



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA
FOKAL EĞRİLER ETRAFINDA
OLUŞTURULAN KANAL VE TÜP YÜZEYLER

Cemile Berfu İPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

MAYIS-2024
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Cemile Berfu İPLAR tarafından hazırlanan “**3 BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA FOKAL EĞRİLER ETRAFINDA OLUŞTURULAN KANAL VE TÛP YÛZEYLER**” adlı tez çalışması 04/06/2024 tarihinde aşğıdaki jüri tarafından oy birliğı / oy çokluğu ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÛKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan (Danışman)

Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Gülay Koru YÛCEKAYA

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Aziz YAZLA

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ömer Faruk YÛKSEL
FBE Müdürü

Bu tez çalışması tarafından nolu proje ile desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Cemile Berfu İPLAR

Tarih: 10.05.2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA FOKAL EĞRİLER ETRAFINDA OLUŞTURULAN KANAL VE TÜP YÜZEYLER

Cemile Berfu İPLAR

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

2024, viii+45 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN
Dr. Öğr. Üyesi Gülay Kuru YÜCEKAYA
Dr. Öğr. Üyesi Aziz YAZLA

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmıdır, bu bölümde; eğriler, fokal eğriler ve kanal yüzeyler üzerine yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiş, bu çalışmanın amacı ve özgün değeri belirtilmiştir. İkinci bölümde; çalışmada sıklıkla kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; Minkowski uzayında fokal eğriler ve yüzeyler üzerine yapılan çalışmalarda yer alan ve bu çalışmada kullanılan temel kavramlar verilmiştir. Dördüncü ve beşinci bölümler çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Dördüncü bölümde Minkowski uzayında bulunan herhangi bir uzay eğrisinin fokal eğrisi elde edilmiştir. Beşinci bölümde bir fokal eğri etrafındaki kanal yüzey oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Minkowski uzayı, fokal eğri, fokal yüzey, kuasi çatı

ABSTRACT

MS THESIS

**CANAL AND TUBULAR SURFACES FORMED AROUND FOCAL CURVES
IN MINKOWSKI 3-SPACE**

Cemile Berfu İPLAR

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

2024, viii+45 Pages

Jury

Assoc. Prof. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

Assist. Prof. Dr. Gülay Koru YÜCEKAYA

Assist. Prof. Dr. Aziz YAZLA

This study consists of five chapters. The first chapter is the introduction of the study, in this chapter; information about the studies on curves, focal curves and canal surfaces is given, and the purpose and original value of this study one stated. In the second part; frequently used basic definitions and theorems in this study are included. In the third chapter; the basic concepts included in the studies on focal curves and surfaces in Minkowski space and used in this study are given. The fourth and fifth chapters constitute the original part of the study. In the fourth chapter, the focal curve of any space curve in Minkowski space is obtained. In the fifth chapter, a canal surface around a focal curve is created.

Keywords: Minkowski space, focal curve, focal surface, quasi frame

ÖNSÖZ

Tez konumun oluşmasında engin bilgi ve tecrübesiyle bana destek olan, çalışmalarım sırasında ihtiyaç duyduğum her türlü imkan ve motivasyonu sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli sayın hocam Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tüm eğitim sürecimde yanımda olan ve hep desteğini hissettiğim en başta babam Cemal İPLAR olmak üzere annem Selda İPLAR kardeşim Beril İPLAR ve tüm süreci benimle beraber yaşayan eşim Mustafa Hacı Ali Arslan'a teşekkür ederim.

Cemile Berfu İPLAR
KONYA-2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. BÖLÜM: MINKOWSKI UZAYINDA TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
3. BÖLÜM: FOKAL EĞRİLER VE YÜZEYLER.....	7
4. BÖLÜM: MINKOWSKI UZAYINDA FOKAL EĞRİLER	11
5. BÖLÜM: FOKAL EĞRİLER YARDIMIYLA OLUŞTURULAN FOKAL YÜZEYLER	22
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	41
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

V	: Sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
W	: Alt vektör uzay
g	: Simetrik bilineer form
$\mathbb{R}_1^n$	: n-boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
ψ	: 3-boyutlu Minkowski uzayında eğri
$\mathfrak{D}_\psi$	: 3-boyutlu Minkowski uzayında fokal eğri
$K(s,t)$	: Kanal yüzeyi



1.GİRİŞ

Eğri kavramı, doğada ve günlük yaşantımızda sıklıkla karşımıza çıkan kavramlardan biridir. Örneğin; canlıların temel yapı taşı olan hücrelerin içinde bulunan DNA molekülü helis eğrisi adı verilen eğrilerden oluşmaktadır. Diğer taraftan, kalp grafisi çekilirken kalbin düzenli çalışıp çalışmadığı eğriler ile anlaşılır. Eğri kavramının yaşam için önemi göz önüne alındığında, bu kavram doğal olarak matematiğin ilgisini çekmiştir ve matematikçiler eğrilerin özelliklerini incelemek için uzun yıllar çalışmalar yapmıştır. Bunlara örnek olarak, 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ ve 3-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{R}_1^3$ 'deki Mannheim eğrileri incelemiştir ve bu uzaylarda bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir (Liu ve Wang, 2008). Galilean 4-uzayında bir eğrinin Frenet-Serret çatısı oluşturulmuş ve bu çatıya göre Frenet-Serret denklemleri elde edilmiştir, ardından Galilean 4-uzayındaki bir eğrinin teğet vektörünün dördüncü dereceden bir vektörel diferensiyel denklemi sağladığı kanıtlanmıştır (Yılmaz, 2010). Görüntüsü pseudo hiperbolik uzayda yer alan spacelike, timelike ve null eğriler karakterize edilmiştir (Math ve Kragujevac, 2000). Diferensiyel geometrinin önemli bir çalışma alanı olan eğriler teorisinde bazı özel eğriler bulunmaktadır. Bunlara örnek olarak, dişliler için en iyi formu bulmak amacıyla yapılan bir araştırmada Roemer (1674) tarafından keşfedilen sikloid eğrileri, özel birer sikloid eğrisi olan ve ilk kez sırasıyla Daniel Bernoulli (1725) ve Roemer (1674) tarafından fark edilen astroid ve kardiod eğrileri ile Giovanni Domenico Cassini (1680) tarafından dünya ve güneşin göreceli hareketleriyle bağlantılı olarak incelenen Cassini eğrisi verilebilir. Bu özel eğrilerle ilgili daha fazla bilgiye Yates (1952) kaynağından ulaşılabilir.

Üzerinde çalışılan bir eğriyle ilgili bazı problemlere cevap aranırken eğrinin özelliklerini tespit etmek zorlaşabildiği için eğriyle ilişkili olan yeni eğrilerle ilgilenilmiştir (Gökçelik, 2012). Bu eğrilerden biri fokal eğridir. Fokal eğri, regüler bir eğrinin oskülatör hiperkürelerin merkezlerinin geometrik yeri olarak adlandırılır (Gökçelik, 2012). Bu alanda yapılan çalışmalardan bazıları şu şekildedir; regüler bir eğrinin fokal eğrisinin Frenet eğrilikleri ile fokal eğrilikler arasında bir ilişki kuran bir formül keşfedilmiştir ve fokal eğriliklerin bir Frenet denklem sistemini karşıladığı gösterilmiştir (Vargas, 2005). Fokal eğriler akışkanlar mekaniği ve optik gibi fiziğin birçok alanın da ve birçok bilim dalında kullanılmaktadır (Şimşek, 2016). Bir yüzeyin dışbükeyliğini test etmek, bükülme noktalarını belirlemek ve düz noktalarını görselleştirmek için fokal eğriler kullanılmıştır (Hagen ve Hahmann, 1992). Doğruların kongrüansları olarak bilinen yüzeyler fokal yüzeylerdir ve bu yüzeyler ilk defa

görüntüleme alanında tanımlanmıştır (Hagen vd. 1991). Fokal yüzeylerin geometrisi araştırılmıştır (Güler, 2022). Bishop çatısına göre tüp yüzeylerini ve tüp yüzeylerin fokal yüzeylerini incelenmiştir, (R. Al-Dayel vd. 2022). Belirli bir yüzeyin fokal yüzeylerinin, yüzey üzerindeki gerileme kenarından sabit bir mesafede bazı özel yüzeyler vasıtasıyla elde edilebileceği gösterilmiştir (Yurttañıkmar ve Tarakçı, 2015). Parabolik silindirin, fokal yüzeyinin ve genelleştirilmiş fokal yüzeyinin özelliklerinin bir karşılaştırması verilmiştir (Georgiev ve Pavlov, 2018).

Değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfı olarak tanımlanan kanal yüzeyleri, ilk olarak 1850 yılında Fransız matematikçi Gaspard Monge tarafından tanımlanmıştır (Gray, 1998). Helisel kanal yüzeyi bu kürelerin merkezlerinin yörüngesinin bir helis olması durumunda dönel yüzey ise bir doğru olması durumunda gerçekleşir. Ayrıca kanal yüzeyini oluşturan hareketli kürenin yarıçap fonksiyonu sabit ise, kanal yüzeyine tüp ya da boru yüzeyi adı verilir (Doğan, 2012). Bu alanda yapılan çalışmalardan bazıları şu şekildedir; kanal yüzeylerinin analitik ve geometrik özellikleri incelenmiştir (Xu vd, 2016). 3-boyutlu Öklid uzayında Weingarten ve lineer Weingarten kanal yüzeyleri için çeşitli karakterizasyonlar verilmiştir (Tunçer ve Yoon, 2016). Oskülatör hiperküresinin yarıçapının kritik noktalarının bir eğrinin köşe noktalarını oluşturduğu gösterilmiştir ayrıca fokal eğriler ve eğriliklerinden yararlanarak eğrilerin köşe noktalarına farklı bir açıdan bakmıştır ve geometrik optikte, 3-boyutlu Öklid uzayındaki bir γ eğrisinin bir ışık kaynağı olarak düşünülebileceğini söylenmiştir (Vargas,2005). Fokal eğriler ve fokal yüzeyler n - boyutlu Öklid uzayında incelenmiştir (Özdemir, 2008). Çizgili yüzeylerin dayanak eğrisini fokal eğri olarak seçerek karakterizasyonlar elde edilmiştir (Arslan vd. 2010). Fokal eğrilikleri açısından dual fokal eğrilerin bir karakterizasyonunu tanıtılmıştır (Korpınar and Turhan, 2012).

Bu çalışmada; kuasi çatı yardımıyla bir eğrinin fokal eğrisi elde edilecektir daha sonra birinci ve ikinci fokal eğrilikler yardımıyla Q -fokal eğriler karakterize edilecektir. 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike fokal eğriler etrafında kanal ve tüp yüzeyler tanımlanacaktır.

2. MINKOWSKI UZAYINDA TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1 V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ için,

- i. $\langle a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ ve $\langle \mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + b\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
- ii. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

özelliklerini sağlıyorsa, $\langle, \rangle$ fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2 $\langle, \rangle$, V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun.

- i. $\mathbf{u} \neq 0$ özelliğindeki her $\mathbf{u} \in V$ için $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ ise, $\langle, \rangle$ pozitif tanımlı,
- ii. $\mathbf{u} \neq 0$ özelliğindeki her $\mathbf{u} \in V$ için $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle < 0$ ise, $\langle, \rangle$ negatif tanımlı,
- iii. Her $\mathbf{u} \in V$ için $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ ise, $\langle, \rangle$ pozitif yarı-tanımlı,
- iv. Her $\mathbf{u} \in V$ için $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \leq 0$ ise, $\langle, \rangle$ negatif yarı-tanımlı,
- v. Her $\mathbf{u} \in V$ için $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ iken $\mathbf{v} = 0$ ise, $\langle, \rangle$ dejenere olmayan

simetrik bilinear formdur denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3 Pozitif veya negatif tanımlı bir simetrik bilinear forma tanımlı ve pozitif yarı-tanımlı veya negatif yarı-tanımlı bir simetrik bilinear forma ise yarı-tanımlı simetrik bilinear form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4 $\langle, \rangle$, V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun.

$$\langle, \rangle|_W: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

kısıtlanmış fonksiyonu negatif tanımlı bir simetrik bilinear form olacak şekildeki en büyük boyutlu $W \subset V$ alt uzayının boyutuna, $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4'den $0 \leq \nu \leq \text{boy } V$ olduğu açıktır. Bununla birlikte, $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formunun pozitif yarı-tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $\nu = 0$ olmasıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5 V vektör uzayı üzerinde dejenere olmayan bir g simetrik bilinear formuna, V üzerinde bir skaler çarpım, bu durumda (V, g) ikilisine de bir skaler çarpım uzayı denir.

Ayrıca, bir (V, g) skaler çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skaler çarpımının indeksi olarak tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.6 (V, g) indeksi ν olan bir skaler çarpım uzayı olmak üzere $\nu = 1$ ve $\text{boy } V \geq 2$ ise (V, g) skaler çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.7 $\mathbb{R}_\nu^n$ yarı-Öklid uzayında $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}_1^n$ yarı-Öklid uzayına n - boyutlu Minkowski uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.8 Bir $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^n$ vektörünün normu,

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{R}_1^n} = \sqrt{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle|}$$

ile tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.9 $\mathbb{R}_1^n$ Minkowski uzayında herhangi iki vektör $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ olmak üzere $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin skaler çarpımı

$$\langle, \rangle_L : \mathbb{R}_1^n \times \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_{n-1} v_{n-1} + u_n v_n$$

olarak tanımlanır. Bu skaler çarpıma $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin Lorentz skaler çarpımı denir. Bir $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^n$ vektörünün Lorentz normu,

$$\|\mathbf{u}\|_L = \sqrt{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L|}$$

eşitliği ile tanımlı $\|\mathbf{u}\|_L$ reel sayıdır. Eğer $\|\mathbf{u}\|_L = 1$ ise, $\mathbf{u}$ vektörüne birim vektör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.10'da $n = 3$ alınırsa, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayı elde edilir ve bu uzayda herhangi iki vektör $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin skaler çarpımı,

$$\langle, \rangle_L : \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

şeklindedir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.10 Her $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}_1^3$ için,

$$\mathbf{u} \times_L \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin Lorentz vektörel çarpımı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.11 (V, g) bir Lorentz uzayı olsun. Bir $\mathbf{u} \in V$ vektörü için,

- i. $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ veya $\mathbf{u} = 0$ ise, $\mathbf{u}$ 'ya spacelike vektör,
- ii. $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0$ ise, $\mathbf{u}$ 'ya timelike vektör,
- iii. $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ve $\mathbf{u} \neq 0$ ise, $\mathbf{u}$ 'ya lightlike (null) vektör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.12 $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayı olsun. $I, \mathbb{R}$ de bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna eğri adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.13 $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir α'' lightlike olmamak üzere birim hızlı α eğrisinin k eğriliği

$$k = \sqrt{|\langle \alpha'', \alpha'' \rangle|}$$

ile tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.14 3-boyutlu Minkowski uzayında türevlenebilir bir $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi verilsin. $t \in I$ için elde edilen $\alpha'(t)$ vektörü spacelike, timelike veya lightlike ise α eğrisine sırasıyla t noktasında spacelike, timelike veya lightlike denir. Eğer her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ vektörü spacelike, timelike veya lightlike ise, α eğrisine sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike eğri denir (López, 2014).

Tanım 2.15 $\mathbb{R}^3$ uzayında bir regüler eğri $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ olsun. $t \in I$ noktasındaki Frenet çatısı vektörleri $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$ olmak üzere

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbf{T}$ vektör alanına birim teğet vektör alanı, $\mathbf{N}$ ye eğrinin birim normal vektör alanı ve $\mathbf{B}$ vektörüne de birim binormal vektör alanı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.16 Bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi s ye bağlı birim hızlı eğri olmak üzere, α eğrisinin oskülatör kürelerinin merkezleri α eğrisinin $C_\alpha(s)$ fokal eğrisini oluşturur. Bu eğriler

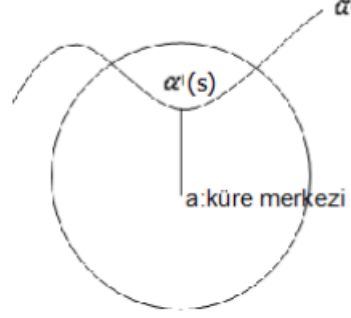
$$C_\alpha(s) = \alpha(s) + c_1(s)\mathbf{T}(s) + c_2(s)\mathbf{N}(s)$$

parametrelendirmesiyle ifade edilir ve bunlara α eğrisinin genelleştirilmiş evolütü denir. α eğrisinin fokal eğrilikleri, $c_1, c_2, \{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ ise Frenet çatısıdır (Hacısalıhoğlu, 1998).



3. FOKAL EĞRİLER VE YÜZEYLER

Tanım 3.1. $M \subset \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun $m \in M$ noktasında sonsuz yakın dört noktası ortak olan küreye, M 'nin $m \in M$ noktasındaki oskülatör küresi veya eğrilik küresi denir (Hacısalıhoğlu, 2000).



Şekil 1 α eğrisinin oskülatör küresi

$$a - \alpha(s) = m_1 T(s) + m_2 N(s) + m_3 B(s)$$

$$\langle a - \alpha(s), T(s) \rangle = 0 = m_1$$

$$\langle a - \alpha(s), N(s) \rangle = \frac{1}{k_1}$$

$$\langle a - \alpha(s), B(s) \rangle = \left(\frac{1}{k_1} \right)' \frac{1}{k_2}$$

$$a - \alpha(s) = \frac{1}{k_1} N(s) + \left(\frac{1}{k_1} \right)' \frac{1}{k_2} B(s)$$

bulunur. Tek nokta için

$$a = \alpha(s) + \frac{1}{k_1} N(s) + \left(\frac{1}{k_1} \right)' \frac{1}{k_2} B(s),$$

farklı noktalar için

$$C_\alpha(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_1} N(s) + \left(\frac{1}{k_1} \right)' \frac{1}{k_2} B(s)$$

dir. Oskülatör küre her bir nokta için vardır ve oskülatör kürenin geometrik yeri fokal eğriyi oluşturur.

Tanım 3.2. Bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Birim hızlı s parametresine bağlı α eğrisinin oskülatör kürelerinin merkezleri $C_\alpha(s)$ fokal eğrisini oluşturur. Bu eğriler

$$C_\alpha(s) = \alpha(s) + c_1(s) T(s) + c_2(s) N(s)$$

olarak ifade edilir ve bunlara α eğrisinin genelleştirilmiş evolütü denir. Buradan α eğrisinin fokal eğrilikleri c_1, c_2 ve $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ise Frenet çatısıdır (Hacısalihoglu, 1998).

Teorem 3.1. $M \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi $\{I, \alpha\}$ atlası ile verilsin. M 'nin Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve eğrilik fonksiyonları c_1, c_2 olsun. $\alpha(s_0) = Q \in M$ noktasının bir komşuluğunda M ve oskülatör kürenin merkezi $a \in \mathbb{R}^3$ ise

$$\langle a - \alpha(s), V_i(s_0) \rangle = c_i(s_0), 0 \leq i \leq 3 \quad (3.1)$$

dir (Hacısalihoglu, 2000).

Teorem 3.2. Bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin fokal eğrisi $C_\alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$C_\alpha(s) = \alpha(s) + \sum_{i=0}^2 c_i(s) V_i(s)$$

olmak üzere; c_i katsayıları

$$\begin{aligned} c_0(s) &= 0, \\ c_1(s) &= \frac{1}{k_1(s)}, \\ c_2(s) &= \left(\frac{1}{k_1}\right)' \frac{1}{k_2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitliklerini sağlar (Hacısalihoglu, 2000).

İspat: Fokal eğri α eğrisinin s_0 noktasındaki oskülatör kürelerin merkezlerinin geometrik yeri olarak tanımlanır. Eğri ile kürenin s_0 noktasında sonsuz yakın dört ortak nokta vardır. Bu da verilen yarıçap fonksiyonunun (f) üçüncü mertebeden türevinin sıfır olması demektir. α eğrisinin s_0 noktasındaki oskülatör kürelerin merkezleri $\alpha(s)$ ve yarıçapları r olmak üzere;

$$\begin{aligned} f : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ s \rightarrow f(s) &= \|a(s) - \alpha(s)\|^2 - r^2 \end{aligned}$$

fonksiyonu yardımıyla; α eğrisinin s_0 noktasında oskülatör küre ile sonsuz yakın beş ortak noktasının bulunması

$$f(s)_{s=s_0} = f'(s)_{s=s_0} = f''(s)_{s=s_0} = f'''(s)_{s=s_0} = 0, f^{iv}(s)_{s=s_0} \neq 0 \quad (3.3)$$

şartlarını sağlar. Oskülatör kürenin yarıçap vektörü, eğrinin çatısı cinsinden

$$a(s) - \alpha(s) = \sum_{i=0}^2 c_i(s) V_i(s) \quad (3.4)$$

dir. c_i ler reel değerli fonksiyonlar (3.3) ve Frenet formüllerinden;

$$\begin{aligned} f(s) = 0 \quad \text{ise} \quad \langle a(s) - \alpha(s), a(s) - \alpha(s) \rangle &= r^2 \\ f'(s) = 0 \quad \text{ise} \quad \langle \mathbf{T}(s), a(s) - \alpha(s) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

dir. (3.4) den

$$c_0(s) = 0$$

ve Frenet eşitliklerinden

$$f''(s) = 0 \quad \text{ise} \quad \langle \mathbf{T}(s)', a(s) - \alpha(s) \rangle - \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 0$$

dir. Böylece

$$\langle k_1(s)\mathbf{N}(s), a(s) - \alpha(s) \rangle - 1 = 0$$

veya

$$\langle k_1(s)\mathbf{N}(s), a(s) - \alpha(s) \rangle = 1$$

veya

$$\langle \mathbf{N}(s), a(s) - \alpha(s) \rangle = \frac{1}{k_1(s)}$$

elde edilir. (3.4) den

$$c_1(s) = \frac{1}{k_1(s)}$$

dir.

$$f'''(s) = 0 \quad \text{ise} \quad \langle \mathbf{N}(s)', a(s) - \alpha(s) \rangle - \langle \mathbf{N}(s), \mathbf{T}(s) \rangle = c_1(s)' = \left(\frac{1}{k_1(s)} \right)'$$

Frenet formüllerinden ve (3.4) den

$$\langle -k_1(s)\mathbf{T}(s) + k_2(s)\mathbf{B}(s), a(s) - \alpha(s) \rangle = c_1'(s)$$

veya

$$-k_1(s)c_0(s) + k_2(s)c_2(s) = c_1'(s)$$

veya

$$= k_2(s)c_2(s)$$

veya

$$c_2(s) = \left(\frac{1}{k_1(s)} \right)' \frac{1}{k_2(s)}$$

dir.

Tanım 3.3 $K(u, v)$ regüler bir yüzey olsun

$$X(u, v) = K(u, v) + f(k_1, k_2)\mathbf{N}(u, v)$$

olarak tanımlanan yüzeye $K(u, v)$ nin genelleştirilmiş fokal yüzeyi denir. Burada $f(k_1, k_2)$ skaler fonksiyondur ve k_1, k_2 asli eğriliklerine bağlıdır (Hagen ve ark., 1992).

$$f(k_1, k_2) = \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2}$$

olduğu durumda $K(u, v)$ nin genelleştirilmiş fokal yüzeyi

$$X(u, v) = k(u, v) + \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} N(u, v); k_1 \neq k_2$$

olur (Hagen ve ark., 1992).

Tanım 3.4 K_1 ve K_2 (k_1, k_2 ye karşılık) C_γ eğrisinin eğrilikleri olsun. Buna göre

$$\frac{K_1}{|k_2|} = \frac{|K_2|}{k_1} = \frac{1}{|c_2' + c_1 c_2|} = \frac{2c_2}{|R^{2'}|}$$

dir (Eisenhart , 1909), (Vargas,2005).

Tanım 3.5 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $k_1(s) \neq 0$ olmak üzere γ 'nın konik geodezik eğri olması için $\frac{k_2}{k_1}(s)$ sabit fonksiyon olmasıdır.

Teorem 3.3 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri ve C_γ fokal eğrisi olsun.

$$|C_\gamma'| = \frac{1}{as+b}, a, b \text{ sabit } a \neq 0 \text{ için}$$

γ denklemi sağlarsa konik bir geodezik olarak tanımlanabilir (Izumiya ve Takeuchi, 2004)

İspat Varsayalım ki γ konik bir geodezik eğri ve C_γ fokal eğri olsun.

Tanım 3.4 ve Tanım 3.5 den yararlanırsak $\left(\frac{|k_2|}{k_1}\right)''(s) = 0$ olduğu için

$$\frac{|k_2|}{k_1} = \frac{1}{|c_2' + c_1 c_2|} \quad (1)$$

ve bazı hesaplamalar yapılırsa

$$|C_\gamma'| = |c_2' + c_1 c_2| = \frac{1}{as+b} \quad (2)$$

Tersine; eğer (2) doğru ise (1) $\left(\frac{|k_2|}{k_1}\right)''(s) = 0$ elde edilir ve γ konik bir geodezik eğri olarak tanımlanır.

4. MINKOWSKI UZAYINDA FOKAL EĞRİLER

Tanım 4.1 $\mathbb{R}_1^3$ 3- boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı bir eğri ψ olsun. ψ 'nin kuasi çatısı $\{t, n_q, b_q\}$ olsun. Bu durumda ψ 'nin fokal eğrisi

$$\mathcal{D}_\psi(s) = \psi(s) + \omega_1(s)n_q(s) + \omega_2(s)b_q(s) \quad (4.1)$$

dir. Burada ω_1 ve ω_2 düzgün fonksiyonlarına ψ 'nin birinci ve ikinci fokal eğrilikleri denir.

3- boyutlu Minkowski uzayında timelike ve spacelike eğriler için kuasi çatının beş farklı durumu olduğu için bu bölümde fokal eğri 5 durumda incelenecektir.

1. Durum: Normal Vektörü Spacelike Olan Spacelike Eğriler;

Teorem 4.1 $\mathbb{R}_1^3$ ' de n_q kuasi normal vektörü spacelike olan bir spacelike eğri (k vektörü timelike) için

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_q' \\ b_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

dir. Burada

$$k_1 = \kappa \cos h\theta, \quad k_2 = \kappa \sin h\theta, \quad k_3 = -d\theta - \tau$$

elde edilir (Tarım, 2016).

Teorem 4.2 $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ Teorem 4.1 koşulunu sağlayan birim hızlı spacelike bir eğri, ψ 'nin fokal eğrisi de $\mathcal{D}_\psi(s)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\psi(s) = & \psi(s) + e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[\int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] n_q(s) \\ & + \left[\frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} \left[e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[\int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \right] \right] b_q(s) \end{aligned}$$

dir.

İspat Varsayalım ki ψ Teorem 4.1 koşulunu sağlayan birim hızlı spacelike bir eğri, $\mathcal{D}_\psi$ ψ 'nin fokal eğrisi olsun. Bu durumda Teorem 4.1 gereğince

$$\langle n_q, n_q \rangle = +1 \quad \Rightarrow \quad n_q' = -k_1 t - k_3 b_q$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle &= +1 & \Rightarrow \mathbf{t}' &= k_1 \mathbf{n}_q - k_2 \mathbf{b}_q \\ \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= -1 & \Rightarrow \mathbf{b}_q' &= -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q\end{aligned}$$

dir. (4.1) denkleminde her iki tarafın s' ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\psi}' &= \psi' + \omega_1' \mathbf{n}_q + \omega_1 \mathbf{n}_q' + \omega_2' \mathbf{b}_q + \omega_2 \mathbf{b}_q' \\ &= \mathbf{t} + \omega_1' \mathbf{n}_q + \omega_1 (-k_1 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{b}_q) + \omega_2' \mathbf{b}_q + \omega_2 (-k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q) \\ &= \mathbf{t} + \omega_1' \mathbf{n}_q - \omega_1 k_1 \mathbf{t} - \omega_1 k_3 \mathbf{b}_q + \omega_2' \mathbf{b}_q - \omega_2 k_2 \mathbf{t} - \omega_2 k_3 \mathbf{n}_q \\ &= (1 - \omega_1 k_1 - \omega_2 k_2) \mathbf{t} + (\omega_1' - \omega_2 k_3) \mathbf{n}_q + (\omega_2' - \omega_1 k_3) \mathbf{b}_q\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda fokal eğrinin tanımından

$$1 - \omega_1 k_1 - \omega_2 k_2 = 0 \quad (4.3)$$

$$\omega_1' - \omega_2 k_3 = 0$$

yazılabilir. (4.3) denklem sisteminde birinci eşitlik, ikinci eşitlikte göz önüne alınırsa

$$\omega_1' - \left(\frac{1 - \omega_1 k_1}{k_2} \right) k_3 = 0 \quad (4.4)$$

$$\omega_1' - \left(\frac{k_3 - k_3 \omega_1 k_1}{k_2} \right) = 0$$

$$\omega_1' - \frac{k_3}{k_2} + \frac{\omega_1 k_1 k_3}{k_2} = 0$$

$$\omega_1' + \frac{\omega_1 k_3 k_1}{k_2} = \frac{k_3}{k_2}$$

elde edilir. Kısalığının hatrına

$$p(s) = \frac{k_3 k_1}{k_2} \text{ ve } q(s) = \frac{k_3}{k_2}$$

alınır (4.4) sisteminin dördüncü eşitliği

$$\omega_1' + \omega_1 p(s) = q(s)$$

olarak yeniden yazılabilir. İntegral çarpanı yöntemi ile diferensiyel denklemi çözümlürse

$$\lambda = e^{\int p(s) \partial s}, \omega_1 p(s) - q(s) = M, N = 1$$

olmak üzere

$$e^{\int p(s) \partial s} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + e^{\int p(s) \partial s} \omega_1 p(s) = e^{\int p(s) \partial s} q(s)$$

$$(e^{\int p(s) \partial s} \omega_1)' = e^{\int p(s) \partial s} q(s)$$

$$e^{\int p(s) \partial s} \omega_1 = \int e^{\int p(s) \partial s} q(s)$$

$$\omega_1 = e^{-\int p(s) \partial s} \left[\int e^{\int p(s) \partial s} q(s) \right]$$

$$\omega_1 = e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[\int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \quad (4.5)$$

elde edilir.

(4.5) eşitliği (4.3)'ün birinci eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{1}{k_2} - \omega_1 \frac{k_1}{k_2} \\ &= \frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} \left[e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[\int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

2. Durum: Normal Vektörü Timelike Olan Spacelike Eğriler;

Teorem 4.3 $\mathbb{R}_1^3$ ' de $\mathbf{n}_q$ kuasi normal vektörü spacelike olan bir spacelike eğri (k vektörü timelike) için

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$k_1 = k \sin h\theta, \quad k_2 = k \cos h\theta, \quad k_3 = d\theta + \tau$$

elde edilir (Tarım, 2016).

Teorem 4.4 $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ Teorem 4.3 koşulunu sağlayan birim hızlı spacelike bir eğri, ψ 'nin fokal eğrisi de $\mathfrak{D}_\psi(s)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\psi(s) &= \psi(s) + e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[\int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] (s) \mathbf{n}_q \\ &\quad + \left[\frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} \left[e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[\int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \right] \right] \mathbf{b}_q(s) \end{aligned}$$

dir.

İspat Varsayalım ki ψ Teorem 4.3 koşulunu sağlayan birim hızlı spacelike bir eğri, $\mathfrak{D}_\psi$ ψ 'nin fokal eğrisi olsun. Bu durumda Teorem 4.3 gereğince

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle &= +1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_q' = -k_1 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{b}_q \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle &= +1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}' = k_1 \mathbf{n}_q - k_2 \mathbf{b}_q \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = -1 \Rightarrow \mathbf{b}_q' = -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q$$

dir. (4.1) denkleminde her iki tarafın s ' ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\psi' &= V' + \omega_1' \mathbf{n}_q + \omega_1 \mathbf{n}_q' + \omega_2' \mathbf{b}_q + \omega_2 \mathbf{b}_q' \\ &= \mathbf{t} + \omega_1' \mathbf{n}_q + \omega_1 (-k_1 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{b}_q) + \omega_2' \mathbf{b}_q + \omega_2 (-k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q) \\ &= \mathbf{t} + \omega_1' \mathbf{n}_q - \omega_1 k_1 \mathbf{t} - \omega_1 k_3 \mathbf{b}_q + \omega_2' \mathbf{b}_q - \omega_2 k_2 \mathbf{t} - \omega_2 k_3 \mathbf{n}_q \\ &= (1 - \omega_1 k_1 - \omega_2 k_2) \mathbf{t} + (\omega_1' - \omega_2 k_3) \mathbf{n}_q + (\omega_2' - \omega_1 k_3) \mathbf{b}_q \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda fokal eğrinin tanımından

$$1 - \omega_1 k_1 - \omega_2 k_2 = 0 \quad (4.6)$$

$$\omega_1' - \omega_2 k_3 = 0$$

yazılabilir. (4.6) denklem sisteminde birinci eşitlik, ikinci eşitlikte göz önüne alınır

$$\omega_1' - \left(\frac{1 - \omega_1 k_1}{k_2} \right) k_3 = 0 \quad (4.7)$$

$$\omega_1' - \left(\frac{k_3 - k_3 \omega_1 k_1}{k_2} \right) = 0$$

$$\omega_1' - \frac{k_3}{k_2} + \frac{\omega_1 k_1 k_3}{k_2} = 0$$

$$\omega_1' + \frac{\omega_1 k_3 k_1}{k_2} = \frac{k_3}{k_2}$$

elde edilir. Kısıllığın hatrına

$$p(s) = \frac{k_3 k_1}{k_2}, q(s) = \frac{k_3}{k_2}$$

alınır (4.7) sisteminin dördüncü eşitliği

$$\omega_1' + \omega_1 p(s) = q(s)$$

olarak yeniden yazılabilir. İntegral çarpanı yöntemi ile diferensiyel denklemi çözülürse

$$\lambda = e^{\int p(s) \partial s}, \omega_1 p(s) - q(s) = M, N = 1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} e^{\int p(s) \partial s} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + e^{\int p(s) \partial s} \omega_1 p(s) &= e^{\int p(s) \partial s} q(s) \\ (e^{\int p(s) \partial s} \omega_1)' &= e^{\int p(s) \partial s} q(s) \\ e^{\int p(s) \partial s} \omega_1 &= \int e^{\int p(s) \partial s} q(s) \\ \omega_1 &= e^{-\int p(s) \partial s} \left[\int e^{\int p(s) \partial s} q(s) \right] \\ \omega_1 &= e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[\int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir.

(4.8) eşitliği (4.6)'nın birinci eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \frac{1}{k_2} - \omega_1 \frac{k_1}{k_2} \\ &= \frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} \left[e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[\int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \right]\end{aligned}$$

elde edilir.

3. Durum: Normal Vektörü Timelike Olan Spacelike Eğriler;

Teorem 4.5 $\mathbb{R}_1^3$ ' de $\mathbf{n}_q$ kuasi normal vektörü timelike olan bir spacelike eğri (k vektörü spacelike) için

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$k_1 = -k \cos h\theta, \quad k_2 = -k \sin h\theta, \quad k_3 = d\theta + \tau$$

elde edilir (Tarım, 2016).

Teorem 4.6 $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ Teorem 4.5 koşulunu sağlayan birim hızlı spacelike bir eğri, ψ 'nin fokal eğrisi de $\mathfrak{D}_\psi(s)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_\psi(s) &= \psi(s) + e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[- \int e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] (s) \mathbf{n}_q \\ &\quad + \left[\frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} \left[e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[- \int e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \right] \right] \mathbf{b}_q(s)\end{aligned}$$

dir.

İspat Varsayalım ki ψ Teorem 4.5 koşulunu sağlayan birim hızlı spacelike bir eğri, $\mathfrak{D}_\psi$ ψ 'nin fokal eğrisi olsun. Bu durumda Teorem 4.5 gereğince

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle &= -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_q' = -k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle &= +1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}' = -k_1 \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q \\ \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= +1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}_q' = -k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q\end{aligned}$$

dir. (4.1) denkleminde her iki tarafın s' ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_\psi' &= V' + \omega_1' \mathbf{n}_q + \omega_1 \mathbf{n}_q' + \omega_2' \mathbf{b}_q + \omega_2 \mathbf{b}_q' \\
 &= \mathbf{t} + \omega_1' \mathbf{n}_q + \omega_1 (-k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q) + \omega_2' \mathbf{b}_q + \omega_2 (-\mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q) \\
 &= \mathbf{t} + \omega_1' \mathbf{n}_q - \omega_1 k_1 \mathbf{t} + \omega_1 k_3 \mathbf{b}_q + \omega_2' \mathbf{b}_q - \omega_2 k_2 \mathbf{t} + \omega_2 k_3 \mathbf{n}_q \\
 &= (1 - \omega_1 k_1 - \omega_2 k_2) \mathbf{t} + (\omega_1' + \omega_2 k_3) \mathbf{n}_q + (\omega_2' + \omega_1 k_3) \mathbf{b}_q
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda fokal eğrinin tanımından

$$\begin{aligned}
 1 - \omega_1 k_1 - \omega_2 k_2 &= 0 \\
 \omega_1' + \omega_2 k_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

yazılabilir. (4.9) denklem sisteminde birinci eşitlik, ikinci eşitlikte göz önüne alınır

$$\begin{aligned}
 \omega_1' + \left(\frac{1 - \omega_1 k_1}{k_2} \right) k_3 &= 0 \\
 \omega_1' + \left(\frac{k_3 - k_3 \omega_1 k_1}{k_2} \right) &= 0 \\
 \omega_1' + \frac{k_3}{k_2} - \frac{\omega_1 k_1 k_3}{k_2} &= 0 \\
 \omega_1' - \frac{\omega_1 k_3 k_1}{k_2} &= -\frac{k_3}{k_2}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. Kısalığın hatrına

$$p(s) = \frac{-k_3 k_1}{k_2}, q(s) = \frac{-k_3}{k_2}$$

alınır (4.10) sisteminin dördüncü eşitliği

$$\omega_1' + \omega_1 p(s) = q(s)$$

olarak yeniden yazılabilir. İntegral çarpanı yöntemi ile diferensiyel denklemi çözümlerse

$$\lambda = e^{\int p(s) \partial s}, \omega_1 p(s) - q(s) = M, N = 1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 e^{\int p(s) \partial s} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + e^{\int p(s) \partial s} \omega_1 p(s) &= e^{\int p(s) \partial s} q(s) \\
 (e^{\int p(s) \partial s} \omega_1)' &= e^{\int p(s) \partial s} q(s) \\
 e^{\int p(s) \partial s} \omega_1 &= \int e^{\int p(s) \partial s} q(s) \\
 \omega_1 &= e^{-\int p(s) \partial s} \left[\int e^{\int p(s) \partial s} q(s) \right] \\
 \omega_1 &= e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[- \int e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right]
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir.

(4.11) eşitliği (4.9)'un birinci eşitliğinde göz önüne alınır

$$\omega_2 = \frac{1}{k_2} - \omega_1 \frac{k_1}{k_2}$$

$$= \frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} \left[e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[- \int e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \right]$$

elde edilir.

4. Durum: Normal Vektörü Spacelike Olan Spacelike Eğriler;

Teorem 4.7 $\mathbb{R}_1^3$ ’ de $\mathbf{n}_q$ kuasi normal vektörü timelike olan bir spacelike eğri (k vektörü spacelike) için

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$k_1 = k \sin h\theta, \quad k_2 = -k \cos h\theta, \quad k_3 = -d\theta - \tau$$

elde edilir (Tarım, 2016).

Teorem 4.8 $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ Teorem 4.7 koşulunu sağlayan birim hızlı spacelike bir eğri, ψ ’nin fokal eğrisi de $\mathfrak{D}_\psi(s)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\psi(s) = & \psi(s) + e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[- \int e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \mathbf{n}_q(s) \\ & + \left[\frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} \left[e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[- \int e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \right] \right] \mathbf{b}_q(s) \end{aligned}$$

dir.

İspat Varsayalım ki ψ Teorem 4.7 koşulunu sağlayan birim hızlı spacelike bir eğri, $\mathfrak{D}_\psi$ ψ ’nin fokal eğrisi olsun. Bu durumda Teorem 4.7 gereğince

$$\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = +1 \implies \mathbf{n}_q' = -k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q$$

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = +1 \implies \mathbf{t}' = -k_1 \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q$$

$$\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = -1 \implies \mathbf{b}_q' = -k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q$$

dir. (4.1) denkleminde her iki tarafın s ’ ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\psi' &= V' + \omega_1' \mathbf{n}_q + \omega_1 \mathbf{n}_q' + \omega_2' \mathbf{b}_q + \omega_2 \mathbf{b}_q' \\ &= \mathbf{t} + \omega_1' \mathbf{n}_q + \omega_1 (-k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q) + \omega_2' \mathbf{b}_q + \omega_2 (-k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{t} + \omega_1' \mathbf{n}_q - \omega_1 k_1 \mathbf{t} + \omega_1 k_3 \mathbf{b}_q + \omega_2' \mathbf{b}_q - \omega_2 k_2 \mathbf{t} + \omega_2 k_3 \mathbf{n}_q \\
&= (1 - \omega_1 k_1 - \omega_2 k_2) \mathbf{t} + (\omega_1' + \omega_2 k_3) \mathbf{n}_q + (\omega_2' + \omega_1 k_3) \mathbf{b}_q
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda fokal eğrinin tanımından

$$1 - \omega_1 k_1 - \omega_2 k_2 = 0 \quad (4.12)$$

$$\omega_1' + \omega_2 k_3 = 0$$

yazılabilir. (4.12) denklem sisteminde birinci eşitlik, ikinci eşitlikte göz önüne alınırsa

$$\omega_1' + \left(\frac{1 - \omega_1 k_1}{k_2} \right) k_3 = 0 \quad (4.13)$$

$$\omega_1' + \left(\frac{k_3 - k_3 \omega_1 k_1}{k_2} \right) = 0$$

$$\omega_1' + \frac{k_3}{k_2} - \frac{\omega_1 k_1 k_3}{k_2} = 0$$

$$\omega_1' - \frac{\omega_1 k_3 k_1}{k_2} = -\frac{k_3}{k_2}$$

elde edilir.

$$p(s) = \frac{-k_3 k_1}{k_2}, \quad q(s) = \frac{-k_3}{k_2}$$

alınırsa (4.13) sisteminin dördüncü eşitliği

$$\omega_1' + \omega_1 p(s) = q(s)$$

olarak yeniden yazılabilir. İntegral çarpanı yöntemi ile diferensiyel denklemi çözülürse

$$\lambda = e^{\int p(s) \partial s}, \quad \omega_1 p(s) - q(s) = M, N = 1$$

olmak üzere

$$e^{\int p(s) \partial s} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + e^{\int p(s) \partial s} \omega_1 p(s) = e^{\int p(s) \partial s} q(s)$$

$$(e^{\int p(s) \partial s} \omega_1)' = e^{\int p(s) \partial s} q(s)$$

$$e^{\int p(s) \partial s} \omega_1 = \int e^{\int p(s) \partial s} q(s)$$

$$\omega_1 = e^{-\int p(s) \partial s} \left[\int e^{\int p(s) \partial s} q(s) \right]$$

$$\omega_1 = e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[- \int e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \quad (4.14)$$

elde edilir.

(4.14) eşitliği (4.12)'nin birinci eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{1}{k_2} - \omega_1 \frac{k_1}{k_2} \\
&= \frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} \left[e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[- \int e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

5. Durum: Timelike Eğriler;

Teorem 4.9 $\mathbb{R}_1^3$ ' de bir timelike eğri (k vektörü spacelike) için

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}_q' \\ \mathbf{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$k_1 = k \cos \theta, \quad k_2 = -k \sin \theta, \quad k_3 = d\theta + \tau$$

ve

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\det[\alpha'', \alpha', k]}{\|\alpha'' \wedge k\| \|\alpha'\|^2}, \\ k_2 &= \frac{-\langle \alpha', k \rangle \langle \alpha'', \alpha' \rangle + \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', k \rangle}{\|\alpha'' \wedge k\| \|\alpha'\|^3}, \\ k_3 &= \frac{\langle \alpha', k \rangle \det[\alpha', \alpha'', k]}{\|\alpha'' \wedge k\|^2 \|\alpha'\|^2} \end{aligned}$$

dir (Tarım, 2016).

Teorem 4.10 $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ Teorem 4.9 koşulunu sağlayan birim hızlı spacelike bir eğri, ψ 'nin fokal eğrisi de $\mathfrak{D}_\psi(s)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\psi(s) &= \psi(s) + e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[- \int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] (s) \mathbf{n}_q \\ &\quad + \left[-\frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} \left[e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[- \int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \right] \right] \mathbf{b}_q(s) \end{aligned}$$

dir.

İspat Varsayalım ki ψ Teorem 4.9 koşulunu sağlayan birim hızlı spacelike bir eğri, $\mathfrak{D}_\psi$ ψ 'nin fokal eğrisi olsun. Bu durumda Teorem 4.9 gereğince

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle &= +1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_q' = k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle &= -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}' = k_1 \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q \\ \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle &= +1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}_q' = k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q \end{aligned}$$

dir. (4.1) denkleminde her iki tarafın s ' ye göre türevi alınırsa

$$\mathfrak{D}_\psi' = V' + \omega_1' \mathbf{n}_q + \omega_1 \mathbf{n}_q' + \omega_2' \mathbf{b}_q + \omega_2 \mathbf{b}_q'$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{t} + \omega_1' \mathbf{n}_q + \omega_1(k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q) + \omega_2' \mathbf{b}_q + \omega_2(k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q) \\
&= \mathbf{t} + \omega_1' \mathbf{n}_q + \omega_1 k_1 \mathbf{t} + \omega_1 k_3 \mathbf{b}_q + \omega_2' \mathbf{b}_q + \omega_2 k_2 \mathbf{t} - \omega_2 k_3 \mathbf{n}_q \\
&= (1 + \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2) \mathbf{t} + (\omega_1' - \omega_2 k_3) \mathbf{n}_q + (\omega_2' + \omega_1 k_3) \mathbf{b}_q
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda fokal eğrinin tanımından

$$\begin{aligned}
1 + \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 &= 0 \\
\omega_1' - \omega_2 k_3 &= 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

yazılabilir. (4.15) denklem sisteminde birinci eşitlik, ikinci eşitlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\omega_1' + \left(\frac{1 + \omega_1 k_1}{k_2} \right) k_3 &= 0 \\
\omega_1' + \left(\frac{k_3 + k_3 \omega_1 k_1}{k_2} \right) &= 0 \\
\omega_1' + \frac{k_3}{k_2} + \frac{\omega_1 k_1 k_3}{k_2} &= 0 \\
\omega_1' + \frac{\omega_1 k_3 k_1}{k_2} &= -\frac{k_3}{k_2}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir.

$$p(s) = \frac{+k_3 k_1}{k_2}, q(s) = \frac{-k_3}{k_2}$$

alınırsa (4.16) sisteminin dördüncü eşitliği

$$\omega_1' + \omega_1 p(s) = q(s)$$

olarak yeniden yazılabilir. İntegral çarpanı yöntemi ile diferensiyel denklemi çözümlerse

$$\lambda = e^{\int p(s) \partial s}, \omega_1 p(s) - q(s) = M, N = 1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
e^{\int p(s) \partial s} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + e^{\int p(s) \partial s} \omega_1 p(s) &= e^{\int p(s) \partial s} q(s) \\
(e^{\int p(s) \partial s} \omega_1)' &= e^{\int p(s) \partial s} q(s) \\
e^{\int p(s) \partial s} \omega_1 &= \int e^{\int p(s) \partial s} q(s) \\
\omega_1 &= e^{-\int p(s) \partial s} \left[\int e^{\int p(s) \partial s} q(s) \right] \\
\omega_1 &= e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[- \int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir.

(4.17) eşitliği (4.15)'in birinci eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\omega_2 = -\frac{1}{k_2} - \omega_1 \frac{k_1}{k_2}$$

$$= -\frac{1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} \left[e^{-\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \left[-\int e^{\int \frac{k_3 k_1}{k_2} \partial s} \frac{k_3}{k_2} + c \right] \right]$$

elde edilir.



5. FOKAL EĞRİLER YARDIMIYLA OLUŞTURULAN FOKAL YÜZEYLER

Tanım 5.1 $\mathbb{R}_1^3$ 'deki bir kanal yüzeyi, bir parametrelili Lorentz küreler ailesinin zarfı olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, merkezi $C_\alpha(s)$ ve yarıçap fonksiyonu $r(t)$ olan yörünge tarafından tanımlanan, değişen yarıçaplı hareketli bir Lorentz kürenin zarfıdır. Eğer $r(t) = r$ yarıçap fonksiyonu bir sabit ise, o zaman $\mathbb{R}_1^3$ 'te Lorentz tüp yüzeyi olarak adlandırılır (Yıldırım, 2018).

Bu bölümde merkezi $\mathcal{D}_\psi$ 'da olan Lorentz kürelerin denklemi

$$f(s) = \frac{1}{2}(\|\mathcal{D}_\psi - \psi\|^2 - r^2)$$

ve ψ ile oskulator küresi arasında sonsuz yakın dört nokta varsa

$$f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0 \quad (5.1)$$

dir.

3- boyutlu Minkowski uzayında timelike ve spacelike eğriler için kuasi çatının 5 farklı durumu olduğu için bu bölüm 5 durumda incelenecektir.

1. Durum Normal Vektörü Spacelike olan Spacelike Eğriler;

Teorem 5.1. ψ teorem 4.1'deki koşulları sağlayan bir eğri olsun. Bu durumda ψ eğrisinin kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\mathcal{D}_\psi$ fokal eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\sigma, n_\sigma, b_\sigma\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\psi(s) = \psi(s) &- \frac{k_2' + k_1 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{n}_q(s) \\ &+ \frac{k_1' + k_2 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{b}_q(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t_\sigma &= \varepsilon_t \mathbf{b}_q \\ n_\sigma &= -\varepsilon_t \varepsilon_n (k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q) \\ b_\sigma &= \varepsilon_n (k_3 \mathbf{t} - k_2 \mathbf{n}_q) \end{aligned}$$

dir.

İspat ψ teorem 4.1'deki koşulları sağlayan bir eğri, kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve ψ eğrisinin fokal eğrisi $\mathcal{D}_\psi$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{D}_\psi - \psi = c_0 \mathbf{t} + c_1 \mathbf{n}_q + c_2 \mathbf{b}_q \quad (5.2)$$

yazılabilir. (5.2) denkleminde

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{t} \rangle = c_0 \quad (5.3)$$

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{n}_q \rangle = c_1 \quad (5.4)$$

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{b}_q \rangle = -c_2 \quad (5.5)$$

olur. Diğer taraftan (5.1) göz önüne alınırsa

$$f = 0 \Rightarrow \langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = r^2$$

$$f' = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{t}, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = 0$$

$$f'' = 0 \Rightarrow k_1 \langle \mathbf{n}_q, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle - k_2 \langle \mathbf{b}_q, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = 1 \quad (5.6)$$

$$f''' = 0 \Rightarrow (k_1' + k_2 k_3) c_1 + (k_2' + k_1 k_3) c_2 = 0 \quad (5.7)$$

elde edilir. (5.4), (5.5) ve (5.6) denklemlerinden

$$k_1 c_1 + k_2 c_2 = 1 \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.7) ve (5.8) denklemleri birlikte düşünülürse

$$c_2 = \frac{k_1' + k_2 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'}$$

$$c_1 = -\frac{k_2' + k_1 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'}$$

bulunur. Buradan

$$\mathcal{D}_\psi(s) = \psi(s) - \frac{k_2' + k_1 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{n}_q(s)$$

$$+ \frac{k_1' + k_2 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{b}_q(s)$$

elde edilir. (5.2) denkleminin s parametresine göre tekrar türevi alınırsa

$$\frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial s} = (1 - k_1 c_1 - k_2 c_2) \mathbf{t} + (c_1' - c_2 k_3) \mathbf{n}_q + (c_2' - c_1 k_3) \mathbf{b}_q \quad (5.9)$$

ve buradan

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = |c_2' - c_1 k_3| \quad (5.10)$$

elde edilir. $\frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial s} = t_\sigma$ olarak gösterilirse ve (5.10) denklemi (5.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$t_\sigma = \frac{c_2' - c_1 k_3}{|c_2' - c_1 k_3|} \mathbf{b}_q$$

elde edilir. Gösterimlerde kısalık için $\varepsilon_t = \frac{c_2' - c_1 k_3}{|c_2' - c_1 k_3|}$ olarak alınırsa

$$\frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial s} = t_\sigma = \varepsilon_t \mathbf{b}_q \quad (5.11)$$

bulunur. (5.11) denkleminde her iki tarafın türevinin normu alınır ise $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}$

olmak üzere

$$\kappa_\sigma = \frac{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}{|c_2' - c_1 k_3|}$$

ve buradan

$$n_\sigma = -\varepsilon_t \varepsilon_n (k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q) \quad (5.12)$$

elde edilir. $b_\sigma = t_\sigma \times n_\sigma$ olduğundan

$$b_\sigma = \varepsilon_n (k_3 \mathbf{t} - k_2 \mathbf{n}_q) \quad (5.13)$$

dir.

Teorem 5.2 ψ teorem 4.1'deki koşulları sağlayan bir eğri ve ψ eğrisinin fokal eğrisi olan $\mathcal{D}_\psi$ etrafında oluşan kanal yüzey

$$\begin{aligned} K(s, t) = \mathcal{D}_\psi(s) + \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t \kappa \sinh \theta \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t (-d\theta - \tau) \right) \mathbf{t} \\ + \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t (-d\theta - \tau) \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t \kappa \sinh \theta \right) \mathbf{n}_q \\ + \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q \end{aligned}$$

dir.

İspat ψ teorem 4.1'deki koşulları sağlayan bir eğri olsun. ψ eğrisinin kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\mathcal{D}_\psi$ fokal eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\sigma, n_\sigma, b_\sigma\}$ olmak üzere

$$K(s, t) - \mathcal{D}_\psi(s) = a(s, t)t_\sigma(s) + b(s, t)n_\sigma(s) + c(s, t)b_\sigma(s) \quad (5.14)$$

yazılabilir. Son denklemde (5.11), (5.12) ve (5.13) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} K(s, t) - \mathcal{D}_\psi(s) = \varepsilon_n (-b(s, t)k_2 \varepsilon_t + a(s, t)k_3) \mathbf{t} \\ + \varepsilon_n (-b(s, t)k_3 \varepsilon_t - a(s, t)k_2) \mathbf{n}_q + \varepsilon_t c(s, t) \mathbf{b}_q \end{aligned} \quad (5.15)$$

yazılabilir. (5.15) denkleminde her iki tarafın normu alınır

$$\|K(s, t) - \mathcal{D}_\psi(s)\|^2 = r^2(s) \quad (5.16)$$

veya

$$\langle K(s, t) - \mathcal{D}_\psi(s), K_s \rangle = 0 \quad (5.17)$$

$$\langle K(s, t) - \mathcal{D}_\psi(s), K_t \rangle = 0 \quad (5.18)$$

elde edilir. (5.14) ve (5.15) denklemleri (5.16) ve (5.17)'de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^2(a^2 + b^2)(k_2^2 + k_3^2) &= r^2 + c^2 \\
a^2 + b^2 - c^2 &= r^2 \\
aa_s + bb_s + cc_s &= rr'
\end{aligned} \tag{5.19}$$

elde edilir. $v = \frac{\partial \sigma}{\partial s} = |c_2' - c_1 k_3|$ için (5.15) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned}
K_s &= [\varepsilon_n'(-bk_2\varepsilon_t + ak_3) + \varepsilon_n(-b_s k_2 \varepsilon_t - bk_2' \varepsilon_t + a_s k_3 + ak_3' + bk_1 k_3 \varepsilon_t + \\
&\quad ak_1 k_2) - ck_2 \varepsilon_t] \mathbf{t} \\
&+ [\varepsilon_n'(-bk_3\varepsilon_t - ak_2) + \varepsilon_n(-b_s k_3 \varepsilon_t - bk_3' \varepsilon_t - a_s k_2 - ak_2' - bk_1 k_2 \varepsilon_t + \\
&\quad ak_1 k_3) - ck_3 \varepsilon_t] \mathbf{n}_q \\
&+ [\varepsilon_n b \varepsilon_t (k_2^2 + k_3^2) + \varepsilon_t (c_s + v)] \mathbf{b}_q
\end{aligned} \tag{5.20}$$

bulunur. (5.15), (5.17), (5.19) ve (5.20) birlikte düşünülürse

$$cv = rr'$$

olacağından

$$\begin{aligned}
a &= \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t \\
b &= \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t
\end{aligned}$$

bulunur. Son iki eşitlik (5.15)'de yerine yazılır ise

$$\begin{aligned}
K(s, t) - \mathcal{D}_\psi(s) &= \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t k_2 \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t k_3 \right) \mathbf{t} \\
&+ \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t k_3 \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t k_2 \right) \mathbf{n}_q \\
&+ \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q
\end{aligned}$$

bulunur. k_2 ve k_3 değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
K(s, t) - \mathcal{D}_\psi(s) &= \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t \kappa \sinh \theta \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t (-d\theta - \tau) \right) \mathbf{t} \\
&+ \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t (-d\theta - \tau) \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t \kappa \sinh \theta \right) \mathbf{n}_q \\
&+ \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 5.1 r 'nin sabit olması durumunda $K(s, t)$ tüp yüzeyi elde edilir. Bunun sonucunda

$K(s, t) - \mathcal{D}_\psi(s) = \varepsilon_n(\pm r \sin t k_2 \varepsilon_t \pm r \cos t k_3) \mathbf{t} + \varepsilon_n(\pm r \sin t k_3 \varepsilon_t \pm r \cos t k_2) \mathbf{n}_q$ elde edilir.

2. Durum Normal Vektörü Timelike olan Spacelike Eğriler;

Teorem 5.3. ψ teorem 4.3'deki koşulları sağlayan bir eğri olsun. Bu durumda ψ eğrisinin kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\mathcal{D}_\psi$ fokal eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\sigma, n_\sigma, b_\sigma\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\psi(s) = \psi(s) - \frac{k_2' + k_1 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{n}_q(s) \\ + \frac{k_1' + k_2 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{b}_q(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t_\sigma &= \varepsilon_t \mathbf{b}_q \\ n_\sigma &= -\varepsilon_t \varepsilon_n (k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q) \\ b_\sigma &= \varepsilon_n (k_3 \mathbf{t} - k_2 \mathbf{n}_q) \end{aligned}$$

dir.

İspat ψ teorem 4.3'deki koşulları sağlayan bir eğri, kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve ψ eğrisinin fokal eğrisi $\mathcal{D}_\psi$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{D}_\psi - \psi = c_0 \mathbf{t} + c_1 \mathbf{n}_q + c_2 \mathbf{b}_q$$

(5.21)

olduğundan

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{t} \rangle = c_0 \quad (5.22)$$

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{n}_q \rangle = c_1 \quad (5.23)$$

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{b}_q \rangle = -c_2 \quad (5.24)$$

olur. Diğer taraftan (5.1) denklemini göz önüne alınırsa

$$f = 0 \Rightarrow \langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = r^2$$

$$f' = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{t}, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = 0$$

$$f'' = 0 \Rightarrow k_1 \langle \mathbf{n}_q, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle - k_2 \langle \mathbf{b}_q, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = 1 \quad (5.25)$$

$$f''' = 0 \Rightarrow (k_1' + k_2 k_3) c_1 + (k_2' + k_1 k_3) c_2 = 0 \quad (5.26)$$

elde edilir. (5.23), (5.24) ve (5.25) denklemlerinden

$$k_1 c_1 + k_2 c_2 = 1 \quad (5.27)$$

elde edilir. (5.26) ve (5.27) denklemleri ile birlikte düşünülürse

$$c_2 = \frac{k_1' + k_2 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'}$$

$$c_1 = -\frac{k_2' + k_1 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'}$$

bulunur. Buradan

$$\mathfrak{D}_\psi(s) = \psi(s) - \frac{k_2' + k_1 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{n}_q(s)$$

$$+ \frac{k_1' + k_2 k_3}{k_1' k_2 + k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{b}_q(s)$$

elde edilir. (5.21) denkleminin s parametresine göre tekrar türevi alınır

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_\psi}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{D}_\psi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial s} = (1 - k_1 c_1 - k_2 c_2) \mathbf{t} + (c_1' - c_2 k_3) \mathbf{n}_q + (c_2' - c_1 k_3) \mathbf{b}_q \quad (5.28)$$

ve buradan

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = |c_2' - c_1 k_3| \quad (5.29)$$

elde edilir. $\frac{\partial \mathfrak{D}_\psi}{\partial s} = t_\sigma$ olarak gösterilirse ve (5.29) denklemini (5.28) denkleminde yerine yazılırsa

$$t_\sigma = \frac{c_2' - c_1 k_3}{|c_2' - c_1 k_3|} \mathbf{b}_q$$

elde edilir. Gösterimlerde kısalık için $\varepsilon_t = \frac{c_2' - c_1 k_3}{|c_2' - c_1 k_3|}$ olarak alınır

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_\psi}{\partial s} = t_\sigma = \varepsilon_t \mathbf{b}_q \quad (5.30)$$

bulunur. (5.30) denkleminde her iki tarafın türevinin normu alınır ise $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}$

olmak üzere

$$\kappa_\sigma = \frac{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}{|c_2' - c_1 k_3|}$$

ve buradan

$$n_\sigma = -\varepsilon_t \varepsilon_n (k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q) \quad (5.31)$$

elde edilir. $b_\sigma = t_\sigma \times n_\sigma$ olduğundan

$$b_\sigma = \varepsilon_n (k_3 \mathbf{t} - k_2 \mathbf{n}_q) \quad (5.32)$$

dir.

Teorem 5.4 ψ teorem 4.3'deki koşulları sağlayan bir eğri ve ψ eğrisinin fokal eğrisi olan $\mathfrak{D}_\psi$ etrafında oluşan kanal yüzey

$$\begin{aligned} K(s, t) = \mathfrak{D}_\psi(s) + \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t \kappa \cosh \theta \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t (d\theta + \tau) \right) \mathbf{t} \\ + \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t (d\theta + \tau) \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t \kappa \cosh \theta \right) \mathbf{n}_q \\ + \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q \end{aligned}$$

dir.

İspat ψ teorem 4.3'deki koşulları sağlayan bir eğri olsun. ψ eğrisinin kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\mathfrak{D}_\psi$ fokal eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbf{t}_\sigma, \mathbf{n}_\sigma, \mathbf{b}_\sigma\}$ olmak üzere

$$K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = a(s, t)t_\sigma(s) + b(s, t)n_\sigma(s) + c(s, t)b_\sigma(s) \quad (3.33)$$

yazılabilir. Son denklemde (5.30), (5.31) ve (5.32) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = \varepsilon_n(-b(s, t)k_2\varepsilon_t + a(s, t)k_3)\mathbf{t} \\ + \varepsilon_n(-b(s, t)k_3\varepsilon_t - a(s, t)k_2)\mathbf{n}_q + \varepsilon_t c(s, t)\mathbf{b}_q \end{aligned} \quad (5.34)$$

yazılabilir. (5.34) denkleminde her iki tarafın normu alınırsa

$$\|K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s)\|^2 = r^2(s) \quad (5.35)$$

veya

$$\langle K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s), K_s \rangle = 0 \quad (5.36)$$

$$\langle K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s), K_t \rangle = 0 \quad (5.37)$$

elde edilir. (5.33) ve (5.34), (5.35) ve (5.36)'da göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^2(a^2 + b^2)(k_2^2 + k_3^2) &= r^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 - c^2 &= r^2 \\ aa_s + bb_s + cc_s &= rr' \end{aligned} \quad (5.38)$$

elde edilir. $v = \frac{\partial \sigma}{\partial s} = |c_2' - c_1 k_3|$ için (5.34) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} K_s = [\varepsilon_n'(-bk_2\varepsilon_t + ak_3) + \varepsilon_n(-b_s k_2 \varepsilon_t - bk_2' \varepsilon_t + a_s k_3 + ak_3' + bk_1 k_3 \varepsilon_t + \\ ak_1 k_2) - ck_2 \varepsilon_t] \mathbf{t} \\ + [\varepsilon_n'(-bk_3 \varepsilon_t - ak_2) + \varepsilon_n(-b_s k_3 \varepsilon_t - bk_3' \varepsilon_t - a_s k_2 - ak_2' - bk_1 k_2 \varepsilon_t + \\ ak_1 k_3) - ck_3 \varepsilon_t] \mathbf{n}_q \\ + [\varepsilon_n b \varepsilon_t (k_2^2 + k_3^2) + \varepsilon_t (c_s + v)] \mathbf{b}_q \end{aligned} \quad (5.39)$$

bulunur. (5.34), (5.36), (5.38) ve (5.39) birlikte düşünülür ise

$$cv = rr'$$

olacağından

$$a = \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t$$

$$b = \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t$$

bulunur. Son iki eşitlik (5.34)'de yerine yazılır ise

$$K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t k_2 \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t k_3 \right) \mathbf{t}$$

$$+ \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t k_3 \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t k_2 \right) \mathbf{n}_q$$

$$+ \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q$$

olur. k_2 ve k_3 değerleri yerine yazılırsa

$$K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t \kappa \cosh \theta \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t (d\theta + \tau) \right) \mathbf{t}$$

$$+ \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sin t (d\theta + \tau) \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cos t \kappa \cosh \theta \right) \mathbf{n}_q$$

$$+ \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q$$

elde edilir.

Sonuç 5.2 r 'nin sabit olması durumunda $K(s, t)$ tüp yüzeyi elde edilir. Bunun sonucunda $K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = \varepsilon_n (\pm r \sin t k_2 \varepsilon_t \pm r \cos t k_3) \mathbf{t} + \varepsilon_n (\pm r \sin t k_3 \varepsilon_t \pm r \cos t k_2) \mathbf{n}_q$ elde edilir.

3. Durum Normal Vektörü Timelike Olan Spacelike Eğriler;

Teorem 5.5 . ψ teorem 4.5'deki koşulları sağlayan bir eğri olsun. Bu durumda ψ eğrisinin kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\mathfrak{D}_\psi$ fokal eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\sigma, n_\sigma, b_\sigma\}$ olmak üzere

$$\mathfrak{D}_\psi(s) = \psi(s) + \frac{k_1 k_3 - k_2'}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{n}_q(s)$$

$$+ \frac{k_1' - k_2 k_3}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{b}_q(s)$$

ve

$$t_\sigma = \varepsilon_t \mathbf{b}_q$$

$$n_\sigma = \varepsilon_t \varepsilon_n (-k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q)$$

$$b_\sigma = -\varepsilon_n (k_3 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{n}_q)$$

dir.

İspat ψ teorem 4.5'deki koşulları sağlayan bir eğri, kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve ψ eğrisinin fokal eğrisi $\mathcal{D}_\psi$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{D}_\psi - \psi = c_0 \mathbf{t} + c_1 \mathbf{n}_q + c_2 \mathbf{b}_q \quad (5.40)$$

yazılabilir. (5.40) denkleminde

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{t} \rangle = c_0 \quad (5.41)$$

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{n}_q \rangle = -c_1 \quad (5.42)$$

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{b}_q \rangle = c_2 \quad (5.43)$$

olur. Diğer taraftan (5.1) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} f = 0 &\Rightarrow \langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = r^2 \\ f' = 0 &\Rightarrow \langle \mathbf{t}, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = 0 \\ f'' = 0 &\Rightarrow -k_1 \langle \mathbf{n}_q, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle + k_2 \langle \mathbf{b}_q, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = 1 \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$f''' = 0 \Rightarrow (k_1' - k_2 k_3) c_1 + (k_2' - k_1 k_3) c_2 = 0 \quad (5.45)$$

elde edilir. (5.42), (5.43) ve (5.44) denklemlerinden

$$k_1 c_1 + k_2 c_2 = 1 \quad (5.46)$$

elde edilir. (5.45) ve (5.46) denklemleri birlikte düşünülür ise

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{k_1' - k_2 k_3}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \\ c_1 &= \frac{k_1 k_3 - k_2'}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\psi(s) = \psi(s) &+ \frac{k_1 k_3 - k_2'}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{n}_q(s) \\ &+ \frac{k_1' - k_2 k_3}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{b}_q(s) \end{aligned}$$

elde edilir. (5.40) denkleminin s parametresine göre tekrar türevi alınır

$$\frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial s} = (1 - k_1 c_1 - k_2 c_2) \mathbf{t} + (c_1' + c_2 k_3) \mathbf{n}_q + (c_2' + c_1 k_3) \mathbf{b}_q \quad (5.47)$$

ve buradan

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = |c_2' + c_1 k_3| \quad (5.48)$$

elde edilir. $\frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial s} = t_\sigma$ olarak gösterilirse ve (5.48) denklemi (5.47) denkleminde yerine yazılırsa

$$t_\sigma = \frac{c_2' + c_1 k_3}{|c_2' + c_1 k_3|} \mathbf{b}_q$$

elde edilir. Gösterimlerde kısalık için $\varepsilon_t = \frac{c_2' + c_1 k_3}{|c_2' + c_1 k_3|}$ olarak alınır

$$\frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial s} = t_\sigma = \varepsilon_t \mathbf{b}_q \quad (5.49)$$

bulunur. (5.49) denkleminde her iki tarafın türevinin normu alınır ise $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{|k_2^2 - k_3^2|}}$

olmak üzere

$$\kappa_\sigma = \frac{\sqrt{|k_2^2 - k_3^2|}}{|c_2' + c_1 k_3|}$$

ve buradan

$$n_\sigma = \varepsilon_t \varepsilon_n (-k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q) \quad (5.50)$$

elde edilir. $b_\sigma = t_\sigma \times n_\sigma$ olduğundan

$$b_\sigma = -\varepsilon_n (k_3 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{n}_q) \quad (5.51)$$

dir.

Teorem 5.6 ψ teorem 4.5'deki koşulları sağlayan bir eğri ve ψ eğrisinin fokal eğrisi olan $\mathcal{D}_\psi$ etrafında oluşan kanal yüzey

$$\begin{aligned} K(s, t) = & \mathcal{D}_\psi(s) + \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t (d\theta + \tau) \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t \varepsilon_t k \sinh \theta \right) \mathbf{t} \\ & + \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t (d\theta + \tau) \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t \kappa \sinh \theta \right) \mathbf{n}_q \\ & - \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q \end{aligned}$$

dir.

İspat ψ teorem 4.5'deki koşulları sağlayan bir eğri olsun. ψ eğrisinin kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\mathcal{D}_\psi$ fokal eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\sigma, n_\sigma, b_\sigma\}$ olmak üzere

$$K(s, t) - \mathcal{D}_\psi(s) = a(s, t)t_\sigma(s) + b(s, t)n_\sigma(s) + c(s, t)b_\sigma(s) \quad (5.52)$$

yazılabilir. Son denklemde (5.49), (5.50) ve (5.51) denklemleri göz önüne alınır

$$K(s, t) - \mathcal{D}_\psi(s) = \varepsilon_n (-b(s, t)k_2 \varepsilon_t - a(s, t)k_3) \mathbf{t}$$

$$+\varepsilon_n(b(s,t)k_3\varepsilon_t - a(s,t)k_2)\mathbf{n}_q + \varepsilon_t c(s,t)\mathbf{b}_q \quad (5.53)$$

yazılabilir. (5.53) denkleminde her iki tarafın normu alınır

$$\|K(s,t) - \mathfrak{D}_\psi(s)\|^2 = r^2(s) \quad (5.54)$$

veya

$$\langle K(s,t) - \mathfrak{D}_\psi(s), K_s \rangle = 0 \quad (5.55)$$

$$\langle K(s,t) - \mathfrak{D}_\psi(s), K_t \rangle = 0 \quad (5.56)$$

elde edilir. (5.52) ve (5.53) denklemleri (5.54) ve (5.55)' de göz önüne alınır

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^2(a^2 - b^2)(k_3^2 - k_2^2) + 4ab\varepsilon_t k_3 k_2 &= r^2 - c^2 \\ a^2 - b^2 + c^2 &= r^2 \\ aa_s - bb_s + cc_s &= rr' \end{aligned} \quad (5.57)$$

elde edilir. $v = \frac{\partial \sigma}{\partial s} = |c_2' + c_1 k_3|$ için (5.53) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned} K_s &= [\varepsilon_n'(bk_2\varepsilon_t - ak_3) + \varepsilon_n(-b_s k_2 \varepsilon_t - bk_2' \varepsilon_t - a_s k_3 - ak_3' - bk_1 k_3 \varepsilon_t + \\ &\quad ak_1 k_2) - ck_2 \varepsilon_t] \mathbf{t} \\ &+ [\varepsilon_n'(bk_3 \varepsilon_t - ak_2) + \varepsilon_n(b_s k_3 \varepsilon_t + bk_3' \varepsilon_t - a_s k_2 - ak_2' + bk_1 k_2 \varepsilon_t + \\ &\quad ak_1 k_3) + ck_3 \varepsilon_t] \mathbf{n}_q \\ &+ [\varepsilon_n b \varepsilon_t (-k_2^2 + k_3^2) + \varepsilon_t (c_s + v) - 2ak_2 k_3 \varepsilon_n] \mathbf{b}_q \end{aligned} \quad (5.58)$$

bulunur. (5.53), (5.55), (5.57) ve (5.58) birlikte düşünülürse

$$-cv = rr'$$

olacağından

$$\begin{aligned} a &= \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t \\ b &= \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t \end{aligned}$$

bulunur. Son iki eşitlik (5.53)'de yerine yazılır ise

$$\begin{aligned} K(s,t) - \mathfrak{D}_\psi(s) &= \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t k_3 \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t k_2 \varepsilon_t \right) \mathbf{t} \\ &+ \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t k_3 \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t k_2 \right) \mathbf{n}_q \end{aligned}$$

$$-\varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q$$

bulunur. k_2 ve k_3 değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) &= \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t (d\theta + \tau) \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t \varepsilon_t k \sinh \theta \right) \mathbf{t} \\ &+ \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t (d\theta + \tau) \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t \kappa \sinh \theta \right) \mathbf{n}_q \\ &- \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 5.3 r 'nin sabit olması durumunda $K(s, t)$ tüp yüzeyi elde edilir. Bunun sonucunda

$$\begin{aligned} K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) &= \varepsilon_n (\pm r \cosh t k_3 \pm r \sinh t k_2 \varepsilon_t) \mathbf{t} \\ &+ \varepsilon_n (\pm r \sinh t k_3 \varepsilon_t \pm r \cosh t k_2) \mathbf{n}_q \end{aligned}$$

elde edilir.

4. Durum Normal Vektörü Spacelike olan Spacelike Eğriler;

Teorem 5.7. ψ teorem 4.7'deki koşulları sağlayan bir eğri olsun. Bu durumda ψ eğrisinin kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\mathfrak{D}_\psi$ fokal eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\sigma, n_\sigma, b_\sigma\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\psi(s) &= \psi(s) + \frac{k_1 k_3 - k_2'}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{n}_q(s) \\ &+ \frac{k_1' - k_2 k_3}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{b}_q(s) \end{aligned}$$

ve

$$t_\sigma = \varepsilon_t \mathbf{b}_q$$

$$n_\sigma = \varepsilon_t \varepsilon_n (-k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q)$$

$$b_\sigma = -\varepsilon_n (k_3 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{n}_q)$$

İspat ψ teorem 4.7'deki koşulları sağlayan bir eğri, kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve ψ eğrisinin fokal eğrisi $\mathfrak{D}_\psi$ olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{D}_\psi - \psi = c_0 \mathbf{t} + c_1 \mathbf{n}_q + c_2 \mathbf{b}_q \quad (5.59)$$

yazılabilir. (5.59) denkleminde

$$\langle \mathfrak{D}_\psi - \psi, \mathbf{t} \rangle = c_0 \quad (5.60)$$

$$\langle \mathfrak{D}_\psi - \psi, \mathbf{n}_q \rangle = -c_1 \quad (5.61)$$

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{b}_q \rangle = c_2 \quad (5.62)$$

olur. Diğer taraftan (5.1) göz önüne alınırsa

$$f = 0 \Rightarrow \langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = r^2$$

$$f' = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{t}, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = 0$$

$$f'' = 0 \Rightarrow -k_1 \langle \mathbf{n}_q, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle + k_2 \langle \mathbf{b}_q, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = 1 \quad (5.63)$$

$$f''' = 0 \Rightarrow (k_1' - k_2 k_3) c_1 + (k_2' - k_1 k_3) c_2 = 0 \quad (5.64)$$

elde edilir. (5.61), (5.62) ve (5.63) denklemlerinden

$$k_1 c_1 + k_2 c_2 = 1 \quad (5.65)$$

elde edilir. (5.64) ve (5.65) denklemleri birlikte düşünülür ise

$$c_2 = \frac{k_1' - k_2 k_3}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'}$$

$$c_1 = \frac{k_1 k_3 - k_2'}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\psi(s) = \psi(s) &+ \frac{k_1 k_3 - k_2'}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{n}_q(s) \\ &+ \frac{k_1' - k_2 k_3}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 + k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{b}_q(s) \end{aligned}$$

elde edilir. (5.59) denkleminin s parametresine göre tekrar türevi alınırsa

$$\frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial s} = (1 - k_1 c_1 - k_2 c_2) \mathbf{t} + (c_1' + c_2 k_3) \mathbf{n}_q + (c_2' + c_1 k_3) \mathbf{b}_q \quad (5.66)$$

ve buradan

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = |c_2' + c_1 k_3| \quad (5.67)$$

elde edilir. $\frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial s} = t_\sigma$ olarak gösterilirse ve (5.67) denklemi (5.66) denkleminde yerine yazılırsa

$$t_\sigma = \frac{c_2' + c_1 k_3}{|c_2' + c_1 k_3|} \mathbf{b}_q$$

elde edilir. Gösterimlerde kısalık için $\varepsilon_t = \frac{c_2' + c_1 k_3}{|c_2' + c_1 k_3|}$ olarak alınırsa

$$\frac{\partial \mathcal{D}_\psi}{\partial s} = t_\sigma = \varepsilon_t \mathbf{b}_q \quad (5.68)$$

bulunur. (5.68) denkleminde her iki tarafın türevinin normu alınır ise $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{|k_2^2 - k_3^2|}}$

olmak üzere

$$\kappa_\sigma = \frac{\sqrt{|k_2^2 - k_3^2|}}{|c_2' + c_1 k_3|}$$

ve buradan

$$n_\sigma = \varepsilon_t \varepsilon_n (-k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q) \quad (5.69)$$

elde edilir. $b_\sigma = t_\sigma \times n_\sigma$ olduğundan

$$b_\sigma = -\varepsilon_n (k_3 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{n}_q) \quad (5.70)$$

dir.

Teorem 5.8. ψ teorem 4.7'deki koşulları sağlayan bir eğri ve ψ eğrisinin fokal eğrisi olan $\mathfrak{D}_\psi$ etrafında oluşan kanal yüzey

$$\begin{aligned} K(s, t) = & \mathfrak{D}_\psi(s) + \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t (d\theta + \tau) \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t \varepsilon_t k \cosh \theta \right) \mathbf{t} \\ & + \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t (d\theta + \tau) \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t \kappa \cosh \theta \right) \mathbf{n}_q \\ & - \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q \end{aligned}$$

dir.

İspat ψ teorem 4.7'deki koşulları sağlayan bir eğri olsun. ψ eğrisinin kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\mathfrak{D}_\psi$ fokal eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\sigma, n_\sigma, b_\sigma\}$ olmak üzere

$$K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = a(s, t)t_\sigma(s) + b(s, t)n_\sigma(s) + c(s, t)b_\sigma(s) \quad (5.71)$$

yazılabilir. Son denklemde (5.68), (5.69) ve (5.70) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = & \varepsilon_n (-b(s, t)k_2 \varepsilon_t - a(s, t)k_3) \mathbf{t} \\ & + \varepsilon_n (b(s, t)k_3 \varepsilon_t - a(s, t)k_2) \mathbf{n}_q + \varepsilon_t c(s, t) \mathbf{b}_q \end{aligned} \quad (5.72)$$

yazılabilir. (5.73) denkleminde her iki tarafın normu alınırsa

$$\|K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s)\|^2 = r^2(s) \quad (5.73)$$

veya

$$\langle K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s), K_s \rangle = 0 \quad (5.74)$$

$$\langle K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s), K_t \rangle = 0 \quad (5.75)$$

elde edilir. (5.71) ve (5.72) denklemleri (5.73) ve (5.74)' de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^2 (a^2 - b^2) (k_3^2 - k_2^2) + 4ab \varepsilon_t k_3 k_2 &= r^2 - c^2 \\ a^2 - b^2 + c^2 &= r^2 \\ aa_s - bb_s + cc_s &= rr' \end{aligned} \quad (5.76)$$

elde edilir. $v = \frac{\partial \sigma}{\partial s} = |c_2' + c_1 k_3|$ için (5.72) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
 K_s = & [\varepsilon_n'(bk_2\varepsilon_t - ak_3) + \varepsilon_n(-b_s k_2 \varepsilon_t - bk_2' \varepsilon_t - a_s k_3 - ak_3' - bk_1 k_3 \varepsilon_t + \\
 & ak_1 k_2) - ck_2 \varepsilon_t] \mathbf{t} \\
 & + [\varepsilon_n'(bk_3 \varepsilon_t - ak_2) + \varepsilon_n(b_s k_3 \varepsilon_t + bk_3' \varepsilon_t - a_s k_2 - ak_2' + bk_1 k_2 \varepsilon_t + \\
 & ak_1 k_3) + ck_3 \varepsilon_t] \mathbf{n}_q \\
 & + [\varepsilon_n b \varepsilon_t (-k_2^2 + k_3^2) + \varepsilon_t (c_s + v) - 2ak_2 k_3 \varepsilon_n] \mathbf{b}_q
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

bulunur. (5.72), (5.74), (5.76) ve (5.77) birlikte düşünülürse

$$-cv = rr'$$

olacağından

$$\begin{aligned}
 a &= \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t \\
 b &= \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t
 \end{aligned}$$

bulunur. Son iki eşitlik (5.72)'de yerine yazılır ise

$$\begin{aligned}
 K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) &= \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t k_3 \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t k_2 \varepsilon_t \right) \mathbf{t} \\
 &+ \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t k_3 \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t k_2 \right) \mathbf{n}_q \\
 &- \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q
 \end{aligned}$$

bulunur. k_2 ve k_3 değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) &= \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t (d\theta + \tau) \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t \varepsilon_t k \cosh \theta \right) \mathbf{t} \\
 &+ \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t (d\theta + \tau) \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t \kappa \cosh \theta \right) \mathbf{n}_q \\
 &- \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 5.4 r 'nin sabit olması durumunda $K(s, t)$ tüp yüzeyi elde edilir. Bunun sonucunda

$$\begin{aligned}
 K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) &= \varepsilon_n (\pm r \cosh t k_3 \pm r \sinh t k_2 \varepsilon_t) \mathbf{t} \\
 &+ \varepsilon_n (\pm r \sinh t k_3 \varepsilon_t \pm r \cosh t k_2) \mathbf{n}_q
 \end{aligned}$$

elde edilir.

5. Durum Timelike Eğriler;

Teorem 5.9. ψ teorem 4.9'deki koşulları sağlayan bir eğri olsun. Bu durumda ψ eğrisinin kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\mathcal{D}_\psi$ fokal eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\sigma, n_\sigma, b_\sigma\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\psi(s) = \psi(s) &+ \frac{k_1 k_3 + k_2'}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{n}_q(s) \\ &+ \frac{-k_1' + k_2 k_3}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{b}_q(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t_\sigma &= \varepsilon_t \mathbf{b}_q \\ n_\sigma &= \varepsilon_t \varepsilon_n (k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q) \\ b_\sigma &= \varepsilon_n (k_3 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{n}_q) \end{aligned}$$

İspat ψ teorem 4.9'deki koşulları sağlayan bir eğri, kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve ψ eğrisinin fokal eğrisi $\mathcal{D}_\psi$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{D}_\psi - \psi = c_0 \mathbf{t} + c_1 \mathbf{n}_q + c_2 \mathbf{b}_q \quad (5.78)$$

yazılabilir. (5.78) denklemden

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{t} \rangle = -c_0 \quad (5.79)$$

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{n}_q \rangle = c_1 \quad (5.80)$$

$$\langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathbf{b}_q \rangle = c_2 \quad (5.81)$$

olur. Diğer taraftan (5.1) göz önüne alınırsa

$$f = 0 \Rightarrow \langle \mathcal{D}_\psi - \psi, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = r^2$$

$$f' = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{t}, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = 0$$

$$f'' = 0 \Rightarrow +k_1 \langle \mathbf{n}_q, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle + k_2 \langle \mathbf{b}_q, \mathcal{D}_\psi - \psi \rangle = 1 \quad (5.82)$$

$$f''' = 0 \Rightarrow (k_1' - k_2 k_3) c_1 + (k_2' + k_1 k_3) c_2 = 0 \quad (5.83)$$

elde edilir. (5.80), (5.81) ve (5.82) denklemlerinden

$$k_1 c_1 + k_2 c_2 = -1 \quad (5.84)$$

elde edilir. (5.83) ve (5.84) denklemleri birlikte düşünülür ise

$$c_2 = \frac{-k_1' + k_2 k_3}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'}$$

$$c_1 = \frac{k_1 k_3 + k_2'}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\psi(s) = \psi(s) &+ \frac{k_1 k_3 + k_2'}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{n}_q(s) \\ &+ \frac{-k_1' + k_2 k_3}{k_1' k_2 - k_2^2 k_3 - k_1^2 k_3 - k_1 k_2'} \mathbf{b}_q(s) \end{aligned}$$

elde edilir. (5.78) denkleminin s parametresine göre tekrar türevi alınırsa

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_\psi}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{D}_\psi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial s} = (1 + k_1 c_1 + k_2 c_2) \mathbf{t} + (c_1' - c_2 k_3) \mathbf{n}_q + (c_2' + c_1 k_3) \mathbf{b}_q \quad (5.85)$$

ve buradan

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = |c_2' + c_1 k_3| \quad (5.86)$$

elde edilir. $\frac{\partial \mathfrak{D}_\psi}{\partial s} = t_\sigma$ olacak gösterilirse ve (5.86) denklemi (5.85) denkleminde yerine yazılırsa

$$t_\sigma = \frac{c_2' + c_1 k_3}{|c_2' + c_1 k_3|} \mathbf{b}_q$$

elde edilir. Gösterimlerde kısalık için $\varepsilon_t = \frac{c_2' + c_1 k_3}{|c_2' + c_1 k_3|}$ olarak alınırsa

$$t_\sigma = \varepsilon_t \mathbf{b}_q = \frac{\partial \mathfrak{D}_\psi}{\partial s} \quad (5.87)$$

bulunur. (5.87) denkleminde her iki tarafın türevinin normu alınır ise $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{|-k_2^2 + k_3^2|}}$

olmak üzere

$$\kappa_\sigma = \frac{\sqrt{|-k_2^2 + k_3^2|}}{|c_2' + c_1 k_3|}$$

ve buradan

$$n_\sigma = \varepsilon_t \varepsilon_n (-k_2 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{n}_q) \quad (5.88)$$

elde edilir. $b_\sigma = t_\sigma \times n_\sigma$ olduğundan

$$b_\sigma = \varepsilon_n (k_3 \mathbf{t} + k_2 \mathbf{n}_q) \quad (5.89)$$

dir.

Teorem 5.10 ψ teorem 4.9'deki koşulları sağlayan bir eğri ve ψ eğrisinin fokal eğrisi olan $\mathfrak{D}_\psi$ etrafında oluşan kanal yüzey

$$\begin{aligned}
K(s, t) = \mathfrak{D}_\psi(s) + \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t k \sin \theta \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t (d\theta + \tau) \right) \mathbf{t} \\
+ \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t (d\theta + \tau) \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t k \sin \theta \right) \mathbf{n}_q \\
- \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q
\end{aligned}$$

dir.

İspat ψ teorem 4.9'deki koşulları sağlayan bir eğri olsun. ψ eğrisinin kuasi çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\mathfrak{D}_\psi$ fokal eğrisinin Frenet çatısı $\{t_\sigma, n_\sigma, b_\sigma\}$ olmak üzere

$$K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = a(s, t)t_\sigma(s) + b(s, t)n_\sigma(s) + c(s, t)b_\sigma(s) \quad (5.90)$$

yazılabilir. Son denklemde (5.87), (5.88) ve (5.89) denklemleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = \varepsilon_n(b(s, t)k_2\varepsilon_t + a(s, t)k_3)\mathbf{t} \\
+ \varepsilon_n(-b(s, t)k_3\varepsilon_t + a(s, t)k_2)\mathbf{n}_q + \varepsilon_t c(s, t)\mathbf{b}_q
\end{aligned} \quad (5.91)$$

yazılabilir. (5.91) denkleminde her iki tarafın normu alınırsa

$$\|K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s)\|^2 = r^2(s) \quad (5.92)$$

veya

$$\langle K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s), K_s \rangle = 0 \quad (5.93)$$

$$\langle K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s), K_t \rangle = 0 \quad (5.94)$$

elde edilir. (5.90) ve (5.91) denklemleri (5.92) ve (5.93)' de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^2(a^2 - b^2)(-k_3^2 + k_2^2) + 44ab\varepsilon_t k_3 k_2 = r^2 - c^2 \\
-a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\
-aa_s + bb_s + cc_s = rr'
\end{aligned} \quad (5.95)$$

elde edilir. $v = \frac{\partial \sigma}{\partial s} = |c_2' + c_1 k_3|$ için (5.91) denkleminin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
K_s = [\varepsilon_n'(bk_2\varepsilon_t + ak_3) + \varepsilon_n(b_s k_2 \varepsilon_t + bk_2' \varepsilon_t + a_s k_3 + ak_3' - bk_1 k_3 \varepsilon_t + \\
ak_1 k_2) + ck_2 \varepsilon_t] \mathbf{t} \\
+ [\varepsilon_n'(-bk_3 \varepsilon_t + ak_2) + \varepsilon_n(-b_s k_3 \varepsilon_t - bk_3' \varepsilon_t + a_s k_2 + ak_2' + bk_1 k_2 \varepsilon_t + \\
ak_1 k_3) - ck_3 \varepsilon_t] \mathbf{n}_q \\
+ [\varepsilon_n b \varepsilon_t (k_2^2 - k_3^2) + \varepsilon_t (c_s + v) + 2ak_2 k_3 \varepsilon_n] \mathbf{b}_q
\end{aligned} \quad (5.96)$$

bulunur. (5.91), (5.93), (5.95) ve (5.96) birlikte düşünülürse

$$-cv = rr'$$

olacağından

$$a = \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t$$

$$b = \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t$$

bulunur. Son iki eşitlik (5.91)'de yerine yazılır ise

$$K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t k_2 \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t k_3 \right) \mathbf{t}$$

$$+ \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t k_3 \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t k_2 \right) \mathbf{n}_q$$

$$- \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q$$

bulunur. k_2 ve k_3 değerleri yerine yazılırsa

$$K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t k \sin \theta \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t (d\theta + \tau) \right) \mathbf{t}$$

$$+ \varepsilon_n \left(\pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \cosh t (d\theta + \tau) \varepsilon_t \pm r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{v}\right)^2} \sinh t k \sin \theta \right) \mathbf{n}_q$$

$$- \varepsilon_t \frac{rr'}{v} \mathbf{b}_q$$

elde edilir.

Sonuç 5.5 r 'nin sabit olması durumunda $K(s, t)$ tüp yüzeyi elde edilir. Bunun sonucunda

$$K(s, t) - \mathfrak{D}_\psi(s) = \varepsilon_n (\pm r \cosh t k_2 \varepsilon_t \pm r \sinh t k_3) \mathbf{t}$$

$$+ \varepsilon_n (\pm r \cosh t k_3 \varepsilon_t \pm r \sinh t k_2) \mathbf{n}_q$$

elde edilir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Lorentz-Minkowski geometrisi özellikle diferensiyel geometri, matematiksel fizik gibi alanlarla ilişkilendirilmiştir. Bu bilim dallarında karşılaşılan problemlerin çözümleri için Öklid dışı geometriden yardım alındığı için biz de tez çalışmamızda Lorentz-Minkowski uzayındaki kuasi çatıyı kullanarak sonuçlar elde ettik. Fakat farklı uzaylarda fokal eğriler ve fokal yüzeyler incelenerek yeni denklemler de elde edilebilir.

Eğriler diferensiyel geometri için önemli bir yer kaplamaktadır. Bu tezde özel bir eğri olan fokal eğriler ile ilgilenildi. Fokal eğri bir eğrinin oskülatör kürelerinin merkezinin geometrik yeri olarak değerlendirilir. Bu tez çalışmasında 3 boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında kuasi çatı yardımıyla fokal eğri ve fokal yüzeyler için çalışmalar yapılmıştır. İlk olarak Minkowski uzayında kuasi çatının beş farklı durumuna göre sırası ile fokal eğriler elde edilmiştir. Daha sonra bu eğriler etrafında kanal ve tüp yüzeyleri oluşturulmuştur.

Bu tezde elde edilen tanım ve teoriler fizikin optik ve akışkanlar mekaniği başta olmak üzere çeşitli alanlarında kullanılabilir. Fizikte canlıların göz yapısı ve odak noktalarından yararlanarak en iyi görüntüyü alabilmek fokal eğriler aracılığı ile bulunabilir.

KAYNAKLAR

- Al-Dayel, I., Solouma, E., & Khan, M. (2022). On geometry of focal surfaces due to B-Darboux and type-2 Bishop frames in Euclidean 3-space. *AIMS Mathematics*, 7(7), 13454-13468. <https://doi.org/10.3934/math.2022744>
- Alegre, P., Arslan, K., Carriazo, A., Murathan, C., and Öztürk, G., Some Special Types of Developable Ruled Surface, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 2010.
- Adam, John A. The Mathematical Physics Of Rainbows And Glories. *Physics Reports*, 2002, 356.4-5: 229-365.
- Dogan, Fatih. Genelleştirilmiş Kanal Yüzeyleri. 2012. Phd Thesis. Doktora Tezi, Ankara.
- Eisenhart, L. P. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces (Dover Pub. Inc., New York, 1909).
- G.H. Georgiev, M.D. Pavlov, Focal and Generalized Focal surfaces of parabolic cylinders, *ARPJ. Eng. Appl. Sci.* (2018).
- Gökçelik, Fatma Yazar Ve Nejat Tez Danışmanı EKMEKÇİ. Fokal Eğriler Ve Yüzeyler Üzerine Diss. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 2012.
- Gray, A. Modern Differential Geometry Of Curves And Surfaces With Mathematica. Second Ed. Crcpress 1998., 1053 P., USA.1
- Güler, F. (2022). The focal surfaces of offset surface. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 271, 170053. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170053>
- Hacısalıhoğlu, H. Hilmi. Diferensiyel Geometri. İnönü Univ. Yayınları, Mat., 1983, 2: 227.
- Hacısalıhoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, I. Cilt, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara 1998, s. 139-259.
- Hacısalıhoğlu, H. H., Lineer Cebir, I. Cilt, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara 2000, s. 99-178.
- Hagen, H., Müller, H., & Nielson, G. M. (1991). Focus on Scientific Visualization, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 252-25
- Hagen, Hans; Hahmann, Stefanie. Generalized Focal Surfaces: A New Method For Surface Interrogation. In: *Proceedings Visualization'92*. IEEE Computer Society, 1992. P. 70-76.

- Izumiya, S. And Takeuchi, N. New special curves and developable surfaces, Turkish J. Math. 28, 153–163, 2004.
- Korpinar T, Turhan E. On characterization of dual Focal curves of spacelike biharmonic curves with timelike binormal in the dual Lorentzian D_3^1 . Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica 2012; 57 (3): 421- 426.
- Liu, Huili; Wang, Fan. Mannheim Partner Curves In 3-Space. *Journal Of Geometry*, 2008, 88.1-2: 120-126.
- Lopez, R.: Differential Geometry Of Curves And Surfaces In Lorentzminkowski Space. International Electronic Journal Of Geometry 2014, 7 (1); 44
- Math, Kragujevac J. Some Characterizations Of The Spacelike, The Timelike And The Null Curves On The Pseudohyperbolic Space H_2^0 In E_3 , 2000.
- O’neill, B. Semi-Riemannian Geometry With Applications To Relativity. Academic Press, New York, 1983.
- Özdemir, B. 2008. E^n ’de Fokal Eğriler ve Fokal Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu, Doktora Tezi.
- S. Yurttancikmaz, O. Tarakci, The relationship between focal surfaces and surfaces at a constant distance from the edge of regression on a surface, Adv. Math. Phys. (2015).
- Şımşek, Hakan. Sonlu Boyutlu Minkowski Uzaylarında Fokal Eğriler Ve Fokal Yüzeyler. 2016.
- Tarım, Gamze. Minkowski Uzayında Yönlü Eğriler Üzerine. Master's Thesis. Fen Bilimleri Enstitüsü. 2016
- Tunçer, Y. And Yoon, D.W., Weingarten And Linear Weingarten Canal Surfaces In Euclidean 3- Space, General Mathematics Notes 2016, 36(1), 48.
- Uribe-Vargas, Ricardo. On Vertices, Focal Curvatures And Differential Geometry Of Space Curves. Bulletin Of The Brazilian Mathematical Society, 2005, 36: 285-307.
- Yates, R. C. Isoptic Curves. A Handbook On Curves And Their Properties (1974).
- Yılmaz, Süha. Construction of the Frenet-Serret frame of a curve in 4D Galilean space and some applications. International Journal of the Physical Sciences, 2010, 5: 1284-1289.
- Yıldırım, A. (2018). Canal Surface Around A Spacelike Focal Curve In Lorentz 3-Space. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 22(2), 608-614.

Xu, Z.Q., Freng, R.Z. And Sun, J.G., Analytic And Algebraic Properties Of Canal Surfaces, J. Comput. Appl. Math. 2006, 195(1-2), 220-228

