

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**



**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**YÜKSEK MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI NEUTRAL FONKSİYONEL
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BOUBAKER SERİ YAKLAŞIMLARI**

Elif Zinnur AYKUTALP

**Danışman
Prof. Dr. Mehmet SEZER
Doç. Dr. Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ**

MANİSA-2024

ELİF
ZİNNUR
AYKUTALP

YÜKSEK MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI NEUTRAL FONKSİYONEL
DİFFERANSİYEL DENKLEMLERİN BOUBAKER SERİ YAKLAŞIMLARI

2024

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Elif Zinnur AYKUTALP



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	III
TABLO DİZİNİ	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
ABSTRACT.....	VII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1. Kaynak Özetleri.....	5
2.2. Boubaker Polinomları	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM	9
3.1. Pantograf Türü Neutral İferansiyel Denklemler	9
3.1.1 Temel Matris Bağlıntıları	11
3.1.2. Çözüm Yöntemleri	12
3.2. Neutral Diferansiyel Fark Denklemlerinin Boubaker Polinomları Aracılığıyla Nümerik Çözümü	14
3.2.1 Temel Matris Bağlıntıları	14
3.2.2. Çözüm Yöntemleri	15
3.3. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler için Boubaker Polinom Yaklaşımı	17
3.3.1. Temel Matris Bağlıntısı.....	17
3.3.2. Çözüm Yöntemi	22
3.4. Gecikmeli Neutral Tip İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Boubaker Polinom Çözümleri.....	24
3.4.1. Diferansiyel ve Gecikmeli Diferansiyel Parçaları için Temel Matris Bağlıntıları.....	25
3.4.1.1. Diferansiyel Kısımın Matris Formu	26
3.4.1.2. Gecikmeli Diferansiyel Kısımın Matris Formu	27
3.4.2. İntegral Kısımın Matris Formu	28
3.4.3. Temel Matris Denklemi	29
3.4.4. Çözüm Yöntemi	31
3.5. Fonksiyonel Gecikmeli Genelleştirilmiş Neutral Tipte İntegro- Diferansiyel Denklem Sistemlerini Çözmek için Taylor ve Boubaker Polinomlarına Dayanan Benzer Bir Matris Sıralama Yöntemi.....	33
3.5.1. Temel Matris Bağlıntıları	34
3.5.1.1. Diferansiyel Kısımın Matris Formu	34
3.5.1.2. Fonksiyonel Gecikmeli Diferansiyel Kısımın Matris Formu	35
3.5.1.3. İntegral Kısımın Matris Formu	36
3.5.2. Çözüm Yöntemi	38
3.6. Çeşitli Gecikme Terimi İçeren Neutral Tip Fonksiyonel Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözümüne Yönelik Uygun Bir Nümerik Yaklaşım	41
3.6.1. Temel Matris Denklemi	42
3.6.2. Çözüm Yöntemi	44
3.7. Çözümlerin Doğruluğu ve Hata Analizi	45

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	51
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	95
KAYNAKLAR	96
ÖZGEÇMİŐ	101



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$B_n(x)$	Boubaker Polinomları
e_n	Mutlak Hata
$R_n(x)$	Rezidüel (Kalan) Hata Fonksiyonu
\bar{R}_n	Ortalama Hatanın Üst Sınır Değeri
$y_j(x)$	Sistemin Tam Çözümü
$y(x)$	Tam Çözüm
x_i	Sıralama (collocation) Noktaları
N	Kesme Sınırı
$K(x, t)$	Çekirdek Fonksiyonu
$R_N(x)$	Rezidüel Hata Fonksiyonu
$E_{jN,M}(x)$	Düzeltilmiş Hata Fonksiyonu
$y_N(x)$	Yaklaşık Çözüm
$[U ; \lambda]$	Koşullar İçin Artırılmış Matris
$[W ; G]$	Temel Denkleme Ait Artırılmış Matris
N	Lineer Olmayan Operatör
L	Lineer Operatör

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Boubaker Polinomlarının Grafiği	8
Şekil 4.1. Örnek 4.2 için $N=6,7$ ve 8 için yaklaşık çözüm ve tam çözüm $y(x) = e^{-x}$ in grafiği	54
Şekil 4.2. Örnek 4.2 için $N=6,7$ ve 8 için rezidüel hata fonksiyonunun grafiği..	54
Şekil 4.3. Örnek 4.3 ün $N=3,6$ ve 13 için yaklaşık çözüm ve tam çözümün grafiği	57
Şekil 4.4. Örnek 4.3 ün $N = 3, 6, 13$ için iyileştirilmiş çözümlerin grafiği ve tam çözümlerle karşılaştırılması	59
Şekil 4.5. Örnek 4.5 için $N = 4, 6$ yaklaşık çözümlerin ve tam çözüm $y(x) = e^x$ in grafikte gösterimi	64
Şekil 4.6.a. Örnek 4.7 için tam çözüm $y_1(x) = e^x$ ve $N=2,3$ ve 6 için yaklaşık çözümlerin grafiği	76
Şekil 4.6.b. Örnek 4.7 için tam çözüm $y_2(x) = e^{-x}$ ve $N=2,3$ ve 6 için yaklaşık çözümlerin grafiği	77
Şekil 4.7.a. Örnek 4.9 için $y_1(x) = e^x$ Tam çözüm ve $N=4$ için yaklaşık çözümün grafiği.....	85
Şekil 4.7.b. Örnek 4.9 için $y_2(x) = e^{-x}$ Tam çözüm ve $N=4$ için yaklaşık çözümün grafiği.....	85
Şekil 4.8.a. Örnek 4.10 için $y_1(x) = e^x$ Tam çözüm $N=4$ için yaklaşık çözümün grafiği	87
Şekil 4.8.b. Örnek 4.10 için $y_1(x) = e^x$ Tam çözüm $N=4$ için yaklaşık çözümün grafiği $y_2(x) = \sin(x)$	87
Şekil 4.9. Örnek 4.12 için $y(x)=\cos x$ ve $N=4, 5$ ve 6 için yaklaşık çözümlerin grafiği	93

TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 4.1. Örnek 4.2 nin $N=6,7,8$ için mutlak hataların karşılaştırılması	55
Tablo 4.2. Örnek 4.3'ün $N=3,6$ ve 13 için Hermite polinomu ve Mevcut polinomun mutlak hataların karşılaştırılması.....	58
Tablo 4.3. Örnek 4.3 ün $N=3, M=4, N=6, M=7, N=13, M=14$ için Boubaker polinomunun mutlak hata hesaplarının ve iyileştirilmiş mutlak hata hesaplarıyla karşılaştırılması.....	60
Tablo 4.4. Örnek 4.5 in $N=4, N=6$ mutlak hataların karşılaştırılması	63
Tablo 4.5.a. Örnek 4.7 nin $y_1(x) = e^x$ tam çözümünün $N=2,3$ ve 6 yaklaşık çözümlerinin mutlak hataların karşılaştırılması.....	77
Tablo 4.5.b. Örnek 4.7 nin $y_2(x) = e^{-x}$ tam çözümünün $N=2,3$ ve 6 yaklaşık çözümlerinin mutlak hataların karşılaştırılması.....	78
Tablo 4.6.a. Örnek 4.9 için tam çözüm $y_1(x) = e^x$ mutlak hatalarının $N=6,8,12$ için karşılaştırılması.	86
Tablo 4.6.b. Örnek 4.9 için tam çözüm $y_2(x) = e^{-x}$ mutlak hatalarının $N=6,8,12$ için karşılaştırılması.	86
Tablo 4.7.a. Örnek 4.10'daki yöntemlere göre mutlak ve düzeltilmiş mutlak hataların karşılaştırılması.	88
Tablo 4.7.b. Örnek 4.10'daki yöntemlere göre mutlak ve düzeltilmiş mutlak hataların karşılaştırılması.	88
Tablo 4.8.a. Örnek 4.12 nin tam çözüm $y(x) = \cos x$ ile $N=4,5$ ve 6 için sonuçları	94
Tablo 4.8.b. Örnek 4.12 nin tam çözüm $y(x) = \cos x$ mutlak hata fonksiyonlarının $N=4,5,6$ için karşılaştırılması.....	94

TEŞEKKÜR

Çalıőmamın her aőamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aőamalarında maddi, manevi her yönden yardımcı olan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisiyle çalıőmaktan büyük onur duyduğum sevgili danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER' e ve Sayın Doç. Dr. Ömür Kıvanç KÜRKÇÜ'ye, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Elif Zinnur AYKUTALP
Manisa, 2024



ÖZET

Doktora Tezi

YÜKSEK MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI NEUTRAL FONKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BOUBAKER SERİ YAKLAŞIMLARI

Elif Zinnur AYKUTALP

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet SEZER

İkinci Danışman: Doç. Dr. Ömür Kıvanç KÜRKCÜ

Bu tez çalışmasında, neutral tip çeşitli gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin ve aynı zamanda bunların sistemlerinin, verilen koşullara göre çözümlerini bulmak için etkili ve uyumlu bir matris-sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Standart sıralama noktaları ile beraber Taylor ve Boubaker polinomlarının işlemsel matris özellikleri kullanılarak oluşturulan yöntem, bahsedilen neutral denklemler ve sistemlerini, bilinmeyen Boubaker katsayılı cebrik denklem sistemine karşı gelen bir temel matris denklemine indirger. Dolayısıyla, cebirsel sistem çözülerek, sonlu Boubaker formunda yaklaşık çözüm bulunur. Yöntemin etkinliğini ve kullanılabilirliğini göstermek için rezidüel(kalan) hata analiz teknikleriyle birlikte bazı örnekler çözülür; sayısal sonuçlar, tablolar ve grafikler yardımı ile incelenir ve yorumlanır. Böylece, yöntemin tutarlılığı gerçekleştirilir.

Neutral tip gecikmeli diferansiyel denklemler ve sistemleri, gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler ve sistemlerinin önemli bir sınıfını oluştururlar ve bunlar, çeşitli fen ve mühendislik alanlarına ortaya çıkarlar. Bu çalışmada, aşağıdaki denklemler ve sistemler incelenmekte ve tartışılmaktadır: Oransal gecikmeli pantograph tip neutral diferansiyel denklemler, Oransal gecikmeli genel neutral diferansiyel denklemler, Lineer olmayan neutral gecikmeli diferansiyel denklemler, Çok gecikmeli terimleri içeren fonksiyonel diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemler ve sistemleri.

Anahtar Kelimeler: Neutral gecikmeli diferansiyel denklemler, Gecikmeli neutral fonksiyonel denklem sistemleri, Matris-Sıralama yöntemi, Boubaker polinomları, Rezidüel hata analizi.

2024, 100 sayfa

ABSTRACT

PhD Thesis

Boubaker Series Approximations of Higher Order Neutral Functional Differential Equations with Variable Coefficient

Elif Zinnur AYKUTALP

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Education
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Co-Supervisor: Doç. Dr. Ömür Kıvanç KÜRKCÜ

In this thesis study, an efficient and adequate matrix collocation method to find the solution of neutral type functional differential equations with several delays, and also their systems, under the given conditions is enhanced. The composed method, which is obtained by means of the operational matrix properties of Taylor and Boubaker polynomials along with standard collocation points, reduces the mentioned neutral equations and systems to a fundamental matrix equation corresponding to system of algebraic equations with the unknown Boubaker coefficients. Attendantly, solving the algebraic system, the approximate solution is obtained in the find Boubaker series form. In order to demonstrate the efficiency and utility of the method, some examples allid with the rezidüel error analysis techniques are solved; the numerical results are scrutinized and interpreted with the help of tables and figures. Hereby, the consistency of the method is performed.

Neutral type delay differntial equations and their systems constitute an important class of functional differential equations with delay and thir systems and they arise in various fields of science and engineering. In this study, the hereinbelow equations and systems are discussed: Pantograph type neutral differential equations with proportional delays, Neutral differential-ddifferenc equations with mixed selays, General neutral differential equations with ptopportional delays, Nonlinear neutral delay differential equations, Neutral type systems of functional differential and integro-differential equations with several delays.

Keywords: Neutral delay diffrential equations, Neutral functional equationsystems with delay, Matrix-collocation method, Boubaker polynomials, Residual error analysis.

2024, 100 pages

1. GİRİŞ

Neutral gecikmeli diferansiyel denklemler ve bunların sistemleri, fonksiyonel diferansiyel denklemlerin ve sistemlerinin önemli bir alt sınıfını oluştururlar. Bu tip denklemler fizik, mekanik, astronomi, biyoloji, elektrostatik, elektrodinamik, potansiyel teori, ekonomi v.b. gibi fen ve mühendislik dallarında, gerçek hayat olaylarını modellemede merkezi rol oynarlar [1-28]. Bu nedenle, literatürde oldukça çok araştırmacının ilgisini çeken bazı neutral gecikmeli diferansiyel denklemler ve sistemleri, incelenmek üzere, aşağıda sunulmuştur.

Pantograf türü neutral diferansiyel denklem, yüksek mertebeden değişken katsayılı ve oransal gecikmeli

$$y^{(m)}(x) = cy(x) + \sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(q_k x) + g(x) \quad (1.1)$$

lineer diferansiyel denklemi ile ifade edilir. Burada c uygun bir sabit, $P_k(x)$ ve $g(x)$ analitik fonksiyonlar, q_k oransal sabittir. Oransal gecikmeli neutral fonksiyonel tip denklemler, gecikmeli diferansiyel denklemlerin temel sınıflarından biridir. Bu denklemler fen ve mühendisliğin çoğu alanında ortaya çıkmıştır ve bilimin bazı alanlarında gerçek hayat olaylarını modellemede önemli rol oynar [1, 4, 6-8].

Karışık gecikmeli neutral diferansiyel fark denklemi, yüksek mertebe karışık gecikmeli ve değişken katsayılı

$$\sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^S Q_{rs}(x) y^{(r)}(x) + \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^J P_{kj}(x) y^{(k)}(\alpha_j x - \tau_j) = g(x) \quad (1.2)$$

lineer gecikmeli diferansiyel denklemi ile tanımlanır; burada $P_k(x)$, $Q_k(x)$ ve $g(x)$ analitik fonksiyonlar, α_j ve τ_j uygun sabitlerdir. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin diğer bir temel sınıfı, karışık gecikmeli neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerdir, ki bunlar (1.1) in genişletilmiş halidir. Bu tür denklemler, uygulamalı matematiğin birçok alanındaki problemlerin çözümlenmesinde model olarak kullanılmaktadırlar [1-6].

Oransal gecikmeli neutral fonksiyonel diferansiyel denklem, yüksek mertebe

$$(y(t) - cy(\tau_m t))^{(m)} = \beta y(t) + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(x) y^{(k)}(\alpha_k x) + g(x) \quad (1.3)$$

genel formundaki lineer denklem ile verilir; burada c , β ve α uygun sabitler, $P_k(x)$ ve $g(x)$ analitik fonksiyonlar, α_k ve τ_m uygun sabitlerdir. Bu denklem, (1.1) ve (1.2) denklemlerinin genelleştirilmiş halidir ve genelleştirilmiş pantograf denklemleri olarak da adlandırılırlar, ki bunlar bir elektrikli lokomotif sistemi ile bağlantılıdır. Bahsedilen denklemler, uygulamalı bilimlerde sayılar teorisi, electrodinamik, astrofizik, lineer olmayan dinamik sistemler, cebirsel yapılarıdaki olasılık teorisi, kuantum mekaniği, astrofizik ve hücre çoğalması gibi olaylarda ortaya çıkar [1-11].

Lineer olmayan neutral diferansiyel denklemler, yüksek mertebe ve yüksek dereceli

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) + \sum_{j=0}^m Q_j(x) y^{(j)}(\alpha_j x + \beta_j) + \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^p R_{pq}(x) y^{(p)}(x) y^{(q)}(x) = g(x) \quad (1.4)$$

formundaki gecikmeli diferansiyel denklem ile ifade edilir; burada $P_k(x)$, $Q_j(x)$, $R_{pq}(x)$ ve $g(x)$ analitik fonksiyonlar, β_j ve α_j uygun sabitlerdir.

Lineer olmayan diferansiyel neutral gecikmeli diferansiyel denklemler ve karışık koşullarla ilgili problemler bilim ve mühendislikte geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu tür problemler, genellikle fiziksel olayların modellenmesinde kullanılır ve özellikle uygulamalı bilimlerde; kimyasal reaksiyonlar, sicim kütle sistemleri, kuantum fiziği, analitik kimya, astronomi ve biyoloji gibi, önemli bir rol oynarlar [3, 17, 18]. Ayrıca, zaman neutral gecikmeli denklemler elektrikli devreleri, akışkan mekaniğindeki bir sistemin davranışı, bakteriyel enfeksiyonların yayılımı, yapısal popülasyon modelleri, biyolojide epidemik model ve fizyolojide dinamik hastalık modeli gibi gerçek yaşam durumlarının modellenmesinde kullanılmaktadırlar [3, 12-14, 17, 18].

Gecikmeli neutral tip integro-diferansiyel denklem sistemi, yüksek mertebeden J bağımlı değişkenli

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^J P_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^m \sum_{j=1}^J R_{ij}^r(x) y_j^{(r)}(\alpha_{jr}x + \beta_{jr}) \\ & + \sum_{j=1}^J \int_{u(x)}^{v(x)} K_{ij}(x,t) y_j(\lambda, \mu) dt = g_i(x), \quad i=1,2,\dots,J \end{aligned} \quad (1.5)$$

genelleştirilmiş karışık gecikmeli ve değişken katsayılı lineer integro-diferansiyel denklemler sistemi ile tanımlanır: burada $P_{ij}^k(x)$, $R_{ij}^r(x)$, $K_{ij}(x,t)$ ve $g_i(x)$ analitik fonksiyonlar, β_{jr} ve α_{jr} , ve μ uygun sabitlerdir.

Fonksiyonel gecikmeli genelleştirilmiş neutral tipte integro-diferansiyel denklemler sistemi, yüksek mertebeden genelleştirilmiş

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^J P_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^m \sum_{j=1}^J R_{ij}^r(x) y_j^{(r)}(h_{ij}^r(x)) \\ & + \sum_{s=0}^m \sum_{j=1}^J \int_{u(x)}^{v(x)} K_{ij}^s(x,t) y_j^{(s)}(\tau_{ij}^s(t)) dt = g_i(x), \quad i=1,2,\dots,J \end{aligned} \quad (1.6)$$

formundaki değişken katsayılı ve fonksiyonel gecikmeli lineer integro-diferansiyel denklemler sistemi olarak ifade edilir; burada, $P_{ij}^k(x)$, $R_{ij}^r(x)$, $K_{ij}^s(x,t)$, $h_{ij}^r(x)$, $\tau_{ij}^s(x)$, $u(x)$, $v(x)$ ve $g_i(x)$ fonksiyonları verilen aralıkta sürekli, türevlenebilir fonksiyonlardır.

Fonksiyonel gecikmeli neutral tip diferansiyel denklemler sistemi, J bağımlı değişkenli

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^J \left[P_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(x) + R_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(h_{ij}^k(x)) \right] = g_i(x) \quad (1.7)$$

fonksiyonel diferansiyel denklemler sistemi ile verilebilir ki bu (1.6) sisteminin neutral fonksiyonel diferansiyel parçasıdır.

Yukarıda (1.5), (1.6) ve (1.7) ile tanımlanan fonksiyonel gecikmeli lineer neutral sistemler [21-28], gecikmeli tip sistemlerin daha genel bir sınıfını oluşturur ve popülasyon ekolojisi, kayıpsız ısı değiştiricileri içeren dağıtılmış devreler, rijit bağlantılı robotlar, elektromanyetik teoride üç boyutlu tam dalga oluşturmak için kullanılan kısmi birim eşitliği devreleri yöntemi, sınırlandırılmış gecikmeli manüpatörlerin kontrolü ve değişkenlerinin önceki durumu hakkında bilgi gereksinimi olan sistemler gibi birçok uygulama modelinde ortaya çıkar [21].

Gecikmeler, çeşitli mekanik ve mühendislik sistemleri, biyolojik sistemler, kimyasal sistemler ve elektrik ağları gibi birçok dinamik sistemde ve uygulamalı alanda önemli rol oynamaktadır [21-23]: Özellikle uçak stabilizasyonu, manuel kontrol, mikro yazılım osilatörü, lazer modelleri, haddehane sistemleri, sinir ağı, nükleer reaksiyon ve gemi stabilizasyonu [21]. Ayrıca, gecikme sistemleri aktif bir araştırma alanıdır ve imalat sistemleri, telekomünikasyon ve ekonomik sistemler gibi birçok pratik sistemde sıklıkla görülür [24].

Bu tez çalışmasında, (1.1)-(1.4) neutral gecikmeli diferansiyel denklemleri ile (1.5)-(1.7) neutral gecikmeli diferansiyel integro-diferansiyel denklem sistemlerinin, karışık koşullar altında, sonlu Boubaker serisi formunda yaklaşık çözümlerini bulmak için “Boubaker Matris-Sıralama Yöntemi” geliştirilmiştir. Yöntemin kullanılabilirliğini ve etkinliğini göstermek için rezidüel hata analiz teknikleriyle beraber çeşitli problemler sunulmuş ve sonuçlar tartışılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Kaynak Özetleri

Bölüm 1 de sunulan (1.1)-(1.4) neutral tip gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler, uygulamalı bilimlerin birçok alanında ortaya çıkar ve fiziksel olayların modellenmesinde önemli rol oynar. Dolayısıyla, bu tip denklemler, son yıllarda çok fazla ilgi görmesine karşın, çoğu analitik olarak çözülemezler. Bu yüzden sayısal çözüm metodlarına gerek duyulmaktadır; bunlardan bazıları birçok yazar tarafından verilmiş olup aşağıda sunulmuştur: Runge-Kutta method [3], Legendre-Gauss sıralama metodu [4], Adams method [5], Varyasyon tekrarlama methodu [6], Lucas polinom yaklaşımı [7,17], Optimal rezidüel method [8], One-leg θ -mmetodu [12], Monotonic and Oscillatory method [13], Sabit nokta metodu [14], Gegenbauer Polinom Yaklaşımı [16], Boubaker sıralama metodu [20], Tau yaklaşım methodu [29], Morgan-Voyce matrix-collocation method [30], Bernoulli Polinom yaklaşımı [31], Hybrid Taylor-Lucas Collocation Method [32], Boubaker polinom yaklaşımı [33].

Bölüm 1 de (1.5)-(1.7) ile tanımlanan fonksiyonel diferansiyel ve integro-diferansiyel denklem sistemlerin analitik çözümlerini bulmak oldukça zordur veya mümkün değildir. Bu nedenle, son zamanlarda literatürde çeşitli çözüm yöntemleri yanında, neutral sistemin ve neutral fonksiyonel diferansiyel sistemlerin kararlılık analizi birçok araştırmacı tarafından geniş çapta ele alınmaktadır [19, 21-28, 34-53]. Ayrıca, birçok önemli fonksiyonel diferansiyel sistem iyi bilinen analitik tekniklerle çözülebile de, daha fazla sayıda önemli fonksiyonel tipte sistem çözülememektedir. Bu amaçla sayısal tekniklere ihtiyaç duyulmaktadır. Şimdiye kadar özel polinomlara dayalı bazı sayısal çözüm yöntemleri aşağıda anımsatılmıştır; Charlier matris yöntemi [28], Chelyshkov matris metodu [34], Muntz-Legendre matris sıralama yöntemi [35], Spline fonksiyon yöntemi [36], Bessel polinom yaklaşımı [37], Chebyshev polinom yöntemi [38], Taylor sıralama yöntemi [39], Taylor sıralama yaklaşımı [40], Bernoulli matris yöntemi [41], Hermite matris sıralama yöntemi [42], Laguerre matris sıralama yöntemi [43], Sonlu Bell seri yaklaşımı [44], Lucas polinom yaklaşımı [45], Üstel yaklaşım [46], Chebyshev sıralama yaklaşımı [47], Lucas polinom yaklaşımı [48], Üstel matris yöntemi [49], Taylor sıralama yöntemi [50], Taylor matrisi-sıralama

yöntemi [51], Diferansiyel dönüşüm yöntemi [52], He'nin varyasyonel yineleme yöntemi [53].

2.2. Boubaker Polinomları

Bu bölümde matris yönteminin uygulanmasında kullanılacak olan Boubaker polinomları tanıtılacaktır.

Boubaker polinomları Tunus'lu matematikçi Karem Boubaker'ın adıyla anılmaktadır. Karem Boubaker 15.10.1961'de Tunus'ta doğmuştur. Üniversiteyi (1979-1981) ve yüksek lisansını(1981-1992) National Engineering School of Tunis'da okumuştur. Faculté des Sciences Mathématiques, Physiques et Nat. de Tunis'da doktorasını(1993-2003) tamamlamış ve aynı okulda ders vermeye başlamıştır. Profesörlüğünü Aralık 2013'de almıştır. 230'dan fazla yayını bulunmaktadır. 3 adet uluslararası patenti bulunmaktadır. 90'dan fazla konferans vermiştir. 2006 yılında Boubaker polinomlarını bulmuş ve onun sayesinde matris yönteminde daha kısa ve daha hızlı sonuçlar elde edilmiştir. Şimdi de bu polinomu tanıyalım.

$B_n(x)$ Boubaker polinomları [20, 33, 54-57]

$$(x^2 - 1)(3nx^2 + n - 2)y'' + 3x(nx^2 + 3n - 2)y' - n(3n^2x^2 + n^2 - 6n + 8)y = 0$$

Boubaker diferansiyel denklemini sağlar.

Boubaker diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri olan Boubaker polinomları [20, 33, 57]

$$B_n(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \frac{(n-4p)}{(n-p)} \binom{n-p}{p} x^{n-2p} \quad (2.1)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Bir diğer şekilde

$$B_m(x) = xB_{m-1}(x) - B_{m-2}(x) \quad m > 2 \text{ için}$$

şeklinde de yazılabilir. Boubaker polinomlarının özellikleri detaylarla [54-56] tarafından verilmiştir.

Boubaker polinomlarından ilk 7 tanesi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}B_0(x) &= 1 \\B_1(x) &= x \\B_2(x) &= x^2 + 2 \\B_3(x) &= x^3 + x \\B_4(x) &= x^4 - 2 \\B_5(x) &= x^5 - x^3 - 3x \\B_6(x) &= x^6 - 2x^4 - 3x^2 + 2\end{aligned}$$

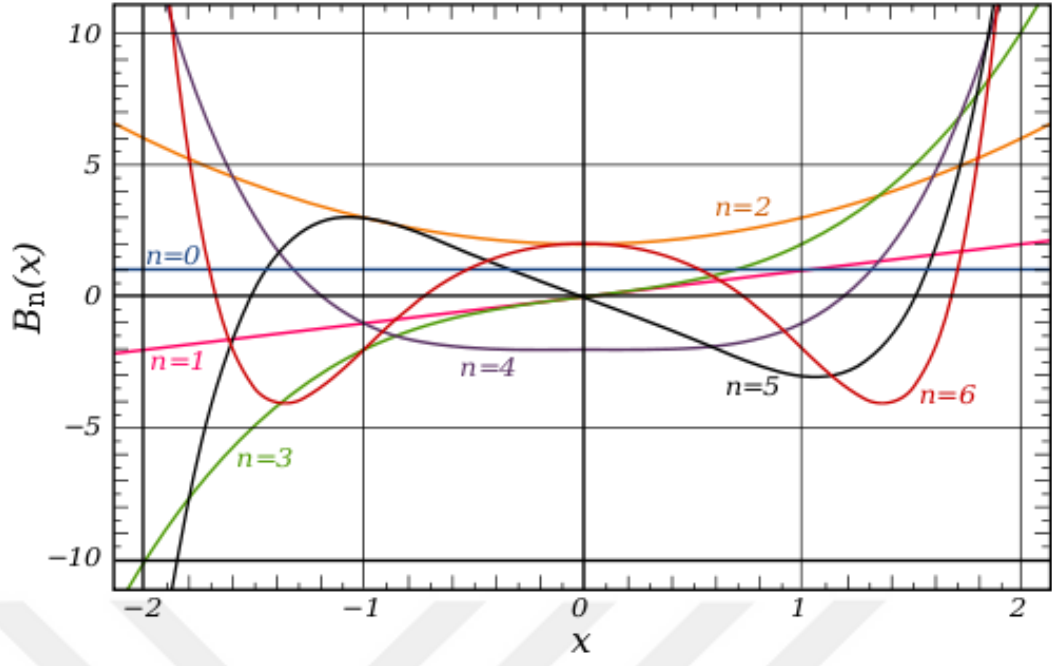
Bu polinomları daha açık olarak

$$\begin{aligned}B_0(x) &= 1 \\B_1(x) &= (-1)^0 \frac{1}{1} \binom{1}{0} x^1 \\B_2(x) &= (-1)^0 \frac{2}{2} \binom{2}{0} x^2 + (-1)^1 \left(-\frac{2}{1}\right) \binom{1}{1} x^0 \\B_3(x) &= (-1)^0 \frac{3}{3} \binom{3}{0} x^3 + (-1)^1 \left(-\frac{1}{2}\right) \binom{2}{1} x^1 \\B_4(x) &= (-1)^0 \frac{4}{4} \binom{4}{0} x^4 + (-1)^1 \frac{0}{3} \binom{3}{1} x^2 + (-1)^2 \left(-\frac{4}{2}\right) \binom{2}{2} x^0 \\B_5(x) &= (-1)^0 \frac{5}{5} \binom{5}{0} x^5 + (-1)^1 \frac{1}{4} \binom{4}{1} x^2 + (-1)^2 \left(-\frac{3}{3}\right) \binom{2}{2} x^0 \\B_6(x) &= (-1)^0 \frac{6}{6} \binom{6}{0} x^6 + (-1)^1 \frac{2}{5} \binom{5}{1} x^4 + (-1)^2 \left(-\frac{2}{4}\right) \binom{4}{2} x^0 + (-1)^3 \left(-\frac{6}{3}\right) \binom{3}{3} x^0\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Ayrıca bu polinomları, x 'in kuvvetleri şeklinde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}x^0 &= B_0(x) \\x^1 &= B_1(x) \\x^2 &= B_2(x) - 2B_0(x) \\x^3 &= B_3(x) - B_1(x) \\x^4 &= B_4(x) + 2B_0(x) \\x^5 &= B_5(x) + B_3(x) + 2B_1(x) \\x^6 &= B_6(x) + 2B_4(x) + 3B_2(x) - 4B_0(x)\end{aligned}$$



Şekil 1.1. Boubaker polinomlarının grafiği

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, materyal olarak fonksiyonel (argümanlı) diferansiyel denklemler ve sistemler, integral ve integro diferansiyel denklemler ele alınarak [17, 18, 58-71], neutral fonksiyonel denklemler için matris-sıralama yöntemi açıklanacaktır. Matris-sıralama yöntemi; matris bağıntılarını, seçilen bir polinomu ve sıralama noktalarını kullanarak, ele alınan problemi lineer bir cebirsel denklemler sistemi haline indirgeyerek çözümünü bulmayı temel almaktır. Bu cebirsel denklemler sisteminin çözümüyle problemin yaklaşık çözümleri elde edilerek ve rezidüel fonksiyon [7, 16, 34, 39, 43, 48, 59, 60-63, 69-71] yardımıyla oluşturulan hata analiz tekniği de kullanılarak, çözümlerin doğruluğu ve tutarlılığı gösterilebilmektedir.

3.1. Pantograf Türü Neutral Difeansiyel Denklemler

Bu kesimde Boubaker matris sıralama metodunu kullanarak [20, 33, 57],

$$y^{(k)}(a) = \lambda_k, k = 0, 1, \dots, m-1$$

başlangıç koşulları altında

$$y^{(m)}(x) = cy(x) + \sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(q_k x) + g(x) \quad (3.1)$$

değişken katsayılı neutral fonksiyonel diferansiyel denklemleri inceleyeceğiz.

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), a \leq x \leq b \quad (3.2)$$

kesilmiş (sonlu) Boubaker seri formunda yaklaşık çözümlerini araştıracağız.

Burada $B_n(x), n = 0, 1, \dots, N$ Boubaker polinomları [20, 57] ifade edilir ve $a_n, n = 0, 1, \dots, N$ bilinmeyen katsayılardır. Bu durumda

$$y(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A} \quad (3.3)$$

$n = 0, 1, \dots, N$ için (3.2) ifadesindeki sonlu seriyi matris formuna dönüştürebiliriz.

Burada

$$\mathbf{B}(x) = [B_0(x) \ B_1(x) \ \dots \ B_N(x)]$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T$$

şeklindedir.

Bir diğer yandan (3.3) bağıntısı kullanılarak

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{H} \quad (3.4)$$

$\mathbf{B}(x)$ matrisi elde edilir. Burada

$$\mathbf{X}(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N]$$

eğer N tek ise

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \phi_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \phi_{2,1} & 0 & \phi_{2,0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N-1, \frac{N-1}{2}} & 0 & \phi_{N-1, \frac{N-3}{2}} & \dots & \phi_{N-1,0} & 0 \\ 0 & \phi_{N, \frac{N-1}{2}} & 0 & \dots & 0 & \phi_{N,0} \end{bmatrix}$$

eğer N çift ise

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \phi_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \phi_{2,1} & 0 & \phi_{2,0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \phi_{N-1, \frac{N-2}{2}} & 0 & \dots & \phi_{N-1,0} & 0 \\ \phi_{N, \frac{N}{2}} & 0 & \phi_{N, \frac{N-2}{2}} & \dots & 0 & \phi_{N,0} \end{bmatrix}$$

burada

$$B_n(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \phi_{n,p} x^{n-2p}, \quad n=0,1,\dots,N, \quad p=0,1,\dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

$$\phi_{n,p} = \left[\frac{(n-4p)}{(n-p)} \binom{n-p}{p} \right] (-1)^p$$

şeklindedir.

3.1.1. Temel Matris Bağntıları

Ayrıca $\mathbf{B}^{(k)}(x)$ türevleri ile $\mathbf{X}(x)$ matrisi arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned}\mathbf{B}'(x) &= \mathbf{X}'(x)\mathbf{H} \\ &= \mathbf{X}(x)\mathbf{M}\mathbf{H}\end{aligned}$$

(3.4) ifadesinde basit bir şekilde görülebilir ve burada işlemi tekrarlayarak

$$\mathbf{B}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k\mathbf{H}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (3.5)$$

ifadesi elde edilir

$$\mathbf{M}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3.3), (3.4) ve (3.5) ifadelerini kullanarak

$$\begin{aligned}y^{(k)}(x) &\cong y_N^{(k)}(x) = \mathbf{B}^{(k)}(x)\mathbf{A} \\ &= \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{H}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k\mathbf{H}\mathbf{A}, \quad k = 0, 1, \dots\end{aligned} \quad (3.6)$$

matris bağıntısını bulabiliriz.

(3.6) bağıntısında $x \rightarrow q_k x$ yerine koyarak $k = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned}y^{(k)}(q_k x) &= \mathbf{X}(q_k x)\mathbf{M}^k\mathbf{H}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{X}(x)\mathbf{D}(q_k x)\mathbf{M}^k\mathbf{H}\mathbf{A}\end{aligned} \quad (3.7)$$

elde ederiz.

Böylece $q_k \neq 0$ için

$$\mathbf{D}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha_k^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha_k^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha_k^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N} \alpha_k^N \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3.1.2. Çözüm Yöntemi

Temel matris denklemini inşa etmek için ilk olarak $i = 0, 1, \dots, N$ için

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad (3.8)$$

tarafından tanımlanan sıralama noktalarını dikkate alacağız.

Önce, (3.1) denkleminde (3.8) sıralama noktaları kullanılarak, $i = 0, 1, \dots, N$ için,

$$y^{(m)}(x_i) = cy(x_i) + \sum_{k=0}^m P_k(x_i) y^{(k)}(q_k x_i) + g(x_i) \quad (3.9)$$

sistemi kurulur; (3.9) un matris formu ile beraber sıralama noktalarındaki (3.6) ve (3.7) matris bağıntıları yardımıyla

$$\mathbf{Y}^{(m)} = c\mathbf{Y} + \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{Y}^{(k)}(q_k) + \mathbf{G}$$

matris denklemi ya da daha açık bir ifadeyle,

$$\left\{ \mathbf{X}\mathbf{M}^m\mathbf{H} - c\mathbf{X}\mathbf{M}^0\mathbf{H} - \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k\mathbf{X}\mathbf{D}(q_k)\mathbf{M}^k\mathbf{H} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.10)$$

temel matris denklemleri oluşturulur. Burada matris işlemleri aşağıdaki gibi yapılmıştır;

$$\mathbf{P}_k = \text{diag}[P_k(x_0) \ P_k(x_1) \ \dots \ P_k(x_N)],$$

$$\mathbf{Y}^{(m)} = \begin{bmatrix} y^{(m)}(x_0) \\ y^{(m)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(m)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0)\mathbf{M}^m\mathbf{H}\mathbf{A} \\ \mathbf{X}(x_1)\mathbf{M}^m\mathbf{H}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N)\mathbf{M}^m\mathbf{H}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{X}\mathbf{M}^m\mathbf{H}\mathbf{A}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^{(k)}(q_k) = \begin{bmatrix} y^{(k)}(q_k x_0) \\ y^{(k)}(q_k x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(q_k x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0)\mathbf{D}(q_k)\mathbf{M}^k\mathbf{H}\mathbf{A} \\ \mathbf{X}(x_1)\mathbf{D}(q_k)\mathbf{M}^k\mathbf{H}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N)\mathbf{D}(q_k)\mathbf{M}^k\mathbf{H}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{X}\mathbf{D}(q_k)\mathbf{M}^k\mathbf{H}\mathbf{A}$$

Dolayısıyla, (3.1) denklemine ve verilen başlangıç koşullarına karşılık gelen temel matris denklemleri (3.6)-(3.8), (3.10) bağıntılarından,

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G} \text{ ya da } [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.11)$$

ve

$$\mathbf{U}\mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda} \text{ ya da } [\mathbf{U}; \boldsymbol{\lambda}] \quad (3.12)$$

olarak elde edilir; \mathbf{W} , \mathbf{U} , $\boldsymbol{\lambda}$ ve \mathbf{G} matrisleri,

$$\begin{aligned} y^{(k)}(a) &= \mathbf{X}^{(k)}(x)\mathbf{H}\mathbf{A} = \lambda_k \\ &= \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k\mathbf{H}\mathbf{A} = \lambda_k \end{aligned}$$

veya

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{X}(x)\mathbf{M}^k\mathbf{H}\mathbf{A} = \lambda_k \Rightarrow \mathbf{U}_k\mathbf{A} = \lambda_k \Rightarrow [\mathbf{U}_k \ ; \ \lambda_k], \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = [w_{pq}] = \mathbf{X}\mathbf{M}^m\mathbf{H} - c\mathbf{X}\mathbf{M}^0\mathbf{H} - \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X}\mathbf{D}(q_k)\mathbf{M}^k\mathbf{H}$$

olarak tanımlanmıştır.

Sonuç olarak, (3.1) denkleminin başlangıç koşulları altında çözümünü elde etmek için, (3.12) matrisini oluşturan m satır, (3.11) in herhangi m satırı ile yer değiştirilip

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] \text{ ya da } \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.13)$$

yeni artırılmış çözüm matrisi elde edilir.

Eğer, $\text{rank}\tilde{\mathbf{W}} = \text{rank}[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise o zaman $\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\tilde{\mathbf{G}}$ yazabiliriz. Böylece A matrisi tek çözüm olur. Dolayısıyla, başlangıç koşulları altında (3.1) denklemi, (3.2) sonlu Boubaker seri formunda tek bir çözüme sahip olur.

3.2. Neutral Diferansiyel Fark Denklemlerinin Boubaker Polinomları Aracılığıyla Nümerik Çözümü

Bu kesimde, değişken katsayılı neutral gecikmeli diferansiyel denklemini,

$$y^{(k)}(a) = \lambda_k, k = 0, 1, \dots, m-1$$

başlangıç koşulları altında

$$\sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^S Q_{rs}(x) y^{(r)}(x) + \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^J P_{kj}(x) y^{(k)}(\alpha_j x - \tau_j) = g(x) \quad (3.14)$$

şeklinde ele alıyoruz.

(3.6) ifadesine kadar olan bütün matris işlemleri sonraki tüm konularda da geçerlidir.

3.2.1. Temel Matris Bağıntısı

(3.6) bağıntısında $x \rightarrow \alpha_j x - \tau_j$ yerine koyarak $k = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned}
y^{(k)}(\alpha_j x - \tau_j) &= \mathbf{X}(\alpha_j x - \tau_j) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A} \\
&= \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_j, \tau_j) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde ederiz.

Burada, $\tau_j \neq 0$ için

$$\mathbf{D}(\alpha_j, \tau_j) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}(\alpha_j)^0(-\tau_j)^0 & \binom{1}{0}(\alpha_j)^0(-\tau_j)^1 & \binom{2}{0}(\alpha_j)^0(-\tau_j)^2 & \cdots & \binom{N}{0}(\alpha_j)^0(-\tau_j)^N \\ 0 & \binom{1}{1}(\alpha_j)^1(-\tau_j)^0 & \binom{2}{1}(\alpha_j)^1(-\tau_j)^1 & \cdots & \binom{N}{N-1}(\alpha_j)^1(-\tau_j)^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}(\alpha_j)^2(-\tau_j)^2 & \cdots & \binom{N}{N-2}(\alpha_j)^2(-\tau_j)^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N}(\alpha_j)^N(-\tau_j)^0 \end{bmatrix}$$

ve $\tau_j = 0$ için

$$\mathbf{D}(\alpha_j) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}(\alpha_j)^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{1}{1}(\alpha_j)^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}(\alpha_j)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N}(\alpha_j)^N \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanılır.

3.2.2. Çözüm Yöntemi

Burada, (3.8) sıralama noktalarını (3.14) denkleminde yazarsak

$$\sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^S \mathcal{Q}_{rs}(x_i) y^{(r)}(x_i) + \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^J P_{kj}(x_i) y^{(k)}(\alpha_j x_i - \tau_j) = g(x_i) \tag{3.16}$$

ve gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\left\{ \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^S \mathbf{Q}_{rs} \mathbf{X} \mathbf{M}^r \mathbf{H} + \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^J \mathbf{P}_{kj} \mathbf{X} \mathbf{D}(\alpha_j, \tau_j) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.17)$$

temel matris denklemini elde ederiz; (3.16) ve (3.17) de matris işlemleri

$$\mathbf{Q}_{rs} = \text{diag} [Q_{rs}(x_0) \quad Q_{rs}(x_1) \quad \dots \quad Q_{rs}(x_N)],$$

$$\mathbf{P}_{kj} = \text{diag} [P_{kj}(x_0) \quad P_{kj}(x_1) \quad \dots \quad P_{kj}(x_N)],$$

$$\mathbf{Y}^{(r)} = \begin{bmatrix} y^{(r)}(x_0) \\ y^{(r)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(r)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A} \\ \mathbf{X}(x_1) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{X} \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}^{(k)}(\alpha_j, \tau_j) = \begin{bmatrix} y^{(k)}(\alpha_j x - \tau_j) \\ y^{(k)}(\alpha_j x - \tau_j) \\ \vdots \\ y^{(k)}(\alpha_j x - \tau_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \mathbf{D}(\alpha_j, \tau_j) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A} \\ \mathbf{X}(x_1) \mathbf{D}(\alpha_j, \tau_j) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \mathbf{D}(\alpha_j, \tau_j) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{X} \mathbf{D}(\alpha_j, \tau_j) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}$$

olarak elde edilir.

Dolayısıyla, (3.14) denkleminde ve başlangıç koşullarına karşılık gelen temel matris denklemleri, sırasıyla,

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \text{ ya da } [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.18)$$

ve

$$\mathbf{U} \mathbf{A} = \lambda \text{ ya da } [\mathbf{U}; \lambda] \quad (3.19)$$

olarak kurulur; burada

$$\mathbf{W} = [w_{pq}] = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^S \mathbf{Q}_{rs} \mathbf{X} \mathbf{M}^r \mathbf{H} + \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^J \mathbf{P}_{kj} \mathbf{X} \mathbf{D}(\alpha_j, \tau_j) \mathbf{M}^k \mathbf{H},$$

Sonuç olarak (3.14) denkleminin başlangıç koşulları altında çözümünü elde etmek için, (3.19) matrisini oluşturan m satır, (3.18) in kerhangi m satırı ile yer değiştirilip

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] \text{ ya da } \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.20)$$

artırılmış çözüm matris elde edilir.

Burada $rank\tilde{\mathbf{W}} = rank[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise o zaman $\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1}\tilde{\mathbf{G}}$ yazabiliriz. Böylece A matrisi tek çözüm olur. Dolayısıyla, başlangıç koşulları altında (3.14) denklemi (3.2), sonlu Boubaker seri formunda tek bir çözüme sahip olur [75].

3.3. Linear Olmayan Neutral Diferansiyel Denklemler İçin Boubaker Polinom Yaklaşımı

Bu kesimde, ikinci dereceden lineer olmayan terimlere sahip

$$\sum_{k=0}^m P_k(x)y^{(k)}(x) + \sum_{j=0}^m Q_j(x)y^{(j)}(\alpha_j x + \beta_j) + \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^p R_{pq}(x)y^{(p)}(x)y^{(q)}(x) = g(x) \quad (3.21)$$

yüksek mertebeden neutral gecikmeli diferansiyel denklemini

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}y^{(k)}(a) + b_{jk}y^{(k)}(b)) = \lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.22)$$

karişik koşullar altında ele alıyoruz.

Bu problemde $P_k(x)$, $Q_j(x)$, $R_{pq}(x)$ ve $g(x)$,fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlanan sürekli fonksiyonlardır; a_{jk} , b_{jk} , α_j , β_j ve λ_j uygun sabitlerdir; $y(x)$ bilinmeyen çözüm fonksiyonudur. (3.21)'deki denklemin çözümü genellikle zordur; dolayısıyla yaklaşık çözümlerini elde etmek için, burada geliştirilen matris sıralama yöntemi gibi, sayısal yöntemlere ihtiyaç vardır [3,17,18,29-31,67, 68].

3.3.1. Temel Matris Bağıntısı

Önce, (3.21) neutral denkleminin

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), \quad N \geq m, \quad a \leq x \leq b$$

kesilmiş (sonlu) Boubaker serisi ile tanımlanan $y(x)$ çözümünü araştırırız.

Sonra, bu sonlu seriyi $n = 0, 1, \dots, N$ için (3.3) de olduğu gibi,

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{A} \quad (3.23)$$

matris formuna dönüştürürüz; burada

$$\mathbf{B}(x) = [B_0(x) \quad B_1(x) \quad \dots \quad B_N(x)]$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

şeklindedir.

Öte yandan, (3.23) bağıntısı kullanılarak, $\mathbf{B}(x)$ matrisi şu şekilde

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{H} \quad (3.24)$$

yazılabilir; burada

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^N]$$

şeklindedir ve N tek ise

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \phi_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \phi_{2,1} & 0 & \phi_{2,0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N-1, \frac{N-1}{2}} & 0 & \phi_{N-1, \frac{N-3}{2}} & \dots & \phi_{N-1,0} & 0 \\ 0 & \phi_{N, \frac{N-1}{2}} & 0 & \dots & 0 & \phi_{N,0} \end{bmatrix},$$

N çift ise

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \phi_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \phi_{2,1} & 0 & \phi_{2,0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \phi_{N-1, \frac{N-2}{2}} & 0 & \dots & \phi_{N-1,0} & 0 \\ \phi_{N, \frac{N}{2}} & 0 & \phi_{N, \frac{N-2}{2}} & \dots & 0 & \phi_{N,0} \end{bmatrix},$$

burada

$$B_n(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \phi_{n,p} x^{n-2p}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad p = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

$$\phi_{n,p} = \left[\frac{(n-4p)(n-p)}{(n-p)} \binom{n-p}{p} \right] (-1)^p$$

şeklindedir.

Ayrıca (3.23) ve (3.24) matris bağıntılarından,

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) &\cong \mathbf{B}^{(k)}(x) \mathbf{A} \\ &\cong \mathbf{B}(x) \mathbf{C}^k \mathbf{A}, \quad k = 0, 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$y(x) \cong \mathbf{B}(x) \mathbf{A} = \mathbf{X}(x) \mathbf{H} \mathbf{A} \quad (3.26)$$

ve

$$y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.27)$$

türev bağıntıları elde edilir ki buradan $\mathbf{X}(x)$, $\mathbf{B}(x)$ ve $\mathbf{B}^{(k)}(x)$ arasında taban bağıntılarının olduğu açıkça görülmektedir.

(3.26) ve (3.27) bağıntılarını kullanarak (3.25)'deki \mathbf{C} matrisini ve aşağıdaki matris bağıntılarını elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(x) &= \mathbf{X}(x)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{X}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{H}^{-1} \\
\mathbf{B}'(x) &= \mathbf{X}'(x)\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{X}(x)\mathbf{MH}, |\mathbf{H}| \neq 0 \\
\mathbf{B}'(x) &= \mathbf{X}(x)\mathbf{MH} \\
&= \mathbf{B}(x)\mathbf{H}^{-1}\mathbf{MH}; \mathbf{C} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{MH}, (\mathbf{C}^0 \text{ birim matris}) \\
&= \mathbf{B}(x)\mathbf{C} \\
\mathbf{B}''(x) &= \mathbf{B}(x)\mathbf{C}, \mathbf{B}'''(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{C}^2, \dots, \mathbf{B}^{(j)}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{C}^j, j = 0, 1, \dots, m
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^{(j)}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{C}^j \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathbf{B}(x)\mathbf{A} \\
y'(x) &= \mathbf{B}'(x)\mathbf{A} = \mathbf{B}(x)\mathbf{C}\mathbf{A} \\
y''(x) &= \mathbf{B}''(x)\mathbf{A} = \mathbf{B}(x)\mathbf{C}^2\mathbf{A} \\
&\vdots \\
y^{(j)}(x) &= \mathbf{B}(x)\mathbf{C}^j\mathbf{A}, k = 0, 1, \dots, m
\end{aligned}$$

Ayrıca; $p, q, r = 0, 1, 2$ için (3.23)-(3.26) şeklinde lineer olmayan işlemlerin genel matris formlarını aşağıdaki şekilde elde edebiliriz [17,18,30,31,49,67]:

$$y^{(p)}(x)y^{(q)}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{C}^p\overline{\mathbf{B}(x)\mathbf{C}^q\mathbf{A}}, p, q = 0, 1, \dots, m \quad (3.29)$$

veya açıkça

$$\begin{aligned}
y^2(x) &= y(x)y(x) = \mathbf{B}(x)\overline{\mathbf{B}(x)\mathbf{A}} \\
y'(x)y(x) &= \mathbf{B}'(x)\overline{\mathbf{B}(x)\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{B}(x)\mathbf{C}\overline{\mathbf{B}(x)\mathbf{A}} \\
y'(x)y'(x) &= \mathbf{B}'(x)\overline{\mathbf{B}'(x)\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{B}(x)\mathbf{C}\overline{\mathbf{B}(x)\mathbf{C}\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{B}(x)\mathbf{C}\overline{\mathbf{B}(x)\mathbf{C}\mathbf{A}} \\
y''(x)y''(x) &= \mathbf{B}(x)\mathbf{C}^2\overline{\mathbf{B}(x)\mathbf{C}^2\mathbf{A}} \\
y(x)y(x) &= (y(x))^2 \\
&= \mathbf{B}(x)\overline{\mathbf{B}(x)\mathbf{A}}, \text{ (Boubaker tabanında)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x)y(x) &= (y(x))^2 \\
&= \mathbf{X}(x)\mathbf{H}\overline{\mathbf{X}(x)\mathbf{H}\mathbf{A}} \text{ (Taylor tabanında)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(x) &= \mathbf{X}(x)\mathbf{H} \\
\overline{\mathbf{B}(x)} &= \overline{\mathbf{X}(x)\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{X}(x)}\overline{\mathbf{H}} \\
y'(x)y(x) &= \mathbf{B}'(x)\overline{\mathbf{B}(x)}\overline{\mathbf{A}} \\
&= (\mathbf{X}(x)\mathbf{H})' \overline{\mathbf{X}(x)}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{X}'(x)\mathbf{H}\overline{\mathbf{X}(x)}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{X}(x)\mathbf{M}\overline{\mathbf{H}\mathbf{X}(x)}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(x)y'(x) &= (y'(x))^2 \\
&= \mathbf{B}'(x)\mathbf{B}'(x)\overline{\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{X}'(x)\mathbf{H}\mathbf{X}'(x)\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{X}(x)\mathbf{M}\overline{\mathbf{H}\mathbf{X}(x)}\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{X}(x)\mathbf{M}\overline{\mathbf{H}\mathbf{X}(x)}\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

Burada aşağıdaki matrisler tanımlanmaktadır:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_0\mathbf{A} \\ a_1\mathbf{A} \\ \vdots \\ a_N\mathbf{A} \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{X}(x)} = \text{diag}[\mathbf{X}(x) \quad \mathbf{X}(x) \quad \cdots \quad \mathbf{X}(x)], \\
\overline{\mathbf{M}} = \text{diag}[\mathbf{M} \quad \mathbf{M} \quad \cdots \quad \mathbf{M}] \\
\overline{\mathbf{H}} = \text{diag}[\mathbf{H} \quad \mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{H}] \\
\overline{\mathbf{C}} = \text{diag}[\mathbf{C} \quad \mathbf{C} \quad \cdots \quad \mathbf{C}]$$

Bu durumda, (3.25)-(3.27) yardımıyla $y^{(j)}(x)$ ve $y^{(j)}(\alpha_j x + \beta_j)$ 'nin

$$y^{(j)}(x) = \mathbf{B}^{(j)}(x)\mathbf{A} = \mathbf{B}(x)\mathbf{C}^j\mathbf{A}$$

ve

$$y^{(j)}(\alpha_j x + \beta_j) = \mathbf{B}^{(j)}(\alpha_j x + \beta_j)\mathbf{C}^j\mathbf{A} \quad (3.30)$$

matris formlarını elde ederiz.

Ayrıca görülüyor ki

$$\mathbf{B}(\alpha_j x + \beta_j) = \mathbf{X}(\alpha_j x + \beta_j)\mathbf{H} = \mathbf{X}(x)\mathbf{D}(\alpha_j, \beta_j)\mathbf{H}$$

ve böylece

$$\mathbf{B}^j(\alpha_j x + \beta_j) = \mathbf{X}(x)\mathbf{D}(\alpha_j, \beta_j)\mathbf{M}^j\mathbf{H}\mathbf{A} \quad (3.31)$$

ifadesi elde edilir.

3.3.2. Çözüm Yöntemi

Temel matris denklemini oluşturmak için öncelikle,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.32)$$

ile tanımlanan sıralama noktalarını dikkate alırız.

Daha sonra, (3.32) sıralama noktalarını ,(3.21) de ve ardından (3.27) , (3.29) ve (3.30) da kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m P_k(x_i) y^{(k)}(x_i) + \sum_{j=0}^m Q_j(x_i) y^{(j)}(\alpha_j x_i + \beta_j) \\ + \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^p R_{pq}(x_i) y^{(p)}(x_i) y^{(q)}(x_i) = g(x_i) \end{aligned} \quad (3.33)$$

denklem sistemini ya da kısaca,

$$\sum_{k=0}^m P_k Y^{(k)} + \sum_{j=0}^m Q_j Y^{(j)}(\alpha_j, \beta_j) + \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^p R_{pq} Y^{(p,q)} = G$$

matris denklemini, daha açık bir ifadeyle

$$\sum_{k=0}^m P_k \mathbf{X} \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A} + \sum_{j=0}^m Q_j \mathbf{X} \mathbf{D}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{M}^j \mathbf{H} \mathbf{A} + \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^p R_{pq} \overline{\mathbf{X}} \mathbf{M}^p \overline{\mathbf{H}} \mathbf{X}^* \overline{\mathbf{M}}^q \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.34)$$

temel matris denklemini elde ederiz; burada gerekli matris işlemleri aşağıdaki gibi yapılmaktadır:

$$Y^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A} \\ \mathbf{X}(x_1) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{X} \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^N \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{M}}^p = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{M}^p \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}(\alpha_j, \beta_j) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha_j^0 \beta_j^0 & \binom{1}{0} \alpha_j^0 \beta_j^1 & \binom{2}{0} \alpha_j^0 \beta_j^2 & \cdots & \binom{N}{0} \alpha_j^0 \beta_j^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha_j^1 \beta_j^0 & \binom{2}{1} \alpha_j^1 \beta_j^1 & \cdots & \binom{N}{1} \alpha_j^1 \beta_j^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha_j^2 \beta_j^0 & \cdots & \binom{N}{2} \alpha_j^2 \beta_j^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N} \alpha_j^N \beta_j^0 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(j)}(\alpha_j, \beta_j) = \begin{bmatrix} y^{(j)}(\alpha_j x_0 + \beta_j) \\ y^{(j)}(\alpha_j x_1 + \beta_j) \\ \vdots \\ y^{(j)}(\alpha_j x_N + \beta_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \mathbf{D}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{M}^j \mathbf{H} \mathbf{A} \\ \mathbf{X}(x_1) \mathbf{D}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{M}^j \mathbf{H} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \mathbf{D}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{M}^j \mathbf{H} \mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{X} \mathbf{D}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{M}^j \mathbf{H} \mathbf{A},$$

$$Y^{(p,q)} = \begin{bmatrix} y^{(p,q)}(x_0) \\ y^{(p,q)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(p,q)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \mathbf{M}^p \overline{\mathbf{H} \mathbf{X}(x_0) \mathbf{M}^q \mathbf{H} \mathbf{A}} \\ \mathbf{X}(x_1) \mathbf{M}^p \overline{\mathbf{H} \mathbf{X}(x_1) \mathbf{M}^q \mathbf{H} \mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \mathbf{M}^p \overline{\mathbf{H} \mathbf{X}(x_N) \mathbf{M}^q \mathbf{H} \mathbf{A}} \end{bmatrix} = \mathbf{X} \mathbf{M}^p \overline{\mathbf{H} \mathbf{X} \mathbf{M}^q \mathbf{H} \mathbf{A}}.$$

Dolayısıyla, (3.21) denkleminin karşılığı gelen (3.34) temel matris denklemini

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}] \tag{3.35}$$

olarak yazabiliriz. Aynı prosedür izlenerek, (3.22) karışık koşullarına karşı gelen matris denklemini

$$\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{O}^* \bar{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\lambda} \quad (3.36)$$

olarak düzenlenebilir;

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jN}] \\ &= \sum_{k=0}^1 (a_{kj} \mathbf{B}(a) + b_{kj} \mathbf{B}(b)) \mathbf{C}^k \mathbf{A} = \lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0 \quad \lambda_1]^T$ ve $\mathbf{O}^* = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]_{2 \times (N+1)^2}$, (\mathbf{O}^* sıfır matrisidir).

Yukarıdaki (3.36) denklemin arttırılmış formu

$$[\mathbf{U} \quad ; \quad \mathbf{O}^* \quad ; \quad \boldsymbol{\lambda}] \quad (3.37)$$

olarak yazılabilir.

Sonuç olarak, (3.35) arttırılmış matrisinin herhangi m satırı ile (3.37) ifadesindeki m satır değiştirilerek

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{V}}; \tilde{\mathbf{G}}] \text{ ya da } \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.38)$$

yeni arttırılmış matrisi elde edilir; dolayısıyla, denklem çözülerek, a_n , ($n = 0, 1, \dots, N$) Boubaker katsayıları belirlenir.

3.4. Gecikmeli Neutral Tip İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Boubaker Polinom Çözümleri

Bu kesimde, yüksek mertebeden J bağımlı değişkenli neutral tip

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^J \mathbf{P}_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^m \sum_{j=1}^J \mathbf{R}_{ij}^r(x) y_j^{(r)}(\alpha_{jr}x + \beta_{jr}) \\ + \sum_{j=1}^J \int_{u(x)}^{v(x)} \mathbf{K}_{ij}(x, t) y_j(\lambda, \mu) dt = g(x), \quad i = 1, 2, \dots, J \end{aligned} \quad (3.39)$$

gecikmeli integro-diferansiyel denklemler sisteminin

$$y_j^{(k)}(a) = \lambda_{jk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.40)$$

başlangıç koşullarına göre

$$y_j(x) \cong \sum_{n=0}^N a_{jn} B_n(x), \quad a \leq x \leq b, \quad j=1,2,\dots,J \quad (3.41)$$

ile tanımlanan Boubaker polinomları, yani sonlu Boubaker serisi [20, 57] cinsinden çözümleri araştırılacaktır.

Burada; $P_{ij}^k(x)$, $R_{ij}^r(x)$, $K_{ij}(x,t)$, $g(x)$, $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları verilen aralıkta sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlardır; α_{jr} , β_{jr} , λ , μ ve λ_{jk} uygun sabitlerdir; a_{jn} bulunması gereken Boubaker katsayılarıdır.

3.4.1. Diferansiyel ve Gecikmeli Diferansiyel Parçaları için Temel Matris Bağıntıları

$y_j(x) \cong \sum_{n=0}^N a_{jn} B_n(x)$ kesilmiş (sonlu) Boubaker serisinin matris formu

$$y_j(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{A}_j = \mathbf{X}(x) \mathbf{H} \mathbf{A}_j, \quad j=1,2,\dots,J \quad (3.42)$$

olarak yazılabilir; burada içerilen matrisler

$$\mathbf{B}(x) = [B_0(x) \quad B_1(x) \quad \dots \quad B_N(x)],$$

$$\mathbf{A}_j(x) = [a_{j0} \quad a_{j1} \quad \dots \quad a_{jN}]^T; \quad j=1,2,\dots,J$$

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad \dots \quad x^N],$$

$$N \text{ tek için } \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \phi_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \phi_{2,1} & 0 & \phi_{2,0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N-1, \frac{N-1}{2}} & 0 & \phi_{N-1, \frac{N-3}{2}} & \dots & \phi_{N-1,0} & 0 \\ 0 & \phi_{N, \frac{N-1}{2}} & 0 & \dots & 0 & \phi_{N,0} \end{bmatrix}$$

$$N \text{ çift için } \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \phi_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \phi_{2,1} & 0 & \phi_{2,0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \phi_{N-1, \frac{N-2}{2}} & 0 & \dots & \phi_{N-1,0} & 0 \\ \phi_{N, \frac{N}{2}} & 0 & \phi_{N, \frac{N-2}{2}} & \dots & 0 & \phi_{N,0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \phi_{np} x^{n-2p}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad p = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

$$\phi_{n,p} = \left[\frac{(n-4p)(n-p)}{(n-p)} \binom{n-p}{p} \right] (-1)^p.$$

$$y_j^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{H} \mathbf{A}_j = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j \quad (3.43)$$

$$y_j^{(r)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_j; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

ile tanımlanmıştır.

3.4.1.1. Diferansiyel Kısımın Matris Formu

(3.39) denkleminin diferansiyel parçasında (3.43) ifadesini yerine koyarsak

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i(x) &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^J \mathbf{P}_{ij}^k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j \\ &= \sum_{k=0}^m (\mathbf{P}_{i1}(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_1 + \mathbf{P}_{i2}(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{P}_{iJ}(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_J) \end{aligned}$$

ve $i = 1, 2, \dots, J$ için

$$\mathbf{D}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(x) \\ \mathbf{D}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_J(x) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x) \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{M}}^k \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{P}_k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^k(x) & \mathbf{P}_{12}^k(x) & \dots & \mathbf{P}_{1J}^k(x) \\ \mathbf{P}_{21}^k(x) & \mathbf{P}_{22}^k(x) & \dots & \mathbf{P}_{2J}^k(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{J1}^k(x) & \mathbf{P}_{J2}^k(x) & \dots & \mathbf{P}_{JJ}^k(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_J \end{bmatrix}$$

3.4.1.2. Gecikmeli Diferansiyel Kısımın Matris Formu

(3.44) ifadesinde $x \rightarrow \alpha_{jr}x + \beta_{jr}$ olarak

$$\begin{aligned} y_j^{(r)}(\alpha_{jr}x + \beta_{jr}) &= \mathbf{X}(\alpha_{jr}x + \beta_{jr}) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_j; \\ &= \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_{jr}, \beta_{jr}) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_j \end{aligned}$$

ve sonra (3.39)'un gecikmeli parçasında yerine koyarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i^g(x) &= \sum_{r=0}^m \sum_{j=1}^J \mathbf{R}_{ij}^r(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_{jr}, \beta_{jr}) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_j \\ &= \sum_{r=0}^m \left(\mathbf{R}_{i1}^r(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_{1r}, \beta_{1r}) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_{i2}^r(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_{2r}, \beta_{2r}) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_2 \right. \\ &\quad \left. + \dots + \mathbf{R}_{iJ}^r(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_{Jr}, \beta_{Jr}) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_J \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $i = 1, 2, \dots, J$ için bu ifade aşağıdaki gibi olur:

$$\mathbf{D}_g(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^g(x) \\ \mathbf{D}_2^g(x) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_J^g(x) \end{bmatrix} = \sum_{r=0}^m \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{D}}(\alpha_r, \beta_r) \bar{\mathbf{M}}^r \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A}; \quad (3.46)$$

$$\mathbf{R}_r(x) = \begin{bmatrix} R_{11}^r(x) & R_{12}^r(x) & \dots & R_{1J}^r(x) \\ R_{21}^r(x) & R_{22}^r(x) & \dots & R_{2J}^r(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{J1}^r(x) & R_{J2}^r(x) & \dots & R_{JJ}^r(x) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{D}}(\alpha_r, \beta_r) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\alpha_{1r}, \beta_{1r}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(\alpha_{2r}, \beta_{2r}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(\alpha_{Jr}, \beta_{Jr}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}(\alpha_{jr}, \beta_{jr}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}(\alpha_{jr})^0(\beta_{jr})^0 & \binom{1}{0}(\alpha_{jr})^0(\beta_{jr})^1 & \dots & \binom{N}{0}(\alpha_{jr})^0(\beta_{jr})^N \\ 0 & \binom{1}{1}(\alpha_{jr})^1(\beta_{jr})^0 & \dots & \binom{N}{1}(\alpha_{jr})^1(\beta_{jr})^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N}(\alpha_{jr})^N(\beta_{jr})^0 \end{bmatrix}$$

3.4.2. İntegral Kısımın Matris Formu

Önce, (3.39) denkleminin $K_{ij}(x, t)$ çekirdek fonksiyonunun $\mathbf{X}(x)$ tabanında (Taylor tabanında) matris formu

$$\mathbf{K}_{ij}(x, t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{K}_{ij}\mathbf{X}^T(t); \mathbf{K}_{ij} = [k_{pq}^{ij}] = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q}\mathbf{K}_{ij}(0,0)}{\partial x^i \partial t^j}, \quad p, q = 0, 1, \dots, N$$

olarak yazılabilir. Aynı zamanda,

$$y_j(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{H}\mathbf{A}_j, \quad y_j(\lambda t + \mu) = \mathbf{X}(t)\mathbf{D}(\lambda, \mu)\mathbf{H}\mathbf{A}_j$$

ifadeleri (3.39) denkleminde yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i(x) &= \sum_{j=1}^J \int_{u(x)}^{v(x)} \mathbf{X}(x)\mathbf{K}_{ij}\mathbf{X}^T(x)\mathbf{X}(t)\mathbf{D}(\lambda, \mu)\mathbf{H}\mathbf{A}_j dt \\ &= \sum_{j=1}^J \mathbf{X}(x)\mathbf{K}_{ij}\mathbf{Z}(x)\mathbf{D}(\lambda, \mu)\mathbf{H}\mathbf{A}_j \end{aligned} \quad (3.47)$$

olur; burada

$$\mathbf{Z}(x) = [z_{mn}(x)] = \int_{u(x)}^{v(x)} \mathbf{X}(x) \mathbf{X}^T(t) dt;$$

$$z_{mn}(x) = \frac{(v(x))^{m+n+1} - (u(x))^{m+n+1}}{m+n+1}; \quad m, n = 0, 1, \dots, N$$

Sonra, (3.47) matris bağıntısını düzenleyerek,

$$\mathbf{I}_i(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{i1} \mathbf{Z}(x) \mathbf{D}(\lambda, \mu) \mathbf{H} \mathbf{A}_1 + \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{i2} \mathbf{Z}(x) \mathbf{D}(\lambda, \mu) \mathbf{H} \mathbf{A}_2$$

$$+ \dots + \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{ij} \mathbf{Z}(x) \mathbf{D}(\lambda, \mu) \mathbf{H} \mathbf{A}_j$$

ve $i = 1, 2, \dots, J$ olarak

$$\mathbf{I}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(x) \\ \mathbf{I}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_J(x) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{X}}(x) \mathbf{K} \bar{\mathbf{Z}}(x) \bar{\mathbf{D}}(\lambda, \mu) \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} \quad (3.48)$$

bulunur. Burada tanımlanan matrisler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1J} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{J1} & K_{J2} & \dots & K_{JJ} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Z}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{Z}(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_J \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{D}}(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\lambda, \mu) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(\lambda, \mu) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(\lambda, \mu) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{X}}(x) = \text{diag} [\mathbf{X}(x) \quad \mathbf{X}(x) \quad \dots \quad \mathbf{X}(x)].$$

3.4.3. Temel Matris Denklemi

(3.39) sisteminde $\mathbf{G}(x) = [g_1(x) \quad g_2(x) \quad \dots \quad g_J(x)]^T$ olduğundan;

$\mathbf{D}(x)$, $\mathbf{D}_g(x)$ ve $\mathbf{I}(x)$ matris formları ile tanımlanan (3.45), (3.46) ve (3.48) matris bağıntıları, (3.39) denkleminde yerine konulduğunda sisteme karşı gelen matris denklemi

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x) \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{M}}^k + \sum_{r=0}^m \mathbf{R}_r(x) \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{D}}(\alpha_r, \beta_r) \bar{\mathbf{M}}^r + \bar{\mathbf{X}}(x) \mathbf{K} \bar{\mathbf{Z}}(x) \bar{\mathbf{D}}(\lambda, \mu) \right\} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G}(x) \quad (3.49)$$

olur. Ayrıca, $x_s = a + \frac{b-a}{N} s$; $s = 0, 1, \dots, N$ ile tanımlanan sıralama noktaları, (3.49)

matris denkleminde kullanıldığında,

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x_s) \bar{\mathbf{X}}(x_s) \bar{\mathbf{M}}^k + \sum_{r=0}^m \mathbf{R}_r(x_s) \bar{\mathbf{X}}(x_s) \bar{\mathbf{D}}(\alpha_r, \beta_r) \bar{\mathbf{M}}^r + \bar{\mathbf{X}}(x_s) \mathbf{K} \bar{\mathbf{Z}}(x_s) \bar{\mathbf{D}}(\lambda, \mu) \right\} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G}(x_s)$$

matris denklemler sistemi ve düzenleyerek

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^k + \sum_{r=0}^m \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{D}}(\alpha_r, \beta_r) \bar{\mathbf{M}}^r + \bar{\mathbf{X}}(x) \mathbf{K} \bar{\mathbf{Z}}^* \bar{\mathbf{D}}(\lambda, \mu) \right\} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.50)$$

veya kısaca

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \Leftrightarrow [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.51)$$

temel matris denklemini kurulur. Burada tanımlanan matrisler:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \text{diag} [P_k(x_0) \quad P_k(x_1) \quad \dots \quad P_k(x_N)] \\ \mathbf{R}_r &= \text{diag} [R_r(x_0) \quad R_r(x_1) \quad \dots \quad R_r(x_N)] \\ \bar{\mathbf{D}}(\alpha_r, \beta_r) &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\alpha_{1r}, \beta_{1r}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(\alpha_{2r}, \beta_{2r}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(\alpha_{jr}, \beta_{jr}) \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{D}}(\lambda, \mu) &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\lambda, \mu) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(\lambda, \mu) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(\lambda, \mu) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{X}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{X}}(x_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(x_s) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{X}}(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix}, \bar{\bar{\mathbf{X}}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1J} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{J1} & k_{J2} & \dots & k_{JJ} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{Z}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}(x_0) \\ \mathbf{Z}(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Z}}(x_N) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{Z}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{Z}(x) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(x_0) \\ \mathbf{G}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_J \end{bmatrix}, \mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} a_{j0} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jN} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, J.$$

3.4.4. Çözüm Yöntemi

Önce, (3.43) veya (3.44) bağıntılarını kullanarak, (3.40) koşullarının matris formu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$y_j^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j \Rightarrow y_j^{(k)}(a) = \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j = \lambda_{jk}, j = 1, 2, \dots, J; k = 0, 1, \dots, m-1$$

$j = 1, 2, \dots, J$ için

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_1 &= \lambda_{1k} \\ \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_2 &= \lambda_{2k} \\ &\vdots \\ \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_J &= \lambda_{Jk} \end{aligned} \right\} \bar{\mathbf{X}}(a) \bar{\mathbf{M}}^k \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \lambda_k$$

veya

$$\bar{\mathbf{X}}(a) \bar{\mathbf{M}}^k \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \lambda_k \Rightarrow \mathbf{U}_k \mathbf{A} = \lambda_k \Leftrightarrow [\mathbf{U}_k; \lambda_k]$$

veya kısaca

$$\mathbf{U} \mathbf{A} = \lambda \text{ ya da } [\mathbf{U}; \lambda] \quad (3.52)$$

Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k &= \bar{\mathbf{X}}(a) \bar{\mathbf{M}}^k \bar{\mathbf{H}}; \lambda_k = [\lambda_{1k} \quad \lambda_{2k} \quad \dots \quad \lambda_{Jk}]^T \\ \mathbf{A} &= [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_J]^T, k = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, (3.39) denklem sistemine ve (3.40) başlangıç koşullarına karşılık gelen temel matris denklemleri, sırasıyla, aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \text{ ya da } [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.51)$$

ve

$$\mathbf{U} \mathbf{A} = \lambda \text{ ya da } [\mathbf{U}; \lambda]; \quad (3.52)$$

$$\mathbf{W} = [w_{pq}] = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^k \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} + \sum_{r=0}^m \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{D}}(\alpha_r, \beta_r) \bar{\mathbf{M}}^r \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} + \bar{\mathbf{X}}(x) \mathbf{K} \bar{\mathbf{Z}}^* \bar{\mathbf{D}}(\lambda, \mu) \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A}.$$

Sonuç olarak (3.39) denkleminin (3.40) başlangıç koşulları altında çözümlerini elde etmek için, (3.52) nin satırlarını (3.51) in herhangi satırlarıyla yer değiştirerek

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] \text{ ya da } \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.53)$$

yeni artırılmış çözüm matris elde edilir.

Burada $rank \tilde{\mathbf{W}} = rank[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise o zaman $\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$ yazabiliriz. Böylece \mathbf{A} matrisi tek çözüme sahiptir. Bu durumda, (3.40) başlangıç koşulları altında (3.39) sisteminin tek bir çözümü vardır; bu çözüm (3.41) formundaki Boubaker sonlu serisi olur.

3.5. Fonksiyonel Gecikmeli Genelleştirilmiş Neutral Tipte İntegro-Diferansiyel Denklem Sistemlerini Çözmek İçin Taylor ve Boubaker Polinomlarına Dayanan Matris Sıralama Yöntemi

Bu kesimdeki problemimiz, yüksek mertebeden genelleştirilmiş neutral tip

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^J P_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^m \sum_{j=1}^J R_{ij}^r(x) y_j^{(r)}(h_{ij}^r(x)) \\ + \sum_{s=0}^m \sum_{j=1}^J \int_{u(x)}^{v(x)} K_{ij}^s(x,t) y_j^{(s)}(\tau_{ij}^s(t)) dt = g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, J \end{aligned} \quad (3.54)$$

formundaki fonksiyonel gecikmeli lineer integro-diferansiyel denklem sisteminin,

$$y_j^{(k)}(a) = \lambda_{jk}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.55)$$

başlangıç koşullarına göre

$$y_j(x) \cong \sum_{n=0}^N a_{jn} B_{n(x)}, \quad a \leq x \leq b, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (3.56)$$

kesilmiş (sonlu) Boubaker serisi formunda çözümlerinin araştırılmasıdır.

Burada, $P_{ij}^k(x)$, $R_{ij}^r(x)$, $K_{ij}^s(x,t)$, $h_{ij}^r(x)$, $\tau_{ij}^s(x)$, $u(x)$, $v(x)$ ve $g_i(x)$ fonksiyonları $a \leq x, t \leq b$ aralığında sürekli, türevlenebilir fonksiyonlardır; λ_{jk} uygun sabit; a_{jn} bulunması gereken Boubaker sabitleri; $B_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, N$ için daha önce Kesim 2.2 de tanımlanmıştır.

3.5.1. Temel Matris Bağıntıları

(3.54) sisteminin (3.56) formunda varsayılan çözümünün matris karşılığı, (3.42) ve (3.43) de yapıldığı gibi ayn işlemler yapılacaktır.

3.5.1.1. Diferansiyel Kısımın Matris Formu

(3.54) sisteminin diferansiyel kısmında (3.43) ifadesini yerine koyarsak

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i(x) &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^J \mathbf{P}_{ij}^k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j \\ &= \sum_{k=0}^m (\mathbf{P}_{i1}^k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_1 + \mathbf{P}_{i2}^k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{P}_{ij}^k(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j) \end{aligned}$$

ve $i = 1, 2, \dots, J$ için düzenleme yaparsak

$$\mathbf{D}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(x) \\ \mathbf{D}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{D}_J(x) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x) \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{M}}^k(x) \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} \quad (3.57)$$

matris formunu elde ederiz; burada

$$\mathbf{P}_k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^k(x) & \mathbf{P}_{12}^k(x) & \dots & \mathbf{P}_{1J}^k(x) \\ \mathbf{P}_{21}^k(x) & \mathbf{P}_{22}^k(x) & \dots & \mathbf{P}_{2J}^k(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{J1}^k(x) & \mathbf{P}_{J2}^k(x) & \dots & \mathbf{P}_{JJ}^k(x) \end{bmatrix}_{J \times J}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}_{J \times J}$$

$$\bar{\mathbf{M}}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}^k \end{bmatrix}_{J \times J}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H} \end{bmatrix}_{J \times J}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_j \end{bmatrix}_{J \times 1}$$

3.5.1.2. Fonksiyonel Gecikmeli Diferansiyel Kısımın Matris Formu

(3.54) sisteminin fonksiyonel gecikmeli parçasındaki $y_j^{(r)}(h_{ij}^r(x))$ ifadesinin matris formunu elde etmek için (3.43) bağıntısında $k \rightarrow r$ ve $x \rightarrow h_{ij}^r(x)$ konular ve

$$y_j^{(r)}(h_{ij}^r(x)) = \mathbf{X}(h_{ij}^r(x)) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_j, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

matris bağıntısı oluşturulur; dolayısıyla fonksiyonel gecikmeli kısmın matris formu (3.54) de yerine konularak

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(x) &= \sum_{r=0}^m \sum_{j=1}^J \mathbf{R}_{ij}^r(x) \mathbf{X}(h_{ij}^r(x)) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_j \\ &= \sum_{r=0}^m \left(\mathbf{R}_{i1}^r(x) \mathbf{X}(h_{i1}^r(x)) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_{i2}^r(x) \mathbf{X}(h_{i2}^r(x)) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_2 + \right. \\ &\quad \left. \dots + \mathbf{R}_{iJ}^r(x) \mathbf{X}(h_{iJ}^r(x)) \mathbf{M}^r \mathbf{H} \mathbf{A}_J \right) \end{aligned}$$

ve $i = 1, 2, \dots, J$ kullanılarak ve düzenlenerek

$$\mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(x) \\ \mathbf{F}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_J(x) \end{bmatrix} = \sum_{r=0}^m \mathbf{R}_r(x) \mathbf{X}_r(x) \overline{\mathbf{M}}^r \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A} \quad (3.58)$$

matris bağıntısı elde edilir; burada

$$\mathbf{X}(h_{ij}^r(x)) = \begin{bmatrix} 1 & (h_{ij}^r(x))^1 & (h_{ij}^r(x))^2 & \dots & (h_{ij}^r(x))^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}_J]^T$$

$$\mathbf{R}_r(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^r(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2^r(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{R}_J^r(x) \end{bmatrix}_{J \times J^2}, \quad \mathbf{X}_r(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^r(x) \\ \mathbf{X}_2^r(x) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_J^r(x) \end{bmatrix}_{J^2 \times J(N+1)}$$

$$\mathbf{R}_i^r(x) = [\mathbf{R}_{i1}^r(x) \quad \mathbf{R}_{i2}^r(x) \quad \dots \quad \mathbf{R}_{ij}^r(x)], \quad i=1,2,\dots,J$$

$$\mathbf{X}_i^r(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(h_{i1}^r(x)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(h_{i1}^r(x)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(h_{i1}^r(x)) \end{bmatrix}_{J \times J(N+1)}, \quad i=1,2,\dots,J.$$

3.5.1.3. İntegral Kısımın Matris Formu

(3.54) sistemindeki $K_{ij}^s(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun, $\mathbf{X}(x)$ tabanında (Taylor tabanında), matris formu [34,40,50,61]

$$\mathbf{K}_{ij}^s(x,t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{ij}^s \mathbf{X}^T(t); \quad \mathbf{K}_{ij}^s = [k_{p,q}^{s,ij}],$$

$$k_{p,q}^{s,ij} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} \mathbf{K}_{ij}^s(0,0)}{\partial x^p \partial t^q}, \quad p,q=0,1,\dots,N$$

olarak yazılabilir; burada

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad \dots \quad x^N]$$

$$\mathbf{K}_{ij}^s = \begin{bmatrix} k_{11}^{s,ij} & k_{12}^{s,ij} & \dots & k_{1N}^{s,ij} \\ k_{21}^{s,ij} & k_{22}^{s,ij} & \dots & k_{2N}^{s,ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1}^{s,ij} & k_{N2}^{s,ij} & \dots & k_{NN}^{s,ij} \end{bmatrix}_{(N+1)(N+1)}, \quad \mathbf{X}^T(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix}.$$

Ayrıca, $y_j(\tau_{ij}^s(t))$ ifadesinin matris formu, (3.43) bağıntısında $k \rightarrow s$ ve $x \rightarrow \tau_{ij}^s(t)$ konularak,

$$y_j^{(s)}(\tau_{ij}^s(t)) = \mathbf{X}(\tau_{ij}^s(t)) \mathbf{M}^s \mathbf{H} \mathbf{A}_j; \quad \mathbf{X}(\tau_{ij}^s(t)) = [1 \quad \tau_{ij}^s(t) \quad \dots \quad (\tau_{ij}^s(t))^N]$$

olarak bulunur. Böylece $\mathbf{K}_{ij}^s(x,t)$ ve $y_j^{(s)}(\tau_{ij}^s(t))$ nin matris formları (3.54) ün integral kısmında yerine konularak ve düzenleyerek,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i(x) &= \sum_{s=0}^m \sum_{j=1}^J \int_{u(x)}^{v(x)} \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{ij}^s \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(\tau_{ij}^s(t)) \mathbf{M}^s \mathbf{H} \mathbf{A}_j \\ &= \sum_{s=0}^m \int_{u(x)}^{v(x)} \left\{ \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{i1}^s \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(\tau_{i1}^s(t)) \mathbf{M}^s \mathbf{H} \mathbf{A}_1 + \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{i2}^s \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(\tau_{i2}^s(t)) \mathbf{M}^s \mathbf{H} \mathbf{A}_2 \right. \\ &\quad \left. + \dots + \mathbf{X}(x) \mathbf{K}_{ij}^s \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(\tau_{ij}^s(t)) \mathbf{M}^s \mathbf{H} \mathbf{A}_j \right\} \end{aligned}$$

ve $i = 1, 2, \dots, J$ alarak, gerekli işlemleri yaparak,

$$\mathbf{I}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(x) \\ \mathbf{I}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_J(x) \end{bmatrix} = \sum_{s=0}^m \bar{\mathbf{X}}(x) \mathbf{K}_s \mathbf{Z}_s(x) \bar{\mathbf{M}}^s \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} \quad (3.59)$$

integral parçasına karşı gelen matris formu elde edilir. Buradaki matrisler aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}_{J \times J(N+1)}, \quad \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2^s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_J^s \end{bmatrix}_{J(N+1) \times J^2(N+1)},$$

$$\mathbf{K}_i^s = [\mathbf{K}_{i1}^s \quad \mathbf{K}_{i2}^s \quad \dots \quad \mathbf{K}_{ij}^s], \quad i = 1, 2, \dots, J$$

$$\mathbf{Z}_s(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}_s(t) dt; \quad \mathbf{X}_s(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^s(t) \\ \mathbf{X}_2^s(t) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_J^s(t) \end{bmatrix}_{J \times 1, (J^2 \times J(N+1))},$$

$$\bar{\bar{\mathbf{X}}}^T(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}^T(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{X}}^T(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\mathbf{X}}^T(t) \end{bmatrix}_{J^2(N+1) \times J^2}$$

$$\mathbf{X}_i^s(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(\tau_{i1}(t)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(\tau_{i2}(t)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(\tau_{ij}(t)) \end{bmatrix}, i=1,2,\dots,J$$

$$\overline{\mathbf{X}}^T(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}^T(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}^T(t) \end{bmatrix}_{J(N+1) \times J}, \overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}^s \end{bmatrix}_{J(N+1) \times J(N+1)}$$

$$\overline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H}^s \end{bmatrix}_{J(N+1) \times J(N+1)}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_J \end{bmatrix}_{J \times (N+1)}$$

3.5.2. Çözüm Yöntemi

(3.54) sisteminde, $\mathbf{G}(x) = [g_1(x) \ g_2(x) \ \dots \ g_N(x)]^T$ olmak üzere;

(3.57), (3.58) ve (3.59) bağıntıları ile tanımlanan (Diferansiyel, fonksiyonel gecikmeli diferansiyel ve integral parçalarına ait) matris formlarını (3.54) de yerine konulduğunda (3.54) sistemine karşı gelen matris denklemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x) \overline{\mathbf{X}}(x) \overline{\mathbf{M}}^k + \sum_{r=0}^m \mathbf{R}_r(x) \overline{\mathbf{X}}_r(x) \overline{\mathbf{M}}^r \\ + \sum_{s=0}^m \overline{\mathbf{X}}(x) \mathbf{K}_s \mathbf{Z}_s(x) \overline{\mathbf{M}}^s \end{array} \right\} \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G}(x) \quad (3.60)$$

olarak elde edilir. Sonra $x_i = a + \frac{b-a}{N}i$, $i = 0,1,2,\dots,N$ ile tanımlanan sıralama

noktaları yerine konulduğunda (3.60) denklemi;

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x_l) \overline{\mathbf{X}}(x_l) \overline{\mathbf{M}}^k + \sum_{r=0}^m \mathbf{R}_r(x_l) \overline{\mathbf{X}}_r(x_l) \overline{\mathbf{M}}^r + \sum_{s=0}^m \overline{\mathbf{X}}(x_l) \mathbf{K}_s \mathbf{Z}_s(x_l) \overline{\mathbf{M}}^s \right\} \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G}(x_l) \quad (3.61)$$

matris denklemler sistemine veya düzenleme ile aşağıdaki temel matris denklemine dönüştürülür:

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^k + \sum_{r=0}^m \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{X}}_r^* \bar{\mathbf{M}}^r + \sum_{s=0}^m \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{K}}_s \mathbf{Z}_s^* \bar{\mathbf{M}}^s \right\} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

veya kısaca

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \Leftrightarrow [\mathbf{W} \ ; \ \mathbf{G}]. \quad (3.62)$$

Burada tanımlanan matrislerin hesabı aşağıdaki şekilde yapılmıştır:

$$\mathbf{P}_k = \text{diag} [\mathbf{P}_k(x_0) \ \mathbf{P}_k(x_1) \ \dots \ \mathbf{P}_k(x_N)],$$

$$\mathbf{R}_r = \text{diag} [\mathbf{R}_r(x_0) \ \mathbf{R}_r(x_1) \ \dots \ \mathbf{R}_r(x_N)]$$

$$\bar{\mathbf{X}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_r^* = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_r(x_0) \\ \mathbf{X}_r(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_r(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_r(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^r(x) \\ \mathbf{X}_1^r(x) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_J^r(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_i^r(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(h_{i1}^r(x)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(h_{i1}^r(x)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(h_{ij}^r(x)) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{X}}(x_i) = \text{diag} [\mathbf{X}(x_1) \ \mathbf{X}(x_2) \ \dots \ \mathbf{X}(x_j)], \quad i = 1, 2, \dots, J$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2^s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_J^s \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_i^s = [\mathbf{K}_{i1}^s \ \mathbf{K}_{i2}^s \ \dots \ \mathbf{K}_{ij}^s], \quad i = 1, 2, \dots, J$$

$$\mathbf{Z}_s^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_s(x_0) \\ \mathbf{Z}_s(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_s(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_s(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}^T(t) \cdot \mathbf{X}_1^s(t) \\ \bar{\mathbf{X}}^T(t) \cdot \mathbf{X}_2^s(t) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}^T(t) \cdot \mathbf{X}_1^s(t) \end{bmatrix} dt,$$

$$\mathbf{X}_i^s(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(\tau_{i1}^s(t)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(\tau_{i2}^s(t)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(\tau_{ij}^s(t)) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}_i^s(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}^T(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(\tau_{i1}^s(t)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(\tau_{i2}^s(t)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(\tau_{ij}^s(t)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(\tau_{i1}^s(t)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}^T(t) \bar{\mathbf{X}}(\tau_{i2}^s(t)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{X}(\tau_{ij}^s(t)) \end{bmatrix}_{\text{J(N+1)} \times \text{J(N+1)}} \quad i=1,2,\dots,\text{J}.$$

Kesim 3.3.4 de olduğu gibi; (3.43) ve (3.52) bağıntılarını kullanarak (3.55) koşullarının matris formunu aşağıdaki gibi hesaplarız:

$$y_j^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j \Rightarrow y_j^{(k)}(a) = \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j = \lambda_{jk},$$

$$j = 1, 2, \dots, \text{J}, k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$y_j^{(k)}(a) = \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j = \lambda_{jk}$$

⇓

$$\left. \begin{aligned} y_1^{(k)}(a) &= \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_1 = \lambda_{1k} \\ y_2^{(k)}(a) &= \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_2 = \lambda_{2k} \\ &\vdots \\ y_j^{(k)}(a) &= \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j = \lambda_{jk} \end{aligned} \right\} \bar{\mathbf{X}}(a) \bar{\mathbf{M}}^k \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \lambda_k$$

veya

$$\bar{\mathbf{X}}(a) \bar{\mathbf{M}}^k \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \lambda_k \Rightarrow \mathbf{U}_k \mathbf{A} = \lambda_k \Rightarrow [\mathbf{U}_k \quad ; \quad \lambda_k]; \quad (3.63)$$

$$\mathbf{U}_k = \overline{\mathbf{X}}(a) \overline{\mathbf{M}}^k \overline{\mathbf{H}}, \mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}_J]^T, k = 0, 1, \dots, m-1$$

elde edilir.

Dolayısıyla (3.54) sistemine ve (3.55) başlangıç koşullarına karşılık gelen temel matris denklemleri, sırasıyla.

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \text{ ya da } [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.62)$$

ve

$$\mathbf{U}_k \mathbf{A} = \lambda \text{ ya da } [\mathbf{U}_k \quad ; \quad \lambda_k] \quad (3.63)$$

$$\mathbf{W} = [w_{pq}] = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \overline{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{M}}^k \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A} + \sum_{r=0}^m \mathbf{R}_r \overline{\mathbf{X}}_r^* \overline{\mathbf{M}}^r \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A} + \sum_{s=0}^m \overline{\mathbf{X}}^* \overline{\mathbf{K}}_s \mathbf{Z}_s^* \overline{\mathbf{M}}^s \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A}$$

olarak elde edebiliriz.

Sonuç olarak (3.54) denkleminin (3.55) başlangıç koşulları altında çözümlerini elde etmek için, (3.63) ün satırlarını (3.62) in herhangi satırlarıyla yer değiştirerek

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] \text{ ya da } \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.64)$$

yeni artırılmış çözüm matrisi elde edilir.

Burada $rank \tilde{\mathbf{W}} = rank [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise o zaman $\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$ yazabiliriz. Böylece A matrisi tek çözüme sahiptir. Başlangıç koşulları altında (3.54) sistemin tek bir çözümü vardır. Böylece (3.54) sistemi (3.56) Boubaker seri formunda tek bir çözüme sahip olur.

3.6. Çeşitli Gecikme Terimi İçeren Neutral Tip Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerinin Çözümüne Yönelik Uygun Bir Nümerik Yaklaşım

Bu kesimde; çeşitli gecikmeli, iki bilinmeyenli iki lineer fonksiyonel diferansiyel denklemden oluşan, yüksek mertebeden

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^2 \left[\mathbf{P}_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(x) + \mathbf{R}_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(h_{ij}^k(x)) \right] = g_i(x) \quad (3.65)$$

neutral sistemi ile bağlantılı başlangıç değer problemi incelenmektedir. Bu sistem, Kesim 3,5 de verilen (3.54) integro diferansiyel sisteminin integralsiz halidir. Burada $(\mathbf{P}_{ij}^k(x), \mathbf{R}_{ij}^k(x), h_{ij}^k(x))$ ve $g_i(x)$ $a \leq x \leq b$; aralığında tanımlanan bilinen analitik fonksiyonlardır; $y_{jk}(x)$, $(j=1,2)$ belirlenecek bilinmeyen fonksiyonlardır; $h_{ij}^k(x)$ fonksiyonu aşağıdaki formlarda olabilir:

$$h_{ij}^k(x), \tau(x), x = \tau_{ij}^k(x), \alpha_{ij}^k x + \beta_{ij}^k, \alpha_{ij}^k x, x - \delta_{ij}^k, \alpha_{ij}^k x + \beta_{ij}^k(x) \dots$$

Bu çalışmada, Kesim 3.5 de bahsedilen matris-sıralama yöntemini dikkate alarak, (3.65)-(3.55) probleminin sonlu Boubaker serisi formunda yaklaşık çözümünü bulmak için, geliştirilmiş bir nümerik yöntem sunuyoruz

3.6.1. Temel Matris Denklemi

(3.65) sisteminin (3.56) formunda varsayılan çözümünün matris karşılığı, (3.42) ve (3.43) de yapıldığı gibi aynı işlemler yapılacaktır. Aynı zamanda, Kesim 3.5 sunulan diferansiyel ve gecikmeli fonksiyonel ifadeelerine ait tüm işlemlerde, $i,j=1,2$ alındığı görülmektedir.

$y_j(x)$ çözüm fonksiyonunun ve $y_j(h_{ij}^k(x))$ fonksiyonel ifadesinin türevlerine ait matris formları aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\begin{aligned} y_j^{(k)}(x) &= \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{H} \mathbf{A}_j = \mathbf{X}(x) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j, \\ y_j^{(k)}(h_{ij}^k(x)) &= \mathbf{X}^{(k)}(h_{ij}^k(x)) \mathbf{H} \mathbf{A}_j = \mathbf{X}(h_{ij}^k(x)) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j; \end{aligned} \quad (3.66)$$

burada

$$\mathbf{X}(h_{ij}^k(x)) = \begin{bmatrix} 1 & h_{ij}^k(x) & (h_{ij}^k(x))^2 & \dots & (h_{ij}^k(x))^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

Öncelikle, (3.43) ve (3.66) matris formunu (3.65) sistemine yerleştirip sadeleştirirsek, şunu elde ederiz:

$$\sum_{k=0}^m \left(\mathbf{P}_k(x) \bar{\mathbf{X}}(x) \bar{\mathbf{M}}^k + \mathbf{R}_k(x) \mathbf{X}_k(x) \bar{\mathbf{M}}^k \right) \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G}(x) \quad (3.67)$$

burada

$$\mathbf{P}_k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^k(x) & \mathbf{P}_{12}^k(x) \\ \mathbf{P}_{21}^k(x) & \mathbf{P}_{22}^k(x) \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad \bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)}$$

$$\mathbf{R}_k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^k(x) & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2^k(x) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_1^k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^k(x) & \mathbf{R}_{12}^k(x) \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

$$\mathbf{R}_2^k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{21}^k(x) & \mathbf{R}_{22}^k(x) \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

$$\mathbf{X}_k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^k(x) \\ \mathbf{X}_2^k(x) \end{bmatrix}_{4 \times 2(N+1)};$$

$$\mathbf{X}_1^k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(h_{11}^k(x)) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(h_{12}^k(x)) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}$$

$$\mathbf{X}_2^k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(h_{21}^k(x)) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(h_{22}^k(x)) \end{bmatrix}_{2 \times 2(N+1)}$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^k & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^k \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 2(N+1)}, \quad \mathbf{G}(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}_{2(N+1) \times 1}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_1 a_0 \\ a_1 a_1 \\ a_1 a_2 \\ \vdots \\ a_1 a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_2 a_0 \\ a_2 a_1 \\ a_2 a_2 \\ \vdots \\ a_2 a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

3.6.2. Çözüm Yöntemi

(3.65) sisteme karşılık gelen indirgenmiş (3.67) matris denkleminde,

$$x_r = a + \frac{b-a}{N} r, r = 0, 1, \dots, N$$

ile tanımlanan sıralama noktaları kullanılarak, (3.65) sistem için temel matris denklemini şu şekilde oluştururuz:

$$\sum_{k=0}^m \left(\mathbf{P}_k \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}}^k + \mathbf{R}_k \mathbf{X}_k^* \bar{\mathbf{M}}^k \right) \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.68)$$

burada

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \left(\mathbf{P}_k \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}}^k + \mathbf{R}_k \mathbf{X}_k^* \bar{\mathbf{M}}^k \right) \bar{\mathbf{H}}$$

$$\mathbf{P}_k = \text{diag} \left[\mathbf{P}_k(x_0) \quad \mathbf{P}_k(x_1) \quad \dots \quad \mathbf{P}_k(x_N) \right]$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_k^* = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k(x_0) \\ \mathbf{X}_k(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_k(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(x_0) \\ \mathbf{G}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_k = \text{diag} \left[\mathbf{R}_k(x_0) \quad \mathbf{R}_k(x_1) \quad \dots \quad \mathbf{R}_k(x_N) \right].$$

Burada, (3.68) temel matris denklemini

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \Leftrightarrow [\mathbf{W} \quad ; \quad \mathbf{G}]. \quad (3.69)$$

olarak artırılmış matris formunda yazabiliriz.

Şimdi, (3.43) matris bağıntısını kullanarak, (3.55) başlangıç koşullarına karşılık gelen matris formunu aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$y_j^{(k)}(x) = \lambda_{jk} \Rightarrow \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_j = \lambda_{jk}, j = 1, 2, k = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_1 = \lambda_{1k} \\ \mathbf{X}(a) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A}_2 = \lambda_{2k} \end{array} \right\} \bar{\mathbf{X}}(a) \bar{\mathbf{M}}^k \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \lambda_k, k = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{U}_k \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}_k; \mathbf{U}_k = \overline{\mathbf{X}}(a) \overline{\mathbf{M}}^k \overline{\mathbf{H}}, \boldsymbol{\lambda}_k = \begin{bmatrix} \lambda_{1k} \\ \lambda_{2k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{m-1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Böylece, (3.55) koşulları için matris denklemi

$$\mathbf{U} \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda} \Rightarrow [\mathbf{U} \ ; \ \boldsymbol{\lambda}]. \quad (3.70)$$

formunda olur.

Sonuç olarak (3.65) sisteminin çözümünü elde etmek için $[\mathbf{U} \ ; \ \boldsymbol{\lambda}]$ matrisin satırları $[\mathbf{W} \ ; \ \mathbf{G}]$ matrisinin herhangi m satırının yerine koyarız ve

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] \text{ ya da } \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.71)$$

yeni artırılmış matrisi elde ederiz.

Burada $\text{rank} \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank}[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise o zaman $\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$ yazabiliriz. Böylece A matrisi tek çözüme sahiptir. Başlangıç koşulları altında (3.65) sisteminin tek bir çözümü vardır. Böylece (3.65) denklemi (3.56) formundaki Boubaker polinomlarına göre tek bir çözüme sahiptir.

3.7 Çözümlerin Doğruluğu ve Hata Analizi

Fizik, mühendislik ve matematik gibi alanlarda çözemediğimiz birçok problem sayısal olarak çözülebilmektedir. Özellikle modellemede karşılaştığımız nonlineer diferansiyel denklemler ve sistemler, bu tip problemlere örnek olarak verilebilir. 1940’larda bilgisayarların bulunmasıyla birlikte sayısal yöntemlerin etkili bir şekilde kullanılmasını sağlamıştır. Son yıllarda mühendislik problemlerinin sayısal yöntemlerle çözüm yollarının artışında, yüksek hızlı ve verimli bilgisayarların geliştirilmesinin rolü büyüktür [72,73].

Sayısal analiz, analitik olarak çözülemeyen problemlerin yaklaşık çözümlerine ulaşmak için kullanılan yöntemler bütünüdür. Amacı ise, çözümün elle yapılamadığı ya da analitik olarak çözülmesi zor veya olanaksız olan problemlerin çözülebilmesi için uygun ve en iyi yaklaşımı veren yöntemleri bulmak ve bunlardan anlamlı ve faydalı sonuçlar çıkarmaktır. Ayrıca, çözümü istenen problemi tanımlamak ve sonuca ulaşacak yöntemi saptamak yine aynı bilim dalının işidir. Bütün bunlar birtakım aşamalar gerektirir; yani, problemin formüle edilmesi, en iyi yaklaşık çözümü veren yöntemin seçilmesi ve çözüm algoritma yardımıyla yaklaşık çözümün elde edilmesidir [54].

Yaklaşık çözümler, genellikle yuvarlama ve kesim hataları nedeniyle ortaya çıkar. Bizim amacımız nümerik sonuçları en az hataya indirgemektir. Şimdi bu kesimde, çözümün kontrolü ile beraber, Ortalama-Değer, düzeltilmiş hata ve rezidüel fonksiyona dayalı hata teknikleri tanıtacağız [7, 16-19, 30, 33, 44, 47, 50, 57, 59, 60, 62-64, 66, 69-71].

Bu çalışmada incelenen neutral diferansiyel denklemi, neutral diferansiyel fark denklemi, neutral tip integro-diferansiyel denklemi ve neutral fonksiyonel diferansiyel denklemi, L lineer operatör ve $y(x)$ tam çözüm olmak üzere, kısaca

$$L[y(x)] = g(x) \quad (3.72)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, (3.3) kesilmiş Boubaker serisi formunda elde edilen $y_N(x)$ yaklaşık çözümü, verilen fonksiyonel denklemi yaklaşık olarak sağlar; yani

$$R_N(x) = L[y_N(x)] - g(x) \cong 0 \quad (3.73)$$

olur. Buradaki $R_N(x)$ fonksiyonu, rezidüel fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. Aynı zamanda $x = x_r \in [a, b]$, $r = 0, 1, \dots$ için

$$R_N(x_r) = L[y_N(x_r)] - g(x_r) \cong 0 \Rightarrow R_N(x_r) \leq 10^{-k_r}, \quad (k_r \in Z^+) \quad (3.74)$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Eğer $\max 10^{-kr} = 10^{-k}$ (k pozitif tamsayı) önceden belirlenmişse, o zaman kesme sınırı N , $R_N(x_r)$ değeri 10^{-k} dan daha küçük oluncaya kadar artırılır; N yeteri kadar artırıldığında $R_N(x) \rightarrow 0$ oluyorsa hata azalır.

Diğer yandan, $R_N(x)$ ile tanımlanan residüel hata fonksiyonu ve $[a, b]$ aralığı üzerinde $|R_N(x)|$ fonksiyonunun ortalama değeri yardımıyla, çözümün doğruluğu kontrol edilebilir ve hata sınırı tahmin edilebilir. Dolayısıyla, üçgen eşitsizliği ve Ortalama Değer Teoremi $|R_N(x)|$ üzerinde kullanılarak, \bar{R}_N ortalama hatanın üst sınırı aşağıdaki gibi elde edilebilir [16, 33, 44, 61]:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b R_N(x) dx \right| &\leq \int_a^b |R_N(x)| dx \text{ ve } \int_a^b R_N(x) dx = (b-a)R_N(c), \quad a \leq c \leq b \\ &\Rightarrow \left| \int_a^b R_N(x) dx \right| = (b-a)|R_N(c)| \\ &\Rightarrow (b-a)|R_N(c)| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx \\ |R_N(c)| &\leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a} = \bar{R}_N, \quad a \leq c \leq b. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Açıklama: Yukarıda yapılan açıklamalar, \mathbf{N} lineer olmayan bir operatör olmak üzere, (3.72)-(3.75) ifadelerine $\mathbf{N}[y(x)]$ lineer olmayan parçayı ekleyerek kurulan

$$L[y(x)] + \mathbf{N}[y(x)] = g(x)$$

$$R_N(x) = L[y_N(x)] + \mathbf{N}[y_N(x)] - g(x) \cong 0$$

$$|R_N(c)| \leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a} = \bar{R}_N, \quad a \leq c \leq b$$

denklemleri için de geçerlidir.

Diğer yandan, (3.72) formundaki (1.1), (1.2) ve (1.3) ile tanımlanan lineer neutral denklemlerinin, bulunan $y_N(x)$ yaklaşık Boubaker polinom çözümleri ve bilinmeyen $y(x)$ tam çözümler olmak üzere, $e_N(x)$ hata fonksiyonunu tahmin etmek ve ayrıca yaklaşık çözümü iyileştirmek için, $R_N(x)$ rezidüel fonksiyonuna dayalı aşağıdaki rezidüel hata tekniği sunulmuştur [7, 61, 19, 30, 62, 63].

Bu amaç için önce

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x) \quad (3.76)$$

ile tanımlanan hata fonksiyonunu ele alalım. Sonra (3.73) ve (3.76) denklemlerini kullanarak, $e_N(x)$ bilinmeyenli,

$$e_N^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, m-1) \quad (3.77)$$

homojen koşulu ve

$$L[e_N(x)] = L[y(x)] - L[y_N(x)] = -R_N(x) \quad (3.78)$$

dieransiyel denklemden oluşan hata problemi kurulur. Böylece (3.77)-(3.78) hata problemi, Kesim 3.1 ve Kesim 3.2 deki çözüm yöntemi kullanılarak, $e_{N,M}(x)$ tahmin edilen hata fonksiyonu

$$e_{N,M}(x) = \sum_{n=0}^M a_n^* B_n(x), \quad (M > N)$$

olarak belirlenilir. Dolayısıyla, düzeltilmiş Boubaker polinom yaklaşımı aşağıdaki gibi olur:

$$y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x). \quad [3.79]$$

Ayrıca, (1.5), (1.6) ve (1.7) ile tanımlanan lineer neutral tip sistemlerinin, $i, j=1, 2, \dots, J$ için, $y_j(x)$ tam çözümler ve $y_{j,N}(x)$ yaklaşık Boubaker polinom çözümleri olmak üzere, $e_{jN}(x)$ hata fonksiyonlarını tahmin etmek ve ayrıca iyileştirilmiş yaklaşık çözümleri iyileştirmek için, $R_{jN}(x)$ rezidüel fonksiyonuna dayalı rezidüel

hata tekniği sunulmuştur [7, 19, 30, 62, 63]. Burada bahsedilen lineer neutral denklem sistemleri, hata fonksiyonları ve rezidüel fonksiyonları, sırasıyla,

$$L[y_{jN}(x)] = g_i(x); i, j = 1, 2, \dots, J, \quad (3.80)$$

$$e_{j,N}(x) = y_j(x) - y_{j,N}(x) \quad (3.81)$$

$$R_{j,N}(x) = L[y_{j,N}(x)] - g_i(x); i, j = 1, 2, \dots, J \quad (3.82)$$

olarak tanımlanmaktadır;

$$L[y_{j,N}(x)] = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=1}^2 P_{ij}^k(x) y_{j,N}^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^{m_2} \sum_{j=1}^2 R_{ij}^r(x) y_{j,N}^{(r)}(\alpha_{jr}x + \beta_{jr}) + \sum_{j=1}^J \int_{u(x)}^{v(x)} K_{ij}(x, t) y_{j,N}(\lambda, \mu) dt_i$$

$$L[y_{j,N}(x)] = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{j=1}^2 P_{ij}^k(x) y_{j,N}^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^{m_2} \sum_{j=1}^2 R_{ij}^r(x) y_{j,N}^{(r)}(h_{ij}^r(x)) + \sum_{s=0}^{m_3} \sum_{j=1}^2 \int_{u(x)}^{v(x)} K_{ij}^s(x, t) y_{j,N}^{(s)}(\tau_{ij}^s(t)) dt$$

$$L[y_{j,N}(x)] = \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^2 [P_{ij}^k(x) y_{jN}^{(k)}(x) + R_{ij}^k(x) y_{jN}^{(k)}(h_{ij}^k(x))].$$

Bu durumda, başlangıç koşulları ile beraber (1.5), (1.6) ve (1.7) tipindeki sistemlerin oluşturduğu hata problemi, (3.80)-(3.82) yardımıyla,

$$L[e_N(x)] = L[y(x)] - L[y_N(x)] = -R_N(x)$$

ve

$$e_{j,N}^{(k)}(a) = 0, (i, j = 1, 2; k = 0, 1, \dots, m-1)$$

olarak kurulur. Bu hata problemi, Kesim 3.4-Kesim 3.6 da kullanılan yöntem yardımıyla çözümlenerek, tahmin edilen hata fonksiyonları kümesi

$$e_{j,N,M}(x) = \sum_{n=0}^M a_{jn}^* B_n(x), (M > N), j = 1, 2, \dots, J, \dots, J$$

seri formunda hesaplanır. Böylece düzeltilmiş Boubaker polinom yaklaşımı

$$y_{j,N,M}(x) = y_{j,N}(x) + e_{j,N,M}(x), \quad j = 1, 2, \dots, J$$

olarak elde edilir.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Çalışmanın bu bölümünde, çalışma kapsamında kullanılan metotların doğruluğu, verimliliği ve etkileri araştırılmıştır. Bu nedenle, farklı denklem formları için önerilen metotlar araştırma bulgularına dayandırılmış ve metotların işleyişi örneklerle desteklenmiştir. Problemlerin çözümlerinin hesaplanmasında, grafiklerin çizilmesinde ve karşılaştırma tablolarında yer alan bulguların bulunmasında Mathematica ve MATLAB programları kullanılmıştır. Örnekler için gerekli hata analizleri yapılarak sonuçlar iyileştirilmiş, literatürde yer alan farklı çözüm teknikleri ile bu çalışmada kullanılan metotların sonuçları karşılaştırılmıştır.

Örnek 4.1 [6] İkinci mertebeden

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(x) = \frac{3}{4}y(x) + y\left(\frac{x}{2}\right) + y'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}y''\left(\frac{x}{2}\right) - x^2 - x + 1 \end{array} \right.$$

(3.1) ile tanımlanan pantograf türü neutral diferansiyel denkleminin $y(0) = y'(0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$ koşulları altındaki çözümünü inceleyelim. Problemin tam çözümü $y(x) = x^2$ dir. Burada bilinen sabitler

$$c = \frac{3}{4}, P_0 = P_1 = 1, P_2 = \frac{1}{2}, q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$$

olarak verilmektedir; çözümü $y_3(x) = \sum_{n=0}^3 a_n B_n(x)$ Boubaker seri formunda arayalım.

Bu durumda, $N=3$ için sıralama noktaları $\{x_0 = 0, x_1 = 1/3, x_2 = 2/3, x_3 = 1\}$ olarak ve Kesim 3.1 de verilen yöntem kullanılarak, (3.10) bağıntısına göre, problemin temel matris denklemini

$$\left\{ \mathbf{X}\mathbf{M}^m\mathbf{H} - c\mathbf{X}\mathbf{M}^0\mathbf{H} - \sum_{k=0}^3 P_k \mathbf{X}\mathbf{D}(q_k x) \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{H} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$
$$\left\{ \mathbf{X}\mathbf{M}^2\mathbf{H} - c\mathbf{X}\mathbf{M}^0\mathbf{H} - P_0 \mathbf{X}\mathbf{D}(q_0) \mathbf{M}^0\mathbf{H} - P_1 \mathbf{X}\mathbf{D}(q_1) \mathbf{M}\mathbf{H} - P_2 \mathbf{X}\mathbf{D}(q_2) \mathbf{M}^2\mathbf{H} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olarak elde edilir; artırılmış matrisi formu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$[\mathbf{W} ; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -7/4 & -1 & -5/2 & -1 & | & 1 \\ -7/4 & -17/12 & -53/13 & -7/216 & | & 5/9 \\ -7/4 & -11/6 & -65/18 & 31/54 & | & -1/9 \\ -7/4 & -9/4 & -9/2 & 5/8 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Başlangıç koşullarının matris formu:

$$[\mathbf{U}_0 ; \lambda_0] = [1 \ 0 \ 2 \ 0 \ | \ 0],$$

$$[\mathbf{U}_1 ; \lambda_1] = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ | \ 0].$$

Böylece sonuç artırılmış matris

$$[\mathbf{W} ; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -7/4 & -11/6 & -65/18 & 31/54 & | & -1/9 \\ -7/4 & -9/4 & -9/2 & 5/8 & | & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu sistemin çözümüyle

$$\mathbf{A} = [-2 \ 0 \ 1 \ 0]^T$$

bilinmeyen katsayıları buluruz. Böylece çözüm

$$y_3(x) = \sum_{n=0}^3 a_n B_n(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) + a_3 B_3(x) \rightarrow y_3(x) = x^2$$

olur ki bu tam çözümdür.

Problem aynı zamanda Runge-Kutte metodu [74], Varyasyonel iterasyon metodu [6], One-leg θ method [6] ile çözüldüğünde sonuçlar tam çözüm olmayıp yaklaşık çözümler olduğu görülmektedir. Dolayısıyla burada sunulan Boubaker matris sıralama metodunun bahsedilen diğer metodlara göre oldukça etkili ve kullanışlı olduğu düşünülebilir.

Örnek 4.2 Birinci mertebeden (3.1) ile tanımlanan pantograf türü neutral diferansiyel denkleminin [6]

$$y'(x) = -y(x) + \frac{1}{2}y\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}y'\left(\frac{x}{2}\right),$$

$y(0) = 1$ koşulu altındaki çözümünü inceleyelim. Problemin tam çözümü $y(x) = e^{-x}$ dir. Burada bilinen sabitler, (3.1) denklemine göre,

$$c = -1, P_0 = P_1 = \frac{1}{2}, q_0 = q_1 = \frac{1}{2}$$

şeklindedir. Çözümü

$$y_6(x) = \sum_{n=0}^6 a_n B_n(x)$$

Boubaker seri formunda arayalım. $N=6$ için sıralama noktaları

$$\left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{6}, x_3 = \frac{3}{6}, x_4 = \frac{4}{6}, x_5 = \frac{5}{6}, x_6 = 1\right\}$$

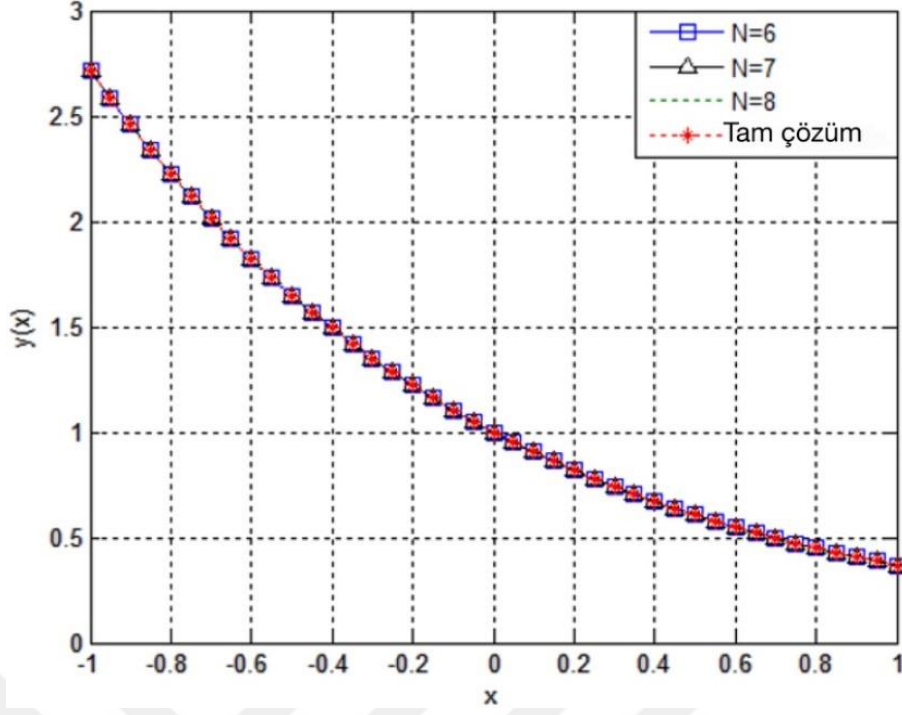
şeklindedir. (3.10) bağıntısına göre, temel matris denklemini

$$\left\{ \mathbf{X}\mathbf{M}^m\mathbf{H} - c\mathbf{X}\mathbf{M}^0\mathbf{H} - \sum_{k=0}^6 P_k \mathbf{X}\mathbf{D}(q_k x) \mathbf{M}^{(k)}\mathbf{H} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

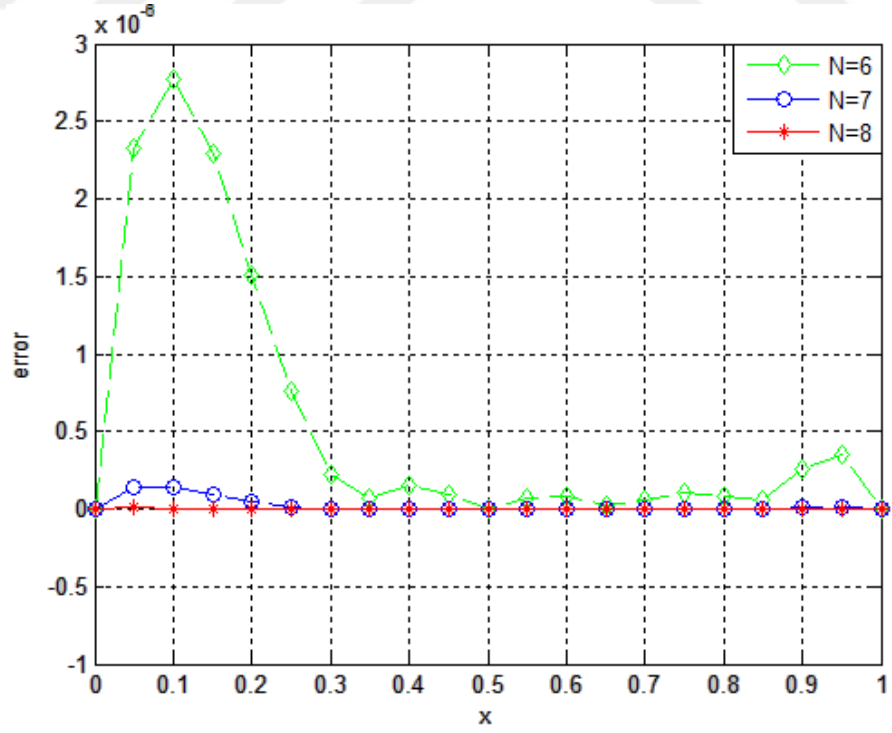
$$\left\{ \mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{H} - c\mathbf{X}\mathbf{M}^0\mathbf{H} - P_0 \mathbf{X}\mathbf{D}(q_0) \mathbf{M}^0\mathbf{H} - P_1 \mathbf{X}\mathbf{D}(q_1) \mathbf{M}\mathbf{H} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olur.

Gerekli süreçler izlendiğinde $N=6$, $N=7$ ve $N=8$ için yaklaşık çözümler tam çözümle birlikte Tablo 4.1, Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 de gösterilmiştir.



Şekil 4.1: Örnek 4.2 için N=6,7 ve 8 için yaklaşık çözüm ve tam çözüm $y(x) = e^{-x}$ in grafiği



Şekil 4.2: Örnek 4.2 için N=6,7 ve 8 için rezidüel hata fonksiyonunun grafiği

Tablo 4.1: Örnek 4.2 nin N=6,7,8 için mutlak hataların karşılaştırılması

x_i	N=6 $ e_6(x_i) $	N=7 $ e_7(x_i) $	N=8 $ e_8(x_i) $
0	0	0	0
0.1	2.861E-07	1.667E-08	8.193E-10
0.2	6.637E-07	3.466E-08	1.548E-09
0.3	8.871E-07	4.355E-08	1.871E-09
0.4	9.920E-07	4.784E-08	2.036E-09
0.5	1.049E-06	5.022E-08	2.108E-09
0.6	1.082E-06	5.088E-08	2.114E-09
0.7	1.084E-06	5.034E-08	2.097E-09
0.8	1.059E-06	4.971E-08	2.057E-09
0.9	1.043E-06	4.861E-08	1.999E-09
1.0	1.043E-06	4.615E-08	1.975E-09

Örnek 4.3 İkinci mertebeden (3.1) pantograf diferansiyel denklemini ele alalım [74].

$$y''(x) = \frac{2}{3}y(x) + \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}}y\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$y(0) = 1, y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$$

Tam çözüm $y(x) = e^x$. Burada bilinen sabitler, (3.14) denklemine göre,

$$P_{00} = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}}, \alpha_0 = \frac{1}{2}, \tau_0 = 0, Q_{00} = \frac{2}{3}, Q_{10} = 1$$

şeklindedir. Çözümü

$$y_3(x) = \sum_{n=0}^3 a_n B_n(x).$$

Boubaker seri formunda arayalım. N=3 için sıralama noktaları

$$\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1\}$$

alınarak, (3.14) denkleminde problemin temel matris denklemini, (3.17) ye göre,

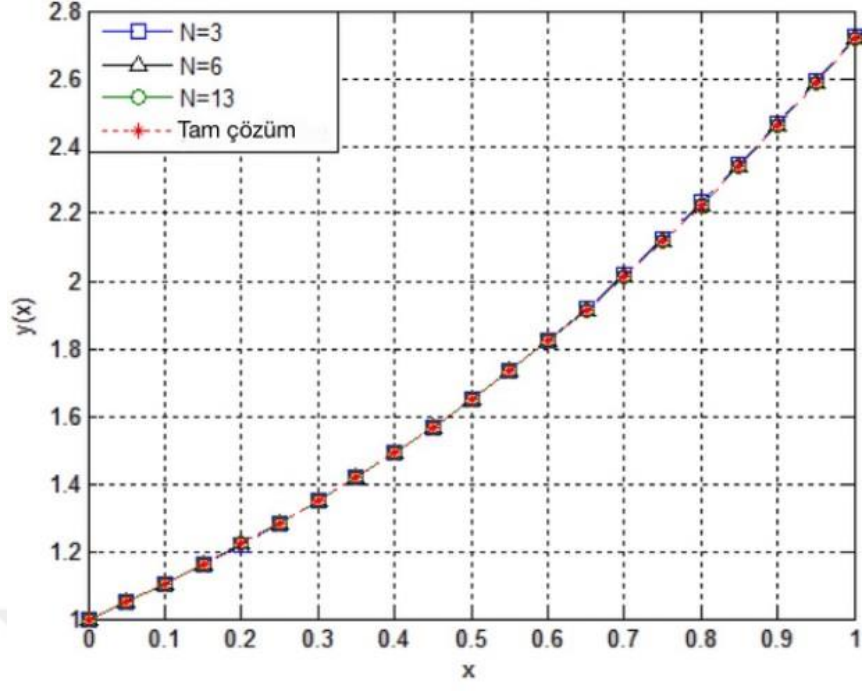
$$\left\{ \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^1 Q_{rs} \mathbf{X} \mathbf{M}^r \mathbf{H} - \sum_{k=0}^0 \sum_{j=0}^0 P_{kj} \mathbf{X} \mathbf{D}(\alpha_j, \tau_j) \mathbf{M}^k \mathbf{H} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$
$$\{Q_{10} \mathbf{X} \mathbf{M}^1 \mathbf{H} - Q_{00} \mathbf{X} \mathbf{M}^0 \mathbf{H} - P_{00} \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{M}^0 \mathbf{H}\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olur:

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}e^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{00} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \binom{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{bmatrix}$$

Ayrıca N=3, N=6 ve N=13 için mutlak hatalar Tablo 4.2 de alıntı yapılan makaledeki Hermite polinomu ile karşılaştırılmıştır. Şekil 4.3’de de tam çözümle N=3, N=6 ve N=13 yaklaşık çözümlerinin grafiği çizilmiştir. Şekil 4.4’de de rezidüel hata fonksiyonunun grafiği çizilmiştir. Tablo 4.3’de de düzeltilmiş hata tablosu yapılmıştır



Şekil 4.3: Örnek 4.3 ün N=3,6 ve 13 için yaklaşık çözüm ve tam çözümün grafiği

$N = 3, 6, 7$ için ortalama hataların üst sınırı aşağıdaki gibidir.

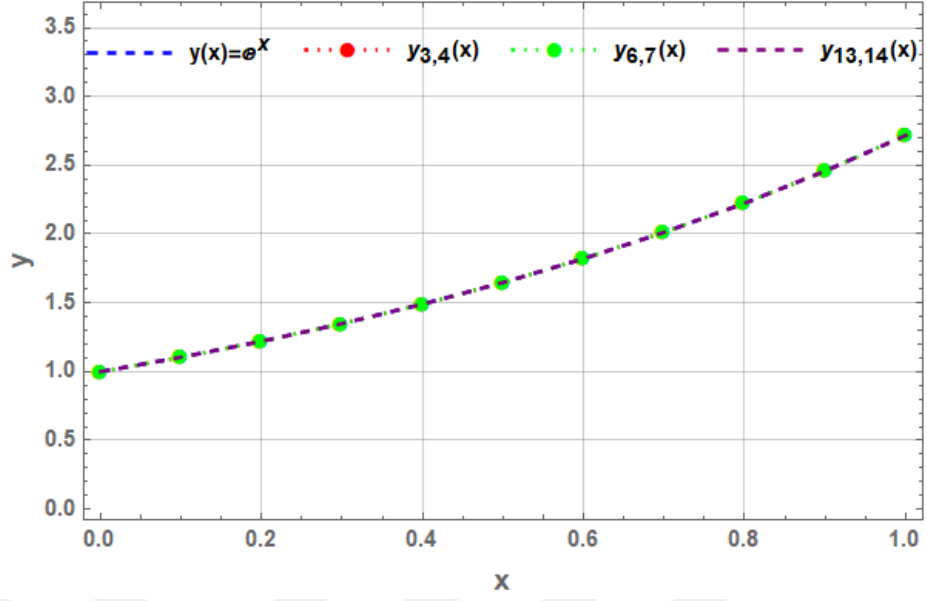
$$\bar{R}_3 = \int_0^1 \frac{|R_3(x)|}{0 - (-1)} dx = 7.89 \times 10^{-2},$$

$$\bar{R}_6 = \int_0^1 \frac{|R_6(x)|}{0 - (-1)} dx = 3.46 \times 10^{-5},$$

$$\bar{R}_7 = \int_0^1 \frac{|R_7(x)|}{0 - (-1)} dx = 1.83 \times 10^{-6}.$$

Tablo 4.2: Örnek 4.3'ün N=3,6 ve 13 için Hermite polinomu ve Mevcut polinomun mutlak hataların karşılaştırılması.

x	Tam çözüm	Hermite polinomu [74]			Boubaker polinomu		
		N=3	N=6	N=19	N=3	N=6	N=13
0	1	0	0	0	0	0	0
0.2	1.221402758	2.194E-04	7.933E-09	1.000E-11	1.881E-03	1.707E-06	2.315E-16
0.4	1.490824698	3.363E-05	9.373E-09	2.700E-11	1.391E-03	4.732E-07	4.190E-17
0.6	1.822118800	6.024E-04	6.391E-09	3.906E-11	2.009E-03	1.487E-07	1.356E-16
0.8	2.225540928	5.848E-03	1.285E-07	4.601E-13	6.452E-03	1.720E-07	3.143E-16
1	2.718281828	2.253E-02	8.038E-06	4.041E-14	7.139E-03	1.920E-07	4.986E-16



Şekil 4.4. Örnek 4.3 ün $N = 3, 6, 13$ için iyileştirilmiş çözümlerin grafiği ve tam çözümlerle karşılaştırılması

$$y_{3,4}(x) = 1 + 1.001359015x + 0.5x^2 + 0.1523999531x^3 + 0.06386830126x^4$$

$$y_{6,7}(x) = 1.0 + 0.9999996925x + 0.5x^2 + 0.1666798801x^3 + 0.04160012883x^4 \\ + 0.008486273353x^5 + 0.001203279418x^6 + 0.0003115657993x^7$$

$$y_{13,14}(x) = 1.0 + 1.0000000000000000199x + 0.5x^2 + 0.166666666666664442194x^3 \\ + 4.16666666666696500335x10^{-2}x^4 + 8.3333333312392751511x10^{-3}x^5 \\ + 1.388888898955314477x10^{-3}x^6 + 1.9841266826512353351x10^{-4}x^7 \\ + 2.4801656512454402012x10^{-5}x^8 + 2.7556151354104574413x10^{-6}x^9 \\ + 2.7571816128709538952x10^{-7}x^{10} + 2.4921442746366870814x10^{-8}x^{11} \\ + 2.1705751640786787514x10^{-9}x^{12} + 1.2580203472541351501x10^{-10}x^{13} \\ + 1.9905690039607575147x10^{-11}x^{14};$$

Tablo 4.3: Örnek 4.3 ün N=3, M=4, N = 6, M = 7, N=13, M=14 için Boubaker polinomunun mutlak hata hesaplarının ve iyileştirilmiş mutlak hata hesaplarıyla karşılaştırılması

x	Boubaker polinomu			Boubaker polinomunun iyileştirilmiş hali		
	$ e_3(x) $	$ e_6(x) $	$ e_{13}(x) $	$ E_{3,4}(x) $	$ E_{6,7}(x) $	$ E_{13,14}(x) $
0	0	0	0	0	0	0
0.2	1.881E-03	1.707E-06	2.315E-16	1.904E-04	2.381E-08	2.220E-16
0.4	1.391E-03	4.732E-07	4.190E-17	1.075E-04	6.476E-09	2.442E-15
0.6	2.009E-03	1.487E-07	1.356E-16	1.077E-04	5.763E-10	2.642E-14
0.8	6.452E-03	1.720E-07	3.143E-16	2.645E-04	1.085E-07	1.465E-13
1	7.139E-03	1.920E-07	4.986E-16	6.546E-04	1.008E-06	5.587E-13

Örnek 4.4 Birinci mertebeden Riccati diferansiyel denklemi

$$y'(x) - 2y + y^2 = x^2$$

$y(0) = 1$, $0 \leq x \leq 1$ koşulu altındaki çözümünü inceleyeceğiz. Denklemi Kesim 3.3 deki lineer olmayan neutral diferansiyel denklemler formatına indirgeyerek çözeceğiz. Problemin tam çözümü $y(x) = x + 1$. Bilinen sabitler, (3.21) denklemine göre,

$$P_0 = -2, P_1 = 1, R_{00}(x) = 1, g(x) = x^2$$

şeklindedir. Çözümü

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n B_n(x).$$

Boubaker seri formunda arayalım. $N=2$ için sıralama noktaları

$$\{x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1\}$$

kullanılarak gerekli matrisler aşağıda hesaplanmıştır;

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Böylece, (3.34) denkleminde problemin temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^1 \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{M}^k \mathbf{H} \mathbf{A} + \sum_{p=0}^0 \sum_{q=0}^p \mathbf{R}_{pq} \bar{\mathbf{X}} \mathbf{M}^p \mathbf{H} \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^q \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olur ve

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_0 \mathbf{X} \mathbf{M}^0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_1 \mathbf{X} \mathbf{M} \mathbf{H}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{R}_{00} \bar{\mathbf{X}} \mathbf{M}^0 \mathbf{H} \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^0 \mathbf{H}.$$

olmak üzere problemin artırılmış matris formları

$$[\mathbf{W}; \mathbf{V}; \mathbf{G}] = \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc|c} -2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -7/2 & 1 & 1/2 & 9/4 & 1/2 & 1/4 & 9/8 & 9/4 & 9/8 & 81/16 & 1/4 \\ -2 & -1 & -4 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 9 & 1 \end{array} \right]$$

$$[u_0; 0^*; \lambda_0] = [1 \ 0 \ 2 \ | \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 1]$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, koşullar yerine konulduğunda sonuç artırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{V}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc|c} -2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -7/2 & 1 & 1/2 & 9/4 & 1/2 & 1/4 & 9/8 & 9/4 & 9/8 & 81/16 & 1/4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

şeklinde kurulur. Buradan bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = [1 \ 1 \ 0]^T$$

bulunur. Böylece yaklaşık çözüm

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 a_n B_n(x) = a_0 B_0(x) + a_1 B_1(x) + a_2 B_2(x) \rightarrow y_2(x) = x + 1$$

olur ki bu tam çözümdür.

Örnek 4.5 İkinci mertebe ve ikinci dereceden lineer olmayan

$$y''(x) + y'(x)y(x) = e^x(1 + e^x)$$

diferansiyel denklemini [30] $y(0) = 1, y'(0) = 1, 0 \leq x \leq 1$ koşulları altında inceleyeceğiz. Problemin tam çözümü $y(x) = e^x$ dir. Bilinen sabitler, (3.21) e göre,

$$m = 2, P_2 = 1, P_0 = P_1 = 0, Q_j(x) = 0, R_{10} = 1, g(x) = e^x(1 + e^x)$$

şeklindedir. Çözümü

$$y_6(x) = \sum_{n=0}^6 a_n B_n(x).$$

Boubaker seri formunda arayalım. $N=6$ için

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{6}, x_3 = \frac{3}{6}, x_4 = \frac{4}{6}, x_5 = \frac{5}{6}, x_6 = 1 \right\}$$

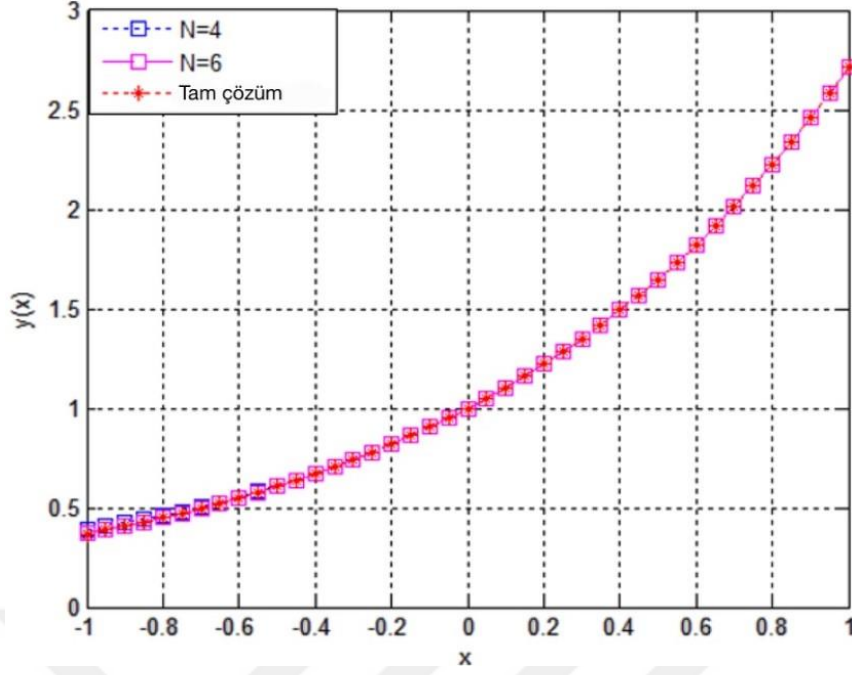
sıralama noktalarını alarak, (3.34) denkleminde problemin temel matris denklemini

$$\sum_{k=0}^2 P_k X M^k H A + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^p R_{pq} X M^p H \bar{X} \bar{M}^q \bar{H} \bar{A} = G$$

şeklinde oluşur. Buradan hareketle, $N = 6$ ve $N = 4$ için yaklaşık çözümler Tablo 4.4, Şekil 4.5'deki tam çözümle karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.4. Örnek 4.5 in $N=4, N=6$ mutlak hataların karşılaştırılması

x	$y(x) = e^x$	$N=4 \quad e_4(x) $	$N=6 \quad e_6(x) $
0	1	0	0
0.2	1.221402758160170	1.487E-05	5.924E-08
0.4	1.491824697641270	3.797E-05	1.055E-07
0.6	1.822118800390509	3.145E-05	1.489E-07
0.8	2.225540928492468	3.095E-04	2.978E-07
1	2.718281828459046	2.070E-03	8.551E-06



Şekil 4.5. Örnek 4.5 için $N = 4, 6$ yaklaşık çözümlerin ve tam çözüm $y(x) = e^x$ in grafikte gösterimi

Ayrıca; $N = 4, 6$ için ortalama hataların üst sınırı aşağıdaki gibi hesaplanılmıştır:

$$\bar{R}_4 = \frac{\int_0^1 |R_4(x)| dx}{1-0} = 1.555 \times 10^{-2}$$

$$\bar{R}_6 = \frac{\int_0^1 |R_6(x)| dx}{1-0} = 2.980 \times 10^{-5}$$

Örnek 4.6 Birinci mertebeden gecikmeli neutral tip

$$y_1'(x) - y_2(x+1) + \int_{x-1}^x 2y_2(t+1) dt = g_1(x)$$

$$y_2'(x) + 2y_1(x+1) + \int_{x-1}^x y_1(t+1) dt = g_2(x)$$

integro-diferansiyel denklem sisteminin $\{y_1(0) = 1, y_2(0) = 0\}$ başlangıç koşulları altındaki çözümünü inceleyeceğiz. Problemden $g_1(x) = x+2$ ve $g_2(x) = 6x+9$ olmak üzere, tam çözümler kümesi $\{y_1(x) = 2x+1, y_2(x) = x\}, 0 \leq x, t \leq 1$, bilinmektedir.

Kesim 3.4 de tanımlanan (3.39) sistemine göre, çözüm için $N = 2$, $0 \leq x, t \leq 1$ alırsak

sıralama noktaları $\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$ olur ve bu durumda

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{j=1}^2 P_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^0 \sum_{j=1}^2 R_{ij}^k(x) y_j^{(r)}(\alpha_{ik} + \beta_{jk}) + \sum_{j=1}^2 \int_{u(x)}^{v(x)} K(x,t) y_j(\lambda t + \mu) dt = g_i(x), i = 1, 2 ;$$

1. denklem $i=1$ için,

$$\sum_{k=0}^1 \left(P_{11}^k(x) y_1^{(k)}(x) + P_{12}^k(x) y_2^{(k)} \right) + \sum_{r=0}^0 \left(R_{11}^r(x) y_1^{(r)}(\alpha_{1r}x + \beta_{1r}) + R_{12}^r(x) y_2^{(r)}(\alpha_{2r}x + \beta_{2r}) \right) + \int_{u(x)}^{v(x)} \left(K_{11}(x,t) y_1(\lambda t + \mu) + K_{12}(x,t) y_2(\lambda t + \mu) \right) dt = g_1(x)$$

2. denklem $i=2$ için,

$$\sum_{k=0}^1 \left(P_{21}^k(x) y_1^{(k)}(x) + P_{22}^k(x) y_2^{(k)} \right) + \sum_{r=0}^0 \left(R_{21}^r(x) y_1^{(r)}(\alpha_{1r}x + \beta_{1r}) + R_{22}^r(x) y_2^{(r)}(\alpha_{2r}x + \beta_{2r}) \right) + \int_{u(x)}^{v(x)} \left(K_{21}(x,t) y_1(\lambda t + \mu) + K_{22}(x,t) y_2(\lambda t + \mu) \right) dt = g_2(x).$$

Gerekli katsayılar ve fonksiyonlar:

1. denklemde:

$$P_{11}^1(x) = 1, P_{11}^0(x) = 0, P_{12}^0(x) = 0, P_{12}^1(x) = 0, R_{11}^0(x) = 0, \alpha_{10} = \beta_{10} = 0,$$

$$R_{12}^0(x) = -1, K_{11}(x,t) = 0, K_{12}(x,t) = 2, \lambda = \mu = 1$$

2. denklemde:

$$P_{22}^1(x) = 1, P_{21}^0(x) = P_{22}^0(x) = 0, P_{21}^1(x) = 0, R_{21}^0(x) = 2, \alpha_{10} = 1, \beta_{10} = 1,$$

$$K_{21}(x,t) = 1, K_{22}(x,t) = 0, \lambda = \mu = 1,$$

olarak tanımlanmıştır.

Sistemin temel matris denklemini, (3.50) denklemine göre, aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\left\{ \sum_{k=0}^1 \mathbf{P}_k \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^k + \sum_{r=0}^0 \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{D}}(\alpha_r, \beta_r) \bar{\mathbf{M}}^r + \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{Z}}^* \bar{\mathbf{D}}(1,1) \right\} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

Diferansiyel kısım; $N = 2$, $\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$ için

$$\sum_{k=0}^1 \mathbf{P}_k \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^k = \mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^0 + \mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^1,$$

$$\mathbf{P}_k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^k(x) & \mathbf{P}_{12}^k(x) \\ \mathbf{P}_{21}^k(x) & \mathbf{P}_{22}^k(x) \end{bmatrix}, \mathbf{P}_0(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^0(x) & \mathbf{P}_{12}^0(x) \\ \mathbf{P}_{21}^0(x) & \mathbf{P}_{22}^0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^1(x) & \mathbf{P}_{12}^1(x) \\ \mathbf{P}_{21}^1(x) & \mathbf{P}_{22}^1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_0\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_1\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{X}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(0) \\ \bar{\mathbf{X}}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \bar{\mathbf{X}}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(0) \\ \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \mathbf{X}(1) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{M}}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_0 \overline{\mathbf{X}}^* \overline{\mathbf{M}}^0 + \mathbf{P}_1 \overline{\mathbf{X}}^* \overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Gecikmeli kısım;

$$\sum_{r=0}^0 \mathbf{R}_0 \overline{\mathbf{X}}^* \overline{\mathbf{D}}(\alpha_r, \beta_r) \overline{\mathbf{M}}^r = \mathbf{R}_0 \overline{\mathbf{X}}^* \overline{\mathbf{D}}(\alpha_0, \beta_0) \overline{\mathbf{M}}^0$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^0(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_0^0(1) \end{bmatrix}; \mathbf{R}_0^0(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^0(0) & \mathbf{R}_{12}^0(0) \\ \mathbf{R}_{21}^0(0) & \mathbf{R}_{22}^0(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_0^0(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^0(1) & \mathbf{R}_{12}^0(1) \\ \mathbf{R}_{21}^0(1) & \mathbf{R}_{22}^0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{D}}(\alpha_0, \beta_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\alpha_{10}, \beta_{10}) & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(\alpha_{20}, \beta_{20}) \end{bmatrix};$$

İntegral kısım;

$$\overline{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{Z}}^* \overline{\mathbf{D}}(1,1) = ?$$

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{X}}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{X}}(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathbf{X}}(1) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{Z}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}(0) \\ \mathbf{Z}(1/2) \\ \bar{\mathbf{Z}}(1) \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{Z}}(0) = \begin{bmatrix} Z(0) & 0 & 0 \\ 0 & Z(0) & 0 \\ 0 & 0 & Z(0) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{Z}}(1/2) = \begin{bmatrix} Z(1/2) & 0 & 0 \\ 0 & Z(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & Z(1/2) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{Z}}(1) = \begin{bmatrix} Z(1) & 0 & 0 \\ 0 & Z(1) & 0 \\ 0 & 0 & Z(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1/3 & -1/4 \\ 1/3 & -1/4 & 1/5 \end{bmatrix}, \mathbf{Z}(1/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/12 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 1/12 & 0 & 1/80 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{Z}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}(0) \\ \mathbf{Z}(1/2) & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}(1/2) \\ \mathbf{Z}(1) & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/3 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/4 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/3 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/4 & 1/5 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/80 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{D}}(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{D}}(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 13/6 \\ 1 & 1 & 13/12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 14/3 \\ 1 & 3/2 & 7/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \left[\mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}}^0 + \mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{R}_0 \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{D}}(\alpha_0, \beta_0) \bar{\mathbf{M}}^0 + \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{D}}(1,1) \right] \bar{\mathbf{H}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5/3 \\ 3 & 5/2 & 25/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 23/12 \\ 3 & 4 & 139/12 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 8/3 \\ 3 & 11/2 & 49/3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ g_1\left(\frac{1}{2}\right) \\ g_2\left(\frac{1}{2}\right) \\ g_1(1) \\ g_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 5/2 \\ 12 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5/3 & 2 \\ 3 & 5/2 & 25/3 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 23/12 & 5/2 \\ 3 & 4 & 139/12 & 0 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 8/3 & 3 \\ 3 & 11/2 & 49/3 & 0 & 1 & 2 & 15 \end{array} \right].$$

Koşullar için matris formları, (3.52) denklemine göre,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{X}(0)\mathbf{M}^0\mathbf{H}\mathbf{A}_1 = \lambda_{10} \\ \mathbf{X}(0)\mathbf{M}^0\mathbf{H}\mathbf{A}_2 = \lambda_{20} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{A} = \lambda_0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}; \lambda] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla çözüm matrisi ve sonuç çözümler, (3.51) ve (3.52) ye göre, aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5/3 & | & 2 \\ 3 & 5/2 & 25/3 & 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 23/12 & | & 5/2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 3 & 11/2 & 49/3 & 0 & 1 & 2 & | & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{10} = 1 \\ a_{11} = 2 \\ a_{12} = 0 \\ a_{20} = 0 \\ a_{21} = 1 \\ a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$y_1(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{H} \mathbf{A}_1, \quad y_2(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{H} \mathbf{A}_2 \text{ ise}$$

$$\Rightarrow y_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 = 1 + 2x$$

$$\Rightarrow y_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 = x$$

Elde edilen bu sonuçlar, tam çözümlerdir.

Örnek 4.7 [28] Birinci mertebeden neutral gecikmeli

$$y_1'(x) - x e^{x-1} y_2(x-1) = e^x - x$$

$$y_2'(x) + 2x^2 e^{-x-1} y_1(x+1) = 2x^2 - e^{-x}$$

diferansiyel denklem sisteminin $\{y_1(0)=1, y_2(0)=1\}$ koşulları altında çözümünü inceleyeceğiz. Problemin tam çözüm kümesi $\{y_1(x)=e^x, y_2(x)=e^{-x}, 0 \leq x \leq 1\}$ olarak biliniyor.

Çözüm için $N=2, 0 \leq x \leq 1$ alırsak sıralama noktaları $\left\{x_0=0, x_1=\frac{1}{2}, x_2=1\right\}$ olur.

Bu durumda, (3.39) denklemine göre, aşağıdaki matris işlemleri yapılır:

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{j=1}^2 P_{ij}^k(x) y_j^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^0 \sum_{j=1}^2 R_{ij}^r(x) y_j^{(r)}(\alpha_{jr}x + \beta_{jr}) = g_i(x), i=1,2$$

1. denklem $i=1$ için,

$$\sum_{k=0}^1 (P_{11}^k(x) y_1^{(k)}(x) + P_{12}^k(x) y_2^{(k)}(x)) + \sum_{r=0}^0 (R_{11}^r(x) y_1^{(r)}(\alpha_{1r}x + \beta_{1r}) + R_{12}^r(x) y_2^{(r)}(\alpha_{2r}x + \beta_{2r})) = g_1(x)$$

2. denklem $i=2$ için,

$$\sum_{k=0}^1 (P_{21}^k(x) y_1^{(k)}(x) + P_{22}^k(x) y_2^{(k)}(x)) + \sum_{r=0}^0 (R_{21}^r(x) y_1^{(r)}(\alpha_{1r}x + \beta_{1r}) + R_{22}^r(x) y_2^{(r)}(\alpha_{2r}x + \beta_{2r})) = g_2(x)$$

Gerekli katsayılar ve fonksiyonlar;

1. denklemde:

$$P_{11}^0(x) = 0, P_{12}^0(x) = 0, P_{11}^1(x) = 1, P_{12}^1(x) = 0, R_{11}^0(x) = 0, \\ R_{12}^0(x) = -xe^{x-1}, \alpha_{20} = 1, \beta_{20} = -1,$$

2. denklemde:

$$P_{21}^0(x) = 0, P_{22}^0(x) = 0, P_{21}^1(x) = 0, P_{22}^1(x) = 1, R_{21}^0(x) = 2x^2 e^{-x-1}, \\ R_{22}^0(x) = 0, \alpha_{10} = 1, \beta_{10} = 1,$$

Sistemin temel matris denklemleri, (3.50)-(3.51) den,

$$\left\{ \sum_{k=0}^1 \mathbf{P}_k \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^k + \sum_{r=0}^0 \mathbf{R}_r \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{D}}(\alpha_r, \beta_r) \bar{\mathbf{M}}^r \right\} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

veya açıkça

$$(\mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^0 + \mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{R}_0 \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{D}}(\alpha_0, \beta_0) \bar{\mathbf{M}}^0) \bar{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olarak kurulur; burada işlemsel matrisler aşağıda sunulmuştur:

$$\mathbf{P}_k(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^k(x) & \mathbf{P}_{12}^k(x) \\ \mathbf{P}_{21}^k(x) & \mathbf{P}_{22}^k(x) \end{bmatrix}, \mathbf{P}_0(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^0(x) & \mathbf{P}_{12}^0(x) \\ \mathbf{P}_{21}^0(x) & \mathbf{P}_{22}^0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^1(x) & \mathbf{P}_{12}^1(x) \\ \mathbf{P}_{21}^1(x) & \mathbf{P}_{22}^1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_0(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_1(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{X}}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(0) \\ \bar{\mathbf{X}}(1/2) \\ \bar{\mathbf{X}}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(0) \\ \mathbf{X}(1/2) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1/2) \\ \mathbf{X}(1) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{M}}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_0(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^0(x) & \mathbf{R}_{12}^0(x) \\ \mathbf{R}_{21}^0(x) & \mathbf{R}_{22}^0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -xe^{x-1} \\ 2x^2e^{-x-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_0(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2e^{-2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{D}}(\alpha_0, \beta_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\alpha_{10}, \beta_{10}) & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(\alpha_{20}, \beta_{20}) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}(\alpha_{10}, \beta_{10}) = \mathbf{D}(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\alpha_{20}, \beta_{20}) = \mathbf{D}(1, -1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{D}}(\alpha_0, \beta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gerekli işlemler yapıldığında, sunulan sistemin temel matris formları ve koşulların matris formu aşağıda oluşturulmuştur;

$$\mathbf{W} = \left[\mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}}^0 + \mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{R}_0 \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{D}}(\alpha_0, \beta_0) \bar{\mathbf{M}}^0 \right] \bar{\mathbf{H}}$$

veya

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -743/2450 & 274/1807 & -1349/1977 \\ 355/3182 & 983/5874 & 908/1915 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 347/1282 & 347/641 & 1663/1024 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(0) \\ \mathbf{G}(1/2) \\ \mathbf{G}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ g_1(1/2) \\ g_2(1/2) \\ g_1(1) \\ g_2(1) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} \\ e-1 \\ 2-e^{-1} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix},$$

buradan (3.52) denklemine göre,

$$[\mathbf{U}_k; \lambda_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Sonuç olarak, (3.53) denklemine göre, arttırılmış çözüm matrisi

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 3335/3182 & 983/5874 & 908/1915 & 0 & 1 & 1 & | & 1/2 - e^{-1/2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & | & e-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla, bahsedilen prosedür uygulanarak;

$N=2$ için yaklaşık çözüm

$$y_1(x) = 1 + x + 0.63806926536031x^2,$$

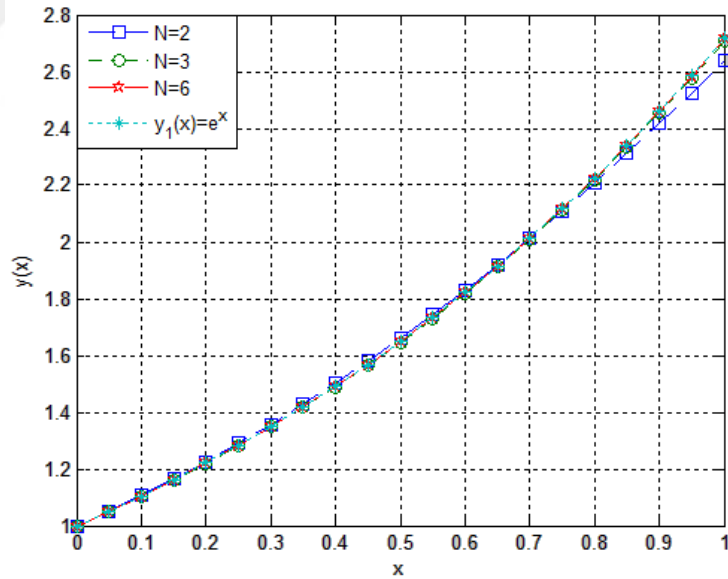
$$y_2(x) = 1 - x + 0.45438758056549x^2.$$

olur. Aynı işlemleri $N=3$ ve $N=6$ için de yapacak olursak;

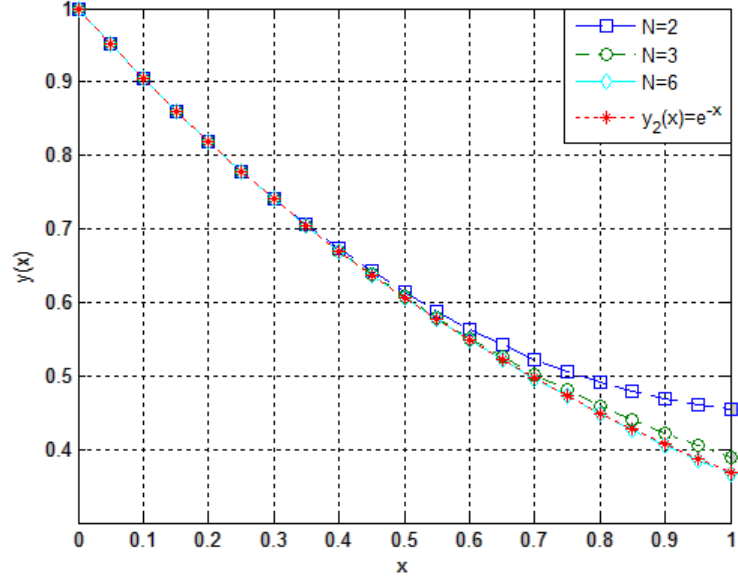
$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= 1 + x + 0.4540163899044796x^2 + 0.254284296590186x^3 \\ y_2(x) &= 1 - x + 0.4704821223149704x^2 - 0.0816931672987897x^3 \end{aligned} \right\} N = 3$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= 1 + x + 0.500158695304634x^2 + 0.166107691463704x^3 \\ &\quad + 0.0428110143627691x^4 + 0.0068965533984624x^5 \\ y_2(x) &= 1 - x + 0.500007962842629x^2 - 0.1667391230092024x^3 \\ &\quad + 0.0419057497000255x^4 - 0.0086858674697918x^5 \end{aligned} \right\} N = 6$$

$N = 2, 3$ ve 6 için yaklaşık çözümler Tablo 4.5.a, Tablo 4.5.b, Şekil 4.6.a ve Şekil 4.6.b'deki tam çözümlerle karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.6.a: Örnek 4.7 için tam çözüm $y_1(x) = e^x$ ve $N=2, 3$ ve 6 için yaklaşık çözümlerin grafiği



Şekil 4.6.b: Örnek 4.7 için tam çözüm $y_2(x) = e^{-x}$ ve $N=2,3$ ve 6 için yaklaşık çözümlerin grafiği

Tablo 4.5.a: Örnek 4.7 nin $y_1(x) = e^x$ tam çözümünün $N=2,3$ ve 6 yaklaşık çözümlerinin mutlak hataların karşılaştırılması

x_i	N=2 $ e(x_i) $	N=3 $ e(x_i) $	N=6 $ e(x_i) $
0	0	0	0
0.2	4.120E-03	1.208E-03	3.156E-06
0.4	1.027E-02	2.908E-03	1.831E-06
0.6	7.586E-03	3.747E-03	9.783E-05
0.8	1.717E-02	4.777E-03	5.970E-04
1.0	8.021E-02	9.981E-03	2.308E-03

Tablo 4.5.b: Örnek 4.7 nin $y_2(x) = e^{-x}$ tam çözümünün $N=2,3$ ve 6 yaklaşık çözümlerinin mutlak hataların karşılaştırılması

x_i	N=2 $ e(x_i) $	N=3 $ e(x_i) $	N=6 $ e(x_i) $
0	0	0	0
0.2	5. 55250E-04	5. 65014E-04	7. 78264E-08
0.4	2. 38197E-03	2. 71269E-04	6. 23194E-06
0.6	1. 47679E-02	2. 91620E-03	6. 88479E-05
0.8	4. 14791E-02	9. 95269E-03	3. 75889E-04
1.0	8. 65081E-02	2. 09095E-02	1. 39072E-03

Örnek 4.8. Birinci mertebeden değişken gecikmeli

$$y_1'(x) + (x+1)y_1(x) - y_2(x) + y_1'(x^2) - y_1(x^2) + y_2(x^2+1) = 2x^2 + 4$$

$$y_2'(x) - y_1(x) + xy_2(x) + y_2'(x^2+1) + (x-1)y_2(x^2+1) + y_1(x^2) = 2x^3 + x^2 + x + 2$$

fonksiyonel diferansiyel denklem sisteminin, $y_1(0) = 1$ ve $y_2(0) = 0$ ile verilen başlangıç koşullarına göre çözümlerini araştıralım. Bu problemin tam çözümler kümesinin $\{y_1(x) = x+1, y_2(x) = 2x\}$ olduğu biliniyor.

Burada, $N = 2$ için $y_j(x)$ yaklaşık çözümünü

$$y_j(x) = \sum_{n=0}^2 a_{jn} B_n(x), \quad j = 1, 2; \quad 0 \leq x \leq 1$$

kesilmiş Boubaker serisi formunda araştırıyoruz.

$N = 2$ için sıralama noktalarını kullanırsak

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

Fonksiyonel neutral sistemin temel matris denklemi, Kesim 3.6.2 deki (3.68) temel matris denklemi ve çözüm tekniğine göre veya Kesim 3.5 deki (3.54) sisteminin temel

diferansiyel ve fonksiyonel gecikmeli parçalarına ait (3.62) eşitliğine göre, şu şekilde elde edilir:

$$\mathbf{D} + \mathbf{F} = \mathbf{G} \Leftrightarrow \mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

burada \mathbf{D} , \mathbf{F} ve \mathbf{G} matrisleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

D+F nin tanımı:

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^1 \mathbf{P}_k \overline{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{M}}^k \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \left(\mathbf{P}_0 \overline{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{M}}^0 + \mathbf{P}_1 \overline{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{M}}^1 \right) \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A};$$

$$\mathbf{P}_0(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^0(0) & \mathbf{P}_{12}^0(0) \\ \mathbf{P}_{21}^0(0) & \mathbf{P}_{22}^0(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_0(1/2) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^0(1/2) & \mathbf{P}_{12}^0(1/2) \\ \mathbf{P}_{21}^0(1/2) & \mathbf{P}_{22}^0(1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_0(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^0(1) & \mathbf{P}_{12}^0(1) \\ \mathbf{P}_{21}^0(1) & \mathbf{P}_{22}^0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^1(0) & \mathbf{P}_{12}^1(0) \\ \mathbf{P}_{21}^1(0) & \mathbf{P}_{22}^1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_1(1/2) = \mathbf{P}_1(1)$$

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} \text{ (birim matris)}, \overline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_0 \overline{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{M}}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 3/4 & 3/8 & -1 & -1/2 & -1/4 \\ -1 & -1/2 & -1/4 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 \overline{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{M}}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{F} = \sum_{r=0}^1 \mathbf{R}_r \mathbf{X}_r^* \overline{\mathbf{M}}^r \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \left(\mathbf{R}_0 \mathbf{X}_0^* \overline{\mathbf{M}}^0 + \mathbf{R}_1 \mathbf{X}_1^* \overline{\mathbf{M}}^1 \right) \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A};$$

$$\mathbf{R}_0(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^0(0) & \mathbf{R}_{12}^0(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{21}^0(0) & \mathbf{R}_{22}^0(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_0(1/2) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^0(1/2) & \mathbf{R}_{12}^0(1/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{21}^0(1/2) & \mathbf{R}_{22}^0(1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_0(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^0(1) & \mathbf{R}_{12}^0(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{21}^0(1) & \mathbf{R}_{22}^0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^1(0) & \mathbf{R}_{12}^1(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{21}^1(0) & \mathbf{R}_{22}^1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1(1/2) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^1(1/2) & \mathbf{R}_{12}^1(1/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{21}^1(1/2) & \mathbf{R}_{22}^1(1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^1(1) & \mathbf{R}_{12}^1(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{21}^1(1) & \mathbf{R}_{22}^1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_0(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_1(1/2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_0(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1) \\ \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_0(1/2) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1/4) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(5/4) \\ \mathbf{X}(1/4) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(5/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 & 25/16 \\ 1 & 1/4 & 1/16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 & 25/16 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_0(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(2) \\ \mathbf{X}(1) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_1(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(0) \\ \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_1(1/2) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1/4) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(0) \\ \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(5/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 & 25/16 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_1(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(1) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(0) \\ \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_0 \mathbf{X}_0^* \overline{\mathbf{M}}^0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1/4 & -1/16 & 1 & 5/4 & 25/16 \\ 1 & 1/4 & 1/16 & -1/2 & -5/8 & -25/32 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{X}_1^* \overline{\mathbf{M}}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{P}_0 \overline{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{M}}^0 + \mathbf{P}_1 \overline{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{M}}^1 \right)^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 7/4 & 11/8 & -1 & -1/2 & -1/4 \\ -1 & -1/2 & -1/4 & 1/2 & 5/4 & 9/8 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_0 \mathbf{X}_0^* \overline{\mathbf{M}}^0 + \mathbf{R}_1 \mathbf{X}_1^* \overline{\mathbf{M}}^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3/4 & 7/16 & 1 & 5/4 & 25/16 \\ 1 & 1/4 & 1/16 & -1/2 & 3/8 & 55/32 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

Temel matris denklemi:

$$\mathbf{D} + \mathbf{F} = \underbrace{\left\{ \mathbf{P}_0 \mathbf{X}_0^* \overline{\mathbf{M}}^0 + \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_1^* \overline{\mathbf{M}}^1 + \mathbf{R}_0 \mathbf{X}_0^* \overline{\mathbf{M}}^0 + \mathbf{R}_1 \mathbf{X}_1^* \overline{\mathbf{M}}^1 \right\}}_{\mathbf{W}} \overline{\mathbf{H}} \mathbf{A} = \mathbf{G} \Leftrightarrow \mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

burada

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1/2 & 5/2 & 45/16 & 0 & 3/4 & 21/16 \\ 0 & -1/4 & 85/16 & 0 & 13/8 & 91/32 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ g_1(1/2) \\ g_2(1/2) \\ g_1(1) \\ g_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 9/2 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Bu nedenle bu temel matris denkleminin genişletilmiş matrisi şu şekilde hesaplanır:

$$[\mathbf{W} ; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1/2 & 5/2 & 45/16 & 0 & 3/4 & 21/16 & | & 9/2 \\ 0 & -1/4 & 85/16 & 0 & 13/8 & 91/32 & | & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & | & 6 \end{bmatrix}$$

Başlangıç koşullarının belirlenmesi:

$$y_1(0) = 1 \Rightarrow y_1(0) = \mathbf{X}(0)\mathbf{H}\mathbf{A}_1 = 1$$

$$y_2(0) = 0 \Rightarrow y_2(0) = \mathbf{X}(0)\mathbf{H}\mathbf{A}_2 = 0$$

⇓

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⇓

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⇓

$$[\mathbf{U} ; \lambda_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Çözüm matrisi:

Dolayısıyla çözüm yöntemine göre $[\mathbf{W} ; \mathbf{G}]$ ve $[\mathbf{U} ; \lambda_0]$ a dayalı yeni artırılmış matris aşağıdaki gibi elde edilebilir

$$[\tilde{\mathbf{W}} \ ; \ \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & | & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sonuç olarak problemin çözüm kümesi şu şekilde olur:

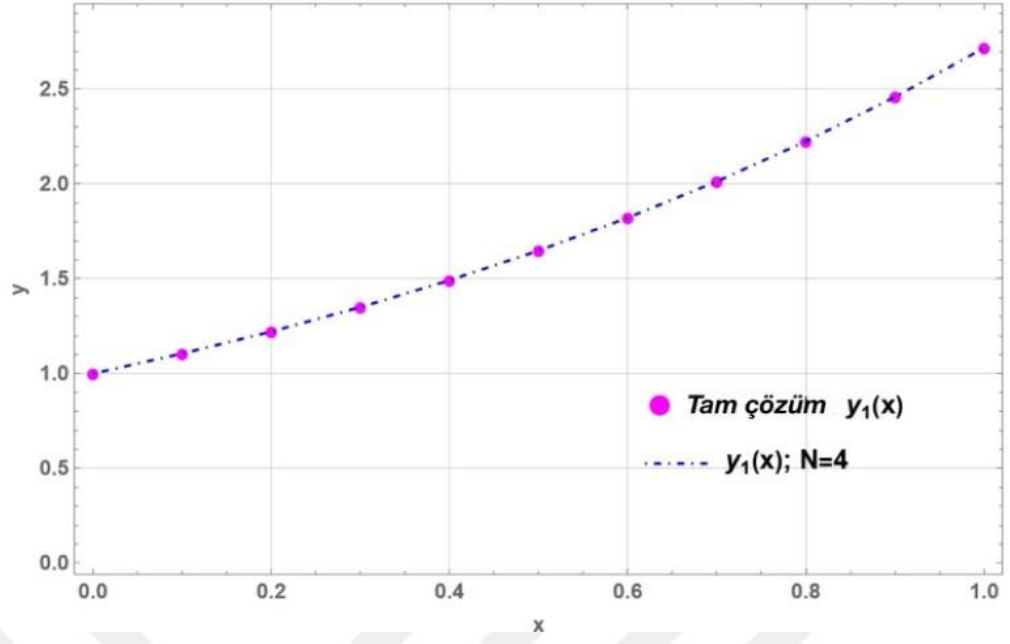
$$\{y_1(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A}_1 = \mathbf{X}(x)\mathbf{H}\mathbf{A}_1 = 1+x, \ y_2(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A}_2 = \mathbf{X}(x)\mathbf{H}\mathbf{A}_2 = 2x\}.$$

Örnek 4.9. [28] Değişken katsayılı birinci mertebeden gecikmeli

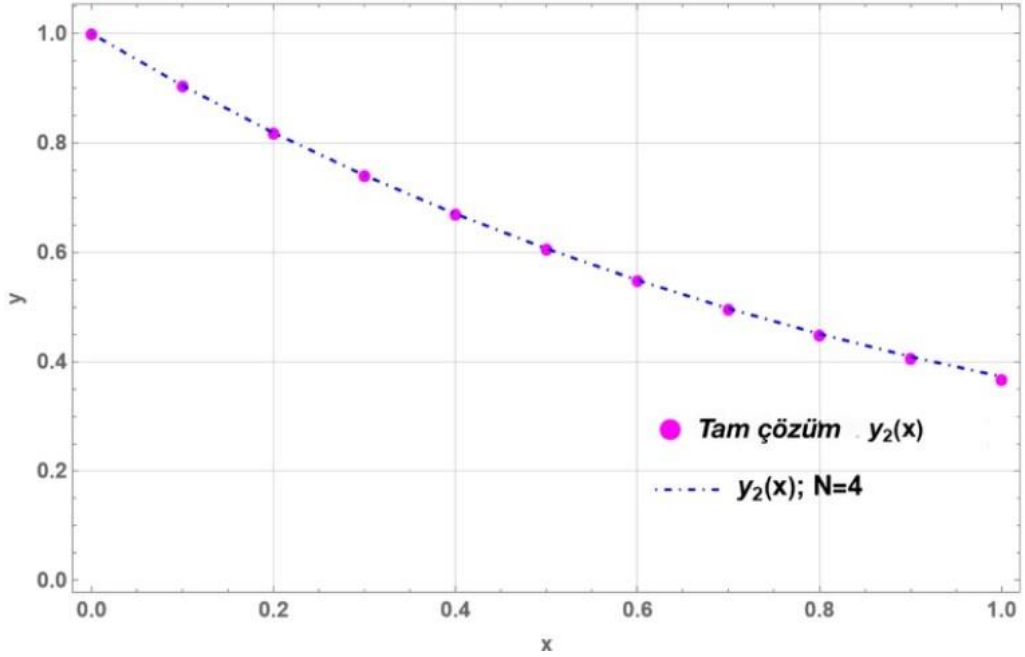
$$\begin{aligned} y_1'(x) - xe^{x-1}y_2(x-1) &= e^x - x \\ y_2'(x) + 2x^2e^{-x-1}y_1(x+1) &= 2x^2 - e^{-x} \end{aligned}$$

diferansiyel denklemler sisteminin, $\{y_1(0)=1, y_2(0)=1, 0 \leq x \leq 1\}$ başlangıç koşullarına göre çözümlerini araştıralım. Burada, Örnek 4.8 deki gibi, Kesim 3.5 veya Kesim 3.6 daki matris-sıralama tekniği kullanılarak, çözümler elde edilmiştir.

Burada tam çözümlerin kümesi $\{y_1(x), y_2(x)\} = \{e^x, e^{-x}\}$ 'dir. Farklı kesme sınırları için önerilen yöntemle problem çözüldükten sonra Boubaker polinomunun çözüm kümesi elde edilir. Bunlardan biri, tam çözüm kümesiyle çakıştıkları Şekil 4.7'de ve Şekil 4.8'de gösterilmektedir. Ek olarak, yöntemde daha yüksek kesme sınırları içeren mutlak hataların karşılaştırılması Tablo 4.6 ve 4.7'de görülmektedir.



Şekil 4.7.a: Örnek 4.9 için $y_1(x) = e^x$ Tam çözüm ve N=4 için yaklaşık çözümün grafiği.



Şekil 4.7.b: Örnek 4.9 için $y_2(x) = e^{-x}$ Tam çözüm ve N=4 için yaklaşık çözümün grafiği

Tablo 4.6.a: Örnek 4.9 için tam çözüm $y_1(x) = e^x$ mutlak hatalarının N=6,8,12 için karşılaştırılması.

x_i	$ e_{1,6}(x_i) ;$ N=6	$ e_{1,8}(x_i) ;$ N=8	$ e_{1,12}(x_i) ;$ N=12
0.2	3.3041E-06	8.8352E-08	4.9431E-11
0.4	7.6675E-06	1.7439E-07	7.8586E-11
0.6	1.0374E-05	2.0363E-07	8.3960E-11
0.8	1.0964E-05	2.0839E-07	8.4415E-11
1.0	1.1216E-05	2.0883E-07	8.4428E-11

Tablo 4.6.b: Örnek 4.9 için tam çözüm $y_2(x) = e^{-x}$ ile mutlak hataların N=6,8,12 için karşılaştırılması.

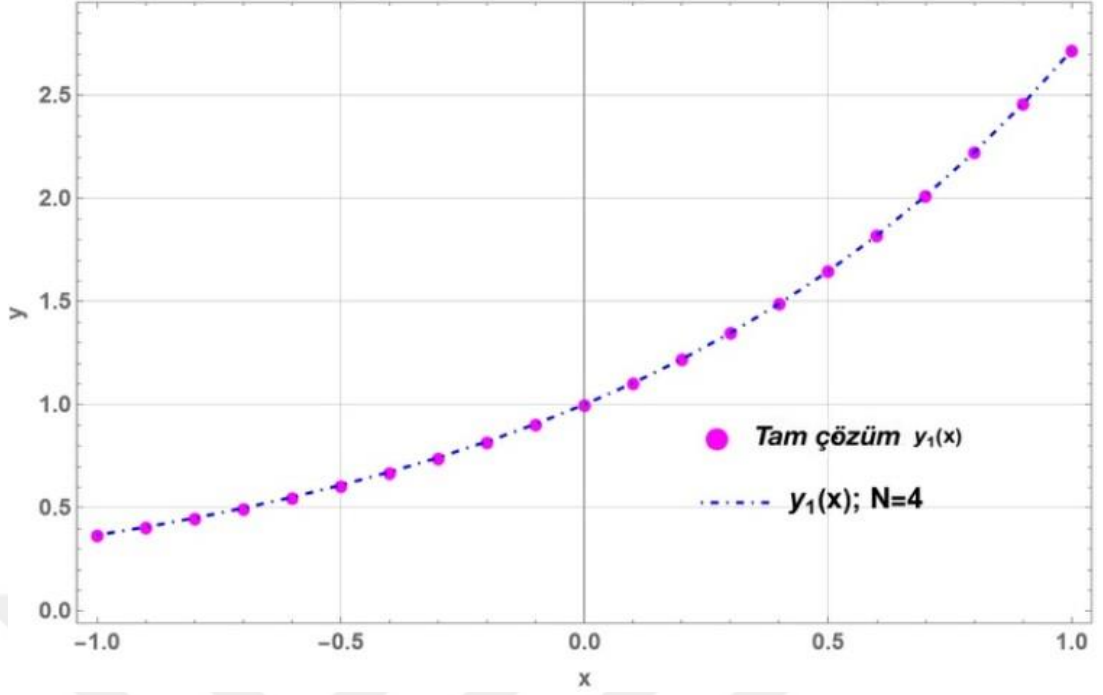
x_i	$ e_{2,6}(x_i) ;$ N=6	$ e_{2,8}(x_i) ;$ N=8	$ e_{2,12}(x_i) ;$ N=12
0.2	2.4446E-08	2.9002E-10	1.4289 E-13
0.4	3.1348E-07	1.4498E-08	1.0701E-12
0.6	5.7085E-06	7.7066E-08	7.1813E-12
0.8	4.3018E-05	8.2964E-07	9.1593E-11
1.0	2.0728E-04	5.3242E-06	9.8002E-10

Örnek 4.10: Değişken katsayılı birinci mertebeden sabit gecikmeli

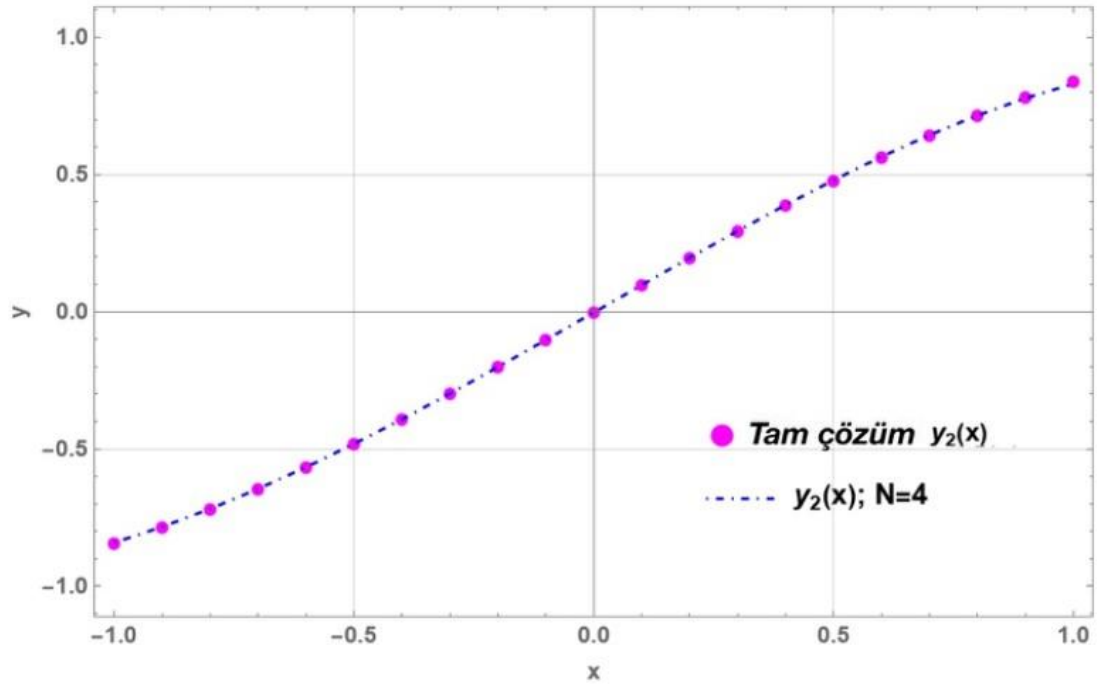
$$y_1'(x) + x^2 y_2'(0.5x - 0.1) + xy_1(x) = e^x + e^x x + x^2 \cos(0.5x - 0.1), \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$y_2'(x) - \cos(x) y_1'(0.5x + 0.5) + y_2(x) = \cos(x) - e^{0.5x+0.5} \cos(x) + \sin(x)$$

diferansiyel denklemler sisteminin [28]. $y_1(-1) = \exp(-1)$ ve $y_2(-1) = -\sin(1)$ başlangıç koşullarına göre Boubaker polinomları cinsinden çözümleri araştırılmaktadır. Burada Örnek 4.8 deki gibi matris sıralama tekniği kullanılmaktadır. Sorunun tam çözümlerinin kümesi $\{y_1(x), y_2(x)\} = \{e^x, \sin(x)\}$ 'yi temsil eder. Problemi rezidüel hata analiziyle birlikte ele alan önerilen yöntem, N=4 olan Boubaker polinom çözüm kümesini verir. Bu çözüm kümesi, tam çözüm kümesiyle birlikte Şekil 4.8.a'da ve Şekil 4.8.b'de gösterilmektedir. Yaklaşık çözüm kümesinin tam çözüm kümesiyle iyi bir uyum içinde olduğu gözlemlenebilir. Tablo 4.7.a ve 4.7.b'de mutlak ve düzeltilmiş mutlak hata değerleri Charlier serisi yöntemi (CSM) [28] ile karşılaştırılmıştır. Tablo 4.7.a ve 4.7.b'den, yöntemin kesinliğinin, yalnızca kesme sınırlarının N=4 ve M=6 alınarak rezidüel hata analizi yoluyla artırıldığı ifade edilebilir.



Şekil 4.8.a: Örnek 4.10 için $y_1(x) = e^x$ Tam çözüm N=4 için yaklaşık çözümün grafiği



Şekil 4.8.b: Örnek 4.10 için $y_2(x) = \sin(x)$ Tam çözüm ve N=4 için yaklaşık çözümün grafiği

Tablo 4.7.a: Örnek 4.10'daki yöntemlere göre mutlak ve düzeltilmiş mutlak hataların karşılaştırılması.

x_i	$ e_{1,4}(x_i) ;$ CSM $N=4$ [28]	$ e_{1,4}(x_i) ;$ $N=4$	$ e_{1,4,6}(x_i) ;$ $N=4, M=6$
-0.6	2.919E-03	2.919E-03	1.091E-05
-0.2	2.676E-03	2.676E-03	1.083E-05
0.2	7.269E-04	7.269E-04	3.361E-05
0.6	1.983E-03	1.983E-03	2.677E-05
1.0	1.068E-03	1.068E-03	3.507E-05

Tablo 4.7.b: Örnek 4.10'daki yöntemlere göre mutlak ve düzeltilmiş mutlak hataların karşılaştırılması.

x_i	$ e_{2,4}(x_i) ;$ CSM $N=4$ [28]	$ e_{2,4}(x_i) ;$ $N=4$	$ e_{2,4,6}(x_i) ;$ $N=4, M=6$
-0.6	1.6008E-03	1.6008E-03	8.1494E-06
-0.2	2.9928E-03	2.9928E-03	6.1559E-06
0.2	1.9825E-03	1.9825E-03	7.5462E-06
0.6	1.1841E-04	1.1841E-04	8.3122E-06
1.0	1.1410E-02	1.1410E-02	1.4256E-04

Örnek 4.11: Pantograf tipi üçüncü mertebeden neutral gecikmeli

$$y'''(x) = y(x) + y'\left(\frac{x}{2}\right) + y''\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}y'''\left(\frac{x}{4}\right) + g(x)$$

diferansiyel denkleminin $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, 0 \leq x \leq 1$ koşulları altındaki çözümünü araştıralım.

Burada (3.1) denklemine göre,

$$c = 1, P_0(x) = 0, P_1(x) = 1, P_2(x) = 1, P_3(x) = \frac{1}{2}, m = 3, q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{3}, q_3 = \frac{1}{4},$$

$$g(x) = -x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 21x$$

ifadeleri belirlenir.

$N=4$ için $0 \leq x \leq 1$ aralığında, sıralama noktaları

$$\left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1\right\}$$

olarak alınarak ve Kesim 3.1 deki tekniği takip ederek, (3.10) denklemine göre temel matris denklemi

$$\left(\mathbf{X}\mathbf{M}^3 - c\mathbf{X}\mathbf{M}^0 - \mathbf{X}\mathbf{D}\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{M} - \mathbf{X}\mathbf{D}\left(\frac{1}{3}\right)\mathbf{M}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{X}\mathbf{D}\left(\frac{1}{4}\right)\mathbf{M}^3 \right) \mathbf{H}\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olarak belirlenir, burada matrisler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 1/6 & 1/64 & 1/256 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 \\ 1 & 3/4 & 9/16 & 27/64 & 81/256 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^0 = \mathbf{I}(\text{birim matris})$$

$$\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\left(\frac{1}{2}\right) &= \text{diag} \left[1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \right] \\ \mathbf{D}\left(\frac{1}{3}\right) &= \text{diag} \left[1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{81} \right] \\ \mathbf{D}\left(\frac{1}{4}\right) &= \text{diag} \left[1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{256} \right] \end{aligned}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(0) \\ g\left(\frac{1}{4}\right) \\ g\left(\frac{1}{2}\right) \\ g\left(\frac{3}{4}\right) \\ g(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3959/768 \\ 241/24 \\ 3705/256 \\ 109/6 \end{bmatrix}$$

Koşullarının temel matris bağıntısı, (3.6) ile tanımlanan matris bağıntısını kullanarak artırılmış matris formunda aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= \mathbf{X}(0)\mathbf{H}\mathbf{A} = \mathbf{0} \\ y'(0) &= \mathbf{X}(0)\mathbf{M}\mathbf{H}\mathbf{A} = \mathbf{0} \\ y''(0) &= \mathbf{X}(0)\mathbf{M}^2\mathbf{H}\mathbf{A} = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} [\mathbf{U} \ ; \ \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Kesim 3.1 de kurulan Taylor-Boubaker matris yönteminin çözüm adımları problem uygulanarak $\mathbf{W}\mathbf{A}=\mathbf{G}$ temel matris denkleminin artırılmış formu

$$[\mathbf{W} \ ; \ \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 & 2 & 2 & | & 0 \\ -1 & -5/4 & -69/16 & 19/16 & 5495/768 & | & 3959/768 \\ -1 & -3/2 & -19/4 & 3/16 & 289/24 & | & 241/24 \\ -1 & -7/4 & -85/16 & -35/32 & 4217/256 & | & 3705/256 \\ -1 & -2 & -6 & -11/4 & 121/6 & | & 109/6 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

ve sonuç artırılmış matris formu

$$[\mathbf{W} ; \mathbf{G}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -5/4 & -69/16 & 19/16 & 5495/768 & 3959/768 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

olarak elde edilir. Bu sistemin çözüm matrisi

$$\mathbf{A} = [2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

ve problemin çözümü

$$y(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{H} \mathbf{A} = \mathbf{x}^4$$

olur ki bu tam çözümdür. Problem aynı zamanda $N=4$ için Lucas matris metodu [7] ile çözülmüş ve tam çözüm elde edilmiştir. Ancak aynı problem; Runge-Kutte metodu [74], Varyasyonel iterasyon metodu [6], Homotopy pertürbasyon metodu [75] ile çözüldüğünde sonuçlar tam çözüm olmayıp yaklaşık çözümler olduğu görülmektedir. Dolayısıyla burada sunulan Boubaker matris sıralama metodunun bahsedilen diğer metodlara göre oldukça etkili ve kullanışlı olduğu düşünülebilir.

Örnek 4.12: Birinci mertebeden değişken katsayılı lineer neutral tip

$$y'(x) + y(x) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)y\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)y'\left(\frac{x}{3}\right) = \cos x - \sin x$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin $y(0) = 1$ koşuluna göre

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

kesilmiş Boubaker seri formunda çözümlerini araştıralım.

Kesim 3.2'nin, (3.14) denklemine göre katsayı fonksiyonları, $m=1$ için,

$$Q_{00}(x) = 1, Q_{11}(x) = 1, Q_{01}(x) = Q_{10}(x) = 0, P_{00}(x) = \sin \frac{x}{3}, P_{11}(x) = \cos \frac{x}{2}, P_{01}(x) = P_{10}(x) = 0,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}, \tau_0 = 0, \alpha_1 = \frac{1}{3}, \tau_1 = 0,$$

olarak belirlenmiştir. Bu denklemin tam çözümünün de $y(x) = \cos x$ olduğu bilinmektedir.

Bu denklemin Temel matris denklemi, (3.17) ye göre

$$(Q_{00}XM^0 + Q_{11}XM + P_{10}XD(1/2,0)M^0 + P_{11}XD(1/3,0)M)HA = G$$

veya kısaca

$$WA = G \Rightarrow [W \ ; \ G]$$

olarak tanımlanır.

Kesim 3.1 de kurulan Taylor-Boubaker polinomlarına dayalı matris yönteminin çözüm adımları takip edilerek, N kesme sınırının N=4, N=5 ve N=6 değerleri için gerekli hesaplamalar yapılarak (3.20) ile oluşturulan artırılmış temel çözüm matrisler ve sonuçları, sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[W_4 \ ; \ G_4] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 2.0000 & 2.0000 & 2.0000 & -2.0000 & | & 1 \\ 1.0832 & 2.2526 & 2.8956 & 2.4766 & -2.0978 & | & 0.7215 \\ 1.1659 & 2.5104 & 3.9151 & 3.4687 & -1.7507 & | & 0.3982 \\ 1.2474 & 2.7733 & 5.0574 & 5.0702 & -0.4279 & | & 0.0501 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Bu sistemin çözümünden Boubaker kaysayıları

$$A_4 = [2.0781 \quad -0.0022 \quad -0.5004 \quad 0.0022 \quad 0.0387]$$

ve problemin N=4 için yaklaşık Boubaker polinom çözümü

$$\begin{aligned} y_4(x) &= X(x)HA_4 \\ &= 1.0000000000000005 - 0.500401066970181x^2 + 0.002188980776724x^3 \\ &\quad + 0.038664860704633x^4 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

$$[W_5 \ ; \ G_5] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 2.0000 & 2.0000 & 2.0000 & -2.0000 & -6.0000 & | & 1 \\ 1.0666 & 2.2017 & 2.7066 & 2.3430 & -2.0984 & -6.7379 & | & 0.7814 \\ 1.1329 & 2.4067 & 3.4925 & 3.0040 & -1.9748 & -7.6775 & | & 0.5316 \\ 1.1987 & 2.6149 & 4.3574 & 4.0309 & -1.3716 & -8.5269 & | & 0.2607 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & | & 1 \\ 1.3272 & 3.0412 & 6.3212 & 7.3746 & 2.4961 & -7.3926 & | & -0.3012 \end{bmatrix}$$

Bu sistemin çözümünde Boubaker katsayıları

$$A_5 = [2.0891 \quad -0.0058 \quad -0.4999 \quad -0.0045 \quad 0.0447 \quad -0.0034]$$

ve problemin N=5 için yaklaşık Boubaker polinom çözümü

$$\begin{aligned}
y_5(x) &= \mathbf{X}(x) \mathbf{H} \mathbf{A}_5 \\
&= 1.0000000000000001 + 6.661338147750939\text{E-}15x - 0.499869375034727x^2 \\
&\quad - 0.001088904741518x^3 + 0.044691726499186x^4 - 0.003443021219763x^5
\end{aligned}$$

olarak hesaplanmıştır.

$$\left[\mathbf{W}_6 ; \mathbf{G}_6 \right] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 2.0000 & 2.0000 & 2.0000 & -2.0000 & -6.0000 & 2.0000 & | & 1 \\ 1.0555 & 2.1678 & 2.5833 & 2.2650 & -2.0911 & -6.5967 & 0.6552 & | & 0.8202 \\ 1.1109 & 2.3380 & 3.2218 & 2.7454 & -2.0558 & -7.3547 & -1.0841 & | & 0.6178 \\ 1.1659 & 2.5104 & 3.9151 & 3.4687 & -1.7507 & -8.1418 & -3.3765 & | & 0.3982 \\ 1.2204 & 2.6851 & 4.6630 & 4.4629 & -1.0139 & -8.7013 & -6.1985 & | & 0.1675 \\ 1.2742 & 2.8620 & 5.4652 & 5.7556 & 0.3353 & -8.6358 & -9.2126 & | & -0.0678 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Bu sistemin çözümünde Boubaker katsayıları

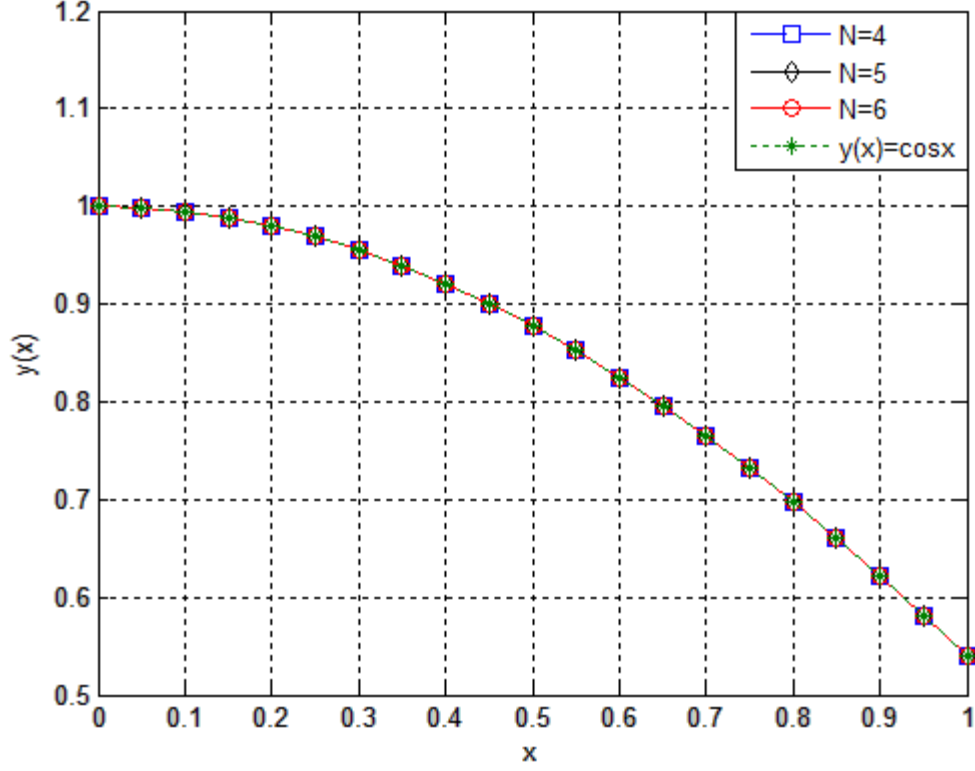
$$\mathbf{A}_6 = [2.0886 \quad -3.3678\text{e-}04 \quad -0.5038 \quad -2.1101\text{e-}04 \quad 0.0392 \quad -1.8260\text{e-}04 \quad -0.0013]$$

ve dolayısıyla problemin N=6 için yaklaşık Boubaker polinom çözümü

$$\begin{aligned}
y_6(x) &= \mathbf{X}(x) \mathbf{H} \mathbf{A}_6 \\
&= 1.0000000000000185 - 4.973799150320701\text{e-}14x - 0.499997374521662x^2 \\
&\quad - 2.841283071575163\text{e-}05x^3 + 0.041774845664754x^4 - 1.825982496157508\text{e-}04x^5 \\
&\quad - 0.001264656834586x^6
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Burada farklı kesme sınırları için verilen denklem çözülmüş ve sonuçları ile ilgili karşılaştırmalar tam çözüm ve N=4, 5 ve 6 için Tablo 4.8.a da yapılmıştır. Aynı çözümler Şekil 4.9 da da N kesme sınırı arttıkça tam çözüm üzerinde çakıştıkları görülmektedir. Tablo 4.8.b de ise tam çözüm ile N=4, 5 ve 6 için mutlak hatalarının karşılaştırılması yapılmıştır.



Şekil 4.9: Örnek 4.12 için $y(x)=\cos x$ ve $N=4, 5$ ve 6 için yaklaşık çözümlerin grafiği

$N = 4, 5, 6$ için ortalama hataların üst sınırı aşağıdaki gibidir.

$$\bar{R}_4 = \int_0^1 \frac{|R_4(x)|}{1-0} dx = 1.63 \times 10^{-4}.$$

$$\bar{R}_5 = \int_0^1 \frac{|R_5(x)|}{1-0} dx = 1.57 \times 10^{-5},$$

$$\bar{R}_6 = \int_0^1 \frac{|R_6(x)|}{1-0} dx = 5.39 \times 10^{-7},$$

Tablo 4.8.a: Örnek 4.12 nin tam çözüm $y(x) = \cos x$ ile N=4,5 ve 6 için sonuçları

x_i	$y(x_i) = \cos x_i$	N=4	N=5	N=6
0.0	1	1	1	1
0.1	0.995004165	0.995002045	0.995004652	0.995004172
0.2	0.980066577	0.980063333	0.980066919	0.980066578
0.3	0.955336489	0.955336192	0.955335992	0.955336480
0.4	0.921060994	0.921065744	0.921060062	0.921060988
0.5	0.877582561	0.877589910	0.877582182	0.877582566
0.6	0.825335614	0.825339402	0.825336140	0.825335625
0.7	0.764842187	0.764837731	0.764842327	0.7648422064
0.8	0.696706709	0.696701202	0.696703603	0.6967067537
0.9	0.621609968	0.621638918	0.62160117	0.6216099770
1.0	0.540302305	0.540452775	0.540290426	0.5403018032

Tablo 4.8.b: Örnek 4.12 nin tam çözüm $y(x) = \cos x$ mutlak hata fonksiyonlarının N=4,5,6 için karşılaştırılması

x_i	$y(x_i) = \cos x_i$	N=4 $ e_4(x_i) $	N=5 $ e_5(x_i) $	N=6 $ e_6(x_i) $
0.0	1	0	0	1.85E-13
0.1	0.995004165	2.12E-06	4.87E-07	6.96E-09
0.2	0.980066577	3.24E-06	3.41E-07	4.92E-06
0.3	0.955336489	2.97E-07	4.97E-07	9.38E-09
0.4	0.921060994	4.75E-06	9.32E-07	6.14E-09
0.5	0.877582561	7.35E-06	3.80E-07	4.27E-09
0.6	0.825335614	3.79E-06	5.25E-07	1.04E-08
0.7	0.764842187	4.46E-06	1.40E-07	1.91E-08
0.8	0.696706709	5.51E-06	3.11E-06	4.44E-08
0.9	0.621609968	2.89E-05	8.80E-06	8.72E-09
1.0	0.540302305	1.50E-04	1.19E-05	5.03E-07

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yüksek mertebeden gecikmeli neutral fonksiyonel diferansiyel ve integro diferansiyel denklemleri birçok matematikçi, fizikçi ve mühendis tarafından ilgi ile araştırılmaktadır. Bu tip denklemlerin analitik çözümlerini bulmak oldukça zor veya mümkün değildir. Bu nedenle yaklaşık çözümlere gerek duyulmaktadır. Bu amaçla yaptığımız çalışmada, karışık koşullar altında rezidüel (kalan) hata tahminli yüksek mertebeden değişken katsayılı neutral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için, Boubaker serisi ve sıralama noktalarına dayalı “**Boubaker matris - sıralama yöntemi**” adı verilen bir polinom yaklaşım tekniği geliştirilmiştir. Elde edilen bulgular yöntemin, problemler üzerinde doğru ve etkili bir biçimde çalıştığını göstermektedir.

Ayrıca, yöntemin uygulanabilirliğini ve sonuçların doğruluğunu göstermek için kalan fonksiyona ve Ortalama Değer Teoremine dayalı bir hata tahmini yapılmıştır. Tablolardan ve şekillerden, hata tahminleri ile beraber sunulan yöntemin etkili olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, problemin tam çözümü bilinmediği durumlarda bile, çözümün hata üst sınırı yaklaşık olarak kalan fonksiyon aracılığıyla tahmin edilebilmektedir. Diğer yandan, bu çalışmada problemlerin elde edilen yaklaşık çözümlerinin sayısal değerleri ile tam çözümlerinin karşılaştırmalarından, önerilen yöntemin oldukça basit ve bilgisayar programlamasına uyumlu olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak, sunulan matris - sıralama yöntemin uygulanabilirliği görülmüş, bilgisayarla elde edilen sonuçlar ile doğruluğundan emin olunmuştur. Buna göre, önerilen yöntemin gecikmeli fonksiyonel diferansiyel, diferansiyel-fark, gecikmeli integro-diferansiyel denklemlerin yanı sıra, bazı düzenlemeler ile lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini araştırmak için de etkili bir yöntem olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Iserles, A. (1997). On Neutral Functional-Differential Equations with Proportional Delays, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 207(1) ,73-95.
- [2] Bellen, A. & Guglielmi, N. (2009). Solving neutral delay differential equations with state-dependent delays, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 229(2), 350–362.
- [3] Wang, W., Zhang, Y. & Li, S. (2009). Stability of continuous Runge-Kutta-type methods for nonlinear neutral delay-differential equations, *Applied Mathematical Modelling*, 33(8), 3319-3329.
- [4] Bhrawy, A. H., Assas, L. M., Tohidi, E. & Alghamdi, M. A. (2013). A Legendre-Gauss collocation method for neutral functional-differential equations with proportional delays, *Advances in Difference Equations*, 63.
- [5] Jackiewicz, Z. & Lo, E. (2006). Numerical solution of neutral functional differential equations by Adams methods in divided difference form, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 189(1-2), 592–605.
- [6] Chen, X. & Wang, L. (2010). The variational iteration method for solving a neutral functional differential equation with proportional delays, *Computers & Mathematics with Applications*, 59(8), 2696-2702.
- [7] Gümgüm S., Baykuş-Savaşaneril N, Kürkçü Ö K, & Sezer M, (2020). Lucas polynomial solution for neutral differential equations with propotional delays, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 10(1), 259-269.
- [8] Chenga X., Chen Z & Zhang Q. (2015). An approximate solution for a neutral functional–differential equation with proportional delays, *Applied mathematics and Computation*, 260, 27–34.
- [9] Ockendon, J.R. & Tayler, A.B. (1971). The dynamics of acurrentc ollection system for an electric locomotive, *Proceedings of the Royal Society of London*, 322(1551), 447–468.
- [10] Fox, L., Mayers, D.F., Ockendon, J.R. & Tayler, A.B. (1971). On a function differential equation, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 8(3), 271-307.
- [11] Ajello, W.G., Freedman, H.I. & Wu, J. (1992). A model of stage structured population growth with density depended time delay, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 52(3), 855–869.
- [12] Wang, W. S. & Li, S. F. (2007). On the one-leg θ -methods for solving nonlinear neutral functional differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 193(1), 285-301.
- [13] Kuang, Y. & Feldstein, A. (1990). Monotonic and Oscillatory solutions of a linear neutral delay equations with infinite Lag, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 21(6), 1633-1641.
- [14] Raffoul, Y. N. (2004). Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed point theory, *Mathematical and Computer Modelling*, 40(7-8), 691-700.
- [15] Cahlon, B. & Schmidt, D. (2007). Stability criteria for certain high even order delay differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 334(2) ,859-875.
- [16] Mollaoğlu, T. (2017). Volterra tipi gecikmeli fonksiyonel integro-diferansiyel denklemler için Gegenbauer Polinom Yaklaşımı, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı. (Yüksek Lisans Tezi).

- [17] Gümgüm S., Baykuş N., Kürkçü Ö. K. & Sezer M. (2020). Lucas polynomial solution of nonlinear differential equations with variable delays, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 49(2), 553-564.
- [18] Kürkçü Ö. K. (2023). A streamlined numerical method to treat fractional nonlinear terminal value problems with multiple delays appearing in biomathematics, *Computational and Applied Mathematics*; 41(74), 20 pages.
- [19] Yıldız, G. & Sezer, M. (2019). Truncated Bell series approach to solve systems of generalized delay differential equations with variable coefficients, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 11, 105-113.
- [20] Aykotalp, E. Z. & Sezer, M. (2019). Boubaker collocation method for neutral functional-differential equations with proportional delays, *3rd International Students Science Congress Proceedings*, 335-343, 3-4 May, İzmir.
- [21] Balasubramaniam, P., Krishnasamy, R. & Rakkiyappan, R. (2012). Delay-dependent stability of neutral systems with time-varying delays using delay-decomposition approach, *Applied Mathematical Modelling*, 36(5), 2253–2261
- [22] Tian, J., Xiong, L., Liu, J. & Xie, X. (2009). Novel delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with time-varying delay, *Chaos, Solitons and Fractals*, 40(4), 1858–1866.
- [23] Bellen, A., Guglielmi, N & Ruehli, A. E. (1999). Methods for Linear Systems of Circuit Delay Differential Equations Of Neutral Type, *Ieee Transactions On Circuits And Systems—I: Fundamental Theory And Applications*, 46(1), January, 212-216.
- [24] Rakkiyappan, R., Balasubramaniam, P. & Krishnasamy, R. (2011). Delay dependent stability analysis of neutral systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(8), 2147–2156.
- [25] Qiu, F., Cui, B.T. & Ji, Y. (2010). Further Results on Robust Stability of Neutral System with Mixed Time-Varying Delays and Nonlinear Perturbations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11(2), 895-906.
- [26] Pin-Lin L. (2016). Improved results on delay-interval-dependent robust stability criteria for uncertain neutral-type systems with time-varying delays, *ISA Transactions*, 60, 53–66.
- [27] Kuang, J. Tian, H. Shan, K. (2011). Asymptotic stability of neutral differential systems with many delays, *Applied Mathematics and Computation* 217(24), 10087–10094.
- [28] Kürkçü, Ö. K. & Sezer, M. (2022). Charlier Series Solutions of Systems of First Order Delay Differential Equations with Proportional and Constant Arguments, *Scientific Research Communications*, 2(1), 1-11.
- [29] Cordero, L. F. & Escalante, R. (2007), Segmented Tau approximation for a parametric nonlinear neutral differential equation, *Applied Mathematics and Computation*, 190(1), 866–881.
- [30] Tarakçı, M. Özel, M. & Sezer, M. (2020). Solution of nonlinear ordinary differential equations with quadratic and cubic terms by Morgan-Voyce matrix-collocation method, *Turkish Journal of Mathematics*, 44(3), 906-918.
- [31] Erdem Biçer, K. & Sezer, M. (2019). A computational method for solving differential equations with quadratic nonlinearity by using Bernoulli polynomials, *Thermal Science*, 23(1), 275-283.
- [32] Baykuş Savaşaneril, N. & Sezer, M. (2017). Hybrid Taylor-Lucas Collocation Method for Numerical Solution of High- Order Pantograph Type Delay Differential Equations with Variables Delays, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 11(6), 1795-1801.

- [33] Yalçınbaş, S., Aykotalp, E. Z. & Sezer, M. (2016). Boubaker Polynomial Approach for Solving High-Order Linear Differential-Difference Equations with Residual Error Estimation, *Mühendis Beyinler Dergisi*, 1(1), 12-22.
- [34] Oğuz, C. (2017). Delay integro-diferansiyel Denklem Sistemlerinin Sayısal çözümleri ve Uygulamaları için Chelyshkov Matris Metodu, Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Manisa, (Doktora Tezi).
- [35] Yüzbaşı, Ş., Gök, E. & Sezer, M. (2016). A numerical method for solving systems of higher order linear functional differential equations, *Open Physics*, 14(1), 15–25.
- [36] Ramadan, M. A., Aziz El-Sherbeiny A-E. & Sherif, M. N. (2009). The use of polynomial spline functions for the solution of system of second order delay differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 86(7), 1167-1181.
- [37] Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. & Sezer, M. (2011). Numerical solutions of systems of linear Fredholm integro-differential equations with Bessel polynomial bases, *Computers and Mathematics with Applications*, 61(10), 3079-3096.
- [38] Akyüz Daşcıoğlu, A. & Sezer, M. (2005). Chebyshev polynomial solutions of systems of higher-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equations, *Journal of the Franklin Institute*, 342(6), 688–701.
- [39] Gökmen, E. & Sezer, M. (2013). Taylor collocation method for systems of high-order linear differential–difference equations with variable coefficients, *Ain Shams Engineering Journal*, 4(1), 117–125.
- [40] Gökmen, E. Isık R. O. & Sezer M. (2015). Taylor collocation approach for delayed Lotka Volterra predator–prey system, *Applied Mathematics and Computation*, 268, 671-684.
- [41] Erdem Biçer, K. Sezer, M. & Kazaz, M. (2021). Numerical Solutions of System of First Order Normalized Linear Differential Equations by Using Bernoulli Matrix Method, *Celal Bayar University Journal of Science*, 17(2), 153-158.
- [42] Ağırman Aydın, T. Çayan, S. Sezer M. & Mağden, A. (2020). On a curve and a system, *GSC Advanced Research and Reviews*, 05(03), 030–052.
- [43] Gürbüz, B. & Sezer, M. (2020). Laguerre matrix-collocation method to solve systems of pantograph type delay differential equations, *4th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES 2019)*, 121-132.
- [44] Yıldız, G. & Sezer, M. (2019). A Truncated Bell Series Approach to Solve Systems of Generalized Delay Differential Equations with Variable Coefficients, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 11, 105-113.
- [45] Çetin, M. Gürbüz, B. & Sezer, M. (2018). Lucas Collocation Method For System Of High-Order Linear Functional Differential Equations, *Journal Of Science And Arts*, 4(45), 891-910.
- [46] Yüzbaşı, Ş. & Sezer, M. (2016). An exponential approach for the system of nonlinear delay integro-differential equations describing biological species living together, *Neural Computing and Applications*, 27, 769–779.
- [47] Oğuz, C., Sezer, M. & Denk Oğuz, A. (2015). Chelyshkov collocation approach to solve the systems of linear functional differential equations, *New Trends in Mathematical Sciences*, 3(4), 83-97.
- [48] Çetin, M Sezer, M. & Güler, C. (2015). Lucas Polynomial Approach for System of High-Order Linear Differential Equations and Residual Error Estimation, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 625984, 14 pages.
- [49] Yüzbaşı, Ş. & Sezer, M. (2013). An exponential matrix method for solving systems of linear differential equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36(3), 336–348.

- [50] Gülsu, M. & Sezer, M. (2006). Taylor collocation method for solution of systems of high-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 83(4), 429-448.
- [51] Çayan, S. Kocayiğit, H. & Sezer, M. (2019). A Numerical Approach for Solving the System of Differential Equations Related to the Spherical Curves in Euclidean 3-Space, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 11(2), 84–96.
- [52] Abdel-Halim Hassan, I.H. (2008). Application to differential transformation method for solving systems of differential equations, *Applied Mathematical Modelling*, 32(12), 2552–2559.
- [53] Tatari, M. & Dehghan, M. (2009). Improvement of He’s variational iteration method for solving systems of differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 58(11-12), 2160–2166.
- [54] Boubaker, K. (2007). On Modified Boubaker Polynomials: Some Differential and Analytical Properties of the New Polynomials Issued from an Attempt for Solving Bi-varied Heat Equation, *Trends in Applied Sciences Research*, 2(6), 540–544.
- [55] Labiadh, H. & Boubaker, K. (2007). A Sturm-Liouville shaped characteristic differential equation as a guidet establish a quasi-polynomial expression to the Boubaker polynomials, *Differential Equations and Control Processes*, 2, 117-133.
- [56] Oyodum, O. D., Awojoyogbe, O. B., Dada, M. K. & Magnuson, J. N. (2009). On the earliest definition of the Boubaker polynomials, *The European Physical Journal Applied Physics*, 37, 105-109.
- [57] Akkaya T. & Yalçınbaş S. (2012). A numerical approach for solving linear integro differential difference equations with Boubaker polynomial bases, *Ain Shams Engineering Journal*, 3(2), 153-161.
- [58] Erdem Biçer, K. & Sezer, M. (2017). Bernoulli Matrix-Collocation Method for solving General Functional Integro-Differential Equations with Hybrid Delays, *Journal of Inequalities and Special Functions*, 8(3), 85-99.
- [59] Erdem, K., Yalçınbaş, S. & Sezer, M. (2013). A Bernoulli approach with residual correction for solving mixed linear Fredholm integro-differential-difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 19(10), 1619-1631.
- [60] Kürkçü, Ö. K., Aslan, E. & Sezer, M. (2019). An inventive numerical method for solving the most general form of integro-differential equations with functional delays and characteristic behavior of orthoexponential residual function, *Computational and Applied Mathematics*, 38(34), 17pages.
- [61] Kürkçü Ö. K., Aslan E., Sezer M. & İlhan Ö. (2018). A numerical approach technique for solving generalized delay integro-differential equations with functional bounds by means of Dickson polynomials, *International Journal of Computational Methods*, 15(5):1850039, 24 pages.
- [62] Kürkçü Ö. K., Aslan E., & Sezer M. (2016). A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential difference equations using Dickson polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, 276, 324-339.
- [63] Kürkçü Ö. K., Aslan E., Sezer M. (2017). A novel collocation method based on residual error analysis for solving integrodifferential equations using hybrid Dickson and Taylor polynomials, *Sains Malaysiana*, 46(2), 335-347.
- [64] Kürkçü Ö. K., Aslan E., & Sezer M. (2017). A numerical method for solving some model problems arising in science and convergence analysis based on residual function, *Applied Numerical Mathematics*, 121, 134-148.
- [65] Gümgüm, S., Baykuş Savaşaneril, N., Kürkçü, Ö. K. & Sezer, M. (2018). A numerical technique based on Lucas polynomials together with standard and Chebyshev-Lobatto collocation points for solving functional integro-differential

equations involving variable delays, *Sakarya University Journal of Science*, 22(6), 1659-1668.

[66] Elmacı, D., Baykuş Savaşaneril, N., Dal, F. & Sezer, M. (2022). On the application of Euler's method to linear integro differential equations and comparison with existing methods, *Turkish Journal of Mathematics*, 46(1), 99-122.

[67] Yalçınbaş, S. & Erdem, K. (2014). A New Approximation Method for the Systems of Nonlinear Fredholm Integral Equations, *Applied Mathematics and Physics*, 2(2), 40-48.

[68] Yalçınbaş, S., Erdem Biçer, K. & Taştekin D. (2016). Fermat collocation method for the solutions of nonlinear system of second order boundary value problems, *New Trends in Mathematical Science*, 4(1), 87-96.

[69] Baykuş Savaseneril, N. & Sezer, M. (2016), Laguerre polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations, *New Trends in Mathematical Sciences*, 4(2), 273-284.

[70] Baykuş, N. & Sezer, M. (2017), Hybrid Taylor-Lucas collocation method for numerical solution of high-order pantograph type delay differential equations with variables delays, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 11(6), 1795-1801.

[71] Elmacı, D. & Baykuş Savaşaneril, N. (2021), Delay integro differential equations solutions with Euler polynomials method, *New Trends in Mathematical Sciences*, 9(3), 7-20.

[72] Mathews, J. H. Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, *Prentice-Hall International*, New Jersey, United States, 1992, 646s.

[73] Türker, E. S. & Can, E. (1992). Bilgisayar Uygulamaları Sayısal Analiz Yöntemleri, *Değişim Yayınları*, İstanbul, Türkiye, 460 s.

[74] Muhammad, B., Norhayati, R., Norazaliza Mohd, J. & İftikhar, A. (2020). Numerical Solution Of Higher Order Functional Differential Equation By Collocation Method Via Hermite Polynomials, *European Journal of Molecular & Clinical Medicine*, 8(7), 546-558.

[75] Aykutağp, E. Z. (2018). Fonksiyonel Diferansiyel, İntegral Ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Boubaker Polinom Çözümleri Ve Uygulamaları, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı. (Yüksek Lisans Tezi).