

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CALDERON-ZYGMUND OPERATÖRÜNÜN MULTİLİNEER
KOMÜTATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ DEĞİŞKEN ÜSLÜ
MORREY UZAYLARINDAKİ SINIRLILIĞI

Okan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CALDERON-ZYGMUND OPERATÖRÜNÜN MULTİLİNEER KOMÜTATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ DEĞİŞKEN ÜSLÜ MORREY UZAYLARINDAKİ SINIRLILIĞI

Okan ÖZTÜRK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde ana teoremlerin ispatlarında kullanacağımız temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde değişken üslü Lebesgue uzayları üzerinde ilk olarak multilineer kesirli integrallerin $[b, I_\alpha]_j$ multilineer komütatörleri ve ardından multilineer Calderon-Zygmund singüler integral operatörlerinin $[b, T]_j$ multilineer komütatörlerine göre BMO 'nun birer karakterizasyonu verilmiştir. Dördüncü bölümde $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ ve $b_i \in BMO$, $i = 1, \dots, m$ olmak üzere $T_{\vec{b}}$ Calderon-Zygmund multilineer komütatör operatörü için lokal Guliyev eşitsizliğinin zayıf ve kuvvetli biçimleri ispat edildi. Daha sonra $T_{\vec{b}}$ Calderon-Zygmund multilineer komütatör operatörününün $M^{p(\cdot), \varphi_1}$ genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzayından diğer bir $M^{p(\cdot), \varphi_2}$ ye sınırlılığı ispat edilmiştir.

Mayıs 2024, 42 sayfa

Anahtar Kelimeler: Calderon-Zygmund Operatörü, Multilineer Komütatör, Genelleştirilmiş Değişken Üslü Morrey Uzayları, BMO Uzayları..

ABSTRACT

Master Thesis

MULTILINEAR COMMUTATORS OF CALDERON-ZYGMUND OPERATOR IN GENERALIZED VARIABLE EXPONENT MORREY SPACES

Okan ÖZTÜRK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, the basic concepts that we will use in the proofs of the main theorems are included. In the third chapter, some characterizations of BMO in terms of multilinear commutators of multilinear fractional integrals $[b, I_\alpha]_j$ and multilinear commutators of multilinear Calderon-Zygmund singular integrals $[b, T]_j$ on variable Lebesgue spaces. In the fourth chapter, firstly the strong and weak types local Guliyev inequalities for Calderon-Zygmund multilinear commutators $T_{\vec{b}}$ are proved, where $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ and $b_i \in BMO$ for $i = 1, \dots, m$. Then the boundedness of the multilinear commutator of Calderón-Zygmund operator $T_{\vec{b}}$ from one generalized variable exponent Morrey space $M^{p(\cdot), \varphi_1}$ to another $M^{p(\cdot), \varphi_2}$ is proved.

May 2024, 42 pages

Key Words: Calderon-Zygmund Operator, Multilinear Commutator, Generalized Variable Exponent Morrey Spaces, BMO Spaces.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans sürecim boyunca hoşgörüsü, özverisi ve engin tecrübesi ile desteğini esirgemeyen, yönlendirmeleri ile elinden gelen her türlü yardımı ve katkıyı sunan danışmanım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ayhan Şerbetçi'ye (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), lisans eğitimim sürecinde, çalışmamın ve benim bugünlere gelmemde önemli katkısı olan kıymetli Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma, her adımda ve aldığım her kararda yanımda olan, hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan ve bugünlere gelmemdeki en büyük destekçim olan canım aileme, her sürecimde yanımda olan, desteğini esirgemeyen, sabırla beni motive eden, her zaman bana olan inancı ile beni gururlandıran kıymetli hayat arkadaşıma, sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu tez "TÜBİTAK 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Okan ÖZTÜRK
Ankara, Mayıs 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Lebesgue Uzayları.....	4
2.2 Değişken Üslü Lebesgue Uzayları	5
2.3 Morrey Uzayları	7
2.4 Genelleştirilmiş Değişken Üslü Morrey Uzayları	7
2.5 BMO Uzayları.....	8
3. DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA BAZI MULTİLİNEER KOMÜTATÖRLER	9
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ DEĞİŞKEN ÜSLÜ MORREY UZAYLARINDA CALDERON-ZYGMUND MULTİLİNEER KOMÜTATÖR OPERATÖRLERİ	27
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ	42

SİMGELER DİZİNİ

$T_{\mathbf{b}}$	Calderon-Zygmund Operatörü
BMO	Sınırlı Ortalama Salınım
$M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey Uzayları
M	Hardy-Littlewood Maximal Operatörü
$L^{p,\kappa}(w)$	Ağırlıklı Morrey Uzayları
$L^{p(\cdot)}$	Değişken Üslü Lebesgue Uzayı
$M^{p(\cdot),\varphi}$	Genelleştirilmiş Değişken Üslü Morrey Uzayı
H_w^*	Ağırlıklı Hardy Operatörü



1. GİRİŞ

T bir Calderon-Zygmund singüler operatörü ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Coifman ve Weiss'in (1976) iyi bilinen bir sonucu, eğer T Calderon-Zygmund operatörü ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ise o zaman $[b, T]f = T(bf) - bT(f)$ komütatör operatörünün $1 < p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlılığını belirtir.

Komütatörler süreksiz katsayılı bir çok non-divergence eliptik denklemlerin çalışmalarında oldukça faydalıdır (Chireza vd. 1993, Di Fazio ve Ragusa 1993). Jason (1978) ve Uchiyama (1978) bağımsız olarak BMO 'nun karakterizasyonunu singüler integral operatörlerin komütatörleri açısından oluşturdular. Ek olarak, Chanillo (1982) kesirli integral operatörlerin komütatörlerini kullanarak BMO fonksiyonlarını karakterize etmiştir. Perez ve Gonzalez (2002), Chen ve Xue (2010) ile Perez ve Torres (2003) multilineer komütatörleri genelleştirdi ve ağırlıklı Lebesgue tahminlerini ispatladı. Son zamanlarda, Chaffee (2015) BMO 'yu noktasal çarpma ile çeşitli lineer singüler integral operatörlerin komütatörlerinin sınırlılığı açısından karakterize etti. Calderon-Zygmund operatörlerinin komütatörleri, ikinci mertebeden eliptik, parabolik ve ultraparabolik, kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin düzenliliğinin incelenmesinde önemli rol oynar.

Klasik Morrey uzayları ilk olarak Morrey (1938) tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışını incelerken ortaya çıkarıldı. Guliyev (1994), Mizuhara (1991), Nakai (1994) $M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarını tanıttılar. Değişken üslü fonksiyon uzayları son yıllarda büyük ilgi görmektedir. Bu uzaylar sadece teoride klasik fonksiyon uzaylarının genelleştirmeleri olarak değil, aynı zamanda akışkanlar dinamiği, elastisite dinamiği ve standart olmayan büyümeli diferensiyel denklemler alanlarında geniş uygulamalara sahiptir.

\mathbb{R}^n üzerinde kompakt destekli tüm C^∞ fonksiyonlarının kümesini D ile gösteririz.

$\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$, her $f_i \in D$ ve her $x \notin \cap_1^m \text{supp}(f_i)$ için m -lineer Calderon-Zygmund operatörü

$$T(\vec{f})(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} K(x, y_1, \dots, y_m) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y}$$

ile tanımlanır, burada $d\vec{y} = dy_1 \dots dy_m$ dir. Eğer bazı $1 < p_1, \dots, p_m < \infty$ için

$$T : L^{p_1} \times \dots \times L^{p_m} \rightarrow L^p$$

ise T ye bir m -lineer Calderon-Zygmund operatörü denir. T bir m -lineer integral operatör ve b bir lokal integrallenebilir fonksiyon olmak üzere herhangi bir $1 \leq j \leq m$ için multilineer integral operatörünün $[b, T]_j$ multilineer komütatörünü

$$[b, T]_j(\vec{f})(x) := bT(\vec{f})(x) - T(f_1, \dots, bf_j, \dots, f_m)(x)$$

ile tanımlarız.

Yine $I_\alpha(\vec{f})$ multilineer kesirli integral operatörünün $[b, I_\alpha]_j$ multilineer komütatörü de

$$[b, I_\alpha]_j(\vec{f})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(b(x) - b(y_j)) \prod_{i=1}^m f_i(y_i)}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{nm-\alpha}} \prod_{i=1}^m dy_i$$

ile tanımlanır, burada multilineer kesirli integral operatör

$$I_\alpha(\vec{f})(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{\prod_{i=1}^m f_i(y_i)}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{nm-\alpha}} \prod_{i=1}^m dy_i$$

ile tanımlanır.

Diğer taraftan

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y)dy$$

Calderon-Zygmund singüler integral operatörlerinin multilineer komütatörleri

$$T_{\vec{b}}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m [b_j(x) - b_j(y)] K(x, y)f(y)dy$$

ile tanımlanır, burada $1 \leq j \leq m$ için $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ ve b_j ler lokal integrallenebilir fonksiyonlar ve $K(x, y)$ Calderon-Zygmund çekirdeğidir. $m = 1$ için Coifman ve Weiss (1976) tarafından tanımlanan klasik komütatör elde edilir.

Değişken üslü Lebesgue uzayları ilk kez 1931'de Orlicz tarafından tanıtılmıştır. Genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzayları Guliyev vd. (2010) tarafından tanıtıldı.

Genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzayları $f \in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|f\|_{M^{p(\cdot), \varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi(x, r)^{-1} r^{-\theta_{p(x, r)}} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x, r))} < \infty$$

olacak biçimde tüm fonksiyonların uzayıdır, burada

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x,r))} \equiv \|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

dir.

Tezin ikinci bölümünde ana teoremlerin ispatlarında kullanacağımız temel kavramlara yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde Cruz-Uribe ve Wang (2014) tarafından geliştirilen Rubio de Francia ekstrapolasyon teorisini kullanarak, değişken Lebesgue uzayları üzerinde komütatörlerin bazı norm eşitsizlikleri ele alınacaktır. Yine bu bölümde değişken üslü Lebesgue uzayları üzerinde ilk olarak multilineer kesirli integrallerin $[b, I_\alpha]_j$ multilineer komütatörleri ve ardından multilineer Calderon-Zygmund singüler integral operatörlerinin $[b, T]_j$ multilineer komütatörlerine göre BMO 'nun birer karakterizasyonu verilmiştir. Şöyle ki $[b, I_\alpha]_j$ nin $L^{p_1(\cdot)} \times L^{p_2(\cdot)} \times \dots \times L^{p_m(\cdot)}$ den $L^{q(\cdot)}$ ya sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $b \in BMO$ olmasıdır. Benzer şekilde $[b, T]_j$ nin $L^{p_1(\cdot)} \times \dots \times L^{p_m(\cdot)}$ den $L^{p(\cdot)}$ ya sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $b \in BMO$ olmasıdır.

Tezin dördüncü bölümünde $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ ve $b_i \in BMO$, $i = 1, \dots, m$ olmak üzere $T_{\vec{b}}$ Calderon-Zygmund multilineer komütatör operatörü için lokal Guliyev eşitsizliğinin zayıf ve kuvvetli biçimleri ispat edildi. Daha sonra $T_{\vec{b}}$ Calderon-Zygmund multilineer komütatör operatörünün $M^{p(\cdot), \varphi_1}$ genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzayından diğer bir $M^{p(\cdot), \varphi_2}$ ye sınırlılığı ispat edilmiştir.

Bu tez boyunca, $A \lesssim B$ ile uygun büyüklüklerden bağımsız pozitif C sabitli $A \leq CB$ yi kastediyoruz. $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ ise bir $A \approx B$ yazarız ve A ve B eşdeğerdir deriz.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Lebesgue Uzayları

\mathbb{R}^n , $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ normu ile $x = (x_1, \dots, x_n)$ noktalarının n-boyutlu Öklid uzayı olsun. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için $B(x, r)$, yarıçapı r olan x merkezli açık yuvarı belirtir. ${}^cB(x, r)$, $B(x, r)$ yuvarının tümleyenini ve $|B(x, r)|$, $B(x, r)$ nin Lebesgue ölçüsünü gösterelim.

$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ve $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^p dx < \infty \right\}$$

sınıfına mutlak değerin p . kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir.

h fonksiyonunun L_p normu

$$\|h\|_p = \left\{ \begin{array}{l} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |h(x)|, \quad p = \infty \end{array} \right\}$$

ile tanımlanır ve bu norm ile L_p ye Lebesgue uzayı denir, burada

$$\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |h(x)| = \inf \{ \lambda : |\{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \lambda\}| = 0 \}$$

dir.

L_p uzaylarının ara kesiti boş değildir. Yani her $p, q \geq 1$ için $L_p \cap L_q \neq \emptyset$ dır.

Tanım 2.1 $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)| \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

ile tanımlanır. $0 \leq \alpha < n$ olmak üzere, $M_\alpha f$ kesirli maksimal fonksiyonu

$$(M_\alpha f)(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

ile tanımlanır. $\alpha = 0$ alındığında Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu elde edilir. Eşdeğer olarak, Q küpleri üzerinden $M_\alpha f$ kesirli maksimal fonksiyonu

$$M_\alpha f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{\frac{1-\alpha}{n}}} \int_Q |f(y)| dy$$

ile tanımlanır, burada supremum kenarları eksenlere paralel olan tüm Q küpleri üzerinden alınmaktadır.

Tanım 2.2 Ayrıca, $M^\sharp f$ keskin maksimal fonksiyonu

$$M^\sharp(f)(x) = \sup_{Q \ni x} \inf_c \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - c| dy \approx \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.3 (Riesz Potansiyeli) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere I_α Riesz potansiyeli

$$(I_\alpha f)(x) = c_{n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

ile tanımlanır (Stein 1970).

2.2 Değişken Üslü Lebesgue Uzayları

Tanım 2.4 Açık bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesi ve ölçülebilir bir $p(\cdot) : E \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu verilsin. $p'(\cdot)$, $p'(\cdot) = p(\cdot)/(p(\cdot) - 1)$ şeklinde tanımlanan eşlenik üstür. Ölçülebilir bir $E \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi için

$$p^-(E) = \text{ess inf} \{p(x) : x \in E\}$$

ve

$$p^+(E) = \text{ess sup} \{p(x) : x \in E\}$$

ifadelerini tanımlayalım. Özel olarak, $p^- = p^-(\mathbb{R}^n)$ ve $p^+ = p^+(\mathbb{R}^n)$ şeklinde gösteririz.

Tanım 2.5 $P(E)$ ile $p^-(E) > 1$, $p^+(E) < \infty$ olacak şekilde tüm $p(\cdot) : E \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonların kümesini gösteririz. Benzer şekilde $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak biçimde tüm ölçülebilir $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonların kümesini $P(\mathbb{R}^n)$

ile gösteririz. $0 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$ olacak şekilde tüm ölçülebilir $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonların kümesini $P^0(\mathbb{R}^n)$ ile gösteririz. $1 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde tüm ölçülebilir $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonlar kümesini $P(\mathbb{R}^n)$ ile gösteririz.

Tanım 2.6 $\mathcal{B}(X, Y)$, bir X Banach uzayından bir Y Banach uzayına tüm sınırlı alt lineer operatörlerin sınıfı olsun ve $\|A\|_{\mathcal{B}(X, Y)}$, $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ nin operatör normunu göstereyin. Özel olarak, $\|A\|_{\mathcal{B}(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, Y)}$ yi $\|A\|_{\mathcal{B}(\prod_{i=1}^n X_i, Y)}$ olarak kısaltıyoruz.

Tanım 2.7 $L^{p(\cdot)}(E)$ değişken üslü Lebesgue uzayı, E üzerinde $\exists \varepsilon > 0$ için

$$\int_E (\varepsilon |f(x)|)^{p(x)} dx < \infty$$

olacak biçimde reel değerli ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır.

$L^{p(\cdot)}(E)$ kümesi

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(E)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_E \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

Luxemburg-Nakano normuna göre bir Banach fonksiyon uzayıdır.

Tanım 2.8 Genel olarak $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayı, $\exists \varepsilon > 0$ için $\int_{\mathbb{R}^n} |\varepsilon f(x)|^{p(x)} dx < \infty$ olacak biçimde tüm ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır ve

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

ile verilir. Luxemburg-Nakano nun teorisinin özel bir durumu olarak, $L^{p(\cdot)}$ kuasi-normlu bir uzayıdır. Özel olarak, $p^- \geq 1$ olduğunda, $L^{p(\cdot)}$ bir Banach uzayıdır.

Tüm kompakt $E \subset \mathbb{R}^n$ alt kümeleri için, $L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \{f \text{ ölçülebilir} : f \in L^{p(\cdot)}(E) \text{ şeklinde tanımlanır.}$

Tanım 2.9 Eğer $p(\cdot)$

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log(|x - y|)}, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2}$$

ve

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\log|x| + e}, \quad |y| \geq |x|$$

sağlıyorsa $p(\cdot) \in LH$ olduğunu söyleriz.

Tanım 2.10 \mathcal{B} , $L^{p(\cdot)}$ üzerinde Hardy-littlewood maksimal operatörünün sınırlı olduğu $p(\cdot) \in P$ lerin kümesi olsun. Eğer $p(\cdot) \in P \cap LH$ ise $p(\cdot) \in \mathcal{B}$ olduğu iyi bilindir. Ayrıca, $W\mathcal{B}$, $L^{p(\cdot)}(w)$ üzerinde M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlı olduğu $p(\cdot) \in P$ lerin kümesi olsun. D. Cruz-Uribe ve L.Wang (2014) eğer $p(\cdot) \in P \cap LH$ ise $p(\cdot) \in W\mathcal{B}$ olduğunu ispatladılar.

2.3 Morrey Uzayları

Tanım 2.11 $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$ olmak üzere $M^{p,\lambda} \equiv M^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$\|f\|_{M^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L^p(B(x,r))}$$

sonlu kuasinormlu tüm $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesidir.

Not edelim ki $M^{p,0} = L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $M^{p,n} = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dir. Eğer $\lambda < 0$ ya da $\lambda > n$ ise bu durumda Θ , \mathbb{R}^n üzerinde sifıra denk tüm fonksiyonların kümesi olmak üzere $M^{p,\lambda} = \Theta$ dir. $WM^{p,\lambda} \equiv WM^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile de

$$\|f\|_{WM^{p,\lambda}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL^p(B(x,r))} < \infty$$

olacak biçimde tüm $f \in WL^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının zayıf Morrey uzayını gösteririz, burada $WL^p(B(x,r))$

$$\|f\|_{WL^p(B(x,r))} \equiv \|f\chi_{B(x,r)}\|_{WL^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t > 0} t |\{y \in B(x,r) : |f(y)| > t\}|^{\frac{1}{p}}$$

olacak biçimde ölçülebilir f fonksiyonlarının zayıf L^p uzayını gösterir.

2.4 Genelleştirilmiş Değişken Üslü Morrey Uzayları

Tanım 2.12 $p \in P_1(\mathbb{R}^n)$ olsun, φ de $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir fonksiyon olsun. Genelleştirilmiş $M^{p(\cdot),\varphi} \equiv M^{p(\cdot),\varphi}(\mathbb{R}^n)$ değişken üslü Morrey uzayı

$$\|f\|_{M^{p(\cdot),\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi(x,r)^{-1} r^{-\theta_{p(x,r)}} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x,r))} < \infty$$

normu ile tüm $f \in L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır, burada

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x,r))} \equiv \|f\chi_{B(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

dir.

Uyarı 2.1 Genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzayları Guliyev vd. (2010) tarafından tanıtılmıştır.

(1) $0 < \lambda < n$ olmak üzere $\varphi(x, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p(x)}}$ için $M^{p(\cdot),\varphi} = L^{p(\cdot),\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Almeida vd. (2008) tarafından tanıtılan değişken üslü Morrey uzayı elde edilir.

(2) $\varphi(x, r) \equiv r^{-\theta_{p(x,r)}}$ ise o zaman $M^{p(\cdot),\varphi} = L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ değişken üslü Lebesgue uzayıdır.

2.5 BMO Uzayları

Tanım 2.13 $BMO(\mathbb{R}^n)$ sınırlı ortalama salınımlı uzayı

$$\|b\|_* = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |b(y) - b_B| dy < \infty$$

şeklinde tanımlanır ve $\|\cdot\|_*$ normuna sahip Banach uzayı modulo sabitleridir, burada supremum tüm B yuvarlarının üzerlerinde alınır, $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve

$$b_B = \frac{1}{|B|} \int_B b(y) dy$$

dir.

$BMO^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|b\|_{BMO^{p(\cdot)}} = \sup_B \frac{\|(b(\cdot) - b_B)\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}}}$$

normlu bütün lokal integrallenebilen f fonksiyonlarının kümesidir.

3. DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA BAZI MULTİLİNEER KOMÜTATÖRLER

Bu bölümde değişken üslü Lebesgue uzayları üzerinde ilk olarak multilineer kesirli integrallerin $[b, I_\alpha]_j$ multilineer komütatörleri ve ardından multilineer Calderon-Zygmund singüler integral opeatörlerinin $[b, T]_j$ multilineer komütatörlerine göre BMO 'nun birer karakterizasyonu verilecektir.

Lemma 3.1 $p_i(\cdot) \in P^0$ üs fonksiyonu verilsin, $p(\cdot) \in P^0$ yi

$$\frac{1}{p(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i(x)}, \{i = 1, 2, \dots, m\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda her $f_i \in L^{p_i(\cdot)}$ ve $f_i \in L^{p(\cdot)}$ için

$$\left\| \prod_{i=1}^m f_i \right\|_{p(\cdot)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)}$$

dır.

Lemma 3.2 $p(\cdot) \in LH \cap P$ verilsin. $q(\cdot) \in LH$ üs fonksiyonunu

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha}{n}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

şeklinde tanımlayalım, o zaman

$$\|M_\alpha f\|_{q(\cdot)} \leq C \|f\|_{p(\cdot)}$$

dır (Capone vd. 2007).

Lemma 3.3 Kabul edelim ki $p(\cdot) \in LH$ ve $0 < p^- \leq p^+ < \infty$ olsun.

(1) Her $|Q| \leq 2^n$ küpleri (veya yuvarları) ve herhangi bir $x \in Q$ için,

$$\|\chi_Q\|_{p(\cdot)} \approx |Q|^{\frac{1}{p(x)}}$$

dir.

(2) Her $|Q| \geq 1$ küpleri (veya yuvarları) için,

$$\|\chi_Q\|_{p(\cdot)} \approx |Q|^{\frac{1}{p_\infty}}$$

olur, burada $p_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$ dir (Diening vd. 2011).

Lemma 3.4 Eğer $p(\cdot) \in LH \cap P$ bir değişken üs ise bu durumda her $b \in BMO$ için

$$\|b\|_* \approx \sup_Q \frac{1}{\|\chi_Q\|_{p(\cdot)}} \|(b - b_Q)\chi_Q\|_{p(\cdot)}$$

sağlanır. Ayrıca, her $b \in BMO$ için

$$\|b\|_* \approx \sup_Q \inf_{c \in \mathbb{C}} \frac{1}{\|\chi_Q\|_{p(\cdot)}} \|(b - c)\chi_Q\|_{p(\cdot)}$$

sağlanır (Izuki vd. 2012).

Tanım 3.1 Multilineer kesirli integral operatör

$$I_\alpha(\vec{f})(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{\prod_{i=1}^m f_i(y_i)}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{nm-\alpha}} \prod_{i=1}^m dy_i$$

ve $[b, I_\alpha]_j$ komütatör operatörü

$$[b, I_\alpha]_j(\vec{f})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(b(x) - b(y_j)) \prod_{i=1}^m f_i(y_i)}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{nm-\alpha}} \prod_{i=1}^m dy_i$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.1 $b \in L_{loc}^1$, $0 < \alpha < mn$ ve $p_i(\cdot) \in LH \cap P$, $i = 1, 2, \dots, m$ olsun. Ayrıca $q(\cdot) \in P$ nin

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i(x)} - \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{q(x)} < 1, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

yı sağladığını varsayalım. Bu durumda herhangi bir $1 \leq j \leq m$ için, $[b, I_\alpha]_j$ nin $L^{p_1(\cdot)} \times L^{p_2(\cdot)} \times \dots \times L^{p_m(\cdot)}$ den $L^{q(\cdot)}$ ya sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $b \in BMO$ olmasıdır. Ayrıca,

$$\|b\|_* \approx \left\| [b, I_\alpha]_j \right\|_{\mathcal{B}(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{q(\cdot)})}$$

dir.

İspat. Teorem 3.1 i ispatlamak için, keskin maksimal fonksiyon

$$M^\sharp \left([b, I_\alpha]_j \left(\vec{f} \right) \right) (x) \leq C \|b\|_* \left[\left(M \left(\left| I_\alpha \left(\vec{f} \right) \right|^r \right)^{1/r} \right) (x) + \prod_{i=1}^m (M_{\alpha_i s_i} |f_i|^{s_i})^{1/s_i} (x) \right]$$

tahminine ihtiyacımız vardır, burada $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \alpha$, $0 < \alpha_i < n$, $1 < s_i < p_j^-$, $1 < r < q^-$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ dir.

Bunu yapmak için, $f_j^0 = f_j \chi_{2Q}$ ve $f_j^\infty = f_j - f_j^0$ alalım. Bir Q küpünü sabitleyelim ve

$$\begin{aligned} [b, I_\alpha]_j \left(\vec{f} \right) (x) &= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{[(b(x) - b_Q) + (b_Q - b(y_i))] \prod_{i=1}^m f_i(y_i)}{\left(\sum_{i=1}^m |x - y_i| \right)^{nm - \alpha}} \prod_{i=1}^m dy_i \\ &= (b(x) - b_Q) I_\alpha \left(\vec{f} \right) (x) - I_\alpha (f_1, \dots, (b - b_Q) f_j, \dots, f_m) (x) \\ &= (b(x) - b_Q) I_\alpha \left(\vec{f} \right) (x) - I_\alpha (f_1^0, \dots, (b - b_Q) f_j^0, \dots, f_m^0) (x) \\ &\quad - I_\alpha (f_1^\infty, \dots, (b - b_Q) f_j^\infty, \dots, f_m^\infty) (x) \\ &\quad - \sum I_\alpha (f_1^{r_1}, \dots, (b - b_Q) f_j^{r_j}, \dots, f_m^{r_m}) (x) \\ &=: A_1 - A_2 - A_3 - A_4 \end{aligned}$$

alalım, burada son toplamda her bir $r_i = 0$ veya ∞ dur ve her terimde en az bir $r_j = 0$ ve $r_l = \infty$ vardır.

Hölder Eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} \int_Q |A_1(z)| dz &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(z) - b_Q|^{r'} dz \right)^{1/r'} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left| I_\alpha \left(\vec{f} \right) (z) \right|^r dz \right)^{1/r} \\ &\leq C \|b\|_* \left(M \left(\left| I_\alpha \left(\vec{f} \right) \right|^r \right) \right)^{1/r} (x) \end{aligned}$$

sağlanır.

$1 < s_i < p_j^-$ olduğundan $\gamma, \beta_i \geq 1$ i seçebiliriz öyle ki $r\beta_i = s_i$ dir. Bundan dolayı $1 < \beta_i < p_j^-$ dir. O zaman $u > 1$ vardır öyle ki $\frac{1}{u} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta_i} - \frac{\alpha}{n}$ dir. Gerçekten, β_i ve α_i yi $0 < \frac{1}{\beta_i} - \frac{\alpha_i}{n} < \frac{1}{m}$ olacak şekilde seçebiliriz. Hölder eşitsizliğini ve multilineer kesirli integrallerin sınırlılığını kullanarak (Kening and Stein 1999),

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |A_2(z)| dz = \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| I_\alpha (f_1^0, \dots, (b - b_Q) f_j^0, \dots, f_m^0) (z) \right|^u dz \right\}^{1/u}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{|Q|^{1/u}} \|(b - b_Q) f_j^0\|_{\beta_j} \prod_{i \neq j} \|f_i^0\|_{\beta_i} \\
&\leq C |Q|^{-1/u} \left(\int_{2Q} |b - b_Q|^{r' \beta_j} dy_j \right)^{1/r' \beta_j} \left(\int_{2Q} |f_j(y_j)|^{r \beta_j} dy_j \right)^{1/r \beta_j} \\
&\quad \times \prod_{i \neq j} \left(\int_{2Q} |f_i(y_i)|^{\beta_i} dy_i \right)^{1/\beta_i} \\
&\leq C \|b\|_* |Q|^{\alpha/n} \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{|2Q|} \int_{2Q} |f_i(y_i)|^{r \beta_i} dy_i \right)^{1/r \beta_i} \\
&\leq C \|b\|_* \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{|Q|^{1 - \frac{\alpha_i s_i}{n}}} \int_{2Q} |f_i(y_i)|^{s_i} dy_i \right)^{1/s_i} \\
&\leq C \|b\|_* \prod_{i=1}^m (M_{\alpha_i s_i} |f_i|^{s_i})^{1/s_i}(x)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Q nun merkezini x_0 gösterelim, bu durumda $x \in Q$ ve $y_i \in (2Q)^c$ için $|x - y_i| \approx |x_0 - y_i|$ sağlanır. $1 < s_j < \infty$ olduğundan $1 < s'_j < \infty$ seçebiliriz öyle ki $\frac{1}{s'_j} + \frac{1}{s_j} = 1$ dir. s_j ve s'_j üsleri ile Hölder eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
&|I_\alpha(f_1^\infty, \dots, (b - b_Q) f_j^\infty, \dots, f_m^\infty)(x) - I_\alpha(f_1^\infty, \dots, (b - b_Q) f_j^\infty, \dots, f_m^\infty)(x_0)| \\
&\leq \int_{(\mathbb{R}^n \setminus 2Q)^m} \frac{|Q|^{1/n} |b(y_j) - b_Q| \prod_{i=1}^m |f_i(y_i)|}{\left(\sum_{i=1}^m |x_0 - y_i| \right)^{nm - \alpha + 1}} \prod_{i=1}^m dy_i \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|Q|^{1/n} |b(y_j) - b_Q| |f_i(y_i)|}{\left(\sum_{i=1}^m |x_0 - y_i| \right)^{n - \alpha_j + 1}} \\
&\quad \times \int_{(\mathbb{R}^n \setminus 2Q)^{m-1}} \frac{\prod_{i \neq j} |f_j(y_j)|}{\left(\sum_{i=1}^m |x_0 - y_i| \right)^{n(m-1) - \sum_{i \neq j} \alpha_i + 1}} \prod_{i=1}^m dy_i \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|Q|^{1/n} |b(y_j) - b_Q|^{s'_j}}{\left(\sum_{i=1}^m |x_0 - y_i| \right)^{n+1}} dy_j \right)^{1/s'_j} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|Q|^{1/n} |f_j(y_j)|^{s_j}}{\left(\sum_{i=1}^m |x_0 - y_i| \right)^{n+1 - \alpha_j}} dy_j \right)^{1/s_j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{(\mathbb{R}^n \setminus 2Q)^{m-1}} \frac{\prod_{i \neq j} |f_j(y_j)|}{\left(\sum_{i=1}^m |x_0 - y_i| \right)^{n(m-1) - \sum_{i \neq j} \alpha_i + 1}} \prod_{i \neq j} dy_i \\
& \leq C \|b\|_* \prod_{i=1}^m (M_{\alpha_i s_i} |f_i|^{s_i})^{1/s_i}(x)
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi A_4 ele alalım. Genelliği kaybetmeden, kabul edelim ki $r_1 = \dots = r_d = 0$ ve $r_{d+1} = \dots = \infty$ olsun. $d+1 \leq j \leq m$ olduğunda ortalama değer teoremi ve Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned}
& |I_\alpha(f_1^{r_1}, \dots, (b - b_Q)f_j^{r_j}, \dots, f_m^{r_m})(x) - I_\alpha(f_1^{r_1}, \dots, (b - b_Q)f_j^{r_j}, \dots, f_m^{r_m})(x_0)| \\
& \leq \prod_{i=1}^d \int_{2Q} |f_i^{r_i}| \int_{(\mathbb{R}^n \setminus 2Q)^{m-d}} \frac{|Q|^{1/n} |b(y_j) - b_Q| \prod_{i=d+1}^m f_i^{r_i}(y_i)}{(\sum_{i=1}^m |x_0 - y_i|)^{nm - \alpha + 1}} \prod_{i=1}^m dy_i \\
& \leq \prod_{i=1}^d \int_{2Q} |f_i^{r_i}| dy_i \sum_{l=1}^{\infty} \int_{(2^{l+1} \setminus 2^l Q)^{m-d}} \frac{|Q|^{1/n} |b(y_j) - b_Q| \prod_{i=d+1}^m f_i^{r_i}(y_i)}{(2^l |Q|^{1/n})^{nm - \alpha + 1}} \prod_{i=d+1}^m dy_i \\
& \leq C \|b\|_* \prod_{i=1}^m (M_{\alpha_i s_i} |f_i|^{s_i})^{1/s_i}(x)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$1 \leq j \leq d$ olduğunda, benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& |I_\alpha(f_1^{r_1}, \dots, (b - b_Q)f_j^{r_j}, \dots, f_m^{r_m})(x) - I_\alpha(f_1^{r_1}, \dots, (b - b_Q)f_j^{r_j}, \dots, f_m^{r_m})(x_0)| \\
& \leq C \|b\|_* \prod_{i=1}^m (M_{\alpha_i s_i} |f_i|^{s_i})^{1/s_i}(x)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$p(\cdot) \in LH \cap P^0$ olduğunda $\|Mf\|_{p(\cdot)} \leq C \|M^\# f\|_{p(\cdot)}$ dir. Bundan dolayı, $b \in BMO$ ise

$$\begin{aligned}
& \left\| [b, I_\alpha]_j \left(\vec{f} \right) \right\|_{q(\cdot)} \leq \left\| M [b, I_\alpha]_j \left(\vec{f} \right) \right\|_{q(\cdot)} \leq \left\| M^\# [b, I_\alpha]_j \left(\vec{f} \right) \right\|_{q(\cdot)} \\
& \leq C \|b\|_* \left(\left\| M \left(|I_\alpha \left(\vec{f} \right)|^r \right)^{1/r} \right\|_{q(\cdot)} + \left\| \prod_{i=1}^m (M_{\alpha_i s_i} |f_i|^{s_i})^{1/s_i} \right\|_{q(\cdot)} \right)
\end{aligned}$$

sağlanır.

$q(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n)$ olduğunu görmek kolaydır o zaman $M, (\frac{q(\cdot)}{r}, \frac{q(\cdot)}{r})$ dir, $1 < r < q^-$ olduğuna dikkat edelim. Multilineer kesirli integral operatörler için ağırlıklı eşitsizlikler Moen (2009) tarafından düzenlenmiştir. Bundan motive olarak, aşağıdaki değişken üs durumunu ele alacağız:

$$\|I_\alpha(\vec{f})\|_{q(\cdot)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)},$$

burada $\frac{1}{q(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i(x)} - \frac{\alpha}{n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $q, p_i^- > 1$ dir.

I_α nın noktasal tahminini elde edebiliriz, burada Hedberg (1972) ve Welland (1975) m tekniklerini kullanacağız. $\varepsilon = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$ sayısını $0 < \varepsilon_i < \min\{\alpha_i, n - \alpha_i\}$ şeklinde sabitleyelim. O zaman her $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ ve herhangi bir $Q \ni x$ için

$$I_\alpha f(x) = \int_{Q^m} \frac{\prod_{i=1}^m f_i(y_i)}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{mn-\alpha}} d\vec{y} + \int_{(\mathbb{R}^n \setminus Q)^m} \frac{\prod_{i=1}^m f_i(y_i)}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{mn-\alpha}} d\vec{y}$$

sağlanır.

Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} |I| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(2^{-i}Q \setminus 2^{-i-1}Q)^m} \frac{\prod_{i=1}^m |f_i(y_i)|}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{mn-\alpha}} d\vec{y} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{-i-1} |Q|^{\frac{-1}{n}})^{nm-\alpha}} \int_{(2^{-i}Q)^m} \prod_{i=1}^m |f_i(y_i)| d\vec{y} \\ &\leq C \prod_{i=1}^m |Q|^{\frac{\varepsilon_i}{n}} M_{\alpha_i - \varepsilon_i} f_i(x) = C |Q|^{\frac{\varepsilon}{n}} \prod_{i=1}^m M_{\alpha_i - \varepsilon_i} f_i(x) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$|II| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{(2^i Q \setminus 2^{i-1} Q)^m} \frac{\prod_{i=1}^m |f_i(y_i)|}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{mn-\alpha}} d\vec{y}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{(2^i |Q|^{\frac{1}{n}})^{mn-\alpha}} \int_{(2^i Q)^m} \prod_{i=1}^m |f_i(y_i)| d\vec{y} \\ &\leq |Q|^{\frac{-\varepsilon}{n}} \prod_{i=1}^m M_{\alpha_i+\varepsilon_i} f_i(x) \end{aligned}$$

olur.

$$|Q|^{\frac{2\varepsilon}{n}} = \frac{\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i+\varepsilon_i} f_i(x)}{\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i-\varepsilon_i} f_i(x)} \text{ seçerek}$$

$$\left| I_\alpha \left(\vec{f} \right) (x) \right| \leq C \left(\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i+\varepsilon_i} f_i(x) \right)^{1/2} \left(\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i-\varepsilon_i} f_i(x) \right)^{1/2}$$

elde ederiz. $\frac{1}{q(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i(x)} - \frac{\alpha}{n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $p_i^- > 1$ olduğunda

$$\left\| I_\alpha \left(\vec{f} \right) \right\|_{q(\cdot)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)}$$

ispatlanmış olur. Genelliği kaybetmeden, $\|f_i\|_{p_i(\cdot)} = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. $\|f\|_{p(\cdot)} \leq C$ olması için gerek ve yeter koşulun $\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p(y)} dy \leq C$ olduğunu hatırlarız (Capone vd. 2007). $q^+ < \infty$ olduğundan, $\int_{\mathbb{R}^n} \left| I_\alpha \left(\vec{f} \right) (x) \right|^{q(x)} \leq C$ olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır.

$r(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$ yi

$$r(x) = \frac{2}{\varepsilon q(x)/n + 1}$$

şeklinde tanımlayalım.

O zaman her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i(x)} - \frac{1}{r(x)q(x)/2} = \frac{\alpha - \varepsilon}{n}$$

ve

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i(x)} - \frac{1}{r'(x)q(x)/2} = \frac{\alpha + \varepsilon}{n},$$

dir.

ε , $0 < \varepsilon < \max \{\alpha, \alpha - n\}$ sabit tutalım öyle ki

$$\frac{2}{\frac{\varepsilon q^+}{n} + 1} > 1$$

dir.

O zaman $r^- > 1$ dir. $r(\cdot)$ ve $r'(\cdot)$ üslü değişken L^p için $I_\alpha(\vec{f})$ nın noktasal kestirimi ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| I_\alpha \vec{f}(x) \right|^{q(x)} dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left[\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i + \varepsilon_i} f_i(x) \right]^{q(x)/2} \left[\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i - \varepsilon_i} f_i(x) \right]^{q(x)/2} dx \\ &\leq C \left\| \left[\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i + \varepsilon_i} f_i \right]^{q(\cdot)/2} \right\|_{r(\cdot)} \left\| \left[\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i - \varepsilon_i} f_i \right]^{q(\cdot)/2} \right\|_{r(\cdot)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi sağ taraftaki her terimin kestirimini yapacağız. Her birinin 1 den büyük olduğunu varsayabiliriz, çünkü aksi taktirde ispatlanacak bir şey yoktur. $\left(\frac{r'(\cdot)q(\cdot)}{2}\right)^- > 1$ olduğunu görmek kolaydır, o zaman $s_i(x) \geq s_i^- > 1$ üslü fonksiyonunu seçebiliriz öyle ki $i = 1, \dots, m$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\sum_{i=1}^m \frac{1}{s_i(x)} = \frac{1}{\frac{r'(\cdot)q(\cdot)}{2}}$ ve $\frac{1}{p_i(x)} - \frac{1}{s_i(x)} = \frac{\alpha_i + \varepsilon_i}{n}$ dir. Değişken Lebesgue uzayının Lüksemburg normunun tanımı ve Lemma 3.1 ve Lemma 3.2 ye göre

$$\begin{aligned} \left\| \left[\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i + \varepsilon_i} f_i \right]^{q(\cdot)/2} \right\|_{r'(\cdot)} &\leq \left\| \prod_{i=1}^m M_{\alpha_i + \varepsilon_i} f_i \right\|_{q(\cdot)r'(\cdot)/2}^{q^+/2} \leq C \prod_{i=1}^m \|M_{\alpha_i + \varepsilon_i} f_i\|_{s_i(\cdot)}^{q^+/2} \\ &\leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)}^{q^+/2} \leq C \end{aligned}$$

sağlanır, burada ilk eşitsizlikde $\lambda > 1$, $\lambda^{2/q(x)} \geq \lambda^{2/q^+}$ den dolayı

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\left(\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i + \varepsilon_i} f_i(x) \right)^{q(x)/2}}{\lambda} \right)^{r'(x)} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\left(\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i + \varepsilon_i} f_i(x) \right)^{r'(x)q(x)/2}}{\lambda^{2/q(x)}} \right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\left(\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i + \varepsilon_i} f_i(x) \right)^{r'(x)q(x)/2}}{\lambda^{2/q^+}} \right) dx \end{aligned}$$

ifadesi doğrudur.

Benzer şekilde,

$$\left\| \left[\prod_{i=1}^m M_{\alpha_i - \varepsilon_i} f_i \right]^{q(\cdot)/2} \right\|_{r(\cdot)} \leq C$$

elde edebiliriz.

Dolayısıyla,

$$\left\| \left(M \left(\left| I_\alpha \left(\vec{f} \right) \right| \right)^r \right)^{1/r} \right\|_{q(\cdot)} \leq C \left\| \left(\left| I^\alpha \left(\vec{f} \right) \right|^r \right)^{1/r} \right\|_{q(\cdot)/r} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)}$$

sağlanır.

Daha sonra, $q_i(x) > 1$ seçebiliriz öyle ki $\frac{1}{q(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i(x)}$ ve $\frac{1}{q_i(x)} = \frac{1}{p_i(x)} - \frac{\alpha_i}{n}$ olur. $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $\frac{1}{q_i(x)/s_i} = \frac{1}{p_i(x)/s_i} - \frac{\alpha_i s_i}{n}$ olduğuna dikkat edelim. Lemma 3.1 ve Lemma 3.2 den

$$\left\| \prod_{i=1}^m (M_{\alpha_i s_i} |f_i|^{s_i})^{1/s_i} \right\|_{q(\cdot)} \leq \prod_{i=1}^m \left\| (M_{\alpha_i s_i} |f_i|^{s_i})^{1/s_i} \right\|_{q_i(\cdot)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)}$$

elde ederiz.

Bundan dolayı

$$\left\| [b, I_\alpha]_j \left(\vec{f} \right) \right\|_{q(\cdot)} \leq C \|b\|_* \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)}$$

sağlanır.

Şimdi ispatın karşıt kısmını vereceğiz. Buradaki fikir Chanillo (1982) ve Janson (1978) dan gelmektedir.

$K_\alpha(\vec{y})$ konvolüsyon çekirdeğinin tersi orijinden uzakta düzgündür. $(\vec{y}) = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m) \in \mathbb{R}^{mn}$, $\delta > 0$ seçebiliriz öyle ki $B = B(\vec{y}', \delta, \sqrt{mn})$ dir. O zaman Shirai (2006) ile benzer argümanları kullanırız. B üzerinde 1 e ve $B^\approx \supset B$, dışında 0 a eşit olan düzgün kesme fonksiyonu düşünüldüğünde $\frac{1}{K_\alpha(\vec{y})}$, B yuvarında mutlak yakınsak bir Fourier serisi olarak temsil edilir. $\vec{y} \in B$ olduğu zaman

$$\frac{1}{K_\alpha(\vec{y})} \approx \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^2 \right)^{(mn-\alpha)/2} = \sum_l a_l e^{i v_l \cdot (\vec{y})}$$

dır. Herhangi bir $Q = Q(y_0, r)$ için $i = 1, \dots, m$ olmak üzere $\tilde{y}_i = y_0 - \frac{r y'_i}{\delta}$ ve $Q'_i = Q(\tilde{y}_i, r)$ olsun. Herhangi bir $x \in Q$ ve $y_i \in Q'_i$ için $\frac{\delta}{r}(x - y_1, x - y_2, \dots, x - y_m)$ olduğunu görmek kolaydır.

$s(x) = \text{sgn} [b(x) - b_{Q'_j}]$ ve $E = \{x : b(x) - b_{Q'_j} \neq 0\}$ yi oluřturalım. O zaman

$$f_i(y_i) = e^{-i\frac{\delta}{r}v_i^i \cdot y_i} \chi_{Q'_i}(y_i)$$

$$h_l(x) = e^{i\frac{\delta}{r}v_l \cdot (x, x, \dots, x)} s(x)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} |b(x) - b_{Q'_j}| &= s(x)(b(x) - b_{Q'_j}) \\ &= \frac{s(x)}{|Q|} \int_{Q'_j} (b(x) - b(y_j)) dy_j \\ &= \frac{s(x)}{|Q|^m} \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{b(x) - b(y_j)}{\left(\sum_{i=1}^m |x - y_i|\right)^{nm-\alpha}} \overrightarrow{\chi_Q}(y) d\vec{y} \\ &= \sum_l a_l \delta^{-mn} s(x) \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{b(x) - b(y_j)}{\left(\sum_{i=1}^m |x - y_i|\right)^{mn-\alpha}} e^{i\frac{\delta}{r}v_l \cdot (x, x, \dots, x)} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^m e^{-i\frac{\delta}{r}v_i^i \cdot y_i} \chi_{Q'_i}(y_i) d\vec{y} \\ &=: \sum_l a_l \delta^{-mn} \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{b(x) - b(y_j)}{\left(\sum_{i=1}^m |x - y_i|\right)^{mn-\alpha}} h_l(x) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \\ &= \sum_l a_l \delta^{-mn} h_l(x) \frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}}} [b, I_\alpha]_j \left(\vec{f}\right) (x) \end{aligned}$$

sağlanır.

$x \in E$ iken $|h_l(x)| = 1$ ve diğerk yerlerde $|h_l(x)| = 0$ olduğuna dikkat ederiz, o zaman

$$\begin{aligned} &\left\| (b - b_{Q'_j}) \chi_Q \right\|_{q(\cdot)} \\ &= \frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}}} \left\| \sum_l a_l \delta^{-mn} h_l [b, I_\alpha]_j \left(\vec{f}\right) \chi_E \right\|_{q(\cdot)} + \frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}}} \left\| \sum_l a_l \delta^{-mn} h_l [b, I_\alpha]_j \left(\vec{f}\right) \chi_{E^c} \right\|_{q(\cdot)} \\ &\leq \sum_l a_l \delta^{-mn} \frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}}} \left\| [b, I_\alpha]_j \right\|_{\mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot), L^q(\cdot)}\right)} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)} \\ &\leq C \frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}}} \left\| [b, I_\alpha]_j \right\|_{\mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot), L^q(\cdot)}\right)} \prod_{i=1}^m \left\| \chi_{Q'_i} \right\|_{p_i(\cdot)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

$|Q| \leq 1$ olduğunda uygun bir $\delta > 0$ seçeriz öyle ki $\cap_{i=1}^m Q'_i \neq \emptyset$ dir, o zaman Lemma 3.3 den dolayı $z \in \cap_{i=1}^m Q'_i \neq \emptyset$ vardır öyle ki

$$\begin{aligned} \|Q\|_{q(\cdot)}^{-1} \left\| (b - b_{Q'_j}) \chi_{Q'} \right\|_{q(\cdot)} &\leq C \|Q\|_{q(\cdot)}^{-1} |Q|^{-\frac{\alpha}{n}} \left\| [b, I_\alpha]_j \right\|_{\mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{q(\cdot)}\right)} \prod_{i=1}^m \left\| \chi_{Q'_i} \right\|_{p_i(\cdot)} \\ &\leq C \left\| [b, I_\alpha]_j \right\|_{\mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{q(\cdot)}\right)} |Q|^{\frac{-1}{q(z)} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i(z)} - \frac{\alpha}{n}} \\ &\leq C \left\| [b, \alpha]_j \right\|_{\mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{q(\cdot)}\right)} \end{aligned}$$

dır.

$|Q| > 1$ olduğunda, benzer şekilde

$$\|Q\|_{q(\cdot)}^{-1} \left\| (b - b_{Q'_j}) \chi_{Q'} \right\|_{q(\cdot)} \leq C \left\| [b, I_\alpha]_j \right\|_{\mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{q(\cdot)}\right)}$$

elde ederiz.

Böylece Teorem 3.1 in ispatını Lemma 3.4 e göre ispatlamış olduk. ■

Tanım 3.2 $K(x, y_1, \dots, y_m)$, $x = y_1 = \dots = y_m$ köşegeni dışında tanımlanmış lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer bazı A pozitif parametreleri ve ε için $0 \leq j \leq m$ ve $|y_j - y'_j| \leq 1/2 \max_{0 \leq k \leq m} |y_j - y_k|$ olduğunda,

$$|K(y_0, \dots, y_m)| \leq \frac{A}{\left(\sum_{k,l=0}^m |y_k - y_l|\right)^{mn}}$$

ve

$$\left| K(y_0, \dots, y_j, \dots, y_m) - K(y_0, \dots, y'_j, \dots, y_m) \right| \leq \frac{A |y_j - y'_j|^\varepsilon}{\left(\sum_{k,l=0}^m |y_k - y_l|\right)^{mn+\varepsilon}}$$

ise K bir m - lineer Calderon-Zygmund çekirdeğidir.

Tanım 3.3 Her $f_i \in D$ ve her $x \notin \cap_1^m \text{supp}(f_i)$ için

$$T\left(\vec{f}\right)(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} K(x, y_1, \dots, y_m) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y}$$

olsun, burada $d\vec{y} = dy_1 \dots dy_m$ dir. Eğer bazı $1 < p_1, \dots, p_m < \infty$ için

$$T : L^{p_1} \times \dots \times L^{p_m} \rightarrow L^p$$

ise T ye bir m -linear Calderon-Zygmund operatörü denir, burada $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}$ dir. Eğer $K(x, y_1, \dots, y_m)$, $K(x - y_1, \dots, x - y_m)$ biçiminde ise o zaman T operatörünün konvolüsyon tipli olduğunu söyleriz.

Tanım 3.4 Herhangi bir $1 \leq j \leq m$ için multilinear integral operatörünün komütatörünü

$$[b, T]_j(\vec{f})(x) := bT(\vec{f})(x) - T(f_1, \dots, bf_j, \dots, f_m)(x)$$

ile tanımlarız, burada b lokal bir integrallenebilir fonksiyondur ve T bir m -linear integral operatördür.

Teorem 3.2 "Kabul edelim ki $b \in L^1_{loc}$, $p_i(\cdot) \in LH \cap P$, $i = 1, 2, \dots, m$ ve T bir konvolüsyon tipli m -linear Calderon-Zygmund operatörü olsun öyle ki $K(\lambda y_1, \dots, \lambda y_m) = \lambda^{-nm} K(y_1, \dots, y_m)$ dir. Ayrıca $(\mathbb{R}^n)^m$ deki bir B yuvarı için $\frac{1}{K}$ nın Fourier serisinin mutlak yakınsak olduğunu kabul edelim. $q(\cdot)$

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i(x)} = \frac{1}{p(x)} < 1, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

yi sağlasın.

Herhangi bir $1 \leq j \leq m$ için $[b, T]_j$ nin, $L^{p_1(\cdot)} \times L^{p_2(\cdot)} \times \dots \times L^{p_m(\cdot)}$ den $L^{p(\cdot)}$ ye sınırlı bir operatör olması için gerek ve yeter koşul $b \in BMO$ olmasıdır. Ayrıca,

$$\|b\|_* \approx \left\| [b, T]_j \right\|_{\mathcal{B}(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{p(\cdot)})}$$

dır (Tan vd. 2017).

İspat. İlk olarak $\frac{1}{s} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s_i} < 1$ ve $1 < s_i < p_i^-$ ile $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

aşağıdaki keskin maksimal tahmin

$$M^\# \left([b, T]_j(\vec{f}) \right)(x) \leq C \|b\|_* \left[(M(|T(\vec{f})|^s))^{1/s}(x) + \prod_{i=1}^m (M|f_i|^{s_i})^{1/s_i}(x) \right]$$

yi elde edeceğiz.

$f_j^0 = f_j \chi_{2Q}$ ve $f_j^\infty = f_j - f_j^0$ olarak gösterelim. Bir Q küpünü sabitleyelim ve

$$\begin{aligned}
[b, T]_j(\vec{f})(x) &= \int_{(\mathbb{R}^n)^m} [(b(x) - b_Q) + (b_Q - b(y_j))] \prod_{i=1}^m f_i(y_i) K(x, \mathbf{y}) d\vec{y} \\
&= (b(x) - b_Q) T(\vec{f})(x) - T(f_1, \dots, (b - b_Q) f_j, \dots, f_m)(x) \\
&= (b(x) - b_Q) T(\vec{f})(x) - T(f_1^0, \dots, (b - b_Q) f_j^0, \dots, f_m^0)(x) \\
&\quad - T(f_1^\infty, \dots, (b - b_Q) f_j^\infty, \dots, f_m^\infty)(x) \\
&\quad - \sum T(f_1^{r_1}, \dots, (b - b_Q) f_j^{r_j}, \dots, f_m^{r_m})(x) \\
&\quad := B_1 - B_2 - B_3 - B_4
\end{aligned}$$

diyelim son toplamda her $r_i = 0$ veya ∞ ve her terimde en az bir $r_l = 0$ ve $r_m = \infty$ dır.

Hölder eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |B_1(z)| dz &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(z) - b_Q|^{s'} dz \right)^{1/s'} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |T(\vec{f})(z)|^s dz \right)^{1/s} \\
&\leq C \|b\|_* \left(M(|T(\vec{f})|)^s \right)^{1/s}(x)
\end{aligned}$$

sağlanır.

$1 < u, q$ ve $q_i < \infty$ seçelim öyle ki $uq_i = s_i$ ve $\frac{1}{q} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i}$ dır. Böylece Hölder eşitsizliğini ve T nin sınırlılığını (Grafakos and Torres 2002) uygulayarak,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |B_2(z)| dz &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |T(f_1^0, \dots, (b - b_Q) f_j^0, \dots, f_m^0)(z)|^q dz \right)^{1/q} \\
&\leq |Q|^{-\frac{1}{q}} \left(\prod_{i \neq j} \|f_i^0\|_{q_i} \right) \|(b - b_Q) f_j^0\|_{q_j} \\
&\leq |Q|^{-\sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i}} \left(\prod_{i \neq j} \|f_i \chi_{4\sqrt{n}Q}\|_{q_i} \right) \|(b - b_Q) \chi_{4\sqrt{n}Q}\|_{q_j u'} \|f_j \chi_{4\sqrt{n}Q}\|_{q_j u} \\
&\leq C \|b\|_* \prod_{i=1}^m (M(|f_i|)^{s_i})^{1/s_i}(x)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi Q yu $Q = Q(x_0, l(Q))$ olarak gösterelim. Eğer $y_i \notin 4\sqrt{n}Q$ ise o zaman herhangi bir $x \in Q$ için

$$|x - x_0| \leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} |x - y_i|$$

dir. K çekirdeğinin düzgünlüğünden

$$\begin{aligned} |B_3(x) - B_3(x_0)| &\leq \int_{(\mathbb{R}^n)^m} |K(x, \mathbf{y}) - K(x_0, \mathbf{y})| |b(y_j) - b_Q| \prod_{i=1}^m |f_i^\infty(y_i)| d\vec{y} \\ &\leq \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{A|x - x_0|^\varepsilon}{\left(\sum_{i=1}^m |x - y_i|\right)^{nm+\varepsilon}} |b(y_j) - b_Q| \prod_{i=1}^m |f_i^\infty(y_i)| d\vec{y} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus 4\sqrt{n}Q} \frac{l(Q)^{\frac{\varepsilon}{m}} |(b - b_Q) f_j(y_j)|}{|x - y_j|^{n+\frac{\varepsilon}{m}}} dy_j \\ &\quad \times \prod_{i \neq j} \int_{\mathbb{R}^n \setminus 4\sqrt{n}Q} \frac{l(Q)^{\frac{\varepsilon}{m}} |f_i(y_i)|}{|x - y_i|^{n+\frac{\varepsilon}{m}}} dy_i \\ &\leq C \|b\|_* \prod_{i=1}^m (M(|f_i|)^{s_i})^{1/s_i}(x) \end{aligned}$$

sonucuna varırız.

Şimdi B_4 ü düşünelim. Burada $(4\sqrt{n}Q)^l \times (\mathbb{R}^n \setminus 4\sqrt{n}Q)^{m-l} = R_l$ yazabiliriz. Genelliği kaybetmeden, $r_1 = \dots = r_l = 0$ ve $r_{l+1} = \dots = r_m = \infty$ varsayabiliriz. $1 \leq j \leq l$ olduğunda K nın ölçü gösteriminden

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|Q|} \int_Q |T(f_1^0, \dots, (b - b_Q) f_j^0, \dots, f_l^0, f_{l+1}^\infty, \dots, f_m^\infty)| (z) dz \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{R^l} |K(z, \mathbf{y}) f_1^0(y_1) \dots (b(y_j) - b_Q) f_j^0(y_j) \dots f_{l+1}^\infty(y_{l+1}) \dots f_m^\infty(y_m)| d\mathbf{y} dx \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{R^l} \frac{A |f_1^0(y_1)| \dots |b(y_j) - b_Q| |f_j^0(y_j)| \dots |f_{l+1}^\infty(y_{l+1})| \dots |f_m^\infty(y_m)|}{\left(\sum_{i=1}^m |z - y_i|\right)^{nm}} d\mathbf{y} dx \\ &\leq \frac{C}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|4\sqrt{n}Q|} \int_{4\sqrt{n}Q} |b(y_j) - b_Q| |f_j(y_j)| dy_j \prod_{i=1(i \neq j)}^l \frac{1}{|4\sqrt{n}Q|} \int_{4\sqrt{n}Q} |f_i(y_i)| dy_i \right. \\ &\quad \left. \times \left(|Q|^{\frac{l}{m-l}} \right)^{m-l} \prod_{k=l+1}^m \int_{\mathbb{R} \setminus 4\sqrt{n}Q} \frac{|f_k(y_k)|}{|z - y_k|^{n+\frac{nl}{m-l}}} dy_k \right) dz \\ &\leq C \|b\|_* \prod_{i=1}^m (M(|f_i|)^{s_i})^{1/s_i}(x) \end{aligned}$$

olduğu sonucuna varırız.

Benzer şekilde, $l + 1 \leq j \leq m$ olduğunda

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T(f_1^0, \dots, (b - b_Q)f_j^0, \dots, f_l^0, f_{l+1}^\infty, \dots, f_m^\infty)| (z) dz \leq C \|b\|_* \prod_{i=1}^m (M(|f_i|^{s_i})^{1/s_i}(x))$$

elde ederiz.

$0 < \delta < 1/m$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için $M_\delta^\#(T(\vec{f}))(x) \leq C \prod_{i=1}^m M f_i(x)$ olduğunu görürüz (Perez and Torres 2003), burada her bir f_i düzgün ve kompakt desteklidir ve $p(\cdot) \in LH \cap P^0$ olduğunda $\|Mf\|_{p(\cdot)} \leq C \|M^\#f\|_{p(\cdot)}$ (Cruz-Urube vd. 2006) dir.

Daha sonra Lemma 3.1 e başvurarak,

$$\begin{aligned} \|T(\vec{f})\|_{p(\cdot)} &\leq \|M_\delta(T(\vec{f}))\|_{p(\cdot)} \leq \|M_\delta^\#(T(\vec{f}))\|_{p(\cdot)} \\ &\leq C \left\| \prod_{i=1}^m M f_i \right\|_{p(\cdot)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Böylece, her $p_i(\cdot) \in LH \cap P$ için

$$\|T(\vec{f})\|_{p(\cdot)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)}$$

sağlanır.

$\frac{1}{s} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s_i} > \sum_{i=1}^m \frac{1}{p^-} = \frac{1}{p^-}$ olduğundan $s < p$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} \|[b, T]_j(\vec{f})\|_{p(\cdot)} &\leq \|M[b, T]_j(\vec{f})\|_{p(\cdot)} \leq \|M^\#[b, T]_j(\vec{f})\|_{p(\cdot)} \\ &\leq C \|b\|_* \left(\left\| (M(|T(\vec{f})|)^s)^{1/s} \right\|_{p(\cdot)} + \left\| \prod_{i=1}^m (M|f_i|^{s_i})^{1/s_i} \right\|_{p(\cdot)} \right) \\ &\leq C \|b\|_* \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)} \end{aligned}$$

elde ederiz, burada her f_i düzgündür ve kompakt desteklidir ve buradan $[b, T]_j L^{p_1(\cdot)} \times \dots \times L^{p(\cdot)}$ dan $L^{p(\cdot)}$ ya sınırlı bir operatöre genişler.

Burada gerekliliği ispatlamak için Chaffee (2015) ve Janson (1978) tarafından uygulanan teknikleri kullanıyoruz. $(\vec{y}) = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m) \in \mathbb{R}^{mn}$, $\delta > 0$ seçeriz öyle ki

$\frac{1}{K(\vec{y})}$, $B = B((\mathbf{y}'), \delta\sqrt{mn})$ yuvarı içinde mutlak yakınsak bir Fourier serisi olarak gösterilebilir. Yani $\vec{y} \in B$ olduğu zaman

$$\frac{1}{K(\vec{y})} = \sum_l a_l e^{i v_l \cdot (\vec{y})}$$

dır. $i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere herhangi bir $Q = Q(y_0, r)$ kübü için $\tilde{y}_i = y_0 - \frac{r y'_i}{\delta}$ ve $Q'_i = Q(\tilde{y}_i, r)$ olsun. Herhangi bir $x \in Q$ ve $y_i \in Q'_i$ için $\frac{\delta}{r}(x - y_1, x - y_2, \dots, x - y_m) \in B$ olduğunu görmek kolaydır. $t(x) = \text{sgn}(b(x) - b_{Q'_j})$ ile göstererek

$$\begin{aligned} |b(x) - b_{Q'_j}| &= \frac{t(x)}{|Q'_j|} \int_{Q'_j} (b(x) - b(y_j)) dy_j \\ &= r^{-mn} t(x) \int_{\prod_{i=1}^m Q'_i} (b(x) - b(y_j)) d\mathbf{y} \\ &= \delta^{-mn} t(x) \int_{\prod_{i=1}^m Q'_i} (b(x) - b(y_j)) \frac{K(x - y_1, x - y_2, \dots, x - y_m)}{K(\frac{\delta(x-y_1)}{r}, \frac{\delta(x-y_2)}{r}, \dots, \frac{\delta(x-y_m)}{r})} d\vec{y} \\ &= \sum_l a_l \delta^{-mn} t(x) \int_{\prod_{i=1}^m Q'_i} e^{i \frac{\delta}{r} v_l \cdot (x - y_1, x - y_2, \dots, x - y_m)} \\ &\quad \times (b(x) - b(y_j)) K(x - y_1, x - y_2, \dots, x - y_m) d\vec{y} \\ &= \sum_l a_l \delta^{-mn} t(x) \int_{(\mathbb{R}^n)^m} (b(x) - b(y_j)) K(x - y_1, x - y_2, \dots, x - y_m) \\ &\quad \times e^{i \frac{\delta}{r} v_l \cdot (x, x, \dots, x)} \prod_{i=1}^m e^{-i \frac{\delta}{r} v_l^i \cdot y_i} \chi_{Q'_i} d\vec{y} \\ &=: \sum_l a_l \delta^{-mn} \int_{(\mathbb{R}^n)^m} (b(x) - b(y_j)) K(x - y_1, x - y_2, \dots, x - y_m) \\ &\quad \times h_l(x) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\vec{y} \\ &= \sum_l a_l \delta^{-mn} h_l(x) [b, T]_j \left(\vec{f} \right) (x) \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz, burada

$$f_i(y_i) = e^{-i \frac{\delta}{r} v_l^i \cdot y_i} \chi_{Q'_i}(y_i),$$

$$h_l(x) = e^{i \frac{\delta}{r} v_l \cdot (x, x, \dots, x)} t(x)$$

dir. Değişken Lebesgue uzayları üzerinde $[b, T]_j$ nin sınırlılığını uygulayarak

$$\left\| (b - b_{Q'_j}) \chi_Q \right\|_{p(\cdot)} = \left\| \sum_l a_l \delta^{-mn} h_l [b, T]_j \left(\vec{f} \right) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_l a_l \delta^{-mn} \left\| [b, T]_j \right\|_{\mathcal{B}(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{p(\cdot)})} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)} \\
&\leq C \left\| [b, T]_j \right\|_{\mathcal{B}(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{p(\cdot)})} \prod_{i=1}^m \left\| \chi_{Q'_i} \right\|_{p_i(\cdot)}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$|Q| \leq 1$ olduğunda uygun bir $\delta > 0$ seçebiliriz öyle ki $\cap_{i=1}^m Q'_j \neq \emptyset$ dir, o zaman Lemma 3.3 den dolayı $z \in \cap_{i=1}^m Q'_i \neq \emptyset$ vardır öyle ki

$$\begin{aligned}
\|Q\|_{p(\cdot)}^{-1} \|(b - b_Q)\chi_Q\|_{p(\cdot)} &\leq C \left\| [b, T]_j \right\|_{\mathcal{B}(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{p(\cdot)})} \|Q\|_{p(\cdot)}^{-1} \prod_{i=1}^m \left\| \chi_{Q'_i} \right\|_{p_i(\cdot)} \\
&\leq C \left\| [b, T]_j \right\|_{\mathcal{B}(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{p(\cdot)})} |Q|^{-\frac{1}{p(z)} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i(z)}} \\
&\leq C \left\| [b, T]_j \right\|_{\mathcal{B}(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{p(\cdot)})}
\end{aligned}$$

dir.

$|Q| > 1$ olduğunda benzer şekilde

$$\|Q\|_{p(\cdot)}^{-1} \|(b - b_{Q'_j})\chi_Q\|_{p(\cdot)} \leq C \left\| [b, T]_j \right\|_{\mathcal{B}(\prod_{i=1}^m L^{p_i(\cdot)}, L^{p(\cdot)})}$$

elde edebiliriz.

Böylece, Lemma 3.4 den ispat tamamlanmış olur." ■

Ayrıca aşağıdaki $T_* \left(\vec{f} \right)$ maksimal operatörünün bir sınırlılığını bulabiliriz, burada

$$T_* \left(\vec{f} \right) (x) = \sup_{\delta > 0} \left| \int_{\sum_1^m |x - y_i|^2 > \delta^2} K(x, y_1, \dots, y_m) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) d\mathbf{y} \right|$$

dır (Tan vd. 2017).

Teorem 3.3 " T_* bir maksimal Calderon-Zygmund operatörü olsun ve $p(\cdot)$

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i(x)} = \frac{1}{p(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

eşitliğini sağlasın. O zaman $p_i(\cdot) \in LH \cap P$, $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$\left\| T_* \left(\vec{f} \right) \right\|_{p(\cdot)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i(\cdot)}$$

eşitsizliği sağlanır (Tan vd. 2017)."

İspat. Grafakos ve Torres (2002) deki Teorem 3.1 den, bir T_* maximal Calderon-

Zygmund operatörü için $0 < \eta < p^-$ seçeriz ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$T_* \left(\vec{f} \right) (x) \leq C \left((M(|T(\vec{f})|^\eta)(x))^{1/\eta} + \prod_{i=1}^m Mf_i(x) \right)$$

sağlanır.

Böylece, $p(\cdot) \in P^0$ ve $p^+ < \infty$ verildiği takdirde, herhangi bir $s > 0$, $\| |f|^s \|_{p(\cdot)} = \| f \|_{sp(\cdot)}^s$ ve Lemma 3.1 için

$$\begin{aligned} \| T_* \left(\vec{f} \right) \|_{p(\cdot)} &\leq C \left(\| (M(|T(\vec{f})|^\eta))^{1/\eta} \|_{p(\cdot)} + \left\| \prod_{i=1}^m Mf_i \right\|_{p(\cdot)} \right) \\ &\leq C \left(\| (M(|T(\vec{f})|^\eta)) \|_{p(\cdot)/\eta}^{1/\eta} + \prod_{i=1}^m \| Mf_i \|_{p_i(\cdot)} \right) \\ &\leq C \prod_{i=1}^m \| f_i \|_{p_i(\cdot)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır. ■

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ DEĞİŞKEN ÜSLÜ MORREY UZAYLARINDA CALDERON-ZYGMUND MULTİLİNEER KOMÜTATÖR OPERATÖRLERİ

Bu bölümde $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ ve $b_i \in BMO$, $i = 1, \dots, m$ olmak üzere $T_{\vec{b}}$ Calderon-Zygmund multilineer komütatör operatörü için lokal Guliyev eşitsizliğinin zayıf ve kuvvetli biçimleri ispat edildikten sonra $T_{\vec{b}}$ Calderon-Zygmund multilineer komütatör operatörünün $M^{p(\cdot), \varphi_1}$ genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzayından diğer bir $M^{p(\cdot), \varphi_2}$ ye sınırlılığı ispat edilecektir.

Tanım 4.1 $1 \leq j \leq m$ için $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ ve b_j ler lokal integrallenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman $T_{\vec{b}}$ Calderon-Zygmund operatörlerinin multilineer komütatörleri

$$T_{\vec{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m [b_j(x) - b_j(y)] K(x, y) f(y) dy \quad (4.1)$$

ile tanımlanır, burada $K(x, y)$ Calderon-Zygmund çekirdeği ve

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy$$

Calderon-Zygmund singüler integral operatörüdür. Yani, her farklı $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $2|x - z| < |x - y|$ olan her z için, öyle pozitif C ve γ sabitleri vardır ki,

- (i) $|K(x, y)| \leq C |x - y|^{-n}$;
- (ii) $|K(x, y) - K(z, y)| \leq C \frac{|x - z|^\gamma}{|x - y|^{n+\gamma}}$;
- (iii) $|K(y, x) - K(y, z)| \leq C \frac{|x - z|^\gamma}{|x - y|^{n+\gamma}}$

sağlanır. $m = 1$ için, Coifman ve Weiss (1976) tarafından verilen klasik komütatör elde edilir.

Tanım 4.2 "Eğer $i = 1, \dots, m$ için $b_i = b$ ise o zaman $\vec{b} \in BMO^m$ olur ve

$$T_{\vec{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [b(x) - b(y)]^m K(x, y) f(y) dy$$

elde edilir. $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ bir $BMO^m(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu olduğunda $T_{\vec{b}}$ komütatörünü her $p \in LH(\mathbb{R}^n) \cap P(\mathbb{R}^n)$ için $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı bir operatör olarak

genişletebiliriz. Ayrıca, $p(\cdot) \equiv 1$ uç noktası durumunda komütatörlerin singüler integral operatörlerinden daha singüler olduğuna dikkat edelim. $p(\cdot) \equiv 1$ uç noktası durumu için Perez and Gonzalez (2002) e başvururuz."

Lemma 4.1 $q(\cdot), q_1(\cdot), \dots, q_m(\cdot) \in P_0(\mathbb{R}^n)$ olsun öyle ki $\frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{q_1(\cdot)} + \dots + \frac{1}{q_m(\cdot)}$ dir. O zaman

$$\|f_1 \dots f_m\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L^{q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \dots \|f_m\|_{L^{q_m(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği herhangi $f_j \in L^{q_j(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve $i = 1, \dots, m$ için sağlar.

Lemma 4.2 " $1 < p < \infty$ ve $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in BMO^m(\mathbb{R}^n)$ olsun, o zaman bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\vec{b}} f(x)|^p dx \leq C \Pi_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$$

dir (Perez and Gonzalez 2002)."

BMO fonksiyonlu komütatörler zayıf (1,1) tip olmasa da Perez ve Trujillo-Gonzalez (2002) tarafından tanımlanan aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir.

Lemma 4.3 $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in BMO^m(\mathbb{R}^n)$ olsun, o zaman bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\sup_{t>0} \frac{1}{\phi\left(\frac{1}{t}\right)} |\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\vec{b}} f(x)| > t\}| \leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\phi\left(\frac{1}{t}\right)} |\{x \in \mathbb{R}^n : M^\phi(\Pi_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} f)(x) > t\}|$$

dir, burada $\phi(t) = t \ln^m(e + t)$ dir.

Lemma 4.4 " $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in BMO^m(\mathbb{R}^n)$ olsun, o zaman bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\vec{b}} f(x)| > \lambda\}| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{\Pi_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} |f(x)|}{\lambda}\right) dx$$

dir, burada $\phi(t) = t \ln^m(e + t)$ dir.

Orlicz uzaylarında genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve John-Nirenberg eşitsizliğinden

$$\frac{1}{|B|} \int_B |b_1(x) - (b_1)_B| \dots |b_m(x) - (b_m)_B| |g(x)| dx \lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \|g\|_{L(\log L)^m, B}, \quad (4.2)$$

elde ederiz (Polidoro and Ragusa 2001)."

Teorem 4.1 $p \in LH(\mathbb{R}^n) \cap P(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman $\|\cdot\|_{BMO^{p(\cdot)}}$ ve $\|\cdot\|_{BMO}$ normları eşdeğerdir (Ho and Kwok-Pun 2016).

Bir B yuvarımın üzerinde bir f fonksiyonunun ϕ ortalamasının $\phi(t) = t(1 + \log^+ t)$ için

$$\|f\|_{L(\log L), B} = \|f\|_{\phi, B} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|B|} \int_B \phi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}$$

ile tanımlandığı bilinmektedir.

Lemma 4.5 " $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in BMO^m(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki $p \in LH(\mathbb{R}^n) \cap P(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|T_{\vec{b}} f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \|f\|_{L^{p(\cdot)}}$$

sağlanır (Tan vd. 2017)."

$$H_w^* g(t) := \int_t^\infty g(s) w(s) ds, \quad 0 < t < \infty$$

ağırlıklı Hardy operatörünün sınırlılığı ile ilgili aşağıdaki sonuçları ileride kullanacağız, burada w bir ağırlıktır.

Teorem 4.2 " ν_1, ν_2 ve $w, (0, \infty)$ üzerinde ağırlıklar olsun ve $\nu_1(t)$ orijinin bir komşuluğu dışında sınırlı olsun.

$$\sup_{t>0} \nu_2(t) H_w^* g(t) \leq C \sup_{t>0} \nu_1(t) g(t)$$

eşitsizliğinin $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ve azalmayan her g ve bir $C > 0$ için sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$B := \sup_{t>0} \nu_2(t) \int_t^\infty \frac{w(s)ds}{\operatorname{ess\,inf}_{s<t<\infty} \nu_1(t)} < \infty$$

olmasıdır (Guliyev 2013)."

Teorem 4.3 " $p \in LH(\mathbb{R}^n) \cap P(\mathbb{R}^n)$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x, s) s^{\theta_{p(x,s)}} dt}{t^{\theta_{p(x,t)}}} \frac{dt}{t} \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlasın, burada C x ve r ye bağlı değildir. O zaman T Calderon-Zygmund operatörü $M^{p(\cdot), \varphi_1}$ den $M^{p(\cdot), \varphi_2}$ ye sınırlıdır (Guliyev vd. 2010)."

Uyarı 4.1 Teorem 4.3 ün $p(\cdot) \equiv \text{sabit}$ hali Akbulut vd. (2012) tarafından ve $\varphi_1(x, r) = \varphi_2(x, r) \equiv |B(x, r)|^{\frac{k-1}{p}}$ hali de Almeida vd. (2008) tarafından gösterilmiştir.

Şimdi ana sonuçları vermeye başlayalım. İlk olarak, genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzayları üzerindeki $T_{\vec{b}}$ multilineer komütatör operatörlerinin sınırlılığı için ana teoremleri ispatlamakta kullanacağımız temel araçlar olan iki lokal Guliyev tahminini vereceğiz.

Teorem 4.4 "(Lokal Guliyev eşitsizliği) $p \in LH(\mathbb{R}^n) \cap P(\mathbb{R}^n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in$

$BMO^m(\mathbb{R}^n)$ ve $T_{\vec{b}}$, (4.1) de tanımlanan multilineer komütatör olsun. O zaman herhangi bir $B = B(x_0, r)$ ve her $f \in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\|T_{\vec{b}} f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, r))} \leq C \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO^{r, \theta_p}(x_0, r)} \int_{2r}^\infty \ln^m \left(e + \frac{t}{r} \right) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} t^{-\theta_p(x_0, t)} \frac{dt}{t} \quad (4.3)$$

burada C $f, x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ a bağlı değildir (Ekinçioğlu vd. 2021).

İspat. $p \in LH(\mathbb{R}^n) \cap P(\mathbb{R}^n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in BMO^m(\mathbb{R}^n)$ ve $f \in L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için $B = B(x_0, r)$ ve $f_1 = f_{\chi_{2B}}$, $f_2 = f_{\chi_{(2B)^c}}$ olmak üzere $f = f_1 + f_2$ yazalım. Her $f \in L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$T_{\vec{b}} f(x) := T_{\vec{b}, \mathbf{0}} f_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m (b_j(x) - b_j(y)) K(x, y) f_2(y) dy \quad (4.4)$$

yi tanımlayalım.

$T_{\vec{b}, \mathbf{0}}$ komütatörü $p \in LH(\mathbb{R}^n) \cap P(\mathbb{R}^n)$ olacak şekilde $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı bir lineer operatör olan komütatördür. $T_{\vec{b}} f(x)$ tanımının B yuvarının seçimine bağlı olmadığını kontrol etmek kolaydır. İlk olarak $T_{\vec{b}, \mathbf{0}} f(x)$ in hemen her x için iyi tanımlı olduğunu ve x i içeren B nin seçiminden bağımsız olduğunu gösterelim. $T_{\vec{b}, \mathbf{0}}$ Lemma 4.2 den dolayı $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı ve $f_1 \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan, $T_{\vec{b}, \mathbf{0}} f_1$ iyi tanımlıdır.

Daha sonra, $T_{\vec{b}} f(x)$ i tanımlayan sağ tarafın ikinci teriminin herhangi bir $f \in L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için mutlak yakınsak olduğunu göstereceğiz. $|T_{\vec{b}} f_2(x)|$ terimi için, genelliği kaybetmeden $m = 2$ kabul edebiliriz. Böylece $T_{\vec{b}} f_2$ operatörü dört parçaya ayrılabilir.

$$\begin{aligned} T_{\vec{b}} f_2(x) &= (b_1(x) - (b_1)_B)(b_2(x) - (b_2)_B) \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f_2(y) dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) (b_1(y) - (b_1)_B)(b_2(y) - (b_2)_B) f_2(y) dy \\ &- (b_1(x) - (b_1)_B) \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) (b_2(y) - (b_2)_B) f_2(y) dy \\ &- (b_2(x) - (b_2)_B) \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) (b_1(y) - (b_1)_B) f_2(y) dy \\ &= I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + I_4(x) \end{aligned}$$

Keyfi $x \in B$ ve $y \in {}^c(2B)$ noktaları için

$$\frac{1}{2} |x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2} |x_0 - y|,$$

nin sağlandığı kolayca görülür. O zaman her $x \in B$ için

$$\begin{aligned}
|T_{\vec{b}} f_2(x)| &\leq |I_1(x)| + |I_2(x)| + |I_3(x)| + |I_4(x)| \\
&+ \int_{c(2B)} |b_1(y) - (b_1)_B| |b_2(y) - (b_2)_B| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \\
&+ |b_1(x) - (b_1)_B| \int_{c(2B)} |b_2(y) - (b_2)_B| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \\
&+ |b_2(x) - (b_2)_B| \int_{c(2B)} |b_1(y) - (b_1)_B| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \\
&\lesssim |b_1(x) - (b_1)_B| |b_2(x) - (b_2)_B| \int_{c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy
\end{aligned}$$

$I_1(x)$ i bulalım

$$\begin{aligned}
|I_1(x)| &= \int_{c(2B)} \prod_{i=1}^2 |b_i(y) - (b_i)_B| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \\
&\approx \int_{c(2B)} \prod_{i=1}^2 |b_i(y) - (b_i)_B| |f(y)| \int_{|x_0 - y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |x_0 - y| \leq t} \prod_{i=1}^2 |b_i(y) - (b_i)_B| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0, t)} \prod_{i=1}^2 |b_i(y) - (b_i)_B| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

dir. (4.2) ye Hölder eşitsizliğini uygularız Lemma 4.1 ve Teorem 4.1 den şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
I_1(x) &\lesssim \int_{2r}^{\infty} \left\| \prod_{j=1}^2 |b_j(\cdot) - (b_j)_B| \right\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x_0, t))} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \left\| \prod_{j=1}^2 |b_j(\cdot) - (b_j)_{B(x_0, t)}| \right\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x_0, t))} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&+ \int_{2r}^{\infty} |(b_1)_{B(x_0, t)} - (b_1)_B| \left\| |b_2(\cdot) - (b_2)_{B(x_0, t)}| \right\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x_0, t))} \times \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{2r}^{\infty} |(b_2)_{B(x_0,t)} - (b_2)_B| \|b_1(\cdot) - (b_1)_{B(x_0,t)}\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x_0,t))} \times \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
& + \int_{2r}^{\infty} \prod_{j=1}^2 |(b_j)_{B(x_0,t)} - (b_j)_B| \|1\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x_0,t))} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
& \lesssim \int_{2r}^{\infty} \prod_{j=1}^2 \|b_j(\cdot) - (b_j)_{B(x_0,t)}\|_{L^{2p'(\cdot)}(B(x_0,t))} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
& \quad + \int_{2r}^{\infty} \ln \frac{t}{r} \|1\|_{L^{2p'(\cdot)}(B(x_0,t))} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
& + \int_{2r}^{\infty} \prod_{j=1}^2 |(b_j)_{B(x_0,t)} - (b_j)_B| \|1\|_{L^{2p'(\cdot)}(B(x_0,t))} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
& \lesssim \prod_{j=1}^2 \|b_j\|_{BMO} \int_{2r}^{\infty} \ln^2(e + \frac{t}{r}) \|1\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x_0,t))} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
& \lesssim \prod_{j=1}^2 \|b_j\|_{BMO} \int_{2r}^{\infty} \ln^2(e + \frac{t}{r}) \|1\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x_0,t))} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} t^{-\theta_{p(x_0,t)}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Şimdi $I_2(x)$ i bulalım

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| & = |b_1(x) - (b_1)_B| \int_{c(2B)} \frac{|b_2(y) - (b_2)_B|}{|x_0 - y|^n} |f(y)| dy \\
& \approx |b_1(x) - (b_1)_B| \int_{c(2B)} |b_2(y) - (b_2)_B| |f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\
& = |b_1(x) - (b_1)_B| \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |x_0-y| \leq t} |b_2(y) - (b_2)_B| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
& \leq |b_1(x) - (b_1)_B| \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b_2(y) - (b_2)_B| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

dir. (4.2) ye Hölder eşitsizliğini uygularız ve Teorem 4.1 den şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| & \lesssim |b_1(x) - (b_1)_B| \int_{2r}^{\infty} \|b_2(\cdot) - (b_2)_B\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x_0,t))} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
& \lesssim |b_1(x) - (b_1)_B| \|b_2\|_{BMO} r^{\theta_{p(x_0,r)}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \frac{\ln t}{r}\right) \|1\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x_0,t))} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\lesssim |b_1(x) - (b_1)_B| \|b_2\|_{BMO} r^{\theta_{p(x_0, r)}} \int_{2r}^{\infty} \ln\left(e + \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} t^{-\theta_{p(x_0, t)}} \frac{dt}{t}.$$

Benzer şekilde, $I_3(x)$ i bulabiliriz:

$$|I_3(x)| \lesssim |b_2(x) - (b_2)_B| \|b_1\|_{BMO} r^{\theta_{p(x_0, r)}} \int_{2r}^{\infty} \ln\left(e + \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} t^{-\theta_{p(x_0, t)}} \frac{dt}{t}$$

Hölder eşitsizliğini uygulayarak, şunu elde ederiz :

$$\begin{aligned} \int_{c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy &\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} \|1\|_{L^{p'(B(x_0, t))}} \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} \|1\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))}^{-1} \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

(4.5) den de şunu elde ederiz:

$$|I_4(x)| \lesssim \prod_{j=1}^2 |b_j(x) - (b_j)_B| \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} t^{-\theta_{p(x_0, t)}} \frac{dt}{t}.$$

Dolayısıyla $T_{\vec{b}} f(x)$ in herhangi bir $f \in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için mutlak yakınsak olduğu görülür. Şimdi (4.3) eşitsizliğinin geçerliliğini gösterelim.

$$\|T_{\vec{b}} f\|_{L^{p(\cdot)}(B)} \leq \|T_{\vec{b}} f_1\|_{L^{p(\cdot)}(B)} + \|T_{\vec{b}} f_2\|_{L^{p(\cdot)}(B)}$$

olduğu açıktır. $T_{\vec{b}}$ nin $L^{p(\cdot)}$ deki sınırlılığından (Lemma 4.2 ye bakınız) şu çıkar:

$$\|T_{\vec{b}} f_1\|_{L^{p(\cdot)}(B)} \leq \|T_{\vec{b}} f_1\|_{L^{p(\cdot)}} \lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \|f_1\|_{L^{p(\cdot)}}$$

$$\lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(2B)}.$$

$I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_3(x)$ ve $I_4(x)$ için bulduğumuz sonuçları toplarsak, her $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|T_{\vec{b}} f_2\|_{L^{p(\cdot)}(B)} \lesssim \prod_{j=1}^2 \|b_j\|_{BMO} \|1\|_{L^{p(\cdot)}(B)} \int_{2r}^{\infty} \ln^2\left(e + \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} t^{-\theta_{p(x_0, t)}} \frac{dt}{t}$$

$$+ \|b_1(\cdot) - (b_1)_B\|_{L^{p(\cdot)}(B)} \int_{2r}^{\infty} \ln\left(e + \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} t^{-\theta_{p(x_0, t)}} \frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned}
& + \|b_2(\cdot) - (b_2)_B\|_{L^{p(\cdot)}(B)} \int_{2r}^{\infty} \ln\left(e + \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} t^{-\theta_{p(x_0,t)}} \frac{dt}{t} \\
& + \prod_{j=1}^2 \|b_j(\cdot) - (b_j)_B\|_{L^{2p(\cdot)}(B)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} t^{-\theta_{p(x_0,t)}} \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p(\cdot)}(2B)} & \approx |B| \|f\|_{L^{p(\cdot)}(2B)} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} \lesssim |B| \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
& \leq r^{\theta_{p(x_0,r)}} \|1\|_{L^{p'}(B)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
& \leq r^{\theta_{p(x_0,r)}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} \|1\|_{L^{p'}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
& \leq r^{\theta_{p(x_0,r)}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} t^{-\theta_{p(x_0,t)}} \frac{dt}{t}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde ederiz. Son olarak şu sonuca varıyoruz:

$$\begin{aligned}
\|T_{\vec{b}} f\|_{L^{p(\cdot)}(B)} & \lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(2B)} + \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} r^{\theta_{p(x_0,r)}} \\
& \quad \times \int_{2r}^{\infty} \ln^m\left(e + \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0,t))} t^{-\theta_{p(x_0,t)}} \frac{dt}{t},
\end{aligned}$$

ve istenen eşitsizlik (4.6) dan görülür." ■

Teorem 4.5 "(Zayıf lokal Guliyev eşitsizliği) $T_{\vec{b}}$, (4.1) de tanımlanan multi-

linear komütatör ve $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in BMO^m(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman herhangi bir $B = B(x_0, r)$ ve her $f \in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\|T_{\vec{b}} f\|_{WL^1(B(x_0,r))} \leq C \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} t^n \int_{2r}^{\infty} \ln^m\left(e + \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L^{\phi}(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}},$$

burada C , f , $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ ye bağlı değildir ve $\phi(t) = t \ln^m(e + t)$ ve $\|f\|_{L^{\phi}} = \|\phi(|f|)\|_{L^1}$ dir (Ekincioglu vd. 2021).

İspat. $p(\cdot) \equiv 1$ olsun. Her $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için $T_{\vec{b}} f(x)$ i (4.5) deki gibi tanımlayalım.

f yi önceki gibi $f = f_1 + f_2$ olarak iki parçaya ayıralım, bu da $T_{\vec{b},0} f(x)$ in hemen her x için iyi tanımlı olduğunu verir, $T_{\vec{b},0}$ Lemma 4.2 den dolayı L^ϕ den WL^1 e sınırlıdır

ve $f_1 \in L^\phi(\mathbb{R}^n)$ den $T_{\vec{b},0} f_1$ iyi tanımlıdır. Yine, (4.5) deki $T_{\vec{b}} f(x)$ in tanımında sağ tarafın ikinci teriminin herhangi $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve hemen her x için mutlak yakınsak

olduğunu gösterebiliriz. O zaman

$$\|T_{\vec{b}} f\|_{WL^1(B)} \leq \|T_{\vec{b}} f_1\|_{WL^1(B)} + \|T_{\vec{b}} f_2\|_{WL^1(B)}$$

olur. $T_{\vec{b}}$ nin L^ϕ den WL^1 ye sınırlılığından şu sonuç çıkar:

$$\begin{aligned} \|T_{\vec{b}} f_1\|_{WL^1(B)} &\leq \|T_{\vec{b}} f_1\|_{WL^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \|f_1\|_{L^\phi(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \|f\|_{L^\phi(2B)}. \end{aligned}$$

$\|T_{\vec{b}} f_2\|_{WL^1(B)}$ nin son terim için, genelliği bozmaksızın, $m = 2$ kabul edelim. Homojenlikten dolayı $\frac{\lambda}{2} = \|b_1\| = \|b_2\| = 1$ olduğunu kabul etmek yeterlidir ve dolayısıyla her $B = B(x_0, r)$ için sadece

$$|\{x \in B : |T_{\vec{b}} f_2(x)| > 1\}| \lesssim |B| \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L^\phi(B(x_0,t))} |B(x_0,t)|^{-1} \frac{dt}{t}$$

yi ispatlamamız gerekir. Aslında, Lemma 4.3 e göre

$$|\{x \in B : |T_{\vec{b}} f_2(x)| > 1\}| \leq \sup_{t>0} \frac{1}{\phi(\frac{1}{t})} |\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\vec{b}} f_2(x)| > t\}|$$

$$\lesssim \sup_{t>0} \frac{1}{\phi(\frac{1}{t})} |\{x \in B : M_\phi(f_2)(x) > t\}|$$

$$= \sup_{t>0} \frac{1}{\phi(\frac{1}{t})} |\{x \in B : M(\phi(f_2))(x) > t\}|$$

elde ederiz, burada $\phi(t) = t \ln^m(e+t)$ dir. Herhangi bir f ve $\phi \geq 0$ fonksiyonu için

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}} \phi(t) dx \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M\phi(x) dx$$

Fefferman-Stein maksimal eşitsizliğini kullanırız. Bu

$$\begin{aligned} |\{x \in B : M(\phi(f_2))(x) > t\}| &\lesssim \frac{1}{t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(f_2)(x) > t\}} \chi_B(x) dx \\ &\lesssim \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(f_2)(x) M(\chi_B)(x) \end{aligned}$$

eşitsizliğini verir. O zaman

$$\begin{aligned} |\{x \in B : |T_{\vec{b}} f_2(x)| > 1\}| &\lesssim \sup_{t>0} \frac{1}{\phi(\frac{1}{t})} |\{x \in B : M(\phi(f_2))(x) > t\}| \\ &\lesssim \sup_{t>0} \frac{1}{t\phi(\frac{1}{t})} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(f_2)(x) M(\chi_B)(x) \end{aligned}$$

elde ederiz." ■

Aşağıdaki ana sonuçlarımız olan iki teoremden $T_{\vec{b}}$ multilineer komütatör operatörlerinin genelleştirilmiş değişken üslü Morrey uzayları üzerindeki sırasıyla kuvvetli ve zayıf tipten sınırlılığını ispat edeceğiz.

Teorem 4.6 " $p \in LH(\mathbb{R}^n) \cap P(\mathbb{R}^n)$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_r^\infty \ln^m \left(e + \frac{t}{r} \right) \frac{\text{ess inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) s^{\theta_{p(x,s)}} dt}{t^{\theta_{p(x,t)}}} \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlasın, burada C x ve r ye bağlı değildir. $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in BMO^m(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman $T_{\vec{b}}$, $M^{p(\cdot), \varphi_1}$ den $M^{p(\cdot), \varphi_2}$ ye sınırlı bir operatördür. Üstelik,

$$\|T_{\vec{b}} f\|_{M^{p(\cdot), \varphi_2}} \lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \|f\|_{M^{p(\cdot), \varphi_1}}$$

sağlanır (Ekincioglu vd. 2021).

İspat. Teorem 4.2 ve Teorem 4.4 e göre

$$\|T_{\vec{b}} f\|_{M^{p(\cdot), \varphi_2}} \lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi_2(x, r)^{-1}$$

$$\times \int_r^\infty \ln^m \left(e + \frac{t}{r} \right) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x_0, t))} t^{-\theta_{p(x,t)}} \frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi_1(x, r)^{-1} r^{-\theta_{p(x,r)}} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(B(x,r))} \\
&= \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \|f\|_{M^{p(\cdot), \varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde ederiz." ■

Teorem 4.7 " $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in BMO^m(\mathbb{R}^n)$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_r^\infty \ln^m \left(e + \frac{t}{r} \right) \frac{\text{ess inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) s^n}{t^n} \frac{dt}{t} \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlasın, burada C x ve r ye bağlı değildir. O zaman $T_{\vec{b}}, M^{\phi, \varphi_1}$ den WM^{1, φ_2} ye sınırlı bir operatördür. Üstelik

$$\|T_{\vec{b}} f\|_{WM^{1, \varphi_2}} \lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \|f\|_{M^{\phi, \varphi_1}}$$

sağlanır, burada $\phi(t) = t \ln^m(e + t)$ dir (Ekincioglu vd. 2021).

İspat. Teorem 4.2 ve Teorem 4.5 e göre

$$\begin{aligned}
\|T_{\vec{b}} f\|_{WM^{1, \varphi_2}} &\lesssim \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi_2(x, r)^{-1} \\
&\quad \times \int_r^\infty \ln^m \left(e + \frac{t}{r} \right) \|f\|_{L^\phi(B(x,t))} |B(x, t)|^{-1} \frac{dt}{t} \\
&= \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi_1(x, r)^{-1} |B(x, t)|^{-1} \|f\|_{L^\phi(B(x,r))} \\
&= \prod_{j=1}^m \|b_j\|_{BMO} \|f\|_{M^{\phi, \varphi_1}}
\end{aligned}$$

elde ederiz." ■

KAYNAKLAR

- Akbulut, A., Guliyev, V.S., Mustafayev, R., 2012. On the boundedness of the maximal operator and singular integral operators in generalized Morrey spaces, *Math. Bohem.* 137(1), 27–43.
- Almeida, A., Hasanov, J., Samko, S., 2008. Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces. *Georgian Math. J.* 15(2), 195–208.
- Bandaliyev, R.A., Guliyev, V.S., 2019. Embedding theorems between variable-exponent Morrey spaces. *Math. Notes.* 106(3–4), 488–500.
- Capone, C., Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., 2007. The fractional maximal operators and fractional integrals on variable L_p spaces. *Rev. Mat. Iberoam* 23, 743–770.
- Chiarenza, F., Frasca, M., 1987. Morrey spaces and Hardy–Littlewood maximal function. *Rend. Mat.* 7, 273–279.
- Chiarenza, F., Frasca, M., Longo, P., 1993. $W_{2,p}$ -solvability of Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.* 336(2), 841–853.
- Coifman, R.R., Weiss, G., 1976. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. *Ann. Math.* 103(3), 611–635.
- Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Martell, J., et al., 2006. The boundedness of classical operators on variable L_p spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 31, 239–264.
- Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., 2013. Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis, 1st edn. Birkhauser, Basel.
- Di Fazio, G., Ragusa, M.A., 1993. Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients. *J. Funct. Anal.* 112, 241–256.
- Diening, L., Ružicka, M., 2003. Calderón–Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L_{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics. *J. Reine. Angew. Math.* 563, 197–220.
- Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., Ruzicka, M., 2011. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Springer, Berlin.
- Ekincioglu, I., Keskin, C., Guliyev, R., 2020. Lipschitz estimates for rough fractional multilinear integral operators on local generalized Morrey spaces. *Tbilisi Math. J.* 13(1), 47–60.
- Ekincioglu, I., Guliyev, V.S., Kaya, E., 2020. B_n –maximal operator and B_n -singular integral operators on variable exponent Lebesgue spaces. *Math. Slov.* 70(4), 893–902.

- Ekincioglu, I., Keskin, C., Serbetci, A., 2021. Multilinear commutators of Calderón-Zygmund operator on generalized variable exponent Morrey spaces. *Positivity* 25(4), 1551–1567.
- Fan, X., 2010. Variable exponent Morrey and Campanato spaces. *Nonlinear Anal.* 72(11), 4148–4161.
- Grafakos, L., Torres, R., 2002. Multilinear Calderon-Zygmund theory, *Adv. in Math.*, 165, 124–164.
- Guliyev, V.S., 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces. *J. Inequal. Appl.* Article number: 503948, 20 pages.
- Guliyev, V.S., Hasanov, J., Samko, S., 2010. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces. *Math. Scand.* 107(2), 285–304.
- Ho, Kwok-Pun., 2016. Singular integral operators, John-Nirenberg inequalities and Tribel-Lizorkin type spaces on weighted Lebesgue spaces with variable exponents. *Rev. Un. Mat. Argent.* 57(1), 85–101.
- Izumi, M., Sawano, Y., 2012. Variable Lebesgue norm estimates for BMO functions, *Czechoslovak Math. J.* 62(137), 717–727.
- KENING, AND E. STEIN, Multilinear estimates and fractional integration, *Math. Res. Lett.*, 6(1999), 1–15.
- Komori, Y., Shirai, S., 2009. Weighted Morrey spaces and a singular integral operator. *Math. Nachr.* 282(2), 219–231.
- Kovacik, O., Rakosnik, J., 1991 On spaces $L_{p(x)}$ and $W_{\kappa,p(x)}$. *Czechoslovak Math. J.* 41, 592–618.
- Lerner, A.K., Ombrosi, S., Pérez, C., Torres, R.H., Trujillo-González, R., 2009. New maximal functions and multiple weights for the multilinear Calderón–Zygmund theory. *Adv. Math.* 220, 1222–1264.
- Morrey, C.B., 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 43, 126–166.
- Mizuhara, T., 1991. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces. In: Harmonic Analysis (Sendai,1990), *S. Igari (Ed.), ICM90 Satellite Conference Proceedings, Springer, Tokyo, Japan* pp. 183–189.
- Nakai, E., 1994 Hardy–Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces. *Math. Nachr.* 166, 95–103.
- Pérez, C., Trujillo-González, R., 2002. Sharp weighted estimates for multilinear commutators. *J. London Math. Soc.* 65, 672–692.

- Pérez, C., Torres, R., 2003. Sharp maximal function estimates for multilinear singular integrals, Harmonic analysis at Mount Holyoke, *Contemp. Math.*, 320, 323–331.
- Peetre, J., (1969). On the theory of L_p . *J. Funct. Anal.* 4, 71–87.
- Polidoro, S., Ragusa, M.A., 2001. Hölder regularity for solutions of ultraparabolic equations in divergence form. *Potential Anal.* 14(4), 341–350.
- Sawano, Y., Shirai, S., 2019. A thought on generalized Morrey spaces. *J. Indones. Math. Soc.* 25(3), 210–281.
- Sawano, Y., Shirai, S., 2008. Compact commutators on Morrey spaces with non-doubling measures. *Georgian Math. J.* 15(2), 353–376.
- Stein, E.M., 1993. Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton Mathematical Series, vol. 43. Princeton University Press, Princeton.
- Tan, J., Liu, Z., Zhao, J., 2017. On some multilinear commutators in variable Lebesgue spaces. *J. Math. Inequal.* 11(3), 715–734.
- Xiao, F.Y., 2012. Some estimates for multilinear commutators on the weighted Morrey spaces. *Math. Sci.* 6, 33.