SONSUZ SERİLERİN BAZI METOTLAR İLE TOPLANABİLİRLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜLEYMAN ATALAR

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MERSİN
TEMMUZ - 2024

SONSUZ SERİLERİN BAZI METOTLAR İLE TOPLANABİLİRLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜLEYMAN ATALAR
ORCID ID: 0000-0002-3553-7970

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. UĞUR DEĞER
ORCID ID: 0000-0002-1741-1178

İKİNCİ DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ SİBEL YASEMİN GÖLBOL
ORCID ID: 0000-0002-8688-6636

MERSİN
TEMMUZ - 2024

ÖZET

SONSUZ SERİLERİN BAZI METOTLAR İLE TOPLANABİLİRLİĞİ

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, toplanabilme teorisi ile ilgili genel bilgiler verilmiş olup Riesz metodunun toplanabilme teorisindeki öneminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, yapılan çalışmayla ilgili kaynak araştırmalarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde, $k \geq 1$ olmak üzere sonsuz serilerin deferred $\left|\bar{N}, p_n; \theta_n\right|_k$ toplanabilirliği ve Riesz alt metodunun $\left|R_n^q, p_{q(n)}; \theta_n\right|_k$ toplanabilirliği ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Son olarak, beşinci bölümde yapılan çalışmalar ile ilgili sonuçlar verilerek çalışmanın amacı desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riesz ortalaması, Abel dönüşümü, Mutlak toplanabilme, Toplanabilme çarpanı, Sonsuz seriler

Danışman: Doç. Dr. Uğur DEĞER, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin Üniversitesi, Mersin.
İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sibel YASEMİN GÖLBOL, Matematik Anabilim Dalı, Siirt Üniversitesi, Siirt.

ABSTRACT

SUMMABILITY OF INFINITE SERIES BY SOME METHODS

This study consists of five sections. In the first section, general information about summability theory is provided, and the importance of the Riesz method in summability theory is discussed. The second section includes a literature review related to the study. In the third section, the fundamental definitions and theorems that will be used throughout the study are presented. In the fourth section, theorems regarding the deferred $\left|\bar{N}, p_n; \theta_n\right|_k$ summability and the $\left|R_n^q, p_{q(n)}; \theta_n\right|_k$ summability of the Riesz submethod of infinite series for $k \geq 1$ are stated and proved. Finally, in the fifth section, the results related to the conducted studies are presented, supporting the purpose of the study.

Keywords: Riesz mean, Abel transformation, absolute summability, summability factor, infinite series.

Advisor: Assoc. Prof., Uğur DEĞER, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.
Second Advisor: Assist. Prof., Sibel YASEMİN GÖLBOL, Department of Mathematics, Siirt University, Siirt.

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca ders aşamasında ve tez çalışmamda beni yönlendiren; akademik anlamda bana rehberlik eden, beni her daim sabırla yönlendiren, değerli bilgi ve tecrübeleriyle eğitim hayatımda yeni tecrübeler kazanmamı sağlayan, yol gösteren kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Uğur DEĞER'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez aşamasında her an bilgi, emek ve tecrübelerini benden esirgemeyen kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Sibel YASEMİN GÖLBOL'a teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak çalışmalarım süresince desteği ile yanımda olan ve beni cesaretlendiren sevgili eşim Burcu ATALAR'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simge	**Tanım**
$\sum a_n$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz serisi
$s_n = O(1)$	(s_n) sınırlı dizi
Δt_n	Herhangi bir (t_n) dizisi için $t_n - t_{n-1}$
BV	Sınırlı salınımlı diziler
h. h. artan dizi	Hemen hemen artan dizi
card(A)	A kümesinin kardinalitesi
:=	Tanım olarak eşittir

1. GİRİŞ

Toplanabilme teorisi temelinde yakınsamanın olduğu analizin önemli alanlarından biridir. Yakınsama teorisi matematiğin yaklaşım teorisi, olasılık ve uygulamalı matematik gibi alanlarının yanı sıra fizik ve mühendislik gibi alanlarda da kavramsal olarak önemli bir yere sahiptir.

Serilerde yakınsaklık kavramı ilk olarak Cauchy tarafından incelenmiş sonrasında ise Abel tarafından yakınsaklık teorisi daha da geliştirilmiştir.

Serileri iki başlık altında yakınsak ve ıraksak seri olarak inceleyebiliriz. Sonsuz bir serinin kısmi toplamlar dizisi bir limite sahipse bu seriye yakınsak seri denir. Aksi halde bu seriye ıraksaktır denir. Iraksak bir seri belirli ve belirsiz olarak isimlendirilen aşağıdaki iki durumdan biri olarak karşımıza çıkar.

Sonsuz bir serinin kısmi toplamlar dizisinin limiti ∞ veya $-\infty$ ise bu ıraksak seri belirli olarak adlandırılır.

Eğer kısmi toplamlar dizisinin S limit noktalarının kümesi için $\mathrm{card}(S) \geq 2$ ise bu tip ıraksak serilere belirsiz adı verilir. Bu tip serilerde "Hangi yöntemler ile bu tip seriler yakınsak yapılabilir?" sorusu ortaya çıkmaktadır. Bu tip sorulara çözüm bulmak amacıyla çeşitli yöntemler(toplanabilme metotları) geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden en iyi bilineni Cesàro toplanabilirlik (aritmetik ortalama) yöntemidir.

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisini göz önünde tutalım. $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ve $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k$ olsun. $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisi ıraksak iken, bu serinin kısmi toplamlar dizisinin aritmetik ortalaması ile oluşturulan σ_n genel terimli dizisi bir β değerine yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisi Cesàro (aritmetik ortalama) metoduna göre toplanabilirdir(yakınsaktır) denir ve $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \beta\ (C,1)$ ile gösterilir. Örneğin, $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ serisi belirsiz bir ıraksak seri olmasına rağmen, bu seri $\frac{1}{2}$ değerine Cesàro anlamında toplanabilirdir.

Ayrıca, yakınsak bir serinin Cesàro metoduna göre de yakınsak olduğu ve limiti koruduğu(regüler olarak adlandırılır) toplanabilme teorisinde iyi bilinen sonuçlardan biridir.

İyi bilinen bir başka toplanabilme metodu, özel bir hali Cesàro metodunu veren, Riesz metodudur. Buna göre, (q_k) pozitif terimli bir reel sayı dizisi $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k$ olmak üzere,

$$R_n = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k s_k$$

ile verilen dönüşüme Riesz toplanabilme metodu denir ve (R, q_n) veya $(\overline{N}, q_n)$ ile gösterilir (Hardy,1973). Her $k \in \mathbb{N}$ için $q_k = 1$ alınırsa $(R,1) = (C,1)$ olacaktır.

Yukarıda verilen iki temel toplanabilme metodunun dışında da bir çok farklı metot bulunmaktadır. Bu metotların bir kısmına Materyal ve Metot bölümünde yer verilecektir.

Açıktır ki toplanabilme teorisinde temel amaçlardan biri ıraksak olan serileri bazı yöntemler ile yakınsak olacak şekilde düzenleyebilmektir. Bunu yaparken ele alınan yöntemlerin regülerlik koşulunu sağlayacak şekilde de davranılması önemlidir.

Bu tez çalışmasında H. Bor'un 2014 ve 2022 yıllarında yapmış olduğu çalışmalardan motive olunarak benzer bir problem 2. Bölümde verilmiş olan $(\bar{N}, q_n)$ Riesz metodundan daha genel toplanabilme metotları için ele alınmıştır. Bu problem göz önünde tutulurken, yöntemde ele alınan dizi sınıflarının yanısıra teoremlerde verilen koşullar problemin çözümünde önemli bir yere sahiptir. Bu çalışmada H. Bor tarafından verilen sonuçlar toplanabilme yöntemine göre genelleştirilmiş ve iki ana sonuç elde edilmiştir.

Tez çalışmasının Materyal ve Yöntem kısmında literatürde yer alan bazı temel tanım ve kavramların yanı sıra, tez çalışmasının ana eksenini oluşturan toplanabilme yöntemleri verilmiştir.

Bulgular ve tartışma kısmında ise bahsedilen problemin çözümüne ait ana teoremler verilerek, onların ispatları yapılmıştır.

Sonuçlar ve öneriler kısmında ise problemin etkisi ortaya koyulmuş ve bu konu ile ilgili neler yapılabileceği üzerinde durulmuştur.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Fekete 1911 yılında $|C,1|$ toplanabilirlik tanımını vermiştir (Fekete, 1911). Flett ise 1957 yılında $p \geq 1$ olmak üzere bu tanımdan daha genel olan $|C,1|_p$ toplanabilirlik tanımını, daha sonra da $|C,\propto|_p$ toplanabilirlik tanımını vermiştir (Flett, 1957).

Mutlak Nörlund toplanabilme kavramı Das tarafından 1969 yılında verilmiştir (Das,1969). Kishore ve Hotta ise 1970 yılında toplanabilme çarpanını tanımlamışlardır (Kishore&Hotta, 1970). 1979 yılında ise Tanovic-Miller tarafından alt üçgensel matrisler yardımıyla $|A|_k$ toplanabilirlik tanımı yapılmıştır (Tanovic&Miller, 1979).

$\left|\bar{N}, p_n\right|_k$ toplanabilme ve $|N, p_n, \delta|_k$ toplanabilme kavramları sırasıyla 1985 ve 1993 yıllarında Bor tarafından verilmiştir (Bor, 1985), (Bor, 1993).

1992 yılında Sulaiman tarafından $\left|\bar{N}, p_n; \theta_n\right|_k$ toplanabilme tanımı yapılmıştır (Sulaiman, 1992). Sulaiman daha sonra 1993 yılında alt üçgensel matrisler yardımıyla $|A, p_n|_k$ toplanabilirlik tanımını yapmıştır (Sulaiman, 1993).

Seyhan 1999 yılında $\varphi - |C,\propto|_p$ ve $\varphi - |C,\propto;\delta|_p$ toplanabilirlik tanımlarını literatüre kazandırmıştır (Seyhan, 1999).

Daha sonra Bor, Mishra ve Srivastava'nın mutlak Cesàro toplanabilirliği ile ilgili çalışmasını (Mishra&Srivastava,1985) hemen hemen artan dizileri kullanarak daha zayıf koşullar altında ispatlamıştır (Bor, 2000).

Özarslan ve Keten 2013 yılında $|A, p_n|_k$ toplanabilirlikten daha genel olan $\varphi - |A, p_n|_k$ toplanabilirlik tanımını vermişlerdir ve bununla ilgili daha önceden Bor'un vermiş olduğu teoremleri pozitif azalmayan diziler yerine hemen hemen artan dizi kavramını kullanarak daha zayıf koşullar altında genelleştirmişlerdir (Özarslan&Keten, 2013).

Bor 2012'deki çalışmasında hemen hemen artan dizileri kullanarak mutlak Riesz toplanabilirliği ile bir teoremi ispatlamıştır (Bor, 2012). Bor 2014'de ise aynı teoremi daha zayıf koşullar altında ispatlayıp yeni bir sonuç elde etmiştir (Bor, 2014).

Bor 2016'daki sonsuz serilerin mutlak Riesz toplanabilirliği ($\left|\bar{N}, p_n\right|_k$) ile ilgili çalışmasını 2017'de $\left|\bar{N}, p_n; \theta_n\right|_k$ toplanabilirliğini kullanarak genelleştirmiştir (Bor, 2016), (Bor, 2017).

2017 yılında Özarslan, $|A, p_n|_k$ toplanabilirliği ile ilgili bilinen bir teoremi $\delta -$quasi monoton dizileri kullanarak $|A, p_n, \delta|_k$ toplanabilirliği ile genelleştirmiştir (2017, Özarslan).

Bor 2018'de artmayan diziler ile $\delta -$quasi monoton dizileri kullanarak sonsuz serilerin $\left|\bar{N}, p_n\right|_k$ toplanabilirliği ile elde ettiği sonucu 2022'de $\left|\bar{N}, p_n; \theta_n\right|_k$ toplanabilirliği kullanarak genelleştirmiştir (Bor, 2022).

Bu çalışmada öncelikli olarak sonsuz serilerin deferred Riesz toplanabilirliği Bor'un 2022'deki çalışması göz önünde bulundurularak ele alınmış ve bununla ilgili bir teorem verilmiştir. Daha sonra Bor'un 2014'deki çalışması Riesz lambda metodu kullanılarak genelleştirilmiş ve bu metoda bağlı olarak sonsuz serilerin toplanabilirliği üzerine bir sonuç verilmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Materyal ve yöntem bölümünde öncelikle tez çalışmasında faydalanılacak tanımlar, kavramlar ve gösterimler, daha sonra ise toplanabilme yöntemlerine bağlı olan teoremler ve sonuçları verilecektir.

3.1. Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1. M ve N keyfi sabitler ve (a_n) dizisi pozitif artan bir dizi olsun. $Ma_n \leq X_n \leq Na_n$ koşulunu gerçekleyen pozitif (X_n) dizisi h. h. artan dizi olarak adlandırılır (Bari ve Stečkin, 1956).

Tanım 3.1.2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_m) ve Cesàro ortalaması u_m olmak üzere

$$u_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} s_k \tag{3.1}$$

olsun. Eğer

$$\lim_{m\to\infty} u_m = l$$

ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi l değerine $(C,1)$ toplanabilirdir denir (Petersen, 1966).

Tanım 3.1.3. u_n **,** (3.1) deki gibi tanımlanmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n-1}| < \infty \tag{3.2}$$

koşulu sağlanıyorsa, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine $|C,1|$ toplanabilir denir (Fekete, 1911).

Tanım 3.1.4. $p \geq 1$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1} |\Delta_k u_k|^p \tag{3.3}$$

serisi yakınsak ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi $|C,1|_p$ toplanabilir denir (Flett, 1957).

Burada $\Delta_k u_k := u_k - u_{k-1}$.

Tanım 3.1.5. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_m) olsun. $\propto > -1$ için (s_m) ve (ma_m) dizilerine göre $\propto$-ıncı mertebeden Cesàro ortalamaları sırasıyla

$$u_m^{\propto} = \frac{1}{B_m^{\propto}} \sum_{k=0}^{m} B_{m-k}^{\propto-1} s_k \tag{3.4}$$

$$t_m^{\propto} = \frac{1}{B_m^{\propto}} \sum_{k=1}^{m} B_{m-k}^{\propto-1} k a_k \tag{3.5}$$

ile tanımlanır. Eğer $\lim_{m\to\infty} u_m^{\propto} = l$ eşitliği mevcut ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi l değerine (C,α) toplanabilirdir denir. Burada

$$B_m^{\propto} = \binom{m+\propto}{m} = O(m^{\propto}) \, , B_0^{\propto} = 1 \, , m > 0 \, , B_{-m}^{\propto} = 0 \tag{3.6}$$

dır (Zygmund, 1959).

Tanım 3.1.6. $u_m^{\propto}$ **,** (3.4) de olduğu gibi tanımlansın. $\propto > -1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k u_k^{\propto}| \tag{3.7}$$

serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi $|C,\propto|$ toplanabilir denir (Fekete, 1911).

Tanım 3.1.7. $p \geq 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1} |\Delta_k u_k^{\propto}|^p \tag{3.8}$$

serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi $|C,\propto|_p$ toplanabilir denir (Flett, 1957).

Burada $t_k^{\propto} = k^p \Delta_k u_k^{\propto}$ olduğundan (3.8) koşulu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} |t_k^{\propto}|^p$$

olarak verilebilir (Bor, 1988).

Tanım 3.1.8. $\delta \geq 0$, $\alpha > -1$ ve $p \geq 1$ için, eğer

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\delta p-1} |t_k^{\propto}|^p < \infty \tag{3.9}$$

koşulu sağlanırsa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi $|C,\propto;\delta|_p$ toplanabilir denir (Flett, 1957).

Eğer (3.9) ifadesinde $\delta = 0$ alınırsa, $|C,\propto|_p$ toplanabilme ve yine (3.9) ifadesinde $\delta = 0$ ve $\alpha = 1$ alınırsa, $|C,1|_p$ toplanabilme elde edilir.

Tanım 3.1.9. $\alpha > -1$ ve $p \geq 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{p-1} k^{-p} |t_k^{\propto}|^p < \infty \tag{3.10}$$

koşulu sağlanırsa bu takdirde $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi $\varphi - |C,\propto|_p$ toplanabilir denir (Seyhan, 1999).

Tanım 3.1.10. $\alpha > -1, p \geq 1$ ve $\delta \geq 0$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{\delta p+p-1} k^{-p} |t_k^{\propto}|^p < \infty \tag{3.11}$$

koşulu sağlanırsa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi $\varphi - |C,\propto;\delta|_p$ toplanabilirdir denir (Seyhan, 1999).

Eğer $\delta = 0$ alınırsa $\varphi - |C,\propto|_p$ toplanabilme elde edilir.

Bu çalışma boyunca

$$P_n = \sum_{m=0}^{n} p_m \to \infty, \qquad n \to \infty \tag{3.12}$$
$$p_{-i} = P_{-i} = 0, i \geq 1$$

şeklindedir. Burada (p_n) pozitif sayıların bir dizisidir.

Tanım 3.1.11 (P_n), (3.12) deki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$u_n = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_m s_m \tag{3.13}$$

dönüşümüne Riesz ortalaması denir. Bu dönüşüm $(\bar{N}, p_n)$ olarak gösterilir (Petersen, 1966).

Riesz dönüşümünün matris elemanları

$$t_{nm} = \begin{cases} \dfrac{p_m}{P_n}, & m \leq n \ \ i\text{ç}in \\ 0 \ \ , & m > n \ \ i\text{ç}in \end{cases} \tag{3.14}$$

dır (Petersen, 1966).

Teorem 3.1.12. $(\bar{N}, p_n)$ ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter şart $P_n \to \infty \ \ (n \to \infty)$ koşulunun sağlanmasıdır (Petersen, 1966).

Tanım 3.1.13. (u_n), (3.13) eşitliğindeki gibi verilmiş olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} u_n = s$$

koşulu sağlanırsa, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi s ' ye $\left(\bar{N}, p_n\right)$ toplanabilir denir (Petersen, 1966).

Tanım 3.1.14. $\sum a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_k) olmak üzere, bu dizinin (3.13) ile verilen (u_k) Riesz dönüşümü için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k u_k| < \infty \tag{3.15}$$

koşulu sağlanırsa, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi $|\bar{N}, p_n|$ toplanabilir denir (Mazhar, 1966).

Tanım 3.1.15. $p \geq 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{P_k}{p_k}\right)^{p-1} |\Delta_k u_k|^p < \infty \tag{3.16}$$

koşulu sağlanırsa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi $|\bar{N}, p_n|_p$ toplanabilirdir denir (Maddox, 1970). (3.16) ifadesinde her n için $p_n = 1$ ise $|\bar{N}, 1|_p = |C, 1|_p$ olur (Maddox, 1970).

Tanım 3.1.16. $p \geq 1$ olsun. Eğer

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k^{p-1} |\Delta_k u_k|^p < \infty \tag{3.17}$$

koşulu sağlanırsa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi $|\bar{N}, p_n; \theta|_p$ toplanabilir denir (Sulaiman, 1992). (3.17) ifadesinde her n için $\theta_n = \dfrac{P_n}{p_n}$ alınırsa, $|\bar{N}, p_n|_p$ toplanabilme elde edilir (Bor, 1985).

Tanım 3.1.17. P_1 ve P_2 verilen iki toplanabilme metodu olmak üzere, P_1 toplanabilen her dizi aynı değere P_2 toplanabiliyorsa, P_1e P_2 yi gerektiriyor denir. $P_1 \subseteq P_2$ şeklinde ifade edilir. Eğer $P_1 \subseteq P_2$ ve $P_2 \subseteq P_1$ sağlanıyorsa, P_1 metodu P_2 metoduna denktir denir (Petersen, 1966).

Tanım 3.1.18. $\sum a_n$ serisi verildiğnde $\sum a_n \lambda_n$ serisi bir Y metodu yardımıyla toplanabiliyorsa, (λ_n) dizisine $\sum a_n$ serisinin Y metodu için bir toplanabilme çarpanı denir (Kishore ve Hotta, 1970).

Tanım 3.1.19 S kümesi pozitif sayıların sınırsız bir kümesi olsun. $k(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonu S üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon ve yeterince büyük $x \in S$ değerleri için

$$\frac{|k(x)|}{h(x)} < M$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir M sayısı varsa bu takdirde

$$k(x) = O\left(h(x)\right)$$

yazılabilir (Boas, 1965).

Tanım 3.1.20. Pozitif sayıların herhangi iki dizisi (δ_n) ve (w_n) olsun. Eğer bir yerden itibaren $w_n > 0$, $\delta_n > 0$ ve $\Delta w_n \geq -\delta_n$ oluyorsa (w_n) dizisine $\delta-$quasi monoton denir (Boas, 1965).

Tanım 3.1.21. (Abel Dönüşümü)

(x_k) ve (y_k) reel veya kompleks sayıların herhangi iki dizisi olsun.

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta y_k + s_n y_n \tag{3.18}$$

sağlanır (Abel, 1826).

Tanım 3.11.22. (Hölder Eşitsizliği)

$\propto > 1$ için $\frac{1}{\propto} + \frac{1}{\beta} = 1$ ve her $i = \overline{1,n}$ için $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} {x_k}^{\alpha}\right)^{1/\propto} \left(\sum_{k=1}^{n} {y_k}^{\beta}\right)^{1/\beta} \tag{3.19}$$

sağlanır (Maddox, 1970).

Tanım 3.1.23. (Minkowski Eşitsizliği)

$\propto > 1$ ve her $i = \overline{1,n}$ için $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ olmak üzere

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{\propto}\right)^{1/\propto} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} {x_k}^{\alpha}\right)^{1/\propto} + \left(\sum_{k=1}^{n} {y_k}^{\propto}\right)^{1/\propto} \tag{3.20}$$

sağlanır (Maddox, 1970).

3.2. Bilinen Sonuçlar

Teorem 3.2.1. $n \geq 0$ için, $X_n = \sum_{v=0}^{n} \frac{p_v}{P_v}$, $\left(\frac{\theta_n p_n}{P_n}\right)$ artmayan bir dizi ve $n \to \infty$ için $\lambda_n \to 0$ olsun. (p_n) pozitif sayıların bir dizisi olsun öyle ki

$$n \to \infty \text{ için } P_n = O(np_n)$$

koşulu sağlansın. Varsayalım ki her n için, $|\Delta\lambda_n| \leq |A_n|$, $\sum nX_n\delta_n < \infty$ ve $\sum A_n X_n < \infty$ olacak şekilde bir $\delta-$quasi monoton (A_n) sayı dizisi mevcut olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left(\frac{p_n}{P_n}\right)^k \frac{|t_n|^k}{X_n^{k-1}} = O(X_m), \; m \to \infty$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda $\sum a_n \lambda_n$ serisi $\left|\bar{N}, p_n; \theta_n\right|_k$, $k \geq 1$, toplanabilirdir (Bor, 2022).

Lemma 3.2.2. Yukarıdaki teoremin koşulları altında aşağıdakiler sağlanır (Bor, 1991).

$$|\lambda_n| X_n = O(1), \; n \to \infty$$
$$nX_n |A_n| = O(1), \; n \to \infty$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} nX_n \, |\Delta A_n| < \infty.$$

Teorem 3.2.3. (X_n) h. h. artan bir dizi ve $\left(\frac{\theta_n p_n}{P_n}\right)$ artmayan bir dizi olmak üzere (β_n) ve (λ_n) dizileri aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde seçilsin:

$$|\Delta\lambda_n| \leq \beta_n,$$
$$\beta_n \to 0, \; n \to \infty$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\Delta\beta_n| X_n < \infty,$$
$$|\lambda_n| X_n = O(1).$$

Eğer,

$$\sum_{n=1}^{m} \theta_n^{k-1} \frac{|t_n|^k}{n^k X_n^{k-1}} = O(X_m), \qquad m \to \infty$$

ve (p_n) dizisi

$$P_n = O(np_n), \tag{3.21}$$

$$P_n \Delta p_n = O(p_n p_{n+1}) \tag{3.22}$$

koşullarını sağlarsa, bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$ serisi $\left|\bar{N}, p_n; \theta_n\right|_k$, $k \geq 1$, toplanabilirdir (Bor, 2014).

Lemma 3.2.4. Eğer (X_n) h. h. artan bir dizi ise Teorem 3.2.3 ün koşulları altında,

$$nX_n \beta_n = O(1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n < \infty$$

elde edilir (Mazhar, 1966).

Lemma 3.2.5. Eğer (3.21) ve (3.22) koşulları sağlanırsa, bu durumda $\Delta\left(P_n / p_n n^2\right) = O(1/n^2)$ elde edilir (Bor, 1988).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. $\left|\overline{DN}, p_n; \theta_n\right|_k$ toplanabilme ile ilgili sonuçlar

Bu bölümde Hüseyin Bor'un 3.2.1'de verilen teoremi genelleştirilecektir. Teoremden önce deferred Riesz ortalaması ve $\left|\overline{DN}, p_n; \theta_n\right|_k$ toplanabilirlik tanımları aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 4.1.1. (p_n) bir pozitif reel sayı dizisi ve $\eta = (\eta_n)$ ile $\kappa = (\kappa_n)$ ise negatif olmayan tamsayıların

$$\eta_n < \kappa_n, \qquad n = 1,2,3, \dots$$
$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n = \infty$$

koşullarını sağlayan dizileri olsun ve

$$P_{\eta_n+1}^{\kappa_n} = \sum_{k=\eta_n+1}^{\kappa_n} p_k \neq 0$$

sağlansın. $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Bu durumda diziden diziye

$$D_\eta^\kappa R_n = \frac{1}{P_{\eta_n+1}^{\kappa_n}} \sum_{m=\eta_n+1}^{\kappa_n} p_m s_m$$

dönüşümüne (s_n) dizisinin deferred Riesz ortalamasının $D_\eta^\kappa R_n$ dizisi denir (Değer ve Küçükaslan, 2015).

Tanım 4.1.2. $k \geq 1$ ve (θ_n) pozitif sayıların herhangi bir dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left|D_\eta^\kappa R_n - D_\eta^\kappa R_{n-1}\right|^k < \infty \tag{3.23}$$

koşulu sağlanıyorsa $\sum a_n$ serisi $\left|\overline{DN}, p_n; \theta_n\right|_k$ toplanabilirdir denir.

Teorem 4.1.1. $n \geq 0$ için $X_n = \sum_{v=0}^{n} \frac{p_v}{P_v}$, $\left(\frac{\theta_n p_n}{P_n}\right)$ artmayan bir dizi ve $n \to \infty$ için $\lambda_n \to 0$ olsun. (p_n) pozitif sayıların $n \to \infty$ için $P_n = O(np_n)$ koşulu sağlayan bir dizisi olsun. Varsayalım ki $\forall n$ için $\sum nX_n \delta_n < \infty$, $|\Delta\lambda_n| \leq |A_n|$ ve $\sum A_n X_n$ yakınsak olacak şekilde bir (A_n), $\delta -$quasi monoton sayı dizisi mevcut olsun.

Eğer

$$\sum_{n=1}^{\kappa_m} \theta_n^{k-1} \left(\frac{p_n}{P_n}\right)^k \frac{|t_n|^k}{X_n^{k-1}} = O(X_{\kappa_m}), \; m \to \infty$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda $\sum a_n \lambda_n$ serisi $\left|\overline{DN}, p_n; \theta_n\right|_k$, $k \geq 1$, toplanabilirdir.

Teoremin İspatı : (s_n), $\sum a_n \lambda_n$ serisinin kismi toplamlar dizisi, yani $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \rho_k$ ve $P_{\kappa_n} \coloneqq P_{\eta_n+1}^{\kappa_n}$ olsun.

(T_{κ_n}), $\sum a_n \lambda_n$ serisinin deferred $(\overline{N}, p_n)$ ortalaması olmak üzere tanımdan,

$$T_{\kappa_n} = \frac{1}{P_{\kappa_n}} \sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n} p_i \sum_{j=\eta_n+1}^{i} a_j \lambda_j = \frac{1}{P_{\kappa_n}} \sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n} p_i \sum_{j=\eta_n+1}^{i} \rho_j$$

$$= \frac{1}{P_{\kappa_n}} \left(p_{\eta_n+1} \sum_{j=\eta_n+1}^{\eta_n+1} \rho_j + p_{\eta_n+2} \sum_{j=\eta_n+1}^{\eta_n+2} \rho_j + p_{\eta_n+3} \sum_{j=\eta_n+1}^{\eta_n+3} \rho_j + \cdots + p_{\kappa_n} \sum_{j=\eta_n+1}^{\kappa_n} \rho_j \right)$$

$$= \frac{1}{P_{\kappa_n}} \sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n} \rho_i \left(P_{\kappa_n} - P_{i-1}\right) = \frac{1}{P_{\kappa_n}} \sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n} a_i \lambda_i \left(P_{\kappa_n} - P_{i-1}\right)$$

yazılabilir.

$T_{\kappa_n} - T_{\kappa_n - 1}$ farkına bakalım.

$$T_{\kappa_n} - T_{\kappa_n-1} = \frac{1}{P_{\kappa_n}} \sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n} \rho_i \left(P_{\kappa_n} - P_{i-1}\right) - \frac{1}{P_{\kappa_n-1}} \sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} \rho_i \left(P_{\kappa_n-1} - P_{i-1}\right)$$

$$= \frac{1}{P_{\kappa_n} P_{\kappa_n-1}} \sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} \left(\rho_i P_{\kappa_n} P_{\kappa_n-1} - \rho_i P_{\kappa_n} P_{i-1} - \rho_i P_{\kappa_n} P_{\kappa_n-1} + \rho_i P_{\kappa_n} P_{i-1}\right) + \frac{1}{P_{\kappa_n}} \rho_{\kappa_n} \left(P_{\kappa_n} - P_{\kappa_n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{P_{\kappa_n} P_{\kappa_n-1}} \sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} \rho_i P_{i-1} p_{\kappa_n} + \frac{\rho_{\kappa_n} p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}} = \frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n} P_{\kappa_n-1}} \sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n} P_{i-1} \, a_i \lambda_i$$

$$=\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n}\frac{P_{i-1}\lambda_i}{i}ia_i$$

$T_{\kappa_n}-T_{\kappa_n-1}$ farkına Abel dönüşümünü uygulayalım.

$$T_{\kappa_n}-T_{\kappa_n-1}=\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n}\frac{P_{i-1}\lambda_i}{i}ia_i$$

$$=\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\left[\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\Delta\left(\frac{P_{i-1}\lambda_i}{i}\right)\sum_{r=0}^{i}ra_r+\left(\sum_{r=0}^{\kappa_n}ra_r\right)\frac{P_{\kappa_n-1}\lambda_{\kappa_n}}{\kappa_n}\right]$$

$$=\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\left[\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\left(\frac{P_{i-1}\lambda_i}{i}-\frac{P_i\lambda_{i+1}}{i+1}\right)(i+1)t_i+t_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}\frac{\kappa_n+1}{\kappa_n}\right]$$

$$=\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{P_{i-1}\lambda_i}{i}(i+1)t_i-\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{P_i\lambda_{i+1}}{i+1}(i+1)t_i+t_{\kappa_n}p_{\kappa_n}\lambda_{\kappa_n}\frac{\kappa_n+1}{P_{\kappa_n}\kappa_n}$$

$$=\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{P_i\lambda_i}{i}(i+1)t_i-\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{p_i\lambda_i}{i}(i+1)t_i-\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}P_i\lambda_{i+1}t_i$$
$$+t_{\kappa_n}p_{\kappa_n}\lambda_{\kappa_n}\frac{\kappa_n+1}{P_{\kappa_n}\kappa_n}$$

$$=\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{P_i\lambda_i}{i}(i+1)t_i-\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{P_i\lambda_{i+1}}{i}(i+1)t_i$$
$$+\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{P_i\lambda_{i+1}}{i}(i+1)t_i$$
$$+\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{p_i\lambda_i}{i}(i+1)t_i-\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}P_i\lambda_{i+1}t_i+t_{\kappa_n}p_{\kappa_n}\lambda_{\kappa_n}\frac{\kappa_n+1}{P_{\kappa_n}\kappa_n}$$

$$=\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}P_i\Delta\lambda_i t_i\frac{i+1}{i}+\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{P_i\lambda_{i+1}}{i}t_i-\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{p_i\lambda_i(i+1)t_i}{i}$$
$$+t_{\kappa_n}p_{\kappa_n}\lambda_{\kappa_n}\frac{\kappa_n+1}{P_{\kappa_n}\kappa_n}$$

$$= \frac{p_{\kappa_n} t_{\kappa_n} \lambda_{\kappa_n}(\kappa_n+1)}{P_{\kappa_n}\kappa_n} - \frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}} \sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} \frac{p_i\lambda_i(i+1)t_i}{i} + \frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} P_i\Delta\lambda_i t_i \frac{i+1}{i}$$

$$+ \frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} \frac{P_i\lambda_{i+1}t_i}{i}$$

$$= T_{\kappa_n,1} + T_{\kappa_n,2} + T_{\kappa_n,3} + T_{\kappa_n,4}$$

Minkowski eşitsizliğinden,

$$\left|T_{\kappa_n,1} + T_{\kappa_n,2} + T_{\kappa_n,3} + T_{\kappa_n,4}\right|^k \leq 4^k\left(\left|T_{\kappa_n,1}\right|^k + \left|T_{\kappa_n,2}\right|^k + \left|T_{\kappa_n,3}\right|^k + \left|T_{\kappa_n,4}\right|^k\right)$$

olup teoremin ispatını için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1}\left|T_{\kappa_n,r}\right|^k < \infty, \;\; r = 1,2,3,4$$

olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

Öncelikle $T_{\kappa_n,1}$ durumunu inceleyelim. Abel dönüşümü ve teoremin koşulları yardımıyla,

$$\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1} \theta_n^{k-1}\left|T_{\kappa_n,1}\right|^k = \sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1} \theta_n^{k-1}\left|\frac{p_{\kappa_n}t_{\kappa_n}\lambda_{\kappa_n}(\kappa_n+1)}{\kappa_n P_{\kappa_n}}\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_n+1} \theta_n^{k-1}\left|\lambda_{\kappa_n}\right|^{k-1}\left|\lambda_{\kappa_n}\right|\left(\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}}\right)^k\left|t_{\kappa_n}\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1} \left|\lambda_{\kappa_n}\right|\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}}\right)^k\frac{\left|t_{\kappa_n}\right|^k}{X_{\kappa_n}^{k-1}}$$

$$= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1} \Delta\left|\lambda_{\kappa_n}\right|\sum_{r=1}^{n}\theta_r^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_r}}{P_{\kappa_r}}\right)^k\frac{\left|t_{\kappa_r}\right|^k}{X_{\kappa_r}^{k-1}} + O(1)\left|\lambda_{\kappa_m+1}\right|\sum_{r=0}^{\kappa_m+1}\theta_r^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_r}}{P_{\kappa_r}}\right)^k\frac{\left|t_{\kappa_r}\right|^k}{X_{\kappa_r}^{k-1}}$$

$$= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1} \Delta\left|\lambda_{\kappa_n}\right|X_{\kappa_n} + O(1)\left|\lambda_{\kappa_m+1}\right|X_{\kappa_m+1}$$

$$= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1} \left|\Delta\lambda_{\kappa_n}\right|X_{\kappa_n} + O(1)\left|\lambda_{\kappa_m+1}\right|X_{\kappa_m+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\left|A_{\kappa_n}\right|X_{\kappa_n}+O(1)\left|\lambda_{\kappa_m+1}\right|X_{\kappa_m+1} \\
&= O(1)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left|T_{\kappa_n,2}\right|^k &= \sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left|\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{p_i\lambda_i(i+1)t_i}{i}\right|^k \\
&= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}}\right)^k\frac{1}{P_{\kappa_n-1}^k}\left(\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}p_i\left|\lambda_i\right|\left|t_i\right|\right)^k \\
&= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}}\right)^k\frac{1}{P_{\kappa_n-1}}\left(\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}p_i^{\frac{1}{k}}p_i^{1-\frac{1}{k}}\left|\lambda_i\right|\left|t_i\right|\right)^k
\end{aligned}
$$

Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
&= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}}\right)^k\frac{1}{P_{\kappa_n-1}}\left[\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}p_i\left|\lambda_i\right|^k\left|t_i\right|^k\right]\left[\frac{1}{P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}p_i\right]^{k-1} \\
&= O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m}p_i\left|\lambda_i\right|^{k-1}\left|\lambda_i\right|\left|t_i\right|^k\sum_{n=i+1}^{\kappa_n+1}\left(\frac{\theta_n p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}}\right)^{k-1}\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}} \\
&= O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m}\left(\frac{\theta_i p_{\kappa_i}}{P_{\kappa_i}}\right)^{k-1}p_i\left|t_i\right|^k\left|\lambda_i\right|\left(\frac{1}{X_i}\right)^{k-1}\sum_{n=i+1}^{\kappa_n+1}\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}} \\
&= O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m}\theta_i^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_i}}{P_{\kappa_i}}\right)^k\frac{\left|t_i\right|^k}{X_i^{k-1}}\left|\lambda_i\right| \\
&= O(1)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left|T_{\kappa_n,3}\right|^k &= \sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left|\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}P_i\Delta\lambda_i t_i\frac{i+1}{i}\right|^k \\
&= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\right)^k\left(\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}p_i\left|A_i\right|\left|t_i\right|i\right)^k
\end{aligned}
$$

$$= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m} \theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}}\right)^k \frac{1}{P_{\kappa_n-1}}\left(\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} p_i\,|A_i|^k\,|t_i|^k\, i^k\right)\left(\frac{1}{P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} p_i\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m} p_i\,|t_i|^k\left(i|A_i|\right)^{k-1} iA_i \sum_{n=i+1}^{\kappa_n+1}\left(\frac{\theta_n p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}}\right)^{k-1}\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{i=\eta_{n+1}}^{\kappa_m}\left(\frac{\theta_i p_{\kappa_i}}{P_{\kappa_i}}\right)^{k-1}\frac{p_{\kappa_i}}{P_{\kappa_i}}\left(\frac{1}{X_i}\right)^{k-1} i|A_i||t_i|^k$$

$$= O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m} \theta_i^{k-1} i|A_i|\left(\frac{p_{\kappa_i}}{P_{\kappa_i}}\right)^k\frac{|t_i|^k}{X_i^{k-1}}$$

Abel dönüşümü uygulanırsa,

$$= O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m-1}\Delta\left(i|A_i|\right)\sum_{r=1}^{i}\theta_r^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_r}}{P_{\kappa_r}}\right)^k\frac{|t_r|^k}{X_r^{k-1}} + O(1)\kappa_m\left|A_{\kappa_m}\right|\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m-1}\theta_i^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_i}}{P_{\kappa_i}}\right)^k\frac{|t_i|^k}{X_i^{k-1}}$$

$$= O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m-1}\left|\Delta\left(i|A_i|\right)\right|X_i + O(1)\kappa_m\left|A_{\kappa_m}\right|X_{\kappa_m}$$

$$= O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m-1} iX_i\Delta|A_i| + O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m-1}|A_i|X_i + O(1)\kappa_m\left|A_{\kappa_m}\right|X_{\kappa_m}$$

$$= O(1)$$

elde edilir.

$$\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left|T_{\kappa_n,4}\right|^k = \sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left|\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1}\frac{P_i\lambda_{i+1}t_i}{i}\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}\right)^k\left(\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} p_i\,|\lambda_{i+1}||t_i|\right)^k$$

Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}}\right)^k\frac{1}{P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} p_i\,|\lambda_{i+1}|^k\,|t_i|^k\left(\frac{1}{P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} p_i\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{n=\eta_n+1}^{\kappa_m+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}}\right)^k\frac{1}{P_{\kappa_n-1}}\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_n-1} p_i\,|\lambda_{i+1}|^k\,|t_i|^k$$

$$=O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m} p_i\left|\lambda_{i+1}\right|^{k-1}\left|\lambda_{i+1}\right|\left|t_i\right|^k \sum_{n=i+1}^{\kappa_n+1}\left(\frac{\theta_n p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}}\right)^{k-1}\frac{p_{\kappa_n}}{P_{\kappa_n}P_{\kappa_n-1}}$$

$$=O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m}\theta_i^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_i}}{P_{\kappa_i}}\right)^k \frac{p_i}{P_{\kappa_i}}\frac{P_{\kappa_i}}{p_{\kappa_i}}\left|\lambda_{i+1}\right|^k \frac{\left|t_i\right|^k}{X_i^{k-1}}$$

$$=O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m}\theta_i^{k-1}\left(\frac{p_{\kappa_i}}{P_{\kappa_i}}\right)^k \left|\lambda_{i+1}\right|\frac{\left|t_i\right|^k}{X_i^{k-1}}$$

elde edilir. Son ifadede Abel dönüşümü uygulanırsa,

$$=O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m-1}\Delta\left|\lambda_{i+1}\right|\sum_{r=1}^{i}\theta_r^{k-1}\frac{\left|t_r\right|^k}{\kappa_r X_r^{k-1}}+O(1)\left|\lambda_{\kappa_m+1}\right|\sum_{r=1}^{\kappa_m}\theta_r^{k-1}\frac{\left|t_r\right|^k}{\kappa_r X_r^{k-1}}$$

$$=O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\varphi_m-1}\left|\Delta\lambda_{i+1}\right|X_{i+1}+O(1)\left|\lambda_{\kappa_m+1}\right|X_{\kappa_m+1}$$

$$=O(1)\sum_{i=\eta_n+1}^{\kappa_m-1}\left|A_{i+1}\right|X_{i+1}+O(1)\left|\lambda_{\kappa_m+1}\right|X_{\kappa_m+1}$$

$$=O(1)$$

elde edilir ve teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.2. Riesz alt metodu için $\left|R_n^q, p_{q(n)};\theta_n\right|_k$ toplanabilme ile ilgili sonuçlar

Bu bölümde Hüseyin Bor'un Teorem 3.2.3'de verilen sonucunu genelleştiren bir teorem verilecektir. Bu teoremden önce Riesz alt metodu ve Riesz alt metoduna göre $\left|R_n^q, p_{q(n)};\theta_n\right|_k$ toplanabilirlik tanımları aşağıdaki gibi verilir.

4.2.1. Tanım. $\{q(n)\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif tamsayıların kesin artan bir dizisi olsun. Bu durumda C_q Cesàro alt metodu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(C_q x)_n=\frac{1}{q(n)}\sum_{k=1}^{q(n)}x_k,\ (n=1,2,...)$$

Burada (x_k) reel ya da kompleks sayıların bir dizisidir. Bu metot göz önünde tutularak Riesz alt metodu aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$R_n^q = \frac{1}{P_{q(n)}} \sum_{m=0}^{q(n)} p_m s_m$$

Burada (s_n) dizisi $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi, (p_n) pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere $P_{q(n)} = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{q(n)} \neq 0,\ (n \geq 0)$ ve $p_{-1} = P_{-1} = 0$ dır (Değer, 2018).

4.2.2. Tanım. $k \geq 1$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{k-1} \left| R_n^q - R_{n-1}^q \right|^k < \infty$$

ise $\sum a_n$ serisi Riesz alt metoduna göre $\left| R_n^q, p_{q(n)}; \theta_n \right|_k$ toplanabilirdir. Burada (θ_n) pozitif sayıların herhangi bir dizisidir.

4.2.1 Teorem. (X_n) h. h. artan bir dizi, $\left(\dfrac{\theta_n p_{q(n)}}{P_{q(n)}} \right)$ artmayan bir dizi olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$|\Delta\mu_n| \leq \beta_n,$$
$$\beta_n \to 0\,, n \to \infty,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\Delta\beta_n| X_n < \infty,$$
$$|\Delta\mu_n| X_n = O(1),$$
$$P_{q(n)} = O(q(n) p_{q(n)}),$$
$$P_{q(n)} \Delta p_{q(n)} = O(p_{q(n)} p_{q(n)+1}) \text{ ve}$$
$$\sum_{n=1}^{m} \theta_n^{k-1} \frac{\left| t_{q(n)} \right|^k}{q^k(n) X_n^{k-1}(k)} = O(X_m)\ , \qquad m \to \infty.$$

Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{P_n \mu_n}{n p_n}$ serisi Riesz alt metoduna göre $\left| R_n^q, p_{q(n)}; \theta_n \right|_k$ toplanabilirdir.

Teoremin ispatı: $\left(T_{q(n)} \right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{P_r \mu_r}{n p_n}$ serisinin $\left(R_n^q, p_{q(n)} \right)$ ortalaması olsun. Bu durumda tanımdan,

$T_{q(n)} = \dfrac{1}{P_{q(n)}} \sum_{v=1}^{q(n)} p_v \sum_{r=1}^{v} \dfrac{a_r P_r \mu_r}{r p_r}$ yazılabilir. Bu ifadede $b_r := \dfrac{a_r P_r \mu_r}{r p_r}$ olarak alınıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$T_{q(n)} = \frac{1}{P_{q(n)}} \sum_{v=1}^{q(n)} p_v \sum_{r=1}^{v} \frac{a_r P_r \mu_r}{r p_r}$$

$$= \frac{1}{P_{q(n)}} \left[p_1 \sum_{r=1}^{1} \frac{a_r P_r \mu_r}{r p_r} + p_2 \sum_{r=1}^{2} \frac{a_r P_r \mu_r}{r p_r} + p_3 \sum_{r=1}^{3} \frac{a_r P_r \mu_r}{r p_r} + \ldots + p_{q(n)} \sum_{r=1}^{q(n)} \frac{a_r P_r \mu_r}{r p_r} \right]$$

$$T_{\lambda(n)} = \frac{1}{P_{q(n)}} \left[p_1 b_1 + p_2 (b_1 + b_2) + p_3 (b_1 + b_2 + b_3) + \ldots + p_{q(n)} \left(b_1 + b_2 + \ldots + b_{q(n)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{P_{q(n)}} \left[b_1 \left(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{q(n)} \right) + b_2 \left(p_2 + p_3 + \ldots + p_{q(n)} \right) + b_3 \left(p_3 + \ldots + p_{q(n)} \right) + \ldots + b_{q(n)} p_{q(n)} \right]$$

$$= \frac{1}{P_{q(n)}} \left[b_1 \left(P_{q(n)} - P_0 \right) + b_2 \left(P_{q(n)} - P_1 \right) + b_3 \left(P_{q(n)} - P_2 \right) + \ldots + b_{q(n)} \left(P_{q(n)} - P_{q(n)-1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{P_{q(n)}} \sum_{v=1}^{q(n)} \left(P_{q(n)} - P_{v-1} \right) b_v = \frac{1}{P_{q(n)}} \sum_{v=1}^{q(n)} \left(P_{q(n)} - P_{v-1} \right) \frac{a_v P_v \mu_v}{v p_v}$$

elde edilir. Yani,

$$T_{q(n)} = \frac{1}{P_{q(n)}} \sum_{v=1}^{q(n)} p_v \sum_{r=1}^{v} \frac{a_r P_r \mu_r}{r p_r} = \frac{1}{P_{q(n)}} \sum_{v=1}^{q(n)} \left(P_{q(n)} - P_{v-1} \right) \frac{a_v P_v \mu_v}{v p_v} \text{ dır.}$$

$n \geq 1$ için, $T_{q(n)} - T_{q(n)-1}$ farkına bakalım:

$$T_{q(n)} - T_{q(n)-1} = \frac{1}{P_{q(n)}} \sum_{v=1}^{q(n)} \left(P_{q(n)} - P_{v-1} \right) \frac{a_v P_v \mu_v}{v p_v} - \frac{1}{P_{q(n)-1}} \sum_{v=1}^{q(n)-1} \left(P_{q(n)-1} - P_{v-1} \right) \frac{a_v P_v \mu_v}{v p_v}$$

$$= \frac{1}{P_{q(n)}} \left(P_{q(n)} - P_{q(n)-1} \right) \frac{a_{q(n)} P_{q(n)} \mu_{q(n)}}{q(n) p_{q(n)}} + \frac{1}{P_{q(n)}} \sum_{v=1}^{q(n)-1} \left(P_{q(n)} - P_{v-1} \right) \frac{a_v P_v \mu_v}{v p_v}$$

$$- \frac{1}{P_{q(n)-1}} \sum_{v=1}^{q(n)-1} \left(P_{q(n)-1} - P_{v-1} \right) \frac{a_v P_v \mu_v}{v p_v}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}} \frac{a_{q(n)} P_{q(n)} \mu_{q(n)}}{q(n) p_{q(n)}} \\
&\qquad + \frac{1}{P_{q(n)} P_{q(n)-1}} \left[P_{q(n)-1} \sum_{v=1}^{q(n)-1} \left(P_{q(n)} - P_{v-1} \right) \frac{a_v P_v \mu_v}{v p_v} \right. \\
&\qquad \left. - P_{q(n)} \sum_{v=1}^{q(n)-1} \left(P_{q(n)-1} - P_{v-1} \right) \frac{a_v P_v \mu_v}{v p_v} \right] \\
&= \frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}} \frac{a_{q(n)} P_{q(n)} \mu_{q(n)}}{q(n) p_{q(n)}} \\
&\qquad + \frac{1}{P_{q(n)} P_{q(n)-1}} \left[\sum_{v=1}^{q(n)-1} \left(P_{q(n)} P_{q(n)-1} - P_{q(n)-1} P_{v-1} - P_{q(n)} P_{q(n)-1} \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. + P_{q(n)} P_{v-1} \right) \frac{a_v P_v \mu_v}{v p_v} \right] \\
&= \frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}} \frac{a_{q(n)} P_{q(n)} \mu_{q(n)}}{q(n) p_{q(n)}} + \frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)} P_{q(n)-1}} \sum_{v=1}^{q(n)-1} \frac{P_{v-1} P_v a_v \mu_v}{v p_v} \\
&= \frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)} P_{q(n)-1}} \sum_{v=1}^{q(n)} \frac{P_{v-1} P_v a_v \mu_v}{v p_v} \\
&= \frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)} P_{q(n)-1}} \sum_{v=1}^{q(n)} \frac{P_{v-1} P_v v a_v \mu_v}{v^2 p_v}.
\end{aligned}
$$

Böylece,

$$
T_{q(n)} - T_{q(n)-1} = \frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)} P_{q(n)-1}} \sum_{v=1}^{q(n)} \frac{P_{v-1} P_v v a_v \mu_v}{v^2 p_v}
$$

olarak bulunmuş olur. $T_{q(n)} - T_{q(n)-1}$ farkına Abel dönüşümü uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
T_{q(n)} - T_{q(n)-1} &= \frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)} P_{q(n)-1}} \sum_{v=1}^{q(n)} \frac{P_{v-1} P_v v a_v \mu_v}{v^2 p_v} \\
&= \frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)} P_{q(n)-1}} \left[\sum_{v=1}^{q(n)-1} \Delta \left(\frac{P_{v-1} P_v \mu_v}{v^2 p_v} \right) \sum_{r=1}^{v} r a_r + \sum_{r=0}^{q(n)} r a_r \left(\frac{P_{q(n)-1} P_{q(n)} \mu_{q(n)}}{q^2(n) p_{q(n)}} \right) \right]
\end{aligned}
$$

$$=\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}\sum_{v=1}^{q(n)-1}\left(\frac{P_{v-1}P_v\mu_v}{v^2p_v}-\frac{P_vP_{v+1}\mu_{v+1}}{(v+1)^2\,p_{v+1}}\right)(v+1)t_v+\frac{(q(n)+1)t_{q(n)}\mu_{q(n)}}{q^2(n)}$$

$$=\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}\left[\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_{v-1}P_v\mu_v(v+1)t_v}{v^2p_v}-\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_vP_{v+1}\mu_{v+1}(v+1)t_v}{(v+1)^2\,p_{v+1}}\right]+\frac{(q(n)+1)t_{q(n)}\mu_{q(n)}}{q^2(n)}$$

$$=\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}\left[\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_vP_v\mu_v(v+1)t_v}{v^2p_v}-\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{p_vP_v\mu_v(v+1)t_v}{v^2p_v}-\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_vP_{v+1}\mu_{v+1}(v+1)t_v}{(v+1)^2\,p_{v+1}}\right]+\frac{(q(n)+1)t_{q(n)}\mu_{q(n)}}{q^2(n)}$$

$$=\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}\left[\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_vP_v\mu_v(v+1)t_v}{v^2p_v}-\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_vP_v\mu_{v+1}(v+1)t_v}{v^2p_v}+\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_vP_v\mu_{v+1}(v+1)t_v}{v^2p_v}\right.$$

$$\left.-\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{p_vP_v\mu_v(v+1)t_v}{v^2p_v}-\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_vP_{v+1}\mu_{v+1}(v+1)t_v}{(v+1)^2\,p_{v+1}}\right]+\frac{(q(n)+1)t_{q(n)}\mu_{q(n)}}{q^2(n)}$$

$$=\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}\left[\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_vP_v\Delta\mu_v(v+1)t_v}{v^2p_v}+\sum_{v=1}^{q(n)-1}P_v\mu_{v+1}(v+1)t_v\Delta\left(P_v/v^2p_v\right)-\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{p_vP_v\mu_v(v+1)t_v}{v^2p_v}+\frac{(q(n)+1)t_{q(n)}\mu_{q(n)}}{q^2(n)}\right]$$

$$=\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_vP_v\Delta\mu_v(v+1)t_v}{v^2p_v}+\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}\sum_{v=1}^{q(n)-1}P_v\mu_{v+1}(v+1)t_v\Delta\left(P_v/v^2p_v\right)$$

$$-\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_v}{p_v}(v+1)t_vp_v\frac{\mu_v}{v^2}+\frac{(q(n)+1)t_{q(n)}\mu_{q(n)}}{q^2(n)}$$

$$=T_{q(n),1}+T_{q(n),2}+T_{q(n),3}+T_{q(n),4}$$

elde edilir. Teoremi ispatlamak için Minkowski eşitsizliğinden

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\theta_n^{k-1}\left|T_{q(n),r}\right|^k<\infty,\ \ r=1,2,3,4$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Şimdi Hölder eşitsizliğini ve teoremin koşullarını kullanarak

$$\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left|T_{q(n),1}\right|^k=\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left|\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_v}{p_v}(v+1)t_vp_v\frac{\mu_v}{v^2}\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}}\right)^k \frac{1}{P_{q(n)-1}}\left[\left(\frac{1}{P_{q(n)-1}}\sum_{v=1}^{q(n)-1}\left(p_v^{\frac{k-1}{k}}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\left(\sum_{v=1}^{q(n)-1}\left(p_v^{\frac{1}{k}}\frac{P_v}{p_v}|t_v||\mu_v|\frac{1}{v}\right)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right]^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{q(n)+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}}\right)^k \frac{1}{P_{q(n)-1}}\sum_{v=1}^{q(n)-1}p_v\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k |t_v|^k|\mu_v|^k\frac{1}{v^k}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{q(m)}p_v\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k |t_v|^k|\mu_v|^k\frac{1}{v^k}\sum_{n=v+1}^{q(n)+1}\left(\frac{\theta_n p_{q(n)}}{P_{q(n)}}\right)^{k-1}\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{q(m)}p_v\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k |t_v|^k|\mu_v|^{k-1}|\mu_v|\frac{1}{v^k}\left(\frac{\theta_n p_{q(n)}}{P_{q(n)}}\right)^{k-1}\frac{1}{P_{q(n)}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{q(m)}\theta_v^{k-1}\frac{|t_v|^k}{v^k X_v^{k-1}}|\mu_v|$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{q(m)-1}\Delta|\mu_v|\sum_{r=1}^{v}\theta_r^{k-1}\frac{|t_r|^k}{r^k X_r^{k-1}} + |\mu_{q(m)}|\sum_{v=1}^{q(m)}\theta_v^{k-1}\frac{|t_v|^k}{v^k X_v^{k-1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{q(m)-1}|\Delta\mu_v|X_v + O(1)X_{q(m)}|\mu_{q(m)}|$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{q(m)-1}\beta_v X_v + O(1)X_{q(m)}|\mu_{q(m)}|$$

$$= O(1)$$

elde edilir. Şimdi $r = 2$ için,

$$\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left|T_{q(n),2}\right|^k = \sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left|\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_vP_v\Delta\mu_v(v+1)t_v}{v^2 p_v}\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}}\right)^k\frac{1}{P_{q(n)-1}^k}\left(\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_v}{p_v}|\Delta\mu_v|\,p_v|t_v|\right)^k,$$

Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$= O(1)\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}}\right)^k\frac{1}{P_{q(n)-1}}\left(\frac{1}{P_{q(n)-1}}\sum_{v=1}^{q(n)-1}p_v\right)^{k-1}\left(\sum_{v=1}^{q(n)-1}p_v\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k|\Delta\mu_v|^k|t_v|^k\right)$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k|\Delta\mu_v|^k|t_v|^k\,p_v\sum_{n=v+1}^{q(n)+1}\left(\frac{\theta_n p_{q(n)}}{P_{q(n)}}\right)^{k-1}\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k|\Delta\mu_v|^k|t_v|^k\,p_v\left(\frac{\theta_v p_{q(v)}}{P_{q(v)}}\right)^{k-1}\frac{1}{P_{q(v)}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k|\Delta\mu_v|^{k-1}|\Delta\mu_v||t_v|^k\,\theta_v^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)}\beta_v^{k-1}\beta_v|t_v|^k\,\theta_v^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)}v\beta_v\frac{1}{v^k}\frac{1}{X_v^{k-1}}|t_v|^k\,\theta_v^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)-1}\Delta(v\beta_v)\sum_{r=1}^{v}\theta_r^{k-1}\frac{|t_r|^k}{r^kX_r^{k-1}}+O(1)q(m)\beta_{q(m)}\sum_{v=1}^{q(m)}\theta_v^{k-1}\frac{|t_v|^k}{v^kX_v^{k-1}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)-1}\Delta(v\beta_v)X_v+O(1)q(m)\beta_{q(m)}X_{q(m)}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)-1}v|\Delta\beta_v|X_v+O(1)q(m)\beta_{q(m)}X_{q(m)}$$
$$=O(1)$$

elde edilir. $r=3$ için

$$\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left|T_{q(n),3}\right|^k=\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left|\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}\sum_{v=1}^{q(n)-1}P_v\mu_{v+1}(v+1)t_v\Delta\left(P_v/v^2p_v\right)\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}}\right)^k\frac{1}{P_{q(n)-1}^k}\left(\sum_{v=1}^{q(n)-1}P_v|\mu_{v+1}|^k|t_v|\frac{1}{v}\frac{v+1}{v}\right)^k$$

Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$=O(1)\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}}\right)^k\frac{1}{P_{q(n)-1}^k}\left(\sum_{v=1}^{q(n)-1}\frac{P_v}{p_v}p_v|\mu_{v+1}||t_v|\frac{1}{v}\right)^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left(\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}}\right)^k\frac{1}{P_{q(n)-1}}\sum_{v=1}^{q(n)-1}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k p_v\left|\mu_{v+1}\right|^k\frac{1}{v^k}\left|t_v\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k p_v\left|\mu_{v+1}\right|^k\frac{1}{v^k}\left|t_v\right|^k\sum_{n=v+1}^{q(n)+1}\left(\frac{\theta_n p_{q(n)}}{P_{q(n)}}\right)^{k-1}\frac{p_{q(n)}}{P_{q(n)}P_{q(n)-1}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k p_v\left|\mu_{v+1}\right|^k\frac{1}{v^k}\left|t_v\right|^k\left(\frac{\theta_v p_{q(v)}}{P_{q(v)}}\right)^{k-1}\frac{1}{P_{q(v)}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)}\left|\mu_{v+1}\right|\theta_v^{k-1}\frac{\left|t_v\right|^k}{v^k X_v^{k-1}}$$

elde edilir. Son ifadede Abel dönüşümü uygulanırsa,

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)-1}\Delta\left|\mu_{v+1}\right|\sum_{r=1}^{v}\theta_r^{k-1}\frac{\left|t_r\right|^k}{r^k X_r^{k-1}}+O(1)\left|\mu_{q(m)+1}\right|\sum_{v=1}^{q(m)}\theta_v^{k-1}\frac{\left|t_v\right|^k}{v^k X_v^{k-1}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)-1}\left|\Delta\mu_{v+1}\right|X_{v+1}+O(1)\left|\mu_{q(m)+1}\right|X_{q(m)}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{q(m)-1}\beta_{v+1}X_{v+1}+O(1)\left|\mu_{q(m)+1}\right|X_{q(m)+1}$$

$$=O(1)$$

elde edilir. Son olarak $r=4$ için,

$$\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left|T_{q(n),4}\right|^k=\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\left|\frac{(q(n)+1)t_{q(n)}\mu_{q(n)}}{q^2(n)}\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\frac{1}{q^k(n)}\left|t_{q(n)}\right|^k\left|\mu_{q(n)}\right|\left|\mu_{q(n)}\right|^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\frac{1}{q^k(n)}\frac{1}{X_{q(n)}^{k-1}}\left|\mu_{q(n)}\right|\left|t_{q(n)}\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{q(m)+1}\theta_n^{k-1}\frac{1}{q^k(n)X_{q(n)}^{k-1}}\left|t_{q(n)}\right|^k\left|\mu_{q(n)}\right|$$

elde edilir. Son ifadede Abel dönüşümünü uygularsak,

$$
\begin{aligned}
&= O(1)\sum_{n=2}^{q(m)} \Delta\left|\mu_{q(n)}\right|\sum_{r=1}^{n}\theta_r^{k-1}\frac{\left|t_{q(n)}\right|^k}{q^k(r)X_{q(r)}^{k-1}} + \left|\mu_{q(q(m)+1)}\right|\sum_{n=2}^{q(m)}\theta_n^{k-1}\frac{\left|t_{q(n)}\right|^k}{q^k(n)X_{q(n)}^{k-1}} \\
&= O(1)\sum_{n=2}^{q(m)} \beta_{q(n)}X_n + \left|\mu_{q(q(m)+1)}\right|X_{q(m)} \\
&= O(1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada deferred Riesz ortalaması ve Riesz alt metodu kullanılarak bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar, H. Bor'un 2014 ve 2022'deki çalışmalarında ele alınan problemlerin bu toplanabilme metotlarına göre genelleştirilmesidir.

Bu tez çalışmasında verilen ana teoremlerdeki koşullar zayıflatılarak teoremler yeniden ele alınabilir. Ayrıca burada verilen teoremlerde yer alan dizi sınıflarından farklı olan dizi sınıfları göz önünde tutularak teoremler ve ispatları yeniden verilebilir. Diğer taraftan farklı toplanabilme metotları ile bu ve benzeri problemler incelenebilir.

KAYNAKLAR

Abel, N. H. (1826). Untersuchungen über die Reihe: $1+\frac{m}{1}x+\frac{m.(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}x^2+...\ u.s.w.$ (German). *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*. 1, 311-339.

Bari, N. K. & Stečkin, S. B. (1956). Best approximation and differential proprerties of two conjugate functions. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*. 5, 483–522 (in Russian).

Boas Jr, R. P. (1965). Quasi-positive sequences and trigonometric series. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 3(1), 38-46.

Bor, H. (1985). On two summability methods. *In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 97(1), 147-149.

Bor, H. (1988). Absolute summability factors for infinite series. *Indian J. Pure Appl. Math*. 19(7), 664-671.

Bor, H. (1991). On quasi-monotone sequences and their applications. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 43(2), 187–192.

Bor, H. (1993). On absolute summability factors. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 118 (1), 71–75.

Bor, H. (2000). An application of almost increasing sequences. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *23*, 859-863.

Bor, H. (2014). A New Note on Absolute Riezs Summability.I. *Filomat*, 28(7), 1457-1462.

Bor, H. (2022). Absolute weighted arithmetic mean summability of factored infinite series and Fourier series. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 176, 103-116.

Das, G. (1969). Tauberian theorems for absolute Nörlund summability. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(2), 357-384.

Değer, U. & Küçükaslan, M. (2015). A generalization of deferred Cesáro means and some of their applications. *J Inequal Appl*. 14, 1–14.

Değer, U. (2018). On approximation by Nörlund and Riesz submethods in variable exponent Lebesgue spaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 67(1), 46-59.

Fekete, M. (1911). Zur Theorie der divergenten Reihen. *Mathematical es Termezs Ertesitö (Budapest)*, 29, 719-726.

Flett, T. M. (1957). On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 3(1), 113-141.

Hardy, G. H. (1949). *Divergent Series*. Oxford University Press. Oxford 396 pp.

Kishore, N. & Hotta, G. C. (1970). On $\left|\bar{N}, p_n\right|$ summability factors. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, 31, 9-12.

Maddox, I. J. (1988). *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press.

Mazhar, S. M. (1966). On the summability factors of infinite series. *Publicationes Mathematicae Debrecen*. 13, 229-236.

Mishra, K. N. & Srivastava, R. S. L. (1983-1984). On absolute Cesàro summability factors of infinite series. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 15,651-656.

Özarslan, H. S. & Keten, A. (2013). On a new application of almost increasing sequences. *Journal of Inequalities and Applications*, 1-7.

Petersen, G. M. (1966). *Regular matrix transformations (Vol.86),* London: McGraw-Hill.

Seyhan, H. (1999). On the Generalized Cesàro Summability Factors. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 3, 3-6.

Sulaiman, W. T. (1992). On some summability factors of infinite series. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 115(2), 313–317.

Sulaiman, W. T. (1993). On a strength of two absolute summability methods. *Kyungpook*

Mathematical Journal, *33*(2), 141-148.

Tanovic-Miller, N. (1979). On strong summability. *Glasnik Mathematicki*, 34(14), 87-97.

Zygmund, A. (1959). *Trigonometric series*. *Press*. Cambridge.

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
www.mersin.edu.tr