

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

2024-YL-36

DEJENERE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE DEJENERE GAMA
FONKSİYONU

Müge SOLMAZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. İnci EGE

AYDIN-2024

KABUL ve ONAY

T.C. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Müge SOLMAZ tarafından hazırlanan "DEJENERE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE DEJENERE GAMA FONKSİYONU" başlıklı tez, aşağıdaki jüri tarafından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 11/06/2024

Jüri Üyeleri

ONAY:

Başkan : Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ
HÜ Fen Fak.

Üye : Prof. Dr. İnci EGE
ADÜ Fen Fak.

Üye : Doç. Dr. Emrah YILDIRIM
ADÜ Fen Fak.

Bu tez Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca uygun görülmüş ve Fen Bilimleri Enstitüsünün .../.../2024 tarih vesayılı oturumunda alınan numaralı Yönetim Kurulu kararıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa Sürmen
Enstitü Müdürü



TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın gerçekleőtirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaőan, kendisine ne zaman danıősam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen danışman hocam Prof.Dr. İnci EGE ' ye yrektek teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana destek olan, umut veren annem ve babama teşekkür eder sevgilerimi sunarım. Ayrıca hayatımın her aőamasında yanımda olan ve bana g veren kız kardeőlerime teşekkür ederim.





BİLİMSEL ETİK BEYANI

“DEJENERE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE DEJENERE GAMA FONKSİYONU” başlıklı Yüksek Lisans tezindeki bütün bilgileri etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiz atf yaptığımı bildiririm. İfade ettiklerimin aksi ortaya çıktığında ise her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Müge SOLMAZ

11/06/2024



İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEŞEKKÜR	iii
BİLİMSEL ETİK BEYANI	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER DİZİNİ	ix
ÖZET	xi
ABSTRACT	xiii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	5
3.1. Gama, Beta Fonksiyonları ve Bazı Özellikleri	5
3.2. Laplace Dönüşümü	9
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	19
4.1. Dejenere Üstel, Dejenere Euler ve Dejenere Gama Fonksiyonları	19
4.2. Dejenere Gama Fonksiyonunun Bazı Özellikleri	22
4.3. Dejenere Laplace Dönüşümü	29
4.4. Dejenere Laplace Dönüşümünün Bazı Uygulamaları	30
5. SONUÇ	47
KAYNAKLAR	49
ÖZ GEÇMİŞ	51



SİMGELER DİZİNİ

- $e_\lambda(v)$: Dejenere üstel fonksiyon
- $\log_\lambda(v)$: Dejenere logaritma fonksiyonu
- $\cos_\lambda(v)$: Dejenere kosinüs fonksiyonu
- $\cosh_\lambda(v)$: Dejenere kosinüs hiperbolik fonksiyonu
- $\sin_\lambda(v)$: Dejenere sinüs fonksiyonu
- $\sinh_\lambda(v)$: Dejenere sinüs hiperbolik fonksiyonu
- $\text{res}_{r=-n}$: $r = -n$ için rezidü
- $\text{res}_{r=\frac{1}{\lambda}+n}$: $r = \frac{1}{\lambda} + n$ için rezidü
- γ : Euler sabiti
- $(x)_k$: Pochhammer sembolü
- $(x)_{k,\lambda}$: Dejenere Pochhammer sembolü
- \mathbb{N} : Doğal sayılar kümesi
- \mathbb{Z} : Tamsayılar kümesi
- \mathbb{R} : Gerçek sayılar kümesi
- \mathbb{C} : Karmaşık sayılar kümesi
- $\text{Re}(\alpha)$: α karmaşık sayısının gerçel kısmı

$\Gamma(\alpha)$: Gama fonksiyonu

$\Gamma_\lambda(\alpha)$: Dejenere Gama fonksiyonu

$B(\alpha, \beta)$: Beta fonksiyonu

$B_\lambda(\alpha, \beta)$: Dejenere Beta fonksiyonu

$\mathcal{L}_\lambda\{f(v)\}$: Laplace dönüşümü

$\mathcal{L}_\lambda\{f(v)\}$: Dejenere Laplace dönüşümü

$\mathcal{L}^k\{f(v)\}$: Laplace dönüşümünün k. mertebeden türevi

ÖZET

DEJENERE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE DEJENERE GAMA FONKSİYONU

Solmaz, M., Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Danışman: Prof. Dr. İnci EGE, Aydın, 2024.

Amaç: Bu çalışmada dejenere üstel, dejenere Euler ve dejenere Gama fonksiyonlarının tanımı ve özellikleri ile dejenere Laplace dönüşümünün tanımı ve bazı uygulamalarının verilmesi amaçlanmaktadır.

Materyal ve Yöntem: Konu ile ilgili yazılmış tüm makale ve kitaplar araştırmanın materyalleridir. Araştırma tekniği olarak kaynaklar kısmında verilen makaleler incelenmiş, sonrasında da matematiksel ispat yöntemleri kullanılarak çalışma yürütülmüştür.

Bulgular: Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünün ardından ikinci bölümde, tezde kullanılan kaynak özetlerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Gama fonksiyonu, beta fonksiyonu ve Laplace dönüşümü tanıtılarak tezin ilerleyen kısmında kullanılacak bazı teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise dejenere üstel, dejenere Euler ve dejenere Gama fonksiyonları özellikleriyle birlikte verilmiştir. Ayrıca dejenere Laplace dönüşümü tanıtılmış ve bazı uygulamaları ve Laplace dönüşümü ile aralarındaki ilişkiler verilmiştir.

Sonuç: Bu yüksek lisans tez çalışmasında Gama fonksiyonu ve Laplace dönüşümü ile ilişkili olan dejenere Gama ve dejenere Laplace dönüşümleri tanıtılmış, özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiş ve bu konuda elde edilen sonuçlar ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Gama fonksiyonu, Laplace dönüşümü, Dejenere üstel fonksiyonu, Dejenere Gama fonksiyonu, Dejenere Laplace dönüşümü.



ABSTRACT

DEGENERATE LAPLACE TRANSFORM AND DEGENERATE GAMMA FUNCTION

Solmaz M., Aydın Adnan Menderes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics, Master Thesis, Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İnci EGE, Aydın, 2024.

Objective: This study aims to give the definition and properties of degenerate exponential, degenerate Euler, and degenerate Gamma functions, and the definition and some applications of the degenerate Laplace transform.

Material and Methods: All articles and books written on the subject are the materials of the study. As a research technique, the articles given in the references section were examined and then the study was carried out using mathematical proof methods.

Results: The thesis consists of five chapters. After the introduction, the second chapter summarises the references used in the thesis. The third chapter introduces the gamma function, the beta function and the Laplace transform and gives some theorems that will be used in the rest of the thesis. In the fourth chapter the degenerate exponential, degenerate Euler and degenerate Gamma functions are given with their properties. The degenerate Laplace transform is also introduced and some applications and relations to the Laplace transform are given.

Conclusion: In this thesis, degenerate Gamma and degenerate Laplace transforms, which are related to the Gamma function and the Laplace transform, are introduced, their properties are studied in detail and the results obtained in this subject are given with their proofs.

Keywords: Gamma function, Laplace transform, Degenerate exponential function, Degenerate Gamma function, Degenerate Laplace transform,



1. GİRİŞ

Gama fonksiyonunu, ilk tanımlayan kişi Leonard Euler olmuştur. Ancak daha sonra kompleks sayılar için çalışan Gauss, Weierstrass çarpımı adını alan, $\frac{1}{\Gamma(r)}$ fonksiyonunun sonsuz çarpımını keşfeden Weierstrass gibi birçok matematikçi gama fonksiyonun gelişimine katkı sağlamıştır. Gama fonksiyonu matematikte faktöriyel fonksiyonunun karmaşık sayılar ve tam sayı olmayan reel sayılar için genellenmesi olan bir fonksiyondur ve Γ simgesiyle gösterilir.

Bu çalışmada da yer alan Laplace dönüşümü, fizik ve mühendislikte birçok uygulama ile yaygın olarak kullanılan bir integral dönüşümüdür. Adını, olasılık teorisi üzerine yaptığı çalışmalarda dönüşümü tanıtan matematikçi ve astronom Pierre Simon Laplace'den almıştır.

Gama fonksiyon ve Laplace dönüşüm için birçok çalışma yapılmış ve özellikler keşfedilmiştir. Bu tezde Gama fonksiyon ve Laplace dönüşümü için ön araştırmalar sırasında birçok akademik yayın incelenmiştir. Yapılan son çalışmalarda klasik analizde kullanılan Gama fonksiyon ve Laplace dönüşümünün tanımında yer alan e^{-v} üstel fonksiyonuna benzer olarak $\lambda \in (0, \infty)$ ve $v \in \mathbb{R}$ değerleri için $e_{\lambda}^v = (1 + \lambda v)^{\frac{1}{\lambda}}$ dejenere üstel fonksiyonu tanımlanarak Dejenere Gama fonksiyon ve Dejenere Laplace dönüşümü tanıtılmıştır.

Bu tezde; Gama fonksiyonu ve Laplace dönüşümünün dejenere versiyonu tanımlanacak olup dejenere Gama fonksiyonu ve dejenere Laplace dönüşümüne yer verilecektir. Dejenere Gama fonksiyonun rezidüsü, dejenere Beta fonksiyonu ile ilişkisi verilecektir. Ayrıca trigonometrik fonksiyon, üstel mertebeli fonksiyon gibi fonksiyonlar için dejenere Laplace dönüşümünde uygulanacak bazı teorem ve ispatlara yer verilecektir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Gama fonksiyonu, $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $Re(\alpha) > 0$ değerleri için Euler tarafından

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} v^{\alpha-1} e^{-v} dv$$

integrali ile tanımlanır (Andrews vd., 1999). Ayrıca Euler integrali ile tanımlanan Gama fonksiyonunun bir diğer adı geneleştirilmiş faktöriyel fonksiyonudur.

Gama fonksiyon için limit yardımıyla tanımlanan Gauss formülü,

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)} n^{\alpha}$$

biçimindedir. Gama fonksiyonunun diğer bir gösterimi Karl Weierstrass tarafından $\alpha \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ değerleri için

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \alpha e^{\gamma\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) e^{-\frac{\alpha}{n}} \right\}$$

eşitliği ile ifade edilmiştir (Andrews vd., 1999).

Gama fonksiyonu $\alpha = 0, -1, -2, -3, \dots$ değerleri için kutup noktasına sahiptir. $k = 1, 2, \dots$ olmak üzere gama fonksiyonun $\alpha = -k$ değerleri için rezidüsü,

$$res(\Gamma, -k) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

biçimindedir (Spiegel, 1965).

$\alpha, \beta > 0$ değerleri için Legendre tarafından

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} dv$$

integrali ile tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu ya da birinci türden Euler integrali denir.

$\alpha, \beta \neq 0, -1, -2, \dots$ değerleri için Beta fonksiyonun Wierstrass formülü ile gösterimi,

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{n}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)}$$

biçimindedir.

Pierre Simon Laplace tarafından Laplace dönüşümü, $f(v)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı herhangi bir u sayısı için

$$F(u) = \mathcal{L}\{f(v)\} = \int_0^{\infty} e^{-uv} f(v) dv = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-uv} f(v) dv$$

genelleştirilmiş integralin yakınsak olması koşuluyla tanımlanmıştır (Schiff, 2013).

Dejenere Gama fonksiyonu, $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $0 < \text{Re}(\alpha) < \frac{1}{\lambda}$ değerleri için

$$\Gamma_{\lambda}(\alpha) = \int_0^{\infty} e_{\lambda}^{-1}(v) v^{\alpha-1} dv = \int_0^{\infty} (1 + \lambda v)^{-\frac{1}{\lambda}} v^{\alpha-1} dv$$

integrali ile ve dejenere Laplace dönüşümü, $f(v)$ fonksiyonu $v \geq 0$ değerleri için

$$\mathcal{L}_{\lambda}\{f(v)\} = \int_0^{\infty} (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv$$

biçiminde tanımlanmıştır (T. Kim ve D. Kim, 2017).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, tez konusu ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilecektir. Konu hakkında yazılmış makale ve kitaplar bu araştırmanın materyalleridir. Araştırma tekniği olarak kaynaklar kısmında verilen kitap ve makaleler incelenmiş ve matematiksel ispat yöntemleri kullanılarak çalışılmıştır.

3.1. Gama, Beta Fonksiyonları ve Bazı Özellikleri

Tanım 3.1.1. $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $Re(\alpha) > 0$ değerleri için Gama fonksiyonu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} v^{\alpha-1} e^{-v} dv \quad (3.1)$$

Euler integrali ile tanımlanır (Abramowitz ve Stegun, 1964) ve

$$\Gamma(1) = 1 \quad (3.2)$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (3.3)$$

eşitliklerini sağlar. (3.3) eşitliğinde $\alpha = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) alınırsa

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

eşitliği elde edilir. Böylece Γ fonksiyonu, faktöriyel fonksiyonunun negatif olmayan gerçel sayılara bir genişletilmesi olarak düşünülebilir.

$\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere Gama fonksiyonu için Euler formülü

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

biçimindedir. (3.4) eşitliği kullanılarak

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \alpha e^{\gamma \alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{n}} \right\} \quad (3.5)$$

Weierstrass formülü elde edilir. Burada γ sayısı

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

ile tanımlıdır ve Euler sabiti olarak adlandırılır. (3.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha) &= -\frac{1}{\alpha^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) e^{-\frac{\alpha}{n}} \right\}^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{n} \right) e^{\frac{\alpha}{n}} \right\}^{-1} \\ &= -\frac{\pi}{\alpha \sin \pi \alpha} \end{aligned}$$

olur. Böylece $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$ değerleri için

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

Euler yansıma formülü elde edilir (Andrews vd., 1999).

Örnek 3.1.2. (Andrews vd., 1999) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ biçimindedir.

İspat: Gerçekten; (3.1) eşitliğinden

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} v^{-\frac{1}{2}} e^{-v} dv \quad (3.6)$$

olur. (3.6) eşitliğinde integrale $v = t^2$ değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

elde edilir. Böylece

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-k^2 - t^2} dt dk$$

olur. Buradan iki katlı integrale $k = r \cos \theta$ ve $t = r \sin \theta$ dönüşümü ve ardından $r^2 = u$ değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 3.1.3. Şimdi de Gama fonksiyonu ile de ifade edilebilen beta fonksiyonunu tanımlayalım.

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ değerleri için beta fonksiyonu

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} dv \\ &= \int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}} dv \end{aligned} \quad (3.7)$$

Riemann integrali ile tanımlanır (Abramowitz ve Stegun, 1964) ve

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$$

simetri özelliğini sağlar.

Gama ve beta fonksiyonları arasındaki ilişki (3.1) ve (3.7) eşitliklerinden

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (3.8)$$

biçimindedir (Andrews vd., 1999). Örnek 3.1.2 ve (3.8) eşitliği ile $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{1} = \pi \end{aligned}$$

olur.

Tanım 3.1.4. (Bir Karmaşık Fonksiyonun Türevi) (Zill ve Shanahan, 1940) f karmaşık fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

limiti varsa bu limite f nin z_0 'daki türevi denir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. (Bir Noktada Analitiklik) (Zill ve Shanahan, 1940) Bir $w = f(z)$ karmaşık fonksiyonu $z = z_0$ noktası ve bir D komşuluğundaki her noktada türevli ise f 'ye z_0 'da “analitik fonksiyon” denir.

D 'de analitik olan f fonksiyonuna “holomorfik fonksiyon” denir.

Tanım 3.1.6. (Tekil Nokta) (Zill ve Shanahan, 1940) Bir $w = f(z)$ karmaşık fonksiyonu $z = z_0$ noktasında analitik değilse bu noktaya fonksiyonun “tekil noktası” denir.

Tanım 3.1.7. (Ayrık Tekil Nokta) (Zill ve Shanahan, 1940) Bir $w = f(z)$ karmaşık fonksiyonu için $z = z_0$ bir tekil nokta olsun. $0 < |z - z_0| < R$ delinmiş komşuluğunda f analitik olacak şekilde bir $R > 0$ sayısı varsa $z = z_0$ noktasına f ’nin “ayrık tekil noktası” denir.

Tanım 3.1.8. (Zill ve Shanahan, 1940) Bir $w = f(z)$ karmaşık fonksiyonu için $z = z_0$ bir ayrık tekil nokta olsun. $0 < |z - z_0| < R$ delinmiş komşuluğunda geçerli f ’nin Laurent serisi gösterilişi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (3.9)$$

olsun. (3.9) serisinin $z - z_0$ ’ın negatif kuvvetlerinden oluşan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

kısmına (3.9) serisinin “esas kısmı” denir.

(i) Eğer (3.9) serisinin esas kısmı sıfır ise yani a_{-n} katsayıları sıfır ise $z = z_0$ ’a “kaldırılabilir tekil nokta” denir.

(ii) Eğer (3.9) serisinin esas kısmı sıfırdan farklı sonlu sayıda terim içeriyorsa $z = z_0$ ’a “kutup noktası” denir.

(iii) Eğer (3.9) serisinin esas kısmı sıfırdan farklı ve a_{-1} katsayılı bir tek terim içeriyorsa $z = z_0$ ’a “basit kutup” denir.

Tanım 3.1.9. (Rezidü) (Zill ve Shanahan, 1940) Bir $w = f(z)$ karmaşık fonksiyonu bir $z = z_0$ noktasında ayrık tekilliğe sahipse $0 < |z - z_0| < R$ delinmiş komşuluğunda (3.9) Laurent seri gösterimine sahiptir. (3.9) serisinde $\frac{1}{z - z_0}$ ifadesinin a_{-1} katsayısına f fonksiyonunun $z = z_0$ ayrık tekil noktasında “rezidüsü” denir ve

$$a_{-1} = \text{Res}(f(z), z_0)$$

ile gösterilir.

Teorem 3.1.10. (Basit Kutupta Rezidü) (Zill ve Shanahan, 1940) Bir $w = f(z)$ karmaşık fonksiyonu $z = z_0$ noktasında bir basit kutba sahipse o zaman $z = z_0$ noktasındaki rezidüsü

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

biçimindedir.

Tanım 3.1.11. (Zill ve Shanahan, 1940) Bir $w = f(z)$ karmaşık fonksiyonu bir D bölgesinde, belki D 'de ki kutup noktaları dışında her yerde analitik ise f 'ye “moromorfik fonksiyon” denir.

Bir moromorfik fonksiyon D bölgesi içinde en fazla sonlu sayıda kutup noktasına sahiptir.

$\alpha \in \mathbb{C}$ ve $Re(\alpha) > 0$ değerleri için $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ eşitliğinden

$$\frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + n - 1)} = (\alpha + k)\Gamma(\alpha) \quad (3.10)$$

yazılabilir. Şimdi (3.10) eşitliğini kullanarak Γ fonksiyonun $k = 1, 2, \dots$ olmak üzere $k = -n$ noktalarında rezidüsünü verelim.

Örnek 3.1.12. (Spiegel, 1965) $\Gamma(\alpha)$ fonksiyonu $\alpha = 0, -1, -2, -3, \dots$ değerleri için kutup noktasına sahiptir ve $k = 1, 2, \dots$ olmak üzere Gama fonksiyonunun $\alpha = -k$ noktalarındaki rezidüsü

$$\begin{aligned} Res(\Gamma, -k) &= \lim_{\alpha \rightarrow -k} (\alpha - (-k))\Gamma(\alpha) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -k} (\alpha + k) \frac{\alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + k)}{\alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + k)} \Gamma(\alpha) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -k} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + k - 1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{-k(-k + 1)\dots(-1)} \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

biçimindedir.

3.2. Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü bir integral dönüşümdür ve zor bir diferansiyel denklemi, kolay çözülen bir cebir problemi haline getirip ardından ters dönüşüm yardımıyla sonucu elde etmek amacıyla kullanılır.

Laplace dönüşümü matematikte bazı integrallerin hesaplanmasında, integral denklemlerinin çözülmesi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan oldukça yaygın bir

yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunun yanı sıra fizik, mühendislik gibi bilim dallarında da bazı problemlerin çözümünde Laplace dönüşümü kullanılır.

Tanım 3.2.1. (Schiff, 2013) $f(v)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Herhangi bir u gerçel ya da karmaşık sayısı için

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{-uv} f(v) dv \quad (3.11)$$

eşitliğindeki genelleştirilmiş integral yakınsak ise $F(u)$ fonksiyonuna $f(v)$ nin Laplace Dönüşümü denir ve

$$\mathcal{L}\{f(v)\} = F(u)$$

biçiminde gösterilir. Yakınsama,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-uv} f(v) dv$$

limiti var olduğunda elde edilir. Eğer limit yoksa genelleştirilmiş integral ıraksaktır ve bu durumda $f(v)$ 'nin Laplace dönüşümü yoktur. (3.11) denklemini hesaplarken u değişkeni bir sabit olarak alınır çünkü integrasyon v 'ye göre alınmaktadır. Tanımdaki u parametresi (3.11) Laplace integrali yakınsak olacak şekilde gerçel ya da karmaşık sayı kümesinden seçilebilir. Eğer u bir karmaşık sayı ise $u = x + iy$ gösterimini kullanacağız.

Örnek 3.2.2. $v > 0$ olmak üzere $f(v) = 1$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $\frac{1}{u}$ biçimindedir. Gerçekten, $u \in \mathbb{R}$ ve $u > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(v)\} &= \int_0^{\infty} e^{-uv} 1 dv \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-uR}}{-u} + \frac{1}{u} \right) \\ &= \frac{1}{u} \end{aligned} \quad (3.12)$$

ve böylece

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{u} \quad (u > 0)$$

elde edilir.

Not 3.2.3. Eğer $u \leq 0$ ise (3.12) integrali iraksak olacağından $f(v) = 1$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü yoktur. Ayrıca; u bir karmaşık sayı ise $Re(u) > 0$ için $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{u}$ elde edilir.

Örnek 3.2.4. $f(v) = \begin{cases} v; & 0 \leq v \leq 1 \\ 1; & v > 1 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunu göz önüne alırsak Laplace dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(v)\} &= \int_0^{\infty} e^{-uv} f(v) dv \\ &= \int_0^1 v e^{-uv} dv + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R e^{-uv} dv \\ &= \frac{1 - e^{-u}}{u^2} \quad (Re(u) > 0) \end{aligned}$$

olur.

Şimdi de Laplace dönüşümü olmayan bir fonksiyona örnek verelim.

Örnek 3.2.5. $v > 0$ olmak üzere $f(v) = e^{v^2}$ olsun. Her u değeri için

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-uv} e^{v^2} dv = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{v^2 - uv} dv = \infty$$

olacağından $f(v) = e^{v^2}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü yoktur.

Örneklerde görüldüğü gibi bazı fonksiyonlar için Laplace dönüşümü hesaplanabilirken bazıları için hesaplanamamaktadır. Böylece “Laplace dönüşümüne sahip olan geniş bir fonksiyon sınıfı var mıdır” sorusu ortaya çıkmaktadır. Üzerinde çalışılan fonksiyonlara birkaç kısıtlama getirildiğinde böyle bir sınıfın var olduğu görülür.

Tanım 3.2.6. (Parçalı Sürekli Fonksiyon) (Schiff, 2013) $v \in (a, b)$ olmak üzere $[a, b]$ aralığı sonlu sayıda alt aralıklarına bölündüğünde f fonksiyonu bu alt aralıkların her birinde sürekli ve v sayısı bu alt aralıkların her birinin uç noktalarına yaklaştıkça $f(v)$ sonlu bir limite yaklaşırsa f ’ye $[a, b]$ aralığında “parçalı sürekli fonksiyon” denir.

Bir f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli ve $v_0, a < v_0 < b$ alt aralıklarından birinin bir uç noktası olsun. $f(v)$ fonksiyonunun soldan limiti, v, v_0 ’a soldan yaklaştığında

$$\lim_{v \rightarrow v_0^-} f(v) \text{ ya da } f(v_0^-)$$

biçiminde tanımlanır. Benzer şekilde, v, v_0 'a sağdan yaklaştığında f fonksiyonunun sağdan limiti

$$\lim_{v \rightarrow v_0^+} f(v) \text{ ya da } f(v_0^+)$$

biçiminde gösterilir. v_0 noktasında $f(v_0^-)$ ve $f(v_0^+)$ sonludur, fakat genelde bu değerler birbirine eşit değildir. Böylece f fonksiyonu (a, b) aralığında parçalı sürekli ise bu aralıkta aynı zamanda parçalı süreklidir ve f fonksiyonu (a, b) aralığında parçalı sürekli ise bu aralıkta integrallenebilir.

Not 3.2.7. Eğer bir f fonksiyonu parçalı sürekli ise her bir alt aralıkta sınırlıdır, yani $|f(v)| \leq M_i, R_i < v < R_{i+1}$ olacak şekilde $M_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) sayıları vardır.

Tanım 3.2.8. (Üstel Mertebeli Fonksiyon) (Schiff, 2013) f fonksiyonu $v_0 \geq 0$ olmak üzere (v_0, ∞) aralığı üzerinde tanımlı olsun. Eğer bir α gerçel sayısı için

$$|f(v)| \leq M e^{\alpha v}, \quad v > v_0$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna “ α -üstel mertebeli fonksiyon” denir.

Örnek 3.2.9. $f(v) = v^n, (n \in \mathbb{N})$ fonksiyonu α herhangi bir pozitif sayı olmak üzere üstel mertebelidir; çünkü

$$\lim_{v \rightarrow \infty} e^{-\alpha v} v^n = 0, \quad (\alpha > 0)$$

olduğundan $v > v_0$ için

$$e^{-\alpha v} |v^n| = e^{-\alpha v} v^n < M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ ve $v_0 > 0$ vardır.

Örnek 3.2.10. $f(v) = e^{v^2}$ fonksiyonu α -üstel mertebeye sahip değildir.

Not 3.2.11. f α -üstel mertebeli bir fonksiyon ve $\beta > \alpha$ ise $e^{\alpha v} \leq \alpha^{\beta v}$ ($v \geq 0$) olacağından f β -mertebeli üstel bir fonksiyon olur.

Şimdi,

$$\mathcal{L}\{f(v)\} = \int_0^{\infty} e^{-uv} f(v) dv$$

Laplace dönüşümünün varlığı ile ilgili teoremi verelim.

Teorem 3.2.12. (Schiff, 2013) f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve α -mertebeli üstel bir fonksiyon olsun. Bu durumda $Re(u) > \alpha$ değerleri için f fonksiyonunun Laplace dönüşümü vardır.

İspat:

$$\int_0^{\infty} e^{-uv} f(v) dv = \int_0^{v_0} e^{-uv} f(v) dv + \int_{v_0}^{\infty} e^{-uv} f(v) dv \quad (3.13)$$

yazılabilir. Kabulümüzden eşitliğin sağ tarafındaki ilk integral vardır. Ayrıca, f , α -mertebeli üstel bir fonksiyon olduğundan

$$|f(v)| < Me^{\alpha v} \quad (v > v_0)$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ sayısı vardır. Böylece

$$e^{-uv} |f(v)| < e^{-uv} Me^{\alpha v} = Me^{-(u-\alpha)v}, \quad v > v_0$$

olur.

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{\infty} Me^{-(u-\alpha)v} dv &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{v_0}^R Me^{-(u-\alpha)v} dv \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{Me^{-(u-\alpha)v}}{u-\alpha} \right|_{v_0}^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{u-\alpha} \right) \left(e^{-(u-\alpha)v_0} - e^{-(u-\alpha)R} \right) \\ &= \left(\frac{M}{u-\alpha} \right) e^{-(u-\alpha)v_0}, \quad Re(u) > \alpha \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $\int_{v_0}^{\infty} Me^{-(u-\alpha)v} dv$ integrali $Re(u) > \alpha$ değerleri için vardır. Ayrıca kabulümüzden $e^{-uv} |f(v)|$, $[v_0, \infty)$ aralığının her sonlu kapalı alt aralığında integrallenebilir. Böylece $\int_{v_0}^{\infty} e^{-uv} |f(v)| dv$ integrali $Re(u) > \alpha$ değerleri için vardır. Buradan $\int_{v_0}^{\infty} e^{-uv} |f(v)| dv$ integralinin $Re(u) > \alpha$ değerleri için var olduğu elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

□

Örnek 3.2.13. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(v) = e^{av}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında süreklidir ve a -mertebeli üstel bir fonksiyondur. Böylece Teorem 3.2.12 'den $f(v) = e^{av}$ fonksiyonunun

Laplace dönüşümü vardır. Laplace dönüşümün tanımından

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{av}\} &= \int_0^{\infty} e^{-uv} e^{av} dv \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(u-a)v} dv \\ &= \left. \frac{e^{-(u-a)v}}{-(u-a)} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{u-a}, \quad (\operatorname{Re}(u) > a)\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.2.14. $f(v) = v$, ($v \geq 0$) fonksiyonu Teorem 3.2.12 teoreminin koşullarını sağladığından

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(v)\} = \mathcal{L}\{v\} &= \int_0^{\infty} ve^{-uv} dv \\ &= -\left. \frac{ve^{-uv}}{u} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-uv} dv \\ &= \frac{1}{u} \mathcal{L}\{1\}, \quad (\operatorname{Re}(u) > 0) \\ &= \frac{1}{u^2}\end{aligned}$$

elde edilir.

Genel olarak tümevarımla $n = 1, 2, 3, \dots$ değerleri için

$$\mathcal{L}\{v^n\} = \frac{n!}{u^{n+1}} \quad (\operatorname{Re}(u) > 0) \quad (3.14)$$

biçimindedir.

Ayrıca, (3.14) eşitliği $0! = 1$ olduğundan $n = 0$ içinde geçerlidir.

$[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı, gerçel (ya da karmaşık) değerli ve Laplace dönüşümü var olan fonksiyonların kümesi L ile gösterilir. Böylece Teorem 3.2.12 'den $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı, parçalı sürekli ve üstel mertebeli fonksiyonlar L kümesindedir. Ancak Teorem 3.2.12'in koşullarından en az birini sağlamadığı halde L kümesinde olan fonksiyonlarda vardır.

Örnek 3.2.15. $f(v) = 2ve^{v^2} \cos(e^{v^2})$ olsun. f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığı üzerinde süreklidir ancak üstel mertebesi yoktur. Kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-uv} 2ve^{v^2} \cos(e^{v^2}) dv \\ &= e^{-uv} \sin(e^{v^2}) \Big|_0^\infty + u \int_0^\infty e^{-uv} \sin(e^{v^2}) dv \\ &= \sin 1 + u \mathcal{L}\{\sin(e^{v^2})\}, \quad (\operatorname{Re}(u) > 0) \end{aligned}$$

yazılabileceğinden $\mathcal{L}\{2ve^{v^2} \cos(e^{v^2})\}$ Laplace dönüşümü vardır.

Teorem 3.2.16. (Laplace Dönüşümünün Doğrusallık Özelliği) (Schiff, 2013) $\operatorname{Re}(u) > \alpha$ için $f_1 \in L$ ve $\operatorname{Re}(u) > \beta$ için $f_2 \in L$ olsun. O zaman $\operatorname{Re}(u) > \max\{\alpha, \beta\}$ için $f_1 + f_2 \in L$ 'dir ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2\}$$

eşitliği sağlanır.

Gama fonksiyonu kavramı Laplace dönüşümünün kullanılmasında önemli bir yer tutmaktadır.

Örnek 3.2.17. $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(v) = v^r, (v \geq 0)$ olsun. $-uv = s$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^\infty e^{-uv} v^r dv = \int_0^\infty e^s \left(-\frac{s}{u}\right)^r \left(-\frac{ds}{u}\right)$$

elde edilir. Böylece Γ fonksiyonun tanımından

$$\mathcal{L}\{v^r\} = \frac{1}{u^{r+1}} \int_0^\infty e^s s^r ds = \frac{\Gamma(r+1)}{u^{r+1}} = \frac{r\Gamma(r)}{u^{r+1}} = \frac{r(r-1)\dots 1}{u^{r+1}} \quad (3.15)$$

elde edilir.

Not 3.2.18. Örnek 3.2.17 ile (3.14) eşitliği her $r \in \mathbb{R}$ için geçerlidir.

Örnek 3.2.19. $f(v) = v^{-\frac{1}{2}}$ olsun. $v \geq 1$ değerleri için $|f(v)| \leq 1$ olacağından f fonksiyonu 0-üstel mertebelidir. Ayrıca $v \rightarrow 0^+$ için $f(v) \rightarrow \infty$ olacağından $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli değildir. Ayrıca $\mathcal{L}\{v^{-\frac{1}{2}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{u}}$ biçimindedir.

Gerçekten; (3.15) eşitliğinden

$$\mathcal{L}\{v^{-\frac{1}{2}}\} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1)}{u^{-\frac{1}{2} + 1}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{u^{-\frac{1}{2}}}$$

olur. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olduğundan istenen elde edilir.

Teorem 3.2.20. (Birinci Öteleme Teoremi) (Spiegel, 1965) $\mathcal{L}\{f(v)\} = F(u)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{e^{av}f(v)\} = F(u - a) \quad (3.16)$$

biçimindedir.

Teorem 3.2.21. (İkinci Öteleme Teoremi) (Spiegel, 1965) $\mathcal{L}\{f(v)\} = F(u)$ ve

$$g(v) = \begin{cases} g(v - \alpha); & v > \alpha \\ 0; & v < \alpha \end{cases}$$

olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{g(v)\} = e^{-\alpha u} F(u) \quad (3.17)$$

biçimindedir.

Teorem 3.2.22. (Spiegel, 1965) $\mathcal{L}\{f(v)\} = F(u)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{f(\alpha v)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{u}{\alpha}\right) \quad (3.18)$$

eşitliği doğrudur.

Teorem 3.2.23. (Spiegel, 1965) $\mathcal{L}\{f(v)\} = F(u)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^v f(y)dy\right\} = \frac{F(u)}{u} \quad (3.19)$$

biçimindedir.

Teorem 3.2.24. (Başlangıç Değer Teoremi) (Spiegel, 1965) $\mathcal{L}\{f(v)\} = F(u)$ olsun. Eğer limitler mevcut ise

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(v) = \lim_{u \rightarrow \infty} u F(u) \quad (3.20)$$

biçimindedir.

Teorem 3.2.25. (Son Değer Teoremi) (Spiegel, 1965) $\mathcal{L}\{f(v)\} = F(u)$ olsun. Eğer limitler mevcut ise

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f(v) = \lim_{u \rightarrow 0} F(u) \quad (3.21)$$

biçimindedir.





4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda dejenere üstel, dejenere Euler ve dejenere Gama fonksiyonu tanımlanmıştır. İkinci bölümde dejenere gama fonksiyonu için bazı özellikler verilerek eşitlikler elde edilmiştir. Üçüncü bölümde dejenere Laplace dönüşümü tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde ise dejenere Laplace dönüşümünün uygulamalarına yer verilmiştir.

4.1. Dejenere Üstel, Dejenere Euler ve Dejenere Gama Fonksiyonları

Bilindiği gibi, e yaklaşık değeri $e \approx 2,718281$ olan bir sayı olmak üzere $u = e^v$ ile tanımlanan fonksiyona “üstel fonksiyon” denir. Şimdi üstel fonksiyonun “dejenere üstel fonksiyon” olarak adlandırılan bir benzerini tanımlayalım.

Tanım 4.1.1. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$e_{\lambda}^v = (1 + \lambda v)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (4.1)$$

ile tanımlanan fonksiyona “dejenere üstel fonksiyon” denir. Üstel fonksiyon ile dejenere üstel fonksiyon arasındaki ilişki

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} e_{\lambda}^v = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (1 + \lambda v)^{\frac{1}{\lambda}} = e^v \quad (4.2)$$

biçimindedir.

Tanım 4.1.2. (Y. Kim vd., 2018) $\lambda \in (0, \infty)$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere e_{λ}^v dejenere üstel fonksiyonun tersine “dejenere logaritmik fonksiyon” denir ve

$$\log_{\lambda} v = \frac{v^{\lambda} - 1}{\lambda} \quad (4.3)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece (4.1) ve (4.3) eşitliklerinden

$$e_{\lambda}(\log_{\lambda} v) = v = \log_{\lambda}(e_{\lambda}^v)$$

ve

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \log_{\lambda} v = \log v$$

olur.

Euler formülü $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ile tanımlıdır (Verma, 1974). Böylece

$$\cos(a\theta) = \frac{e^{ia\theta} + e^{-ia\theta}}{2}$$

ve

$$\sin(a\theta) = \frac{e^{ia\theta} - e^{-ia\theta}}{2i}$$

eşitlikleri elde edilir. Euler fonksiyonuna benzer olarak dejenere üstel fonksiyon yardımıyla dejenere Euler fonksiyonu tanımlanır.

Tanım 4.1.3. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$e_{\lambda}^{iv} = (1 + \lambda v)^{\frac{i}{\lambda}} = \cos_{\lambda}(v) + i\sin_{\lambda}(v) \quad (4.4)$$

ile tanımlanan fonksiyona “dejenere Euler fonksiyonu” denir.

Tanımdan

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} e_{\lambda}^{iv} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (1 + \lambda v)^{\frac{i}{\lambda}} = e^{iv} = \cos(v) + i\sin(v) \quad (4.5)$$

eşitliği elde edilir. (4.4) ve (4.5) eşitliklerinden

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \cos_{\lambda}(v) = \cos(v) \quad (4.6)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sin_{\lambda}(v) = \sin(v) \quad (4.7)$$

elde edilir. Böylece sırasıyla dejenere cosinüs ve dejenere sinüs olarak isimlendirilen

$$\cos_{\lambda}(v) = \frac{e_{\lambda}^{iv} + e_{\lambda}^{-iv}}{2} \quad (4.8)$$

$$\sin_{\lambda}(v) = \frac{e_{\lambda}^{iv} - e_{\lambda}^{-iv}}{2i} \quad (4.9)$$

fonksiyonları elde edilir (T. Kim ve D. Kim, 2017). Ayrıca (4.4), (4.8) ve (4.9) eşitliklerinden

$$\cos_{\lambda}(v) = \frac{e_{\lambda}^{iv} + e_{\lambda}^{-iv}}{2} = \frac{1}{2} \left((1 + \lambda v)^{\frac{i}{\lambda}} + (1 + \lambda v)^{-\frac{i}{\lambda}} \right) \quad (4.10)$$

$$\sin_{\lambda}(v) = \frac{e_{\lambda}^{iv} - e_{\lambda}^{-iv}}{2i} = \frac{1}{2i} \left((1 + \lambda v)^{\frac{i}{\lambda}} - (1 + \lambda v)^{-\frac{i}{\lambda}} \right) \quad (4.11)$$

elde edilir ve

$$(\cos_\lambda(v))' = \frac{d}{dv} \cos_\lambda(v) = -\frac{1}{1+\lambda v} \sin_\lambda(v) \quad (4.12)$$

$$(\sin_\lambda(v))' = \frac{d}{dv} \sin_\lambda(v) = \frac{1}{1+\lambda v} \cos_\lambda(v) \quad (4.13)$$

yazılabilir. Şimdi de dejenere kosinüs hiperbolik ve dejenere sinüs hiperbolik fonksiyonlarının tanımlarını verelim.

Tanım 4.1.4. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\cosh_\lambda(v) = \frac{e_\lambda^v + e_\lambda^{-v}}{2}$$

$$\sinh_\lambda(v) = \frac{e_\lambda^v - e_\lambda^{-v}}{2}$$

ile tanımlanan fonksiyonlara sırasıyla “dejenere kosinüs hiperbolik fonksiyon” ve “dejenere sinüs hiperbolik fonksiyon” denir.

Böylece

$$\cosh_\lambda(v) = \frac{1}{2} \left((1+\lambda v)^{\frac{1}{\lambda}} + (1+\lambda v)^{-\frac{1}{\lambda}} \right) \quad (4.14)$$

$$\sinh_\lambda(v) = \frac{1}{2} \left((1+\lambda v)^{\frac{1}{\lambda}} - (1+\lambda v)^{-\frac{1}{\lambda}} \right) \quad (4.15)$$

eşitlikler elde edilir. Ayrıca, $\cosh_\lambda(v)$ ve $\sinh_\lambda(v)$ fonksiyonlarının türevleri,

$$(\cosh_\lambda(v))' = \frac{d}{dv} \cosh_\lambda(v) = \frac{1}{1+\lambda v} \sinh_\lambda(v) \quad (4.16)$$

$$(\sinh_\lambda(v))' = \frac{d}{dv} \sinh_\lambda(v) = \frac{1}{1+\lambda v} \cosh_\lambda(v) \quad (4.17)$$

biçimindedir (T. Kim ve D. Kim, 2017).

Tanım 4.1.5. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < \frac{1}{\lambda}$ değerleri için dejenere Gama fonksiyonu

$$\Gamma_\lambda(\alpha) = \int_0^\infty e_\lambda^{-v} v^{\alpha-1} dv = \int_0^\infty (1+\lambda v)^{-\frac{1}{\lambda}} v^{\alpha-1} dv$$

integrali ile tanımlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} (1 + \lambda v)^{-\frac{1}{\lambda}} v^{\alpha-1} dv &= \lambda^{-\alpha} \int_0^{\infty} (1 + v)^{-\frac{1}{\lambda}} v^{\alpha-1} dv \\
&= \lambda^{-\alpha} B\left(\alpha, \frac{1}{\lambda} - \alpha\right) \\
&= \lambda^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{1}{\lambda} - \alpha)}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

eşitliği elde edilir.

4.2. Dejenere Gama Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

Teorem 4.2.1. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < \frac{1-\lambda}{\lambda}$ değerleri için

$$\Gamma_{\lambda}(\alpha + 1) = \frac{\alpha}{(1-\lambda)^{\alpha+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(\alpha) \tag{4.19}$$

biçimindedir.

İspat: Dejenere Gama fonksiyonunun tanımından

$$\Gamma_{\lambda}(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} e_{\lambda}^{-v} v^{\alpha} dv = \int_0^{\infty} (1 + \lambda v)^{-\frac{1}{\lambda}} v^{\alpha} dv$$

yazılabilir. Son integralde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\lambda}(\alpha + 1) &= \frac{\alpha}{1-\lambda} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}(1-\lambda)v\right)^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}} ((1-\lambda)v)^{\alpha-1} \frac{1}{(1-\lambda)^{\alpha-1}} dv \\
&= \frac{\alpha}{(1-\lambda)^{\alpha}} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}(1-\lambda)v\right)^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}} ((1-\lambda)v)^{\alpha-1} dv
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olur. (4.20) integralinde $y = (1 - \lambda)v$ değişken değiştirmesi yapıldığında $\lambda \in (0, 1)$ olduğundan

$$\Gamma_{\lambda}(\alpha + 1) = \frac{\alpha}{(1-\lambda)^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}y\right)^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}} y^{\alpha-1} dy = \frac{\alpha}{(1-\lambda)^{\alpha+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(\alpha)$$

eşitliği elde edilir. □

Teorem 4.2.2. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in (0, \frac{1}{n+1})$ olmak üzere $n < \operatorname{Re}(\alpha) < \frac{1-\lambda}{\lambda}$ değerleri için

$$\Gamma_{\lambda}(\alpha + 1) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n+1)+1)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)\dots(1-n\lambda)(1-(n+1)\lambda)^{\alpha-n+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-(n+1)\lambda}}(\alpha-n) \tag{4.21}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ olsun. (4.19) eşitliğinden $1 < Re(\alpha) < \frac{1-\lambda}{\lambda}$ değerleri için

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda}(\alpha+1) &= \frac{\alpha}{(1-\lambda)^{\alpha+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(\alpha) \\ &= \left(\frac{\alpha}{(1-\lambda)^{\alpha+1}} \right) \left(\frac{(1-\lambda)^{\alpha}(\alpha-1)}{(1-2\lambda)^{\alpha}} \right) \Gamma_{\frac{\lambda}{1-2\lambda}}(\alpha-1) \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)^{\alpha}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-2\lambda}}(\alpha-1)\end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi de $\lambda \in (0, \frac{1}{3})$ olsun. Bu durumda (4.19) eşitliğinden $2 < Re(\alpha) < \frac{1-\lambda}{\lambda}$ değerleri için

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda}(\alpha+1) &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)^{\alpha}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-2\lambda}}(\alpha-1) \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1-2\lambda)^{\alpha-1}}{(1-\lambda)(1-2\lambda)^{\alpha}(1-3\lambda)^{\alpha-1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-3\lambda}}(\alpha-2) \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)(1-3\lambda)^{\alpha-1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-3\lambda}}(\alpha-2)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edersek $\lambda \in (0, \frac{1}{n+1})$ olmak üzere $n < Re(\alpha) < \frac{1-\lambda}{\lambda}$ değerleri için

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda}(\alpha+1) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n+1)+1)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)\dots(1-n\lambda)(1-(n+1)\lambda)^{\alpha-n+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-(n+1)\lambda}}(\alpha-(n+1)+1) \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n+1)+1)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)\dots(1-n\lambda)(1-(n+1)\lambda)^{\alpha-n+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-(n+1)\lambda}}(\alpha-n)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. □

(4.21) eşitliğinden $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in (0, \frac{1}{n+1})$ olmak üzere $n < Re(\alpha) < \frac{1-\lambda}{\lambda}$ değerleri için

$$(1-(n+1)\lambda)^{\alpha-n+1} \frac{\Gamma_{\lambda}(\alpha+1)}{\Gamma_{\frac{\lambda}{1-(n+1)\lambda}}(\alpha-n)} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)\dots(1-n\lambda)}$$

yazılabilir.

Teorem 4.2.3. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lambda \in (0, \frac{1}{n})$ değerleri için

$$\Gamma_{\lambda}(n) = \frac{(n-1)!}{(1-\lambda)(1-2\lambda)\dots(1-n\lambda)}$$

biçimindedir.

İspat: $\alpha = n + 1$ olsun. (4.21) eşitliğinden $\lambda \in (0, \frac{1}{n+2})$ değerleri için

$$\Gamma_{\lambda}(n+2) = \frac{(n+1)!}{(1-\lambda)(1-2\lambda)\dots(1-n\lambda)(1-(n+1)\lambda)^2} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-(n+1)\lambda}}(1) \quad (4.22)$$

elde edilir. Ayrıca $\lambda \in (0, \frac{1}{n+2})$ değerleri için

$$\begin{aligned} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-(n+1)\lambda}}(1) &= \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{1-(n+1)\lambda} v\right)^{-\frac{1-(n+1)\lambda}{\lambda}} dv \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-1+(n+1)\lambda}\right) \left(\frac{1-(n+1)\lambda}{\lambda}\right) \left(1 + \frac{\lambda v}{1-(n+1)\lambda}\right)^{-\frac{1-(n+1)\lambda}{\lambda}} \Bigg|_0^{\infty} \\ &= \frac{1-(n+1)\lambda}{1-(n+2)\lambda} \end{aligned} \quad (4.23)$$

olur. Böylece (4.22) ve (4.23) eşitlikleri ile $\lambda \in (0, \frac{1}{n+2})$ değerleri için

$$\Gamma_{\lambda}(n+2) = \frac{(n+1)!}{(1-\lambda)(1-2\lambda)\dots(1-n\lambda)(1-(n+1)\lambda)(1-(n+2)\lambda)} \quad (4.24)$$

elde edilir. □

Şimdi de dejenere Gama fonksiyonunun rezidülerini veren teoremi ifade edelim.

Teorem 4.2.4. (T. Kim ve D. Kim, 2020) $\lambda \in (0, 1)$ olsun. $0 < \text{Re}(s) < \frac{1}{\lambda}$ değerleri için tanımlanan Γ_{λ} fonksiyonu tekil noktaları $s = 0, -1, -2, \dots, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} + 1, \dots$ noktaları dışında basit kutupları olan \mathbb{C} üzerinde tanımlı meromorfik bir fonksiyona analitik olarak genişletilebilir ve $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\text{Res}(\Gamma_{\lambda}, -k) = \frac{(-1)^k \lambda^k \Gamma(\frac{1}{\lambda} + k)}{k! \Gamma(\frac{1}{\lambda})},$$

$$\text{Res}\left(\Gamma_{\lambda}, \frac{1}{\lambda} + k\right) = \frac{(-1)^{k-1} \lambda^{-k-\frac{1}{\lambda}} \Gamma(\frac{1}{\lambda} + k)}{k! \Gamma(\frac{1}{\lambda})}$$

biçimindedir.

İspat: Teorem 3.1.10 'dan $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(\Gamma_\lambda, -k) &= \lim_{\alpha \rightarrow -k} (\alpha - (-k)) \Gamma_\lambda(\alpha) \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow -k} \frac{(\alpha + k) \lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \\
 &= \lambda^k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \lim_{\alpha \rightarrow -k} (\alpha + k) \Gamma(\alpha) \\
 &= \lambda^k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \text{Res}(\Gamma, -k)
 \end{aligned}$$

olur. Örnek (3.1.12) 'den $\text{Res}(\Gamma, -k) = \frac{(-1)^k}{k!}$ olduğundan

$$\text{Res}(\Gamma_\lambda, -k) = \frac{(-1)^k \lambda^k \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + k\right)}{k! \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

elde edilir. Benzer şekilde $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \text{Res}\left(\Gamma_\lambda, \frac{1}{\lambda} + k\right) &= \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{\lambda} + k} \left(\alpha - \left(\frac{1}{\lambda} + k\right)\right) \Gamma_\lambda(\alpha) \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{\lambda} + k} \frac{(\alpha - \left(\frac{1}{\lambda} + k\right)) \lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \\
 &= \frac{\lambda^{-\frac{1}{\lambda} - k} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{\lambda} + k} \left(\alpha - \left(\frac{1}{\lambda} + k\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right) \\
 &= -\frac{\lambda^{-\frac{1}{\lambda} - k} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{\lambda} + k} \left(\left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right) + k\right) \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right) \\
 &= -\frac{\lambda^{-\frac{1}{\lambda} - k} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \text{Res}(\Gamma, k) \\
 &= \frac{(-1)^{k-1} \lambda^{-\frac{1}{\lambda} - k} \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + k\right)}{k! \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}
 \end{aligned}$$

elde edilir. □

$\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} + 1, \dots\}$ değerleri için

$$\Gamma_\lambda(\alpha) = \frac{\lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \lambda^{-\alpha} B\left(\alpha, \frac{1}{\lambda} - \alpha\right) \quad (4.25)$$

ve

$$\lambda^\alpha \Gamma_\lambda(\alpha) = \lambda^{\frac{1}{\lambda} - \alpha} \Gamma_\lambda\left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right)$$

biçimindedir.

Şimdi de Γ_λ fonksiyonu için fark denklemini verelim.

Teorem 4.2.5. (T. Kim ve D. Kim, 2020) $\lambda \in (0, 1)$ olsun. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} + 1, \dots\}$ değerleri için

$$\Gamma_\lambda(\alpha + 1) = \frac{\alpha}{1 - \lambda(\alpha + 1)} \Gamma_\lambda(\alpha)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Teorem 4.2.4 'den

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda(\alpha + 1) &= \lambda^{-\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\frac{1}{\lambda} - \alpha - 1)}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})} = \frac{\alpha \lambda^{-\alpha}}{\lambda(\frac{1}{\lambda} - \alpha - 1)} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\frac{1}{\lambda} - \alpha)}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})} \\ &= \frac{\alpha}{\lambda(\frac{1}{\lambda} - \alpha - 1)} \lambda^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\frac{1}{\lambda} - \alpha)}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})} = \frac{\alpha}{1 - \lambda(\alpha + 1)} \Gamma_\lambda(\alpha) \end{aligned} \quad (4.26)$$

ve böylece istenen elde edilir. \square

Teorem 4.2.6. (T. Kim ve D. Kim, 2020) $\lambda \in (0, 1)$ ve $k \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$\Gamma_\lambda(k) = \frac{\Gamma(k)}{(1)_{k+1, \lambda}}$$

eşitliği elde edilir. Burada, $(\alpha)_{0, \lambda} = 1$ ve $(\alpha)_{k, \lambda} = \alpha(\alpha - \lambda) \dots (\alpha - (k - 1)\lambda)$, $k \geq 1$ biçimindedir.

İspat: $\alpha = k$, $k \in \mathbb{N}$ olsun. Teorem 4.2.5 'dan

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda(k + 1) &= \frac{k}{1 - \lambda(k + 1)} \Gamma_\lambda(k) = \frac{k(k - 1)}{(1 - \lambda(k + 1))(1 - \lambda k)} \Gamma_\lambda(k - 1) \\ &= \dots = \frac{k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(1 - (k + 1)\lambda)(1 - k\lambda) \dots (1 - 2\lambda)} \Gamma_\lambda(1) \end{aligned} \quad (4.27)$$

olur. (4.25) eşitliğinden

$$\Gamma_\lambda(1) = \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(1) \Gamma(\frac{1}{\lambda} - 1)}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})} = \frac{1}{\lambda(\frac{1}{\lambda} - 1)} = \frac{1}{1 - \lambda} \quad (4.28)$$

elde edilir. Böylece (4.27) ve (4.28) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\Gamma_\lambda(k+1) &= \frac{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}{(1-(k+1)\lambda)(1-k\lambda) \cdots (1-2\lambda)(1-\lambda)} \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{(1)_{k+2,\lambda}}\end{aligned}\quad (4.29)$$

olur. □

Teorem 4.2.7. (T. Kim ve D. Kim, 2020) $\lambda \in (0,1)$ olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} + 1, \dots$ değerleri için Γ_λ fonksiyonunun Weierstrass çarpımı,

$$\begin{aligned}\Gamma_\lambda(\alpha) &= \frac{\lambda^{-\alpha}}{\alpha \left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right) \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} e^{-\frac{\alpha}{\lambda}} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ e^{\frac{\alpha}{k\lambda}} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\frac{1}{\lambda} - \alpha}{k}\right)^{-1} \right\} \\ &= \frac{\lambda^{-\alpha}}{\alpha \left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right) \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\frac{1}{\lambda} - \alpha}{k}\right)^{-1} \right\}\end{aligned}$$

biçimindedir.

İspat: (3.5) eşitliği ve Teorem 4.2.4 'den

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma_\lambda(\alpha)} &= \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \lambda^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right)} \\ &= \lambda^\alpha \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \alpha e^{\gamma\alpha} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) e^{-\frac{\alpha}{k}} \right\} \left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right) e^{\gamma\left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{\frac{1}{\lambda} - \alpha}{k}\right) e^{-\frac{\frac{1}{\lambda} - \alpha}{k}} \right\} \\ &= \lambda^\alpha \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \alpha \left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right) e^{\frac{\gamma}{\lambda}} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{1}{k\lambda}} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \left(1 + \frac{\frac{1}{\lambda} - \alpha}{k}\right) \right\}\end{aligned}\quad (4.30)$$

eşitliği elde edilir. (4.30) eşitliğinden $\Gamma_\lambda(\alpha)$ fonksiyonu $\alpha = 0, -1, -2, \dots, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} + 1, \frac{1}{\lambda} + 2, \dots$

kutup noktaları analitiktir. Böylece,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma_\lambda(\alpha)} &= \lambda^\alpha \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \alpha \left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right) \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \log m\right)} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \prod_{n=1}^m e^{-\frac{1}{n\lambda}} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{1}{\lambda} - \alpha}{n}\right) \right\} \\ &= \lambda^\alpha \alpha \left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right) \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\prod_{n=1}^m m^{-\frac{1}{\lambda}} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{1}{\lambda} - \alpha}{n}\right) \right] \\ &= \lambda^\alpha \alpha \left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right) \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\prod_{n=1}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{\lambda}} \right] \left[\prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{1}{\lambda} - \alpha}{n}\right) \right] \\ &= \lambda^\alpha \alpha \left(\frac{1}{\lambda} - \alpha\right) \Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{\lambda}} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{1}{\lambda} - \alpha}{n}\right) \right\}\end{aligned}$$

elde edilir. \square

Teorem 4.2.8. (T. Kim ve D. Kim, 2020) $\lambda \in (0,1)$ olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} + 1, \dots$ değerleri için

$$\Gamma_{\lambda}(\alpha) = \frac{\lambda^{-\alpha}}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{\frac{1}{\lambda}} ((k-1)!)^2}{\alpha(1+\alpha) \dots (k-1+\alpha) (\frac{1}{\lambda} - \alpha) (1 + \frac{1}{\lambda} - \alpha) \dots (k-1 + \frac{1}{\lambda} - \alpha)} \quad (4.31)$$

biçimindedir.

İspat: Teorem 4.2.7 'den

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda}(\alpha) &= \frac{\lambda^{-\alpha}}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})} \frac{1}{\alpha(\frac{1}{\lambda} - \alpha)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{k+1}{k} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{k}{k+\alpha} \right) \left(\frac{k}{k+\frac{1}{\lambda} - \alpha} \right) \right\} \\ &= \frac{\lambda^{-\alpha}}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})} \frac{1}{\alpha(\frac{1}{\lambda} - \alpha)} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ m^{\frac{1}{\lambda}} \frac{(m-1)!}{(1+\alpha) \dots (m-1+\alpha)} \frac{(m-1)!}{(1+\frac{1}{\lambda} - \alpha) \dots (m-1 + \frac{1}{\lambda} - \alpha)} \right\} \end{aligned}$$

ve böylece istenen elde edilir. \square

Sonuç 4.2.9. (T. Kim ve D. Kim, 2020) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ değerleri için

$$\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2} \right)^{-1}$$

biçimindedir.

İspat: (4.31) eşitliğinde $\lambda \rightarrow 1^-$ için

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\alpha) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k((k-1)!)^2}{\alpha(1+\alpha) \dots (k-1+\alpha) (1-\alpha)(2-\alpha) \dots (k-1-\alpha)(k-\alpha)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{((k-1)!)^2}{\alpha(1^2 - \alpha^2)(2^2 - \alpha^2) \dots ((k-1)^2 - \alpha^2)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1^2 - \left(\frac{\alpha}{1}\right)^2\right) \left(1^2 - \left(\frac{\alpha}{1}\right)^2\right) \dots \left(1^2 - \left(\frac{\alpha}{k-1}\right)^2\right)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

eşitliği elde edilir.

$$\Gamma_{\lambda}(\alpha) = \frac{\lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(\frac{1}{\lambda} - \alpha)}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})}$$

eşitliğinden $\lambda \rightarrow 1^-$ için

$$\Gamma_1(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \quad (4.33)$$

olur. Böylece (4.32) ve (4.33) eşitliklerinden istenen elde edilir. \square

Şimdi de beta fonksiyonu $B(\alpha, \beta)$ 'ye benzer olarak dejenere beta fonksiyonunu tanımlayalım.

Tanım 4.2.10. (T. Kim ve D. Kim, 2020) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $\alpha, \beta \neq 0, -1, -2, \dots, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} + 1, \frac{1}{\lambda} + 2, \dots$ değerleri için dejenere beta fonksiyonu

$$B_{\lambda}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma_{\lambda}(\alpha)\Gamma_{\lambda}(\beta)}{\Gamma_{\lambda}(\alpha + \beta)}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Teorem 4.2.4, Teorem 4.2.6 ve Teorem 4.2.7 'den $\lambda \in (0, 1)$ ve $\alpha, \beta \neq 0, -1, -2, \dots, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} + 1, \frac{1}{\lambda} + 2, \dots$ değerleri için

$$\begin{aligned} B_{\lambda}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})} B(\alpha, \beta) \frac{\Gamma(\frac{1}{\lambda} - \alpha)\Gamma(\frac{1}{\lambda} - \beta)}{\Gamma(\frac{1}{\lambda} - \alpha - \beta)} \\ &= \frac{e^{-\frac{\gamma}{\lambda}}(\alpha + \beta)(\frac{1}{\lambda} - \alpha - \beta)}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})\alpha\beta(\frac{1}{\lambda} - \alpha)(\frac{1}{\lambda} - \beta)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k\lambda}} \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{k}\right) \left(1 + \frac{\frac{1}{\lambda} - \alpha - \beta}{k}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \left(1 + \frac{\frac{1}{\lambda} - \alpha}{k}\right) \left(1 + \frac{\beta}{k}\right) \left(1 + \frac{\frac{1}{\lambda} - \beta}{k}\right)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (T. Kim ve D. Kim, 2020).

Özel olarak $\alpha = n$ ve $\beta = k$, $n, k \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$B_{\lambda}(n, k) = \frac{(1)_{n+k+1, \lambda}}{(1)_{n+1, \lambda} (1)_{k+1, \lambda}} B(n, k)$$

biçimindedir.

4.3. Dejenere Laplace Dönüşümü

Dejenere Laplace dönüşümü ilk olarak Taekyun Kim ve Dae San Kim tarafından tanıtılmıştır. Daha sonraki yıllarda bu tanımdan yola çıkarak birçok teorem elde edilmiş ve kanıtlanmıştır. Bu bölümde, Dejenere Laplace dönüşümü ve uygulamaları ele alınmıştır.

Tanım 4.3.1. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $f(v)$ fonksiyonu $v \geq 0$ değerleri için tanımlı olsun.

$$F_{\lambda}(u) = \int_0^{\infty} (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv$$

eşitliğindeki genelleştirilmiş integral yakınsak ise $F_\lambda(u)$ fonksiyonuna $f(v)$ fonksiyonunun “dejenere Laplace dönüşümü” denir ve

$$\mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} = F_\lambda(u)$$

biçiminde gösterilir. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_\lambda \{\alpha f(v) + \beta g(v)\} = \alpha \mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} + \beta \mathcal{L}_\lambda \{g(v)\}$$

eşitliği sağlanır. Yani dejenere Laplace dönüşümü doğrusaldır.

Örnek 4.3.2. $\lambda \in (0, \infty)$ olsun. $f(v) = 1$ fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}_\lambda \{1\} = \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} dv = \frac{1}{u - \lambda}, \quad u > \lambda$$

ve $f(v)$ fonksiyonun dejenere Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}_\lambda \{(1 + \lambda v)^{-\frac{\alpha}{\lambda}}\} = \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u+\alpha}{\lambda}} dv = \frac{1}{u + \alpha - \lambda}, \quad u > -\alpha + \lambda$$

biçimindedir.

4.4. Dejenere Laplace Dönüşümünün Bazı Uygulamaları

İşe öncelikle bazı elementer fonksiyonların Dejenere Laplace dönüşümünü alarak başlayalım.

Teorem 4.4.1. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_\lambda \{\cos_\lambda(\alpha v)\} = \frac{u - \lambda}{(u - \lambda)^2 + \alpha^2} \quad (4.34)$$

ve

$$\mathcal{L}_\lambda \{\sin_\lambda(\alpha v)\} = \frac{\alpha}{(u - \lambda)^2 + \alpha^2} \quad (4.35)$$

biçimindedir.

İspat: $f(v) = \cos_\lambda(\alpha v)$ olsun. Dejenere Laplace dönüşümü tanımı ve (4.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\lambda \{ \cos_\lambda(\alpha v) \} &= \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} \cos_\lambda(\alpha v) dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left((1 + \lambda v)^{-\frac{u-\alpha i}{\lambda}} + (1 + \lambda v)^{-\frac{u+\alpha i}{\lambda}} \right) dv \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u - \lambda - \alpha i} + \frac{1}{u - \lambda + \alpha i} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2u - 2\lambda}{(u - \lambda)^2 + \alpha^2} \right) \\
 &= \frac{u - \lambda}{(u - \lambda)^2 + \alpha^2}
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde, $f(v) = \sin_\lambda(\alpha v)$ fonksiyonu için dejenere Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\lambda \{ \sin_\lambda(\alpha v) \} &= \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} \sin_\lambda(\alpha v) dv \\
 &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty \left((1 + \lambda v)^{-\frac{u-\alpha i}{\lambda}} - (1 + \lambda v)^{-\frac{u+\alpha i}{\lambda}} \right) dv \\
 &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{u - \lambda - \alpha i} - \frac{1}{u - \lambda + \alpha i} \right) \\
 &= \frac{1}{2i} \left(\frac{2\alpha}{(u - \lambda)^2 + \alpha^2} \right) \\
 &= \frac{\alpha}{(u - \lambda)^2 + \alpha^2}
 \end{aligned}$$

olur. □

Teorem 4.4.2. *(Dejenere Hiperbolik Fonksiyonların Dejenere Laplace Dönüşümleri)* (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_\lambda \{ \cosh_\lambda(\alpha v) \} = \frac{u - \lambda}{(u - \lambda)^2 - \alpha^2} \quad (4.36)$$

ve

$$\mathcal{L}_\lambda \{ \sinh_\lambda(\alpha v) \} = \frac{\alpha}{(u - \lambda)^2 - \alpha^2} \quad (4.37)$$

biçimindedir.

İspat: (4.14) ve (4.15) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\lambda \{ \cosh_\lambda(\alpha v) \} &= \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} \cosh_\lambda(\alpha v) dv \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left((1 + \lambda v)^{-\frac{u-\alpha}{\lambda}} + (1 + \lambda v)^{-\frac{u+\alpha}{\lambda}} \right) dv \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u - \alpha - \lambda} + \frac{1}{u + \alpha - \lambda} \right) \\
&= \frac{u - \lambda}{(u - \lambda)^2 - \alpha^2}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\lambda \{ \sinh_\lambda(\alpha v) \} &= \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} \sinh_\lambda(\alpha v) dv \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left((1 + \lambda v)^{-\frac{u-\alpha}{\lambda}} - (1 + \lambda v)^{-\frac{u+\alpha}{\lambda}} \right) dv \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u - \alpha - \lambda} - \frac{1}{u + \alpha - \lambda} \right) \\
&= \frac{\alpha}{(u - \lambda)^2 - \alpha^2}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. □

Şimdi de Teorem (3.16) ile verilen Birinci Öteleme teoremine benzer olarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.4.3. (*Dejenere Laplace Dönüşümü için Birinci Öteleme Teoremi*) (Upadhyaya, 2018) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $\mathcal{L}_\lambda \{ f(v) \} = F_\lambda(u)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}_\lambda \{ e_\lambda^{\alpha v} f(v) \} = F_\lambda(u - \alpha) \quad (4.38)$$

biçimindedir.

İspat: Dejenere Laplace dönüşümünün tanımı (4.38) eşitliğinin sol tarafına uygulanır ve (4.2) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\lambda \{ e_\lambda^{\alpha v} f(v) \} &= \int_0^\infty e_\lambda^{-uv} e_\lambda^{\alpha v} f(v) dv \\
&= \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} (1 + \lambda v)^{\frac{\alpha}{\lambda}} f(v) dv \\
&= \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{(u-\alpha)}{\lambda}} f(v) dv \\
&= F_\lambda(u - \alpha)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. □

(4.38) eşitliğinde $\lambda \rightarrow 0^+$ için limit alınırsa (3.16) eşitliği elde edilir.

Örnek 4.4.4. $f(v) = \cos_\lambda(v)$ olsun. Teorem 4.4.1 'den $\mathcal{L}_\lambda \{ \cos_\lambda v \} = \frac{u-\lambda}{(u-\lambda)^2+1}$ olduğundan Teorem 4.4.3 'den $\mathcal{L}_\lambda \{ e_\lambda^{2v} \cos_\lambda v \} = \frac{(u-2)-\lambda}{(u-2-\lambda)^2+1}$ olur.

Genel olarak;

$$\mathcal{L}_\lambda \{ \cos_\lambda(\alpha v) \} = \frac{u-\lambda}{(u-\lambda)^2 + \alpha^2}$$

ve

$$\mathcal{L}_\lambda \{ \sin_\lambda(\alpha v) \} = \frac{\alpha}{(u-\lambda)^2 + \alpha^2}$$

olduğundan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4.5. (Upadhyaya, 2018) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_\lambda \{ e_\lambda^{\alpha v} \cos_\lambda(\beta v) \} = \frac{u-\lambda-\alpha}{(u-\lambda-\alpha)^2 + \beta^2}$$

ve

$$\mathcal{L}_\lambda \{ e_\lambda^{\alpha v} \sin_\lambda(\beta v) \} = \frac{\beta}{(u-\lambda-\alpha)^2 + \beta^2}$$

eşitlikleri doğrudur.

Benzer şekilde;

$$\mathcal{L}_\lambda \{ \cosh_\lambda(\beta v) \} = \frac{u-\lambda}{(u-\lambda)^2 - \beta^2}$$

ve

$$\mathcal{L}_\lambda \{ \sinh_\lambda(\beta v) \} = \frac{\beta}{(u-\lambda)^2 - \beta^2}$$

olduğundan Teorem 4.4.3 kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4.6. (Upadhyaya, 2017)

$$\mathcal{L}_\lambda \{ e_\lambda^{\alpha v} \cosh_\lambda(\beta v) \} = \frac{u-\alpha-\lambda}{(u-\alpha-\lambda)^2 - \beta^2}$$

ve

$$\mathcal{L}_\lambda \{e_\lambda^{\alpha v} \sinh_\lambda(\beta v)\} = \frac{\beta}{(u - \alpha - \lambda)^2 - \beta^2}$$

ifadeleri geçerlidir.

Örnek 4.4.7. $f(v) = e_\lambda^{-v} (3\sinh_\lambda(2v) - 5\cosh_\lambda(2v))$ olsun. Dejenere Laplace dönüşümünün doğrusallığından

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_\lambda \{e_\lambda^{-v} (3\sinh_\lambda(2v) - 5\cosh_\lambda(2v))\} \\ &= 3\mathcal{L}_\lambda \{e_\lambda^{-v} 3\sinh_\lambda(2v)\} - 5\mathcal{L}_\lambda \{e_\lambda^{-v} 5\cosh_\lambda(2v)\} \\ &= 3 \left\{ \frac{2}{(u+1-\lambda)^2 - 4} \right\} - 5 \left\{ \frac{u+1-\lambda}{(u+1-\lambda)^2 - 4} \right\} \\ &= \frac{1 - 5u + 5\lambda}{(u+1-\lambda)^2 - 4} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.8. (Upadhyaya, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_\lambda \{\cos_\lambda(\alpha v) \sinh_\lambda(\alpha v)\} = \frac{\alpha \{(u - \lambda)^2 - 2u^2\}}{(u - \lambda)^4 + 4\alpha^4}$$

ve

$$\mathcal{L}_\lambda \{\sin_\lambda(\alpha v) \sinh_\lambda(\alpha v)\} = \frac{2\alpha^2(u - \lambda)}{(u - \lambda)^4 + 4\alpha^4}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: Teorem 4.4.3 ve (4.37) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda \{e_\lambda^{i\alpha v} \sinh_\lambda(\alpha v)\} &= \frac{\alpha}{(u - i\alpha - \lambda)^2 - \alpha^2} \\ &= \frac{\alpha \{(u - \lambda)^2 - 2\alpha^2 + 2i\alpha(u - \lambda)\}}{(u - \lambda)^4 + 4\alpha^4} \end{aligned}$$

yazılır ve $e_\lambda^{iv} = (1 + \lambda v)^{\frac{i}{\lambda}} = \cos_\lambda v + i\sin_\lambda v$ eşitliği kullanılırsa

$$\mathcal{L}_\lambda \{(\cos_\lambda(\alpha v) + i\sinh_\lambda(\alpha v)) \sin_\lambda(\alpha v)\} = \frac{\alpha \{(u - \lambda)^2 - 2\alpha^2 + 2i\alpha(u - \lambda)\}}{(u - \lambda)^4 + 4\alpha^4}$$

elde edilir. Son eşitliğin gerçel ve sanal kısımları göz önüne alındığında istenen elde edilir. \square

Teorem 4.4.9. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $u > (n+1)\lambda$ ve $n \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\lambda \{v^n\} &= \frac{n!}{(u-\lambda)(u-2\lambda)\dots(u-n\lambda)(u-(n+1)\lambda)} \\ &= \frac{n!}{u^{n+1}} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{u}\right)\left(1-\frac{2\lambda}{u}\right)\dots\left(1-\frac{(n+1)\lambda}{u}\right)}\end{aligned}\quad (4.39)$$

biçimindedir. Ayrıca,

$$\mathcal{L}_\lambda \{v^n\} = u^{-n-1} \Gamma_{\frac{\lambda}{u}}(n+1) \quad (4.40)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (4.18) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\lambda \{v^n\} &= \int_0^\infty (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} v^n dv \\ &= \lambda^{-n-1} B\left(n+1, \frac{u}{\lambda} - n - 1\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\lambda \{v^n\} &= \int_0^\infty (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} v^n dv \\ &= -\frac{\lambda}{u-\lambda} \frac{1}{\lambda} (1+\lambda v)^{-\frac{u-\lambda}{\lambda}} v^n \Big|_0^\infty + \frac{n}{u-\lambda} \int_0^\infty (1+\lambda v)^{-\frac{u-\lambda}{\lambda}} v^{n-1} dv \\ &= \frac{n}{u-\lambda} \int_0^\infty (1+\lambda v)^{-\frac{u-\lambda}{\lambda}} v^{n-1} dv\end{aligned}\quad (4.41)$$

elde edilir. $u > (n+1)\lambda$ olsun. O zaman (4.41) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\lambda \{v^n\} &= \int_0^\infty (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} v^n dv \\ &= \frac{n}{u-\lambda} \int_0^\infty (1+\lambda v)^{-\frac{u-\lambda}{\lambda}} v^{n-1} dv \\ &= \frac{n(n-1)}{(u-\lambda)(u-2\lambda)} \int_0^\infty (1+\lambda v)^{-\frac{u-2\lambda}{\lambda}} v^{n-2} dv = \dots \\ &= \frac{n!}{(u-\lambda)(u-2\lambda)\dots(u-n\lambda)} \int_0^\infty (1+\lambda v)^{-\frac{u-n\lambda}{\lambda}} dv \\ &= \frac{n!}{(u-\lambda)(u-2\lambda)\dots(u-n\lambda)(u-(n+1)\lambda)} \\ &= \frac{n!}{u^{n+1}} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{u}\right)\left(1-\frac{2\lambda}{u}\right)\dots\left(1-\frac{(n+1)\lambda}{u}\right)} \\ &= \frac{1}{u^{n+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{u}}(n+1)\end{aligned}$$

olur. □

(4.40) eşitliğinin $\lambda \rightarrow 0^+$ için limit alınırsa

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{L}_\lambda \{v^n\} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{u^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{1}{u^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{u^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 4.4.10. (Dejenere Üstel Mertebeli Fonksiyon) (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ ve f fonksiyonu $v_0 \geq 0$ olmak üzere (v_0, ∞) aralığında tanımlı olsun. Eğer bir α gerçel sayısı için

$$|f(v)| \leq M(1 + \lambda v)^{\frac{\alpha}{\lambda}}, v > v_0$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna “dejenere α -üstel mertebeli fonksiyon” denir.

Örnek 4.4.11. $f(v) = v$ fonksiyonu $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $\alpha > \lambda$ değerleri için dejenere α -üstel mertebeli bir fonksiyondur.

Teorem 4.4.12. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $f(v)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve dejenere α -üstel mertebeli fonksiyon ise $u > \alpha + \lambda$ değerleri için $\mathcal{L}_\lambda \{f(v)\}$ dejenere Laplace dönüşümü vardır.

İspat:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv \\ &= \int_0^{v_0} (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv + \int_{v_0}^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv \end{aligned}$$

yazılabilir f fonksiyonu dejenere α -üstel mertebeli olduğundan

$$\begin{aligned} (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} |f(v)| &< M(1 + \lambda v)^{\frac{\alpha}{\lambda}} (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} \\ &= M(1 + \lambda v)^{-\frac{1}{\lambda}(u-\alpha)}, v > v_0 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca;

$$\begin{aligned}
\int_{v_0}^{\infty} M(1+\lambda v)^{-\frac{1}{\lambda}(u-\alpha)} dv &= M \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{v_0}^R (1+\lambda v)^{-\frac{1}{\lambda}(u-\alpha)} dv \\
&= M \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{(1+\lambda v)^{-\frac{1}{\lambda}(u-\alpha)+1}}{\lambda - u + \alpha} \right|_{v_0}^R \\
&= \frac{M\lambda}{\lambda - u + \alpha} \left[\lim_{R \rightarrow \infty} (1+\lambda R)^{-\frac{1}{\lambda}(u-\alpha)+1} - (1+\lambda v_0)^{-\frac{1}{\lambda}(u-\alpha)+1} \right]
\end{aligned}$$

ifadesi $u > \alpha + \lambda$ değerleri için yakınsaktır. Böylece, $\int_{v_0}^R (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv$ integrali $u > \alpha + \lambda$ değerleri için vardır. Diğer taraftan; f fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde parçalı sürekli olduğundan $\int_0^{v_0} (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv$ integrali vardır. Böylece istenen elde edilir. \square

Şimdi de aşağıdaki teoremlerle fonksiyonların türevlerinin dejenere Laplace dönüşümünü verelim.

Teorem 4.4.13. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ fonksiyonları $(0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve dejenere α -üstel mertebeli olsun. Ayrıca $f^{(n)}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde parçalı sürekli olsun. Bu durumda $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\lambda \{f^{(n)}(v)\} &= u(u+\lambda) \dots (u+(n-1)\lambda) \mathcal{L}_\lambda \{(1+\lambda v)^{-n} f(v)\} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0) \left(\prod_{l=1}^{n-i-1} u + (l-1)\lambda \right)
\end{aligned}$$

eşitliği doğrudur. Burada $f^{(n)}(v) = \left(\frac{d}{dv}\right)^n f(v)$ şeklindedir.

İspat: $f(v)$ fonksiyonunun 1., 2., ..., n . mertebeden türevleri için Dejenere Laplace dönüşümü,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\lambda \{f'(v)\} &= \mathcal{L}_\lambda \left\{ \frac{d}{dv} f(v) \right\} = \int_0^\infty (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f'(v) dv \\
&= -f(0) + u \mathcal{L}_\lambda \{(1+\lambda v)^{-1} f(v)\}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

olur.

$$\mathcal{L}_\lambda \{(1+\lambda v)^{-1} f'(v)\} = -f(0) + (u+\lambda) \mathcal{L}_\lambda \{(1+\lambda v)^{-2} f(v)\}$$

biçimindedir. Böylece

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\lambda \{f''(v)\} &= \mathcal{L}_\lambda \left\{ \left(\frac{d}{dv} (f'(v)) \right) \right\} = -f'(0) + u \mathcal{L}_\lambda \{(1+\lambda v)^{-1} f'(v)\} \\
&= -f'(0) - u f(0) + u(u+\lambda) \mathcal{L}_\lambda \{(1+\lambda v)^{-2} f(v)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\lambda \{f^{(n)}(v)\} &= \mathcal{L}_\lambda \left\{ \left(\frac{d}{dv} \right)^n f(v) \right\} \\ &= u(u+\lambda) \dots (u+(n-1)\lambda) \mathcal{L}_\lambda \{ (1+\lambda v)^{-n} f(v) \} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0) \left(\prod_{l=1}^{n-i-1} u+(l-1)\lambda \right)\end{aligned}$$

ve böylece istenen elde edilir. \square

Teorem 4.4.14. (T. Kim ve D. Kim, 2017) $\mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} = F_\lambda(u)$ olsun. $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ değerleri için

$$\mathcal{L}_\lambda \{(\log(1+\lambda v))^n f(v)\} = (-1)^n \lambda^n \left(\frac{d}{du} \right)^n F_\lambda(u)$$

ifadesi geçerlidir.

İspat:

$$F_\lambda(u) = \int_0^\infty (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} F_\lambda(u) &= - \int_0^\infty \log(1+\lambda v)^{\frac{1}{\lambda}} (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv \\ &= -\lambda^{-1} \mathcal{L}_\lambda \{(1+\lambda v)f(v)\}\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{du} \right)^2 F_\lambda(u) &= (-1)^2 \int_0^\infty \left(\log(1+\lambda v)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^2 (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv \\ &= (-1)^2 \lambda^{-2} \int_0^\infty (\log(1+\lambda v))^2 (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv \\ &= (-1)^2 \lambda^{-2} \mathcal{L}_\lambda \{(1+\lambda v)^2 f(v)\}\end{aligned}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse;

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{du} \right)^n F_\lambda(u) &= (-1)^n \int_0^\infty \left(\log(1+\lambda v)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^n (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv \\ &= (-1)^n \lambda^{-n} \int_0^\infty (\log(1+\lambda v))^n (1+\lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv \\ &= (-1)^n \lambda^{-n} \mathcal{L}_\lambda \{\log(1+\lambda v)^n f(v)\}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. □

Teorem 4.4.15. (*Dejenere Laplace Dönüşümü İçin İkinci Öteleme Teoremi*) (Upadhyaya, 2018) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $\mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} = F_\lambda(u)$ olsun. Bu durumda

$$g(v) = \begin{cases} f(v - \alpha), & v > \alpha \\ 0 & v < \alpha \end{cases}$$

fonksiyonu için

$$\mathcal{L}_\lambda \{g(v)\} = e_\lambda^{-u\alpha} \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}} \left\{ \left(1 + \frac{\lambda v}{1 + \lambda\alpha}\right)^{u\alpha} f(v) \right\} \quad (4.43)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Dejenere Laplace dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda \{g(v)\} &= \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} g(v) dv \\ &= \int_0^\alpha (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} g(v) dv + \int_\alpha^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} g(v) dv \\ &= \int_0^\alpha (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} 0 dv + \int_\alpha^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v - \alpha) dv \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitliğin sağ tarafına $v - \alpha = t$ değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda \{g(v)\} &= \int_0^\infty (1 + \lambda(t + \alpha))^{-\frac{u}{\lambda}} f(t) dt \\ &= (1 + \lambda\alpha)^{-\frac{u}{\lambda}} \int_0^\infty \left(1 + \frac{\lambda t}{1 + \lambda\alpha}\right)^{-\frac{u}{\lambda}} f(t) dt \end{aligned} \quad (4.44)$$

olur. (4.44) eşitliğinde $p = \frac{\lambda}{1 + \lambda\alpha}$ yazılır ve $e_\lambda^v = (1 + \lambda v)^{\frac{1}{\lambda}}$ eşitliği göz önüne alınır

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda \{g(v)\} &= e_\lambda^{-u\alpha} \int_0^\infty (1 + pt)^{-\frac{u(1-p\alpha)}{p}} f(t) dt \\ &= e_\lambda^{-u\alpha} \int_0^\infty (1 + pt)^{-\frac{u}{p}} (1 + pt)^{u\alpha} f(t) dt \end{aligned}$$

yani

$$\mathcal{L}_\lambda \{g(v)\} = e_\lambda^{-u\alpha} \mathcal{L}_p \{(1 + pt)^{u\alpha} f(p)\}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikteki t değişkenini v ile değiştirir ve p yerine $\frac{\lambda}{1 + \lambda\alpha}$ yazılırsa istenen elde edilir. □

Teorem 4.4.15 Teorem 3.2.21 'nin genelleştirmesidir. (4.43) eşitliğinde $\lambda \rightarrow 0^+$ için limit alınır (3.17) eşitliği elde edilir.

Örnek 4.4.16. $g(v) = \begin{cases} (v-3)^3 & : v > 3 \\ 0 & : v < 3 \end{cases}$ fonksiyonun dejenere Laplace dönüşümünü bulalım.

$f(v) = v^3$ alınır

$$g(v) = \begin{cases} f(v-3) & : v > 3 \\ 0 & : v < 3 \end{cases}$$

olur. Böylece (4.43) eşitliğinden

$$\mathcal{L}_\lambda \{g(v)\} = e_\lambda^{-3u} \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{1+3\lambda}} \left\{ \left(1 + \frac{\lambda v}{1+3\lambda}\right)^{3u} v^3 \right\}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.15 'de $f(v) = v^\beta$, $\beta > -1$ ve $u > (\beta + 1)\lambda$, $\lambda \in (0, \infty)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4.17. (Upadhyaya, 2018) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $\mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} = F_\lambda(u)$ ve

$$g(v) = \begin{cases} (v-\alpha)^\beta, & v > \alpha \\ 0, & v < \alpha \end{cases}$$

olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}_\lambda \{g(v)\} = \frac{e_\lambda^{-u\alpha} (1 + \lambda\alpha)^{\beta+1}}{u^{\beta+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{u}}(\beta + 1)$$

biçimindedir.

İspat: (4.43) eşitliğinde $f(v) = v^\alpha$ yazılır ve $p = \frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}$ alınır

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda \{g(v)\} &= e_\lambda^{-u\alpha} \mathcal{L}_{\frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}} \left\{ \left(1 + \frac{\lambda v}{1+\lambda\alpha}\right)^{u\alpha} v^\beta \right\} \\ &= e_\lambda^{-u\alpha} \mathcal{L}_p \left\{ (1 + pv)^{u\alpha} v^\beta \right\} \\ &= e_\lambda^{-u\alpha} \int_0^\infty (1 + pv)^{-\frac{u}{p}} (1 + pv)^{u\alpha} v^\beta dv \\ &= e_\lambda^{-u\alpha} \int_0^\infty (1 + pv)^{-\frac{u(1-p\alpha)}{p}} v^\beta dv \\ &= e_\lambda^{-ua} \int_0^\infty \left(1 + \frac{p}{u(1-p\alpha)} u(1-p\alpha)v\right)^{-\frac{u(1-p\alpha)}{p}} \left\{ \frac{u(1-p\alpha)}{u(1-p\alpha)} v \right\}^\beta \frac{u(1-p\alpha)}{u(1-p\alpha)} dv \end{aligned}$$

olur. $u(1 - p\alpha)v = y$ değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\mathcal{L}_\lambda \{g(v)\} = \frac{e_\lambda^{-u\alpha}}{u^{\alpha+1}(1-p\alpha)^{\beta+1}} \int_0^\infty \left(1 + \frac{p}{u(1-p\alpha)}y\right)^{-\frac{u(1-p\alpha)}{p}} y^\alpha dy \quad (4.45)$$

elde edilir. (4.45) eşitliğinde $u(1 - p\alpha) > 0$ ve $\lambda = \frac{p}{1-p\alpha}$ alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda \{g(v)\} &= \frac{e_\lambda^{-u\alpha}(1+\lambda\alpha)^{\beta+1}}{u^{\alpha+1}} \int_0^\infty \left(1 + \frac{\lambda}{u}y\right)^{-\frac{u}{\lambda}} y^\beta dy \\ &= \frac{e_\lambda^{-u\alpha}(1+\lambda\alpha)^{\beta+1}}{u^{\alpha+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{u}}(\beta+1) \end{aligned} \quad (4.46)$$

eşitliği elde edilir. □

Teorem 4.4.18. (Upadhyaya, 2018) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $\mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} = F_\lambda(u)$ ve $\alpha \neq 0$ değerleri için

$$\mathcal{L}_\lambda \{f(\alpha v)\} = \frac{1}{\alpha} F_{\frac{\lambda}{\alpha}}\left(\frac{u}{\alpha}\right) \quad (4.47)$$

biçimindedir.

İspat: Dejenere Laplace dönüşümünün tanımından

$$\mathcal{L}_\lambda \{f(\alpha v)\} = \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(\alpha v) dv$$

yazar ve $\alpha v = \eta$ değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\mathcal{L}_\lambda \{f(\alpha v)\} = \int_0^\infty \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\eta\right)^{-\frac{u}{\lambda}} f(\eta) \frac{1}{\alpha} d\eta \quad (4.48)$$

olur. (4.48) eşitliğinde $\beta = \frac{\lambda}{\alpha}$ olsun. Buna gre

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda \{f(\alpha v)\} &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty (1 + \beta\eta)^{-\frac{u}{\beta\alpha}} f(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{\alpha} F_\beta\left(\frac{u}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} F_{\frac{\lambda}{\alpha}}\left(\frac{u}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.4.18, (3.18) eşitliğinin bir genellemesidir; (4.47) eşitliğinin $\lambda \rightarrow 0^+$ için limiti alınırsa (3.18) eşitliği elde edilir. □

Not 4.4.19. Daha önce verilen (4.34) ve (4.35) eşitlikleri (4.47) eşitliği yardımıyla da verilebilir.

Gerçekten;

$$\mathcal{L}_\lambda \{\cos_\lambda(v)\} = \frac{u - \lambda}{(u - \lambda)^2 + 1}$$

ve

$$\mathcal{L}_\lambda \{\sin_\lambda(v)\} = \frac{1}{(u - \lambda)^2 + 1}$$

olduğundan Teorem 4.4.18 'de $f(v) = \cos_\lambda(v)$ alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda \{f(\alpha v)\} &= \mathcal{L}_\lambda \{\cos_\lambda(\alpha v)\} = \frac{1}{\alpha} F_{\frac{\lambda}{\alpha}} \left(\frac{u}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{\frac{u}{\lambda} - \frac{\lambda}{\alpha}}{\left(\frac{u}{\lambda} - \frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{u - \lambda}{(u - \lambda)^2 + \alpha} \\ &= \mathcal{L}_\lambda \{\cos_\lambda(\alpha v)\} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde Teorem 4.4.18 'de $f(v) = \sin_\lambda v$ alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda \{f(\alpha v)\} &= \mathcal{L}_\lambda \{\sin_\lambda(\alpha v)\} = \frac{1}{\alpha} F_{\frac{\lambda}{\alpha}} \left(\frac{u}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\left(\frac{u}{\lambda} - \frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{\alpha}{(u - \lambda)^2 + \alpha^2} \\ &= \mathcal{L}_\lambda \{\sin_\lambda(\alpha v)\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.20. (Upadhyaya, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $\mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} = F_\lambda(u)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} = u \mathcal{L}_\lambda \left\{ (1 + \lambda v)^{-1} \int_0^v f(y) dy \right\} \quad (4.49)$$

biçimindedir.

İspat: $g(v) = \int_0^v f(y) dy$ olsun. $g'(v) = \frac{d}{dv} \left\{ \int_0^v f(y) dy \right\} = f(v)$ ve $g(0) = 0$ olur. Böylece

$$\mathcal{L}_\lambda \{g'(v)\} = \mathcal{L}_\lambda \left\{ \frac{d}{dv} g(v) \right\} = -g(0) + u \mathcal{L}_\lambda \left\{ (1 + \lambda v)^{-1} g(v) \right\}$$

olduğundan $g'(v) = f(v)$ ve $g(0) = 0$ eşitlikleri ile istenen elde edilir. \square

(4.49) eşitliğinde $\lambda \rightarrow 0^+$ limit alınırsa (4.34) eşitliği elde edilir.

Örnek 4.4.21. $f(v) = \cos_\lambda(2v)$ olsun. (4.49) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\lambda \left\{ (1 + \lambda v)^{-1} \int_0^v \cos_\lambda(2y) dy \right\} &= \frac{1}{u} \mathcal{L}_\lambda \{ \cos_\lambda(2v) \} \\ &= \frac{2}{u[(u - \lambda)^2 + 4]}\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.4.22. (Upadhyaya, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ olmak üzere $\mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} = F_\lambda(u)$ olsun. Bu durumda

$$\int_u^\infty F_\lambda(u) du = \lambda \mathcal{L}_\lambda \left\{ \frac{f(v)}{\log(1 + \lambda v)} \right\}$$

biçimindedir.

İspat: Dejenere Laplace dönüşümünün tanımından

$$F_\lambda(u) = \mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} = \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv$$

eşitliğinin her iki tarafının $u = u$ 'den $u = \infty$ 'a kadar u değişkenine göre integrali alınırsa

$$\int_u^\infty F_\lambda(u) du = \int_u^\infty du \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv$$

elde edilir. u ve v bağımsız değişkenler olduğundan son eşitlikteki integralin sırası değişebilir.

Böylece

$$\begin{aligned}\int_u^\infty F_\lambda(u) du &= \int_0^\infty f(v) dv \left[\int_u^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} du \right] \\ &= \int_0^\infty f(v) dv \left[\frac{(1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}}}{\log(1 + \lambda v)^{-\frac{1}{\lambda}}} \right]_{u=u}^\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^\infty f(v) dv \left[0 - \frac{(1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}}}{-\frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda v)} \right] \\ &= \lambda \int_0^\infty (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} \frac{f(v)}{\log(1 + \lambda v)} dv \\ &= \lambda \mathcal{L}_\lambda \left\{ \frac{f(v)}{\log(1 + \lambda v)} \right\}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. □

Teorem 4.4.23. (Periyodik Fonksiyonların Dejenere Laplace Dönüşümü) (Upadhyaya, 2017)

$f(v)$, periyodu ω olan bir periyodik fonksiyon yani $k = 0, 1, 2, \dots$ değerleri için $f(v + k\omega) = f(v)$ olsun. $\lambda \in (0, \infty)$ ve $\theta = \frac{\lambda}{1 + \lambda k\omega}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \lambda k\omega)^{-\frac{u}{\lambda}} \left[\int_0^{\omega} (1 + \theta t)^{-\frac{u}{\theta}} (1 + \theta t)^{uk\omega} f(t) dt \right]$$

biçimindedir.

İspat:

□

$$\mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} = \int_0^{\infty} (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\omega}^{(k+1)\omega} (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f(v) dv$$

yazılır ve $f(v)$ periyodik fonksiyonu için $v = t + k\omega$ değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda \{f(v)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\omega} (1 + \lambda(t + k\omega))^{-\frac{u}{\lambda}} f(t + k\omega) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\omega} (1 + \lambda k\omega)^{-\frac{u}{\lambda}} \left(1 + \frac{\lambda t}{1 + \lambda k\omega}\right)^{-\frac{u}{\lambda}} f(t) dt \end{aligned} \quad (4.50)$$

olur. (4.50) eşitliğinde $\theta = \frac{\lambda}{1 + \lambda k\omega}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda \{f(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \lambda k\omega)^{-\frac{u}{\lambda}} \int_0^{\omega} (1 + \theta t)^{-\frac{u(1 - \theta k\omega)}{\theta}} f(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \lambda k\omega)^{-\frac{u}{\lambda}} \left[\int_0^{\omega} (1 + \theta t)^{-\frac{u}{\theta}} (1 + \theta t)^{uk\omega} f(t) dt \right] \end{aligned}$$

ve böylece istenen elde edilir.

Teorem 4.4.24. (Dejenere Başlangıç Değer Teoremi) (Upadhyaya, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ ve f fonksiyonu türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(v) = \lim_{u \rightarrow \infty} u \mathcal{L}_\lambda \{(1 + \lambda v)^{-1} f(v)\}$$

biçimindedir.

İspat: (4.42) eşitliğinden

$$\mathcal{L}_\lambda \{f'(v)\} = \int_0^{\infty} (1 + \lambda v)^{-\frac{u}{\lambda}} f'(v) dv = -f(0) + u \mathcal{L}_\lambda \{(1 + \lambda v)^{-1} f(v)\} \quad (4.51)$$

yazılır ve (4.51) eşitliğinde $u \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} (1 + \lambda v)^{\frac{-u}{\lambda}} f'(v) dv = -f(0) + \lim_{u \rightarrow \infty} u \mathcal{L}_{\lambda} \{ (1 + \lambda v)^{-1} f(v) \} \quad (4.52)$$

elde edilir. f fonksiyonu türevlenebilir olduğundan süreklidir ve böylece $f(0) = \lim_{v \rightarrow 0} f(v)$ yazılabilir. O halde (4.52) eşitliğinden

$$0 = -f(0) + \lim_{u \rightarrow \infty} u \mathcal{L}_{\lambda} \{ (1 + \lambda v)^{-1} f(v) \}$$

olur. $\lim_{v \rightarrow 0} f(v) = f(0)$ olduğundan

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(v) = \lim_{u \rightarrow \infty} u \mathcal{L}_{\lambda} \{ (1 + \lambda v)^{-1} f(v) \}$$

eşitliği elde edilir. □

Teorem 4.4.25. (Dejenere Son Değer Teoremi) (Upadhyaya, 2017) $\lambda \in (0, \infty)$ ve f fonksiyonu türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f(v) = \lim_{u \rightarrow 0} u \mathcal{L}_{\lambda} \{ (1 + \lambda v)^{-1} f(v) \}$$

biçimindedir.

İspat:

$$\mathcal{L}_{\lambda} \{ f'(v) \} = \int_0^{\infty} (1 + \lambda v)^{\frac{-u}{\lambda}} f'(v) dv = -f(0) + u \mathcal{L}_{\lambda} \{ (1 + \lambda v)^{-1} f(v) \}$$

eşitliğinde $u \rightarrow 0$ için limit alınırsa

$$\int_0^{\infty} f'(v) dv = -f(0) + \lim_{u \rightarrow 0} u \mathcal{L}_{\lambda} \{ (1 + \lambda v)^{-1} f(v) \}$$

yani

$$f(v)|_{v=0}^{v=\infty} = -f(0) + \lim_{u \rightarrow 0} u \mathcal{L}_{\lambda} \{ (1 + \lambda v)^{-1} f(v) \}$$

olur ve böylece istenen elde edilir. □

Teorem 4.4.24 ve Teorem 4.4.25 'de $\lambda \rightarrow 0^+$ için limit alınırsa (3.20) ve (3.21) eşitlikleri elde edilir.



5. SONUÇ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında; dejenere üstel, dejenere Euler ve dejenere Gama fonksiyonlarının tanımı ve özellikleri ile dejenere Laplace dönüşümünün tanımına ve bazı uygulamalarına yer verilmiştir. Dejenere Gama fonksiyonun rezidüsü, dejenere Beta fonksiyonu ile ilişkisi verilmiştir. Ayrıca trigonometrik fonksiyon, üstel mertebeli fonksiyon gibi bazı temel fonksiyonların dejenere Laplace dönüşümü hesaplanmıştır. Son olarak dejenere başlangıç değeri ve dejenere son değeri teoremlerine yer verilmiştir.

Dejenere Gama fonksiyonu ve dejenere Laplace dönüşümünün literatürdeki önemi ve bu konuda yapılan çalışmalar göz önüne alındığında, bu yüksek lisans tez çalışması daha sonra yapılacak çalışmalara yol gösterici olabilecektir. Ayrıca bu konu hakkında temel bilgiye sahip olmak isteyen araştırmacılara da öğretici bir kaynak olacaktır.



KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. ve Stegun, I. (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. ninth Dover printing, tenth GPO printing. New York: Dover.
- Andrews, G. vd. (1999). *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press.
- Browder, A. (1996). *Mathematical analysis: an introduction*. New York: Springer Science.
- Carlitz, L. (1979). Degenerate stirling. *Bernoulli and Eulerian numbers. Util. Math*, 15(1), 51–88.
- Doetsch, G. (2012). *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation*. Springer Science.
- Dragomir, S. vd. (1999). Inequalities for beta and gamma functions via some classical and new integral inequalities. *RGMI research report collection*, 2(3).
- Gautschi, W. (1959). Some elementary inequalities relating to the gamma and incomplete gamma function. *J. Math. Phys*, 38(1), 77–81.
- Gautschi, W. (1974). Some mean value inequalities for the gamma function. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 5(2), 282–292.
- Hairer, E. ve Wanner, G. (2000). *Analysis by Its History*. Springer New York. ISBN: 978-0-387-77031-4.
- Kim, T. ve Kim, D. (2020). Note on the degenerate gamma function. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 27(3), 352–358.
- Kim, T. ve Kim, D. (2017). Degenerate Laplace transform and degenerate gamma function. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 24(2), 241–248.
- Kim, T., Kim, D., vd. (2020). A note on degenerate gamma random variables. *Revista de Educacion*, 39–44.
- Kim, Y. vd. (2018). A note on modified degenerate gamma and Laplace transformation. *Symmetry*, 10(10), 471.

- Nath, R. (1974). On a generalization of laplace transform.
- Schiff, J. L. (2013). *The Laplace transform: theory and applications*. Springer Science, Business Media.
- Spiegel, M. (1965). *Laplace Transforms*. Hadronic Press, Inc., Palm Harbor, FL.
- Sudo, T. (2015). Computing the Laplace transform and the convolution for more functions adjoined. *Cubo (Temuco)*, 17(3), 71–90.
- Upadhyaya, L. (2017). On the degenerate Laplace transform-II. *International Journal of Engineering, Scientific Research*, 5(12), 63–71.
- Upadhyaya, L. (2018). On the degenerate Laplace transform. *Bulletin of Pure, Applied Sciences*, 37E(1), 1–8.
- Verma, R. (1974). Application of gamma functions in solving certain integral equations.
- Zill, D. (2020). *Advanced engineering mathematics*. Jones, Bartlett Publishers.
- Zill, D. ve Shanahan, P. (1940). *Complex Analysis: A First Course with Applications*. Jones and Bartlett Publishers series in mathematics: Complex analysis. Jones, Bartlett Learning. ISBN: 9781449694623.

ÖZ GEÇMİŞ

Soyadı, Adı : SOLMAZ, Müge

Yabancı Dil : İngilizce

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet tarihi(Yıl)
Y. Lisans	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi	2021-
Lisans	Kırıkkale Üniversitesi	2017-2021

İŞ DENEYİMİ

Yıl	Yer/Kurum	Ünvan
2022-...	Özel Aydın Efe Lider Okulları	Öğretmen