T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DAĞILIMLAR İÇİN ALFA KUVVET DÖNÜŞÜMÜNÜN İNCELENMESİ

Fatma ARSLANOĞLU

Yüksek Lisans Tezi

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Yöneylem Araştırması Bilim Dalı

HAZİRAN 2024

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İstatistik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

BAZI DAĞILIMLAR İÇİN ALFA KUVVET DÖNÜŞÜMÜNÜN İNCELENMESİ

Tez Yazarı
Fatma ARSLANOĞLU

Danışman
Doç. Dr. Ayşe BUĞATEKİN

HAZİRAN 2024
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İstatistik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Bazı Dağılımlar İçin Alfa Kuvvet Dönüşümünün İncelenmesi
Yazarı:	Fatma ARSLANOĞLU
İlk Teslim Tarihi:	16.05.2024
Savunma Tarihi:	25.06.2024

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

		İmza
Danışman:	Doç. Dr. Ayşe BUĞATEKİN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Mehmet GÜRCAN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Ayşe METİN KARAKAŞ Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ..../......../20....... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım "Bazı Dağılımlar İçin Alfa Kuvvet Dönüşümünün İncelenmesi " Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

25.06.2024

Fatma ARSLANOĞLU

ÖNSÖZ

Tez konumun belirlenmesinde ve hazırlanma sürecinde benden ilgi ve bilgilerini esirgemeyen ve en zor zamanımda bana destek olup motivasyonumu yükselten yol gösteren sayın Doç. Dr. Ayşe BUĞATEKİN' e, Prof. Dr. Mehmet GÜRCAN' a, İstatistik bölüm başkanı Prof. Dr. Sinan ÇALIK ve bölümün diğer bütün hocalarına katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Hayatımın her anında yanımda bulunan ve benden desteklerini esirgemeyen çocuklarım Azra, Muaz ve Rale' ye ve eşim Haluk ARSLANOĞLU'na, babam İbrahim KÖSE'ye, annem Havva KÖSE'ye ve bu süreçte yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Fatma ARSLANOĞLU
ELAZIĞ, 2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bazı Dağılımlar İçin Alfa Kuvvet Dönüşümünün İncelenmesi

Fatma ARSLANOĞLU

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Haziran 2024, Sayfa: ix + 23

İstatistikte dağılımlar verilerin karakteristik özellikleri hakkında bilgi verdiği için önemli bir yere sahiptir. Ancak çoğu durumda bilinen istatistiksel dağılımlar gerçek verilere uygulamada yetersiz kalırlar. Bu yetersizliği ortadan kaldırmak için yeni istatistiksel dağılımlar türetilmiştir Bu yeni dağılım yöntemlerinden biri de alfa kuvvet dönüşüm yöntemidir. Bununla ilgili literatüre de birçok çalışma yapılmış ve bir çok yeni dağılım modelleri türetilmiştir.

Bu tez çalışmasında alfa kuvvet dönüştürülmüş dağılımların önemli görülenlerinden bir kaçına yer verilmiştir. Bu dağılım modellerin matematiksel ve istatistiksel özellikleri ele alınmıştır. Bu dağılımların sıra istatistikleri tanıtılmış ve parametre tahminlerine yer verilmiştir.

Dağılımların veri modelleme amacıyla daha esnek yapıda olması gerekliliği istatistikte bilinen bir problemdir. Bu gereklilik, bilinen dağılım ailelerinin genişletilmesiyle, yeni olasılık dağılım ailelerinin elde edilmesi üzerine yapılan çalışmaları arttırmıştır. Bu seminer çalışmasında, öncelikle istatistikte yaygın olarak kullanılan dağılımlardan bazıları verilecek daha sonra son yıllarda (2017 yılından itibaren) istatistik alanında uygulanmaya başlanan alfa kuvvet (kuvvet) dönüşümü tanıtılacaktır. Alfa kuvvet dönüşümü uygulanmış dağılımlar için olasılık fonksiyonları incelenecek ve bu olasılık fonksiyonlarını kullanarak istatistiksel sonuç çıkarımı yapılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Dağılım fonksiyonu, En çok olabilirlik metodu, Alfa Kuvvet dönüşümü, Parametre tahmini, Momentler.

ABSTRACT

Examination of Alfa Power Transformed For Some Distributions

Fatma ARSLANOĞLU

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

June 2024,   Pages: ix + 23

In statistics, distributions have an important place as they provide information about the characteristic features of the data. However, in most cases, known statistical distributions are insufficient in application to real data. New statistical distributions have been derived to eliminate this inadequacy. One of these new distribution methods is the alpha power transformation method. There is literature on this. Many studies have been done and many new distribution models have been derived. In this thesis, some of the most important alpha power transformed distributions are included. The mathematical and statistical properties of these distribution models are discussed. The order statistics of these distributions are introduced and parameter estimates are included.

It is a well-known problem in statistics that distributions need to be more flexible for data modeling purposes. This requirement has increased the work on obtaining new probability distribution families by expanding the known distribution families. In this seminar, first of all, some of the distributions that are widely used in statistics will be given and then the alpha power (power) transformation, which has been applied in the field of statistics in recent years (since 2017), will be introduced. Probability functions for distributions with alpha power transform applied will be examined and statistical results will be made by using these probability functions.

Keywords: Distribution function, Maximum likelihood method, Alpha power transform, Parameter estimation, Moments

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

KISALTMALAR

APT **:** Alfa kuvvet dönüşüm
APW **:** Alfa Kuvvet Weibull Dağılımı
APR **:** Alfa Kuvvet Dönüştürülmüş Rayleigh Dağılımı
AGBXII **:** Alfa Kuvvet Dönüştürülmüş Burr-XII Dağılımı
APTL **:** Alfa Kuvvet Lindley Dağılımı

1. GİRİŞ

Olasılık dağılımları olayların olasılığının tanımlanması için kullanılan metotlardır. Teorik ve uygulamalı alanlarda kullanılan bilinen dağılımlar bazen yeterli olmayabilir. Böylece verilenlere en uygun olasılık dağılımlarını belirlemek için yani, yeni olasılık dağılımları elde etmek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.

Alfa kuvvet dönüşümü gerçek yaşam verilerini modellemek için dağılımları daha zengin ve esnek hale getiren yöntemlerden bir tanesidir. Bu tezde 2017'den itibaren yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Bu konuda yapılan çalışmaların hepsi literatürde önemli bir yere sahip olmakla birlikte bu tezde hepsine birden yer verilemeyeceğinden, konunun anlaşılması açısından faydalı olacağı düşünülen birkaç yeni dağılım incelenecek ve bu yeni dağılım modellerinin matematiksel ve istatistiksel özellikleri üzerinde durulacaktır. Alfa kuvvet dönüşüm yöntemi mevcut bir dağılım ailesini temel dağılım alarak, temel dağılıma yeni ek bir parametre ekleyerek temel dağılımdan daha esnek yeni bir dağılım türeten bir yöntemdir. Yöntem ilk olarak, Mahdavi ve Kundu [1] tarafından yapılan çalışma ile ortaya konmuştur. Metot sürekli dağılım ailelerine başarılı bir şekilde uygulanabilirliğe sahiptir. Özellikle üstel dağılım ailelerine yeni bir parametre ekleyerek, yeni dağılımın temel dağılıma göre daha esnek olmasını sağlamaktadır [1]. Yöntem her ne kadar yeni de olsa, literatürde alfa kuvvet dönüşüm yöntemi kullanılarak türetilmiş dağılımlar mevcuttur. Hassan vd. [2] alfa kuvvet dönüşüm metodu ile Lindley dağılımını tanıtmışlar ve istatistiksel çıkarımlarını incelemişlerdir. Nassar vd. [3] alfa kuvvet dönüşüm metodu ile Weibull dağılımını ele almışlar ve istatistiksel çıkarımlarını incelemişlerdir. Dey vd. [4] alfa kuvvet dönüşüm metodunu Lindley dağılımı kullanarak ele almışlar ve deprem verileri üzerinde bir uygulama ile karakteristik yapısını incelenmişlerdir.

Dey vd. [4] alfa kuvvet dönüşüm metodunu ters Lindley dağılımı kullanarak ele almışlar ve bir uygulama ile çıkarımları incelemişlerdir. Hassan vd. [5] alfa kuvvet dönüştürülmüş genişletilmiş üstel dağılımı tanıtmışlar ve çıkarımlarını incelemişlerdir. Biçer [6] ,alfa kuvvet dönüşüm metodu ile Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını ele alarak istatistiksel sonuç ve çıkarımlarda bulunmuştur. Ünal vd. [7] alfa kuvvet dönüşüm metodu ile Ters Üstel dağılımını ele almışlar ve bir uygulama ile esnekliğini ve önemini incelemişlerdir. Nassar vd. [8], Mashall-Olkin alfa kuvvet dönüşüm ailesini tanıtmışlardır. Bu yeni dağılımın Marshall-Olkin genelleştirilmiş Lindley, Marshall-Olkin genelleştirilmiş üstel, Marshall-Olkin ile karşılaştırıldığında daha uygun olduğunu göstermişlerdir. Efe-Eyefia vd.[9], Weibull Alfa kuvvet ters Üstel dağılımının teorik analizini ele almışlar ve bu dağılımın özelliklerini incelemişlerdir.

Alfa kuvvet dönüşümü (alpha power transformation), günlük yaşamdaki verileri modellemek için dağılımları daha zengin ve esnek hale getiren yöntemlerden biridir. Bu yöntem, Mahdavi ve Kundu [1] tarafından temel (baseline) dağılıma çarpıklık parametresi dâhil edilerek önerilmiştir. Ayrıca Mahdavi ve Kundu [1] tarafından özel bir durum olarak alfa kuvvet dönüşümlü üstel dağılımın özelliklerini incelemişlerdir. Literatürde bu alfa kuvvet dönüşümü ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Abdel Rahman ve El-Bassiouny [10] alfa kuvvet üstel Weibull dağılımını; Ünal vd. [7] alfa kuvvet ters üstel dağılımını; Dey vd. [11] alfa kuvvet dönüştürülmüş Lindley dağılımını, Ramadan ve Magdy [12] alfa kuvvet ters Weibull dağılımını, Ahmad [13] genişletilmiş alfa kuvvet dönüştürülmüş Weibull dağılımını, Dey vd. [4] alfa kuvvet dönüştürülmüş ters Lindley dağılımını, Nasiru vd. [14] alfa kuvvet dönüştürülmüş Frechet dağılımını, Hassan vd. [2] ise alfa kuvvet dönüştürülmüş Lindley dağılımını incelemişlerdir.

2. TANIMLAR

Tanım 2.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Değeri *f(x)* ile tanımlı olan bir fonksiyon,

$$f(\mathrm{x}) \geq 0, -\infty < x < \infty \tag{1.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{x})dx = 1 \tag{2.2}$$

şartlarını sağlıyor ise *f(x)*'e *X* sürekli tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir [15].

Tanım 2.2. Olasılık Fonksiyonu

X değişkeni sonlu bir sayıdaki $x_1, x_2, \ldots x_n$değerlerinin $f(x_i) = P(X = x_i), i = 1,2, \ldots, N$ olasılığı ile alınabilen kesikli rastgele değişkenler olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan *f(x)* fonksiyonuna *X*' in olasılık fonksiyonu denilir [16].

$F[x] \geq 0$ tüm x ler için

$$\sum_{t=1}^{N} f(x_t) = 1 \tag{2.3}$$

Tanım 2.3. Kümülatif Dağılım Fonksiyonu

$(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve *X* tesadüfi değişkeni bu uzayda tanımlı olsun. $\forall x \in R$ için *X* tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir [15].

$$F(x) = P(X \leq x),\ 0 \leq F(x) \leq 1. \tag{2.4}$$

Tanım 2.4. Üstel Dağılım

Üstel dağılım güvenilirlik analizinde, yaşam analizinde ve bekleme hattı teorisinde yaygın olarak kullanılır. Bu sebeple olasılık teorisinde büyük bir öneme sahiptir. Negatif değerler almayan sürekli *X* rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(\ x) = f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \mathrm{x}}, & x > 0 \\ 0, & d.d \end{cases} \tag{2.5}$$

ile tanımlansın. Bu durumda *X*; λ > 0 parametresi ile üstel dağılıma sahiptir. λ parametresine sahip üstel dağılımın beklenen değer ve varyansı sırayla,

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \tag{2.6}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2.7}$$

gösterilir [17].

Tanım 2.5. Poisson Dağılımı

X, 0,1,2, … , değerlerini alabilen Poisson rastgele değişken olmak üzere, *X*' in olasılık fonksiyonu,

$$F(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2,\ldots., \lambda > 0 \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır. Poisson dağılımının beklenen değeri;

$$E(X) = \lambda \quad (2.9)$$

varyansı,

$$Var(X) = \lambda \text{ dır } [16]. \quad (2.10)$$

Tanım 2.6. Pareto Dağılımı

X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta\alpha^\beta}{X^{\beta+1}}, & a \leq x \leq \infty, \quad \beta > 0 \\ 0, & d.d \end{cases} \quad (2.11)$$

olarak verilmiş ise, *X* tesadüfi değişkenine pareto dağılımına sahiptir denir. Pareto dağılımının beklenen değer ve varyansı sırasıyla

$$E(X) = \frac{\beta\alpha}{(\beta-1)'}, \beta > 1 \quad (2.12)$$

$$Var(X) = \frac{\beta\alpha^2}{(\beta-1)^2(\beta-2)'}, \beta > 2 \quad (2.13)$$

şeklindedir [17].

Tanım 2.7. İki Parametreli Weibull Dağılımı

X Weibull (*k*,) değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$F(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^k}, & x > 0 \\ 0, & d.d \end{cases} \quad (2.14)$$

gibidir.

Weibull dağılımının beklenen değer ve varyansı,

$$E(X) = \beta r(1 + \frac{1}{k}) \quad (2.15)$$

$$Var(x) = \beta^2 \left[r\left(1 + \frac{2}{k}\right) - (1 + \frac{1}{k})^2 \right] \tag{2.16}$$

şeklindedir. [17].

Tanım 2.8. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

Parametreleri tahmin etmek için önemli metot olan en çok olabilirlik metodu, 1922 yılında genetikçi ve aynı zamanda istatistikçi olan Ronal A. Fisher tarafından bulunmuştur. Bu metot geniş boyutlu verilerde daha iyi sonuç elde etmemizi sağlamakta ve bu verilerin istatistiksel modellere uygunluğunu ölçmede kullanılan en uygun metotlardandır. En çok olabilirlik yöntemiyle β̓ nın değerinin gerçekte gözlemlenen değerlerden maksimum olasılığa sahip değer olmasını ister [18].

$X_1, X_{2,.........,}X_n; f(x \backslash \beta)$ dağılımından alınan örneklem ve bu örneklemin olasılık fonksiyonu

$f\left(x_{1,..........}x_{2,}\backslash \beta\right) = f(x_1 \backslash \beta) \ldots \ldots f(x_n \backslash \beta)$ olmak üzere

$L(\beta; x_1, x_2, \ldots..x_n) = f(x_{1,}x_{2,......,}x_n; \beta) = \mathrm{L}(\beta)$

$= \Pi_{i=1}^{n} f(x_i; \beta)$

biçiminde tanımlanan *L(β)* fonksiyonuna olabilirlik fonksiyonu denilmektedir. Buradaki fonksiyonu maksimum yapan β değerine β̓ nın en çok olabilirlik tahmini denir.

Genellikle, olabilirlik fonksiyonunu maksimize etmek yerine, fonksiyonun logaritması (log-olabilirlik) maksimize edilir ve bu fonksiyon,

$$l(\beta) = \log(\mathrm{L}(\beta \backslash X_{1,...............}X_n)) \tag{2.17}$$

elde edilir [19].

Tanım 2.9. Burr XII. Dağılımı

İki parametreli Burr-XII nın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla aşağıda tanımlandığı gibidir.

$$f_{BXII}(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\beta-1}(1 + x^{\beta})^{-(\alpha+1)}, x > 0\text{için} \tag{2.18}$$

ve

$$F_{BXII}(x; \alpha, \beta) = 1 - \left(1 + x^{\beta}\right)^{-\alpha}, x > 0 \quad \text{için} \tag{2.19}$$

biçimindedir. Burada α > 0 ve β > 0 şekil parametreleridir [20].

Tanım 2.10. Rayleigh Dağılımı

X rasgele değişkeni negatif değerler almayan mutlak sürekli bir rasgele değişken olmak üzere; X rasgele değişkeni için

$$F(x,\lambda) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} \qquad , \ x > 0 \ , \ \lambda>0 \tag{2.20}$$

ve

$$f(x,\lambda) = \frac{x}{\lambda^2} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} \ , \qquad x>0 \ , \ \lambda>0 \tag{2.21}$$

biçiminde ise X rasgele değişkenine Rayleigh dağılımına sahiptir denir [21].

Tanım 2.11. Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenler olmak üzere bu tesadüfi değişkenler büyüklük sırasına göre dizildiğinde elde edilen $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \cdots \le X_{n:n}$ tesadüfi değişkenlerine *sıra istatistikleri* denir. Buna göre $X_{r:n}$ *n* boyutlu örneklemin *r* inci sıra istatistiği olmak üzere 1 inci ve *r i*nci sıra istatistikleri sırasıyla,

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{2.22}$$

$$X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{2.23}$$

olur.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ tesadüfi değişkenleri olasılık yoğunluk fonksiyonları *f(x)* ve dağılım fonksiyonları *F(X)* olan mutlak sürekli bir ana kütleden çekilen tesadüfi örneklem olsun. Buna göre $X_{r:n}$ sıra istatistiğinin olasılık fonksiyonu

$$f_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(X)]^{r-1} [1 - F(X)]^{n-r} f(x) \qquad , \quad -\infty < x < \infty \tag{2.24}$$

şeklinde yazılabilir [22].

Tanım 2.12. Stokastik Bağımsızlık

$f_1(x_1)$ ve $f_2(x_2)$ sırasıyla X_1 ve X_2'nin marjinal yoğunluk fonksiyonları ve f de X_1 ve X_2 'nin ortak yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, X_1 ve X_2 tesadüfi değişkenleri için $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ şartı sağlanıyor ise stokastik olarak bağımsızdır denir [23].

3. ALFA KUVVET DÖNÜŞÜMÜ

Alfa kuvvet dönüşüm yöntemi 2017' de Mahdavi ve Kundu tarafından geliştirilmiş çok yeni bir yöntem olmakla birlikte literatürde büyük bir öneme sahip olmuştur. 2017'den itibaren araştırmacılar tarafından bu konu ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Bu tezde 2017'den itibaren yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Bu konuda yapılan çalışmaların hepsi literatürde önemli bir yere sahip olmakla birlikte bu tezde hepsine birden yer verilemeyeceğinden konunun anlaşılması açısından faydalı olacağı düşünülen birkaç yeni dağılım incelenecek ve bu yeni dağılım modellerinin matematiksel ve istatistiksel özellikleri üzerinde durulacaktır.

Bu kısımda, Mahdavi ve Kundu [1] tarafından tanıtılan alfa kuvvet dönüşüm (APT) yöntemi açıklanmaktadır. Varsayalım X, $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip mutlak sürekli bir rasgele değişken olsun. $F(x)$ temel dağılım fonksiyonunu göz önünde bulundurarak, APT dağılımının dağılım fonksiyon

$$F_{APT}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{F(x)}-1}{\alpha-1} & ,\alpha>0 \;\; ,\alpha \neq 1 \\ \mathrm{F(x)} & ,\alpha = 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

biçiminde verilir. (3.1) eşitliği ile verilen $F_{APT}(x)$ fonksiyonu dağılım fonksiyonu olma özelliklerini taşıyan bir fonksiyondur. Eğer temel dağılımın dağılım fonksiyonu $F(x)$ 'e karşılık gelen olasılık yoğunluk fonksiyonu olan *f(x)* sürekli bir fonksiyon ise, $F_{APT}(x)$ 'e karşılık gelen $f_{APT}(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu da sürekli bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olur ve

$$f_{APT}(x) = \begin{cases} \frac{log\alpha\, f(x)\alpha^{F(x)}}{\alpha-1} & \alpha>0 \;\; ,\alpha \neq 1 \\ f(x) & \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

olarak verilir [1,7,8,24]. Aşikâr olarak $\alpha \neq 1$ iken; $f_{APT}(x)$, $f(x)$' in ağırlıklı bir fonksiyonu gibidir.

$$w(x) = \alpha^{F(x)} \tag{3.3}$$

bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere; $f_{APT}(x)$

$$f_{APT}(x) = \frac{f(x)w(x;\alpha)}{c} \tag{3.4}$$

biçiminde yazılır. Eşitlik (3.4) de verilen c sabiti ağırlıklandırılmış fonksiyonun beklenen değeri, yani $c = E(w(x))$' dir. Bu durumda bu ağırlaştırılmış fonksiyon $\alpha > 1$ durumuna ve $\alpha < 1$ durumuna bağlı olarak azalan veya artan olabilir. Temel dağılımın dağılım fonksiyonu $F(x)$ göz önünde bulundurularak APT yöntemi ile türetilen dağılımın yaşam fonksiyonu (Survival Function) $S_{APT}(x)$,

$$S_{APT}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(1-\alpha^{F(x)-1}\right) & ,\alpha>0\ ,\alpha \neq 1 \\ 1-\mathrm{F(x)} & ,\alpha = 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

Biçiminde ve bozulma oranı fonksiyonu (Hazard Rate Function- HRF) $H_{APT}(x)$,

$$H_{APT}(x) = \begin{cases} log\alpha f(x) \frac{\alpha^{F(x)-1}}{1-\alpha^{F(x)-1}} & \alpha>0\ ,\alpha \neq 1 \\ 1-F(x) & ,\alpha = 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

biçiminde elde edilir. y_p ile $F_{\mathrm{APT}}(\mathrm{x})'$ in p. çeyrekliği gösterilmek üzere; α≠1 için dönüştürülmüş dağılımın p. yüzdeliği

$$y_p = F^{-1}\left(\frac{\log(1+(\alpha-1)p}{log\alpha}\right) \tag{3.7}$$

biçiminde elde edilir. Burada $\mathrm{F}^{-1}(.)$ temel dağılımın dağılım fonksiyonunun tersini ifade etmektedir. Eğer x_p, ile temel dağılımın p. yüzdeliği gösterilirse, eşitlik (3.7) göz önünde bulundurulmasıyla α≠1 için

$$y_p \leq x_p\ için \frac{\log(1+(\alpha-1)p)}{log\alpha} \leq p \tag{3.8}$$

yazılabilir.

2017'den bu yana bu konuda çok fazla çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların hepsine birden yer verilemeyeceğinden konunun anlaşılması açısından faydalı olacağını düşündüğümüz birkaç dağılım ele alınacaktır.

3.1. Alfa Kuvvet Weibull Dağılımı (APW):

Weibull dağılımı, güvenirlik teorisinde çok yaygın kullanılan bir dağılımdır. Genellikle biyolojik, tıbbi ve hidrolojik veri setlerini analiz etmek için kullanılır. Fakat bazı uygulamalar için kabul edilebilir bir uyum sağlamaz. Bu yüzden çeşitli veri türlerini modellemek için weibull dağılımının çeşitli genellemeleri ve uzantıları geliştirilmiştir. Buna örnek verilecek olursa Nassar ve arkadaşları [3] weibull dağılımına alfa kuvvet dönüşümü uygulayarak APW dağılımı adını verdikleri yeni bir dağılım türetmişlerdir.

$\varphi = (\alpha, \lambda, \beta)^T$ alalım. *X*, üç parametreli APW dağılımına sahip bir tesadüfi değişken olmak üzere, *X*' in dağılım fonksiyonu

$$F_{APW}(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{1-e^{-\lambda x^{\beta}}}\right), & \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ 1-e^{-\lambda x^{\beta}} & , \quad \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{APW}(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{\log\alpha}{\alpha-1}\lambda\beta\alpha^{1-e^{-\lambda x^{\beta}}}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ \lambda\beta x^{\beta-1}e^{-\lambda x^{\beta}}, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

şeklinde elde edilmiştir.

3.1.1. APW Dağılımının Temel Özellikleri

APW dağılımının yaşam fonksiyonu ve hazard fonksiyonu $x > 0$ olmak üzere sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$S_{APW}(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(1-\alpha^{-e^{-\lambda x^{\beta}}}\right), & \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ 1-e^{-\lambda x^{\beta}} & , \quad if \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$h_{APW}(x,\varphi) = \begin{cases} \log(\alpha)\,\lambda\beta x^{\beta-1}e^{-\lambda x^{\beta}}(\alpha^{e^{-\lambda x^{\beta}}}-1)^{-1}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ \lambda\beta x^{\beta-1} & , \quad \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.12}$$

APW dağılımının r. momenti ve moment çıkaran fonksiyonu da tanımdan yola çıkarak hesaplanabilir.

$$\mu_r' = E(X^r) = \frac{\alpha\Gamma(r/\beta+1)}{(1-\alpha)\lambda^{r/\beta}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\log\alpha)^k}{k!k^{r/\beta}} \tag{3.13}$$

ve moment çıkaran fonksiyonu

$$M_x(t) = \frac{\alpha\log\alpha}{(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\log\alpha)^k t^j\Gamma(j/\beta+1)}{(k+1)!j!(k+1)^{j/\beta}\lambda^{j/p}} \tag{3.14}$$

olarak hesaplanabilir.

3.1.2. APW Dağılımının Parametrelerinin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

$x_1, x_2, \dots x_n$ APW dağılımına sahip tesadüfi örnekler olur. Buna göre olabilirlik fonksiyonunun logaritması

$$l = n\log\left(\frac{\log\alpha}{\alpha-1}\right) + n\log(\alpha\beta\lambda) + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i \log\alpha\sum_{i=1}^{n}e^{-\lambda x_i^{\beta}} - \lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta} \tag{3.15}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece *α, λ ve β'nın* parametre tahminleri

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \frac{n(\alpha-1-\alpha\log\alpha)}{\alpha(\alpha-1)\log\alpha} - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda x_i^{\beta}} = 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + \log\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} e^{-\lambda x_i^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} = 0 \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i + \lambda \log\alpha \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda x_i^{\beta}} x_i^{\beta} \log x_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \log x_i = 0 \tag{3.18}$$

şeklinde bulunur [3].

3.1.3. APW Dağılımının Sıra İstatistiği

$X_1, X_2, \dots., X_n$ n boyutlu tesadüfi değişkenler olsun. $X_{i:n}$ *i*. sıra istatistiği olmak üzere $X_{i:n}$'nin pdf'si

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F(x)^{i-1} f(x)(1-F(x))^{n-i} \tag{3.19}$$

olarak yazılır. Bu tanıma göre 3 parametreli weibull dağılımının *i*. sıra istatistiğinin pdf' si

$$f_{i:n}(x) = \frac{\alpha^{n-i}(-1)^{i-1}}{B(i,n-i+1)(\alpha-1)^{n-1}} f(x)(1-\alpha^{1-e^{-\lambda x^{\beta}}})^{i-1}(1-\alpha^{-e^{-\lambda x^{\beta}}})^{n-i} \tag{3.20}$$

olarak yazılır. Burada $B(a,b)$ beta fonksiyonudur. Binom ifadesini kullanarak $f_{i:n}(x)$,

$$f_{i:n}(x) = \frac{\lambda\beta\log\alpha}{B(i,n-i+1)(\alpha-1)^{n}} \sum_{k=0}^{n=i} \sum_{j=0}^{i=1} \binom{n-i}{k} \binom{i-1}{j} \frac{(-1)^{i+k+j-1}}{\alpha^{-(n+j-i+1)}} x^{\beta-1} \tag{3.21}$$

olarak da yazılabilir.

3.2. Alfa Kuvvet Dönüştürülmüş Rayleigh Dağılımı (APR):

Esasında Rayleigh dağılımı, Weibull dağılımının özel bir halidir. Weibull dağılımına sahip bir Y rasgele değişkeni için

$$F(y) = 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha}} \quad ,y>0 \ ,\lambda>0 \ , \ \alpha>0 \tag{3.22}$$

ve

$$f(y,\alpha.\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha}} \quad ,y>0 \ ,\lambda>0 \ , \ \alpha>0 \tag{3.23}$$

yazılabilir. Burada λ, dağılımın ölçek parametresi ve α ise şekil parametresidir. (3.22) ve (3.23) eşitliklerinde şekil parametresi α = 2 olarak seçilirse, dağılım Rayleigh dağılımına döner.

Rayleigh dağılımının tek parametresi olması ve parametre tahmininde karşılaşılan kolaylıktan dolayı, farklı araştırmalarda Weibull dağılımına karşı tercih sebebi olmuştur [25].

APT yönteminde temel dağılım olarak Rayleigh dağılımı seçildiğinde, Rayleigh dağılımına karşılık gelen APR dağılımının dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu, sırasıyla

$$F_{APR}(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{1-e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}}-1}{\alpha-1}, & \alpha>0, \alpha\neq 1, \quad \lambda>0, x>0\\ 1-e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}, & \alpha=1, \quad \lambda>0, x>0\end{cases} \tag{3.24}$$

$$f_{APR}(x)=\begin{cases}\dfrac{\log\alpha}{\alpha-1}\dfrac{x}{\lambda^2}e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}\alpha^{1-e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}}, & \alpha>0, \alpha\neq 1, \quad \lambda>0, x>0\\ \dfrac{x}{\lambda^2}e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}, & \alpha=1, \quad \lambda>0, x>0\end{cases} \tag{3.25}$$

biçiminde elde edilir.

3.2.1. APR Dağılımının Temel Özellikleri

APR dağılımının yaşam fonksiyonu $S_{\mathrm{APR}}(x)$ ve bozulma oranı fonksiyonu $H_{\mathrm{APR}}(x)$ eşitlik (3.26) ve eşitlik (3.27) 'de verildiği gibidir [21].

$$S_{APR}(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\log\alpha}{\alpha-1}\left(1-\alpha^{-e^{\frac{x^2}{2\lambda^2}}}\right), & \alpha>0, \alpha\neq 1, \lambda>0, x>0\\ e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}, & \alpha=1, \lambda>0, \quad x>0\end{cases} \tag{3.26}$$

$$H_{APR}(x)=\begin{cases}\dfrac{\frac{x}{\lambda^2}e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}\alpha^{e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}}\log\alpha}{1-\alpha^{-e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}}}, & \alpha>0, \alpha\neq 1, \lambda>0, x>0\\ \dfrac{x}{\lambda^2}, & \alpha=1, \lambda>0, \quad x>0\end{cases} \tag{3.27}$$

APR(α, λ) dağılımının moment çıkaran fonksiyonu t < λ için

$$M_{APR}(t)=\frac{\lambda\alpha}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\log\alpha)^{k+1}}{(k\lambda-t+\lambda)k!} \tag{3.28}$$

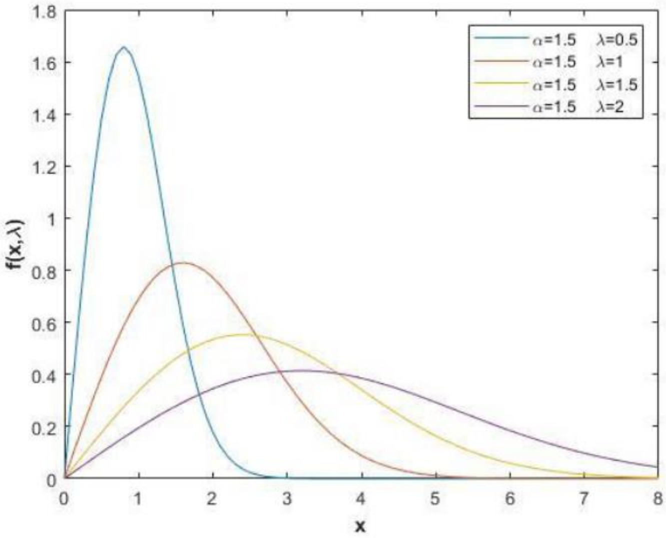
olarak elde edilir. X tesadüfi değişkeninin r. momenti

$$E(X^r)=\frac{\alpha r!}{\lambda r(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\log\alpha)^{k}}{k^r k!} \tag{3.29}$$

olarak elde edilir. Buna göre beklenen değeri (3.29) eşitliğinde r = 1 alınmasıyla

$$E(X)=\frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\log\alpha)^{k}}{kk!} \tag{3.30}$$

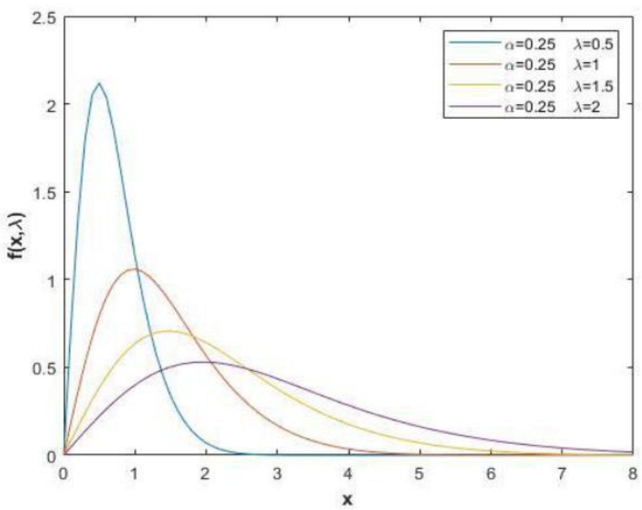
olarak bulunur. Şekil 3.1. de APR dağılımının α =1.5 ve farklı λ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği gösterilmiştir.



Şekil 3.1. APR dağılımının α =1.5 ve farklı λ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

3.2.2. APR Dağılımının Parametrelerinin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele örneklemi $APR(\alpha,\ \lambda)$ dağılımından alınmış rasgele bir örneklem olsun. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri için log-olabilirlik fonksiyonu eşitlik (3.25)' in göz önüne alınmasıyla



Şekil 3.2. APR dağılımının α =0.25 ve farklı λ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

$$\ln L(\alpha,\lambda) = nln(ln\alpha) - nln(\alpha-1) + ln\prod_{i=1}^{n} x_i^2 - 2nln\lambda - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{2\lambda^2} + ln\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(1-e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda^2}}\right)$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen log-olabilirlik fonksiyonunun α ve λ parametrelerine göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{\partial l(\alpha,\lambda)}{\partial\alpha} = \frac{n}{\alpha ln\alpha} - \frac{n}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\left(1-e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda^2}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial l(\alpha,\lambda)}{\partial\alpha} = \frac{2n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - ln\alpha\frac{1}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\left(e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda^2}}\right) = 0 \qquad (3.31)$$

olabilirlik denklemlerine ulaşılır. Böylece α ve λ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, (3.30) ve (3.31) eşitlikleri ile oluşturulan denklem sisteminin çözümünden elde edilir. Fakat bu denklemler doğrusal olmayan denklemler içerdiğinden analitik olarak çözülemez [21]. Şekil 3.2. de APR dağılımının α =0.25 ve farklı λ değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği gösterilmiştir.

3.3. Alfa Kuvvet Dönüştürülmüş Burr-XII Dağılımı (AGBXII)

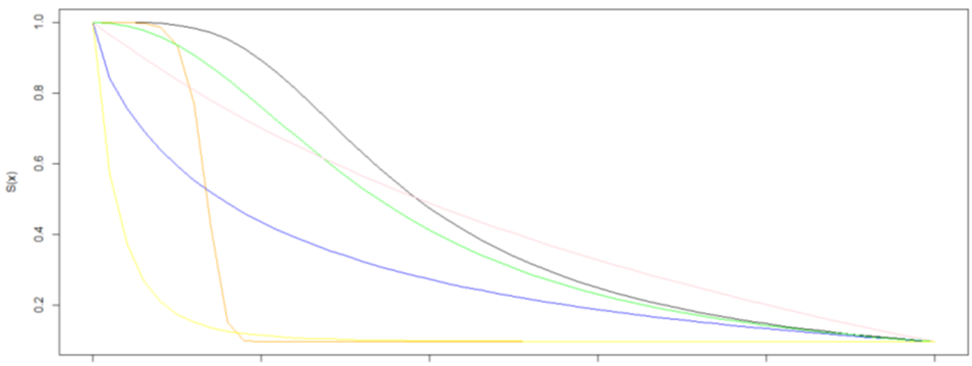
Alfa kuvvet yöntemi ile *Burr-XII* dağılımı kullanılarak alfa kuvvet *BurrXII* dağılımı *(AGBXII)* olarak adlandırılan yeni bir dağılım önerilmiştir. Şekil 3.3' de farklı parametre değerleri için *AGBXII* dağılımının dağılım fonksiyonunun grafiği görülmektedir

AGBXII dağılımın, dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla

$$F_{AGBXII}(x;\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha^{\left(1-\left(1+x^\beta\right)^{-\gamma}\right)} - 1}{\alpha - 1} \qquad \alpha,\beta,\gamma,x > 0\,,\alpha \neq 1$$

$$f_{AGBXII}(x;\alpha,\beta,\gamma) = \beta\gamma\frac{\log(\alpha)x^{(\beta-1)}}{(\alpha-1)(1+x^\beta)^{(1+\gamma)}}\alpha^{\left(1-\left(1+x^\beta\right)^{-\gamma}\right)}, \quad \alpha,\beta,\gamma,x > 0\,,\alpha \neq 1$$

gibidir.



Şekil 3.3. Farklı parametre değerleri için *AGBXII* dağılımının dağılım fonksiyonu

Şekil 3.3' de görüldüğü üzere çeşitli parametre değerleri için küçük değerlerde 0' a, büyük değerlerde ise 1'e yaklaşır. Dolayısıyla bu dağılım, dağılım fonksiyonu özelliği sağlar [21].

3.3.1. AGB Dağılımının Temel Özellikleri

Yaşam fonksiyonu $S(x) = 1 - F(x)$ olarak ifade edilir ve *AGBXII* dağılımının yaşam fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$S_{AGBXII}(x) = 1 - \frac{\alpha^{(1-(1+x^{\beta})^{-\gamma})-1}}{\alpha-1} = \frac{\alpha-\alpha^{\left(1-\left(1+x^{\beta}\right)^{-\gamma}\right)}}{\alpha-1} \qquad \alpha,\beta,\gamma,x>0, \alpha \neq 1 \tag{3.32}$$

Hazard fonksiyonu ise $h(x) = f(x)/s(x)$ şeklinde elde edilmekte olup *AGBXII* dağılımının hazard fonksiyonu,

$$h_{AGBXII}(x) = \beta\gamma \log\alpha \frac{x^{(\beta-1)}}{(1+x^{\beta})^{(1+\gamma)}} \frac{\alpha^{(1-1+x^{\beta})^{-\gamma})}}{(\alpha-\alpha^{(1-(1+x^{\beta})^{-\gamma})})} \quad \alpha,\beta,\gamma,x>0 \;\; \alpha \neq 1 \tag{3.33}$$

3.3.2. AGB Dağılımının En Çok Olabilirlik Fonksiyonu

$X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_n$, Ω kümesinde değerler alan θ parametresine bağlı $f(x;\theta)$olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bağımsız tesadüfi değişkenleri olsun. Bu tesadüfi değişkenlerinin *n* değişkenli ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x_1;\theta) \ldots f(x_n;\theta)$ … ile verilsin. X_i' lerin değişmez olduğu düşülsün. Bu bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu θ'nın bir fonksiyonu olduğuna göre $L(\theta; x_1 x_2 \ldots x_n)$ biçiminde gösterilir. *L* fonksiyonuna olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k|\theta) \tag{3.34}$$

biçimindedir. "lnL" logaritması alınmış olabilirlik fonksiyonunun parametreye göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen olabilirlik denklemi,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \ln \mathrm{L}(\theta; x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \tag{3.35}$$

olur [26]. Buradan *AGBXII* dağılımı için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta) = \frac{(\beta\gamma \ln(\alpha))^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{(\beta-1)} \alpha^{\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\left(1+x_i^{\beta}\right)^{\gamma}}\right)}}{(\alpha-1)^n \prod_{i=1}^{n}\left(1+x_i^{\beta}\right)^{(1+\gamma)}} \tag{3.36}$$

olur.

$$lnL(\theta)nln(\beta\gamma \ln(\alpha)) + (\beta - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) + \ln(\alpha)\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{\left(1+x_i^{\beta}\right)^{\gamma}}\right) -$$

$$nln(\alpha - 1) - (1+\gamma)\sum_{i=1}^{n}\left(1 + x^{\beta}\right) \tag{3.37}$$

biçimindedir. Olabilirlik denklemi için $lnL(\theta)$ ifadesinin parametrelere göre 1 inci türevlerinin sıfıra eşitlenmiş hali aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dlnL(\theta)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha ln\alpha} - \frac{n}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{\left(1+x_i^{\beta}\right)^{\gamma}}\right) = 0 \tag{3.38}$$

$$\frac{dlnL(\theta)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - (\ln x)x^{\beta}\frac{n+ny}{x^{\beta+1}} + (\ln\alpha)\sum_{i=1}^{n}\gamma \ln(x_i)\frac{x_i^{\beta}}{\left(x_i^{\beta}\right)^{\gamma+1}} = 0 \tag{3.39}$$

$$\frac{dlnL(\theta)}{d\gamma}\frac{n}{\gamma} - nln\left(x^{\beta} + 1\right) + (lnl)\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln\left(x_i^{\beta}+1\right)}{\left(1+x_i^{\beta}\right)^{\gamma}} = 0 \tag{3.40}$$

Doğrusal olmayan denklemler içeren olabilirlik fonksiyonu nedeniyle *R* paket programında tahmini parametre değerleri hesaplanır.

3.3.3. AGB Dağılımının Sıra İstatistikleri

AGBXII dağılımı için r. sıralı istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{x_r}(x) = \frac{n!}{(r-n)!\,(n-r)!}\left[\beta\gamma\frac{\log(\alpha)}{(\alpha-1)}\quad\frac{x^{(\beta-1)}}{(1+x^{\beta})^{(1+\gamma)}}\quad\alpha^{\left(1-\frac{1}{(1+x^{\beta})^{\gamma}}\right.}\right]\left[\frac{\alpha^{(1-1+x^{\beta})^{-\gamma}} - 1}{\alpha - 1}\right]^{r-1}$$

$$\left[1 - \left[\frac{\alpha^{\left(1-\left(1+x^{\beta}\right)^{-\gamma}\right)}-1}{\alpha-1}\right]\right]^{n-r} \tag{3.41}$$

şeklinde yazılır. Bu eşitliğe göre 1 inci ($r = 1$) ve n inci ($r = n$) sıralı istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise sırasıyla,

$$f_{x_{1:n}}(x) = n\left[\beta\gamma\frac{\log(\alpha)}{(\alpha-1)}\frac{x^{(\beta-1)}}{(1+x^{\beta})}\alpha^{\left(1-\frac{1}{(1+x^{\beta})^{\gamma}}\right)}\right]\left[1 - \left[\frac{\alpha^{\left(1-(1+x^{\beta})^{-\gamma}\right)}-1}{\alpha-1}\right]\right]^{n-1} \tag{3.42}$$

$$f_{x_{n:n}}(x) = n\left[\beta\gamma\frac{\log(\alpha)}{(\alpha-1)}\frac{x^{(\beta-1)}}{(1+x^{\beta})^{(1+\gamma)}}\alpha^{\left(1-\frac{1}{(1+x^{\beta})^{\gamma}}\right)}\right]\left[\frac{\alpha^{(1-(1+x^{\beta})^{-\gamma}}-1}{\alpha-1}\right]^{n-1} \tag{3.43}$$

şeklinde yazılabilir.

3.4. Alfa Kuvvet Pareto Dağılımı(APP):

X rastgele değişkenin pdf' si şu şekildeyse APP dağılımına sahip olduğu söylenir [27].

$$f_{APP}(x) = \begin{cases} \frac{\beta \log \alpha}{\alpha - 1} \alpha^{1-x^{-\beta}} x^{-\beta-1} & \alpha \neq 1 \\ f(x) & \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.44}$$

APP dağılımının karşılık gelen birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$F_{APP}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{1-x^{-\beta}} - 1}{\alpha - 1} & \alpha \neq 1 \\ 1 - x^{-\beta} & \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.45}$$

3.4.1. APP Dağılımının Temel Özellikleri

Hayatta kalma (güvenilirlik) fonksiyonu ve tehlike oranı fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$S_{APP}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(1 - \alpha^{-x^{-\beta}}\right) & \alpha \neq 1 \\ x^{-\beta} & \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.46}$$

$$h_{APP}(x) = \begin{cases} \frac{\beta \log \alpha}{1 - \alpha^{-x^{-\beta}}} \alpha^{-x^{-\beta}} x^{-\beta-1} & \alpha \neq 1 \\ \frac{\beta}{x} & \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.47}$$

3.4.2. APP Dağılımının Momentleri

APP dağılımının moment üreten fonksiyonu şu şekilde verilmektedir:

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \int_1^{\infty} e^{tx} \frac{\beta \log \alpha}{\alpha - 1} \alpha^{1-x^{-\beta}} x^{-\beta-1} dx \tag{3.48}$$

x-β = z' yi ve aşağıdaki seri gösterimini değiştirerek $e^{tx} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r x^r}{r!}$

$$\alpha^{-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\log \alpha)^k}{k!} z^k, \tag{3.49}$$

kolayca doğrulanabilir.

$$M_x(t) = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\log \alpha)^{k+1}}{k!\, j!\, (k\beta - j + \beta)} \tag{3.50}$$

$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\log \alpha)^{k+1}}{k!} \left[\frac{1}{(k\beta + \beta - 1)}\right] \tag{3.51}$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\log\alpha)^{k+1}}{k!} \left[\frac{2.1}{(k\beta+\beta-2)}\right] \tag{3.52}$$

$$E(X^r) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\log\alpha)^{k+1}}{k!} \left[\frac{r!}{(k\beta+\beta-r)}\right] \tag{3.53}$$

3.4.3. APP Dağılımının En Çok Olabilirlik Fonksiyonu

$X_1, X_{2,} X_3, \dots, X_n$, olsun, APP' den rastgele bir örnekse (α, β) olabilirlik fonksiyonu şu şekildedir:

$$l(\alpha-\beta) = \beta^n (\frac{\log\alpha}{\alpha-1})^n \alpha^{n-\sum x_i^{-\beta}} \prod_{i-1}^{n} x_i^{-\beta-1} \tag{3.54}$$

logaritma alındığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\log l(\alpha,\beta) = n\log\beta + n\log\left(\frac{\log\alpha}{\alpha-1}\right) + \left(n - \sum x_i^{-\beta}\right)\log\alpha + (-\beta-1)\sum\log x_i$$

Yukarıdaki denklemin α ve β' ya göre türevi alınarak ve sıfıra eşitlendiğinde aşağıdaki iki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial \log l(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \frac{n(\alpha-1-\alpha\log\alpha)}{\alpha(\alpha-1)\log\alpha} + \frac{n-\sum x_i^{-\beta}}{\alpha} = 0 \tag{3.55}$$

$$\frac{\partial \log l(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \frac{n}{\beta} + \sum x_i^{-\beta} \log x_i \log\alpha - \sum\log x_i = 0 \tag{3.56}$$

3.4.4. APP Dağılımının Sıra İstatistikleri

$X_1, X_{2,} X_3, \dots, X_n$ olsun, APP dağılımına sahip *n* boyutunda tesadüfi bir değişken olsun. $Y_{i:n}$'nin, *i*. sıra istatistiği olarak tanımlansın. Buna göre APP dağılımının *i*. sıra olduğu pdf' si aşağıdaki gibidir.

$$f_{i:n}(y) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} fx(y)[Fx(y)]^{i-1}[1-Fx(y)]^{n-i} \tag{3.57}$$

(3.56)' daki APP dağılımının pdf ve cdf' sini değiştirerek *i*. pdf' sini elde ederiz. Buradan *i*. sıra istatistiği

$$f_{i:n}(y) = \frac{n!\beta\log\alpha}{(i-1)!(n-i)!(\alpha-1)} \alpha^{1-y^{-\beta}+n-i} y^{-\beta-1} (\alpha^{1-y^{-\beta}} - 1)^{i-1} (1-\alpha^{-y^{-\beta}})^{n-i} \tag{3.58}$$

olarak elde edilir.

i = 1 koyarak birinci dereceden istatistikleri şu şekilde elde ederiz:

$$f(y_1) = \frac{n\beta \log \alpha}{(\alpha-1)^n} \alpha^{n-y^{-\beta}} y^{-\beta-1} (1-\alpha^{-y^{-\beta}})^{n-1} \qquad (3.59)$$

i = n koyarak n'inci derece istatistiklerini elde ederiz:

$$\mathrm{f}(y_n) = \frac{n\beta \log \alpha}{(\alpha-1)^n} \alpha^{1-y^{-\beta}} y^{-\beta-1} (\alpha^{1-y^{-\beta}} - 1)^{n-1} \qquad (3.60)$$

3.5. Alfa Kuvvet Lidnley Dağılımı (APTL):

Tek parametreli Lindley dağılımı Lindley [11] tarafından diğer dağılımlara alternatif bir model olarak önerilmiştir [28]. Bu araştırmacılar Lindley dağılımının özelliklerini matematiksel işlemlerle ortaya koymuşlardır. Ayrıca sayısal bir uygulama ile Lindley dağılımının üstel dağılımından daha iyi bir model sağladığını göstermişlerdir. Lindley dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla

$$f_\theta(x) = \frac{\theta^2}{\theta+1}(1+x)e^{-\theta x} \qquad , x \geq 0 \qquad (3.61)$$

ve

$$F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{1+\theta+\theta x}{\theta+1}\right) e^{-\theta x} \ , x \geq 0, \qquad (3.62)$$

şeklindedir. Lindley dağılımı yaşam analizinde artan başarısızlık oranına sahiptir [29-32]. Alfa kuvvet dönüşümü gerçek yaşam verilerini modellemek için dağılımları daha zengin ve esnek hale getiren işlemlerden bir tanesidir. *X*, Alfa kuvvet dönüştürülmüş Lindley dağılımına (APTL) sahip bir tesadüfi değişken olsun. Buna göre APTL dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla

$$F_{APT,\theta}(x) = \begin{cases} \frac{\log \alpha f_\theta(x) \alpha^{F_\theta(x)}}{\alpha-1} & if\ \alpha > 0, \alpha \neq 1, \\ f_\theta(x) & if\ \alpha = 1. \end{cases}$$

ve

$$F_{APT,\theta}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{F_\theta(x)}-1}{\alpha-1} & if\ \alpha > 0, \alpha \neq 1, \\ F_\theta(x) & if\ \alpha = 1, \end{cases}$$

şeklindedir [11].

3.5.1. APTL Dağılımının Temel Özellikleri

X, APTL dağılımına sahip bir tesadüf değişken olmak üzere yaşam fonksiyonu

$$S_{APT}(x;\alpha,\theta)=\begin{cases}1-\frac{\alpha\left[1-\left(\frac{1+\theta+\theta x}{\theta+1}\right)\right]e^{-\theta x}-1}{\alpha-1}, & if\ x>0;\ \alpha,\theta>0,\alpha\neq 1\\ 1-\left[1-\left(\frac{1+\theta+\theta x}{\theta+1}\right)\right]e^{-\theta x} & if\ x>0;\ \alpha,\theta>0,\alpha=1\end{cases} \tag{3.63}$$

ve bozulma oranı fonksiyonu

$$h_{APT}(x;\alpha,\theta)=\begin{cases}\frac{\log\alpha\left(\frac{\theta^2}{\theta+1}\right)(1+x)e^{-\theta x}\alpha^{\left[1-\left(\frac{1+\theta+\theta x}{\theta+1}\right)\right]e^{-\theta x}}}{\alpha-\alpha^{\left[1-\left(\frac{1+\theta+\theta x}{\theta-1}\right)\right]e^{-\theta x}}} & if\ x>0;\ \alpha,\theta>0,\alpha\neq 1\\ \frac{\left(\frac{\theta^2}{\theta+1}\right)(1+x)e^{-\theta x}}{1-\left[1-\left(\frac{1+\theta+\theta x}{\theta+1}\right)\right]e^{-\theta x}} & if\ x>0;\ \alpha,\theta>0,\alpha=1\end{cases} \tag{3.64}$$

şeklinde tanımlanır.

X, APTL dağılımına sahip tesadüfi değişken ve X' in moment çıkaran fonksiyonu $M_x(t)=E(e^{tx})$ olmak üzere aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M(t)=\frac{\log\alpha}{\alpha-1}\left(\frac{\theta^2}{\theta+1}\right)K(\alpha,\theta,0,\theta-t)$$

3.5.2. APTL Dağılım Sıra İstatistikleri

Sıra istatistiğinin pdf ve cdf' sinin tanımından yola çıkarak APTL dağılımının r. sıra istatistiğinin pdf ve cdf 'si sırasıyla

$$f_Y(y)=\frac{\frac{\log\alpha}{(\alpha-1)}\left(\frac{\theta^2}{1+\theta}\right)n!}{(r-1)!(n-r)!}\sum_{u=0}^{n-r}(-1)^u\binom{n-r}{u}(1+y)e^{-\theta y}\alpha\left[1-\frac{1+\theta+\theta y}{1+\theta}\right]e^{-\theta y}[V(y)]^{r-1+u}$$

ve

$$F_Y(y)=\sum_{j=r}^{n}\sum_{u=0}^{n-j}\binom{n-j}{u}(-1)^u[V(y)]^{j+u}$$

olarak elde edilir. Burada V(.) [29-32]' deki gibidir.

3.5.3. APTL Dağılımının En Çok Olabilirlik Fonksiyonu

Klasik yaşam altında bir modelin parametrelerini tahmin etmek için mevcut birçok yöntem arasında en çok olabilirlik yöntemi en yaygın kullanılan prosedürdür. Burada APTL dağılımının bilinmeyen parametrelerinin en çok olabilirlik yöntem ile tahmin edilmesi ele alınmıştır.

$$\ell=\ell(\alpha,\theta)=n\{\log(\log\alpha)-\log(\alpha-1)+2\log\theta-\log(\theta+1)\}+\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i+\log\alpha\sum_{i=1}^{n}\left[1-\left(\frac{1+\theta+\theta x_i}{\theta+1}\right)\right]e^{-\theta x_i}$$

böylece en çok olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha \log \alpha} - \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{1 + \theta + \theta x_i}{\theta + 1}\right)\right] e^{-\theta x_i} \tag{3.65}$$

ve

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{\theta + 1} - \sum_{i=1}^{n} x_i + \log \alpha \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i e^{-\theta x_i}}{\theta + 1}\right] \left(\theta x_i - \frac{1}{\theta + 1}\right). \tag{3.66}$$

olarak elde edilir.

4. SONUÇ

Olasılık dağılımları olayların olasılığının tanımlanması için kullanılan metotlardır. Teorik ve uygulamalı alanlarda kullanılan, bilinen dağılımlar bazen yeterli olmayabilir. Böylece verilenlere en uygun olasılık dağılımlarını belirlemek için yani yeni olasılık dağılımları elde etmek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş dağılımlar, daha fazla parametre içerdiğinden, istatistikte yaygın olarak kullanılan dağılımları daha esnek hale getirerek günlük yaşamda kullanıma daha uygun hale getirir. Yapılan çalışmalarda istatistikte yaygın olarak kullanılan dağılımlardan bazıları modifiye edilerek yeni parametre eklenmiş ve farklı dağılımlar elde edilmiştir. Alfa kuvvet dönüşüm yöntemi, son zamanlarda genelleştirilmiş dağılımlara ulaşmada kullanılan yöntemlerden biridir.

Bu tez çalışmasında da bu yeni alfa kuvvet dönüştürülmüş dağılım modellerinden bazıları ele alınmıştır. Ele alınan dağılımların her birinin temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca momentleri, en çok olabilirlik fonksiyonu ve sıra istatistikleri gibi istatistiksel özellikleri incelenmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda ise litaratüre katkı sağlayacak yeni bir dağılım modeli bulunması amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Mahdavi A. and Kundu, D. (2017), A new method for generating distributions with an application to exponential distribution, Communications in Statistics-Theory and Methods, 46, 13, 6543–6557.

[2] Hassan vd. (2018).,Mohamd,R.E.,Elgarhy,M.,&Fayomi,A.(2018). Alpha power transformed extended exponential distribution: properties and applications. , Journal of Nonlinear Sciences and Applications, *12(4),62-67.*

[3] Nassar ,M.,Alzaatreh, A.,Mead,M.,Abo-Kasem ,O.,2017. Alpha power weinbul distribution: properties and applications.Communications in Statistics-Theory and Methods,46(20), 10236-10252.

[4] Dey S., Nassar M. and Kumar, D. (2019), Alpha power transformed inverse Lindley distribution: A distribution with an upside-down bathtub-shaped hazard function, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 348, 130-145.

[5] Hassan vd. (2018).,Mohamd,R.E.,Elgarhy,M.,&Fayomi,A.(2018). Alpha power transformed extended exponential distribution: properties and applications. , Journal of Nonlinear Sciences and Applications, *12(4),62-67.*

[6] Biçer, H. D., Properties and Inference for a New Class of Generalized Rayleigh Distributions with an Application. *Open Mathematics*, 17(1), 700–715, 2019.

[7] Ünal C., Cakmakyapan S. and Özel G. (2018), Alpha power inverted exponential distribution: properties and application, *Gazi University Journal of Science*, 31(3), 954-965.

[8] Nassar, M., Kumar, D., Dey, S., Cordeiro, G. M., Afify, A. Z., The Marshall–Olkin alpha power family of distributions with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 351, 41–53, 2019

[9] Efe-eyefia, E., Eghwerido, J. T., Zelibe, S. C., Theoretical Analysis of the Weibull Alpha Power Inverted Exponential Distribution: Properties and Applications. Gazi University Journal of Science, 33(1), 265–277, 2020.

[10] Abdel Rahman N.S. and El-Bassiouny A.H. (2017),On the alpha-power exponential Weibull distribution, The 2nd National of Mathematics and Its Applications (NCMA17),1-18.

[11] Dey S., Ghosh I. and Kumar D. (2018), Alpha-power transformed Lindley distribution: properties and associated inference with application to earthquake data, *Annals of Data Science,* 1-28.

[12] Ramadan, D.A., and Magdy W. (2018), On the Alpha-power inverse Weibull distribution. *International Journal of Computer Applications*, 181, 11, 6-11.

[13] Ahmad Z. (2018), The Zubair-G family of distributions: Properties and applications, *Annals of Data Science*, 1-14.

[14] Nasiru S., Mwita P.N. and Ngesa O. (2019), Alpha power transformed Frechet distribution. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 13(1), 129- 141.

[15] Aytaç, M. (1994). *Matematiksel İstatistik*, Uludağ Ünv. Basımevi.

[16] Akdeniz,F.(2011).Olasılık ve İstatistik,Nobel Kitapevi.

[17] Sağlam, V., Sağır, M., Yücesoy, E. (2016). *Olasılığa Giriş*, 1.Baskı, Seçkin Yayıncılık, Ankara.

[18] Gencer, G. (2016*). Bazı Dağılımlar için En Çok Olabilirlik ve Farklı Kayıp Fonksiyonları Altında Bayes Tahmin Edicilerinin Performanslarının Karşılaştırılması*, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[19] Aktaş, A. (2005). *Tamamlanmamış İki Yönlü Olumsallık Tablolarda En Çok Olabilirlik Tahmini*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[20] Gadde Srinivasa R., Aslam M., Kundu D. (2015), Burr-XII distribution parametric estimation and estimation of reliability of multicomponent stress-strength. Communication in Statistics- Theory and Methods, 44, 4953–4961.

[21] Kızılkaya,H. (2021). Alpha-Power Transformed Rayleigh Distribution. Institute of *Science*, Kırıkkale University, 2021

[22] Aslan, B.,İ ki parametreli yeni dağılım modelleri ve istatistiksel Özellikleri, Fen Bilimleri Enstitüsü,2022

[23] Hogg, R.Y., Craig, A.T., (1978) Introduction to Mathematical Statistics, Macmillan Publishing Co., Inc. Newyork.

[24] Dey, S., Ghosh, I., Kumar, D., Alpha-Power Transformed Lindley Distribution: Properties and Associated Inference with Application to Earthquake Data. *Annals of Data Science*, 6(4), 623–650, 2019.

[25] Balpetek, N., Akpınar, E. K., Weibull ve Rayleigh dağılımlarına göre Elazığ ilinin rüzgâr enerjisi potansiyelinin istatiksel analizi. Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi, 2017.

[26] Akdi ,Y.(2010).Matematiksel İst.Giriş,Gazi Kitapevi.

[27] Ihtisham, S., Khalil, A., Manzoor, S., Khan, S. A., & Ali, A. (2019). Alpha-Power Pareto distribution: Its properties and applications. *PloS one*, *14*(6).

[28] Ghitany M.Atieh B.Nadarajah S (2008) Lindley distribution and its applications.Math Comput Simul 78:493-506

[29] Bakouch H, Al-Zahrani B, Al-Shomrani A, Marchi V, Louzada F (2012) An ex- tended lindley distribution. *J Korean Stat Soc* 41(1):75–85

[30] Barreto-Souza W, Bakouch HS (2013) A new lifetime model with decreasing failure rate. *Statistics* 47:465–476

[31] Barreto-SouzaW, CordeiroGM, SimasAB (2011) Some results for beta Frechet distribution. *Commun Stat Theory Methods* 40(5):798–811

[32] Bennette S (1983) Log-logistic regression models for survival data. *Appl Stat* 32:165–171

ÖZGEÇMİŞ

Fatma ARSLANOĞLU

[redacted]

[redacted]

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans	**:**GaziÜniversitesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü,2006
Lise	**:** Anadolu Öğretmen Lisesi, Nevşehir, 2002