eşitlikleri sağlar (Kılıç, 2019).

$$S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})=\begin{cases}\left(\dfrac{2n-q}{4}\right)\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), & \xi^{\mathcal{H}}\, space-like\ ise\\ \left(\dfrac{2n-q+1}{4}\right)\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}), & \xi^{\mathcal{H}}\ time-like\ ise\end{cases}$$

$$S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}})=\begin{cases}\left(\dfrac{2n-q}{4}\right)\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\ , & \xi^{\mathcal{V}}\ space-like\ ise\\ \left(\dfrac{2n-q+1}{4}\right)\eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}), & \xi^{\mathcal{V}}\ time-like\ ise\end{cases}$$

İspat. $\xi^{\mathcal{H}}$ space-like vektör olsun. (3.162) ve (3.176) eşitliklerini kullanarak

$$S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})=\sum_{i=1}^{2n}G^{\mathcal{H}}\left(R\left(E_i^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}}\right)\xi^{\mathcal{H}},E_i^{\mathcal{H}}\right)+G^{\mathcal{H}}(R(\xi^{\mathcal{H}},X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2n}G^{\mathcal{H}}\left(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})E_i^{\mathcal{H}}-\eta^{\mathcal{H}}\left(E_i^{\mathcal{H}}\right),E_i^{\mathcal{H}}\right)$$

$$+\frac{1}{4}G^{\mathcal{H}}(\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\xi^{\mathcal{H}}-\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})X^{\mathcal{H}},\ \xi^{\mathcal{H}})$$

$$=\frac{1}{4}\{\sum_{i=1}^{2n}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(E_i^{\mathcal{H}},E_i^{\mathcal{H}})\}+\frac{1}{4}\{\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})G^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})-G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})\}$$

$$=\frac{1}{4}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})(2n-q)+\frac{1}{4}\{\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})-\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\}=\frac{2n-q}{4}\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})$$

ifadesi bulunur. $\xi^{\mathcal{H}}$ time-like vektör ise

$$S^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}},\xi^{\mathcal{H}})=(\frac{2n-q+1}{4})\ \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})$$

olur. Benzer şekilde, $\xi^{\mathcal{V}}$ bir space-like vektör ise

$$S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}})=(\frac{2n-q}{4})\ \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})$$

olur ve $\xi^{\mathcal{V}}$ bir time-like vektör ise

$$S^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}},\xi^{\mathcal{V}})=(\frac{2n-q+1}{4})\ \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})$$

bulunur.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

Bu bölümde yarı Finsler manifoldları üzerinde trans-Sasakian yapıları tanımlayıp bazı özelliklerini ve sonuçlarını veriyoruz. Bu yapılar $(M')^h$ ve $(M')^v$ vektör alt demetleri üzerinde kurulmuştur. M $(2n+1)$ boyutlu C^∞ manifoldu, M' TM nin boştan farklı bir açık alt manifoldunu, F^* temel Finsler fonksiyonunu göstermek üzere bir yarı Finsler manifoldu $F^{2n+1}=(M,M',F^*)$ şeklinde gösterilir. Daha sonra yarı Finsler metriğini kullanarak $\alpha-$Sasakian ve $\beta-$Kenmotsu Finsler manifoldlarını tanımlayıp genel sonuçlar veriyoruz.

$((M')^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M')^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ hemen hemen değme yarı Finsler metrik manifoldlarının trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartları sağlamalarıdır:

$$(\nabla_X^H\phi^H)Y^H=\frac{\alpha}{2}\{G^H(X^H,Y^H)\xi^H-\varepsilon\eta^H(Y^H)X^H\}+\frac{\beta}{2}\{\varepsilon G^H(\phi X^H,Y^H)-\eta^H(Y^H)\phi X^H\}$$

$$(\nabla_X^V\phi^V)Y^V=\frac{\alpha}{2}\{G^V(X^V,Y^V)\xi^V-\varepsilon\eta^V(Y^V)X^V\}+\frac{\beta}{2}\{\varepsilon G^V(\phi X^V,Y^V)-\eta^V(Y^V)\phi X^V\} \tag{4.1}$$

burada α ve β, $(M')^h$ ve $(M')^v$ alt vektör demetleri üzerindeki düzgün fonksiyonları gösterir. O zaman deriz ki böyle bir yapı (α,β) tipli trans-Sasakian yarı Finsler metric yapıdır. Eğer $\alpha,\beta=$ sabit ise o zaman (4.1) den aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$(\nabla_X^H\xi^H)=-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\phi X^H+\frac{\beta}{2}(X^H-\eta^H(X^H)\xi^H)$$

$$(\nabla_X^V\xi^V)=-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\phi X^V+\frac{\beta}{2}(X^V-\eta^V(X^V)\xi^V)$$

$$(\nabla_X^H\eta^H)(Y^H)=\frac{\alpha}{2}G^H(X^H,\phi Y^H)+\frac{\beta}{2}G^H(\phi X^H,\phi Y^H)$$

$$(\nabla_X^V\eta^V)(Y^V)=\frac{\alpha}{2}G^V(X^V,\phi Y^V)+\frac{\beta}{2}G^V(\phi X^V,\phi Y^V)$$

Teorem4.1: $((M')^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M')^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ trans-Sasakian Finsler manifoldları için aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$R^H(X^H,Y^H)\xi^H=\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\eta^H(Y^H)X^H-\eta^H(X^H)Y^H\}+\varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^H(Y^H)\phi X^H-\eta^H(X^H)\phi Y^H\}$$

$$R^V(X^V,Y^V)\xi^V = \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\eta^V(Y^V)X^V - \eta^V(X^V)Y^V\} + \varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^V(Y^V)\phi X^V - \eta^V(X^V)\phi Y^V\}$$

İspat: $R^H(X^H,Y^H)\xi^H = \nabla^H_{X^H}\nabla^H_{Y^H}\xi^H - \nabla^H_{Y^H}\nabla^H_{X^H}\xi^H - \nabla_{\nabla^H_{X^H}Y^H - \nabla^H_{Y^H}X^H}\xi^H$

$=\nabla^H_{X^H}\left\{-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\phi Y^H + \frac{\beta}{2}(Y^H - \eta^H(Y^H)\xi^H)\right\} - \nabla^H_{Y^H}\left\{-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\phi X^H + \frac{\beta}{2}(X^H - \eta^H(X^H)\xi^H)\right\}$

$-\nabla^H_{\nabla^H_{X^H}Y^H}\xi^H + \nabla^H_{\nabla^H_{Y^H}X^H}\xi^H = \varepsilon\frac{\alpha}{2}\{(\nabla^H_Y\phi^H)X^H - (\nabla^H_X\phi^H)Y^H\} + \frac{\beta}{2}\{(\nabla^H_Y\eta^H)X^H\xi^H - (\nabla^H_X\eta^H)Y^H\xi^H + \eta^H(X^H)\nabla^H_Y\xi^H - \eta^H(Y^H)\nabla^H_X\xi^H\}$ $=$ $\varepsilon\frac{\alpha}{2}\Big\{-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\eta^H(X^H)Y^H + \varepsilon\beta G^H(\phi Y^H,X^H) - \frac{\beta}{2}\eta^H(X^H)\phi Y^H + \varepsilon\frac{\alpha}{2}\eta^H(Y^H)X^H + \frac{\beta}{2}\eta^H(Y^H)\phi X^H\Big\} + \frac{\beta}{2}\Big\{\alpha G^H(Y^H,\phi X^H)\xi^H - \varepsilon\frac{\alpha}{2}\eta^H(X^H)\phi Y^H + \frac{\beta}{2}\eta^H(X^H)Y^H - \frac{\beta}{2}\eta^H(X^H)\eta^H(Y^H)\xi^H + \varepsilon\frac{\alpha}{2}\eta^H(Y^H)\phi X^H - \frac{\beta}{2}\eta^H(Y^H)X^H + \frac{\beta}{2}\eta^H(X^H)\eta^H(Y^H)\xi^H\Big\}$,

gerekli sadeleştirmeler yapılarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$R(X^H,Y^H)\xi^H = \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\eta^H(Y^H)X^H - \eta^H(X^H)Y^H\} + \varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^H(Y^H)\phi X^H - \eta^H(X^H)\phi Y^H\}$$

Benzer şekilde $((M')^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ trans-Sasakian Finsler manifoldu için aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$R^V(X^V,Y^V)\xi^V = \nabla^V_{X^V}\nabla^V_{Y^V}\xi^V - \nabla^V_{Y^V}\nabla^V_{\mathrm{V}}\mathrm{V} - \nabla_{\nabla^V_{X^V}Y^V - \nabla^V_{Y^V}X^V}\xi^V$$

$=\nabla^V_{X^V}\left\{-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\phi Y^V + \frac{\beta}{2}(Y^V - \eta^V(Y^V)\xi^V)\right\} - \nabla^V_{Y^V}\left\{-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\phi X^V + \frac{\beta}{2}(X^V - \eta^V(X^V)\xi^V)\right\} - \nabla^V_{\nabla^V_{X^V}Y^V}\xi^V + \nabla^V_{\nabla^V_{Y^V}X^V}\xi^V$ $= \varepsilon\frac{\alpha}{2}\{(\nabla^V_Y\phi^V)X^V - (\nabla^V_X\phi^V)Y^V\} + \frac{\beta}{2}\{(\nabla^V_Y\eta^V)X^V\xi^V - (\nabla^V_X\eta^V)Y^V\xi^V + \eta^V(X^V)\nabla^V_Y\xi^V - \eta^V(Y^V)\nabla^V_X\xi^V\} =$ $\varepsilon\frac{\alpha}{2}\Big\{-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\eta^V(X^V)Y^V + \varepsilon\beta G^V(\phi Y^V,X^V) - \frac{\beta}{2}\eta^V(X^V)\phi Y^V + \varepsilon\frac{\alpha}{2}\eta^V(Y^V)X^V + \frac{\beta}{2}\eta^V(Y^V)\phi X^V\Big\} + \frac{\beta}{2}\Big\{\alpha G^V(Y^V,\phi X^V)\xi^V - \varepsilon\frac{\alpha}{2}\eta^V(X^V)\phi Y^V + \frac{\beta}{2}\eta^V(X^V)Y^V - \frac{\beta}{2}\eta^V(X^V)\eta^V(Y^V)\xi^V + \varepsilon\frac{\alpha}{2}\eta^V(Y^V)\phi X^V - \frac{\beta}{2}\eta^V(Y^V)X^V + \frac{\beta}{2}\eta^V(X^V)\eta^V(Y^V)\xi^V\Big\}$,

gerekli sadeleştirmeler yapılarak da aşağıdaki eşitlik bulunur:

$R^V(X^V,Y^V)\xi^V = \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\eta^V(Y^V)X^V - \eta^V(X^V)Y^V\} + \varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^V(Y^V)\phi X^V -$
$\eta^V(X^V)\phi Y^V\}$

4.1. α −SASAKIAN YARI FINSLER MANIFOLDLARI

$F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ bir yarı Finsler manifoldu olsun. Sırasıyla, $(M')^h$ ve $(M')^v$ alt vektör demetleri üzerindeki hemen hemen değme pseudo-metrik Finsler yapılar olan $(\phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $(\phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ birer α −Sasakian yarı Finsler metrik yapılardır ancak ve ancak aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(\nabla_X^H\phi^H)Y^H = \frac{\alpha}{2}\{G^H(X^H,Y^H)\xi^H - \varepsilon\eta^H(Y^H)X^H\} \quad (4.2)$$

$$(\nabla_X^V\phi^V)Y^V = \frac{\alpha}{2}\{G^V(X^V,Y^V)\xi^V - \varepsilon\eta^V(Y^V)X^V\} \quad (4.3)$$

ve

$$(\nabla_X^H\xi^H) = -\varepsilon\frac{\alpha}{2}\ \phi X^H, (\nabla_X^V\xi^V) = -\varepsilon\frac{\alpha}{2}\ \phi X^V.$$

Üstelik, (4.1) ve (4.2) den aşağıdaki eşitlikler de elde edilebilir:

$$(\nabla_X^H\eta^H)(Y^H) = \frac{\alpha}{2}\Omega^H(X^H,Y^H) = \frac{\alpha}{2}G^H(X^H,\phi Y^H)$$

$$(\nabla_X^V\eta^V)(Y^V) = \frac{\alpha}{2}\Omega^V(X^V,Y^V) = \frac{\alpha}{2}G^V(X^V,\phi Y^V).$$

Böylece, bu yapılar $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ α −Sasakian yarı Finsler manifoldları üzerinde birer α −Sasakian yarı Finsler metrik yapılardır. Üstelik aşağıdaki bağıntıları da sağlarlar:

$$R^H(X^H,Y^H)\xi^H = \frac{\alpha^2}{4}\{\eta^H(Y^H)X^H - \eta^H(X^H)Y^H\}$$

$$R^V(X^V,Y^V)\xi^V = \frac{\alpha^2}{4}\{\eta^V(Y^V)X^V - \eta^V(X^V)Y^V\}$$

$$\eta^H(R^H(X^H,Y^H)Z^H) = \varepsilon\frac{\alpha^2}{4}\{G^H(Y^H,Z^H)\eta^H(X^H) - G^H(X^H,Z^H)\eta^H(Y^H)\}$$

$$\eta^V(R^V(X^V,Y^V)Z^V) = \varepsilon\frac{\alpha^2}{4}\{G^V(Y^V,Z^V)\eta^V(X^V) - G^V(X^V,Z^V)\eta^V(Y^V)\}$$

$$(\nabla_Z^H R^H)(X^H,Y^H)\xi^H = \varepsilon\frac{\alpha^2}{8}\{G^H(Y^H,Z^H)X^H - G^H(X^H,Z^H)Y^H\} -$$
$$\frac{1}{2}\ R^H(X^H,Y^H)Z^H$$

$$(\nabla_Z^V R^V)(X^V, Y^V)\xi^V = \varepsilon \frac{\alpha^2}{8}\{G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V, Z^V)Y^V\} - \frac{1}{2} R^V(X^V, Y^V)Z^V$$

$$R^H(X^H, Y^H)Z^H = \varepsilon \frac{\alpha^2}{4}\{G^H(Y^H, Z^H)X^H - G^H(X^H, Z^H)Y^H\}$$

$$R^V(X^V, Y^V)Z^V = \varepsilon \frac{\alpha^2}{4}\{G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V, Z^V)Y^V\}$$

$$R^H(X^H, \xi^H)Y^H = \frac{\alpha^2}{4}\{\eta^H(Y^H)X^H - \varepsilon G^H(X^H, Y^H)\xi^H\}$$

$$R^V(X^V, \xi^V)Y^V = \frac{\alpha^2}{4}\{\eta^V(Y^V)X^V - \varepsilon G^V(X^V, Y^V)\xi^V\}$$

$$R^H(\xi^H, X^H)Y^H = \frac{\alpha^2}{4}\{\varepsilon G^H(X^H, Y^H)\xi^H - \eta^H(Y^H)X^H\}$$

$$R^V(\xi^V, X^V)Y^V = \frac{\alpha^2}{4}\{\varepsilon G^V(X^V, Y^V)\xi^V - \eta^V(Y^V)X^V\}$$

$$S^H(\xi^H, \xi^H) = \begin{cases} \alpha^2\left(\frac{2n-q}{4}\right), \ \xi^H \ bir \ space - like \ vektör \\ \alpha^2\left(\frac{2n-q+1}{4}\right), \ \xi^H \ bir \ time - like \ vektör \end{cases}$$

$$S^V(\xi^V, \xi^V) = \begin{cases} \alpha^2\left(\frac{2n-q}{4}\right), \ \xi^V \ bir \ space - like \ vektör \\ \alpha^2\left(\frac{2n-q+1}{4}\right), \ \xi^V \ bir \ time - like \ vektör \end{cases}$$

$$S^H(X^H, \xi^H) = \begin{cases} \alpha^2\left(\frac{2n-q}{4}\right)\eta^H(X^H), \xi^H \ bir \ space - like \ vektör \\ \alpha^2\left(\frac{2n-q+1}{4}\right)\eta^H(X^H), \xi^H \ bir \ time - like \ vektör \end{cases}$$

$$S^V(X^V, \xi^V) = \begin{cases} \alpha^2\left(\frac{2n-q}{4}\right)\eta^V(X^V), \xi^V \ bir \ space - like \ vektör \\ \alpha^2\left(\frac{2n-q+1}{4}\right)\eta^V(X^V), \xi^V \ bir \ time - like \ vektör \end{cases}$$

eğer ξ^H *ve* ξ^V space-like vektörler iseler, o zaman aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$S^H(\phi X^H, \phi Y^H) = S^H(X^H, Y^H) + \alpha^2\left(\frac{q-2n}{4}\right)\eta^H(X^H)\eta^H(Y^H)$$

$$S^V(\phi X^V, \phi Y^V) = S^V(X^V, Y^V) + \alpha^2\left(\frac{q-2n}{4}\right)\eta^V(X^V)\eta^V(Y^V).$$

Benzer şekilde eğer ξ^H ve ξ^V time-like vektörler olurlarsa da aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$S^H(\phi X^H, \phi Y^H) = S^H(X^H, Y^H) + \alpha^2\left(\frac{q-2n-1}{4}\right)\eta^H(X^H)\eta^H(Y^H)$$

$$S^V(\phi X^V, \phi Y^V) = S^V(X^V, Y^V) + \alpha^2\left(\frac{q-2n-1}{4}\right)\eta^V(X^V)\eta^V(Y^V).$$

4.2. $\boldsymbol{\beta}$ −KENMOTSU YARI FINSLER MANIFOLDLARI

$M^{2n+1} = \mathbb{R} \times_f N^{2n}$ çarpım manifoldu ile tanımlanmış olan bir yarı Finsler manifoldu $F^{2n+1} = (M, M', F^*)$ olsun. $(N')^{2n} = TN^{2n} \setminus \theta$ da bir Kahler manifoldu olmak üzere $f(t) = ce^{\beta\frac{t}{2}}$ olarak alınsın. $(M')^h$ ve $(M')^v$ alt vektör demetleri üzerindeki, sırasıyla, $(\phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $(\phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ hemen hemen Kenmotsu yarı Finsler metrik yapıları için η^H and η^V 1-formlarıyla Ω^H and Ω^V 2-formları aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar:

$$d\eta^H = d\eta^V = 0,\ d\eta^H = \beta\eta^H \wedge \Omega^H,\ d\eta^V = \beta\eta^V \wedge \Omega^V,$$

buradaki β sıfırdan farklı reel bir sabittir.

$(M')^h$ ve $(M')^v$ alt vektör demetleri üzerindeki, sırasıyla, $(\phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $(\phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ hemen hemen değme yarı Finsler metric yapıları birer β-Kenmotsu yarı Finsler metrik yapılardır ancak ve ancak aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(\nabla_X^H \phi)Y^H = \frac{\beta}{2}\{\varepsilon G^H(\phi X^H, Y^H) - \eta^H(Y^H)\phi X^H\} \tag{4.4}$$

$$(\nabla_X^V \phi)Y^V = \frac{\beta}{2}\{\varepsilon G^V(\phi X^V, Y^V) - \eta^V(Y^V)\phi X^V\} \tag{4.5}$$

ve

$$(\nabla_X^H \xi^H) = \frac{\beta}{2}(X^H - \eta^H(X^H)\xi^H) = -\frac{\beta}{2}\phi^2 X^H$$

$$(\nabla_X^V \xi^V) = \frac{\beta}{2}(X^V - \eta^V(X^V)\xi^V) = -\frac{\beta}{2}\phi^2 X^V.$$

Üstelik (4.4) ve (4.5) den aşağıdaki eşitlikler de bulunur:

$$(\nabla_X^H \eta^H)(Y^H) = \frac{\beta}{2}G^H(\phi X^H, \phi Y^H) = \frac{\beta}{2}\Omega^H(\phi X^H, Y^H)$$

$$(\nabla_X^V \eta^V)(Y^V) = \frac{\beta}{2}G^V(\phi X^V, \phi Y^V) = \frac{\beta}{2}\Omega^V(\phi X^V, Y^V)\ .$$

Bu yapılar β −Kenmotsu pseudo-metrik Finsler yapılardırlar.

$((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^0)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ β −Kenmotsu yarı Finsler manifoldlarında aşağıdaki bağıntılar da bulunur:

$$R^H(X^H, Y^H)\xi^H = \frac{\beta^2}{4}\{\eta^H(X^H)Y^H - \eta^H(Y^H)X^H\}$$

$$R^V(X^V,Y^V)\xi^V = \frac{\beta^2}{4}\{\eta^V(X^V)Y^V - \eta^V(Y^V)X^V\}$$

$$\eta^H(R^H(X^H,Y^H)Z^H) = \varepsilon\frac{\beta^2}{4}\{G^H(X^H,Z^H)\eta^H(Y^H) - G^H(Y^H,Z^H)\eta^H(X^H)\}$$

$$\eta^V(R(X^V,Y^V)Z^V) = \varepsilon\frac{\beta^2}{4}\{G^V(Y^V,Z^V)\eta^V(Y^V) - G^V(Y^V,Z^V)\eta^V(X^V)\}$$

$$(\nabla_Z^H R^H)(X^H,Y^H)\xi^H = \varepsilon\frac{\beta^2}{8}\{G^H(X^H,Z^H)X^H - G^H(X^H,Z^H)X^H\} - \frac{1}{2}R^H(X^H,Y^H)Z^H$$

$$(\nabla_Z^V R^V)(X^V,Y^V)\xi^V = \varepsilon\frac{\beta^2}{8}\{G^V(X^V,Z^V)X^V - G^V(X^V,Z^V)X^V\} - \frac{1}{2}R^V(X^V,Y^V)Z^V$$

$$R^H(X^H,Y^H)Z^H = -\varepsilon\frac{\beta^2}{4}\{G^H(Y^H,Z^H)X^H - G^H(X^H,Z^H)Y^H\}$$

$$R^V(X^V,Y^V)Z^V = -\varepsilon\frac{\beta^2}{4}\{G^V(Y^V,Z^V)X^V - G^V(X^V,Z^V)Y^V\}$$

$$R^H(\xi^H,X^H)Y^H = \varepsilon\frac{\beta^2}{4}\{-G^H(X^H,Y^H)\xi^H + \varepsilon\eta^H(Y^H)X^H\}$$

$$R^V(\xi^V,X^V)Y^V = \varepsilon\frac{\beta^2}{4}\{-G^V(X^V,Y^V)\xi^V + \varepsilon\eta^V(Y^V)X^V\}$$

$$S^H(\xi^H,\xi^H) = \begin{cases} \beta^2\left(\dfrac{q-2n}{4}\right), \xi^H \; bir\ space-like\ vekt\ddot{o}r \\ \beta^2\left(\dfrac{q-2n-1}{4}\right), \xi^H \; bir\ time-like\ vekt\ddot{o}r \end{cases}$$

$$S^V(\xi^V,\xi^V) = \begin{cases} \beta^2\left(\dfrac{q-2n}{4}\right), \xi^V \; bir\ space-like\ vekt\ddot{o}r \\ \beta^2\left(\dfrac{q-2n-1}{4}\right), \xi^V \; bir\ \ time-like\ vekt\ddot{o}r \end{cases}$$

$$S^H(X^H,\xi^H) = \begin{cases} \beta^2\left(\dfrac{q-2n}{4}\right)\eta^H(X^H), \xi^H \; bir\ space-like\ vekt\ddot{o}r \\ \beta^2\left(\dfrac{q-2n-1}{4}\right)\eta^H(X^H), \xi^H \; bir\ time-like\ vekt\ddot{o}r \end{cases}$$

$$S^V(X^V,\xi^V) = \begin{cases} \beta^2\left(\dfrac{q-2n}{4}\right)\eta^V(X^V),\ \xi^V \; bir\ space-like\ vekt\ddot{o}r \\ \beta^2\left(\dfrac{q-2n-1}{4}\right)\eta^V(X^V), \xi^V \; bir\ time-like\ vekt\ddot{o}r \end{cases}$$

$$S^H(\phi X^H,\phi Y^H) = S^H(X^H,Y^H) + \beta^2\left(\frac{2n-q}{4}\right)\eta^H(X^H)\eta^H(Y^H)$$

$$S^V(\phi X^V, \phi Y^V) = S^V(X^V, Y^V) + \beta^2 \left(\frac{2n-q}{4}\right) \eta^V(X^V)\eta^V(Y^V).$$

4.3. GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ-RECURRENT TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

Tanım 4.3.1. $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ trans − Sasakian yarı Finsler manifoldları recurrent olur eğer $\forall\, X^H, Y^H,\, Z^H, W^H \in (TM')^H$ ve $\forall\, X^V, Y^V,\, Z^V, W^V \in (TM')^V$, aşağıdaki eşitlikler sağlanıyor ise

$$\left(\nabla^H_{X^H} R^H\right)(Y^H, Z^H)W^H = A^H(X^H)R^H(Y^H,\, Z^H)W^H$$

$$\left(\nabla^V_{X^V} R^V\right)(Y^V, Z^V)W^V = A^V(X^V)R^V(Y^V,\, Z^V)W^V,$$

burada, A^H 1-formu $(M')^h$ manifoldu üzerinde $A^H(X^H) = G^H(X^H, (A^*)^H)$ olacak şekilde tanımlıdır ve $(A^*)^H$ yatay vektör alanı A^H 1-formu ile birleştirilmiş vektör alanıdır. (A^V 1-formu da $(M')^v$ manifoldu üzerinde $A^V(X^V) = G^V(X^V, (A^*)^V)$ olacak şekilde tanımlıdır ve $(A^*)^V$ dikey vektör alanı A^V 1 − formu ile birleştirilmiş vektör alanıdır.)

Eğer $(M^0)^h$ manifoldu üzerinde $A^H(X^H) = 0$ ise $((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ recurrent manifoldu lokal simetrik manifold olur, yani $\nabla^H R^H = 0$ dır. Benzer şekilde $(\,M')^v$ manifoldu üzerinde $A^V(X^V) = 0$ ise $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ recurrent manifoldu da lokal simetrik manifold olur, yani $\nabla^V R^V = 0$ dır.

Tanım 4.3.2. $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları Ricci-recurrent olur eğer,
$\forall\, X^H, Y^H,\, Z^H, W^H \in (TM')^H$ ve $\forall\, X^V, Y^V,\, Z^V, W^V \in (TM')^V$, aşağıdaki eşitlikler sağlanıyor ise

$\left(\nabla^H_{X^H} S^H\right)(Y^H, Z^H) = A^H(X^H)S^H(Y^H, Z^H)$ ve $\left(\nabla^V_{X^V} S^V\right)(Y^V, Z^V) = A^V(X^V)S^V(Y^V, Z^V)$,

burada, A^H ve A^V, sırasıyla, $(M')^h$ ve $(M')^v$ yatay ve dikey manifoldları üzerinde tanımlı 1-formalardır. Eğer $(M^0)^h$ manifoldu üzerinde $A^H(X^H) = 0$ ise $((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ Ricci-recurrent manifoldu Ricci-simetrik manifold olur, yani $\nabla^H S^H = 0$ dır. Benzer şekilde $(\,M')^v$ manifoldu üzerinde $A^V(X^V) = 0$ ise $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ Ricci-recurrent manifoldu da Ricci-simetrik manifold olur, yani $\nabla^V S^V = 0$ dır.

Einstein manifoldu bir Ricci-simetrik manifolddur.

Flat olmayan $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ manifoldları genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları olarak adlandırılırlar eğer S^H ve S^V Ricci tensörleri için aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise;

$$\left(\nabla^H_{X^H} S^H\right)(Y^H, Z^H) = A^H(X^H)S^H(Y^H, Z^H) + B^H(X^H)G^H(Y^H, Z^H) \quad (4.3.1)$$

$$\left(\nabla^V_{X^V} S^V\right)(Y^V, Z^V) = A^V(X^V)S^V(Y^V, Z^V) + B^V(X^V)G^V(Y^V, Z^V), \quad (4.3.2)$$

$\forall\, X^H, Y^H, Z^H, W^H \in (TM')^H$ve $\forall\, X^V, Y^V, Z^V, W^V \in (TM')^V$,burada A^H, B^H ve A^V, B^V, sırasıyla,$(M')^h$ve
$(M')^v$ yatay ve dikey manifoldları üzerinde tanımlı 1 formlardır.

Özel olarak eğer 1-form B^H= 0 ise, $(M')^h$ Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifolduna indirgenir. (Eğer 1-form $B^V = 0$ ise $(M')^v$ Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifolduna indirgenir.) (Prasad R.and Prakash J., 2014).

Teorem 4.3.1. $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları olsunlar. O zaman $A^H, B^H\ ve\ A^V, B^V$ 1-formları arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibidir:

$$B^H(X^H) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(X^H),\ B^H(\xi^H) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(\xi^H)$$

$$B^V(X^V) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^V(X^V),\ B^V(\xi^V) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^V(\xi^V)$$

İspat.

$$\left(\nabla^H_{X^H} S^H\right)(Y^H, Z^H) = X^H S^H(Y^H, Z^H) - S^H\left(\nabla^H_{X^H} Y^H, Z^H\right) - S^H\left(Y^H, \nabla^H_{X^H} Z^H\right) \quad (4.3.3)$$

$$\left(\nabla^V_{X^V} S^V\right)(Y^V, Z^V) = X^V S^V(Y^V, Z^V) - S^V\left(\nabla^V_{X^V} Y^V, Z^V\right) - S^V\left(Y^V, \nabla^V_{X^V} Z^V\right) \quad (4.3.4)$$

(4.1) ve (4.3) den

$$A^H(X^H)S^H(Y^H, Z^H) + B^H(X^H)G^H(Y^H, Z^H) = X^H S^H(Y^H, Z^H) - S^H\left(\nabla^H_{X^H} Y^H, Z^H\right) - S^H\left(Y^H, \nabla^H_{X^H} Z^H\right)$$

olur. Yukarıdaki denklemde $Y^H = Z^H = \xi^H$ alırsak

$$A^H(X^H)S^H(\xi^H, \xi^H) + B^H(X^H)G^H(\xi^H, \xi^H) = X^H S^H(\xi^H, \xi^H) - 2S^H\left(\nabla^H_{X^H}\xi^H, \xi^H\right), \quad (4.3.5)$$

buluruz. (3.3), (3.15) ve (4.3.5)denklemlerinden

$$\varepsilon B^H(X^H) + n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(X^H) = -2S^H\left(-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\,\phi X^H + \frac{\beta}{2}(X^H - \eta^H(X^H)\xi^H), \xi^H\right),$$

$\varepsilon B^H(X^H) + n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(X^H) = \varepsilon\alpha\, S^H(\phi X^H,\xi^H) -$
$\beta S^H(X^H,\xi^H) + \beta\,\eta^H(X^H)S^H(\xi^H,\xi^H)$,

Olup (3.14) ve (3.15) yardımıyla

$$\varepsilon B^H(X^H) + n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(X^H) = 0$$

$$B^H(X^H) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(X^H) \tag{4.3.6}$$

elde edilir. Denklem (4.3.6) da $X^H = \xi^H$ alırsak

$$B^H(\xi^H) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(\xi^H) \tag{4.3.7}$$

olur. Benzer şekilde (4.3.2) ve (4.3.4) denklemlerinden

$$A^V(X^V)S^V(Y^V,Z^V) + B^V(X^V)G^V(Y^V,Z^V) = X^V S^V(Y^V,Z^V) - S^V\left(\nabla^V_{X^V}Y^V,Z^V\right) - S^V\left(Y^V,\nabla^V_{X^V}Z^V\right)$$

dir, yukarıdaki denklemde $Y^V = Z^V = \xi^V$ alırsak

$$A^V(X^V)S^V(\xi^V,\xi^V) + B^V(X^V)G^V(\xi^V,\xi^V) = X^V S^V(\xi^V,\xi^V) - 2S^V\left(\nabla^V_{X^V}\xi^V,\xi^V\right), \tag{4.3.8}$$

olur. (3.3), (3.15) ve (4.3.8) denklemlerinden

$\varepsilon B^V(X^H) + n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^V(X^V) = \varepsilon\alpha\, S^V(\phi X^V,\xi^V) - \beta S^V(X^V,\xi^V)+\eta^V(X^V)S^V(\xi^V,\xi^V) =$
0

bulunur, (3.14) ve (3.15) den de

$$B^V(X^V) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^V(X^V) \tag{4.3.9}$$

Yukarıdaki denklemde $X^V = \xi^V$alırsak aşağıdaki eşitlik bulunur;

$$B^V(\xi^V) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^V(\xi^V) \tag{4.3.10}$$

$(A^*)^H$ ve $(B^*)^H$, sırasıyla, A^H ve B^H 1-formlarıyla birleştirilmiş vektör alanları olsunlar, böylece

$A^H(X^H) = G^H(X^H,(A^*)^H)$ ve $B^H(X^H) = G^H(X^H,(B^*)^H)$.

(4.3.6) denkleminden

$$G^H(X^H,(B^*)^H) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(X^H) = G^H\left(X^H, -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}(A^*)^H\right)$$

$$(B^*)^H = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}(A^*)^H \tag{4.3.11}$$

dir. $\alpha -$ Sasakian yarı Finsler manifoldu için, (4.3.6), (4.3.7) ve (4.3.11) denklemlerinden

$$B^H(X^H) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2)}{2}A^H(X^H), \quad B^H(\xi^H) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2)}{2}A^H(\xi^H), \quad (B^*)^H = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2)}{2}(A^*)^H.$$

$(\varepsilon) -$ Sasakian yarı Finsler manifoldu için, (4.6) denkleminden

$$B^H(X^H) = -\,\varepsilon\, n\frac{1}{2}A^H(X^H) \tag{4.3.12}$$

olup, $(B^*)^H = -\,\varepsilon\, n\frac{1}{2}(A^*)^H$ dir.

$(A^*)^V$ ve $(B^*)^V$, sırasıyla, A^V ve B^V 1-formlarıyla birleştirilmiş vektör alanları olsunlar, o zaman

$A^V(X^V) = G^V(X^V,(A^*)^V)$ ve $B^V(X^V) = G^V(X^V,(B^*)^V)$

olduğundan (4.3.9) kullanılarak

$$G^V(X^V,(B^*)^V) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^V(X^V) = G^V\left(X^V, -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}(A^*)^V\right)$$

$$(B^*)^V = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}(A^*)^V \tag{4.3.12}$$

bulunur. $\alpha -$ Sasakian yarı Finsler manifoldu için, (4.3.9), (4.3.10) ve (4.3.12) denklemlerinden

$$B^V(X^V) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2)}{2}A^V(X^V), \quad B^V(\xi^V) = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2)}{2}A^V(\xi^V), \quad (B^*)^V = -\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2)}{2}(A^*)^V$$

bulunur. $(\varepsilon) -$ Sasakian yarı Finsler manifoldu için, (4.9) denkleminden

$$B^V(X^V) = \varepsilon\, n\frac{1}{2}A^V(X^V) \tag{4.3.13}$$

olup $(B^*)^V = -\,\varepsilon\, n\frac{1}{2}(A^*)^V$ dir.

Önerme 4.3.1. $((M')^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ Ricci-recurrent $(\varepsilon) -$ Sasakian yarı Finsler manifoldunda ya da $(\varepsilon) -\ \alpha -$ Sasakian yarı Finsler manifoldunda, $\varepsilon = -1$ ise $(B^*)^H$ ve $(A^*)^H$ aynı yöne sahipken $\varepsilon = 1$ ise zıt yönlüdürler.

Önerme 4.3.2. $((M')^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$, Ricci-recurrent $(\varepsilon) -$ Sasakian yarı Finsler manifoldunda ya da $(\varepsilon) -\ \alpha -$ Sasakian yarı Finsler manifoldunda, $\varepsilon = -1$ ise $(B^*)^V$ ve $(A^*)^V$ aynı yöne sahipken $\varepsilon = 1$ ise zıt yönlüdürler.

(ε) −Kenmotsu yarı Finsler manifoldu $((M')^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ için , (4.6) dan

$$B^H(X^H) = \varepsilon\, n\frac{1}{2}A^H(X^H), \tag{4.3.14}$$

olup, buradan

$$(B^*)^H = \varepsilon\, n \frac{1}{2} (A^*)^H \tag{4.3.15}$$

dir. $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ $(\varepsilon) - \beta$-Kenmotsu yarı Finsler manifoldu için, (4.3.6) denkleminden

$$B^H(X^H) = \varepsilon\, n \frac{(\beta^2)}{2} A^H(X^H), \tag{4.3.16}$$

bulunur, buradan da

$$(B^*)^H = \varepsilon\, n \frac{\beta^2}{2} (A^*)^H \,. \tag{4.3.17}$$

$((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ $(\varepsilon) -$Kenmotsu yarı Finsler manifoldu için (4.9) denkleminden

$$B^V(X^V) = \varepsilon\, n \frac{(1)}{2} A^V(X^V) \tag{4.18}$$

dir. $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ $(\varepsilon) - \beta -$ Kenmotsu yarı Finsler manifoldu için , (4.9) denkleminden

$$B^V(X^V) = \varepsilon\, n \frac{(\beta^2)}{2} A^V(X^V) \tag{4.3.19}$$

olup buradan da

$$(B^*)^V = \varepsilon\, n \frac{\beta^2}{2} (A^*)^V \tag{4.3.20}$$

dir.

Önerme 4.3.3. $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ Ricci-recurrent $(\varepsilon) -$ Kenmotsu ya da $(\varepsilon) - \beta -$ Kenmotsu yarı Finsler manifoldunda $\varepsilon = -1$ ise $(B^*)^H$ ve $(A^*)^H$ zıt yönlü $\varepsilon = 1$ ise aynı yönlüdürler.

Önerme 4.3.4. $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ Ricci-recurrent $(\varepsilon) -$ Kenmotsu ya da $(\varepsilon) - \beta -$ Kenmotsu yarı Finsler manifoldunda $\varepsilon = -1$ ise $(B^*)^V$ ve $(A^*)^V$ zıt yönlü $\varepsilon = 1$ ise aynı yönlüdürler.

4.5. CYCLİC RİCCİ TENSÖRLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCİ-RECURRENT TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

$((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ yarı Finsler manifoldları cyclic Ricci tensörlüdürler denir eğer bu manifoldlar Ricci-recurrent iseler:

$$\left(\nabla^H_{X^H} S^H\right)(Y^H, Z^H) + \left(\nabla^H_{Y^H} S^H\right)(Z^H, X^H) + \left(\nabla^H_{Z^H} S^H\right)(X^H, Y^H) = 0 \tag{4.5.1}$$

$$\left(\nabla^V_{X^V}S^V\right)(Y^V,Z^V)+\left(\nabla^V_{Y^V}S^V\right)(Z^V,X^V)+\left(\nabla^V_{Z^V}S^V\right)(X^V,Y^V)=0. \qquad (4.5.2)$$

Teorem 4.5.1. $((M')^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M')^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları cyclic Ricci tensörlüdürler denir eğer bu manifoldların Ricci tensörleri için aşağıdaki eşitlikler sağlanıyor ise:

$$A^H(\xi^H)S^H(X^H,Y^H)=\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(\xi^H)G^H(X^H,Y^H) \qquad (4.5.3)$$

$$A^V(\xi^V)S^V(X^V,Y^V)=\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^V(\xi^V)G^V(X^V,Y^V) \qquad (4.5.4)$$

İspat. $((M')^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldunun cyclic Ricci tensörlü olduğunu farz edelim. O zaman (4.5.1) ve (4.3.1) den,

$$A^H(X^H)S^H(Y^H,Z^H)+A^H(Y^H)S^H(Z^H,X^H)+A^H(Z^H)S^H(X^H,Y^H)+$$
$$B^H(X^H)G^H(Y^H,Z^H)+B^H(Y^H)G^H(Z^H,X^H)+B^H(Z^H)G^H(X^H,Y^H)=0 \qquad (4.5.5)$$

olur. (4.5.5) denkleminde $Z^H=\xi^H$ alırsak

$$\begin{aligned}A^H(X^H)S^H(Y^H,\xi^H)&+A^H(Y^H)S^H(\xi^H,X^H)+A^H(\xi^H)S^H(X^H,Y^H)\\&+B^H(X^H)G^H(Y^H,\xi^H)+B^H(Y^H)G^H(\xi^H,X^H)+B^H(\xi^H)G^H(X^H,Y^H)\\&=0\end{aligned}$$

ya da

$$-A^H(\xi^H)S^H(X^H,Y^H)=n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(X^H)\eta^H(Y^H)+n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(Y^H)\eta^H(X^H)-$$
$$\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(\xi^H)G^H(X^H,Y^H)-\ n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(X^H)\eta^H(Y^H)-$$
$$n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(Y^H)\eta^H(X^H)=-\,\varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(\xi^H)G^H(X^H,Y^H)$$

ya da

$$A^H(\xi^H)S^H(X^H,Y^H)=\ \varepsilon\, n\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2}A^H(\xi^H)G^H(X^H,Y^H)$$

bulunur. $((M')^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldunun cyclic Ricci tensorlü olduğunu kabul edelim. O zaman (4.5.2) den

$$A^V(X^V)S^V(Y^V,Z^V)+A^V(Y^V)S^V(Z^V,X^V)+A^V(Z^V)S^V(X^V,Y^V)+$$
$$B^V(X^V)G^V(Y^V,Z^V)+B^V(Y^V)G^V(Z^V,X^V)+B^V(Z^V)G^V(X^V,Y^V)=0 \qquad (4.5.6)$$

olup, (4.5.6) da $Z^V = \xi^V$ alırsak

$$A^V(X^V)S^V(Y^V, \xi^V) + A^V(Y^V)S^V(\xi^V, X^V) + A^V(\xi^V)S^V(X^V, Y^V) + B^V(X^V)G^V(Y^V, \xi^V) + B^V(Y^V)G^V(\xi^V, X^V) + B^V(\xi^V)G^V(X^V, Y^V) = 0$$

ya da

$$A^V(\xi^V)S^V(X^V, Y^V) = \varepsilon\, n \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2} A^V(\xi^V)G^V(X^V, Y^V)$$

bulunur.

Sonuç 4.5.1. $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ cyclic Ricci tensörlü genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldunda aşağıdaki durumlar geçerlidir:

1. $(M')^h$ üzerinde tanımlı sabit fonksiyonlar α, β olmak üzere, eğer $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ ise, $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ bir $(\varepsilon) - \alpha -$ Sasakian yarı Finsler manifoldudur, o zaman denklem (4.5.3) den:

$$A^H(\xi^H)S^H(X^H, Y^H) = \varepsilon\, n \frac{(\alpha^2)}{2} A^H(\xi^H)G^H(X^H, Y^H)$$

$$S^H(X^H, Y^H) = \varepsilon\, n \frac{(\alpha^2)}{2} G^H(X^H, Y^H), \quad A^H(\xi^H) \neq 0.$$

2. $(M')^h$ üzerinde tanımlı sabit fonksiyonlar α, β olmak üzere, eğer $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ise, $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ bir $(\varepsilon) -$ Sasakian yarı Finsler manifoldudur, o zaman denklem (4.5.3) den:

$$A^H(\xi^H)S^H(X^H, Y^H) = \varepsilon\, n \frac{(1)}{2} A^H(\xi^H)G^H(X^H, Y^H)$$

$$S^H(X^H, Y^H) = \varepsilon\, n \frac{(1)}{2} G^H(X^H, Y^H), \quad A^H(\xi^H) \neq 0.$$

3. $(M')^h$ üzerinde tanımlı sabit fonksiyonlar α, β olmak üzere, eğer $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ ise, $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ bir $(\varepsilon) -\beta$-Kenmotsu yarı Finsler manifoldu olur, o zaman denklem (4.5.3) den:

$$A^H(\xi^H)S^H(X^H, Y^H) = -\varepsilon\, n \frac{(\beta^2)}{2} A^H(\xi^H)G^H(X^H, Y^H)$$

$$S^H(X^H, Y^H) = \varepsilon\, n \frac{(\beta^2)}{2} G^H(X^H, Y^H), \text{ if } A^H(\xi^H) \neq 0.$$

4. $(M')^h$ üzerinde tanımlı sabit fonksiyonlar α, β olmak üzere, eğer α = 0, β = 1 ise, $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ bir (ε) −Kenmotsu yarı Finsler manifoldu olur, o zaman denklem (4.5.3) den:

$$A^H(\xi^H)S^H(X^H, Y^H) = -\varepsilon\, n \frac{(1)}{2} A^H(\xi^H)G^H(X^H, Y^H)$$

$$S^H(X^H, Y^H) = \varepsilon\, n \frac{(1)}{2} G^H(X^H, Y^H), \text{ if } A^H(\xi^H) \neq 0.$$

Teorem 4.5.2. $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ cyclic Ricci tensörlü genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldu olsun. Eğer $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ manifoldu $(\varepsilon) - \alpha -$ Sasakian, $(\varepsilon) -$ Sasakian, $(\varepsilon) -$ β-Kenmotsu ve (ε) −Kenmotsu manifoldlarından herhangi birisi ve $A^H(\xi^H)$ her yerde sıfırdan farklıysa, o zaman $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ Ricci simetrik tir ve bir Einstein manifoldudur.

$(M')^h$üzerinde tanımlı sabit fonksiyonlar α, β olmak üzere, eğer , α = 0, β = 0 ise, $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ bir $(\varepsilon) -$ kosimplektik yarı Finsler manifoldu olur, o zaman denklem (4.5.3) den:

$$A^H(\xi^H)S^H(X^H, Y^H) = 0$$

$S^H(X^H, Y^H) = 0$, if $A^H(\xi^H) \neq 0$.

Önerme 4.5.1: Eğer $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ cyclic Ricci tensörlü genelleştirilmiş Ricci-recurrent $(\varepsilon) -$ kosimplektik yarı Finsler manifoldu ve $A^H(\xi^H)$ heryerde sıfırdan farklıysa, o zaman $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ Ricci flattır.

Sonuç 4.5.2: $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ cyclic Ricci tensörlü genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldunda aşağıdaki durumlar geçerlidir:

5. $(M')^v$ üzerinde tanımlı sabit fonksiyonlar α, β olmak üzere, eğer α ≠ 0 , β = 0 ise, $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ bir $(\varepsilon) - \alpha -$ Sasakian yarı Finsler manifoldudur, o zaman denklem (4.5.4) den:

$$A^V(\xi^V)S^V(X^V, Y^V) = \varepsilon\, n \frac{(\alpha^2)}{2} A^V(\xi^V)G^V(X^V, Y^V)$$

$$S^V(X^V, Y^V) = \varepsilon\, n \frac{(\alpha^2)}{2} G^V(X^V, Y^V), \quad A^V(\xi^V) \neq 0.$$

6. $(M')^v$ üzerinde tanımlı sabit fonksiyonlar α, β olmak üzere, eğer α = 1, β = 0 ise, $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ bir $(\varepsilon) -$ Sasakian yarı Finsler manifoldudur, o zaman denklem (4.5.4) den:

$$A^V(\xi^V)S^V(X^V, Y^V) = \varepsilon\, n \frac{(1)}{2} A^V(\xi^V)G^V(X^V, Y^V)$$

$$S^V(X^V, Y^V) = \varepsilon\, n \frac{(1)}{2} G^V(X^V, Y^V), \text{ if } A^V(\xi^V) \neq 0.$$

7. $(M')^v$ üzerinde tanımlı sabit fonksiyonlar α, β olmak üzere, eğer α = 0, β ≠ 0 ise $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ bir $(\varepsilon) -$ β-Kenmotsu yarı Finsler manifoldudur, o zaman (4.5.5) den:

$$A^V(\xi^V)S^V(X^V, Y^V) = -\varepsilon\, n \frac{(\beta^2)}{2} A^V(\xi^V)G^V(X^V, Y^V)$$

$$S^V(X^V, Y^V) = \varepsilon\, n \frac{(\beta^2)}{2} G^H(X^H, Y^H), \text{ if } A^V(\xi^V) \neq 0.$$

8. $(M')^v$ üzerinde tanımlı sabit fonksiyonlar α, β olmak üzere, eğer α = 0, β = 1 ise $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ bir $(\varepsilon) -$Kenmotsu yarı Finsler manifoldudur, o zaman (4.5.4) den:

$$A^V(\xi^V)S^V(X^V, Y^V) = -\varepsilon\, n \frac{(1)}{2} A^V(\xi^V)G^V(X^V, Y^V)$$

$$S^V(X^V, Y^V) = \varepsilon\, n \frac{(1)}{2} G^H(X^H, Y^H), \quad A^V(\xi^V) \neq 0.$$

Teorem 4.5.3. $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ cyclic Ricci tensörlü genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldu olsun. Eğer $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ $(\varepsilon) - \alpha -$ Sasakian, $(\varepsilon) -$ Sasakian, $(\varepsilon) -$ β-Kenmotsu ve $(\varepsilon) -$Kenmotsu manifoldlarından herhangi birisiyse ve $A^H(\xi^H)$ heryerde sıfırdan farklı ise, o zaman $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ Ricci simetriktir ve Einstein manifoldudur.

$(M')^v$ üzerinde tanımlı sabit fonksiyonlar α, β olmak üzere, eğer α = 0, β = 0 ise, o zaman $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ bir $(\varepsilon) -$ kosimplektik yarı Finsler manifoldu olur, o zaman denklem (4.5.4) den:

$$A^V(\xi^V)S^V(X^V, Y^V) = 0$$

$$S^V(X^V, Y^V) = 0, \; A^V(\xi^V) \neq 0$$

BEŞİNCİ BÖLÜM
SONUÇ

5.1. SONUÇ

Cyclic Ricci tensörlü ve $A^H(\xi^H) \neq 0$, $A^V(\xi^V) \neq 0$ şartlarını sağlayan $((M')^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M')^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ genelleştirilmiş Ricci-recurrent trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları $(\varepsilon) - \alpha -$ Sasakian, $(\varepsilon) -$ Sasakian, $(\varepsilon) -$ β-Kenmotsu ve $(\varepsilon) -$Kenmotsu manifoldlarından herhangi birisi iseler Einstein ve Ricci simetrik manifoldlar olurlar, burada α ve β fonksiyonları $(M')^h$ ve $(M')^v$ yatay ve dikey manifoldları üzerinde tanımlanmış olan sabit fonksiyonlardırlar.

KAYNAKÇA

Amur, K., & Pujar, S. S. (1978). On submanifolds of a Riemannian manifold admitting a metric semi-symmetric connection. *Tensor, NS*, *32*, 35-38.

Antonelli, P. L. (2003). *Handbook of finsler geometry* (1st ed.). London: Springer Science and Business Media.

Asanov. G. S., (1985). *Finsler geometry, relativity and gauge theories* (1st ed.). London: Reidel Publication Com Dordrecht.

Bagewadi, C. S. (1982). On totally real submanifolds of a Kahlerian manifold admitting Semi symmetric metric F-connection. *Indian. J. Pure. Appl. Math*, *13*(5), 528-536.

Beem, J. (1976). Characterizing Finsler spaces which are pseudo-Riemannian of constant curvature. *Pacific Journal of Mathematics*, *64*(1), 67-77.

Beem, J. K. (1970). Indefinite Finsler spaces and timelike spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, *22*(5), 1035-1039.

Beem, J. K., & Chern, S. S. (1971). Motions in two dimensional indefinite Finsler spaces. *Indiana University Mathematics Journal*, *21*(6), 551-555.

Bejancu, A., & Duggal, K. L. (1993). Real hypersurfaces of indefinite Kaehler manifolds. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *16*, 545-556.

Bejancu, A., & Farran, H. R. (1999). On the vertical bundle of a pseudo-Finsler manifold. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *22*(3), 637-642.

Bejancu, A., & Farran, H. R. (2013). *Geometry of pseudo-Finsler submanifolds* (1st Ed.). London: Springer Science & Business Media.

Calvaruso, G. (2011). Contact Lorentzian manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, *29, 544-551.*

Calvaruso, G., Perrone, D. (2010). Contact pseudo-metric manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, *28, 615-634.*

De, U. C., & Shaikh, A. A. (1997). K-contact and Sasakian manifolds with conservative quasi-conformal curvature tensor. *Bull. Cal. Math. Soc*, *89*(5), 349-354.

Friedmann, A., & Schouten, J. A. (1924). Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen. *Mathematische Zeitschrift*, *21*(1), 211-223.

Gatti, N. B., & Bagewadi, C. S. (2003). On irrotational quasi-conformal curvature tensor. *Tensor New Series*, *64*(3), 248-258.

Hayden, H. A. (1932). Sub-Spaces of a space with torsion. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *2*(1), 27-50.

Hussain, S. I., & Sharafuddin, A. (1976). Semi-symmetric metric connections in almost contact mani-folds. *Tensor, 30*, 133-139.

Kenmotsu, K. (1972). A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *24*(1), 93-103.

Kılıç, N. (2019). *Yarı finsler manifoldları üzerinde değme yapılar* (Yayımlanmamış Doktora Tezi). Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya

Kumar, R., Rani, R., & Nagaich, R. K. (2007). On sectional curvatures of (ε)-Sasakian manifolds. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *20*, 1-8.

Marrero, J. C. (1992). The local structure of trans-Sasakian manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, *162*(1), 77-86.

Matsumoto, M. (1986). *Foundations of finsler geometry and special finsler spaces* (1st Ed.). London: Kaiseisha Press.

Miron, R. (1982). On finsler spaces. *Proc. Nat. Semi, 2*, 147-188.

Oubiña, J. A. (1985). New Class of almost contact metric structure. *Publication Math. Debrecen, 32*, 187-193.

Sağlamer, A. F., Kılıç, N., & Çalışkan, N. (2019). Kenmotsu pseudo-metric finsler structures. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 11*(2), 12-31.

Sinha, B. B., & Yadav, R. K. (1988). On almost contact Finsler strucutures on vector bundle. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 19*(1), 27-35.

Szilasi, J., & Vincze, C. (2000). A new look at Finsler connections and special Finsler manifolds. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (NS)*, *16*, 33-63.

Xufeng, X. U., & Xiaoli, C. (1998). Two theorems on (ϵ)-Sasakian manifolds. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *21*, 249-254.

Yano, K. (1970). On semi symmetric metric connection. *Revue Roumaine de Ha. Mathematiques Pures et Appliques*, *15*, 1579-1591.

DİZİN