

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
2024-YL-35

BANACH CEBİRLERİNDE n -JORDAN ÇARPANLARIN
KARAKTERİZASYONU

Burcu AKÇAY
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Berna ARSLAN

KABUL VE ONAY

T.C. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Yüksek Lisans Programı öğrencisi Burcu AKÇAY tarafından hazırlanan “BANACH CEBİRLERİNDE n -JORDAN ÇARPANLARIN KARAKTERİZASYONU” başlıklı tez, aşağıdaki jüri tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 25/06/2024

Jüri Üyeleri

- Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Dilek AÇIKGÖZ KAYA
Aydın Adnan Menderes Üniversitesi
- Üye : Dr. Öğr. Üyesi Zekiye ÇİLOĞLU ŞAHİN
Süleyman Demirel Üniversitesi
- Üye : Dr. Öğr. Üyesi Berna ARSLAN
Aydın Adnan Menderes Üniversitesi

ONAY:

Bu tez Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri tarafından uygun görülmüş ve Fen Bilimleri Enstitüsünün tarih ve sayılı oturumunda alınan numaralı Yönetim Kurulu kararıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa SÜRMEN

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez yazım sürecinde bana yol gösteren, tez danışmanım değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Berna ARSLAN, tezin oluşumundan tamamlanmasına kadar geçen süreçte, değerli fikirleri ile tezi yönlendirmiş, tezimin tamamlanması için yoğun destek vermiştir. Çalışmalarım sırasında sabır gösteren ve beni destekleyen eşim Hakan'a, bu süreçte dünyaya yeni gelip benimle çalışan küçük kızım İlay'a, motivasyon ve desteğini benden esirgemeyen arkadaşım Beyza'ya, hep yanımda olan sevgili annem Ruşen'e ve kardeşlerim Zeynep, Yasemin, Mert'e, tezime katkılarından dolayı lisans ve yüksek lisans hocalarıma sonsuz teşekkürler.



T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLİMSEL ETİK BEYANI

“Banach Cebirlerinde n -Jordan Çarpanların Karakterizasyonu” başlıklı Yüksek Lisans tezindeki bütün bilgileri etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yaptığımı bildiririm. İfade ettiklerimin aksi ortaya çıktığında ise her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Burcu AKÇAY

25/06/2024

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR	iii
BİLİMSEL ETİK BEYANI	v
SİMGELER DİZİNİ	ix
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	5
3.1. Temel Kavramlar	5
3.2. Banach Cebirleri	17
3.3. C^* -Cebirler	21
3.4. $L^1(G)$ Grup Cebiri	24
3.5. Amenable Banach Cebirleri	28
3.6. Banach Cebirlerde Sıfır Çarpımı Koruyan Dönüşümler	33
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	43
4.1. Çarpanlar ve Jordan Çarpanlar	43
4.2. n -Çarpanlar ve n -Jordan Çarpanlar	46
4.3. n -Jordan Çarpanların Karakterizasyonu	49
4.4. Sıfır Çarpım ile n -Jordan Çarpanların Karakterizasyonu	61
5. SONUÇ	69
KAYNAKLAR	71
ÖZ GEÇMİŞ	75

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: $= \{0, 1, 2, \dots\}$ Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: $= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
1_R	: Birimli R halkasının birim elemanı
$0_R = 0$	: R halkasının sıfırı
$I_R = I$	: R halkasının birim dönüşümü
$\mathcal{L}(M, N)$	: M den N ye tüm lineer dönüşümlerin kümesi
$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M, M)$	: M den M ye tüm lineer dönüşümlerin kümesi
e_A	: Birimli A Banach cebirinin birim elemanı
I_n	: $n \times n$ tipinde birim matris
$0_{n \times n}$	: $n \times n$ tipinde sıfır matris
a^{-1}	: a elemanının tersi
$\text{Inv}(A)$	: A daki tüm tersinir elemanların kümesi
A^{op}	: A nın zıt cebiri
$\overline{A}$	: A kümesinin kapanışı
$\mathfrak{B}(X, Y)$	: X den Y ye tüm sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi
$\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}(X, X)$	: X den X e tüm sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi
$\ T\ $	: T operatörünün normu
X^*	: X in dual uzayı
X^{**}	: X in ikinci duali
T^*	: T sınırlı lineer dönüşümünün duali
T^{**}	: T sınırlı lineer dönüşümünün ikinci duali
$L^1(G)$	: G nin grup cebiri
$\widetilde{B}$	: B dönüşümünün genişlemesi
a^*	: a elemanının eki
A_{sa}	: A daki tüm kendine-ek elemanların kümesi
$\mathfrak{J}(A)$	: A daki tüm idempotentler tarafından üretilen alt cebir
$\text{Mul}_n(A, X)$	: A dan X e tüm n -çarpanların kümesi
$\text{JMul}_n(A, X)$	: A dan X e tüm n -Jordan çarpanların kümesi

ÖZET

BANACH CEBİRLERİNDE n -JORDAN ÇARPANLARIN KARAKTERİZASYONU

Akçay B. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik
Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Berna Arslan, Aydın,
2024.

Amaç: Bu tezde, Banach cebirleri üzerinde tanımlı n -Jordan çarpanlar üzerine günümüze kadar yapılan çalışmalarda elde edilen bazı özellikler derlenerek, bu alanda çalışma yapılması durumunda konu ile ilgili temel bilgilerin bir araya getirilmesi amaçlanmıştır.

Materyal ve Yöntem: Tamamen teorik olan bu tez hazırlanırken n -Jordan çarpanlar hakkında daha önce yapılmış çalışmalar incelenmiştir. Bu konuya temel oluşturmak için kitaplardan ve internet kaynaklarından faydalanılmıştır.

Bulgular: Banach cebirlerinde n -Jordan çarpanlar incelenmiş, bu kavrama ilişkin örnekler sunulmuş ve bu kavram sıfır çarpım üzerindeki etkileri ile karakterize edilerek C^* -cebirlerde ve değişmeli yerel kompakt G grubunun $L^1(G)$ grup cebirinde sağladıkları özellikler incelenmiştir.

Sonuç: Yerel kompakt bir G grubunun $L^1(G)$ grup cebiri, idempotentler ile üretilmiş birimli Banach cebirleri veya C^* -cebirleri gibi farklı uzaylardaki karakterizasyonlar üzerine çalışmak, Banach cebirlerinde tanımlı çarpanlar ve Jordan çarpanların yapısının daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır. Benzer karakterizasyonlar yapabilmek için yeni cebirsel yapı örnekleri elde edilebilir. Ayrıca Banach cebirlerde türev çeşitleri üzerine bilinen bilginin n -çarpanlar ve n -Jordan çarpanlar hakkında çıkaracağı sonuçlar araştırılabilir.

Anahtar kelimeler: Banach cebiri, n -Jordan çarpan, $\mathbb{B}$ özelliği, amenabilite, grup cebiri, C^* -cebiri.

ABSTRACT

CHARACTERIZATION OF n -JORDAN MULTIPLIERS OF BANACH ALGEBRAS

Akçay B. Aydın Adnan Menderes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics, Master Thesis, Supervisor: Asst. Prof. Berna Arslan, Aydın, 2024.

Objective: In this thesis, it is aimed to compile some of the properties obtained in the studies on n -Jordan multipliers defined on Banach algebras so far and to bring together the basic information about the subject in case of a study in this field.

Material and Methods: While preparing this thesis, which is purely theoretical, previous studies on n -Jordan multipliers were examined and internet resources were utilized.

Results: We study n -Jordan multipliers in Banach algebras, present examples of this notion, characterize it by its action on the zero product, and study the properties it provides in C^* -algebras and in the group algebra $L^1(G)$ of a commutative locally compact group G .

Conclusion: Studying characterizations on various spaces, such as the group algebra $L^1(G)$ of a locally compact group G , unital Banach algebras generated by idempotents, or C^* -algebras, will help to better understand the structure of multipliers and Jordan multipliers defined in Banach algebras. New examples of algebraic structures can be obtained to make similar characterizations. Furthermore, the implications of the known knowledge on types of derivations in Banach algebras for n -multipliers and n -Jordan multipliers can be investigated.

Keywords: Banach algebra, n -Jordan multiplier, property $\mathbb{B}$, amenability, group algebra, C^* -algebra.

1. GİRİŞ

Çarpan kavramı, ilk olarak harmonik analizde Fourier serilerinin toplanabilirliği konusu ile bağlantılı olarak ortaya çıkmıştır. A bir Banach cebiri ve $T : A \rightarrow A$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için, $T(ab) = aT(b)$ ise T dönüşümüne (sağ) çarpan adı verilir. Daha sonra bu kavram, grup cebirlerinin homomorfizmalarının araştırılması, Banach cebirlerinin genel teorisi gibi diğer harmonik analiz alanlarında kullanılmıştır.

Banach cebirleri üzerinde tanımlı lineer dönüşümleri, sıfır çarpım üzerindeki etkileri ile karakterize etme konusu, son yıllarda birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir. A ile B birer Banach cebiri ve $T : A \rightarrow B$ bir lineer dönüşüm olmak üzere eğer T lineer dönüşümü, $a, b \in A$ ve $ab = 0$ iken $T(a)T(b) = 0$ koşulunu sağlıyor ise T dönüşümüne *sıfır çarpımı koruyan lineer dönüşüm* adı verilir. Sıfır çarpımı koruyan sürekli $T : A \rightarrow B$ lineer dönüşümleri araştırırken sürekli bir $\varphi : A \times A \rightarrow B$, $\varphi(a, b) = T(a)T(b)$ ($a, b \in A$) 2-lineer fonksiyonu tanımlanır. Bu durumda $a, b \in A$ ve $ab = 0$ iken $\varphi(a, b) = 0$ koşulu sağlanır. Benzer bir problem olarak, n -Jordan çarpanların karakterizasyonu için literatürde “ $a, b \in A$, $ab = 0 \Rightarrow aT(b) = 0$ ” koşulu kullanılmıştır.

Tez çalışmasında, esas olarak A. Zivari-Kazempour’un 2022 yılında yayınlamış olduğu “*Characterization of n -Jordan multipliers*” adlı çalışması ile A. Zivari-Kazempour ve M. Valaei’in 2022 yılında yayınlamış oldukları “*Characterization of n -Jordan multipliers through zero products*” adlı çalışmaları ele alınarak Banach cebirlerinde n -Jordan çarpanlar ve sağladıkları özellikler üzerinde durulmuştur. A Banach cebirinin ve X sol Banach A -modülün hangi koşulları sağlaması durumunda $(n + 1)$ -Jordan çarpan olan bir $T : A \rightarrow X$ sınırlı lineer dönüşümün bir n -Jordan çarpan olduğu araştırılmıştır. Ayrıca A dan X e tanımlı n -Jordan çarpan olan bir sınırlı lineer dönüşümün hangi koşullar altında bir n -çarpan olduğu incelenmiştir. Uygun koşullar altında $(n + 1)$ -Jordan çarpan, n -Jordan çarpan ve Jordan çarpan kavramlarının birbirine denk olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca C^* -cebirleri üzerinde tanımlı n -Jordan çarpanlar, sıfır çarpım üzerindeki etkileri ile karakterize edilmiştir. Bunun için A bir C^* -ceberi ve X bir Banach A -bimodül olduğunda $D : A \rightarrow X$ bir Jordan türev ve $\psi : A \rightarrow X$ bir Jordan çarpan olmak üzere A dan X e tanımlı n -Jordan çarpan olan bir sınırlı lineer dönüşümün hangi koşullar altında $D + \psi$ formunda yazılabileceği araştırılmıştır. Bu çalışmada, sınırlı bir yaklaşık birimi olan zayıf amenable Banach cebirleri, idempotentler ile üretilmiş birimli Banach cebirleri ve W^* -cebirleri gibi

uzaylardaki karakterizasyonlar da ele alınarak bu yapı hakkında genel bilgi edinilmesi sağlanmıştır.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Banach cebir teorisinde çarpan kavramı ilk kez S. Helgason tarafından 1956 yılında tanıtılmış (Helgason, 1956), J.K. Wang tarafından 1961 yılında detaylı olarak çalışılmıştır (Wang, 1959). Bazı matematikçiler ise çarpan yerine merkezleyen terimini kullanmaktadır. Bu terminoloji J.G. Wendel tarafından tanıtılmıştır (Wendel, 1952). Banach cebirleri üzerinde tanımlanan çarpanların (merkezleyenlerin) genel teorisi B.E. Johnson tarafından geliştirilmiştir (B. E. Johnson, 1964). Johnson bu çalışmasında A mertebesiz Banach cebiri üzerindeki her $T : A \rightarrow A$ çarpanının lineer ve sürekli olduğunu kanıtlamıştır.

Her sağ (sol) çarpanın bir sağ (sol) Jordan çarpan olduğu açıktır, ancak bunun karşıtı genel olarak doğru değildir. B. Zalar, 1991 yılında yayınladığı çalışmasında 2-burulmasız yarı asal halka üzerindeki her sağ (sol) Jordan çarpanın bir sağ (sol) çarpan olduğunu ispatlamıştır (Zalar, 1991). Aynı sonuca başka bir yaklaşım ise J. Vukman tarafından yapılan çalışmada yer almaktadır (Vukman, 1999).

Sh. Hejazian, M. Mirzavaziri ve M.S. Moslehian, 2005 yılında kompleks cebirlerde $n \geq 2$ tamsayıları için n -homomorfizma kavramını tanıtmışlar, homomorfizmalar ile bağlantısını araştırmışlardır (Hejazian, Mirzavaziri vd., 2005). Ayrıca n -homomorfizmalar yardımı ile cebirlerde bazı değişmelilik koşullarını çalışarak Banach cebirlerde bazı karakterizasyonlarını elde etmişlerdir. 2009 yılında M.E. Gordji, Banach cebirlerde n -Jordan homomorfizma kavramını tanıtmış, değişmeli olmayan bir Banach cebirinden değişmeli yarı-basit Banach cebirlerine tanımlı her 3-Jordan homomorfizmanın bir 3-homomorfizma olduğunu kanıtlamıştır (Gordji, 2009). J. Laali ve M. Fozouni, 2017 yılında n -homomorfizmalardan yola çıkarak bir A Banach cebirinden bir Banach A -bimodüle n -çarpan kavramını tanıtmışlar ve bir A Banach cebiri üzerinde tanımlı tüm n -çarpanların uzayı ile A dan $\mathbb{C}$ ye tanımlı sıfırdan farklı tüm n -homomorfizmaların uzayı arasındaki bağlantıyı araştırmışlardır (Laali ve Fozouni, 2017).

Daha sonra M. Fozouni 2018 yılında bir A Banach cebirinden bir sol Banach A -modüle sağ n -Jordan çarpan kavramını tanıtmış ve yaklaşık yerel n -Jordan çarpanlar ile karakterizasyonunu elde etmiştir (Fozouni, 2018). 2022 yılında yayınlamış olduğu çalışmasında, A. Zivari-Kazempour, A Banach cebirinin ve X sol Banach A -modülün bazı

koşulları sağlaması durumunda $(n + 1)$ -Jordan çarpan olan bir $T : A \rightarrow X$ sınırlı lineer dönüşümün bir n -Jordan çarpan olduğunu ve n -Jordan çarpan olan bir T sınırlı lineer dönüşümün bir n -çarpan olduğunu ispatlamıştır (Zivari-Kazempour, 2022).

Banach cebirleri üzerindeki homomorfizmaları, türevleri ve çarpanları sıfır çarpım üzerindeki etkileri ile karakterize etme konusu birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Alaminos, M. Brešar vd., 2009; Alaminos, J. Brešar vd., 2010; H. Ghahramani, 2013; Zivari-Kazempour, 2020). A. Zivari-Kazempour ve M. Valaei, 2022 yılında yayınladıkları çalışmalarında Banach cebirleri üzerinde tanımlı n -Jordan çarpanları, sıfır çarpım üzerindeki etkileri ile karakterize etmişlerdir. Ayrıca birimli C^* -cebirlerde, idempotentler tarafından üretilen birimli Banach cebirlerde ve değişmeli yerel kompakt G grubunun $L^1(G)$ grup cebirinde tanımlı T sınırlı lineer dönüşümünün bazı koşulları sağlaması durumunda n -Jordan çarpan olduğunu kanıtlamışlardır.

3. MATERİYAL VE YÖNTEM

Çalışma tamamen teorik olup, ilgili konuda yapılan önceki çalışmalar kitaplardan ve internet imkânlarından yararlanılarak incelenmiştir. Banach cebirleri üzerinde tanımlanan n -Jordan çarpanlar için literatürde var olan sonuçlar araştırılmıştır. Bu amaçla, kaynaklarda belirtilen çalışmalar detaylı bir şekilde incelenmiş ve konuyla ilgili bilgi edinilmiş, elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak problemin daha fazla araştırılması için temel oluşturulmuştur.

3.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde, Banach Cebirleri teorisinde önemli olan bazı temel kavramlar ve diğer bölümlerde gerekecek bazı özellikler, ilgili kaynaklarla birlikte verilecektir.

Tanım 3.1.1. (Hungerford, 2012) R boş olmayan bir küme, $+$ ve $\cdot$ R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. Eğer

- (i) $(R, +)$ bir değişmeli grup;
- (ii) Her $a, b, c \in R$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- (iii) Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

koşulları sağlanıyorsa R ye bu ikili işlemlere göre bir *halka* denir ve $(R, +, \cdot)$ ile gösterilir. Bunlara ek olarak R halkası, her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ koşulunu sağlıyorsa R ye *değişmeli halka*; her $a \in R$ için $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ elemanı bulunabiliyorsa R halkasına *birimli halka* denir. R halkasının $+$ işlemine göre birimine *halkanın sıfırı* denir ve bu eleman 0_R ile gösterilir.

Tanım 3.1.2. (Hungerford, 2012) Birimli ve değişmeli bir $(R, +, \cdot)$ halkasının sıfırdan farklı her elemanının $\cdot$ işlemine göre tersi varsa o zaman bu halkaya *cisim* denir.

Tanım 3.1.3. (Hungerford, 2012) M bir toplamsal değişmeli grup ve R bir halka olsun. $\cdot : R \times M \rightarrow M$, $(r, x) \mapsto r \cdot x$ ile tanımlanan dış işlem, her $r, s \in R$ ve her $x, y \in M$ için

- (i) $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- (ii) $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
- (iii) $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$

şartlarını sağlıyorsa M ye bir *sol R -modül* denir. Bu koşullara ek olarak R halkası birimli ve 1_R , R halkasının birimi olmak üzere

$$(iv) \quad 1_R \cdot x = x$$

şartı da sağlanıyorsa M ye *birimsel sol R -modül* denir.

Aynı şekilde sağ R -modül ve birimsel sağ R -modül de, $\cdot : M \times R \rightarrow M, (x, r) \mapsto x \cdot r$ dış işlemi tanımlanarak oluşturulur. Eğer R halkası değişmeli olarak alınırsa, o zaman sol R -modül yapısı sağ R -modül yapılabilir.

Eğer $R (= \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ bir cisim ve M bir birimsel sol veya sağ R -modül ise M ye R üzerinde bir vektör uzayı ya da kısaca R -vektör uzayı denir. Burada M nin elemanlarına vektör, R cisminin elemanlarına da skaler adı verilir.

Tanım 3.1.4. (Hungerford, 2012) R bir halka ve M hem sağ R -modül hem de sol R -modül olsun. Eğer her $r, s \in R$ ve her $x \in M$ için,

$$r \cdot (x \cdot s) = (r \cdot x) \cdot s$$

şartı sağlanıyorsa ise o zaman M ye bir R -bimodül denir.

Sol R -modül için verilen tüm özellikler benzer biçimde sağ R -modül için de kanıtlanabileceğinden, aksi belirtilmedikçe bundan sonra R -modül denince sol R -modül anlaşılacaktır.

Örnek 3.1.5. Her toplamsal değişmeli G grubu, $\cdot : \mathbb{Z} \times G \rightarrow G, (n, a) \mapsto na$ dış işlemi ile bir birimsel $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Örnek 3.1.6. Her R halkası bir R -modüldür.

Tanım 3.1.7. (Hungerford, 2012) M bir R -modül ve N , M nin bir alt grubu olsun. Eğer her $n \in N$ ve $r \in R$ için $r \cdot n \in N$ oluyorsa, N ye M nin *alt modülü* denir.

Eğer R bir cisim ve M bir R -vektör uzayı ise bu durumda N ye M nin bir *alt vektör uzayı* (ya da kısaca *alt uzayı*) adı verilir.

Tanım 3.1.8. (Hungerford, 2012) F bir cisim, V bir F -vektör uzayı, $n \geq 1$ için $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ sonlu bir küme ve $\emptyset \neq B \subset V$ herhangi bir küme olsun.

(i) Bir $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ skalerler kümesi için A daki vektörlerin bir *lineer bileşimi* (lineer kombinasyonu) $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$ formunda bir vektördür. Eğer

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

ise A ya *lineer bağımsız küme* denir. A kümesi lineer bağımsız değilse A ya *lineer bağımlı küme* denir.

(ii) B kümesinden alınan her sonlu sayıdaki vektörün tüm lineer bileşimlerinin kümesi

$$\text{Span}B = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \mid k \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in F, u_1, u_2, \dots, u_k \in B \right\}$$

V vektör uzayının B kümesini kapsayan bir alt uzayıdır. $\text{Span}B$ alt uzayına, B kümesinin *lineer gereni* (ürettiği alt uzay) denir. B kümesinin elemanlarına $\text{Span}B$ alt uzayının *üreteçleri* adı verilir. Eğer B lineer bağımsız bir küme ve $\text{Span}B = V$ ise o zaman B ye V vektör uzayının bir *tabanı*, taban eleman sayısına da V nin *boyutu* denir ve $\dim_F(V)$ ile gösterilir. $\dim_F(V)$ sonlu ise bu durumda V ye *sonlu boyutludur* denir. Aksi halde V ye *sonsuz boyutludur* denir.

Tanım 3.1.9. (Hungerford, 2012) R bir halka, M ve N iki R -modül olsun. Bir $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu, her $x, y \in M$ ve her $r \in R$ için

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{ve} \quad f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna bir *R -modül homomorfizması* denir. Eğer F bir cisim ve M ile N birer F -vektör uzayı ise f fonksiyonuna bir *lineer dönüşüm* denir. M den N ye tüm lineer dönüşümlerin kümesi $\mathcal{L}(M, N)$ ile gösterilir. $f, g \in \mathcal{L}(M, N)$ olsun. $\mathcal{L}(M, N)$ kümesi, her $x \in M$ için $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ işlemiyle bir değişmeli gruptur ve her $\alpha \in F$ için

$$\begin{aligned} \bullet : F \times \mathcal{L}(M, N) &\rightarrow \mathcal{L}(M, N) \\ (\alpha, f) &\mapsto \alpha \bullet f : M \rightarrow N \\ x &\mapsto (\alpha \bullet f)(x) = \alpha \cdot f(x) \end{aligned}$$

işlemi ile $\mathcal{L}(M, N)$ kümesi, bir F -vektör uzayıdır. $\mathcal{L}(M, M)$ uzayı, kısaca $\mathcal{L}(M)$ şeklinde yazılır. $f : M \rightarrow F$ lineer dönüşümüne M üzerinde *lineer fonksiyonel* denir. Burada F cismi aynı zamanda bir F -vektör uzayıdır.

Tanım 3.1.10. (Hungerford, 2012) X, Y ve Z birer F -vektör uzayı ve $T : X \times Y \longrightarrow Z$ bir fonksiyon olsun. Her $x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y$ ve $\alpha \in F$ için,

$$(i) \quad T(\alpha \cdot x_1 + x_2, y) = \alpha T(x_1, y) + T(x_2, y)$$

$$(ii) \quad T(x, \alpha \cdot y_1 + y_2) = \alpha T(x, y_1) + T(x, y_2)$$

şartları sağlanıyorsa T fonksiyonuna *2-lineer dönüşüm* denir. Eğer $Z = F$ ise, T ye *2-lineer fonksiyonel* adı verilir.

Tanım 3.1.11. (Hungerford, 2012) K birimli, değişmeli bir halka ve A herhangi bir halka olsun. $(A, +)$ bir birimsel K -modül ve her $a \in K, x, y \in A$ için,

$$a \cdot (xy) = (a \cdot x)y = x(a \cdot y)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, o zaman A, K üzerinde bir *cebiri* ya da A bir K -*cebiri* denir.

Eğer her $x \in A$ için $1_A x = x 1_A = x$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $1_A \in A$ elemanı varsa 1_A ya A cebirinin *birim elemanı*; A ya da bir *birimli cebir* denir. Her $x, y \in A$ için $xy = yx$ ise A ya *değişmeli cebir* denir.

Örnek 3.1.12. $\mathbb{C}$ kompleks vektör uzayı, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir cebirdir. Ayrıca F cisminin bir K alt cismi için F cismi, K üzerinde bir cebirdir.

Örnek 3.1.13. $GL(n, K)$, girdileri K cisminden alınan $n \times n$ tipindeki bütün terslenebilir matrislerin kümesi olsun. Bu küme, K cismi üzerinde bir cebirdir. Ayrıca $n \times n$ tipindeki I_n birim matrisi de $GL(n, K)$ cebirine ait olduğundan $GL(n, K)$, aynı zamanda bir birimli cebirdir.

Tanım 3.1.14. (Hungerford, 2012) A birimli bir cebir ve $1_A, A$ nın birimi olsun. $a \in A$ olmak üzere eğer $ab = ba = 1_A$ şartını sağlayan bir $b \in A$ elemanı varsa a ya A nın *tersinir elemanı* denir. $b \in A$ elemanına da a elemanının *tersi* denir ve a^{-1} ile gösterilir. A cebirindeki tüm tersinir elemanların kümesi $Inv(A)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.15. (Hungerford, 2012) A bir cebir ve $a \in A$ olsun. Eğer $a^2 = a$ ise a elemanına A nın *idempotenti* denir.

Tanım 3.1.16. (Hungerford, 2012) A bir cebir ve $\emptyset \neq B \subseteq A$ bir alt uzayı olsun. Her $a, b \in B$ için $ab \in B$ ise B ye A nın bir *alt cebiri* denir.

Örnek 3.1.17. $\mathbb{R}$ reel sayılar cebiri, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cebirinin bir alt cebiridir.

Tanım 3.1.18. (Hungerford, 2012) A bir cebir ve I , A nın bir alt uzayı olsun. Eğer her $a \in A$ ve her $x \in I$ için, $ax \in I$ sağlanıyorsa I ya A cebirinin *sol ideali*; $xa \in I$ sağlanıyorsa I ya A cebirinin *sağ ideali* denir. I alt uzayı hem sağ ideal, hem de sol ideal olma koşullarını sağlıyorsa I ya A cebirinin *ideali* denir.

Bu tanımlamalara göre açıktır ki her ideal bir alt cebir olur. Fakat bunun karşısı doğru olmayabilir.

Tanım 3.1.19. A bir cebir olsun. A daki çarpımın sırasını tersine çevirerek oluşturulan cebire A nın *zıt cebiri* denir ve A^{op} ile gösterilir.

Tanım 3.1.20. X bir F -vektör uzayı ve $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in F$ için,

- (i) $\|x\| \geq 0$
- (ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir. Üzerinde bir $\|\cdot\|$ normu tanımlanmış olan X vektör uzayına *normlu uzay* adı verilir ve $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir.

Eğer (ii) koşulu “ $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ ” şeklinde değiştirilirse diğer (i), (iii) ve (iv) koşulları ile birlikte $\|\cdot\|$ ya X üzerinde bir *yarı-norm* adı verilir.

Tanım 3.1.21. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Herhangi $x \in X$ ve herhangi $r \in \mathbb{R}^+$ için,

$$B_r(x) = \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.

Tanım 3.1.22. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $A \subset X$ olsun.

- (i) Her $x \in A$ için $B_\varepsilon(x) \subset A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa A kümesine *açık küme* denir.
- (ii) $X \setminus A$ kümesi açık ise A kümesine *kapalı küme* denir.
- (iii) $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\|x - y\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in A$ var ise, ya da buna denk olarak $y_n \rightarrow x \in X$ olacak şekilde bir $\{y_n\} \subset A$ dizisi var ise o zaman x noktasına A nın bir *kapanış noktası* denir. A nın tüm kapanış noktalarının kümesine A kümesinin

kapalı adı verilir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. $\bar{A}$ bir kapalı kümedir ve A kümesini kapsayan X in tüm kapalı altkümelerinin arakesitine eşittir. Yani

$$\bar{A} = \cap \{K \mid A \subset K, K \text{ kapalı küme}\}$$

dir. Bu nedenle, $\bar{A}$, A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümedir.

(iv) A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\bar{A} = A$ olmasıdır. Buna göre, A kapalıdır $\Leftrightarrow \{y_n\} \subset A$ dizisi için $y_n \rightarrow x \in X$ olduğunda $x \in A$ dır.

(v) $\bar{A} = X$ ise A kümesi X uzayında *yoğun bir kümedir* denir.

Tanım 3.1.23. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi $\{x_n\}$ olsun.

(i) $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına *yakınsar* ya da $\{x_n\}$ dizisi *yakınsaktır* denir. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ya da $x_n \rightarrow x$ yazılır.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq n_0$ için $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Teorem 3.1.24. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında *yakınsak her bir $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.*

İspat: $\{x_n\}$, $(X, \|\cdot\|)$ de yakınsak bir dizi ve $x_n \rightarrow x \in X$ olsun. O halde verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq N$ için $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Dolayısıyla aynı N doğal sayısı için

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\square$

Not. Teorem 3.1.24 ün karşıtı doğru değildir. Yani her Cauchy dizisi yakınsak değildir.

Örneğin, $X = (0, 1)$ kümesi üzerindeki normun $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$ ($x \in X$) fonksiyonu olduğunu kabul edersek $(\frac{1}{n})$ dizisi, X normlu uzayında bir Cauchy dizisidir:

$\forall \varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olmak üzere

$$\|x_n - x_m\| = |x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N}$$

olur. Burada $N > \frac{2}{\varepsilon}$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ seçilirse $\|x_n - x_m\| \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$ olup $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir; ancak $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin (0, 1)$ olduğundan bu dizi X normlu uzayında yakınsak değildir.

Tanım 3.1.25. (Kreyszig, 1991) Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise, yani X teki her Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise, X e bir *Banach uzayı* denir.

Tanım 3.1.26. (Kreyszig, 1991) $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ birer normlu uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve belli bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x \in X$ için,

$$\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında *süreklidir* denir. Eğer f fonksiyonu X kümesinin her noktasında sürekli ise f (X üzerinde) *süreklidir* denir.

Önerme 3.1.27. *Norm fonksiyonu süreklidir.*

İspat: $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X$ olmak üzere $x \in X$ elemanına yakınsayan bir $\{x_n\}$ dizisi alalım. Yani $x_n \rightarrow x$ olsun. O halde $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ olur. Ayrıca

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$$

dır. $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ olduğundan $|\|x_n\| - \|x\|| \rightarrow 0$ dır. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} |\|x_n\| - \|x\|| = 0$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$ olur. Yani $\|\cdot\|$ fonksiyonu süreklidir. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\|$ olup limit alma ile norm alma birbiriyle yer değiştirebilen işlemlerdir. $\square$

Tanım 3.1.28. (Kreyszig, 1991) $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq k \|x\|_X$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{R}^+$ varsa T ye *sınırlıdır* denir.

Teorem 3.1.29. (Kreyszig, 1991) X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. O halde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) T sınırlıdır.
- (ii) T düzgün süreklidir.
- (iii) T süreklidir.
- (iv) T , bir $x_0 \in X$ noktasında süreklidir.

Tanım 3.1.30. X ve Y , aynı $(F, +, \cdot)$ cismi üzerinde iki normlu uzay olsun. X den Y ye tüm sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi $\mathfrak{B}(X, Y)$ ile gösterilecektir. Teorem 3.1.29 dan dolayı $\mathfrak{B}(X, Y)$ deki elemanlar sürekli lineer dönüşüm adını da alır. $S, T \in \mathfrak{B}(X, Y)$ olsun. Her $x \in X$ ve her $\alpha \in F$ için,

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x) \quad \text{ve} \quad (\alpha \bullet T)(x) = \alpha \cdot T(x)$$

işlemleriyle $\mathfrak{B}(X, Y)$ kümesi, bir F -vektör uzayıdır:

$\mathfrak{B}(X, Y)$ nin elemanları üzerine bir sınırlılık kısıtlaması getirildiğinden, aşikar olarak, $\mathfrak{B}(X, Y) \subseteq \mathfrak{L}(X, Y)$ dir. Dolayısıyla, $\mathfrak{B}(X, Y)$ nin bir alt uzay olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için, her $T, S \in \mathfrak{B}(X, Y)$ ve her $\alpha \in F$ için $\alpha \bullet T + S \in \mathfrak{B}(X, Y)$ olduğunu görelim: Öncelikle $\alpha \bullet T + S$ operatörü lineerdir, çünkü her $x, y \in X$ ve her λ skaleri için,

$$\begin{aligned} (\alpha \bullet T + S)(\lambda x + y) &= (\alpha \bullet T)(\lambda x + y) + S(\lambda x + y) \\ &= \alpha \cdot T(\lambda x + y) + S(\lambda x + y) \\ &= \alpha \cdot (\lambda \cdot T(x) + T(y)) + (\lambda \cdot S(x) + S(y)) \\ &= \alpha \cdot (\lambda \cdot T(x)) + \alpha \cdot T(y) + (\lambda \cdot S(x) + S(y)) \\ &= \lambda \cdot (\alpha \cdot T(x) + S(x)) + \alpha \cdot T(y) + S(y) \\ &= \lambda \cdot ((\alpha \bullet T)(x) + S(x)) + (\alpha \bullet T)(y) + S(y) \\ &= \lambda \cdot (\alpha \bullet T + S)(x) + (\alpha \bullet T + S)(y) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Şimdi $\alpha T + S$ operatörünün sınırlı olduğunu gösterelim. T ve S operatörleri sınırlı olduğundan her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq c_1 \|x\|$ ve $\|S(x)\| \leq c_2 \|x\|$ olacak şekilde $c_1, c_2 > 0$ reel sayıları vardır. O halde her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} \|(\alpha \bullet T + S)(x)\| &= \|(\alpha \bullet T)(x) + S(x)\| = \|\alpha \cdot T(x) + S(x)\| \\ &\leq |\alpha| \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq (|\alpha| c_1 + c_2) \|x\| \end{aligned}$$

olup, $c = |\alpha| c_1 + c_2 > 0$ seçerek $\|(\alpha \bullet T + S)(x)\| \leq c \|x\|$ elde edilir. Yani, $\alpha \bullet T + S$ operatörü sınırlıdır. Sonuç olarak, $\alpha \bullet T + S \in \mathfrak{B}(X, Y)$ olur ve böylece $\mathfrak{B}(X, Y)$ bir F -vektör uzayıdır. $\mathfrak{B}(X, X)$ uzayı, kısaca $\mathfrak{B}(X)$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.31. (Kreyszig, 1991) X ve Y aynı F cismi üzerinde iki normlu uzay olsun. Bir $T : X \rightarrow Y$ sınırlı lineer dönüşümü için

$$\|T(x)\| \leq c \|x\| \quad (3.1)$$

koşulunu gerçekleyen bir $c \in \mathbb{R}^+$ sayısına T operatörünün bir *sınırı* ve bunların en büyük alt sınırına da T nin *normu* denir ve $\|T\|$ ile gösterilir. $\|T\| := \inf \{c \in \mathbb{R}^+ \mid \|T(x)\| \leq c \|x\|, x \in X\}$ dir.

Önerme 3.1.32. (Kreyszig, 1991) X ve Y aynı F cismi üzerinde iki normlu uzay, $0_X \neq x \in X$ ve $T : X \rightarrow Y$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. O zaman,

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \mid x \neq 0_X \right\} = \sup \{ \|T(x)\| \mid \|x\| \leq 1 \} = \sup \{ \|T(x)\| \mid \|x\| = 1 \}$$

yazılabilir.

Sonuç 3.1.33. X ve Y iki normlu uzay olsun. Bir $T : X \rightarrow Y$ lineer dönüşümünün sürekli (ya da buna denk olarak sınırlı) olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$ olmasıdır.

Önerme 3.1.34. (Kreyszig, 1991) $\|\cdot\| : \mathfrak{B}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$, $\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| \mid \|x\| = 1 \}$ fonksiyonu, $\mathfrak{B}(X, Y)$ uzayı üzerinde bir norm tanımlar. Bu norma operatör normu denir.

İspat: Aşıkarak, $\|T\| \geq 0$ dır. Ayrıca

$$\|T\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, \|T(x)\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, T(x) = 0 \Leftrightarrow T = 0$$

dır. Her α skaleri için $\|(\alpha T)(x)\| = \|\alpha \cdot T(x)\| = |\alpha| \|T(x)\|$ olup her iki tarafın supremumu alınırsa,

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|=1} \|(\alpha T)(x)\| &= \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \|T(x)\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \\ &\Rightarrow \|\alpha T\| = |\alpha| \|T\| \end{aligned}$$

elde edilir. $\|x\| = 1$ olacak şekilde her $x \in X$ ve her $S, T \in \mathfrak{B}(X, Y)$ için, $\|(S + T)(x)\| = \|S(x) + T(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\|$ olup

$$\begin{aligned}\|S + T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(S + T)(x)\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} (\|S(x)\| + \|T(x)\|) \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|S(x)\| + \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \\ &= \|S\| + \|T\|\end{aligned}$$

dir. O halde $\|\cdot\|$ fonksiyonu, $\mathfrak{B}(X, Y)$ uzayı üzerinde bir normdur. $\square$

Örnek 3.1.35. Normlu bir $X \neq \{0_X\}$ uzayı üzerindeki $I : X \rightarrow X$ birim operatörü sınırlı olup $\|I\| = 1$ dir. Çünkü, her $x \in X$ için $I(x) = x$ olduğundan

$$\|I(x)\| = \|x\| \leq 2\|x\| \leq \dots$$

olup her $m \geq 1$ sayısı, $\|I\|$ için bir üst sınırdır. Yani I sınırlıdır. Üstelik,

$$\|I\| = \sup_{x \neq 0_X} \frac{\|I(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0_X} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

dir.

Teorem 3.1.36. (Kreyszig, 1991) Eğer X bir normlu uzay ve Y bir Banach uzayı ise o zaman $\mathfrak{B}(X, Y)$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.1.37. X, F cismi üzerinde bir normlu uzay olsun. $\mathfrak{B}(X, F)$ vektör uzayına X in *dual uzayı* denir ve $X^*(= X^{(1)})$ ile gösterilir. X^* uzayının elemanlarına X üzerinde bir *sınırlı lineer fonksiyonel* adı verilir.

Sonuç 3.1.38. X^* bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.1.39. Herhangi bir X normlu uzayı için, $X^{**} = X^{(2)} = (X^*)^*$ uzayına X in *ikinci duali* denir.

Not. Bir X normlu uzayı üzerindeki herhangi bir φ lineer fonksiyoneli için

$$\langle x, \varphi \rangle := \varphi(x) \quad (x \in X)$$

notasyonu kullanılacaktır.

Tanım 3.1.40. X ve Y birer normlu uzay ve $T \in \mathfrak{B}(X, Y)$ olsun.

- (i) $x \in X$, $f \in Y^*$ olmak üzere $\langle x, T^*(f) \rangle = \langle T(x), f \rangle$ olacak şekilde bir tek $T^* \in \mathfrak{B}(Y^*, X^*)$ operatörü vardır. T^* operatörüne T nin *duali* denir.
- (ii) $g \in Y^*$, $h \in X^{**}$ olmak üzere $\langle g, T^{**}(h) \rangle = \langle T^*(g), h \rangle$ olacak şekilde bir tek $T^{**} \in \mathfrak{B}(X^{**}, Y^{**})$ operatörü vardır. T^{**} operatörüne T nin *ikinci duali* denir.

Tanım 3.1.41. (H. G. Dales, 2000) E, F ve G birer normlu uzay ve $B : E \times F \rightarrow G$ sürekli bir 2-lineer dönüşüm olsun. $B_1 : G^* \times E \rightarrow F^*$, $B_2 : F^{**} \times G^* \rightarrow E^*$ ve $\tilde{B} : E^{**} \times F^{**} \rightarrow G^{**}$ dönüşümleri, her $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$, $f \in E^*$, $g \in F^*$, $h \in G^*$, $M \in E^{**}$ ve $N \in F^{**}$ için,

$$\begin{aligned}\langle y, B_1(h, x) \rangle &= \langle B(x, y), h \rangle; \\ \langle x, B_2(N, h) \rangle &= \langle N, B_1(h, x) \rangle; \\ \langle \tilde{B}(M, N), h \rangle &= \langle M, B_2(N, h) \rangle\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. B_1, B_2 ve $\tilde{B}$ dönüşümlerinin her biri sürekli ve 2-lineerdir. Üstelik her $x \in E$, $y \in F$ için $\tilde{B}(x, y) = B(x, y)$ dir. Ayrıca $\|\tilde{B}\| = \|B\|$ dir. $\tilde{B} : E^{**} \times F^{**} \rightarrow G^{**}$ sürekli 2-lineer dönüşümüne B nin *genişlemesi* denir.

Önerme 3.1.42. (H. G. Dales, 2000) $E_1, \dots, E_6$ normlu uzaylar ve $P : E_1 \times E_2 \rightarrow E_4$, $Q : E_2 \times E_3 \rightarrow E_5$, $R : E_4 \times E_3 \rightarrow E_6$ ve $S : E_1 \times E_5 \rightarrow E_6$ sürekli 2-lineer dönüşümler olsun ve her $x \in E_1, y \in E_2, z \in E_3$ için

$$R(P(x, y), z) = S(x, Q(y, z))$$

olsun. O halde her $F \in E_1^{**}, G \in E_2^{**}, H \in E_3^{**}$ için $\tilde{R}(\tilde{P}(F, G), H) = \tilde{S}(F, \tilde{Q}(G, H))$ olur.

Tanım 3.1.43. (H. G. Dales, 2000) E, F ve G birer normlu uzay ve $B : E \times F \rightarrow G$ sürekli bir 2-lineer dönüşüm olsun. $C : F \times E \rightarrow G$, $(y, x) \mapsto B(x, y)$ 2-lineer dönüşümü tanımlansın. C 2-lineer dönüşümü, Tanım 3.1.41 de olduğu gibi $\tilde{C} : F^{**} \times E^{**} \rightarrow G^{**}$ 2-lineer dönüşümüne genişletilebilir. Buna göre, $\hat{B} : E^{**} \times F^{**} \rightarrow G^{**}$, $(M, N) \mapsto \tilde{C}(N, M)$ ile tanımlanan dönüşüm sürekli ve 2-lineerdir.

Tanım 3.1.44. Λ bir küme ve $\leq$ de Λ üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer

- (i) $\forall p \in \Lambda$ için $p \leq p$ dir;
- (ii) $p \leq q$ ve $q \leq r$ özelliğindeki her $p, q, r \in \Lambda$ için $p \leq r$ dir;
- (iii) $\forall p, q \in \Lambda$ için $p \leq s$ ve $q \leq s$ olacak şekilde bir $s \in \Lambda$ vardır

şartları sağlanıyorsa Λ kümesine $\leq$ bağıntısı ile yönlenmiş küme denir. $\leq$ bağıntısına da Λ kümesini yönlendiriyor denir.

Tanım 3.1.45. X herhangi bir küme ve Λ da yönlenmiş bir küme olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $x(\lambda) = x_\lambda$ olmak üzere $x : \Lambda \rightarrow X$ şeklindeki her bir fonksiyona X içinde bir ağ (*net*) denir ve $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ veya kısaca (x_λ) şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1.46. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri bilinen “ $\leq$ ” bağıntısı ile yönlenmiş kümelerdir. Böylece her $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ dizisi, X kümesi içinde bir ağdır. O halde ağ kavramı, dizi kavramından daha geneldir.

Tanım 3.1.47. Λ bir yönlenmiş küme, (X, τ) bir topolojik uzay ve X içinde bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ olsun. $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \tau$ için bir $\lambda_U \in \Lambda$ elemanı,

$$\forall \lambda \geq \lambda_U \text{ için } x_\lambda \in U$$

olacak şekilde varsa $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı $x \in X$ noktasına *yakınsar* denir. Bu durumda $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağına *yakınsak*, x noktasına da $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının *limiti* denir ve $x_\lambda \rightarrow x$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.48. $X \neq \emptyset$ bir küme ve τ , X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

- (i) $\emptyset, X \in \tau$;
- (ii) $A_1, \dots, A_n \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$;
- (iii) I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $A_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

koşulları sağlanıyorsa τ ailesine X kümesi üzerinde bir *topoloji* denir. (X, τ) ikilisine bir *topolojik uzay* adı verilir.

Tanım 3.1.49. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

- (i) $x \in X$ olsun. $x \in W \subset A$ olacak şekilde bir $W \in \tau$ kümesi ve X in bir kompakt A alt kümesi varsa X uzayına x noktasında *yerel kompakt* denir. Her $x \in X$ için X uzayı x noktasında yerel kompakt ise (X, τ) uzayına *yerel kompakt uzay* denir.
- (ii) $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa (X, τ) uzayına bir *Hausdorff uzayı* denir.

3.2. Banach Cebirleri

Tanım 3.2.1. (Kaniuth, 2009) A bir $\mathbb{C}$ -cebir ve $\|\cdot\|$ normu ile bir normlu uzay olsun. Her $x, y \in A$ için

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

ise A ya bir *normlu cebir* denir. Eğer $(A, \|\cdot\|)$ normlu cebiri aynı zamanda bir Banach uzayı ise A ya bir *Banach cebiri* denir.

Eğer her $x \in A$ için $xe_A = e_Ax = x$ olacak şekilde $\|e_A\| = 1$ olan bir $0_A \neq e_A \in A$ elemanı varsa, A ya bir *birimli (unital) Banach cebiri* denir.

Tanım 3.2.2. A bir Banach cebiri olsun. Eğer B , A nın kapalı bir alt cebiri ise o zaman B tam uzay olup (A daki işlemler ve norm ile) bir Banach cebiri belirtir. Bu durumda B ye A nın bir *Banach alt cebiri* denir.

Örnek 3.2.3. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ uzayları, bilinen toplama, çarpma işlemleri ve alışılmış norm ile birer birimli, değişmeli Banach cebiridir.

Örnek 3.2.4. X boş olmayan bir kompakt Hausdorff uzayı ve $C(X) = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ sürekli fonksiyon}\}$ olsun. $f, g \in C(X)$ olmak üzere, her $x \in X$ ve her α skaleri için,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ ve } (\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

işlemleri ile $(fg)(x) = f(x)g(x)$ çarpma işlemi tanımlansın. $\|\cdot\| : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ fonksiyonu, $C(X)$ üzerinde bir normdur ve $C(X)$ uzayı bir birimli, değişmeli Banach cebiridir.

Örnek 3.2.5. $M_n(\mathbb{C})$, kompleks sayılar kümesi üzerinde tüm $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi olsun. Matrislerde bilinen toplama, çarpma ve skalerle çarpma işlemleri ile $M_n(\mathbb{C})$, birimi I_n birim matrisi olan bir birimli cebirdir. Eğer $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) ise,

$$\|A\|_\infty = \sup_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{ ve } \|A\|_1 = \sup_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

fonksiyonlarının herbiri $M_n(\mathbb{C})$ üzerinde birer normdur. $M_n(\mathbb{C})$ uzayı sonlu boyutlu olduğundan her $A \in M_n(\mathbb{C})$ için $m \cdot \|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq M \cdot \|A\|_\infty$ olacak şekilde $m, M > 0$ sayıları var olup bu normlar birbirine denktir. Dolayısıyla bu normların herhangi biri için

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

şartı sağlanır ve $M_n(\mathbb{C})$ değişmeli olmayan bir Banach cebiridir.

Örnek 3.2.6. X bir Banach uzayı olsun. $\mathfrak{B}(X)$ Banach uzayı üzerinde çarpma işlemi, $S, T \in \mathfrak{B}(X)$ olmak üzere

$$(TS)(x) := T(S(x)) \quad (x \in X)$$

şeklinde tanımlansın. Her $T, S \in \mathfrak{B}(X)$ ve her α skaleri için,

$$(\alpha(TS))(x) = \alpha((TS)(x)) = \alpha(T(S(x))) = (\alpha T)(S(x)) := ((\alpha T)S)(x)$$

ve

$$(T(\alpha S))(x) := T((\alpha S)(x)) = T(\alpha(S(x))) = \alpha(T(S(x))) := \alpha((TS)(x)) = (\alpha(TS))(x)$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathfrak{B}(X)$ bir cebirdir. Üstelik her $T, S \in \mathfrak{B}(X)$ için,

$$\begin{aligned} \|TS\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(TS)(x)\| := \sup_{\|x\|=1} \|T(S(x))\| \leq \|T\| \sup_{\|x\|=1} \|S(x)\| \\ &\leq \|T\| \|S\| \sup_{\|x\|=1} \|x\| = \|T\| \|S\| \end{aligned}$$

olduğundan $\mathfrak{B}(X)$ bir Banach cebiridir.

Önerme 3.2.7. (Bonsall ve Duncan, 1973) A birimli bir Banach cebiri ve birimi e_A olsun. $\|e_A - x\| < 1$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in A$ elemanı tersinirdir ve $x^{-1} = e_A + \sum_{n=1}^{\infty} (e_A - x)^n$ dir.

Tanım 3.2.8. A bir Banach cebir olsun. Eğer her $x \in A$ için $xA = \{0\}$ ($Ax = \{0\}$) iken $x = 0$ oluyorsa A ya *mertebesiz Banach cebir* denir.

Tanım 3.2.9. A bir Banach cebir olsun. Eğer A^2 , A cebirinde yoğun bir küme ise, yani $\overline{A^2} = A$ ise, A ya *esas (essential) Banach cebir* denir.

Tanım 3.2.10. A bir Banach cebir ve $A^2 \neq \{0\}$ olsun. Eğer A nın $\{0\}$ ve A dan başka kapalı ideali yoksa A ya *topolojik basit Banach cebir* denir.

Tanım 3.2.11. A bir Banach cebiri ve X bir A -bimodül olsun. $w \in A$ alalım. Eğer $x \in X$ için $w \cdot x = 0$ ($x \cdot w = 0$) iken $x = 0$ oluyorsa w elemanına X in *sol (sağ) ayrılma noktası* denir.

Tanım 3.2.12. (Bonsall ve Duncan, 1973) A bir Banach cebiri ve X bir Banach uzayı olsun. Eğer X bir A -bimodül ve her $a \in A, x \in X$ için

$$\|a \cdot x\| \leq K \|a\| \|x\| \quad \text{ve} \quad \|x \cdot a\| \leq K \|x\| \|a\| \quad (3.2)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti var ise X e bir *Banach A -bimodül* denir. (3.2) deki eşitsizliklerden yalnızca soldaki geçerli olduğu durumda X sol A -modüle bir *sol Banach A -modül*; yalnızca sağdaki geçerli olduğunda X sağ A -modüle bir *sağ Banach A -modül* adı verilir.

Tanım 3.2.13. A bir Banach cebiri ve X bir Banach A -bimodül olsun. $a \in A, x \in X$ ve $f \in X^*$ için,

$$(a \bullet f)(x) = f(x \cdot a) \quad \text{ve} \quad (f \bullet a)(x) = f(a \cdot x)$$

işlemleriyle X^* bir sol A -modül ve bir sağ A -modüldür. Üstelik her $a, b \in A, x \in X, f \in X^*$ için,

$$\begin{aligned} (a \bullet (f \bullet b))(x) &= (f \bullet b)(x \cdot a) = f(b \cdot (x \cdot a)) = f((b \cdot x) \cdot a) \\ &= (a \bullet f)(b \cdot x) = ((a \bullet f) \bullet b)(x) \end{aligned}$$

sağlandığından $a \bullet (f \bullet b) = (a \bullet f) \bullet b$ elde edilir. O halde $X^* = \mathfrak{B}(X, \mathbb{C})$ bir A -bimodüldür. $\|x\| = 1$ şartını sağlayan her $x \in X$ ve her $a \in A, f \in X^*$ için,

$$\|(a \bullet f)(x)\| = \|f(x \cdot a)\| \leq \|f\| \|x \cdot a\|$$

olup X bir Banach A -bimodül olduğundan

$$\|a \bullet f\| = \sup_{\|x\|=1} \|(a \bullet f)(x)\| \leq K \|f\| \|a\|$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır. O halde X^* bir Banach A -bimodüldür ve bu durumda X^* dual uzayına X in *dual modülü* adı verilir.

Eğer A Banach cebiri birimli ve X Banach A -bimodülü birimsel ise, o zaman her $x \in X$, $f \in X^*$ için

$$(e_A \bullet f)(x) = f(x \cdot e_A) = f(x) = f(e_A \cdot x) = (f \bullet e_A)(x)$$

olduğundan her $f \in X^*$ için $e_A \bullet f = f \bullet e_A = f$ olur. Böylece X^* dual modülü bir birimsel Banach A -bimodül olur.

Tanım 3.2.14. A bir Banach cebiri ve X bir A -bimodül olsun. Eğer her $a \in A$, $x \in X$ için $a \cdot x = x \cdot a$ ise X e *simetrik* denir.

Önerme 3.2.15. A bir değişmeli Banach cebiri olsun. O halde A^* dual modülü bir simetrik A -bimodüldür.

İspat: Her $a \in A$ ve her $f \in A^*$ için, $a \cdot f = f \cdot a$ olduğunu gösterelim. A Banach cebiri değişmeli olduğundan, her $b \in A$ için,

$$(a \cdot f)(b) = f(ba) = f(ab) = (f \cdot a)(b)$$

olup A^* , A -bimodülünün simetrik olduğu görülür. □

Tanım 3.2.16. [Bonsall ve Duncan 1973, Tanım I.11.8] $(A, \|\cdot\|)$ bir normlu cebir ve $(\rho_i)_{i \in \Lambda}$, A içinde bir ağ olsun. Eğer her $a \in A$ için

$$a = \lim_{i \in \Lambda} \rho_i a = \lim_{i \in \Lambda} a \rho_i$$

ise $(\rho_i)_{i \in \Lambda}$ ağına A nın bir *yaklaşık birimi* denir. Eğer her $i \in \Lambda$ için $\|\rho_i\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti var ise $(\rho_i)_{i \in \Lambda}$ yaklaşık birimine *sınırlıdır* denir.

Teorem 3.2.17. [Bonsall ve Duncan 1973, Tanım I.11.10] (Cohen Çarpanlama Teoremi) A bir Banach cebiri, X bir sol (sağ) Banach A -modül, $z \in X$ ve $\delta > 0$ olsun. Eğer A nın X için bir sınırlı sol (sağ) yaklaşık birimi var ise, o zaman $z = ay$ ($z = ya$) ve $\|z - y\| \leq \delta$ olacak şekilde $a \in A$, $y \in X$ vardır.

Sonuç 3.2.18. [Bonsall ve Duncan 1973, Tanım I.11.11] A bir Banach cebiri, $z \in A$ ve $\delta > 0$ olsun. Eğer A nın sınırlı bir sol (sağ) yaklaşık birimi var ise, o zaman $z = xy$ ($z = yx$) ve $\|z - y\| \leq \delta$ olacak şekilde $x, y \in A$ vardır, ve y elemanı, A nın z yi içeren en küçük kapalı sol (sağ) idealine aittir.

Tanım 3.2.19. (H. G. Dales, 2000) A bir Banach cebir olsun. A^{**} Banach uzayı üzerinde iki çarpım tanımlanabilir. İlk olarak, $m_A : A \times A \rightarrow A$, $(a, b) \mapsto ab$ ile tanımlı çarpım

dönüşümü sürekli bir 2-lineer dönüşümdür. Bu nedenle, Tanım 3.1.41 de olduğu gibi, m_A nın sürekli bir 2-lineer dönüşüm olan $\widetilde{m}_A : A^{**} \times A^{**} \rightarrow A^{**}$ ya bir genişlemesi vardır. Böylece her $\Phi, \Psi \in A^{**}$ için

$$\Phi \square \Psi := \widetilde{m}_A(\Phi, \Psi)$$

tanımlanır. $a \in A$ ve $\Phi \in A^{**}$ için

$$a \square \Phi = a \cdot \Phi \quad \text{ve} \quad \Phi \square a = \Phi \cdot a$$

olur. Burada $\cdot$, A^{**} daki modül çarpımını gösterir. Önerme 3.1.42 gereği ($E_1 = \dots = E_6 = A$ ve $P = Q = R = S = m_A$ alınarak) her $\Phi, \Psi, \Upsilon \in A^{**}$ için

$$(\Phi \square \Psi) \square \Upsilon = \Phi \square (\Psi \square \Upsilon)$$

olduğu görülür. $\|\widetilde{m}_A\| = 1$ olduğundan, her $\Phi, \Psi \in A^{**}$ için $\|\Phi \square \Psi\| \leq \|\Phi\| \|\Psi\|$ dir, ve böylece $(A^{**}, \square)$, A yı kapalı bir alt cebir olarak içeren bir Banach cebiridir. Eğer A birimli ise, o zaman e_A , $(A^{**}, \square)$ Banach cebirinin birim elemanıdır.

$(A^{**}, \diamond)$ cebirini oluşturmak için A^{**} içinde bir çarpım tanımlamanın ikinci bir yolu daha vardır:

$$(A^{**}, \diamond) = ((A^{op})^{**}, \square)^{op}.$$

Böylece $\diamond$, Tanım 3.1.43 de tanımlanan m_A nın $\widehat{m}_A$ genişlemesine karşılık gelir. O zaman $(A^{**}, \diamond)$, A yı kapalı bir alt cebir olarak içeren bir Banach cebiridir. Genel olarak, $\square$ ve $\diamond$ çarpımları farklıdır.

Tanım 3.2.20. (H. G. Dales, 2000) A bir Banach cebiri olsun. O halde $\square$ ve $\diamond$ çarpımları A^{**} üzerinde, sırasıyla, *birinci ve ikinci Arens çarpımlarıdır*. Eğer bu iki çarpım A^{**} üzerinde çakışıyorsa A cebiri *Arens regülerdir*.

3.3. C^* -Cebirler

Tanım 3.3.1. (Murphy, 1990) A bir $\mathbb{C}$ -cebir ve $*$: $A \rightarrow A$ bir fonksiyon olsun. Eğer her

$$x \mapsto x^*$$

$a, b \in A$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için,

$$(i) \quad (\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$$

$$(ii) \quad (ab)^* = b^* a^*$$

$$(iii) (a^*)^* = a^{**} = a$$

şartları sağlanıyorsa $*$ fonksiyonuna A üzerinde bir *involüsyon* ve A ya da bir **-cebiri* denir.

Tanım 3.3.2. (Murphy, 1990) A bir *-cebiri ve $a \in A$ ise a^* elemanına a nın *eki* denir. Eğer $a = a^*$ ise a elemanına *kendine-ek eleman* denir. A daki tüm kendine-ek elemanların kümesi A_{sa} ile gösterilir. Eğer $a \in A_{sa}$ ve a idempotent ise a elemanına *izdüşüm* adı verilir.

Tanım 3.3.3. (Murphy, 1990) A bir Banach cebiri ve $*$, A üzerinde bir involüsyon olsun. Eğer her $a \in A$ için $\|a^*a\| = \|a\|^2$ koşulu sağlanıyorsa A ya bir *C^* -cebiri* denir.

Önerme 3.3.4. A bir C^* -cebiri olsun. O halde her $a \in A$ için,

$$\|a^*\| = \|a\|$$

dır.

İspat: A bir C^* -cebiri olduğundan her $a \in A$ için,

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\| \|a\|$$

dır. Böylece

$$\|a\| \leq \|a^*\| \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) de a yerine a^* yazılırsa,

$$\|a^*\| \leq \|a^{**}\| = \|a\| \tag{3.4}$$

olur. (3.3) ve (3.4) den, her $a \in A$ için $\|a\| = \|a^*\|$ olduğu görülür. $\square$

Tanım 3.3.5. A bir C^* -cebiri olsun. Eğer her $a \in A$ için $a1_A = 1_A a = a$ olacak şekilde bir $0_A \neq 1_A \in A$ elemanı varsa A ya *birimli C^* -cebiri* denir.

Not. Eğer bir A C^* -cebiri 1_A birim elemanı varsa daima $\|1_A\| = 1$ dir. Bunun için $a1_A = 1_A a = a$ eşitliğinde $a = 1_A^*$ alınır,

$$1_A^* 1_A = 1_A^* \tag{3.5}$$

olur. (3.5) eşitliğinde $(1_A^* 1_A)^* = 1_A^* 1_A$ olduğu kullanılırsa $1_A^* 1_A = (1_A^*)^* = 1_A$ elde edilir. Böylece $1_A^* = 1_A$ dır. Buradan

$$\|1_A\| = \|1_A 1_A\| = \|1_A^* 1_A\| = \|1_A\|^2$$

olup $\|1_A\| = 1$ olduğu görülür.

Örnek 3.3.6. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $*$: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ ($\bar{z}$, z nin kompleks eşleniği) fonksiyonu bir involüsyon olup $\mathbb{C}$ bir birimli C^* -cebirdir.

Örnek 3.3.7. $H \neq \{0\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımı ile bir Hilbert uzayı olmak üzere $\mathfrak{B}(H)$, H üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörlerin vektör uzayı olsun. Her $T \in \mathfrak{B}(H)$ için teklikle belli bir $T^* \in \mathfrak{B}(H)$ vardır öyle ki her $x, y \in H$ için

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

eşitliği sağlanır.

$$* : \mathfrak{B}(H) \rightarrow \mathfrak{B}(H), T \mapsto T^*$$

fonksiyonu, $\mathfrak{B}(H)$ üzerinde bir involüsyondur. Ayrıca $\|\cdot\| : \mathfrak{B}(H) \rightarrow \mathbb{R}$, $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$ ($x \in H$) fonksiyonu, $\mathfrak{B}(H)$ uzayı üzerinde bir norm tanımlar. Böylece $\mathfrak{B}(H)$ bir C^* -cebirdir.

Teorem 3.3.8. [Murphy 1990, Teorem 3.1.2] Her C^* -cebirin sınırlı bir yaklaşık birimi vardır.

Teorem 3.3.9. A bir $*$ -cebiri olsun. Her $a \in A$ elemanı, $x, y \in A_{sa}$ olmak üzere $a = x + iy$ formunda tek türlü yazılır.

İspat: A bir $*$ -cebiri ve $a \in A$ olsun. Eğer $x = \frac{1}{2}(a + a^*)$ ve $y = \frac{1}{2i}(a - a^*)$ alınırsa, o zaman $x, y \in A_{sa}$ olup $a = x + iy$ elde edilir. Diğer taraftan, $a = b + ic$ ve $b, c \in A_{sa}$ ise $a^* = b - ic$ olur. Buradan $b = \frac{1}{2}(a + a^*)$ ve $c = \frac{1}{2i}(a - a^*)$ bulunur. $\square$

Tanım 3.3.10. M bir C^* -cebiri olsun. Eğer M bir Banach uzayı olarak bir dual uzayı ise, yani $(M_*)^* = M$ olacak şekilde bir M_* Banach uzayı varsa, M ye bir W^* -cebiri denir. Burada $(M_*)^*$, M_* ın dual uzayını göstermektedir.

Örnek 3.3.11. [H. G. Dales 2000, Örnek 2.6.22] Her A C^* -cebiri Arens regülerdir.

Teorem 3.3.12. [Civin ve Yood 1961, Teorem 7.1] A bir C^* -cebiri olsun. A ın ikinci duali olan A^{**} uzayı da bir C^* -cebiri.

3.4. $L^1(G)$ Grup Cebiri

Bu bölümde, ilk olarak yerel kompakt Hausdorff uzaylarda ölçü ve integrasyon ile ilgili bazı temel kavramlar hatırlatılacaktır. Daha sonra, bir G yerel kompakt grubun $L^1(G)$ grup cebiri tanıtılacaktır.

Tanım 3.4.1. (Cohn, 2013) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

- (i) $X \in \mathcal{A}$;
- (ii) Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$;
- (iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$

şartları sağlanıyor ise $\mathcal{A}$ ailesine X kümesi üzerinde bir σ -cebir denir.

Tanım 3.4.2. (Cohn, 2013) Bir $\mathcal{K}$ ailesini kapsayan σ -cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ ailesi ile üretilen σ -cebir denir.

Tanım 3.4.3. (Cohn, 2013) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi ile üretilen σ -cebirine X üzerinde *Borel cebiri* adı verilir ve $\mathcal{B}(X)$ ile gösterilir. $\mathcal{B}(X)$ kümesinin her bir elemanına bir *Borel kümesi* denir.

Tanım 3.4.4. (Cohn, 2013) X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir σ -cebir olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir *ölçülebilir uzay*; $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de *$\mathcal{A}$ -ölçülebilir küme* (veya kısaca *ölçülebilir küme*) denir.

Tanım 3.4.5. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer her ayrık $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ dizisi için,

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

şartları sağlanıyorsa μ fonksiyonuna, $(X, \mathcal{A})$ üzerinde bir *ölçüm* denir. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne de (*pozitif*) *ölçüm uzayı* adı verilir.

Tanım 3.4.6. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $(X, \mathcal{B}(X))$ ölçülebilir uzayı üzerindeki $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ ölçümüne bir *Borel ölçüm* denir.

Tanım 3.4.7. X bir Hausdorff topolojik uzay ve $\mathcal{A}$, X üzerinde $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ koşulunu sağlayan bir σ -cebir olsun. μ , $(X, \mathcal{A})$ üzerinde bir ölçüm olmak üzere eğer

- (i) Her $K \subseteq X$ kompakt alt kümesi için $\mu(K) < \infty$;
- (ii) Her $E \in \mathcal{A}$ için $\mu(E) = \inf \{\mu(U) \mid U \text{ açık ve } E \subseteq U\}$;
- (iii) Her $U \subseteq X$ açık alt kümesi için $\mu(U) = \sup \{\mu(K) \mid K \text{ kompakt ve } K \subseteq U\}$

şartları sağlanıyorsa μ ye bir *regüler ölçüm* denir.

$(X, \mathcal{B}(X))$ üzerinde bir $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ *regüler ölçümü*, *regüler Borel ölçüm* olarak adlandırılır.

Önerme 3.4.8. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir:

- (i) $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X \mid f(x) > t\} \in \mathcal{A}$;
- (ii) $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X \mid f(x) \geq t\} \in \mathcal{A}$;
- (iii) $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X \mid f(x) < t\} \in \mathcal{A}$;
- (iv) $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X \mid f(x) \leq t\} \in \mathcal{A}$.

Tanım 3.4.9. Önerme 3.4.8 deki denk koşullardan biri sağlanırsa, f fonksiyonuna *$\mathcal{A}$ -ölçülebilir* (ya da kısaca *ölçülebilir*) denir.

Tanım 3.4.10. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $\varphi : X \rightarrow [0, +\infty]$ bir basit ölçülebilir fonksiyon olsun. φ fonksiyonunun X kümesi üzerinde μ ölçüsüne göre *integrali*

$$\int_x \varphi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k) \in [0, \infty]$$

genişletilmiş reel sayısı olarak tanımlanır. Burada a_k lar φ nin X üzerinde aldığı farklı değerler ve $A_k = \{x \in X \mid \varphi(x) = a_k\}$ olup φ fonksiyonu $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k X_{A_k}$ gösterimine sahiptir.

Tanım 3.4.11. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ ölçülebilir fonksiyon olsun. S_f ile $0 \leq \varphi \leq f$ koşulunu sağlayan basit ölçülebilir fonksiyonların kümesini gösterelim. f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre *integrali*

$$\int_x f d\mu = \sup \left\{ \int_x \varphi d\mu : \varphi \in S_f \right\}$$

genişletilmiş reel sayısıdır. $E \in \mathcal{A}$ olsun. f nin μ ye göre E üzerindeki *integrali*

$$\int_E f d\mu = \int_x f X_E d\mu$$

sayısıdır.

Tanım 3.4.12. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer $\int_x |f| d\mu$ integrali sonlu ise f fonksiyonu X üzerinde μ ye göre *integrallenebilir* denir. Burada $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, f nin pozitif parçası ve $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, f nin negatif parçası olmak üzere

$$\int_x |f| d\mu = \int_x f^+ d\mu + \int_x f^- d\mu$$

olur.

Tanım 3.4.13. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı $A \subseteq X$ ve $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ $\mathcal{A}$ -ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Eğer $\mu(A) = 0$ koşulunu sağlayan $A \in \mathcal{A}$ kümesi dışında $f = g$ ise f ile g fonksiyonları *hemen hemen her yerde eşittir* denir ve kısaca $f = g$ (h.h.h.y) ile gösterilir.

Teorem 3.4.14. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$ -ölçülebilir bir fonksiyon olsun. O halde $\int_x |f| d\mu = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $f = 0$ (h.h.h.y) olmasıdır.

Tanım 3.4.15. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$ -ölçülebilir bir fonksiyon ve $p \in [1, +\infty)$ olsun. Eğer $\int_x |f|^p d\mu$ integrali sonlu ise f fonksiyonuna *p-ninci kuvvetten integrallenebilir* denir. p -ninci kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilir.

$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir $\mathbb{R}$ -vektör uzayıdır. $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ üzerinde

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R} \quad \|f\|_p = \left(\int_x |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

fonksiyonu tanımlansın. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ için,

(i) $\|f\|_p = 0 \iff$ hemen hemen her yerde $f = 0$;

(ii) $\|\alpha f\|_p = \left(\int_x |\alpha f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\alpha| \|f\|_p$;

(iii) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

koşulları sağlandığından $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ üzerinde bir yarı-norm tanımlar.

$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ üzerinde,

$$“f \sim g \iff \text{hemen hemen her yerde } f = g”$$

ile tanımlı $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla bu bağıntı $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının kümesi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilir. $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ kümesinin elemanları $[f]$ biçimindeki denklik sınıflarıdır. $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayı,

$$[f] + [g] = [f + g], \quad \alpha [f] = [\alpha f]$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Üstelik,

$$\|\cdot\|_p : L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|[f]\|_p = \|f\|_p = \left(\int_x |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu, $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ üzerinde bir norm olur.

Her ne kadar $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayının elemanları $[f]$ denklik sınıfları ise de onları denklik sınıflarının f temsilci elemanları ile göstermek mümkündür.

Teorem 3.4.16. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $p \in [1, +\infty)$ olsun. O halde $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\|\cdot\|_p$ normu ile birlikte bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.4.17. G bir grup ve τ , G üzerinde bir topoloji olsun. Eğer $m : G \times G \rightarrow G$, $m(a, b) = ab$ işlemi ile $n : G \rightarrow G$, $n(a) = a^{-1}$ fonksiyonu sürekli ise (G, m, τ) üçlüsüne bir *topolojik grup* adı verilir. Burada $G \times G$ kartezyen çarpımı üzerindeki topoloji çarpım topolojisidir.

Tanım 3.4.18. G bir topolojik grup olsun. Eğer G bir yerel kompakt Hausdorff uzayı ise G ye bir *yerel kompakt grup* denir.

Tanım 3.4.19. G bir yerel kompakt grup olsun. μ , G üzerinde sıfırdan farklı bir regüler Borel ölçüm olmak üzere eğer her $x \in G$ ve her $B \in \mathcal{B}(G)$ için $\mu(xB) = \mu(B)$ ise μ ye G üzerinde bir *sol Haar ölçüm*; $\mu(Bx) = \mu(B)$ ise μ ye bir *sağ Haar ölçüm* denir.

Teorem 3.4.20. [Cohn 2013, Teorem 9.2.2 ve 9.2.6] G bir yerel kompakt grup olsun. O zaman G üzerinde bir μ sol Haar ölçüm vardır. Üstelik ν , G üzerinde bir başka sol Haar ölçüm ise o zaman $\nu = c\mu$ olacak şekilde bir $c \in (0, +\infty)$ sabiti vardır.

Not. G bir yerel kompakt grup ve μ , G üzerinde bir sol Haar ölçüm olsun. $p \in [1, +\infty)$ olmak üzere $L^p(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ uzayı, $L^p(G)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.4.21. G bir yerel kompakt grup ve μ , G üzerinde bir sol Haar ölçüm olsun. $f, g \in L^1(G)$ ve $x \in G$ olmak üzere

$$(f * g)(x) = \int_G f(t) g(t^{-1}x) d\mu(t)$$

ile tanımlı $f * g : G \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna f ile g nin *konvolüsyonu* denir. $L^1(G)$ üzerindeki çarpma işlemi konvolüsyon olarak alınırsa $L^1(G)$ bir Banach cebiri olur. Bu durumda $L^1(G)$ ye G nin *grup cebiri* adı verilir.

Önerme 3.4.22. *Yerel kompakt bir G grubu için $L^1(G)$ grup cebiri sınırlı bir yaklaşık birime sahiptir.*

3.5. Amenable Banach Cebirleri

Tanım 3.5.1. A bir Banach cebiri ve X bir Banach A -bimodül olsun. Bir $D : A \rightarrow X$ lineer dönüşümü, her $a, b \in A$ için

$$D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b \quad (D(a^2) = a \cdot D(a) + D(a) \cdot a)$$

şartını sağlıyorsa D ye bir *türev (Jordan türev)* denir.

Her türev bir Jordan türevdir fakat bunun karşısı her zaman doğru olmayabilir.

Teorem 3.5.2. *[B. Johnson 1996, Teorem 6.3] A bir C^* -cebir ve X bir Banach A -bimodül olsun. O halde A dan X e tanımlı her Jordan türev bir türevdir.*

$x \in X$ sabit bir eleman olmak üzere $D_x : A \rightarrow X$ fonksiyonu her $a \in A$ için

$$D_x(a) := a \cdot x - x \cdot a$$

olarak tanımlansın. Her $a, b \in A$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} D_x(a+b) &= (a+b) \cdot x - x \cdot (a+b) \\ &= (a \cdot x - x \cdot a) + (b \cdot x - x \cdot b) \\ &= D_x(a) + D_x(b) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_x(\alpha \cdot a) &= (\alpha \cdot a) \cdot x - x \cdot (\alpha \cdot a) \\ &= \alpha \cdot (a \cdot x) - \alpha \cdot (x \cdot a) \\ &= \alpha (a \cdot x - x \cdot a) \\ &= \alpha \cdot D_x(a) \end{aligned}$$

olduğundan D_x bir lineer dönüşümdür. Üstelik her $a \in A$ için,

$$\begin{aligned} \|D_x(a)\| &= \|a \cdot x - x \cdot a\| \leq \|a \cdot x\| + \|x \cdot a\| \\ &\leq \|a\| \|x\| + \|x\| \|a\| \\ &= 2 \|x\| \|a\| \\ &= M \|a\| \quad (M = 2 \|x\| > 0) \end{aligned}$$

olduğundan D_x lineer dönüşümü sınırlıdır. Ayrıca X bir A -bimodül olduğundan, her $a, b \in A$ için,

$$\begin{aligned} D_x(ab) &= (ab) \cdot x - x \cdot (ab) \\ &= a \cdot (b \cdot x) - (x \cdot a) \cdot b - a \cdot (x \cdot b) + a \cdot (x \cdot b) \\ &= a \cdot (b \cdot x) - a \cdot (x \cdot b) + (a \cdot x) \cdot b - (x \cdot a) \cdot b \\ &= a \cdot (b \cdot x - x \cdot b) + (a \cdot x - x \cdot a) \cdot b \\ &= a \cdot D_x(b) + D_x(a) \cdot b \end{aligned}$$

olup D_x , A dan X e bir türevidir. Bu şekilde tanımlanan D_x lineer dönüşümüne x elemanı tarafından belirlenmiş *iç türev* adı verilir.

Tanım 3.5.3. (B. E. Johnson, 1972) A bir Banach cebiri olsun. Eğer her X Banach A -bimodülü için A dan X^* dual modülüne tanımlı her sınırlı türev bir iç türev ise, o zaman A ya *amenable Banach cebiri* denir.

Örnek 3.5.4. $\mathbb{C}$ kompleks uzay bir amenable Banach cebiridir.

W.G. Bade, P.C. Curtis, Jr. ve H.G. Dales (Bade, Curtis Jr vd., 1987), 1987 yılında değişmeli Banach cebirleri için *zayıf amenabilite* kavramını tanıtmışlardır. B.E. Johnson ise zayıf amenabilite için daha genel bir tanım vermiştir:

Tanım 3.5.5. (B. Johnson, 1991) A bir Banach cebiri olsun. Eğer A dan A^* dual modülüne tanımlı her sınırlı türev bir iç türev ise, o zaman A ya *zayıf amenable Banach cebiri* denir.

Her amenable Banach cebiri zayıf amenabledir, ancak zayıf amenable Banach cebirlerinin sınıfı, amenable Banach cebirlerine kıyasla oldukça geniştir.

Örnek 3.5.6. (B. Johnson, 1991) Her C^* -cebir zayıf amenabledir.

Örnek 3.5.7. (H. Dales, F. Ghahramani vd., 1998) Her yerel kompakt G grubu için $L^1(G)$ grup cebiri zayıf amenabledir.

Önerme 3.5.8. [H. G. Dales 2000, Önerme 2.6.6(i)] A bir değişmeli Banach cebir, E bir Banach A -modül ve $\lambda \in E^*$ olsun. O halde her $a \in A, x \in E$ için $R_\lambda x(a) = \lambda(a \cdot x)$ olacak şekilde bir $R_\lambda \in \mathfrak{B}(E, A^*)$ fonksiyonu vardır.

İspat: Amacımız, R_λ nın E den A^* dual uzayına tanımlı sınırlı bir lineer dönüşüm olduğunu göstermektir. İlk olarak her $x, y \in E, k \in \mathbb{C}$ için, $R_\lambda(kx + y) = kR_\lambda x + R_\lambda y$ olduğunu gösterelim. Yani her $a \in A$ için

$$R_\lambda(kx + y)(a) = (kR_\lambda x + R_\lambda y)(a)$$

olduğunu gösterelim. O halde her $a \in A$ için,

$$\begin{aligned} R_\lambda(kx + y)(a) &= \lambda(a \cdot (kx + y)) \\ &= \lambda(k(a \cdot x) + a \cdot y) \\ &= k\lambda(a \cdot x) + \lambda(a \cdot y) \\ &= kR_\lambda x(a) + R_\lambda y(a) \\ &= (kR_\lambda x + R_\lambda y)(a) \end{aligned}$$

dır. Yani her $x, y \in E$ için $R_\lambda(kx + y) = kR_\lambda x + R_\lambda y$ olup, R_λ bir lineer dönüşümdür. Ayrıca λ sınırlı olduğundan, her $x \in E$ için,

$$\|R_\lambda x\| = \sup \frac{\|R_\lambda x(a)\|}{\|a\|} = \sup \frac{\|\lambda(a \cdot x)\|}{\|a\|} \leq \sup \frac{\|\lambda\| \|a\| \|x\|}{\|a\|} \leq c \cdot \|x\|$$

olup R_λ sınırlıdır. O halde $R_\lambda \in \mathfrak{B}(E, A^*)$ olur. $\square$

Teorem 3.5.9. [H. G. Dales 2000, Teorem 2.8.63] *A bir zayıf amenable Banach cebiri olsun. O halde*

- (i) *A esas Banach cebirdir.*
- (ii) *Eğer A değişmeli ise, her E Banach A-modülü için A dan E ye tanımlı her sınırlı türev sıfırdır.*

İspat: (i) Kabul edelim ki $\overline{A^2} \neq A$ olsun. O halde bir $a_0 \in A \setminus \overline{A^2}$ elemanı alalım. Buna göre $\lambda_0|_{A^2} = 0$ ve $\lambda_0(a_0) = 1$ olacak şekilde $\lambda_0 \in A^*$ seçilebilir. Bir $D : A \rightarrow A^*$ fonksiyonu,

$$D(a) = \lambda_0(a) \cdot \lambda_0$$

şeklinde tanımlansın. D sürekli bir lineer dönüşümdür. $a, b \in A$ için $a \cdot b \in A^2$ olduğundan

$$D(ab) = \lambda_0(ab) \lambda_0 = 0$$

dır ve her $c \in A$ için $\lambda_0|_{A^2} = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} (a \cdot Db)(c) + (Da \cdot b)(c) &= Db(ca) + Da(bc) \\ &= \lambda_0(b) \lambda_0(ca) + \lambda_0(a) \lambda_0(bc) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

olur. Böylece

$$a \cdot D(b) + D(a) \cdot b = 0 \tag{3.7}$$

dır. (3.6) ve (3.7) den $D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b$ olup D, A dan A^* dual modülüne tanımlı bir sınırlı türevdir. Aynı zamanda

$$(D(a_0))(a_0) = (\lambda_0(a_0) \lambda_0)(a_0) = (\lambda_0)(a_0) = 1$$

dir. Ancak her $\lambda \in A^*$ için

$$\begin{aligned}(a_0\lambda - \lambda a_0)(a_0) &= (a_0\lambda)(a_0) - (\lambda a_0)(a_0) \\ &= \lambda(a_0^2) - \lambda(a_0^2) \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Buradan D bir iç türevidir. Bu ise her türevin iç türev olmasıyla çelişir. O halde $\overline{A^2} = A$ olmalıdır.

(ii) $D \neq 0$ olacak şekilde D , A dan E ye tanımlı sınırlı bir türev olsun. (i) den, $\overline{A^2} = A$ dır ve dolayısıyla $D(a_0^2) \neq 0$ olacak şekilde $a_0 \in A$ vardır. O halde $a_0 \cdot D(a_0) \neq 0$ dır. Böylece $\lambda(a_0 \cdot D(a_0)) = 1$ olacak şekilde bir $\lambda \in E^*$ vardır. $R_\lambda \in \mathfrak{B}(E, A^*)$ alınsın. O zaman $R_\lambda \circ D : A \rightarrow A^*$ sınırlı bir türevidir. Çünkü her $x, y \in A$ için

$$\begin{aligned}(R_\lambda \circ D)(x+y) &= R_\lambda(D(x+y)) \\ &= R_\lambda(D(x) + D(y)) \\ &= R_\lambda(D(x)) + R_\lambda(D(y)) \\ &= (R_\lambda \circ D)(x) + (R_\lambda \circ D)(y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(R_\lambda \circ D)(xy) &= R_\lambda(D(xy)) \\ &= R_\lambda(D(x)y + xD(y)) \\ &= R_\lambda(D(x)y) + R_\lambda(xD(y)) \\ &= R_\lambda(D(x))y + xR_\lambda(D(y)) \\ &= (R_\lambda \circ D)(x)y + x(R_\lambda \circ D)(y)\end{aligned}$$

olduğundan $R_\lambda \circ D$ bir lineer dönüşümdür. Ayrıca

$$\|(R_\lambda \circ D)(x)\| = \|R_\lambda(D(x))\| \leq \|R_\lambda\| \|D(x)\| \leq \|R_\lambda\| \|D\| \|x\|$$

olduğundan $R_\lambda \circ D$ dönüşümü sınırlıdır. Yani $R_\lambda \circ D$, A dan A^* dual modülüne tanımlı sınırlı bir türevidir. R_λ dönüşümünün tanımı gereği,

$$\begin{aligned} ((R_\lambda \circ D)(a_0))(a_0) &= (R_\lambda(D(a_0)))(a_0) \\ &= \lambda(a_0 \cdot D(a_0)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir. Bu durumda $R_\lambda \circ D \neq 0$ dır. Ancak bu durum A nın zayıf amenable oluşu ile çelişir. O halde $D = 0$ olmalıdır. $\square$

3.6. Banach Cebirlerde Sıfır Çarpımı Koruyan Dönüşümler

Tanım 3.6.1. A bir Banach cebiri, X herhangi bir Banach uzayı ve $\phi : A \times A \rightarrow X$ sürekli bir 2-lineer dönüşüm olsun. Eğer ϕ 2-lineer dönüşümü,

$$a, b \in A, ab = 0 \Rightarrow \phi(a, b) = 0 \quad (3.8)$$

koşulunu sağlıyor ise ϕ ye *sıfır çarpımı koruyan 2-lineer dönüşüm* adı verilir.

Tanım 3.6.2. A bir Banach cebiri ve X bir Banach uzayı olmak üzere sıfır çarpımı koruyan her sürekli $\phi : A \times A \rightarrow X$ 2-lineer dönüşümü,

$$\phi(ab, c) = \phi(a, bc) \quad (a, b, c \in A)$$

şartını sağlıyorsa A ya $(\mathbb{B})$ özelliğini sağlar denir.

Örnek 3.6.3. A bir Banach cebiri ve $A^3 = \{0\}$ olsun. Her $x, y, z \in A$ için $(xy)z = x(yz) = 0$ dır ve böylece (3.8) şartını sağlayan her bir $\phi : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ 2-lineer fonksiyoneli için

$$\phi(xy, z) = 0 = \phi(x, yz)$$

şartı sağlanır. O halde A Banach cebiri, $(\mathbb{B})$ özelliğini sağlar.

Teorem 3.6.4. (Alaminos, M. Brešar vd., 2009) A bir Banach cebiri ve X bir Banach uzayı olmak üzere A , $(\mathbb{B})$ özelliğini sağlasın. Eğer A nın bir sol yaklaşık birimi var ise, o

zaman sıfır çarpımı koruyan her sürekli $\phi : A \times A \rightarrow X$ 2-lineer dönüşümü için,

$$\phi(a, b) = \Phi(ab) \quad (a, b \in A)$$

olacak şekilde bir $\Phi : A \rightarrow X$ lineer operatörü vardır. Üstelik, A nın sınırlı bir sol yaklaşık birimi varsa Φ süreklidir.

İspat: $(g_i)_{i \in I}$, A nın bir sol yaklaşık birimi olsun. O halde her $a \in A$ için, $\lim_{i \in I} g_i a = a$ dır. Sıfır çarpımı koruyan keyfi bir $\phi : A \times A \rightarrow X$ sürekli 2-lineer dönüşümü alalım. ϕ sürekli olduğundan, her $a, b \in A$ için,

$$\phi(a, b) = \lim_{i \in I} \phi(g_i a, b) = \lim_{i \in I} \phi(g_i, ab) \quad (3.9)$$

dir. Böylece her $a \in A^2$ için $(\phi(g_i, a))_{i \in I}$ ağı yakınsaktır. Buna göre, bir $\Phi : A^2 \rightarrow X$, $\Phi(a) = \lim_{i \in I} \phi(g_i, a)$ ($a \in A^2$) lineer operatörü tanımlanabilir. Her $a, b \in A^2$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha a + b) &= \lim_{i \in I} \phi(g_i, \alpha a + b) \\ &= \lim_{i \in I} [\alpha \phi(g_i, a) + \phi(g_i, b)] \\ &= \alpha \lim_{i \in I} \phi(g_i, a) + \lim_{i \in I} \phi(g_i, b) \\ &= \alpha \Phi(a) + \Phi(b) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. O halde Φ operatörü lineerdir. Φ nin tanımından ve (3.9) eşitliğinden, her $a, b \in A$ için $\phi(a, b) = \Phi(ab)$ olduğu görülür. Eğer $(g_i)_{i \in I}$ ağı sınırlı ise, her $a \in A$ için

$$\|\phi(g_i, a)\| \leq \|\phi\| \sup_{i \in I} \|g_i\| \|a\| \quad (i \in I)$$

olur ve burada limite geçilirse, $\lim_{i \in I} \|\phi(g_i, a)\| \leq \|\phi\| \sup_{i \in I} \|g_i\| \|a\|$ bulunur. Normun sürekliliğinden, $\left\| \lim_{i \in I} \phi(g_i, a) \right\| \leq \|\phi\| \sup_{i \in I} \|g_i\| \|a\|$ elde edilir. Buradan $\|\Phi(a)\| \leq \|\phi\| \sup_{i \in I} \|g_i\| \|a\|$ olup $\sup_{a \neq 0} \frac{\|\Phi(a)\|}{\|a\|} \leq \|\phi\| \sup_{i \in I} \|g_i\|$ olur. Böylece

$$\|\Phi\| \leq \|\phi\| \sup_{i \in I} \|g_i\|$$

olup Φ lineer operatörü sınırlıdır (süreklidir). □

Örnek 3.6.5. (Alaminos, M. Brešar vd., 2009) Her A C^* -cebiri, $(\mathbb{B})$ özelliğini sağlar.

Örnek 3.6.6. (Alaminos, M. Brešar vd., 2009) G bir yerel kompakt grup olmak üzere $L^1(G)$ Banach cebiri, $(\mathbb{B})$ özelliğini sağlar.

A bir Banach cebiri ve $\mathfrak{J}(A)$, A daki tüm idempotentler tarafından üretilen A nın alt cebiri olsun. Eğer $A = \overline{\mathfrak{J}(A)}$ ise, A Banach cebiri *idempotentler tarafından üretilir* denir. $A = \overline{\mathfrak{J}(A)}$ özelliğine sahip Banach cebirlerine örnek olarak aşağıdakiler verilebilir:

Örnek 3.6.7. [Alaminos, M. Brešar vd. 2009, Örnek 1.3]

- (i) Bir X kompakt Hausdorff uzayı için $C(X)$ Banach cebiri.
- (ii) Aşık olmaya bir idempotent içeren topolojik basit Banach cebirleri.
- (iii) W^* -cebiri (Sakai, 2012).

Örnek 3.6.8. (Alaminos, M. Brešar vd., 2009) A bir birimli Banach cebiri ve $A = \overline{\mathfrak{J}(A)}$ ise, o zaman A , $(\mathbb{B})$ özelliğini sağlar.

Örnek 3.6.5 gereği her C^* -cebir, $(\mathbb{B})$ özelliğini sağlar. Üstelik Teorem 3.3.8 gereği her C^* -cebirin sınırlı bir yaklaşık birimi vardır. Buna göre, Teorem 3.6.4 ün C^* -cebirlere kısıtlanmış hali aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 3.6.9. (Alaminos, J. Brešar vd., 2010) A bir C^* -cebir, X bir Banach uzayı ve $\phi : A \times A \rightarrow X$ sıfır çarpımı koruyan sürekli bir 2-lineer dönüşüm olsun. O halde

$$\phi(a, b) = \Phi(ab) \quad (a, b \in A)$$

olacak şekilde bir $\Phi : A \rightarrow X$ lineer operatörü vardır.

Teorem 3.6.10. (Alaminos, J. Brešar vd., 2010) A bir C^* -cebir ve X bir Banach uzayı olsun. $\phi : A \times A \rightarrow X$ fonksiyonu, her $a, b \in A$ için

$$ab = ba = 0 \Rightarrow \phi(a, b) = 0$$

şartını sağlayan sürekli bir 2-lineer dönüşüm olsun. O zaman her $a, b, c, d \in A$ için,

$$\phi(ab, cd) + \phi(da, bc) = \phi(a, bcd) + \phi(dab, c)$$

olur.

İspat: $a_1 b_1 = 0$ olacak şekilde $a_1, b_1 \in A$ alalım. Her $a, b \in A$ için

$$\phi_1 : A \times A \rightarrow X, \quad \phi_1(a, b) = \phi(b_1 a, b a_1)$$

fonksiyonu tanımlansın. İlk olarak ϕ_1 fonksiyonunun 2-lineer dönüşüm olduğunu gösterelim: Her $a, b, c, d \in A$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} \phi_1(\alpha a + b, c) &= \phi(b_1(\alpha a + b), c a_1) \\ &= \phi(b_1(\alpha a) + b_1 b, c a_1) \\ &= \alpha \phi(b_1 a, c a_1) + \phi(b_1 b, c a_1) \\ &= \alpha \phi_1(a, c) + \phi_1(b, c) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi_1(a, \alpha c + d) &= \phi(b_1 a, (\alpha c + d) a_1) \\ &= \phi(b_1 a, (\alpha c) a_1 + d a_1) \\ &= \alpha \phi(b_1 a, c a_1) + \phi(b_1 a, d a_1) \\ &= \alpha \phi_1(a, c) + \phi_1(a, d) \end{aligned}$$

koşulları sağlandığından ϕ_1 fonksiyonu 2-lineerdir. Her $a, b \in A$ için,

$$\begin{aligned} \|\phi_1(a, b)\| &\stackrel{t}{=} \|\phi(b_1 a, b a_1)\| \\ &\stackrel{\phi \text{ sınırlı}}{\leq} \|\phi\| \|b_1 a\| \|b a_1\| \\ &\leq \|\phi\| \|b_1\| \|a\| \|b\| \|a_1\| \\ &= (\|\phi\| \|b_1\| \|a_1\|) \|a\| \|b\| \end{aligned}$$

olacak şekilde $M := \|\phi\| \|b_1\| \|a_1\| > 0$ var olduğundan ϕ_1 sınırlıdır, yani süreklidir.

Şimdi de ϕ_1 fonksiyonunun (3.8) şartını sağladığını gösterelim. $a, b \in A$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda, $(b_1 a)(b a_1) = b_1(ab) a_1 = 0$ ve $(b a_1)(b_1 a) = b(a_1 b_1) a = 0$ dır. Hipotez gereği,

$$0 = \phi(b_1 a, b a_1) = \phi_1(a, b)$$

bulunur. Yani ϕ_1 , (3.8) şartını sağlar.

Örnek 3.6.5 gereği, $\phi_1(ab, c) = \phi_1(a, bc)$ olur ve buradan her $a, b, c \in A$ için

$$\phi(b_1ab, ca_1) - \phi(b_1a, bca_1) = 0 \quad (3.10)$$

elde edilir.

Şimdi de $a_2, b_2, c_2 \in A$ elemanlarını sabitleyelim ve $a_1, b_1 \in A$ olmak üzere

$$\phi_2(a_1, b_1) = \phi(b_1a_2b_2, c_2a_1) - \phi(b_1a_2, b_2c_2a_1)$$

ile tanımlanan $\phi_2 : A \times A \rightarrow X$ fonksiyonunun sürekli bir 2-lineer dönüşüm olduğunu görelim:

Her $a_1, b_1, c_1, d_1 \in A$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} \phi_2(\alpha a_1 + b_1, c_1) &= \phi(c_1a_2b_2, c_2(\alpha a_1 + b_1)) - \phi(c_1a_2, b_2c_2(\alpha a_1 + b_1)) \\ &= \phi(c_1a_2b_2, c_2(\alpha a_1) + c_2b_1) - \phi(c_1a_2, b_2c_2(\alpha a_1) + b_2c_2b_1) \\ &= \alpha\phi(c_1a_2b_2, c_2a_1) + \phi(c_1a_2b_2, c_2b_1) - \alpha\phi(c_1a_2, b_2c_2a_1) \\ &\quad - \phi(c_1a_2, b_2c_2b_1) \\ &= \alpha\phi_2(a_1, c_1) + \phi_2(b_1, c_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi_2(a_1, \alpha c_1 + d_1) &= \phi((\alpha c_1 + d_1)a_2b_2, c_2a_1) - \phi((\alpha c_1 + d_1)a_2, b_2c_2a_1) \\ &= \phi((\alpha c_1)a_2b_2 + d_1a_2b_2, c_2a_1) - \phi((\alpha c_1)a_2 + d_1a_2, b_2c_2a_1) \\ &= \alpha\phi(c_1a_2b_2, c_2a_1) + \phi(d_1a_2b_2, c_2a_1) - \alpha\phi(c_1a_2, b_2c_2a_1) \\ &\quad - \phi(d_1a_2, b_2c_2a_1) \\ &= \alpha\phi_2(a_1, c_1) + \phi_2(a_1, d_1) \end{aligned}$$

koşulları sağlandığından ϕ_2 fonksiyonu 2-lineerdir. Her $a_1, b_1 \in A$ için,

$$\begin{aligned}
\|\phi_2(a_1, b_1)\| &= \|\phi(b_1 a_2 b_2, c_2 a_1) - \phi(b_1 a_2, b_2 c_2 a_1)\| \\
&\leq \|\phi(b_1 a_2 b_2, c_2 a_1)\| + \|\phi(b_1 a_2, b_2 c_2 a_1)\| \\
&\leq \|\phi\| \|b_1 a_2 b_2\| \|c_2 a_1\| + \|\phi\| \|b_1 a_2\| \|b_2 c_2 a_1\| \quad (\phi : \text{sınırlı}) \\
&\leq \|\phi\| \|b_1\| \|a_2 b_2\| \|c_2\| \|a_1\| + \|\phi\| \|b_1\| \|a_2\| \|b_2 c_2\| \|a_1\| \quad (A : \text{normlu cebir}) \\
&= (\|\phi\| \|a_2 b_2\| \|c_2\| + \|\phi\| \|a_2\| \|b_2 c_2\|) \|a_1\| \|b_1\|
\end{aligned}$$

olacak şekilde $M := \|\phi\| \|a_2 b_2\| \|c_2\| + \|\phi\| \|a_2\| \|b_2 c_2\| > 0$ var olduğundan ϕ_2 sınırlıdır, yani süreklidir.

Şimdi de ϕ_2 fonksiyonunun (3.8) şartını sağladığını gösterelim. $a_1, b_1 \in A$ için $a_1 b_1 = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda (3.10) eşitliğinden

$$\phi_2(a_1, b_1) = \phi(b_1 a_2 b_2, c_2 a_1) - \phi(b_1 a_2, b_2 c_2 a_1) = 0$$

olur. Böylece Örnek 3.6.5 gereği, her $a_1, b_1, c_1 \in A$ için, $\phi_2(a_1 b_1, c_1) - \phi_2(a_1, b_1 c_1) = 0$ dır. Yani ϕ_2 nin tanımından her $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in A$ için,

$$[\phi(c_1 a_2 b_2, c_2 a_1 b_1) - \phi(c_1 a_2, b_2 c_2 a_1 b_1)] - [\phi(b_1 c_1 a_2 b_2, c_2 a_1) - \phi(b_1 c_1 a_2, b_2 c_2 a_1)] = 0$$

olup,

$$\phi(c_1 a_2 b_2, c_2 a_1 b_1) - \phi(c_1 a_2, b_2 c_2 a_1 b_1) - \phi(b_1 c_1 a_2 b_2, c_2 a_1) + \phi(b_1 c_1 a_2, b_2 c_2 a_1) = 0 \quad (3.11)$$

bulunur. (3.11) eşitliğinde, $c_1 a_2$ ve $c_2 a_1$ elemanlarını içeren terimlerde Sonuç 3.2.18 gereği $A^2 = A$ olduğu kullanılırsa, teoremin ifadesinde de iddia edildiği gibi, her $a, b, c, d \in A$ için,

$$\phi(ab, cd) - \phi(a, bcd) + \phi(da, bc) - \phi(dab, c) = 0$$

sonucuna ulaşılır. □

Teorem 3.6.11. [H. Ghahramani 2013, Sonuç 3.6] A bir Banach cebir, X bir Banach uzayı ve $\phi : A \times A \rightarrow X$ dönüşümü,

$$a, b \in A, ab = ba = 0 \Rightarrow \phi(a, b) = 0$$

şartını sağlayan sürekli bir 2-lineer dönüşüm olsun. O halde her $a \in A$ ve $x \in \mathfrak{J}(A)$ için,

$$\phi(a, x) + \phi(x, a) = \phi(ax, e_A) + \phi(e_A, xa)$$

dır. Özel olarak, eğer A idempotentler tarafından üretiliyorsa, o zaman her $a, b \in A$ için,

$$\phi(a, b) + \phi(b, a) = \phi(ab, e_A) + \phi(e_A, ba)$$

şartı sağlanır.

İspat: Her $a, p \in A$ için $p^2 = p$ ve $q = 1 - p$ olsun. $pq = qp = 0$ olduğundan

$$\phi(p, q) = \phi(p, 1 - p) = \phi(p, 1) - \phi(p, p) = 0$$

ve

$$\phi(q, p) = \phi(1 - p, p) = \phi(1, p) - \phi(p, p) = 0$$

olur. Buradan $\phi(p, 1) = \phi(1, p)$ elde edilir. Her $x \in \mathfrak{J}(A)$ için, lineerlikten

$$\phi(x, 1) = \phi(1, x)$$

bulunur. $(q - paq)(p + paq) = qp + qpaq - paqp - paqpaq = 0$ dır. Benzer şekilde $(p + paq)(q - paq) = 0$ olur. Ayrıca $(p + qap)(q - qap) = (q - qap)(p + qap) = 0$ dır. Buradan hipotez gereği, $\phi(q - paq, p + paq) = 0$ ve $\phi(p + qap, q - qap) = 0$ dır. Böylece bu eşitliklerde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(q - paq, p + paq) \\ &= \phi(q, p) + \phi(q, paq) - \phi(paq, p) - \phi(paq, paq) \\ &= \phi(q, paq) - \phi(paq, p) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
0 &= \phi(p + qap, q - qap) \\
&= \phi(p, q) - \phi(p, qap) + \phi(qap, q) - \phi(qap, qap) \\
&= -\phi(p, qap) + \phi(qap, q)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\phi(paq, p) = \phi(q, paq)$ ve $\phi(p, qap) = \phi(qap, q)$ elde edilir.

Ayrıca $(pap)q = q(pap) = 0$ ve $(qaq)p = p(qaq) = 0$ olup

$$\phi(qaq, p) = \phi(p, qaq) = 0$$

dır. Yukarıdaki eşitlikler de kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\phi(e_A \cdot a, p) + \phi(p, e_A \cdot a) \\
&= \phi((p + q)a, p) + \phi(p, (p + q)a) \\
&= \phi(pa + qa, p) + \phi(p, pa + qa) \\
&= \phi(pa(p + q) + qa(p + q), p) + \phi(p, pa(p + q) + qa(p + q)) \\
&= \phi(pap + paq + qap + qaq, p) + \phi(p, pap + paq + qap + qaq) \\
&= \phi(pap, p) + \phi(paq, p) + \phi(qap, p) + \phi(qaq, p) + \phi(p, pap) + \phi(p, paq) \\
&\quad + \phi(p, qap) + \phi(p, qaq) \\
&= \phi(pap, p) + \phi(paq, p) + \phi(qap, p) + \phi(p, pap) + \phi(p, paq) + \phi(p, qap) \\
&= \phi(pap, p) + \phi(q, paq) + \phi(qap, p) + \phi(p, pap) + \phi(p, paq) + \phi(qap, q) \\
&= \phi(pap, p) + \phi(1 - p, pa(1 - p)) + \phi((1 - p)ap, p) + \phi(p, pap) \\
&\quad + \phi(p, pa(1 - p)) + \phi((1 - p)ap, 1 - p) \\
&= \phi(pap, p) + \phi(1, pa) - \phi(1, pap) - \phi(p, pa) + \phi(p, pap) + \phi(ap, p) \\
&\quad - \phi(pap, p) + \phi(p, pap) + \phi(p, pa) - \phi(p, pap) + \phi(ap, 1) - \phi(ap, p) \\
&\quad - \phi(pap, 1) + \phi(pap, p) \\
&= \phi(p - 1, pap) + \phi(pap, p - 1) + \phi(1, pa) + \phi(ap, 1) \\
&= \phi(q, pap) + \phi(pap, q) + \phi(1, pa) + \phi(ap, 1) \\
&= \phi(ap, 1) + \phi(1, pa) \quad (q(pap) = 0 \text{ olduğundan})
\end{aligned}$$

bulunur. Her $x \in \mathfrak{J}(A)$ elemanı, A daki idempotentlerin bir lineer kombinasyonu olduğundan, her $a \in A$ ve her $x \in \mathfrak{J}(A)$ için

$$\phi(a, x) + \phi(x, a) = \phi(ax, 1) + \phi(1, xa)$$

olur.

□



4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde, esas olarak A. Zivari-Kazempour (Zivari-Kazempour, 2022) un kendisinin 2022 yılında yayınladığı çalışması ile daha sonra M. Valaei (Zivari-Kazempour ve Valaei, 2022) ile birlikte 2022 yılında yayınladıkları Banach cebirleri üzerinde tanımlı n -Jordan çarpanların karakterizasyonu hakkındaki çalışmaları incelenecektir.

4.1. Çarpanlar ve Jordan Çarpanlar

Tanım 4.1.1. A bir Banach cebiri, X bir Banach A -bimodül ve $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için

$$T(ab) = T(a) \cdot b$$

ise T ye *sol çarpan*; $T(ab) = a \cdot T(b)$ ise T ye *sağ çarpan* denir. Eğer T hem sol hem de sağ çarpan ise T ye *çarpan* adı verilir.

Tanım 4.1.2. A bir Banach cebiri, X bir Banach A -bimodül ve $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a \in A$ için

$$T(a^2) = T(a) \cdot a$$

ise T ye *sol Jordan çarpan*; $T(a^2) = a \cdot T(a)$ ise T ye *sağ Jordan çarpan* denir. Eğer T hem sol hem de sağ Jordan çarpan ise T ye *Jordan çarpan* adı verilir.

Not. Her (sağ, sol) çarpanın bir (sağ, sol) Jordan çarpan olduğu açıktır, ancak aşağıdaki örnekte de gösterildiği gibi bunun karşıtı genel olarak doğru değildir.

Örnek 4.1.3. $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \text{ ve } ab = 0 \right\}$, alışılmış matris işlemleriyle bir cebir olsun. $\mathcal{A}$ cebiri,

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\| = |a| + |b| \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

normu ile birlikte bir Banach cebiridir.

$\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \phi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ sürekli lineer dönüşümü tanımlansın.

Her $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ için,

$$\phi(X^2) = \phi \left(\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = X\phi(X)$$

dir. Bu durumda ϕ bir sağ Jordan çarpanıdır. Şimdi ϕ nin bir sağ çarpan olmadığını gösterelim:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrislerini alalım. Bu durumda

$$\phi(AB) = \phi \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \phi \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0_{2 \times 2}$$

dır. Ayrıca

$$A\phi(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{2 \times 2}$$

bulunur. Dolayısıyla $\phi(AB) \neq A\phi(B)$ olduğundan ϕ bir sağ çarpan değildir. Böylece her sağ Jordan çarpan bir sağ çarpan değildir.

Tanım 4.1.4. A bir Banach cebiri, X bir Banach A -bimodül ve $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için

$$a \cdot T(b) = T(a) \cdot b$$

şartı sağlanıyorsa T ye *iki yanlı çarpan* denir.

Not. Eğer T hem sol hem de sağ çarpan ise T iki yanlı çarpanıdır. Ancak karşıtı genelde doğru değildir.

Örnek 4.1.5. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ Banach cebiri üzerinde bir $T : A \rightarrow A$ dönüşümü

$$T \left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlansın. T bir sınırlı lineer dönüşümdür. Üstelik her $x = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y =$

$$\begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in A \text{ için,}$$

$$T(x)y = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$xT(y) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ olduğundan } T(x)y = xT(y)$$

dir. O halde T iki yanlı çarpandır. Ancak $xy = \begin{pmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ için $T(xy) =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olup $T(x)y \neq T(xy) = 0$ ($xT(y) \neq T(xy) = 0$) olduğundan T bir sol (sağ) çarpan değildir.

Teorem 4.1.6. A bir Banach cebiri ve X bir Banach A -bimodül olsun. Eğer $w \in A$ elemanı, X A -bimodülünün bir sol (sağ) ayrılma noktası ve $T : A \rightarrow X$ iki yanlı çarpan ise o zaman T bir sol (sağ) çarpandır.

İspat: T iki yanlı çarpan olduğundan her $a, b \in A$ için $a \cdot T(b) = T(a) \cdot b$ dir. Her $x \in A$ için,

$$x \cdot T(ab) = T(x) \cdot (ab) = (T(x) \cdot a) \cdot b = (x \cdot T(a)) \cdot b = x \cdot (T(a) \cdot b)$$

olur. Özel olarak, $w \cdot T(ab) = w \cdot (T(a) \cdot b)$ olup her $a, b \in A$ için

$$w \cdot (T(ab) - T(a) \cdot b) = 0$$

olur. w, X in bir sol ayrılma noktası olduğundan her $a, b \in A$ için $T(ab) - T(a) \cdot b = 0$ bulunur. Böylece her $a, b \in A$ için $T(ab) = T(a) \cdot b$ olup T bir sol çarpandır. T nin bir sağ çarpan olduğu da benzer şekilde ispatlanır. $\square$

4.2. n -Çarpanlar ve n -Jordan Çarpanlar

Tanım 4.2.1. A bir Banach cebiri, X bir sol Banach A -modül, $n \geq 2$ bir tamsayı ve $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer

- (i) her $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ için $T(a_1 a_2 \dots a_n) = a_1 \cdot T(a_2 \dots a_n)$ ise T ye *sağ n -çarpan*;
- (ii) her $a \in A$ için $T(a^n) = a \cdot T(a^{n-1})$ ise T ye *sağ n -Jordan çarpan* denir.

Sol n -çarpan, sol n -Jordan çarpan, n -çarpan ve n -Jordan çarpan da benzer şekilde tanımlanır.

Sağ çarpanlar için geçerli olan tüm sonuçlar, sol çarpanlar için de benzer ifadelerle yazılacağından, bundan sonraki kısımlarda sadece sağ versiyonlar kullanılacaktır. Sadelik için ise sağ öneki kullanılmayacaktır.

A bir Banach cebiri ve X bir sol Banach A -modül olmak üzere,

$$Mul_n(A, X) = \{T \mid T : A \rightarrow X \text{ } n\text{-çarpan}\}$$

ve

$$JMul_n(A, X) = \{T \mid T : A \rightarrow X \text{ } n\text{-Jordan çarpan}\}$$

kümeleri tanımlansın. $Mul_n(A, X)$ kümesi, $\mathfrak{B}(A, X)$ vektör uzayının bir alt uzayıdır.

Teorem 4.2.2. (Laali ve Fozouni, 2017) A bir Banach cebiri ve X bir sol Banach A -modül olsun. O halde her $n \geq 2$ tamsayısı için $Mul_n(A, X)$ uzayı, $\mathfrak{B}(A, X)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır.

İspat: $Mul_n(A, X)$ uzayının $\mathfrak{B}(A, X)$ uzayında kapalı olduğu göstermek için $\{T_m\} \subset Mul_n(A, X)$ bir dizi olmak üzere $T_m \rightarrow T \in \mathfrak{B}(A, X)$ olduğunu kabul edelim. $T \in Mul_n(A, X)$ olduğunu gösterelim. $a_1, a_2, \dots, a_n, A$ nın keyfi elemanları olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \|T(a_1 \dots a_n) - a_1 \cdot T(a_2 \dots a_n)\| \\ & \leq \|T(a_1 \dots a_n) - T_m(a_1 \dots a_n)\| + \|T_m(a_1 \dots a_n) - a_1 \cdot T(a_2 \dots a_n)\| \\ & \leq \|T - T_m\| \|a_1 \dots a_n\| + \|a_1 \cdot T_m(a_2 \dots a_n) - a_1 \cdot T(a_2 \dots a_n)\| \\ & \leq \|T - T_m\| \|a_1 \dots a_n\| + \|T - T_m\| \|a_1\| \|a_2 \dots a_n\| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $m \rightarrow \infty$ iken $T(a_1 \dots a_n) = a_1 \cdot T(a_2 \dots a_n)$ bulunur. O halde $T \in Mul_n(A, X)$ dir. Yani $Mul_n(A, X)$ kümesi kapalıdır. $\square$

Her $n \geq 2$ tamsayısı için $JMul_n(A, X)$ kümesinin de $\mathfrak{B}(A, X)$ uzayının kapalı bir alt uzayı olduğu Teorem 4.2.2 nin ispatına benzer şekilde gösterilir.

Önerme 4.2.3. A bir Banach cebiri, X bir sol Banach A -modül, $n \geq 2$ bir tamsayı ve $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer T bir n -çarpan ise T bir $(n+1)$ -çarpanıdır.

İspat: T bir n -çarpan olsun. O halde her $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ için

$$T(a_1 a_2 \dots a_n) = a_1 \cdot T(a_2 \dots a_n) \quad (4.1)$$

sağlanır. $a_{n+1} \in A$ alalım. Bu durumda (4.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} T(a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}) &= T\left(\overbrace{(a_1 a_2)}^{\in A} \underbrace{a_3 \dots a_n a_{n+1}}_{(n-1) \text{ tane}}\right) \\ &= (a_1 a_2) \cdot \left(T\left(\overbrace{a_3 \dots a_{n+1}}^{(n-1) \text{ tane}}\right)\right) \\ &= a_1 \cdot \left(a_2 \cdot T\left(\overbrace{a_3 \dots a_{n+1}}^{(n-1) \text{ tane}}\right)\right) = a_1 \cdot T(a_2 a_3 \dots a_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde T bir $(n+1)$ -çarpanıdır. $\square$

Genel durumda, $Mul_n(A, X) \subsetneq Mul_{n+1}(A, X)$ dir [Laali ve Fozouni 2017, Teorem 2].
 Üstelik A bir esas Banach cebiri ise, her $n \geq 2$ tamsayısı için $Mul_n(A, X) = Mul_{n+1}(A, X)$ dir [Laali ve Fozouni 2017, Teorem 3].

$Mul_n(A, X) \subset JMul_n(A, X)$ olduğu açıktır. $JMul_n(A, X) \subset Mul_n(A, X)$ sağlanmadığına dair bir örneği $n = 3$ için verelim:

Örnek 4.2.4. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & x & c \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ Banach cebiri üzerinde bir $T : A \rightarrow A$ dönüşümü

$$T \left(\begin{pmatrix} 0 & a & x & c \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & a & y & c \\ 0 & 0 & b & x \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlansın. T bir sınırlı lineer dönüşümdür. Üstelik her $u = \begin{pmatrix} 0 & a & x & c \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ için,

$$u^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab & ay+xa \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } u^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ olup}$$

$$T(u^2) = T \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & ab & ay+xa \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab & ay+xa \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = u^2$$

ve $T(u^3) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = u^3$ olur. Yani her $u \in A$ için

$$T(u^3) = u^3 = uu^2 = uT(u^2)$$

dir. Bu nedenle T bir 3-Jordan çarpanıdır, ancak T bir 3-çarpan değildir.

Genel olarak, $JMul_{n+1}(A, X) \subseteq JMul_n(A, X)$ içermesi doğru değildir. Buna dair bir örnek aşağıda verilmiştir:

Örnek 4.2.5. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & a & b \\ 0 & 0 & y & c \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ Banach cebiri üzerinde bir $T : A \rightarrow A$ dönüşümü

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & x & a & b \\ 0 & 0 & y & c \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & z & c & 0 \\ 0 & 0 & y & a \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile tanımlansın. T bir sınırlı lineer dönüşümdür. O halde her $u \in A$ ve $n \geq 4$ için $T(u^n) = u \cdot T(u^{n-1})$ dir. Bu durumda $n \geq 4$ için T bir n -Jordan çarpanıdır. Ancak $x, y, z \neq 0$ olduğu durumda her $u \in A$ için $T(u^3) \neq u \cdot T(u^2)$ dir. Böylece T bir 3-Jordan çarpan değildir.

4.3. n -Jordan Çarpanların Karakterizasyonu

Lemma 4.3.1. A bir Banach cebiri, X bir sol Banach A -modül ve $T : A \rightarrow X$ bir Jordan çarpan olsun. O halde $n \geq 2$ tamsayısı için T bir n -Jordan çarpanıdır.

İspat: n üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $n = 3$ için T nin bir 3-Jordan çarpan olduğunu gösterelim: T bir Jordan çarpan olduğundan her $a \in A$ için

$$T(a^2) = a \cdot T(a) \tag{4.2}$$

dır. Burada a yerine $a + b$ yazılırsa, her $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned}
T((a+b)^2) &= (a+b) \cdot T(a+b) \\
\Rightarrow T(a^2 + ab + ba + b^2) &= a \cdot T(a+b) + b \cdot T(a+b) \\
\Rightarrow T(a^2) + T(ab + ba) + T(b^2) &= a \cdot T(a) + a \cdot T(b) + b \cdot T(a) + b \cdot T(b) \\
\Rightarrow T(ab + ba) &= a \cdot T(b) + b \cdot T(a)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olur. (2) eşitliğinde b yerine a^2 yazılırsa, her $a \in A$ için

$$2T(a^3) = a \cdot T(a^2) + a^2 \cdot T(a) \tag{4.4}$$

bulunur. (1) ve (3) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
2T(a^3) &= a \cdot T(a^2) + a \cdot (a \cdot T(a)) \\
\Rightarrow 2T(a^3) &= a \cdot T(a^2) + a \cdot T(a^2) \\
\Rightarrow T(a^3) &= a \cdot T(a^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece T bir 3-Jordan çarpandır. Her $3 \leq k \leq n$ için

$$T(a^k) = a \cdot T(a^{k-1}) \tag{4.5}$$

sağlansın. (3) de b yerine a^k yazılırsa,

$$\begin{aligned}
T(aa^k + a^k a) &= a \cdot T(a^k) + a^k \cdot T(a) \\
\Rightarrow T(2a^{k+1}) &= a \cdot T(a^k) + a^k \cdot T(a) \\
\Rightarrow 2T(a^{k+1}) &= a \cdot T(a^k) + a^k \cdot T(a)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur. (5) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
a^k \cdot T(a) &= (a^{k-1} a) \cdot T(a) = a^{k-1} \cdot T(a^2) = (a^{k-2} a) \cdot T(a^2) \\
&= a^{k-2} \cdot T(a^3) = \dots = a \cdot T(a^k)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olur. (4.7) eşitliğinden,

$$a \cdot T(a^k) + \underbrace{a^k \cdot T(a)}_{aT(a^k)} = 2a \cdot T(a^k)$$

olur. Bu eşitlik, (4.6) da yerine yazılırsa

$$2T(a^{k+1}) = 2a \cdot T(a^k)$$

elde edilir. Buradan $T(a^{k+1}) = a \cdot T(a^k)$ olur. O halde T bir $(k+1)$ -Jordan çarpanıdır. Böylece istenen elde edilir. $\square$

Lemma 4.3.1 den $n \geq 2$ olmak üzere her Jordan çarpan bir n -Jordan çarpanıdır. Ancak, genel olarak $m > n \geq 3$ için her n -Jordan çarpan m -Jordan çarpan değildir. Ayrıca Örnek 4.2.5 e göre, bazı $(n+1)$ -Jordan çarpanlar n -Jordan çarpan olamamaktadır.

Lemma 4.3.1 in karşısı doğru değildir. Yani $n \geq 2$ olmak üzere her n -Jordan çarpan, Jordan çarpan olmayabilir. $n = 3$ için aşağıdaki örneği verelim:

Örnek 4.3.2. A Banach cebirini ve T lineer dönüşümünü Örnek 4.1.5 de verildiği gibi alalım. Her $u \in A$ için $T(u^3) = uT(u^2)$ dir. Yani T bir 3-Jordan çarpanıdır. Ancak $T(u^2) \neq uT(u)$ olduğundan T bir Jordan çarpan değildir.

Teorem 4.3.3. A bir birimli Banach cebiri, X bir birimsel sol Banach A -modül, $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer

$$ab = e_A \text{ olacak şekilde her } a, b \in A \text{ için } T(ab) = a \cdot T(b) \quad (4.8)$$

ise T bir n -Jordan çarpanıdır.

İspat: Keyfi bir $a \in A$ alalım. $|\lambda| < \frac{1}{\|a\|}$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\|e_A - (e_A - \lambda a)\| = \|e_A - e_A + \lambda a\| = \|\lambda a\| = |\lambda| \|a\| < \frac{1}{\|a\|} \cdot \|a\| < 1$$

olduğundan $e_A - \lambda a$ tersinirdir ve tersi

$$\begin{aligned} (e_A - \lambda a)^{-1} &= e_A + \sum_{n=1}^{\infty} (e_A - (e_A - \lambda a))^n = e_A + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a)^n \\ &= e_A + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}
T(e_A) &= T((e_A - \lambda a)(e_A - \lambda a)^{-1}e_A) \\
&= (e_A - \lambda a) \cdot T((e_A - \lambda a)^{-1}e_A) \\
&= (e_A - \lambda a) \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) \\
&= e_A \cdot T\left(\lambda^0 a^0 e_A + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) - \lambda a \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) \\
&= e_A \cdot T(e_A) + e_A \cdot T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) - \lambda a \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) \\
&= T(e_A e_A) + T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) - \lambda a \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) \\
&= T(e_A) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T(a^n e_A) - \lambda a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T(a^n e_A)
\end{aligned}$$

dır. Buradan $|\lambda| < \frac{1}{\|a\|}$ olacak şekildeki her $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T(a^n) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} a \cdot T(a^n) = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T(a^n) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a \cdot T(a^{n-1}) = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n [T(a^n) - a \cdot T(a^{n-1})] = 0
\end{aligned}$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için $T(a^n) = a \cdot T(a^{n-1})$ dir. Böylece T bir n -Jordan çarpandır. $\square$

Sonuç 4.3.4. *A bir birimli Banach cebiri, X bir birimsel sol Banach A-modül, $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $a \in \text{Inv}(A)$ ve $T(aa^{-1}) = a \cdot T(a^{-1})$ ise T bir n -Jordan çarpandır.*

İspat: $a \in \text{Inv}(A)$ ve $T(aa^{-1}) = a \cdot T(a^{-1})$ olsun. $a \in \text{Inv}(A)$ olduğundan $aa^{-1} = e_A = a^{-1}a$ dır ve

$$T(e_A) = T(aa^{-1}) = a \cdot T(a^{-1})$$

dir. Teorem 4.3.3 gereği, T nin n -Jordan çarpan olduğu görülür. $\square$

Aşağıdaki örnek, Teorem 4.3.3 den “ $ab = e_A$ olacak şekildeki her $a, b \in A$ için $T(ab) = a \cdot T(b)$ ” hipotezinin kaldırılamaz koşul olduğunu kanıtlar.

Örnek 4.3.5. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ olsun. O halde A bir birimli Banach cebiridir

ve birimsel Banach A -bimodüldür. $T : A \rightarrow A$, $T \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ sürekli

lineer dönüşümü tanımlansın. $x = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$ olarak alınsın. O halde

$xy = e_A$ dır, ancak $T(xy) \neq xT(y)$ dir. Bu yüzden $n \geq 2$ için T bir n -Jordan çarpan değildir.

Çünkü $xy = e_A$ şartını sağlayan her $x, y \in A$ için $T(xy) = xT(y)$ şartı sağlanmamış olur.

Teorem 4.3.6. A bir birimli Banach cebiri, X bir birimsel sol Banach A -modül, $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $p \in A$ bir idempotent olmak üzere $ab = p$ şartını sağlayan her $a, b \in A$ için $T(ab) = a \cdot T(b)$ ise o zaman T , pAp Banach cebiri üzerinde bir n -Jordan çarpandır.

İspat: $p \in A$ bir idempotent olsun. $pAp = \{pxp \mid x \in A\}$ kümesinin, A nın birimli kapalı bir alt cebiri olduğunu ve biriminin p olduğunu gösterelim:

Her $pxp, pyy \in pAp$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (pxp) + pyy &= (\alpha \cdot p)xp + pyy = p(\alpha \cdot (xp)) + pyy \\ &= p(\alpha \cdot x)p + pyy = p(\alpha \cdot x + y)p \in pAp \end{aligned}$$

ve

$$(pxp)(pyy) = pxp^2yp \in pAp$$

olduğundan pAp , A nın bir alt cebiridir. $\overline{pAp} = pAp$ olduğundan pAp kapalıdır. O halde pAp , A nın bir Banach alt cebiridir.

$p = p^2 = pp = pe_{Ap} \in pAp$ dir ve her $pxp \in pAp$ için,

$$p(pxp) = ppxp = p^2xp = pxp \text{ ve } (pxp)p = pxpp = pxp^2 = pxp$$

eşitlikleri sağlandığından pAp birimlidir ve birimi p dir.

$a \in A$ keyfi bir eleman olsun. $\lambda \in \mathbb{C} \ni |\lambda| < \frac{1}{\|pap\|}$ alalım. $\|e_{pAp} - p\| = \|p - p\| = 0 < 1$ olduğundan $p \in pAp$ tersinirdir. Ayrıca

$$p - \lambda pap = p - p\lambda ap = pe_{Ap} - p\lambda ap = p(e_{Ap} - \lambda ap) = p(e_A - \lambda a)p \in pAp$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|e_{pAp} - (p - \lambda pap)\| &= \|p - (p - \lambda pap)\| \\
&= \|p - p + \lambda pap\| \\
&= \|\lambda pap\| \\
&= |\lambda| \cdot \|pap\| < \frac{1}{\|pap\|} \cdot \|pap\| = 1
\end{aligned}$$

olduğundan $(p - \lambda pap)$ elemanı tersinirdir.

$$\begin{aligned}
T(p) &= T((p - \lambda pap)(p - \lambda pap)^{-1}p) \\
&= (p - \lambda pap) \cdot T((p - \lambda pap)^{-1}p) \\
&= (p - \lambda pap) \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) \\
&= p \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) - (\lambda pap) \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) \\
&= p \cdot T\left(p + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) - (\lambda pap) \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) \\
&= p \cdot T(p) + p \cdot T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) - (\lambda pap) \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) \\
&= T(p) + p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n) - (\lambda pap) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $|\lambda| < \frac{1}{\|pap\|}$ şartını sağlayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
0 &= p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n) - \lambda pap \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n) \\
\Rightarrow 0 &= p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n) - \sum_{n=1=0}^{\infty} \lambda^{n+1} (pap) \cdot T((pap)^n) \\
\Rightarrow 0 &= p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (pap) \cdot T((pap)^{n-1}) \\
\Rightarrow 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n [p \cdot T((pap)^n) - (pap) \cdot T((pap)^{n-1})]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
p \cdot T((pap)^n) &= (pap) \cdot T((pap)^{n-1}) \\
\Rightarrow p \cdot T((pap)^n) &= (p^2 ap) \cdot T((pap)^{n-1}) \\
\Rightarrow (p^{-1} p) \cdot T((pap)^n) &= (p^{-1} (p^2 ap)) \cdot T((pap)^{n-1}) \\
\Rightarrow T((pap)^n) &= (pap) \cdot T((pap)^{n-1})
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, T , pAp üzerinde bir n -Jordan çarpandır. $\square$

Teorem 4.3.7. $n \in \{2, 3\}$ bir sabit olsun. A bir birimli Banach cebiri, X bir birimsel sol Banach A -modül ve $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer T bir $(n+1)$ -Jordan çarpan ise o zaman T bir n -Jordan çarpandır.

İspat: $n = 2$ alalım ve T bir 3-Jordan çarpan olsun. O halde her $a \in A$ için, $T(a^3) = a \cdot T(a^2)$ dir. Bu eşitlikte a yerine $a + e_A$ yazılırsa, X birimsel sol A -modül olduğundan,

$$\begin{aligned}
T((a + e_A)^3) &= (a + e_A) \cdot T((a + e_A)^2) \\
\Rightarrow T(a^3 + 3a^2 + 3a + e_A) &= (a + e_A) \cdot [T(a^2 + 2a + e_A)] \\
\Rightarrow 3T(a^2) + 3T(a) &= 2a \cdot T(a) + a \cdot T(e_A) + T(a^2) + 2T(a) \\
\Rightarrow 3T(a^2) + 3T(a) &= 2a \cdot T(a) + a \cdot T(e_A) + T(a^2) + 2T(a) \\
\Rightarrow 3T(a^2 + a) &= a \cdot T(e_A) + 2a \cdot T(a) + T(a^2) + 2T(a) \tag{4.9}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.9) eşitliğinde a yerine $-a$ yazılırsa,

$$3T(a^2 - a) = -a \cdot T(e_A) + 2a \cdot T(a) + T(a^2) - 2T(a) \tag{4.10}$$

bulunur. (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
6T(a^2) &= 4a \cdot T(a) + 2T(a^2) \\
\Rightarrow 2T(a^2) &= 2a \cdot T(a)
\end{aligned}$$

olup $T(a^2) = a \cdot T(a)$ dır. Böylece T bir Jordan çarpandır. Yani T bir 2-Jordan çarpandır.

Şimdi $n = 3$ alalım ve her $a \in A$ için $T(a^4) = a \cdot T(a^3)$ olsun. Bu eşitlikte a yerine $a + e_A$ yazılıp X in birimsel sol A -modül olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
T((a + e_A)^4) &= (a + e_A) \cdot T((a + e_A)^3) \\
\Rightarrow T(a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + e_A) &= (a + e_A) \cdot [T(a^3 + 3a^2 + 3a + e_A)] \\
\Rightarrow T(a^4) + 4T(a^3) + 6T(a^2) + 4T(a) &= a \cdot T(a^3) + 3a \cdot T(a^2) \\
&\quad + 3a \cdot T(a) + a \cdot T(e_A) + T(a^3) + 3T(a^2) + 3T(a) \\
\Rightarrow 3T(a^3) + 3T(a^2) + T(a) &= 3a \cdot T(a^2) + 3a \cdot T(a) + a \cdot T(e_A)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

bulunur. (4.11) de a yerine $-a$ yazılırsa,

$$-3T(a^3) + 3T(a^2) - T(a) = -3a \cdot T(a^2) + 3a \cdot T(a) - a \cdot T(e_A) \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.11) ve (4.12) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$T(a^2) = a \cdot T(a) \tag{4.13}$$

olur. (4.12) ve (4.13) den, her $a \in A$ için,

$$3T(a^3) + T(a) = 3a \cdot T(a^2) + a \cdot T(e_A) \tag{4.14}$$

bulunur. (4.14) de a yerine $a + e_A$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 3T(a^3 + 3a^2 + 3a + e_A) + T(a + e_A) &= 3(a + e_A) \cdot T(a^2 + 2a + e_A) \\
&\quad + (a + e_A) \cdot T(e_A) \\
\Rightarrow 3T(a^3) + 9T(a^2) + 9T(a) + 3T(e_A) + T(a) &= 3a \cdot T(a^2) + 6a \cdot T(a) \\
&\quad + 3a \cdot T(e_A) + 3T(a^2) + 6T(a) + 3T(e_A) + a \cdot T(e_A)
\end{aligned}$$

olup

$$9T(a^2) + 9T(a) = 6a \cdot T(a) + 3T(a^2) + 6T(a) + 3a \cdot T(e_A) \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) eşitliğinde $T(a^2) = a \cdot T(a)$ olduğu kullanılırsa, her $a \in A$ için, $9T(a) = 6T(a) + 3a \cdot T(e_A)$ olup

$$T(a) = a \cdot T(e_A) \quad (4.16)$$

bulunur. (4.14) ve (4.16) dan,

$$\begin{aligned} 3T(a^3) + a \cdot T(e_A) &= 3a \cdot T(a^2) + a \cdot T(e_A) \\ \Rightarrow T(a^3) &= a \cdot T(a^2) \end{aligned}$$

olup T bir 3-Jordan çarpandır. □

Sıradaki teoremin ispatında Vandermonde matrisinden yararlanarak, bir önceki teoremin her $n \geq 2$ tamsayısı için gerçekleştiği gösterilecektir:

Teorem 4.3.8. *A bir birimli Banach cebiri, X bir birimsel sol Banach A -modül, $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm ve $n \geq 2$ bir tamsayı olsun. Eğer T bir $(n+1)$ -Jordan çarpan ise o zaman T bir n -Jordan çarpandır.*

İspat: $1 \leq k \leq n$ olacak şekilde bir k tamsayısı alalım. Öncelikle her $a \in A$ için

$$T((a + ke_A)^{n+1}) = (a + ke_A) \cdot T((a + ke_A)^n) \quad (4.17)$$

olur. (4.17) eşitliği ve hipotez kullanılarak şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \text{ olmak üzere her } a \in A \text{ ve } 1 \leq k \leq n \text{ için,} \\ T((a + ke_A)^{n+1}) &= T\left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i (ke_A)^{n+1-i}\right) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} T(a^i) \end{aligned} \quad (4.18)$$

ve

$$\begin{aligned}
(a + ke_A) \cdot T((a + ke_A)^n) &= (a + ke_A) \cdot T\left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i (ke_A)^{n-i}\right) \\
&= (a + ke_A) \cdot \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n-i} T(a^i)\right) \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n-i} a \cdot T(a^i) + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n+1-i} T(a^i) \quad (4.19)
\end{aligned}$$

olup (4.18) ve (4.19) birbirine eşit olduğundan,

$$\begin{aligned}
&k^{n+1} T(e_A) + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} T(a^i) + T(a^{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n-i} a \cdot T(a^i) + k^{n+1} T(e_A) + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} k^{n+1-i} T(a^i)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} T(a^i) + T(a^{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n-i} a \cdot T(a^i) + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} k^{n+1-i} T(a^i) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} T(a^i) + T(a^n) \\
&= \sum_{i=1}^n k^{n+1-i} \binom{n+1}{i} a \cdot T(a^{i-1}) + a \cdot T(a^n) + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} k^{n+1-i} T(a^i) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^n k^{n+1-i} \binom{n+1}{i} T(a^i) = \sum_{i=1}^n k^{n+1-i} \binom{n}{n+1-i} a \cdot T(a^{i-1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n k^{n+1-i} \binom{n}{i} T(a^i) \quad (4.20)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.20) deki eşitlik yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& k^n \binom{n+1}{1} T(a^1) + k^{n-1} \binom{n+1}{2} T(a^2) + \dots + k \binom{n+1}{n} T(a^n) \\
&= k^n \binom{n}{n} a \cdot T(e_A) + k^{n-1} \binom{n}{n-1} a \cdot T(a) \\
&+ \dots + k \binom{n}{1} a \cdot T(a^{n-1}) + k^n \binom{n}{1} T(a) \\
&+ k^{n-1} \binom{n}{2} T(a^2) + \dots + k \binom{n}{n} T(a^n)
\end{aligned}$$

olur ve buradan her $1 \leq k \leq n$ için,

$$\begin{aligned}
k^n \binom{n+1}{1} T(a) &= k^n \binom{n}{n} a \cdot T(e_A) + k^n \binom{n}{1} T(a) \\
k^{n-1} \binom{n+1}{2} T(a^2) &= k^{n-1} \binom{n}{n-1} a \cdot T(a) + k^{n-1} \binom{n}{2} T(a^2) \\
&\vdots \\
k \binom{n+1}{n} T(a^n) &= k \binom{n}{1} a \cdot T(a^{n-1}) + k \binom{n}{n} T(a^n)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & \dots & 2 \\ 3^n & 3^{n-1} & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^n & n^{n-1} & \dots & n \end{pmatrix}$$

matrisini alalım ve $1 \leq i \leq n$ için,

$$\begin{aligned}
X_i(a) &= \binom{n+1}{i} T(a^i), \quad Y_i(a) = \binom{n}{n+1-i} a \cdot T(a^{i-1}), \\
Z_i(a) &= \binom{n}{i} T(a^i)
\end{aligned}$$

olsun. O halde $MX_i(a) = MY_i(a) + MZ_i(a)$ dır. [Bodaghi ve Inceboz 2018, Lemma 2.1] de $n \times n$ tipindeki M kare matrisinin tersinir olduğu gösterilmiştir. Böylece her $1 \leq i \leq n$ ve her $a \in A$ için $X_i(a) = Y_i(a) + Z_i(a)$ olur. Özel olarak, $i = n$ alınırsa, $X_n(a) = Y_n(a) + Z_n(a)$ olur. Böylece her $a \in A$ için,

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{n} T(a^n) &= \binom{n}{1} a \cdot T(a^{n-1}) + \binom{n}{n} T(a^n) \\ \Rightarrow (n+1) T(a^n) &= n(a \cdot T(a^{n-1})) + T(a^n) \\ \Rightarrow nT(a^n) + T(a^n) &= n(a \cdot T(a^{n-1})) + T(a^n) \\ \Rightarrow T(a^n) &= a \cdot T(a^{n-1}) \end{aligned}$$

olup T bir n -Jordan çarpan olur. □

Sonuç 4.3.9. *A bir birimli Banach cebiri, X bir birimsel sol Banach A -modül, $T : A \rightarrow X$ bir sınırlı lineer dönüşüm ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

- (i) Her $a \in A$ için $T(a) = a \cdot T(e_A)$ dır.
- (ii) T bir Jordan çarpandır.
- (iii) T bir n -Jordan çarpandır.
- (iv) T bir $(n+1)$ -Jordan çarpandır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): Her $a \in A$ için $T(a) = a \cdot T(e_A)$ olsun. Burada a yerine a^2 yazılırsa,

$$T(a^2) = a^2 \cdot T(e_A) = a \cdot (a \cdot T(e_A)) = a \cdot T(a)$$

olup T bir Jordan çarpandır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Lemma 4.3.1 de T bir Jordan çarpan iken $n \geq 2$ için bir n -Jordan çarpan olduğu ispatlanmıştır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): T bir n -Jordan çarpan iken $(n+1)$ -Jordan çarpan olduğu açıktır.

(iv) $\Rightarrow$ (i): T bir $(n+1)$ -Jordan çarpan olsun. Bu durumda Teorem 4.3.8 gereği, T bir n -Jordan çarpan olacağından, her $a \in A$ için $T(a^n) = a \cdot T(a^{n-1})$ dir. Özel olarak, $n = 1$ alınırsa, $T(a) = a \cdot T(e_A)$ elde edilir. □

Sonuç 4.3.9 ve Teorem 4.3.3 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.3.10. *A bir birimli Banach cebiri, X bir birimsel sol Banach A -modül, $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $ab = e_A$ şartını sağlayan her $a, b \in A$ için $T(ab) = a \cdot T(b)$ ise T bir n -çarpanıdır.*

İspat: $ab = e_A$ şartını sağlayan her $a, b \in A$ için $T(ab) = a \cdot T(b)$ olsun. Teorem 4.3.3 gereği T bir n -Jordan çarpanıdır. Bu durumda Sonuç 4.3.9 dan her $a \in A$ için $T(a) = a \cdot T(e_A)$ olur. Buna göre her $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ için,

$$\begin{aligned} T(a_1 a_2 \dots a_n) &= (a_1 a_2 \dots a_n) \cdot T(e_A) \\ &= a_1 \cdot ((a_2 \dots a_n) \cdot T(e_A)) \\ &= a_1 \cdot T(a_2 \dots a_n) \end{aligned}$$

olup T bir n -çarpanıdır. □

4.4. Sıfır Çarpım ile n -Jordan Çarpanların Karakterizasyonu

Bu bölümde, Banach cebirleri üzerinde tanımlı n -Jordan çarpanlar, sıfır çarpım üzerindeki etkileri ile karakterize edilerek C^* -cebirlerde ve değişmeli yerel kompakt G grubunun $L^1(G)$ grup cebirinde sağladıkları özellikler incelenecektir (Zivari-Kazempour ve Valaei, 2022).

A bir Banach cebiri ve X bir Banach A -bimodül olsun. A dan X e tanımlı bir T lineer dönüşümü üzerinde, Teorem 4.3.3 de verilen koşul (4.8) ile yakından ilişkili olan aşağıdaki koşulu göz önünde bulunduralım.

$$a, b \in A, ab = 0 \Rightarrow a \cdot T(b) = 0 \quad (\mathbb{M})$$

olsun. $(\mathbb{M})$ koşulunun zayıflatılmış hali aşağıdaki gibi verilebilir:

$$a, b \in A, ab = ba = 0 \Rightarrow a \cdot T(b) + b \cdot T(a) = 0. \quad (\mathbb{JM})$$

Bu kısımda, yukarıdaki koşulların n -Jordan çarpanları karakterize edip etmediği araştırılmaktadır. Burada amaç, A bir birimli C^* -cebiri ve X bir simetrik birimsel Banach A -bimodülü olduğunda, $D : A \rightarrow X$ bir (Jordan) türev ve $\psi : A \rightarrow X$ bir (Jordan) çarpan

olmak üzere $(\mathbb{J}\mathbb{M})$ koşulunun T nin $D + \psi$ formunda yazılabilmesini gerektirdiğini göstermektedir.

Teorem 4.4.1. *A bir birimli C^* -cebiri, X bir birimsel sol Banach A -modül, $T : A \rightarrow X$, $(\mathbb{M})$ özelliğini sağlayan sınırlı bir lineer dönüşüm ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde T bir n -Jordan çarpanıdır.*

İspat: $\phi : A \times A \rightarrow X$, $\phi(a, b) = a \cdot T(b)$ sınırlı 2-lineer dönüşümü tanımlansın. T lineer dönüşümü, $(\mathbb{M})$ özelliğini sağladığından $ab = 0$ iken $\phi(a, b) = 0$ olur. Yani ϕ , sıfır çarpımı korur. A bir C^* -cebiri olduğundan Sonuç 3.6.5 gereği, A , $(\mathbb{B})$ özelliğini sağlar. O halde her $a, b, c \in A$ için,

$$\phi(ab, c) = \phi(a, bc)$$

olup, ϕ nin tanımından

$$(ab) \cdot T(c) = \phi(ab, c) = \phi(a, bc) = a \cdot T(bc)$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte $b = c$ ve $a = e_A$ alınırsa, her $b \in A$ için,

$$e_A \cdot (b \cdot T(b)) = e_A \cdot T(b^2) \Rightarrow T(b^2) = b \cdot T(b)$$

elde edilir. Böylece T bir Jordan çarpanıdır. Lemma 4.3.1 den T bir n -Jordan çarpan olur.

□

Şimdi de Teorem 4.4.1 in hipotezlerindeki $(\mathbb{M})$ koşulu yerine $(\mathbb{J}\mathbb{M})$ koşulu alındığında da T lineer dönüşümünün yine bir n -Jordan çarpan olacağı gösterilecektir.

Teorem 4.4.2. *A bir birimli C^* -cebiri ve X bir simetrik birimsel sol Banach A -modül olsun. $T : A \rightarrow X$ fonksiyonu, $(\mathbb{J}\mathbb{M})$ özelliğini sağlayan sürekli bir lineer dönüşüm olsun. O halde $T = D + \psi$ olacak şekilde bir $D : A \rightarrow X$ Jordan türevi ve bir $\psi : A \rightarrow X$ Jordan çarpanı vardır.*

İspat: $\phi : A \times A \rightarrow X$, $\phi(a, b) = a \cdot T(b) + b \cdot T(a)$ ($a, b \in A$) 2-lineer dönüşümü tanımlansın. T lineer dönüşümü, $(\mathbb{J}\mathbb{M})$ özelliğini sağladığından $ab = ba = 0$ iken $\phi(a, b) = 0$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.6.10 dan her $a, b, x, y \in A$ için,

$$\phi(ax, by) + \phi(ya, xb) = \phi(a, xby) + \phi(yax, b) \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.21) eşitliğinde a, b elemanları yerine e_A alalım. Bu durumda her $x, y \in A$ için,

$$\phi(e_A x, e_A y) + \phi(y e_A, x e_A) = \phi(e_A, x e_A y) + \phi(y e_A x, e_A)$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \phi(e_A x, e_A y) + \phi(y e_A, x e_A) &= e_A \cdot (x \cdot T(e_A y)) + e_A \cdot (y \cdot T(e_A x)) + y \cdot (e_A \cdot T(x e_A)) \\ &\quad + x \cdot (e_A \cdot T(y e_A)) \\ &= x \cdot T(y) + y \cdot T(x) + y \cdot T(x) + x \cdot T(y) \end{aligned} \quad (4.22)$$

ve

$$\begin{aligned} \phi(e_A, x e_A y) + \phi(y e_A x, e_A) &= e_A \cdot T(x e_A y) + (x e_A y) \cdot T(e_A) + (y e_A x) \cdot T(e_A) + e_A \cdot T(y e_A x) \\ &= T(xy) + (xy) \cdot T(e_A) + (yx) \cdot T(e_A) + T(yx) \\ &= T(xy + yx) + (xy) \cdot T(e_A) + (yx) \cdot T(e_A) \end{aligned} \quad (4.23)$$

bulunur. (4.22) ve (4.23) eşitliklerinden

$$x \cdot T(y) + y \cdot T(x) + y \cdot T(x) + x \cdot T(y) = T(xy + yx) + (xy) \cdot T(e_A) + (yx) \cdot T(e_A) \quad (4.24)$$

elde edilir. X simetrik olduğundan, (4.24) eşitliğinde y yerine x yazılırsa,

$$\begin{aligned} x \cdot T(x) + x \cdot T(x) + x \cdot T(x) + x \cdot T(x) &= T(xx + xx) + (xx) \cdot T(e_A) + (xx) \cdot T(e_A) \\ &= T(2x^2) + x^2 \cdot T(e_A) + x^2 \cdot T(e_A) \\ &= 2T(x^2) + (2x^2) \cdot T(e_A) \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} T(x) \cdot x + T(x) \cdot x + x \cdot T(x) + x \cdot T(x) &= 2T(x^2) + 2x^2 \cdot T(e_A) \\ \Rightarrow 2T(x) \cdot x + 2x \cdot T(x) &= 2T(x^2) + 2x^2 \cdot T(e_A) \\ \Rightarrow 2(T(x) \cdot x + x \cdot T(x) - T(x^2) - x^2 \cdot T(e_A)) &= 0 \\ \Rightarrow T(x) \cdot x + x \cdot T(x) - T(x^2) - x^2 \cdot T(e_A) &= 0 \\ \Rightarrow T(x^2) &= (x \cdot T(x) + T(x) \cdot x) - x^2 \cdot T(e_A) \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. $\psi : A \rightarrow X$, $\psi(a) = a \cdot T(e_A)$ dönüşümü tanımlansın. Her $a \in A$ için,

$$\psi(a^2) = a^2 \cdot T(e_A) = (aa) \cdot T(e_A) = a \cdot \psi(a)$$

olduğundan ψ bir Jordan çarpandır. $D = T - \psi$ olsun. (4.25) eşitliğinden

$$\begin{aligned} D(a^2) &= (T - \psi)(a^2) \\ &= T(a^2) - \psi(a^2) \\ &= (a \cdot T(a) + T(a) \cdot a) - a^2 \cdot T(e_A) - a^2 \cdot T(e_A) \\ &= (a \cdot T(a) + T(a) \cdot a) - (aa) \cdot T(e_A) - a \cdot T(e_A) \cdot a \\ &= a \cdot (T(a) - a \cdot T(e_A)) + (T(a) - a \cdot T(e_A)) \cdot a \\ &= a \cdot (T(a) - \psi(a)) + (T(a) - \psi(a)) \cdot a \\ &= a \cdot (T - \psi)(a) + (T - \psi)(a) \cdot a \\ &= a \cdot D(a) + D(a) \cdot a \end{aligned}$$

olup D bir Jordan türevdir. D nin tanımı gereği $T = D + \psi$ dir. Böylece istenen ispatlanmış olur. $\square$

Sonuç 4.4.3. *A bir birimli değişmeli C^* -cebiri ve X bir simetrik birimsel sol Banach A -modül olsun. $T : A \rightarrow X$ fonksiyonu, $(\mathbb{JM})$ özelliğini sağlayan sınırlı bir lineer dönüşüm ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde T bir n -Jordan çarpandır.*

İspat: Teorem 4.4.2 den, $D : A \rightarrow X$ fonksiyonu bir Jordan türev ve $\psi : A \rightarrow X$ fonksiyonu bir Jordan çarpan olmak üzere $T = D + \psi$ olarak yazılır. Teorem 3.5.2 gereği D bir türevdir. Teorem 3.5.9 gereği D sıfırdır. Bu durumda $T = \psi$ olup T bir Jordan çarpandır. Lemma 4.3.1 den T bir n -Jordan çarpandır. $\square$

Teorem 4.4.4. *A bir W^* -cebir, X bir birimsel sol Banach A -modül ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $T : A \rightarrow X$ fonksiyonu $(\mathbb{JM})$ şartını sağlayan sınırlı bir lineer dönüşüm ise, T bir n -Jordan çarpandır.*

İspat: p, A da bir idempotent olsun. O halde

$$p(e_A - p) = (e_A - p)p = 0$$

olduğundan ve T , $(\mathbb{JM})$ özelliğini sağladığından

$$p \cdot T(e_A - p) + (e_A - p) \cdot T(p) = 0$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $e_A - p$ ile çarpılırsa,

$$((e_A - p)p) \cdot T(e_A - p) + (e_A - p)^2 \cdot T(p) = 0$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa her $p \in A$ idempotenti için $T(p) = p \cdot T(p)$ bulunur.

$x \in A_{sa}$ olsun. O zaman [Sakai 2012, Lemma 1.7.5, Önerme 1.3.1] kullanılarak,

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k$$

yazılabilir. Burada $k = 1, \dots, n$ için $\lambda_k \in \mathbb{R}$ dir ve $\{p_k \mid k = 1, \dots, n\}$, A da ortogonal bir izdüşüm ailesidir, yani kendine-ek idempotentler ailesidir. $i, j \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere $i \neq j$ için $p_i p_j = p_j p_i = 0$ olduğundan, $(\mathbb{JM})$ koşulu gereği $i \neq j$ olmak üzere tüm i, j ler için $p_i \cdot T(p_j) + p_j \cdot T(p_i) = 0$ olur. Dolayısıyla tüm $x \in A_{sa}$ için,

$$\begin{aligned} T(x^2) &= T\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 p_k^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 T(p_k^2) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k p_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k T(p_k)\right) = x \cdot T(x) \end{aligned}$$

elde edilir. x, y elemanlarını A nın kendine-ek elemanları olarak alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} x \cdot T(x) + y \cdot T(y) + T(xy + yx) &= T(x^2 + y^2 + xy + yx) \\ &= T((x + y)^2) \\ &= (x + y) \cdot T(x + y) \\ &= x \cdot T(x) + y \cdot T(y) + x \cdot T(y) + y \cdot T(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tüm $x, y \in A_{sa}$ için, $T(xy + yx) = x \cdot T(y) + y \cdot T(x)$ olur. Teorem 3.3.9 gereği her keyfi $a \in A$ elemanı, $x, y \in A_{sa}$ için $a = x + iy$ olarak yazılabilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
T(a^2) &= T(x^2 - y^2 + i(xy + yx)) \\
&= T(x^2) - T(y^2) + iT(xy + yx) \\
&= x \cdot T(x) - y \cdot T(y) + i(x \cdot T(y) + y \cdot T(x)) \\
&= (x + iy) \cdot (T(x) + iT(y)) \\
&= (x + iy) \cdot T(x + iy) \\
&= a \cdot T(a)
\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak tüm $a \in A$ için $T(a^2) = a \cdot T(a)$ dır. Yani T bir Jordan çarpandır. O halde Lemma 4.3.1 den, T bir n -Jordan çarpan olur. $\square$

A Banach cebirinin ikinci dual uzayı A^{**} üzerinde, A^{**} uzayını bir Banach cebirine dönüştüren birinci ve ikinci Arens çarpımları olarak adlandırılan iki çarpım vardır (H. G. Dales, 2000). Eğer bu çarpımlar A^{**} üzerinde çakışıyorsa, A nın Arens regüler olduğu söylenir.

Örnek 3.3.11 gereği her A C^* -cebiri Arens regülerdir. Teorem 3.3.12 den, A^{**} bir W^* -cebirdir. Bu nedenle $T : A \rightarrow X$ sürekli lineer dönüşümü $T^{**} : A^{**} \rightarrow X^{**}$ ikinci dualine genişletilerek ve Teorem 4.4.4 uygulanarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.4.5. *A bir birimli C^* -cebiri ve X bir birimsel sol Banach A -modül olsun. Eğer $T : A \rightarrow X$ fonksiyonu $(\mathbb{J}\mathbb{M})$ özelliğini sağlayan sınırlı bir lineer dönüşüm ise, o zaman $n \in \mathbb{N}$ için T bir n -Jordan çarpandır.*

Teorem 3.6.11 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

Teorem 4.4.6. *A , idempotentler tarafından üretilen bir birimli Banach cebiri ve X bir simetrik birimsel sol Banach A -modül olsun. $T : A \rightarrow X$ fonksiyonu, $(\mathbb{J}\mathbb{M})$ özelliğini sağlayan sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. O halde $T = D + \psi$ olacak şekilde bir D Jordan türevi ve bir ψ Jordan çarpanı vardır.*

İspat: $\phi : A \times A \rightarrow X$, $\phi(a, b) = a \cdot T(b) + b \cdot T(a)$ ($a, b \in A$) 2-lineer dönüşümü tanımlansın. T lineer dönüşümü, $(\mathbb{J}\mathbb{M})$ özelliğini sağladığından $ab = ba = 0$ iken

$\phi(a, b) = 0$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.6.11 den her $a, b \in A$ için,

$$\phi(a, b) + \phi(b, a) = \phi(ab, e_A) + \phi(e_A, ba)$$

elde edilir. İspatın geri kalan kısmı, Teorem 4.4.2 nin ispatında olduğu gibi yapılır. $\square$

Sonuç 4.4.7. *A bir birimli değişmeli Banach cebiri ve $A = \overline{\mathfrak{J}(A)}$ olsun. X bir simetrik birimsel sol Banach A -modül, $T : A \rightarrow X$ ($\mathbb{J}\mathbb{M}$) özelliğini sağlayan sınırlı bir lineer dönüşüm ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde T bir n -Jordan çarpandır.*

İspat: Teorem 4.4.6 gereği $T = D + \psi$ olacak şekilde bir $D : A \rightarrow X$ Jordan türevi ve bir $\psi : A \rightarrow X$ Jordan çarpanı vardır. A değişmeli ve X simetrik olduğundan, D aslında bir türevdir. Teorem 3.5.9 gereği $D = 0$ olur. Dolayısıyla T nin Lemma 4.3.1 gereği bir n -Jordan çarpan olduğu sonucu çıkar. $\square$

Yerel kompakt bir G değişmeli grubu için $A = L^1(G)$ olsun. O zaman Örnek 3.5.7 gereği A grup cebiri değişmeli ve zayıf amenabledir. Ancak A ne bir C^* -cebiridir ne de idempotentler tarafından üretilir. Bu nedenle Sonuç 4.4.3 ve Sonuç 4.4.7 bu cebir için uygulanamaz.

Bir sonraki sonuç, Sonuç 4.4.3 ün benzerinin $L^1(G)$ grup cebiri için de geçerli olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.4.8. *Yerel kompakt bir G değişmeli grubu için $A = L^1(G)$ olsun. X bir simetrik birimsel sol Banach A -modül, $T : A \rightarrow X$ fonksiyonu, ($\mathbb{J}\mathbb{M}$) özelliğini sağlayan sınırlı bir lineer dönüşüm ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde T bir n -Jordan çarpandır.*

İspat: Her $a, b \in A$ için $\phi : A \times A \rightarrow X$, $\phi(a, b) = a \cdot T(b) + b \cdot T(a)$ 2-lineer dönüşümü tanımlansın. O zaman A değişmeli olduğu için $ab = 0$ iken $\phi(a, b) = 0$ olur. Dolayısıyla Sonuç 3.6.6 dan her $a, b, c \in A$ için

$$\phi(ab, c) = \phi(a, bc) \tag{4.26}$$

olur. Diğer yandan her $a, b \in A$ için

$$0 = \phi(a, b) = \phi(b, a)$$

olur. Böylece (4.26) eşitliği gereği her $a, b, c \in A$ için

$$\phi(c, ab) + \phi(ab, c) = \phi(a, bc) + \phi(cb, a) \quad (4.27)$$

elde edilir. $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$, A için bir sınırlı yaklaşık birim olsun. (4.27) eşitliğinde a yı (e_α) ile değiştirerek ve ϕ dönüşümünün sürekliliğini kullanarak, her $b, c \in A$ için

$$\phi(c, b) + \phi(b, c) = \phi(e_\alpha, bc) + \phi(cb, e_\alpha)$$

bulunur. Teorem 4.4.2 nin ispatındaki yöntem uygulanarak, D bir Jordan türevi ve ψ bir Jordan çarpanı olmak üzere $T = D + \psi$ bulunur. A grup cebiri zayıf amenable olduğundan $D = 0$ dır. Yani $T = \psi$ olup T bir Jordan çarpan olur. Sonuç olarak Lemma 4.3.1 den T bir n -Jordan çarpandır. $\square$

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Banach cebirleri üzerinde tanımlı n -Jordan çarpanlar ile ilgili A. Zivari-Kazempour'un 2022 yılında yayınladığı çalışma ile A. Zivari-Kazempour ve M. Valaei tarafından 2022 yılında yayınlanan çalışmadaki sonuçlar detaylı olarak incelenmiştir (Zivari-Kazempour, 2022; Zivari-Kazempour ve Valaei, 2022).

Günümüze kadar halkalarda ve Banach cebirlerde türev konusuyla ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Teorinin gelişimiyle beraber daha sonraki yıllarda Jordan türev, Lie türev, genelleştirilmiş türev, (σ, τ) -türev, Jordan (σ, τ) -türev gibi farklı türev kavramları da tanımlanmış ve farklı uzaylarda bu türevlerin sağladığı özellikler incelenmiştir. Bu düşünceyle, Banach cebirlerde türev üzerine bilinen bilginin n -çarpanlar ve n -Jordan çarpanlar hakkında çıkaracağı sonuçlar araştırılabilir.

n -Jordan çarpanların, yerel kompakt G grubunun $L^1(G)$ grup cebiri, sınırlı bir yaklaşık birimi olan zayıf amenable Banach cebirleri ve C^* -cebirleri gibi farklı uzaylarda karakterizasyonları bulunmaktadır. Benzer karakterizasyonlar yapmak için yeni cebirsel yapı örnekleri elde etmek bir diğer araştırma konusu olabilir.

KAYNAKLAR

- Alaminos, J., Brešar, J., Extremera, J. ve Villena, A. (2010). Characterizing Jordan maps on C^* -algebras through zero products. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 53(3), 543–555.
- Alaminos, J., Brešar, M., Extremera, J. ve Villena, A. (2009). Maps preserving zero products. *Studia Mathematica*, 193, 131–159.
- Bade, W. G., Curtis Jr, P. ve Dales, H. (1987). Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(2), 359–377.
- Bodaghi, A. ve Inceboz, H. (2018). n -Jordan homomorphisms on commutative algebras. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 87(1), 141–146.
- Bonsall, F. F. ve Duncan, J. (1973). *Complete Normed Algebras*. Springer.
- Civin, P. ve Yood, B. (1961). The second conjugate space of a Banach algebra as an algebra. *Pacific Journal of Mathematics*, 11(3), 847–870.
- Cohn, D. L. (2013). *Measure theory*. Springer.
- Dales, H. G. (2000). *Banach algebras and automatic continuity*. Clarendon Press Oxford.
- Dales, H., Ghahramani, F. ve Grønbæk, N. (1998). Derivations into iterated duals of Banach algebras. *Studia Math*, 128(1), 19–54.
- Fozouni, M. (2018). n -Jordan multipliers. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 13, 121–129.
- Ghahramani, H. (2013). On derivations and Jordan derivations through zero products. *arXiv preprint arXiv:1312.6952*,
- Ghahramani, H. (2015). On centralizers of Banach algebras. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 38, 155–164.
- Gordji, M. E. (2009). n -Jordan homomorphisms. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 80(1), 159–164.

- Hejazian, S., Mirzavaziri, M. ve Moslehian, M. (2005). n -Homomorphisms. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 31(1), 13–23.
- Helgason, S. (1956). Multipliers of Banach algebras. *Annals of Mathematics*, 64(2), 240–254.
- Hungerford, T. W. (2012). *Algebra*. Springer Science & Business Media.
- Johnson, B. E. (1964). An introduction to the theory of centralizers. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(2), 299–320.
- Johnson, B. E. (1972). *Cohomology in Banach algebras*. American Mathematical Society.
- Johnson, B. (1996). Symmetric amenability and the nonexistence of Lie and Jordan derivations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 120(3), 455–473.
- Johnson, B. (1991). Weak amenability of group algebras. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 23(3), 281–284.
- Kaniuth, E. (2009). *A course in commutative Banach algebras*. Springer.
- Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons.
- Laali, J. ve Fozouni, M. (2017). n -Multipliers and their relations with n -homomorphisms. *Vietnam Journal of Mathematics*, 45(3), 451–457.
- Murphy, J. (1990). Operator Theory and C^* -algebras. *Academic Press Inc., Boston*, 13, 711–720.
- Paterson, A. L. (1988). *Amenability*. American Mathematical Society.
- Rudin, W. (1973). *Functional analysis*. McGraw-Hill.
- Runde, V. (2004). *Lectures on amenability*. Springer.
- Sakai, S. (2012). *C^* -algebras and W^* -algebras*. Springer Science & Business Media.
- Vukman, J. (1999). An identity related to centralizers in semiprime rings. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 40(3), 447–456.
- Wang, J.-k. (1959). *Multipliers of commutative Banach algebras*. Mathematical Sciences Directorate, Office of Scientific Research, US Air Force.

- Wendel, J. G. (1952). Left centralizers and isomorphisms of group algebras. *Pacific Journal of Mathematics*, 2(2), 251–261.
- Zalar, B. (1991). On centralizers of semiprime rings. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 32(4), 609–614.
- Zivari-Kazempour, A. (2020). Almost multipliers of Frechet algebras. *The Journal of Analysis*, 28(4), 1075–1084.
- Zivari-Kazempour, A. (2022). Characterization of n -Jordan multipliers. *Vietnam Journal of Mathematics*, 50(1), 87–94.
- Zivari-Kazempour, A. ve Valaei, M. (2022). Characterization of n -Jordan multipliers through zero products. *The Journal of Analysis*, 30(3), 1059–1067.

ÖZ GEÇMİŞ

Soyadı, Adı : Akçay, Burcu

Yabancı Dil : İngilizce

E-posta Adresi :

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet tarihi(Yıl)
Y. Lisans	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı	
Lisans	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	2021

BURSLAR ve ÖDÜLLER

İŞ DENEYİMİ

Yıl	Yer/Kurum	Ünvan
...	...	...
...	...	...

AKADEMİK ÇALIŞMALAR

1. PROJELER

2. MAKALELER

3. BİLDİRİLER

A) Uluslararası Kongrelerde Yapılan Bildiriler

B) Ulusal Kongrelerde Yapılan Bildiriler