



**KAHLER MANİFOLDLARI ARASINDA HOLOMORFİK
PROJEKTİF DÖNÜŞÜM**

Hazırlayan: Şeyma TOMBAŞ

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç. Dr. Lokman BİLEN

IĞDIR/2023

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
IĞDIR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KAHLER MANİFOLDLARI ARASINDA HOLOMORFİK
PROJEKTİF DÖNÜŞÜM**

Şeyma TOMBAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

IĞDIR / 2023

Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Şeyma TOMBAŞ

IĞDIR/2023

Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

KAHLER MANİFOLDLARI ARASINDA HOLOMORFİK PROJEKTİF DÖNÜŞÜM

TOMBAŞ, Şeyma

Yüksek Lisans Tezi,

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Lokman BİLEN

Mayıs 2023, 43 Sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılarak genel literatür bilgisine yer verilmiştir. İkinci bölümde gerekli temel tanımlar ve kavramlar sunulmuştur. Üçüncü bölümde “Dönüşüm” kavramı tanıtılarak bir dönüşümün deformasyon tensörü açıklanmıştır. Dördüncü bölümde Kahler manifoldunun tanımı verilerek, Kähler manifoldunda konjügasyon işlemi açıklanmıştır. Ayrıca bu bölümde “holomorfik projektif eğri” ve “holomorfik projektif dönüşüm” kavramları tanıtılarak bu dönüşümün bazı geometrik özelliklerine yer verilmiştir. Beşinci bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılarak elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kähler Manifoldu, Levi-Civita Konneksiyonu, Holomorfik Projektif Dönüşüm.

ABSTRACT

HOLOMORPHICALLY PROJECTIVE MAPPINGS BETWEEN KÄHLER MANIFOLDS

TOMBAŞ, Şeyma

Master's Thesis

Department of Mathematics

Thesis Adviser: Assoc.Dr. Lokman BİLEN

May 2023, 43 Pages

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provides a general knowledge of literature. In the second chapter, the necessary basic concepts and definitions are presented. In the third chapter, the concept of mapping is introduced and the deformation tensor of a map is explained. In the fourth chapter, the definition of Kähler manifold is given and the conjugation process in Kähler manifolds is explained. In addition, in this section, the concepts of “holomorphically projective curve” and “holomorphically projective transformation” are introduced and some geometric properties of this transformation are given. The fifth chapter is divided into the conclusion part and the obtained results are summarized.

Keywords: Kähler Manifold, Levi-Civita Connection, Holomorphically Projective Mapping.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Iğdır Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Çalışmalarımda her türlü desteği sağlayan, hocam Sayın Doç. Dr. Lokman BİLEN' e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Hayatım boyunca beni destekleyen, haklarını asla ödeyemeyeceğim annem Melek TAŞ, babam Mustafa TAŞ, kardeşlerim Batuhan ve Ahmet Uğur'a, her zaman varlığıyla beni motive eden kıymetli eşim Yunus TOMBAŞ'a ve bu süreçte hayatımıza giren küçük mucizem canım oğlum Yağız'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Şeyma TOMBAŞ

IĞDIR/2023

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar	3
2.2. Tensör Alanları.....	8
2.3. Tensör Diferensiyellemesi.....	11
2.4. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon.....	11
2.5. Lie Türevlemesi :.....	14
2.6. Eğrilik ve Burulma Tensörleri:.....	17
2.7. Riemannian Metriği — Riemannian Manifoldu.....	19
3. MATERYAL VE METOD	22
3.1. Dönüşüm Teorisi	22
3.2. Bir Dönüşümün Deformasyon Tensörü	22
KAYNAKÇA	40
ÖZGEÇMİŞ.....	44

SİMGELER DİZİNİ

M_n		$n - boyutlu C^\infty$ sınıfından diferensiyellenebilir manifold.
$T_p(M_n)$		$p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzay.
$T_p^*(M_n)$		$p \in M_n$ noktasındaki kovektör uzay.
$\mathfrak{S}_q^p(M_n)$		$p \in M_n$ noktasındaki (p, q) tipli tensör uzayı.
∇		Afin konneksiyon.
Γ_{ij}^k		Christoffel sembolü.
∇_X		X vektör alanı yönündeki kovaryant türev.
$[X, Y]$		X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi.
L_X		X vektör alanı yönündeki Lie türevi.
R_{ijk}^l		M manifoldunun eğrilik tensörünün bileşenleri.
R_{ij}		Ricci tensörünün bileşenleri.
P_{ij}^k		Deformasyon tensörü.
Π_{ij}^k		Thomas projektif parametresi.

1. GİRİŞ

Friedrich Gauss and Bernhard Riemannian'ın çalışmaları ile diferensiyel geometri, matematiğin yeni bir alanı olarak ortaya çıkmaya başlamıştır. Kavram olarak manifold kelimesini, ilk kez 1854 yılında Bernhard Riemannian, Göttingen'deki bir açılış konuşmasında ifade etmiştir. Gauss "Theorema Egregium" teoremi ile bir yüzeyin eğriliğinin intristik bir özellik olduğunu kanıtlamıştır. Manifold teorisi de bu intristik özelliklere dayanmaktadır. Daha sonra Tullio Levi-Civita ve Gregorio Ricci Corbastro gibi matematikçiler tensör analizin gelişmesine yön vermişlerdir. Manifold kavramı ile ilgili önemli çalışmalar yapan bilim insanlarından biri de Hermann Klaus Hugo Weyl'dir. Weyl 1913 yılında yayınladığı "Riemann Yüzeyleri" adlı kitabında 2- boyutlu manifold kavramını tanımlamıştır. Manifoldların kabul gören en yaygın tanımını ise Hassler Whitney yapmıştır.

Bu tez çalışmasında Kähler manifoldları arasında holomorfik projektif dönüşümün bazı geometrik özellikleri incelenmiştir.

Klasik Eliptik Kähler manifoldlarında (K_n^-) holomorfik projektif dönüşümler konusu T. Otsuki ve Y. Tashiro tarafından tanıtıldı. (Otsuki ve Tashiro 1954) Benzer şekilde hiperbolik Kähler manifoldlarında (K_n^+) M. Prvanovic ve parabolik Kähler manifoldlarında (K_n^0) V. V. Vishnevskij, holomorfik projektif dönüşümleri tanımlamışlardır. (Prvanovic, 1971), (Vishnevskij, 2002)

Bu şekildeki benzer dönüşümlerin teorisi K. Yono tarafından (Yano, 1965) ve V. V. Vishnevskij, A. P. Shirokov, V. V. Shurigin tarafından da incelenmiştir. (Vishnevskij *et al.*, 1985)

Son yıllarda holomorfik projektif dönüşüm ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. 1971 yılında Prvanovic M. lokal product uzaylarda holomorfik projektif dönüşümleri çalıştı. (Prvanovic, 1971) 1974 yılında Sakaguchi T. ise kompleks yapıları koruyan Kähler uzayları arasında holomorfik projektif dönüşümler ile ilgili çalışmalar yaptı. (Sakaguchi, 1974)

Daha sonraki yıllarda Radulovich Zh. ve Mikeš J. konformal Kähler uzaylarının geodezik ve holomorfik projektif dönüşümleri ile ilgili araştırmalarda bulundular. (Radulovich ve Mikeš, 1993) Ardından parabolik Kähler uzaylarında holomorfik projektif dönüşümlerin bazı özellikleri Shiha M. tarafından çalışıldı. (Shiha,1993)

T-quasi semi-simetrik ve genel simetrik Kähler uzaylarında holomorfik projektif dönüşümlerin bazı özellikleri Haddad M. tarafından elde edildi. (Haddad, 1993)

Aminova A. V. ve Kalinin D. A. tarafından yapılan bazı çalışmalarda ise holomorfik projektif dönüşümlerin mekanik alanında çeşitli uygulamaları yapıldı. (Aminova ve Kalinin, 1995) Yine aynı yazarlar tarafından sabit holomorfik eğrilikli Kähler manifoldlarında holomorfik projektif dönüşümlerin Lie cebiri çalışıldı. (Aminova ve Kalinin, 1999)

2005 yılında Skodova M. ve arkadaşları eş afın simetrik ve recurrent uzaylardan Kähler uzayları üzerine holomorfik projektif dönüşümler ile ilgili çeşitli çalışmalar yaptılar. (Skodov'a *et al.*, 2005)

2009 yılında Mikeš ve arkadaşları parabolik Kähler uzaylarında holomorfik projektif dönüşüm altında invaryant (değişmez) kalan bazı geometrik objeleri incelediler. (Mikeš *et al.*, 2009)

Shiha M. ve Mikeš J. de holomorfik projektif flat parabolik Kähler uzayını tanımladılar ve bir parabolik Kähler uzayının holomorfik projektif flat olması için gerek ve yeter şartı ortaya koydular. (Shiha ve Mikeš, 2006) Ayrıca yine aynı yazarlar tarafından Riemannian tanjant product uzaylarda da holomorfik projektif dönüşümler çalışıldı. (Shiha *et al.*, 2012)

2015 yılında Mikeš ve arkadaşları tarafından yayınlanan bir kitapta ise Kähler manifoldları arasında holomorfik projektif dönüşümler ile ilgili çeşitli çalışmalara yer verilerek bu konu detaylı bir şekilde ele alındı. (Mikeš, *et al.*, 2015)

2. KURAMSAL TEMELLER

Kavram dizilimi bir bilimsel araştırmada çok önemli olduğu için çalışmalarda farklı kavramlara ve araştırma için temel oluşturan tanımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle ihtiyaç duyduğumuz kavramlar kuramsal temeller başlığı altında ifade edilecektir.

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım (Hausdorff Uzay): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $p_1, p_2 \in X$, $(p_1 \neq p_2)$ için $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $p_1 \in G_1 \in \tau$ ve $p_2 \in G_2 \in \tau$ açık alt kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına Hausdorff Uzayı denir.

Tanım (Homeomorfizma): (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) iki topolojik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna (X, τ_X) ve (Y, τ_Y) topolojik uzayları arasında bir homeomorfizma adı verilir.

- i. f birebir örten bir fonksiyondur.
- ii. f sürekli dir.
- iii. f^{-1} sürekli dir.

Tanım (Harita): M , bir Hausdorff uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \mathcal{R}^n$ bölgesine tanımlanan

$$\varphi: U \rightarrow V$$

Homeomorfizmine M de n -boyutlu koordinat sistemi veya harita, U açık kümesine de φ haritasının koordinat koşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve harita (U, φ) şeklinde gösterilir. Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathcal{R}^n$$

olur. Buradaki $x^1, \dots, x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

“Tanım: Eğer M Hausdorff uzayının n -boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı rterse, yani $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, (A -indisler kümesi) ise, M ye n -boyutlu topolojik manifold veya sadece n -boyutlu manifold denir.” (Salimov ve Mağden, 2007)

“Tanım (Atlas): M , bir Hausdorff uzay ve k ise, $0 \leq k$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset M\}$ lokal koordinatlar ailesine M üzerinde C^k sınıfından n -boyutlu atlas adı verilir.

- i. Lokal haritaların U_α bölgesi M 'yi örter, yani M , n -boyutlu topolojik manifolddur.
- ii. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir. $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne koordinatların dönüşümü denir.

$(u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j), i, j = 1, \dots, n)$ Burada $u_\beta^i(U_\beta, \varphi_\beta)$ haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları ve u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$(U_\alpha \cap U_\beta) = \emptyset$ olması halinde, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2 şartı, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jacobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.” (Salimov ve Mağden, 2007).

“Tanım: $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.” (Salimov ve Mağden, 2007).

Haritaların C^k uzlaşması bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı C^k atlaslar kümesini denk atlasların ayrık denklik sınıflarına ayırır.

“Tanım: Bir M Hausdorff uzayı üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k -yapı denir.

C^k -yapısının tüm C^k atlaslarının birleşiminin oluşturduğu C^k atlasına maksimal C^k atlas adı verilir. M üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k -yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir.

Buradan da, M üzerindeki her bir C^k -yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0 -yapıya topolojik yapı, C^k , $(1 \leq k)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ yapılara bakılacaktır.” (Salimov ve Mağden, 2007)

“**Tanım:** M , sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer, M üzerinde n -boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ -yapısı verilmişse M uzayına n -boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir.” (Salimov and Mağden, 2007).

Örnek: R^2 uzayındaki birim çemberi S^1 ile göstersek, 1-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifolddur.

Bilindiği gibi R^2 topolojik bir uzaydır. Bir topolojik uzayın her alt kümesi asıl uzayın topolojisinden indirgenen topoloji ile birlikte bir topolojik uzay olduğundan S^1 kümesi topolojik bir uzaydır. R^2 , Hausdorff uzayı olduğundan S^1 de Hausdorff uzayı olur.

$$S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

şeklinde yazılıp, koordinat komşuluklarını aşağıdaki gibi seçelim.

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1 | x > 0\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in S^1 | x < 0\}$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1 | y > 0\}$$

$$U_4 = \{(x, y) \in S^1 | y < 0\}$$

U_γ ($\gamma = 1, \dots, 4$) kümeleri açık yarım çemberlerdir.

$$S^1 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 \text{ dir.}$$

$$\phi_1: U_1 \rightarrow (-1, 1)(x, y) \rightarrow \phi_1(x, y) = y$$

$$\phi_2: U_2 \rightarrow (-1, 1)(x, y) \rightarrow \phi_2(x, y) = y$$

$$\phi_3: U_3 \rightarrow (-1, 1)(x, y) \rightarrow \phi_3(x, y) = x$$

$$\phi_4: U_4 \rightarrow (-1, 1)(x, y) \rightarrow \phi_4(x, y) = x$$

olsun. U_γ ($\gamma = 1, \dots, 4$) fonksiyonları birer homeomorfizmadır. Örneğin ϕ_1 için kontrol edelim.

$\phi_1(x, y) = y$ olduğundan ϕ_1 fonksiyonu süreklidir.

Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U_1$ için $\phi_1(x_1, y_1) = \phi_1(x_2, y_2)$ ise,

$$y_1 = y_2$$

olarak bulunur. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S^1$ olduğundan, $x_1^2 + y_1^2 = 1$ ve $x_2^2 + y_2^2 = 1$ dir. Buradan $y_1 = y_2$ kullanılır ve $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ olduğu dikkate alınır,

$$x_1 = x_2$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla ϕ_1 fonksiyonu birebirdir. Şimdi ϕ_1 ' in tersini bulalım:

$$\phi_1^{-1}: (-1, 1) \rightarrow U_1$$

dir. $\phi_1^{-1}(y) = (x, y)$ fonksiyonu sürekli olduğundan ϕ_1 bir homeomorfizmadır. Benzer şekilde ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 fonksiyonları da birer homeomorfizma olur.

Şimdi $U_1 \cap U_3$ ve $U_1 \cap U_4$ için bağdaşma koşulunu kontrol edelim.

$$U_1 \cap U_3 = \{(x, y) \in S^1 | x > 0, y > 0\}$$

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1}: \phi_3(U_1 \cap U_3) \rightarrow \phi_1(U_1 \cap U_3)$$

ve

$$\phi_3(U_1 \cap U_3) = (0, 1) \text{ dir. } v \in \phi_3(U_1 \cap U_3)$$

olsun.

$$\phi_3(x, y) = x \Rightarrow \phi_3(v, \sqrt{1 - v^2}) = v \Rightarrow \phi_3^{-1}(v) = (v, \sqrt{1 - v^2})$$

bulunur. Bu durumda,

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1}(v) = \phi_1(v, \sqrt{1 - v^2}) = \sqrt{1 - v^2} \in (0, 1)$$

şeklinde elde edilir. Böylece $\phi_1 \circ \phi_3^{-1}$ fonksiyonu $(0, 1)$ aralığı üzerinden $(0, 1)$ aralığı üzerine bir homeomorfizmadır. Bu fonksiyonunun tersi,

$$\phi_3 \circ \phi_1^{-1}: \phi_1(U_1 \cap U_3) \rightarrow \phi_3(U_1 \cap U_3)$$

dir. $v \in \phi_1(U_1 \cap U_3)$ olsun.

$$\phi_1(\sqrt{1-v^2}, v) = v \Rightarrow \phi_1^{-1}(v) = (\sqrt{1-v^2}, v)$$

$$\phi_3 \circ \phi_1^{-1}(v) = \phi_3(\sqrt{1-v^2}, v) = \sqrt{1-v^2} \in (0,1)$$

olarak bulunur.

$\phi_3 \circ \phi_1^{-1}$ fonksiyonu sürekli ve $(0,1)$ aralığı üzerinde diferensiyellenebilir. O halde $\phi_3 \circ \phi_1^{-1}$ homeomorfizması C^∞ sınıfındandır. Benzer şekilde,

$$U_1 \cap U_4 = \{(x, y) \in S^1 | x > 0, y < 0\}$$

$$\phi_1 \circ \phi_4^{-1}: \phi_4(U_1 \cap U_4) \rightarrow \phi_1(U_1 \cap U_4)$$

ve

$$\phi_4(U_1 \cap U_4) = (0,1) \text{ dir. } v \in \phi_4(U_1 \cap U_4)$$

olsun.

$$\phi_4(x, y) = x \Rightarrow \phi_4(v, -\sqrt{1-v^2}) = v \Rightarrow \phi_4^{-1}(v) = (v, -\sqrt{1-v^2})$$

bulunur. Bu durumda

$$\phi_1 \circ \phi_4^{-1}(v) = \phi_1(v, -\sqrt{1-v^2}) = -\sqrt{1-v^2} \in (0,1)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $\phi_1 \circ \phi_4^{-1}$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığından $(-1,0)$ aralığı üzerine bir homeomorfizmadır. Bu fonksiyonun tersi,

$$\phi_4 \circ \phi_1^{-1}: \phi_1(U_1 \cap U_4) \rightarrow \phi_4(U_1 \cap U_4)$$

dir. $v \in (-1,0)$ olsun.

$$\phi_1(x, y) = y \Rightarrow \phi_1(\sqrt{1-v^2}, v) = v \Rightarrow \phi_1^{-1}(v) = (\sqrt{1-v^2}, v)$$

bulunur.

$$\phi_4 \circ \phi_1^{-1}(v) = \phi_4(\sqrt{1-v^2}, v) = \sqrt{1-v^2} \in (0,1)$$

olarak bulunur. $\phi_4 \circ \phi_1^{-1}$ fonksiyon sürekli ve $(0,1)$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilir. O halde $\phi_1 \circ \phi_4^{-1}$ homeomorfizması C^∞ sınıfındandır.

Benzer şekilde diğer haritaların da C^∞ bağdaştığı gösterilebilir. Böylece S^1 , 1-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olur.

2.2. Tensör Alanları

“**Tanım:** B_n bir vektör uzayı ve B_n^* da onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in B_n$, $j = 1, 2, \dots, q$ vektör ve $\xi^i \in B_n^*$, $i = 1, 2, \dots, p$ kovektör değişkenlerinin

$$w = t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p)$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlıyorsa bu fonksiyona multilineer fonksiyon denir.” (Salimov ve Mağden, 2007).

Mesela $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı,

$$\begin{aligned} t(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p) &= \lambda t(\vec{x}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p) \\ &+ \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p) \end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir.

$w = t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p)$ multilineer fonksiyonuna karşılık gelen

$$t: \underbrace{B_n \times \dots \times B_n}_{q \text{ tane}} \times \underbrace{B_n^* \times \dots \times B_n^*}_{p \text{ tane}} \rightarrow \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir ve $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. (Bishop and Goldberg, 1968).

$p \geq 0, q \geq 0$ olmak üzere $s = p + q$ sayısına tensörün valentliği, (p, q) sembolüne ise tensörün tipi denir. $(p, 0)$ tipli tensöre kontravaryant tensör, $(0, q)$ tipli tensöre ise kovaryant tensör denir. M manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfından (r, s) tipli tensör alanlarının kümesini $\mathfrak{T}_s^r(M)$ ve M deki tüm tensör alanlarının kümesini $\mathfrak{T}(M)$ ile göstereceğiz. $S_2(B_n)$, $\mathfrak{T}_2^0(B_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörünü alalım; $\forall \vec{y} \in B_n$ için,

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \tag{2.1}$$

şartının sağlanması için $\vec{x} = 0$ oluyorsa, bu taktirde g tensörüne regüler tensör denir. (2.1) eşitliği koordinatlarla,

$$g_{ij}x^i y^j = 0$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik her y^j için sağlandığından,

$$g_{ij}x^i = 0, j = 1, \dots, n$$

bulunur. Bu denklem sisteminin $x^i = 0$ çözümüne sahip olması için,

$$\text{Det}(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}) , g tensörüne karşılık gelen matristir. $g \in S_2(B_n)$

tensörü regüler tensör ise g tensörüne B_n uzayında esas tensör adı verilir. Esas tensöre karşılık gelen g_{ij} tensörünün tersini $(\tilde{g}^{kj})$ ile gösterelim. Bu taktirde,

$$\tilde{g}^{kj} g_{ij} = \delta_i^k$$

yazılır.

“Tanım : M , C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_p(M)$, her $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M manifoldunun her $p \in M$ noktasına $T_p(M)$ uzayından bir ve yalnız bir X_p vektörü karşılık getiren $X: P \rightarrow X_p$ vektör değerli fonksiyonuna M üzerinde bir vektör alanı denir.”(Salimov ve Mağden, 2007).

“Tanım : M , C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_p^*(M)$, her $p \in M$ noktasındaki kovektör uzayı olsun. Her $p \in M$ noktasına bir ve yalnız bir $w_p \in T_p^*(M)$ kovektörünü karşılık getiren $w: p \rightarrow w_p$ dönüşümüne M üzerinde bir kovektör alanı denir.” (Salimov ve Mağden, 2007).

C^∞ sınıfından bir manifold M olmak üzere her $p \in M$ noktasındaki her bir (p, q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(M)$ tensör uzayı vardır.

“Tanım : M , C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(M)$, bir $p \in M$ noktasındaki (p, q) tipli tensör uzayı olsun. M manifoldunun her $p \in M$ noktasına bir ve yalnız bir $t_p \in T_q^p(M)$ tensörünü karşılık getiren $t: p \rightarrow t_p$ kuralına M üzerinde (p, q) tipli tensör alanı denir.” (Bishop and Goldberg, 1968).

Eğer $p = 1, q = 0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = 0, q = 1$ olursa $T_1^0(M)$ uzayının elemanları kovektör alanı olur. Eğer $p = q = 0$ ise her $p \in M$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise, her $x \in U$ için $df|_x \in T_{1x}^0(M)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü $(0,1)$ tipli bir tensör alanıdır.

$\forall p \in M$ için T_p tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer her bir p noktasındaki T_p tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

$T, (p, q)$ tipli tensör alanı olsun. Kovektör alanları $\theta_1, \dots, \theta_p$ ve vektör alanları $X_1, \dots, X_q$ olmak üzere

$$T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)(m) = T_m(\theta_1(m), \dots, \theta_p(m), X_1(m), \dots, X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özellikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q})$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg, 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir.

(p, q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her C^∞ sınıfından $\theta_1, \dots, \theta_p$ kovektör alanları ve her C^∞ sınıfından $X_1, \dots, X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

“Tanım : $T_{s(p)}^r(M)$ tensör uzayı üzerinde

$$C_j^i: T_{s(p)}^r(M) \rightarrow T_{s-1}^{r-1}(M)$$

$$A \rightarrow C_j^i(A)(\xi^1, \dots, \xi^{s-1}, X_1, \dots, X_{r-1}) = C\{A(X_1, \dots, X_{r-1}, \xi^1, \dots, \xi^{s-1})\}$$

ve

$$C_j^i(A) = \sum_m A(\xi^m, \xi^1, \dots, \xi^{s-1}, X_m, X_1, \dots, X_{r-1})$$

şeklinde tanımlanan operatöre kontraksiyon operatörü denir. Böylece bir kontraksiyon operatörü (r, s) tipli bir tensörü $(r - 1, s - 1)$ tipli bir tensöre taşır, yani kovaryantlık ve kontravaryantlık derecelerini düşürür” (Şahin, 2013).

2.3. Tensör Diferensiyellemesi

Tanım: Aşağıda belirtilen şartları sağlayan $D : \mathfrak{S}(M) \rightarrow \mathfrak{S}(M)$ dönüşümüne $\mathfrak{S}(M)$ cebirinin tensör diferensiyellemesi denir.

- i. $D(at + bs) = aD(t) + bD(s)$, yani D sabit katsayılara göre lineerdir.
- ii. D tipi korur. Yani; $D(\mathfrak{S}_q^p(M)) \subset \mathfrak{S}_q^p(M)$
- iii. $D(t \otimes s) = Dt \otimes s + t \otimes Ds$, (Leibnitz kuralı)
- iv. D işlemi ile kontraksiyon işlemi yer değiştirebilir. Yani; $D(Ct) = C(Dt)$

burada $t, s \in \mathfrak{S}(M)$ $a, b \in R$ dir.

2.4. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon

“ M_n Diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma: u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesi eğrinin noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilmiş konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.” (Salimov ve Mağden, 2007).

Afin konneksiyonun invaryant tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.4.1: M manifoldu C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ ve $f, g \in \mathfrak{S}_0^0(M)$ olmak üzere $\mathfrak{S}(M)$ cebirinin,

$$\nabla: \mathfrak{S}_0^1(M) \times \mathfrak{S}_0^1(M) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M)$$

işlemi,

- i. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$
- ii. $\nabla_X(fY + gZ) = (Xf)Y + f\nabla_XZ + (Xg)Z + g\nabla_XZ$

şartlarını sağlıyorsa ∇ dönüşümüne “afin (lineer) konneksiyon” denir. (M, ∇) ikilisine ise “afin konneksiyonlu uzay” adı verilir.

Tanım : M, C^∞ sınıfından bir manifold ve ∇, M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. $\forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M), Z \in \mathfrak{S}_q^p(M), f, g \in \mathfrak{S}_0^0(M)$ olmak üzere $\mathfrak{S}(M)$ cebirinin,

$$D = \nabla_X: \mathfrak{S}(M) \rightarrow \mathfrak{S}(M)$$

diferensiyelleme işlemi,

$$i. \quad \nabla_{fX+gY} = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$ii. \quad \nabla_X f = Xf$$

şartlarını sağlıyorsa ∇_X e X vektör alanı yönündeki kovaryant türev adı verilir.

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ve $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ gösterimini kabul edelim, ∇_i, ∂_j vektör alanına uygulandığında sonuç vektör alanı olduğundan,

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi yeni koordinatlarda

$$\nabla_{i'} \partial_{j'} = \Gamma_{i'j'}^{k'} \partial_{k'}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \Gamma_{i'j'}^{k'} \partial_{k'} &= \nabla_{\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i}} (\partial_{j'}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \nabla_{\partial_i} \nabla_{j'}, \quad (\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \nabla_{\partial_i} \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \nabla_i \partial_j \right] \\ &= \frac{\partial^2 x^{j \rightarrow k}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^{j \rightarrow k}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^k \partial_k \\ \Rightarrow \left(\Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} &= \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ \Rightarrow \left(\Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \right) &= \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^k \right) \end{aligned}$$

olup her iki taraf $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$ ile çarpılırsa,

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}$$

bulunur ki Γ_{ij}^k nın $\partial_i \rightarrow \partial_{i'}$ dönüşüm kuralı,

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = A_{i'}^i A_{j'}^j A_k^{k'} \Gamma_{ij}^k + A_k^{k'} A_{i'j'}^k,$$

şeklindedir.

Şimdi $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^j \partial_j$ alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i \partial_i} (Y^j \partial_j) = X^i \nabla_{\partial_i} (Y^j \partial_j) \\ &= X^i \left((\partial_i Y^j) \partial_j + Y^j \nabla_i \partial_j \right) \\ &= X^i \left((\partial_i Y^j) \partial_j + Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \right) \\ &= X^i (\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j) \partial_k \end{aligned}$$

Burada $X = X^i \partial_i = \delta_s^i \partial_i = \partial_s$ alınırsa, (yani $X^i = \delta_s^i$ alınırsa)

$$\begin{aligned} (\nabla_{\partial_s} Y)^k \partial_k &= \delta_s^i (\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j) \partial_k \\ \nabla_s Y^k &= \partial_s Y^k + \Gamma_{sj}^k Y^j \end{aligned} \tag{2.2}$$

yazılır. Bu Y vektör alanının kovaryant türevinin koordinatlarla ifadesidir. Şimdi $w \in \mathfrak{S}_1^0(M)$ için kovaryant türeve bakalım. $X, Y \in \mathfrak{S}_1^0(M)$ ve $w(X) = C_1^1(w \otimes X) \in \mathfrak{S}_0^0(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla_X w(Y) &= (\nabla_X w)Y + w(\nabla_X Y) \\ (\nabla_X w)Y &= Xw(Y) - w(\nabla_X Y) \end{aligned}$$

olup $X = \partial_i, Y = \partial_j$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} (\nabla_i w)(\partial_j) &= \partial_i w(\partial_j) - w(\nabla_i \partial_j) \\ \nabla_i w_j &= \partial_i w_j - \Gamma_{ij}^k w_k \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde yazılır.

Benzer şekilde (p, q) tipli tensör için kovaryant türev lokal koordinatlarla,

$$\nabla_k t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \partial_k t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} + \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{km}^{i_\lambda} t_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, m, \dots, i_p} - \sum_{\mu=1}^q \Gamma_{kj_\mu}^m t_{j_1, \dots, m, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \quad (2.4)$$

şeklinde yazılır. (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Tanımdan da anlaşılacağı gibi (p, q) tipli bir tensöre kovaryant türev uygulandığı takdirde $(p, q + 1)$ tipinde bir tensör elde edilecektir. Sonuç olarak bir tensöre kovaryant türev uygulandığında tensörün kovaryantlık derecesi artar.

2.5. Lie Türevlemesi :

M üzerindeki (U, φ) koordinat sisteminde $X = X^i \partial_i$ ve $Y = Y^j \partial_j$ vektör alanları ve $f \in \mathfrak{S}_0^0(M)$ fonksiyonu için,

$$X(f) = X^i \partial_i f, Y(f) = Y^j \partial_j f$$

$$XY(f) = X(Y^j \partial_j f) = X^i (\partial_i Y^j \partial_j f + Y^j \partial_{ji}^2 f)$$

$$YX(f) = Y(X^i \partial_i f) = Y^j (\partial_j X^i \partial_i f + X^i \partial_{ij}^2 f)$$

bulunur. Buradan,

$$XY(f) - YX(f) = (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_j f$$

yazılır. Böylece,

$$XY - YX = [X, Y]$$

biçiminde tanımlanan yeni bir vektör alanı tanımlanmış olur. Bu vektör alanının ∂_i doğal çatısı cinsinden ifadesi,

$$[X, Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_j \quad (2.5)$$

biçiminde olur.

Tanım: (2.5) eşitliği ile tanımlanan $[X, Y]$ vektör alanına X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi denir.

Özel olarak $\partial_i = \delta_i^k \partial_k$, $\partial_j = \delta_j^k \partial_k$ vektör alanları alınırsa (2.5) formülünden

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

elde edilir. Lie parantezinin, aşağıda ifade edilecek olan özelliklere sahip olduğu, (2.5) formülü vasıtası ile gösterilebilir:

- i. $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z],$
- ii. $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y],$
- iii. $[X, Y] = -[Y, X],$
- iv. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Tanım: M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde X vektör alanı olmak üzere X vektör alanı için aşağıdaki şartları sağlayan L_X operatörüne Lie türevi denir. (Kobayashi and Nomizu, 1963).

- i. $L_X(K \otimes K') = L_X K \otimes K' + K \otimes L_X K', \forall K, K' \in \mathfrak{S}(M_n)$
- ii. $L_X f = Xf, f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$
- iii. $L_X df = dL_X f$
- iv. $L_X Y = [X, Y]$

Burada $[X, Y]$ Lie parantezidir. $L_X Y$ 'nin lokal koordinatlardaki ifadesi;

$$L_X Y^i = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

biçiminde yazılır.

Keyfi olarak alacağımız bir kovektör alanı için Lie türev formülünü bulmaya çalışalım. Önce $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ kovektör alanını göz önüne alalım. $\forall Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ için $\omega(Y) \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ olduğu açıktır. L_X türevinin özelliklerine göre

$$L_X(\omega(Y)) = (L_X \omega)Y + \omega(L_X Y)$$

ve buradan da

$$(L_X \omega)Y = L_X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) \quad (2.6)$$

yazılır.

Eğer, $Y = \partial_j$ alınırsa (2.6) eşitliğinin U komşuluğundaki lokal koordinatlarla ifadesi

$$L_X \omega_j = X^k \partial_k \omega_j + \omega_k \partial_j X^k \quad (2.7)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi ise keyfi (p, q) tipli t tensör alanına bakalım. $t \in \mathfrak{S}_q^p(M_n)$ için

$$t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \in \mathfrak{S}_0^0(M_n), \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{S}_0^1(M_n) \\ , \forall \omega^1, \dots, \omega^p \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$$

olduğu açıktır. Bu takdirde L_X 'in özelliklerine göre

$$L_X \left(t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \right) = (L_X t)(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \\ + \sum_{i=1}^q t(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \\ + \sum_{j=1}^p t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, L_X \omega^j, \dots, \omega^p)$$

ve buradan da

$$(L_X t)(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) = X \left(t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \right) \\ - \sum_{i=1}^q t(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_q, \omega^1, \dots, \omega^p) \\ - \sum_{j=1}^p t(X_1, \dots, X_q, \omega^1, \dots, L_X \omega^j, \dots, \omega^p)$$

bulunur. L_X türevi $dx^i(\partial_j) = \partial_j^i$ için uygulanırsa,

$$0 = L_X \delta_j^i = L_X \left(dx^i(\partial_j) \right) = (L_X dx^i) \partial_j + dx^i(L_X \partial_j)$$

olarak bulunur. Şimdi ise Lie parantezinin özellikleri kullanılarak,

$$(L_X dx^i) \partial_j = -dx^i[X, \partial_j] = -dx^i[X^k \partial_k, \partial_j] = dx^i[\partial_j, X^k \partial_k] \\ = dx^i \partial_j X^k \partial_k = \partial_j X^k \delta_k^i = \partial_j X^i$$

ya da $(L_X dx^i) = (\partial_j X^i) dx^j$ bulunur. Bu değer ve $(L_X \partial_i) = -\partial_i X^k \partial_k$ eşitliği kullanılırsa,

$$L_X t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = X^k \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^q (\partial_{j_\lambda} X^k) t_{j_1 \dots k \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^p (\partial_k X^{i_\mu}) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots k \dots i_p} \quad (2.8)$$

eşitliği elde edilir. Burada $L_X t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ ile $(L_X t)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ gösterilmiştir. Özel olarak $p = 1$, $q = 0$ ve $p = 0$, $q = 1$ olduğunda (2.6) eşitliğinden (2.7) ve (2.8) eşitlikleri elde edilir.

2.6. Eğrilik ve Burulma Tensörleri:

“ M afin konneksiyonlu uzayda $f = f(u^1, \dots, u^n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_i f du^i$ ifadesi koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonu du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \quad (2.9)$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanının potansiyel fonksiyonu denir.

Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart,

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \quad (2.10)$$

olmasıdır.” (Yano, 1955).

Gradient kovektörü V_i nin kovaryant türevi,

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^k V_k \quad (2.11)$$

biçimindedir. (2.11) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme yapılır ve (2.10) eşitliği kullanılırsa,

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S_{ij}^k V_k \quad (2.12)$$

bulunur. Burada,

$$S_{ij}^k = \Gamma_{[ij]}^k \quad (2.13)$$

şeklinde belirtilmiştir. (2.12) denkleminin sol kısmındaki kovaryant türev ise (0,2) tipli bir tensör olduğundan S_{ij}^k çoklukları alt indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensör belirtir. (2.13) tensörüne M uzayının burulma tensörü denir. M manifoldundan

alınmış herhangi iki X ve Y vektör alanı için burulma tensörünün invaryant formda yazılışı ise $\forall X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M)$ için,

$$2S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.14)$$

şeklindedir. (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Burada $[X, Y]$, X ve Y vektör alanlarının Lie parantezidir.

Burulması sıfır olan uzaylarda, konneksiyon katsayıları simetrik olur ve bu uzaylara burulmasız uzay adı verilir. Yani,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \Leftrightarrow S_{ij}^k = 0$$

olur. Burulma tensörünün (2.14) biçimindeki invaryant formu kullanılarak burulmasız uzaylarda,

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

olduğu görülür.

Keyfi v vektörünün kovaryant türevi $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sm}^i v^m$ şeklindedir ve $\partial_s v^i$ (1,1) tipli tensördür. (1,1) tipli tensörün kovaryant türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^i \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\ &= \partial_s (\partial_r v^i + \Gamma_{rk}^i v^k) + \Gamma_{rm}^i (\partial_s v^m + \Gamma_{sk}^m v^k) - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \\ &= \partial_{rs}^2 v^i + \partial_r \Gamma_{sk}^i v^k + \Gamma_{sk}^i \partial_r v^k + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m v^k - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i \end{aligned}$$

bulunur.

Son eşitliğin her iki tarafında r, s indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılırsa,

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R_{rsk}^i v^k - 2S_{rs}^k \nabla_k v^i \quad (2.15)$$

denklemini elde edilir. Burada,

$$R_{rsk}^i = \partial_r \Gamma_{sk}^i - \partial_s \Gamma_{rk}^i + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m - \Gamma_{sm}^i \Gamma_{rk}^m = 2(\partial_{[r} \Gamma_{s]k}^i + \Gamma_{[r|m}^i \Gamma_{s]k}^m)$$

yazılır. (2.15) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduklarından R_{rsk}^i ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre M uzayının eğrilik tensörü veya Riemannian-Christoffel tensörü denir.

(2.15) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılır;

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}w_k = -R_{rsk}^m w_m - 2S_{rs}^m \nabla_m w_k \quad (2.16)$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\varphi_i^j = R_{rsm}^j \varphi_i^m - R_{rsi}^m \varphi_m^j - 2S_{rs}^m \nabla_m \varphi_i^j \quad (2.17)$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} = \sum_{\lambda=1}^p R_{rsm}^{i_\lambda} t_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,m,\dots,i_p} - \sum_{\mu=1}^q R_{rsj_\mu}^m t_{j_1,\dots,m,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} - 2S_{rs}^m \nabla_m t_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} \quad (2.18)$$

X, Y ve Z M manifoldundan alınmış keyfi vektör alanları olmak üzere eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı ise,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.19)$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

2.7. Riemannian Metriği – Riemannian Manifoldu

Tanım: M_n manifoldu üzerinde tanımlı,

- i. $g(X, Y) = g(Y, X), \forall X, Y \in \mathfrak{V}_0^1(M_n)$, (simetriklik)
- ii. $g(X, X) \geq 0, \forall X \in \mathfrak{V}_0^1(M_n)$ ve $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$, (pozitif tanımlılık)

şartlarını sağlayan (0,2) tipli g tensör alanına Riemannian metriği denir. g Riemannian metriğine sahip M_n manifolduna Riemannian manifoldu denir.

M_n 'de $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ lokal koordinat sistemi verilmiş olsun. Bu lokal koordinatlara göre, g 'nin g_{ij} bileşenleri

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad i, j = 1, \dots, n$$

ile verilir g_{ij} 'ye g 'nin kovaryant bileşenleri denir. g 'nin g^{ij} , kontravaryant bileşenleri

$$g^{ij} = g(dx^i, dx^j) \quad i, j = 1, \dots, n$$

ile tanımlanır. (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Tanım (Levi-Civita Konneksiyonu): M manifoldu üzerinde g_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu uzayda $\nabla_k g_{ij} = 0$ şartını sağlayan burulmasız tek bir $\Gamma_{ij}^k = \left\{\frac{k}{ij}\right\}_g$ konneksiyonu vardır. Bu konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. $X, Y, Z \in \mathfrak{V}_0^1(M)$ için Koszul formülü olarak bilinen aşağıdaki,

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y))$$

$$-g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])$$

denkleminde $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_k$ alınır;

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) &= \partial_i (g(\partial_j, \partial_k)) + \partial_j (g(\partial_k, \partial_i)) - \partial_k (g(\partial_i, \partial_j)) \\ &\quad - \underbrace{g(\partial_i, [\partial_i, \partial_k])}_0 + \underbrace{g(\partial_j, [\partial_k, \partial_i])}_0 + \underbrace{g(\partial_k, [\partial_i, \partial_j])}_0 2g(\Gamma_{ij}^h \partial_h, \partial_k) \\ &= \partial_j g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \end{aligned}$$

$$2\Gamma_{ij}^h g_{hk} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}$$

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})$$

bulunur ki bu Γ_{ij}^h fonksiyonlarına Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları denir.

Ayrıca Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan konneksiyonlara metrik konneksiyon denir.

Herhangi bir afin konneksiyonun eğrilik tensörünün aksine, Riemannian eğrilik tensörünün kontravaryant indisi indirilerek kovaryant eğrilik tensörü elde edilebilir. Yani,

$$R_{ijk}^l = g^{ml} R_{ijkm}$$

eşitliği geçerlidir. Benzer şekilde eğrilik tensörünün kovaryant indisleri de yükseltilerek kontravaryant eğrilik tensörü de elde edilebilir. Kovaryant eğrilik tensörünün aşağıdaki özellikleri vardır;

- i. $R_{(ij)kl} = 0$
- ii. $R_{ij(kl)} = 0$
- iii. $R_{ijkl} = R_{klij}$
- iv. $R_{[ijk]l} = 0$, (1. Bianchi özdeşliği)
- v. $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$, (2. Bianchi özdeşliği)

Tanım: Bir (M, g) Riemanian manifoldunun R eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır ise M ye flat manifold denir.

Tanım (Ricci tensörü): R_{lks}^i eğrilik tensöründe i ile l aynı alınarak (kontraksiyon yapılarak) elde edilen,

$$R_{ks} = R_{lks}^l$$

tensörüne Ricci tensörü denir (Kobayashi and Nomizu, 1963). Riemannian manifoldunun Ricci eğrilik tensörü simetriktir. Gerçekten

$$R_{jk} = R_{ljk}^l = g^{ml} R_{ljk m} = g^{ml} R_{kmlj} = g^{ml} R_{mkjl} = R_{mkj}^m = R_{kj}$$

dır.

Tanım: Ricci eğrilik tensörünün tam kontraksiyonuna skaler eğrilik denir ve S ile gösterilir. Yani $S = g^{jk} R_{jk}$ dır.

Tanım: (M, g) Riemannian manifoldunun konformal eğrilik tensörü

$$C = R_{ijkl} - \frac{1}{(n-2)} (g_{jl} R_{ik} - g_{il} R_{jk} + g_{ik} R_{jl} - g_{jk} R_{il}) + \frac{S}{(n-1)(n-2)} (g_{ik} R_{jl} - g_{il} R_{jk})$$

ile verilir. $\dim M \geq 4$ olmak üzere (M, g) , Riemannian manifoldunun konformal eğrilik tensörü sıfır ise M manifoldu lokal konformal flat manifold olarak adlandırılır.

3. MATERYAL VE METOD

3.1. Dönüşüm Teorisi

$f: M \rightarrow \bar{M}$ bir diffeomorfizm olsun. $U \subset M$, $m \in M$ nin koordinat komşuluğu ise $f(U) \subset \bar{M}$ de $f(m) \in \bar{M}$ ' nin bir koordinat komşuluğudur. Yani $(U, \varphi), m \in U$ civarında bir harita ise $f(m) \in \bar{M}$ civarında $(f(U), \varphi \circ f^{-1})$ haritasını seçebiliriz. Diğer bir deyişle $m \in U$ ve $f(m) \in f(U)$ aynı lokal koordinatlara sahiptir.

∇ ve $\bar{\nabla}$ afin konneksiyonlu (M, ∇) ve $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ manifoldlar arasındaki

$$f: (M, \nabla) \rightarrow (\bar{M}, \bar{\nabla})$$

diffeomorfizmini göz önüne alalım. Şayet $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$, (A indis kümesi) M 'nin bir atlası ise f diffeomorfizminin özelliklerinden dolayı $\{(f(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ f^{-1}), \alpha \in A\}$ da $\bar{M}$ manifoldunun bir atlası olur.

3.2. Bir Dönüşümün Deformasyon Tensörü

$f: (M, \nabla) \rightarrow (\bar{M}, \bar{\nabla})$ dönüşümü (M, ∇) ve $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ afin konneksiyonlu manifoldlar arasında bir diffeomorfizm olsun. Burada $P(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ şeklinde ifade edilecek olan

$$P = \bar{\nabla} - \nabla \quad (3.1)$$

(1.2) tipli tensör alanına f diffeomorfizmine göre $\bar{\nabla}$ ve ∇ konneksiyonlarının deformasyon tensörü denir. (Mikes J., et al, 2015).

Not: $\bar{M}$ manifoldu üzerindeki konneksiyon, metrik, Riemannian tensörü, Ricci tensörü gibi bütün geometrik objeler üzerindeki çizgi ile M manifoldundaki benzerlerinden ayırt edilecektir.

(3.1) de ifade edilen P tensör alanının bileşenleri,

$$P_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k \quad (3.2)$$

şeklinde. Eğer $P = 0$ ise bu durumda f dönüşümü konneksiyonu koruyan (afin) dönüşüm olarak adlandırılır.

(3.1) ifadesi vasıtasıyla (M, ∇) ve $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ nın Riemannian ve Ricci tensörleri arasındaki ilişkiyi gösterelim.

i.

$$\bar{R}((X, Y)Z) = \bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y Z) - \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X Z) - \bar{\nabla}_{[X, Y]}Z$$

$$R((X, Y), Z) = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$$

eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \bar{R}((X, Y)Z) - R((X, Y)Z) &= \bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y Z) - \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X Z) - \bar{\nabla}_{[X, Y]}Z - \nabla_X(\nabla_Y Z) \\ &\quad + \nabla_Y(\nabla_X Z) + \nabla_{[X, Y]}Z \end{aligned} \quad (3.3)$$

yazılabilir.

Burada $X = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j} = \partial_j$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k} = \partial_k$ yazılırsa (3.3) ifadesi,

$$\begin{aligned} \bar{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k - R(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \bar{\nabla}_{\partial_i}(\bar{\nabla}_{\partial_j}\partial_k) - \bar{\nabla}_{\partial_j}(\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_k) - \nabla_{\partial_i}(\nabla_{\partial_j}\partial_k) \\ &\quad + \nabla_{\partial_j}(\nabla_{\partial_i}\partial_k) \\ (\bar{R}_{ijk}^h - R_{ijk}^h)\partial_h &= \bar{\nabla}_{\partial_i}(\bar{\Gamma}_{jk}^h\partial_h) - \bar{\nabla}_{\partial_j}(\bar{\Gamma}_{ik}^h\partial_h) - \nabla_{\partial_i}(\Gamma_{jk}^h\partial_h) + \nabla_{\partial_j}(\Gamma_{ik}^h\partial_h) \\ &= (\partial_i\bar{\Gamma}_{jk}^h)\partial_h + \bar{\Gamma}_{jk}^h\bar{\Gamma}_{ih}^m\partial_m - (\partial_j\bar{\Gamma}_{ik}^h)\partial_h - \bar{\Gamma}_{ik}^h(\bar{\nabla}_{\partial_j}\partial_h) \\ &\quad - (\partial_i\Gamma_{jk}^h)\partial_h - \Gamma_{jk}^h(\nabla_{\partial_i}\partial_h) + (\partial_j\Gamma_{ik}^h)\partial_h + \Gamma_{ik}^h(\nabla_{\partial_j}\partial_h) \\ &= \partial_i(\bar{\Gamma}_{jk}^h - \Gamma_{jk}^h)\partial_h - \partial_j(\bar{\Gamma}_{ik}^h - \Gamma_{ik}^h)\partial_h + \bar{\Gamma}_{jk}^h\bar{\Gamma}_{ih}^m\partial_m \\ &\quad - \Gamma_{jk}^h\Gamma_{ih}^m\partial_m - \bar{\Gamma}_{ik}^h\bar{\Gamma}_{jh}^m\partial_m + \Gamma_{ik}^h\Gamma_{jh}^m\partial_m \end{aligned}$$

gerekli işlemler yapılırsa,

$$\bar{R}_{ijk}^h - R_{ijk}^h = \nabla_i P_{jk}^h - \nabla_j P_{ik}^h + P_{im}^h P_{jk}^m - P_{jm}^h P_{ik}^m \quad (3.4)$$

olarak bulunur. (3.4) eşitliği invaryant formda

$$\begin{aligned} \bar{R}((X, Y)Z) - R((X, Y)Z) &= \nabla_X P(Z, Y) - \nabla_Y P(Z, X) \\ &\quad + P(P(Z, Y), X) - P(P(Z, X), Y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

biçiminde yazılır.

ii. (3.4) eşitliğinde her iki taraf δ_h^i ile kontraksiyon yapılırsa

$$\bar{R}_{jk} - R_{jk} = \nabla_i P_{jk}^i - \nabla_j P_{ik}^i + P_{ia}^i P_{jk}^a - P_{ja}^i P_{ik}^a \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) eşitliği invaryant formda

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(X, Y) - Ric(X, Y) &= T_r(Z \rightarrow \nabla_Y P(Z, X) - \nabla_X P(Z, Y) \\ &\quad + P(P(Z, Y), X) - P(P(Z, X), Y) \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.2.1: (Mikes J., et al., 2015). (M, ∇) burulmasız afin konneksiyonlu manifold ve $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ ise $\bar{g}$ Riemannian metriğine sahip bir Riemannian manifoldu olsun. Bu durumda $\bar{\nabla} = \nabla + P$ eşitliği,

$$\nabla_Z \bar{g}(X, Y) = \bar{g}(X, P(Y, Z)) + \bar{g}(Y, P(X, Z))$$

eşitliğine denktir. Bu eşitlik lokal koordinatlarla

$$\nabla_k \bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ia} P_{jk}^a + \bar{g}_{ja} P_{ik}^a$$

biçiminde gösterilir.

İspat: (M, ∇) ve $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ burulmasız uzaylar olduklarından

$$\bar{\nabla}(X, Y) = \bar{\nabla}(Y, X) + [X, Y]$$

$$\nabla(X, Y) = \nabla(Y, X) + [X, Y]$$

yazılır ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$\bar{\nabla}(X, Y) - \nabla(X, Y) = \bar{\nabla}(Y, X) - \nabla(Y, X)$$

$$P(X, Y) = P(Y, X)$$

bulunur.

$\nabla_k \bar{g}_{ij} = \partial_k \bar{g}_{ij} - \Gamma_{ki}^a \bar{g}_{ja} - \Gamma_{kj}^a \bar{g}_{ai}$ eşitliğinde $\Gamma_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - P_{ij}^k$ değeri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_k \bar{g}_{ij} &= \partial_k \bar{g}_{ij} - (\bar{\Gamma}_{ki}^a - P_{ki}^a) \bar{g}_{aj} - (\bar{\Gamma}_{kj}^a - P_{kj}^a) \bar{g}_{ai} \\ &= \partial_k \bar{g}_{ij} - \bar{\Gamma}_{ki}^a \bar{g}_{aj} - \bar{\Gamma}_{kj}^a \bar{g}_{ai} + \bar{g}_{ai} P_{kj}^a + \bar{g}_{aj} P_{ki}^a \\ &= \bar{\nabla} g_{ij} + \bar{g}_{ai} P_{kj}^a + \bar{g}_{aj} P_{ki}^a \end{aligned}$$

yazılır. $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ Riemannian uzayı olup $\bar{\nabla}_k g_{ij} = 0$ olacağından

$$\nabla_k \bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ia} P_{jk}^a + \bar{g}_{ja} P_{ik}^a \quad (3.8)$$

olarak bulunur. Şimdi

$$Q(X, Y, Z) = (\bar{g}(Z, \bar{\nabla}(X, Y) - \nabla(X, Y) - P(X, Y)) \quad (3.9)$$

şeklinde (1,3) tipli Q tensör alanını tanımlayalım. Q tensör alanı lokal koordinatlarda;

$$Q_{ijk}^h = \bar{g}_{kh}(\bar{\Gamma}_{ij}^h - \Gamma_{ij}^h - P_{ij}^h)$$

şeklinde yazarız. Buna göre

$$\begin{aligned} Q_{ikj}^h + Q_{jki}^h &= \bar{g}_{jh}(\bar{\Gamma}_{ik}^h - \Gamma_{ik}^h - P_{ik}^h) + \bar{g}_{ih}(\bar{\Gamma}_{jk}^h - \Gamma_{jk}^h - P_{jk}^h) \\ &= \underbrace{(\bar{g}_{ih}\bar{\Gamma}_{jk}^h + \bar{g}_{jh}\bar{\Gamma}_{ik}^h)}_* - (\bar{g}_{ih}\Gamma_{jk}^h + \bar{g}_{jh}\Gamma_{ik}^h) - \underbrace{(\bar{g}_{ih}P_{jk}^h + \bar{g}_{jh}P_{ik}^h)}_{**} \end{aligned}$$

$\bar{\nabla}_k \bar{g}_{ij} = 0$ olduğundan $*$ = $\partial_k \bar{g}_{ij}$ ve (3.8) eşitliğinden $**$ = $\nabla_k \bar{g}_{ij}$

yazılır. Buna göre

$$\begin{aligned} Q_{ikj}^h + Q_{jki}^h &= \partial_k \bar{g}_{ij} - \Gamma_{ik}^h \bar{g}_{jh} - \Gamma_{jk}^h \bar{g}_{ih} - \nabla_k \bar{g}_{ij} \\ &= \nabla_k \bar{g}_{ij} - \nabla_k \bar{g}_{ij} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

olur. Buna göre

$$Q(X, Z, Y) + Q(Y, Z, X) = 0 \quad (3.11)$$

yazılır. Ayrıca (3.10) eşitliğinden

$$Q(X, Y, Z) = Q(Y, X, Z) \quad (3.12)$$

yazılabilir. (3.11) ifadesinden

$$\begin{cases} Q(X, Z, Y) + Q(Y, Z, X) = 0 \\ Q(X, Y, Z) + Q(Z, Y, X) = 0 \\ Q(Y, X, Z) + Q(Z, X, Y) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Bu eşitliklerin birincisi -1 ile çarpılıp üçü taraf tarafa toplanırsa;

$$Q(X, Y, Z) + Q(Y, X, Z) = 0 \Rightarrow Q(X, Y, Z) = 0$$

bulunur. Buradan (3.9) eşitliğinden

$$\bar{\nabla}(X, Y) = \nabla(X, Y) - P(X, Y) = 0$$

yazılır ki $\bar{\nabla} = \nabla + P$ elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

3.3. Jakobi Formülü ve Voss-Weyl Formülü:

Lemma 3.3.1: Q_{ij} tensörü (0,2) tipli bir tensör ve $Q = \text{Det}(Q_{ij})$ olarak gösterelim. Q_{ij} ye karşılık gelen matrisin ek matrisi $Ek(Q_{ij}) = Q^{ij}$ olmak üzere,

$$\partial_k = Q^{ij} \partial_k Q_{ij} \quad (3.16)$$

yazılır.

Burada $Q_{ij} = g_{ij}$, $\text{Det}(g_{ij}) = g$ ve $Ek(g_{ij}) = G^{ij}$ olarak alınırsa, Jakobi formülünden,

$$\partial_k g = G^{ji} \partial_k g_{ij} \quad (3.17)$$

yazılır. g_{ij} nin tersi g^{ij} olmak üzere,

$$g^{ij} = \frac{1}{g} G^{ji} \Rightarrow G = g \cdot g^{ij}$$

elde edilir. Son eşitlik (3.17) denkleminde kullanılırsa,

$$\partial_k g = g \cdot g^{ij} \partial_k g_{ij} \Rightarrow \frac{1}{g} \partial_k g = g^{ij} \partial_k g_{ij} \quad (3.18)$$

sonucuna ulaşılır. Christoffel sembolünde δ_k^i ile kontraksiyon yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \\ \Rightarrow \Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{2} g^{il} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \\ \Rightarrow \Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{2} (g^{il} \partial_i g_{jl} + g^{il} \partial_j g_{il} - g^{il} \partial_l g_{ij}) \end{aligned}$$

yazılır ve gerekli indis işlemleri yapılırsa,

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} g^{il} \partial_j g_{il}$$

elde edilir. (3.17) formülünden,

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \partial_j g = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{2\sqrt{g}} \partial_j g = \partial_j \ln \sqrt{|g|}, \quad (\text{Voss} - \text{Weyl Formülü}) \quad (3.19)$$

olarak bulunur. (Weyl H. 1921).

4. ARAŞTIRMA VE BULGULAR

4.1. Kähler Manifoldu:

g metrik tensörü ve $(1,1)$ tipli F tensör alanı ile birlikte aşağıdaki şartları sağlayan n -boyutlu M manifolduna Kähler manifoldu denir ve K_n ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & F^2 = eId \\ \text{ii.} \quad & g(X, FY) + g(Y, FX) = 0 \\ \text{iii.} \quad & \nabla F = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

burada $e = \pm 1$ ve X, M_n manifoldu üzerinde keyfî bir tanjant vektörü, ∇ ise K_n manifoldunda kovaryant türevi göstermektedir.

Eğer;

$e = -1$ ise F bir kompleks yapı olup K_n manifoldu eliptik Kähler manifoldu (K_n^-) adını alır.

$e = 1$ ise F bir product yapı olup K_n manifoldu hiperbolik Kähler manifoldu K_n^+ adını alır.

Yukarıda bahsedilen şartlar lokal koordinatları ile aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & F_{\alpha}^h F_i^{\alpha} = e \delta_i^h \\ \text{ii.} \quad & g_{i\alpha} F_j^{\alpha} + g_{j\alpha} F_i^{\alpha} = 0 \\ \text{iii.} \quad & \nabla_j F_i^h = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

burada $h, i, \alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$ dir.

4.2. Konjügasyon (Conjugation) İşlemi:

Hesaplamalarımızı daha kolay ve düzenli yapabilmek için eliptik ve hiperbolik Kähler manifoldlarında konjügasyon işlemini aşağıdaki gibi kullanacağız.

$$A_{\dots \bar{i} \dots} = A_{\dots \alpha \dots} F_i^{\alpha} \quad , \quad B^{\dots \bar{i} \dots} = B^{\dots \alpha \dots} F_{\alpha}^i$$

yukarıdaki tanım ve (4.2) eşitlikleri dikkate alındığında konjügasyon işleminin aşağıdaki özellikleri sağladığını gösterebiliriz.

- i. $A_{\bar{i}} = A_{\bar{\alpha}} F_i^{\alpha} = A_{\beta} F_{\alpha}^{\beta} F_i^{\alpha} = A_{\beta} e \delta_i^{\beta} = e A_i$
- ii. $A_{\bar{\alpha}} B^{\alpha} = A_k F_{\alpha}^k B^{\alpha} = A_k B^{\bar{k}} = A_{\alpha} B^{\bar{\alpha}}$
- iii. $\nabla_j (A_{\bar{i}}) = \nabla_j (A_k F_i^k) = (\nabla_j A_k) F_i^k + A_k (\nabla_j F_i^k)$
 $= \nabla_j (A_k F_i^k) = \nabla_j A_{\bar{i}}$
- iv. $B^{\bar{i}} = B^{\bar{\alpha}} F_{\alpha}^i = B^k F_k^{\alpha} F_{\alpha}^i = B^k e \delta_k^i = e B^i$
- v. $A_{\bar{\alpha}} B^{\bar{\alpha}} = A_k F_{\alpha}^k B^t F_t^{\alpha} = A_k B^t e \delta_t^k = e A_k B^k = e A_{\alpha} B^{\alpha}$
- vi. $\nabla_j (B^{\bar{i}}) = \nabla_j (B^{\alpha} F_{\alpha}^i) = (\nabla_j B^{\alpha}) F_{\alpha}^i + B^{\alpha} (\nabla_j F_{\alpha}^i)$
 $= (\nabla_j B^{\alpha}) F_{\alpha}^i = \nabla_j B^{\bar{i}}$

ayrıca

$$\begin{aligned}\delta_i^h &= \delta_k^h F_i^k = F_i^h \\ \delta_i^{\bar{h}} &= \delta_i^k F_k^h = F_i^h \\ \delta_i^h &= \delta_i^{\bar{h}} = F_i^h\end{aligned}\tag{4.3}$$

olarak yazılabilir.

Benzer şekilde

$$g(X, FY) + g(Y, FX) = 0$$

şartı lokal koordinatlarda

$$g_{i\alpha} F_j^{\alpha} + g_{\alpha j} F_i^{\alpha} = 0$$

biçiminde yazıldığından, bu şartı

$$g_{i\bar{j}} + g_{\bar{i}j} = 0\tag{4.4}$$

şeklinde yazabiliriz.

(4.4) eşitliğinde her iki taraf F_k^j ile kontraksiyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
g_{i\alpha} F_j^\alpha F_k^j + g_{\bar{i}j} F_k^j &= 0 \\
g_{i\alpha} e \delta_k^\alpha + g_{\bar{i}k} &= 0 \\
g_{\bar{i}k} &= -e g_{ik}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde, g_{ij} ile gösterilen, g tensörünün dualinin bileşenleri de

$$g^{ij} + g^{i\bar{j}} = 0$$

ve

$$g^{\bar{j}} = -e g^{ij}$$

eşitliklerini sağlar.

Bu iki eşitliği elde etmek için (4.4) eşitliğinde her taraf $g^{ik} g^{jl}$ ile kontraksiyon yapılırsa

$g^{ij} + g^{i\bar{j}} = 0$ sonucuna ulaşılır ki bu son eşitlikte her taraf F_j^k ile kontraksiyon yapılırsa $g^{\bar{j}} = -e g^{ij}$ sonucuna ulaşılır.

$\nabla F = 0$ denklemlerinin integrallenebilme şartından

$$F_\alpha^h R_{ijk}^\alpha - F_i^\alpha R_{\alpha jk}^h = 0$$

yazılır. Konjügasyon işlemi ile

$$R_{ijk}^{\bar{h}} = R_{\bar{i}jk}^h \tag{4.6}$$

yazılır. Burada R_{ijk}^h ise Riemannian eğrilik tensörünün bileşenleridir. (4.6) eşitliğinden

$$R_{ijk}^{\bar{h}} = R_{\bar{i}jk}^h \Rightarrow F_\alpha^h R_{ijk}^\alpha = F_i^\alpha R_{\alpha jk}^h$$

her iki taraf F_h^t ile kontraksiyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
F_h^t F_\alpha^h R_{ijk}^\alpha &= F_h^t F_i^\alpha R_{\alpha jk}^h \\
e \delta_\alpha^t R_{ijk}^\alpha &= R_{\bar{i}jk}^{\bar{t}} \\
e R_{ijk}^t &= R_{\bar{i}jk}^{\bar{t}}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

sonucuna ulaşılır. (4.7) eşitliğinde yapılacak gerekli indis işlemleri ile

$$R_{\bar{i}\bar{j}} = -eR_{ij} \quad (4.8)$$

ve son olarak

$$R_{\bar{i}j} + R_{i\bar{j}} = 0 \quad (4.9)$$

sonuçlarına ulaşılır. Burada R_{ij} , Ricci tensörünün bileşenleridir.

4.3. Holomorfik Projektif Eğri:

K_n Kähler manifoldu üzerinde $\ell = \ell(t)$ eşitliği ile verilen bir ℓ eğrisini göz önüne alalım. $\lambda(t) = \frac{d\ell}{dt}$, $(dt \neq 0)$, $(t \in I)$ ℓ eğrisinin tanjant vektörü olsun. ℓ eğrisi boyunca paralel taşıma altında λ ve $F\lambda$ tarafından üretilen 2- boyutlu dağılıma sahipse, yani

$$\nabla_t \lambda = a(t)\lambda + b(t)F\lambda \quad (4.10)$$

ise ℓ eğrisine holomorfik projektif eğri denir. Burada $a(t)$ ve $b(t)$, t parametresinin fonksiyonlarıdır. Özellikle $b(t) = 0$ ise, bu holomorfik projektif eğri geodezik eğri adını alır. Bir holomorfik projektif eğri için $a(t) = 0$ şartını sağlayan bir t parametresi seçilebiliyorsa, bu t parametresi kanonik parametre olarak adlandırılır. Kanonik parametre ile parametrelendirilmiş holomorfik projektif eğriler

$$\nabla_t \lambda = b(t)F\lambda$$

denkleminin çözümleridir.

Tanım: F tensör yapısı ile birlikte tanımlanan (K_n, g, F) Kähler manifoldundan, $\bar{F}$ tensör yapısı ile birlikte tanımlanan $(\bar{K}_n, \bar{g}, \bar{F})$ Kähler manifolduna tanımlanan bir dönüşüm eğer K_n' deki her holomorfik projektif (analitik planar) eğriyi, $\bar{K}_n$ manifoldunda bir holomorfik projektif eğriye dönüştürüyorsa bu dönüşüme holomorfik projektif dönüşüm denir.

Teorem 4.3.1: (Mikeš J., et al., 2015) (K_n, g, F) Kähler manifoldundan $(\bar{K}_n, \bar{g}, \bar{F})$ Kähler manifolduna tanımlanan bir f holomorfik projektif dönüşümü her X, Y vektör alanı için aşağıdaki şekilde karakterize edilir.

$$P(X, Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X + e\psi(FX)FY + e\psi(FY)FX \quad (4.11)$$

Burada $P = \bar{\nabla} - \nabla$, f dönüşümünün deformasyon tensörü, ψ ise bir lineer formdur.

f dönüşümüne göre genel koordinat sisteminde (x) yapı tensörlerinin bileşenleri çakışır. $(\bar{F}_i^h(x) = F_i^h(x))$ Christoffel sembolleri arasında

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h + e\psi_i \delta_j^h + e\psi_j \delta_i^h \quad (4.12)$$

şeklinde bir ilişki vardır.

Burada ψ_i ler ise ψ 1- formunun bileşenleridir. Ayrıca konjügasyon tanımından $\psi_{\bar{i}} = \psi_a F_i^a$ ve $\delta_{\bar{i}}^h = F_i^h$ yazılır.

P deformasyon tensörünün $P = \bar{\nabla} - \nabla$, $P_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$ ifadesine denk olan ve (Teorem 3.2.1) de verilen

$$\nabla_k \bar{g}_{ij} = \bar{g}_{i\alpha} P_{jk}^\alpha + \bar{g}_{j\alpha} P_{ik}^\alpha$$

eşitliği göz önünde bulundurularak (4.12) denkleminde

$$P_{ij}^h = \bar{\Gamma}_{ij}^h - \Gamma_{ij}^h = \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h + e\psi_i \delta_j^h + e\psi_j \delta_i^h \quad (4.13)$$

yazılır. (4.13) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \nabla_k \bar{g}_{ij} &= \bar{g}_{i\alpha} [\psi_j \delta_k^\alpha + \psi_k \delta_j^\alpha + e\psi_j \delta_k^\alpha + e\psi_k \delta_j^\alpha] \\ &\quad + \bar{g}_{j\alpha} [\psi_i \delta_k^\alpha + \psi_k \delta_i^\alpha + e\psi_i \delta_k^\alpha + e\psi_k \delta_i^\alpha] \end{aligned}$$

$$\nabla_k \bar{g}_{ij} = \psi_j \bar{g}_{ik} + \psi_k \bar{g}_{ij} + e\psi_j \bar{g}_{i\bar{k}} + e\psi_{\bar{k}} \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_k \bar{g}_{ji} + e\psi_i \bar{g}_{j\bar{k}} + e\psi_{\bar{k}} \bar{g}_{ji}$$

elde edilir. Burada konjügasyon işleminde verilen (4.4) $(g_{i\bar{j}} = -g_{\bar{i}j})$ eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_k \bar{g}_{ij} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} - e\psi_j \bar{g}_{\bar{i}k} - e\psi_{\bar{i}} \bar{g}_{jk} \quad (4.14)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (4.14) ve (4.12) de verilen denklem sistemleri, holomorfik projektif dönüşümleri karakterize eden ve birbirine denk olan denklem sistemleridir.

4.4. Holomorfik Projektif Dönüşümlerin Denklik Sınıfları:

Holomorfik projektif dönüşümleri karakterize eden (4.12) eşitliğinden, Kähler manifoldlarının holomorfik projektif dönüşümlere göre ayrık denklik sınıflarına ayrıldığını söyleyebiliriz. $f : (K_n, g, F) \rightarrow (\bar{K}_n, \bar{g}, \bar{F})$ bir holomorfik projektif dönüşümü $K_n \xrightarrow{HPD(\psi)} \bar{K}_n$ ile gösterelim. Aşağıdaki denklik özellikleri (4.12) denklemlerinden kolayca gösterilebilir.

- i. Özdeşlik dönüşümü holomorfik projektif dönüşüm olur. Çünkü,

$$K_n \xrightarrow{HPD(0=\psi)} \bar{K}_n \text{ yazabiliriz.}$$
- ii. Eğer, $K_n \xrightarrow{HPD(\psi)} \bar{K}_n$ ise $\bar{K}_n \xrightarrow{HPD(-\psi)} K_n$ yazılabilir.
- iii. Eğer, $K_n \xrightarrow{HPD(\psi)} \bar{K}_n$ ve $\bar{K}_n \xrightarrow{HPD(\bar{\psi})} \bar{\bar{K}}_n$ ise bu durumda

$$K_n \xrightarrow{HPD(\psi+\bar{\psi})} \bar{\bar{K}}_n \text{ elde edilir.}$$

K_n ve $\bar{K}_n$ manifoldlarının aynı holomorfik projektif denklik sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart K_n manifoldundan $\bar{K}_n$ manifolduna bir holomorfik projektif eğri bulunmasıdır. Aynı holomorfik projektif denklik sınıfına ait uzaylara holomorfik projektif denk uzaylar denir.

4.5. Holomorfik Projektif Dönüşüm Altında Bazı Geometrik Objeler:

(K_n, g, F) ve $(\bar{K}_n, \bar{g}, \bar{F})$ Kähler manifoldları arasında $(K_n, g, F) \rightarrow (\bar{K}_n, \bar{g}, \bar{F})$ bir holomorfik projektif dönüşümün varlığını kabul edelim. Bu durumda (4.12) denklemleri sağlanır. (4.12) eşitliğinde her iki taraf δ_h^i ile kontraksiyon yapılırsa

$$\bar{\Gamma}_{ij}^i = \Gamma_{ij}^i + \psi_i \delta_j^i + \psi_j \delta_i^i + e\psi_\alpha F_i^\alpha F_j^h \delta_h^i + e\psi_j F_i^h \delta_h^i$$

$$\bar{\Gamma}_{ij}^i = \Gamma_{ij}^i + \psi_j + n\psi_j + \psi_\alpha e F_i^\alpha F_j^i + e\psi_j F_i^i$$

$$\bar{\Gamma}_{ij}^i = \Gamma_{ij}^i + \psi_j + n\psi_j + \psi_\alpha ee\delta_j^\alpha$$

yazılır. Son eşitlikte $F_i^i = 0$, $F_i^\alpha F_j^i = e\delta_j^\alpha$ ve $ee = 1$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\bar{\Gamma}_{ij}^i = \Gamma_{ij}^i + (n+2)\psi_j \quad (4.15)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\psi_i = \frac{1}{n+2} (\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha) \quad (4.16)$$

yazılır.

$G = \det(g_{ij})$ olmak üzere Voss-Weyl formülü olarak bilinen

$$\Gamma_{i\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} \partial_i \ln |G|$$

eşitliği (4.15) denkleminde kullanılırsa ($\bar{G} = \det(\bar{g}_{ij})$)

$$\frac{1}{2} \partial_i \ln \left| \frac{\bar{G}}{G} \right| = (n+2)\psi_i$$

$$\psi_i = \partial_i \left[\frac{1}{2(n+2)} \ln \left| \frac{\bar{G}}{G} \right| \right]$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\Psi = \frac{1}{2(n+2)} \ln \left| \frac{\bar{G}}{G} \right|$$

olarak gösterilirse

$$\psi_i = \nabla_i \Psi$$

elde edilir. Yani ψ_i , Ψ fonksiyonun gradiyenti olur. (4.16) eşitliği (4.12) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^h &= \Gamma_{ij}^h + \frac{1}{n+2} (\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha) \delta_j^h + \frac{1}{n+2} (\bar{\Gamma}_{j\alpha}^\alpha - \Gamma_{j\alpha}^\alpha) \delta_i^h \\ &+ e \frac{1}{n+2} (\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha) \delta_j^h + e \frac{1}{n+2} (\bar{\Gamma}_{j\alpha}^\alpha - \Gamma_{j\alpha}^\alpha) \delta_i^h \end{aligned}$$

Son eşitlikte düzenleme yapılarak

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{ij}^h - \frac{1}{n+2} \{ \bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha \delta_j^h + \bar{\Gamma}_{j\alpha}^\alpha \delta_i^h + e \bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha \delta_j^h + e \bar{\Gamma}_{j\alpha}^\alpha \delta_i^h \} \\ = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{n+2} \{ \Gamma_{i\alpha}^\alpha \delta_j^h + \Gamma_{j\alpha}^\alpha \delta_i^h + e \Gamma_{i\alpha}^\alpha \delta_j^h + e \Gamma_{j\alpha}^\alpha \delta_i^h \}\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafı $\bar{T}_{ij}^h$ ile sağ tarafı ise T_{ij}^h işaretlenir ise

$$\bar{T}_{ij}^h = T_{ij}^h \quad (4.17)$$

sonucuna ulaşılır.

Bu yolla holomorfik projektif dönüşüm altında invaryant kalan ve geodezik dönüşümler teorisinde bahsedilen "Thomas projektif parametresi" nin benzeri olan bir geometrik obje elde edilmiş oldu.

Buradan yola çıkarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.5.1: (Mikeš J., et al., 2015) (K_n, g, F) ve $(\bar{K}_n, \bar{g}, \bar{F})$ Kähler manifoldları arasında bir holomorfik projektif dönüşüm tanımlanabilmesi için gerek ve yeter şart (4.17) eşitliğinin sağlanmasıdır.

Holomorfik projektif dönüşümleri karakterize eden (4.12) eşitliği ve dönüşüm teorisinde bahsedilen (3.4) eşitliği kullanılarak (K_n, g, F) ve $(\bar{K}_n, \bar{g}, \bar{F})$ Kähler manifoldlarının eğrilik tensörlerinin bileşenleri arasında aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz.

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_j^h \psi_{ki} - \delta_i^h \psi_{kj} + e \delta_j^h \psi_{\bar{k}i} - e \delta_i^h \psi_{\bar{k}j} - e \delta_{\bar{k}}^h (\psi_{\bar{i}j} - \psi_{\bar{j}i}) \quad (4.18)$$

burada $\psi_{\bar{i}j}$, (0,2) tipli simetrik tensörü

$$\psi_{\bar{i}j} = \nabla_j \psi_i - \psi_i \psi_j - e \psi_{\bar{i}} \psi_{\bar{j}} \quad (4.19)$$

biçimindedir.

(4.18) denkleminde her iki taraf δ_h^i ile kontraksiyon yapılırsa K_n ve $\bar{K}_n$ Kähler manifoldlarının birbirine karşılık gelen Ricci tensörleri arasında

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} - n \psi_{ij} + 2e \psi_{\bar{i}\bar{j}} \quad (4.20)$$

bağıntısı elde edilir.

Konjügasyon işleminde bahsedilen $R_{\bar{i}\bar{j}} = -e R_{ij}$ eşitliği son denklemde kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$n \psi_{ij} = R_{ij} - \bar{R}_{ij} + 2e \psi_{\bar{i}\bar{j}}$$

$$n \psi_{\bar{i}\bar{j}} = R_{\bar{i}\bar{j}} - \bar{R}_{\bar{i}\bar{j}} + 2e \psi_{ij}$$

burada $A_{\bar{i}} = e A_i$ konjügasyon işlemi hatırlanmalıdır.

Son denklemlerin ikincisinde $R_{\bar{i}\bar{j}} = -eR_{ij}$ yazılır ve birinci denklem e ile çarpılırsa ($e^2 = 1$)

$$\begin{aligned} e.n\psi_{ij} &= eR_{ij} - e\bar{R}_{ij} + 2\psi_{\bar{i}\bar{j}} \\ n\psi_{\bar{i}\bar{j}} &= -eR_{ij} + e\bar{R}_{ij} + 2e\psi_{ij} \end{aligned}$$

elde edilir. Taraf tarafa toplama ile

$$\begin{aligned} e.n\psi_{ij} + n\psi_{\bar{i}\bar{j}} &= 2\psi_{\bar{i}\bar{j}} + 2e\psi_{ij} \\ (n-2)\psi_{\bar{i}\bar{j}} &= -e(n-2)\psi_{ij} \\ \psi_{\bar{i}\bar{j}} &= -e\psi_{ij} \end{aligned} \quad (4.21)$$

sonucuna ulaşılır. (4.21) eşitliğini (4.20) denkleminde kullanarak

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} - (n+2)\psi_{ij} \quad (4.22)$$

olarak bulunur. (4.22) eşitliğinden

$$\psi_{ij} = \frac{1}{n+2}(R_{ij} - \bar{R}_{ij})$$

bulunur ve bu son ifade (4.18) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijk}^h + \frac{1}{n+2} \{ \delta_j^h \bar{R}_{ki} - \delta_i^h \bar{R}_{kj} + e\delta_j^h \bar{R}_{\bar{k}\bar{i}} - e\delta_i^h \bar{R}_{\bar{k}\bar{j}} + e\delta_k^h (\bar{R}_{i\bar{j}} - \bar{R}_{\bar{i}j}) \} \\ = R_{ijk}^h + \frac{1}{n+2} \{ \delta_j^h R_{ki} - \delta_i^h R_{kj} + e\delta_j^h R_{\bar{k}\bar{i}} - e\delta_i^h R_{\bar{k}\bar{j}} + e\delta_k^h (R_{i\bar{j}} - R_{\bar{i}j}) \} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$P_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{n+2} \{ \delta_j^h R_{ki} - \delta_i^h R_{kj} + e\delta_j^h R_{\bar{k}\bar{i}} - e\delta_i^h R_{\bar{k}\bar{j}} + e\delta_k^h (R_{i\bar{j}} - R_{\bar{i}j}) \} \quad (4.23)$$

olarak gösterilirse (Benzer olarak $\bar{P}_{ijk}^h$)

$$\bar{P}_{ijk}^h = P_{ijk}^h \quad (4.24)$$

eşitliği yazılır.

(4.23) eşitliği ile verilen ve bileşenleri P_{ijk}^h olan P tensörüne holomorfik projektif eğrilik tensörü denir ve buradan aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

Teorem 4.5.2: (Mikeš J., et al., 2015) (K_n, g, F) ve $(\bar{K}_n, \bar{g}, \bar{F})$ Kähler manifoldları arasında bir holomorfik projektif dönüşüm tanımlansın. Bileşenleri P_{ijk}^h olan P holomorfik projektif eğrilik tensörü bu dönüşüm altında invariant kalır.

Tanım: Eğer K_n Kähler manifoldundan bir flat uzay üzerine holomorfik projektif dönüşüm var ise bu Kähler manifolduna holomorfik projektif flat manifold

denir. Holomorfik projektif flat manifoldlar için holomorfik projektif eğrilik tensörü sıfırdır.

4.6. Holomorfik Projektif Dönüşüm Teorisinin Temel Denklemleri:

(K_n, g, F) Kähler manifoldundan $(\bar{K}_n, \bar{g}, \bar{F})$ Kähler manifoldu üzerine bir holomorfik projektif dönüşüm tanımlansın. Bu durumda (4.14) te verilen

$$\nabla_k \bar{g}_{ij} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} - e\psi_{\bar{j}} \bar{g}_{ik} - e\psi_{\bar{i}} \bar{g}_{jk}$$

denkleminin sağlanacağı aşıkardır. Biz

$$\tilde{g}_{ij} = e^{-2\psi} \bar{g}_{ij} \quad (4.25)$$

şeklinde tanımlanan bir $\tilde{g}$ tensörünü göz önüne alalım. Doğal olarak $\tilde{g}$ tensörü, konjügasyon işleminde bahsedilen

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ji} = -e\tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}} , |\tilde{g}_{ij}| \neq 0 \quad (4.26)$$

eşitliğini sağlar.

(4.25) eşitliğinde (4.14) eşitliği kullanılır ve kovaryant türev alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_k \tilde{g}_{ij} &= -2\nabla_k \psi e^{-2\psi} \bar{g}_{ij} + e^{-2\psi} (2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} - e\psi_{\bar{i}} \bar{g}_{jk} - e\psi_{\bar{j}} \bar{g}_{ik}) \\ &= e^{-2\psi} (\psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} - e\psi_{\bar{i}} \bar{g}_{jk} - e\psi_{\bar{j}} \bar{g}_{ik}) \\ &= \psi_i (e^{-2\psi} \bar{g}_{jk}) + \psi_j (e^{-2\psi} \bar{g}_{ik}) - e\psi_{\bar{i}} (e^{-2\psi} \bar{g}_{jk}) - e\psi_{\bar{j}} (e^{-2\psi} \bar{g}_{ik}) \\ &= \psi_i \tilde{g}_{jk} + \psi_j \tilde{g}_{ik} - e\psi_{\bar{i}} \tilde{g}_{jk} - e\psi_{\bar{j}} \tilde{g}_{ik} \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\nabla_k \tilde{g}_{ij} = \psi_{(i} \tilde{g}_{j)k} - e\psi_{(\bar{i}} \tilde{g}_{\bar{j})k} \quad (4.27)$$

elde edilir.

Şimdi $\tilde{g}_{ij}$ tensörünün duali olan $\tilde{g}^{ij}$ tensörünü göz önüne alalım.

$$\tilde{g}^{i\alpha} \tilde{g}_{\alpha j} = \delta_j^i \quad (4.28)$$

olup $(\tilde{g}^{ij})$ tensörü konjügasyon işleminde verilen

$$\tilde{g}^{ij} = \tilde{g}^{ji} = -e\tilde{g}^{\bar{i}\bar{j}} , |\tilde{g}^{ij}| \neq 0 \quad (4.29)$$

eşitliklerini sağlayacaktır. (4.28) eşitliğinde her iki tarafta kovaryant türev alındığı takdirde

$$\nabla_k \tilde{g}^{i\alpha} \tilde{g}_{\alpha j} + \tilde{g}^{i\alpha} \nabla_k \tilde{g}_{\alpha j} = 0$$

veya buna denk olan

$$\nabla_k \tilde{g}^{ij} = -\nabla_k \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\alpha i} \tilde{g}^{\beta j} \quad (4.30)$$

sonucuna ulaşılır. (4.30) denkleminde (4.27) eşitliği kullanılacak olursa

$$\begin{aligned}
\nabla_k \tilde{g}^{ij} &= -(\psi_\alpha \tilde{g}_{\beta k} + \psi_\beta \tilde{g}_{\alpha k} - e\psi_{\bar{\alpha}} \tilde{g}_{\bar{\beta} k} - e\psi_{\bar{\beta}} \tilde{g}_{\bar{\alpha} k}) \tilde{g}^{i\alpha} \tilde{g}^{\beta j} \\
&= -\psi_\alpha \tilde{g}^{i\alpha} \delta_k^j - \psi_\beta \tilde{g}^{\beta j} \delta_k^i - e\psi_\alpha \tilde{g}^{i\bar{\alpha}} F_k^j - e\psi_\beta \tilde{g}^{j\bar{\beta}} F_k^i \\
&= -\psi_\alpha \tilde{g}^{i\alpha} \delta_k^j - \psi_\beta \tilde{g}^{\beta j} \delta_k^i + e\psi_\alpha \tilde{g}^{i\bar{\alpha}} \delta_k^{\bar{j}} + e\psi_\beta \tilde{g}^{j\bar{\beta}} \delta_k^{\bar{i}} \\
& \quad (\tilde{g}^{i\bar{\alpha}} = -\tilde{g}^{i\bar{\alpha}} \text{ ve } F_k^i = \delta_k^{\bar{i}} = \delta_k^i \text{ eşitlikleri kullanıldı})
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\lambda^i = -\psi_\alpha \tilde{g}^{i\alpha}$ olarak belirlenirse

$$\nabla_k \tilde{g}^{ij} = \lambda^{(i} \delta_k^{j)} - e\lambda^{(\bar{i}} \delta_k^{\bar{j})} \quad (4.31)$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte i ve j indisleri indirilirse

$$\begin{aligned}
\nabla_k (\tilde{g}^{ij} g_{\alpha i} g_{\beta j}) &= \lambda^i \delta_k^j g_{\alpha i} g_{\beta j} + \lambda^j \delta_k^i g_{\alpha i} g_{\beta j} - e\lambda^{\bar{i}} \delta_k^{\bar{j}} g_{\alpha i} g_{\beta j} - e\lambda^{\bar{j}} \delta_k^{\bar{i}} g_{\alpha i} g_{\beta j} \\
&= \lambda_\alpha g_{\beta k} + \lambda_\beta g_{\alpha k} - e\lambda_{\bar{\alpha}} g_{\bar{\beta} k} - e\lambda_{\bar{\beta}} g_{\bar{\alpha} k}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada

$$a_{\alpha\beta} = \tilde{g}^{ij} g_{\alpha i} g_{\beta j} \quad (4.32)$$

olarak belirlenir ve $\alpha \leftrightarrow i$, $\beta \leftrightarrow j$ indis değişikliği yapılırsa

$$\nabla_k a_{ij} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} - e\lambda_{\bar{i}} g_{\bar{j}k} - e\lambda_{\bar{j}} g_{\bar{i}k} \quad (4.33)$$

sonucuna ulaşılır.

Not: $-e\lambda^{\bar{i}} \delta_k^{\bar{j}} g_{\alpha i} g_{\beta j} = -e\lambda^{\bar{i}} g_{\alpha \bar{i}} \delta_k^{\bar{j}} g_{\bar{\beta} j}$

$$\begin{aligned}
&= (-e\lambda^t F_t^i g_{rs} F_\alpha^r F_i^s) (F_k^j g_{\bar{\beta} \gamma} F_j^\gamma) \\
&= -e\lambda^t \delta_t^s g_{rs} F_\alpha^r g_{\bar{\beta} \gamma} \delta_k^\gamma \\
&= -e\lambda^s g_{rs} F_\alpha^r g_{\bar{\beta} k} \\
&= -e\lambda_r F_\alpha^r g_{\bar{\beta} k} \\
&= -e\lambda_{\bar{\alpha}} g_{\bar{\beta} k}
\end{aligned}$$

şeklinde çeşitli konjüstasyon işlemleri kullanılarak elde edilir. ($g_{\alpha i} = -eg_{\bar{\alpha} i}$, $e^3 = e$, $F_t^i F_i^s = e\delta_t^s$)

(4.29) ve (4.32) eşitliklerini sağlayan (a_{ij}) tensörü için $a_{ij} = a_{ji} = -ea_{\bar{i}\bar{j}}$, $|a_{ij}| \neq 0$ eşitliğinin sağlandığı aşıkardır. Bu durumda aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Theorem 4.6.1: (Mikeš J., et al., 2015) (K_n, g, F) Kähler manifoldundan $(\bar{K}_n, \bar{g}, \bar{F})$ Kähler manifoldu üzerine bir holomorfik projektif dönüşüm tanımlanabilmesi için gerek ve yeter şart

- i. $\nabla_k a_{ij} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} - e\lambda_{\bar{i}} g_{\bar{j}k} - e\lambda_{\bar{j}} g_{\bar{i}k}$
- ii. $a_{ij} = a_{ji} = -ea_{\bar{i}\bar{j}}$, $|a_{ij}| \neq 0$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Burada $\lambda^i = -\tilde{g}^{i\alpha}\psi_\alpha$, $a_{ij} = \tilde{g}^{\alpha\beta}g_{\alpha i}g_{\beta j}$ ve ψ_α ise ψ , 1- formunun bileşenleridir.

Teorem 4.6.2: (Mikeš J., et al., 2015) Eğer (K_n, g, F) Kähler manifoldu üzerinde bir geodezik dönüşüm tanımlanabiliyor ise aynı uzay üzerinde bir holomorfik projektif dönüşüm tanımlanabilir.

İspat: (K_n, g, F) Kähler uzayında bir geodezik dönüşümün tanımlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$\nabla_k a_{ij} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}$$

eşitliğini sağlayan bir (a_{ij}) tensörü vardır. Burada $a_{ij} = \tilde{a}_{ij} - e\tilde{a}_{\bar{i}\bar{j}}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}\nabla_k a_{ij} &= \nabla_k (\tilde{a}_{ij} - \tilde{a}_{\bar{i}\bar{j}}) \\ &= \nabla_k \tilde{a}_{ij} - \nabla_k \tilde{a}_{\bar{i}\bar{j}} \\ &= \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} - e\lambda_{\bar{i}} g_{\bar{j}k} - e\lambda_{\bar{j}} g_{\bar{i}k}\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu da (4.33) eşitliğinin sağlanması, yani (K_n, g, F) Kähler manifoldu üzerinde bir holomorfik projektif dönüşümün tanımlanabilmesi demektir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.TARTIŞMA ve SONUÇ

Sunulan bu tezde ilk olarak Eliptik ve Hiperbolik Kähler manifoldlarında konjügasyon işlemi tanıtılarak bu işlemin özelliklerinden bahsedilmiştir.

Daha sonra holomorfik projektif eğri ve holomorfik projektif dönüşüm kavramlarından bahsedilmiş ve K_n Kähler manifoldundan $\bar{K}_n$ Kähler manifolduna tanımlanan holomorfik projektif dönüşümün karakterizasyonu yapılmıştır.

Ardından holomorfik projektif f dönüşümü altında Riemannian ve Ricci tensörleri incelenmiş ve holomorfik projektif eğrilik tensörünün bu dönüşüm altında invariant kaldığı görülmüştür.

Son olarak Kähler manifoldları arasında holomorfik projektif dönüşüm tanımlanabilmesi için gerek ve yeter şartlar ifade edilmiş ve Kähler manifoldu üzerinde bir geodezik dönüşüm tanımlanabiliyor ise aynı uzay üzerinde bir holomorfik projektif dönüşümün tanımlanabildiği gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

- Aminova, A. V. and Kalinin, D. A., (1995). *Quantization of Kähler manifolds admitting H-projective mappings*. Tensor, New Ser. 56(1), 1-11.
- Aminova, A. V. and Kalinin, D. A., (1999). *Lie algebras of H-projective motions of Kähler manifolds of constant holomorphic sectional curvature*. Math. Notes, 65(6), 679-683, Mat. Zametki, 65(6), 803-809.
- Berezovski, V. and Mikeš, J., (1988). *On the classification of almost geodesic mappings of affine connected spaces*. In Differential Geometry And Its Applications, Dubrovnik, Univ. Novi Sad, 41–48.
- Bishop, R. L. and Goldberg, S., (1968). *Tensör Analysis on Manifolds*. The Macmillan Company, New York, 19-135.
- Cartan, E., (1924). *Sur lesvarietes a connexion projective*. S. M. F. Bull, 52, 205–241.
- Eastwood, M. and Matveev, V., (2008). *Metric connections in projective differential geometry. In Symmetries and over determined systems of partial differential equations*. 144 of IMA Vol. Math. Appl., Springer, New York, 339–350.
- Haddad, M., (1993). *Holomorphically-projective mappings of T-quasisemisymmetric and generally symmetric Kählerian spaces*. DGA, Silesian Univ. Math. Publ., 1, 137-141.
- Kobayashi, S. and Nomizu, K., (1963). *Foundations of Differential Geometry*. Inter science Publishers, 1, 26-38.
- Levi-Civita, T., (1986). *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*. Ann. Mat. Milano, 24, 255–300.
- Mikeš, J., (1993). *Global geodesic mappings and their generalizations for compact Riemannian spaces*. Opava: Open Education and Sci., Silesian Univ. Math. Publ. (Opava), 143–149.
- Mikeš, J., (1996). *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces. J. Math. Sci. New York*, 78(3), 311-333.

- Mikeš, J., Vanzurova, A., and Hinterleitner, I., (2009). *Geodesic mappings and some generalizations*. Palacky Univ. Press, Olomouc.
- Mikeš J., et al., 2015. *Differential geometry of special mappings*., Palacky Univ. Press, Olomouc.
- Mikeš, J. and Hinterleitner, I., (2010). *On geodesic mappings of manifolds with affine connection*. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregy haziensis, 26, 343–347.
- Mikeš, J. and Berezovski, V., (1989). *Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces*. Amsterdam North-Holland. Collog. Math. Soc. J. Bolyai., Diff. Geom. Eger Hungary, 491-494.
- Mikeš, J. and Shiha, M., (2009). Vančurov' a A. *Invariant objects by holomorphically projective mappings of parabolically Kähler spaces*. J. Appl. Math., 2(1), 135-141.
- Otsuki, T. and Tashiro, Y., (1954). *On curves in Kaehlerian spaces*. Math. J. Okayama Univ., 4, 57-78
- Prvanović, M., (1971). *Holomorphically projective transformations in a locally product space*. Math. Balk. 1, 195-213.
- Radulovich, Z. and Mikeš, J., (1993). *Geodesic and holomorphically-projective mappings of conformally-Kählerian spaces*. Opava: Silesian Univ. Math. Publ., 1, 151-156.
- Sakaguchi, T., (1974). *On the holomorphically projective correspondence between Kählerian spaces preserving complex structure*. Hokkaido Math. J., 3(2), 203-212.
- Salimov, A. A., and Mağden, A., (2007). *Diferensiyel Geometri*. Aktif Yayınevi, İstanbul.
- Shiha, M., (1993). *On the theory of holomorphically-projective mappings of parabolically-Kählerian spaces*. DGA 1992, Math. Publ. 1, Silesian Univ. Opava, 157-160,

- Shiha, M. and Mikeš, J., (2006). *On holomorphically projective flat parabolically Kählerian spaces*. Contemporary Geom. and Related Topics. Cigoja Publ. Comp., 250, 467-474.
- Shiha, M., Juklov'a, L. and Mikeš, J., (2012). *Holomorphically projective mappings onto Riemannian tangent-product spaces*. J. Appl. Math. Bratislava, 5(3), 259-266.
- Sinyukov, N. S., (1979). *Geodesic mappings of Riemannian spaces*. Nauka, Moscow.
- Sinyukov, N. S., (1954). *On geodesic mappings of Riemannian manifolds onto symmetric spaces*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 98, 21-23.
- Sinyukov, N. S., (1966). *A contribution to the theory for geodesic mapping of Riemannian spaces*. Sov. Math., Dokl. 7, 1004-1006, Transl. from Dokl. Akad. Nauk SSSR, 169, 770-772, 1966, Corr., 7(6), v-vi.
- Sinyukova, E. N., (1982). *Geodesic mappings of certain special Riemannian spaces*. Math. Notes 30, 946-949; transl. from Mat. Zametki 30, 889-894.
- Sinyukova, E. N., (2009). *On geodesic definiteness in a whole of certain classes of Riemannian spaces*. Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., 6, 195-206.
- Skodov'a, M., Mikeš, J. and Pokorn'a, O., (2005). *On holomorphically projective mappings from equiaffine symmetric and recurrent spaces onto Kählerian spaces*. Rend. Circ. Matem. di Palermo. Ser. II, Suppl., 75, 309-316.
- Şahin, B., (2013). *Manifoldların diferensiyel geometrisi*. Nobel Yayıncılık, Ankara.
- Takeno, H. and Ikeda, M., (1953). *Theory of the spherically symmetric spaces-times. VII. Space-times with corresponding geodesics*. J. Sci. Hiroshima Univ. A17, 75-81.
- Vrančeanu, G., (1957). *Leçons de geometri différentielle*. Vol. I, II, Bucharest: Ed. Acad. Rep. Popul. Roumaine.
- Venzi, P., (1978). *On geodesic mapping in Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds*. Tensor, 32, 193-198.

- Vishnevskij, V.V., (2002). *Integrable affinor structures and their plural interpretations*. J. Math. Sci., New York, 108(2), 151-187. Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem Mat. Prilozh., Temat. Obz. 73, 5-64.
- Vishnevskij, V. V., Shirokov, A. P. and Shurygin, V. V., (1985). *Spaces over algebras*. Kazan Univ. Pres.
- Weyl, H., (1921). *Zur Infinitesimal geometrie Einordnung der projectiven und der konformen Auffassung*. Göttinger Nachrichten, 99-112.
- Yano, K., (1955). *Lie Derivatives and its Applications*. North-Holland publishing co., Amsterdam.
- Yano, K., (1965). *Differential geometry of complex and almost complex spaces*. Pergamon Press.