T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BULANIK METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS

Pınar MERCİMEK

HAZİRAN-2024
GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BULANIK METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN UYGULAMALARI

FIXED POINT THEOREMS IN FUZZY METRIC SPACES AND APPLICATIONS FOR INTEGRAL EQUATIONS

YÜKSEK LİSANS

Pınar MERCİMEK

HAZİRAN-2024
GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BULANIK METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN UYGULAMALARI

FIXED POINT THEOREMS IN FUZZY METRIC SPACES AND APPLICATIONS FOR INTEGRAL EQUATIONS

YÜKSEK LİSANS

Pınar MERCİMEK

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA

HAZİRAN-2024
GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans tezi olarak hazırlamış olduğum "**Bulanık Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri ve İntegral Denklemler için Uygulamaları**" isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi'nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

28/06/2024

……………………….

Pınar MERCİMEK

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunun belirlenmesi ve bu tezin hazırlanması aşamasında yol gösterici olan, bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her türlü görüş ve önerilerini esirgemeyen çok kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA’ya teşekkür ederim. Ayrıca, her zaman yanımda olan ve desteğini esirgemeyen değerli eşime ve aileme teşekkür ederim.

Pınar MERCİMEK
GÜMÜŞHANE – 2024

ÖZET

Sabit nokta teorisinin uygulamalı matematiğin yanı sıra mühendislik, biyoloji, istatistik gibi birçok anabilim dalında uygulamaları mevcuttur. Bulanık küme kavramının gelişimi ile birlikte sabit nokta teorisi bulanık kümeler üzerinde de geliştirilerek geniş uygulama alanı bulmuştur. Bu tez çalışmasında ilk olarak bulanık küme teorisi hakkında temel kavramlara yer verilecektir. Daha sonra sabit nokta teorisinin bulanık metrik uzaylardaki gelişimi ele alınacaktır. Böylece, bulanık daralma dönüşümleri ile birlikte bulanık sabit nokta teoremleri sistematik olarak araştırılacaktır. Son olarak, bu sabit nokta teoremlerinin integral denklemlere uygulaması üzerine yapılan çalışmalar irdelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, Bulanık metrik uzay, Bulanık sabit nokta teoremleri, İntegral denklemler.

SUMMARY

Fixed point theory has applications in many branches of science such as engineering, biology and statistics, as well as applied mathematics. With the development of the concept of fuzzy sets, fixed point theory has been developed on fuzzy sets and has found a wide application area. In this thesis, first the fundamental concepts about fuzzy set theory will be included. Then, the development of fixed point theory in fuzzy metric spaces will be discussed. Thus, fuzzy fixed point theorems along with fuzzy contraction mappings will be systematically investigated. Finally, studies on the application of these fixed point theorems to integral equations will be examined.

Keywords: Fuzzy set, Fuzzy metric space, Fuzzy fixed point theorems, Integral equations.

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

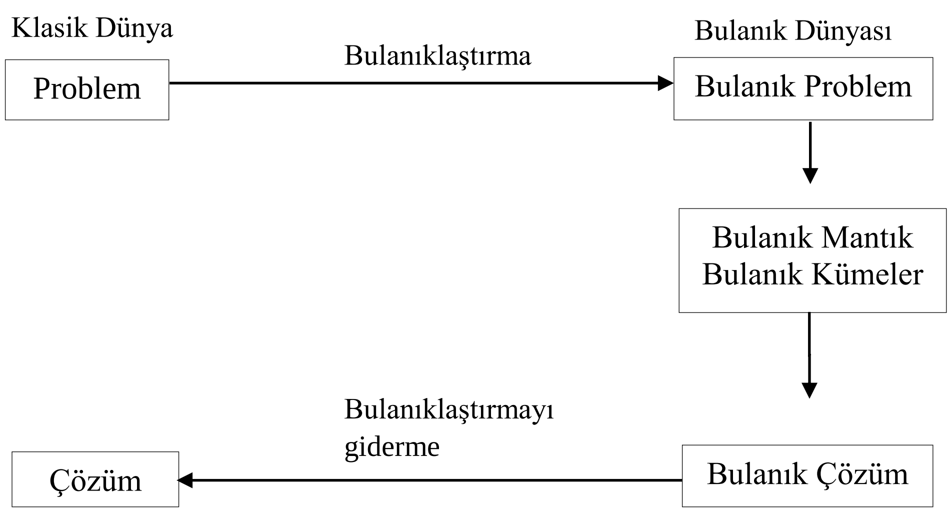
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel (gerçel) sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel (gerçel) sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$<$	: Küçüktür
$>$	: Büyüktür
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\leq$	: Küçük eşit
$\geq$	: Büyük eşit
$\in$	: Elemanıdır
ε	: Epsilon
δ	: Delta
α	: Alfa
β	: Beta
$\exists$	: Öyle ki
$\forall$	: Herhangi
$\Longrightarrow$	: İse
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
vb.	: Ve benzeri
vd.	: Ve diğerleri
$F(T)$	: T dönüşümün sabit noktalar kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1965 yılında Zadeh "bulanık" belirsiz kavramını ortaya atmıştır (Zadeh,1965). Bulanık kavramı cebir, topoloji, grafik teorisi, mühendislik gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Bulanık mantık insanlar tarafından, günlük dilimizde kullanılan kesinlik bildirmeyen ifadelerin derecelendirilmesini sağlar. Örneğin, "biraz sıcak", "hemen hemen doğru", "çok güzel" gibi belirsiz ifadeler sayısal olarak ifade edilemez. Bulanık mantık bu gibi ifadelerin sayısal olarak derecelendirilmesini sağlar. Diğer bir örnekte ise "kahvenizin nasıl olmasını istersiniz?" şeklinde garsonun sorduğu bir soruya "kesinlikle 0,58 oranında şekerli olsun" şeklinde cevap veremeyiz. Bulanık mantık kavramında kesinlikle doğru ya da kesinlikle yanlış değerler yoktur. Bunun yerine kısmen doğru, kısmen yanlış gibi belirsiz ifadeler kullanılır.

Klasik mantıkta ise bir ifade veya eleman bir kümeye ya aittir ya da değildir veya bir kavram ya tamamen doğrudur ya da tamamen yanlıştır. Örneğin “Pazartesi günü hava sıcaklığı 32 derece olacak.”, “9/A sınıfındaki kilosu 45 in üzerinde olan öğrenciler.” bu ifadeler klasik mantığı temsil eder. Fakat, “Soğuk su sevmem.”, “Dün hava fazlasıyla sıcaktı.” ve “O kız çok zeki.” bu ifadeler ise bulanık mantığı temsil eder.

Klasik mantıkla matematik modeller ortaya konarak çözülmesi çok zor veya imkansız olan sistemlerde bulanık mantık kullanılabilir. Bunun için problem önce bulanık hale getirilip, bulanık mantığın ortaya koyduğu prensipler çerçevesinde çözüldükten sonra ortaya çıkan bulanık çözümün gerçek dünyada bir sonuç olarak ortaya konması gerekir. Aşağıda Şekil 1’de bu belirtilen algoritmanın şeması görülmektedir (Taçgın, 2002).



Şekil 1. Klasik mantığın bulanık mantık biçiminde çözümlenmesi

Zadeh’in çalışmasından sonra bulanık topolojik uzay kavramı (Chang, 1968) ve (Lowen, 1976) çalışmaları ile literatüre kazandırılmıştır. Böylece klasik topolojide yapılan çalışmalar için yeni bir alan oluşturmuştur. Metrik en genel anlamda, uzaydaki nokta çiftleri ile pozitif bir reel sayı ilişkilendirmek olarak ifade edilebilir. Son elli yılda bu kavramın birçok genellemesi elde edilmiştir. Bulanık metrik kavramı da bunlardan biridir. Fakat metrik uzaylardan farklı olarak; bulanık metrik uzaylarda iki nesne arasındaki mesafe, kesin bir reel sayı ile ifade edilmez. Kramosil ve Michalek (1975) çalışmalarında bulanık metriği tanımladıktan sonra George ve Veeramani (1994) Hausdorff uzay yapısını elde edilebilmek için Kramosil ve Michalek’in bulanık metrik uzay tanımını yeniden güncellemişlerdir. Bu sayede klasik analizde yapılan pek çok çalışma bulanık uzaylara taşınmıştır.

Matematiğin en başarılı ve etkili araçlarından biri sabit nokta teorisi özellikle diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, integral denklemler gibi alanlarda olduğu kadar diğer anabilim dallarında geniş uygulamaya sahiptir. Sabit nokta teorisi çeşitli koşullar altında Stephan Banach tarafından 1922'de sabit noktanın varlığının ve tekliğinin ispatlanması ile ortaya konmuştur (Banach, 1922). Sabit nokta teori araştırmacıları bulanık metrik uzaylara yoğun ilgi göstermişlerdir. Farklı koşullar altında bir fonksiyonun sabit noktasının varlığını ve tekliğini incelenmişlerdir. Abu Osman, Banach'ın sabit nokta teoremini bulanık metrik uzaylarda ele almıştır (Abu Osman, 1983). Ardından Grabiec (Grabiec, 1988), George ve Veermani (George ve Veermani, 1997), Gregori ve arkadaşları (Gregori ve Romaguer 2000, 2004, Gregori ve Sapena 2002, Gregori vd. 2016), Hadzic ve Pap (Hadzic ve Pap 2002), Mihet (Mihet 2004, 2008) gibi araştırmacılar bulanık sabit nokta teoremi ve bulanık metrik uzayların diğer özellikleri üzerine çalışmışlardır. Hem klasik metrik uzaylardaki daralma dönüşümlerinin bulanık versiyonları hem de yeni tanımlanan bulanık daralma dönüşümleri ile bulanık metrik uzaylarda birçok sabit nokta teorisi literatüre kazandırmıştır. Bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teorisi üzerine çok sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmalardan bazıları burada sunulmuştur. İlgilenen araştırmacılar bu çalışmalara ve buradaki referanslara bakabilir: (Chitra ve Subrahmanyam, 1987; Mihet, 2004, 2007, 2008; Türkoğlu vd., 2006; Alaca, 2009; Abbas vd., 2012; Samet vd., 2012; Wardowski 2013; Beg vd., 2013; Chauhan vd. 2013; Shukla ve Abbas, 2014; Gopal ve Vetro, 2014; Gregori ve Miñana, 2016; Radenovic vd., 2017; Sangurlu Sezen ve Turkoglu, 2017; Melliani ve Moussaoui, 2018; Cho vd., 2018, Sedghi vd., 2018; Shukla vd., 2018; Ahmad vd., 2019; Gregori vd., 2019a, 2019b; Mahmood vd. 2019; Wang vd., 2019; Zheng ve Wang, 2019; Tiwari ve Som 2019; Rakic vd., 2020; Saleem vd., 2020; Sola Erduran, 2020; Gubran vd., 2021; Rasham vd., 2021; Singh vd., 2023; Senocak ve Güner, 2023).

Bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri üzerine yapılan çalışmalarla birlikte bu teoremlerin integral denklemler üzerine uygulamalar yapılmaktadır (Gopal vd., 2014; Mishra vd., 2016; Jain ve Jain, 2021; Mohammadi vd., 2021; Wong vd., 2023). Tüm bu gelişmelerle ışığında, bulanık kümeler teorisi potansiyel bir disiplinler arası araştırma alanı olarak ortaya çıkmıştır ve bu da çalışmamızın motivasyonunu oluşturmaktadır. Tez çalışmasında bazı sabit nokta teorilerine yer verildikten sonra (Mishra vd., 2016) çalışması ayrıntılı olarak incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sırasıyla fonksiyonel analiz, integral denklemler ve sabit nokta teorisi ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir.

2.1. Fonksiyonel Analizin Temel Kavramları

Tanım 2.1.1. X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\, x, y, z \in X$ için;

- **i.** $d(x,y) \geq 0$
- **ii.** $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Özdeşlik Özelliği)
- **iii.** $d(x,y) = d(y,x)$ (Simetri Özelliği)
- **iv.** $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

koşullarını sağlıyor ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde metriktir denir. Üzerinde bir d metriği ile tanımlı olan uzaya da metrik uzay denir ve bu ifade (X,d) ile gösterilir. X kümesinin elemanlarına da (X,d) metrik uzayının noktaları denir.

Eğer metrik tanımındaki ii koşulu sağlanmıyor ise ii koşulu yerine;

$(ii)'$ $\forall x \in X$ için $d(x,x) = 0$

koşulu alınırsa $(i), (ii)', (iii)$ ve (iv) koşullarını sağlayan d fonksiyonuna yarı metrik, uzaya da yarı metrik uzay denir (Başkan vd., 2006).

Örnek 2.1.1. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$d(x,y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin *alışılmış metriği* veya *mutlak değer metriği* adı verilir.

Örnek 2.1.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ koşulunu sağlayan iki sayı olsun ve

$$C([a,b], \mathbb{R}) = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

kümesi tanımlansın. Analizin temel teoremlerinden bilinir ki

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad g : [a,b] \to \mathbb{R}$$

sürekli fonksiyonlar ise

$$|f| : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f-g : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları da süreklidir. Bu halde,

$$\{|f(x)-g(x)| : x \in [a,b]\}$$

sürekli bir küme ise üstten sınırlıdır. Dolayısıyla, bu kümenin supremumu vardır. Weierstrass ekstrem değer teoreminden, bu kümenin bu aralıkta maksimumu mevcuttur. Böylece, $d_\infty : C \times C \to \mathbb{R}$ ve

$$d_\infty(f,g) = \max\{|f(x)-g(x)| : x \in [a,b]\}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm anlamlı olup, $(C[a,b], d_\infty)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 2.1.3. $C[a,b]$ ile $[a,b]$ üzerinde tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayını gösterelim. $d(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt$ ile tanımlı fonksiyonun $C[a,b]$ üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

Çözüm: d fonksiyonunun $\mathrm{i}, \mathrm{ii}, \mathrm{iii}, \mathrm{iv}$ şartlarını sağladığını gösterelim.

$\forall x,y,z \in C[a,b]$ ve $\forall t \in [a,b]$ için

i. $|x(t)-y(t)| \geq 0$

$$\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt \geq 0$$

$$d(x,y) \geq 0$$

mutlak değer metriği olduğundan i şartı sağlanır.

ii. $$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt = 0$$
$$\Leftrightarrow |x(t) - y(t)| = 0$$
$$\Leftrightarrow x(t) = y(t)$$
$$\Leftrightarrow x = y$$

olduğundan ii şartı sağlanır.

iii. $$d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt = \int_a^b |y(t) - x(t)|\, dt = d(y,x)$$

olduğundan iii şartı sağlanır.

iv. $$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt \\ &\leq \int_a^b |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|\, dt \\ &= \int_a^b |x(t) - z(t)|\, dt + \int_a^b |y(t) - z(t)|\, dt \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde iv sağlanır. Bu durumda d fonksiyonu $C[a,b]$ üzerinde bir metriktir.

Tanım 2.1.2. ℕ, doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı her fonksiyona bir dizi denir ve (x_n) şeklinde gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.3. (X,d) bir metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ ise (x_n) dizisi x e *yakınsaktır* denir (Bayraktar, 2006). Yani,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak biçimde $x \in X$ mevcutsa (x_n) dizisi X de *yakınsaktır* ve x e de *dizinin limiti* denir. Şu halde, (x_n) dizisi yakınsak ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ise $n \to \infty$ iken $(x_n) \to x$ şeklinde gösterilir. (x_n) dizisi yakınsak değilse *ıraksaktır* denir.

Tanım 2.1.4. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ise (x_n) dizisine X de bir *Cauchy dizisi* adı verilir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.1.1. (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) de her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.1.2. (X, d) metrik uzayında bir Cauchy dizisinin alt dizisinin yakınsadığı değere dizinin kendisi de yakınsar (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.5. (X, d) metrik uzayındaki her (x_n) Cauchy dizisi, yine uzayın bir elemanına yakınsak olması durumunda yani $(x_n) \to x \in X$ ise (X, d) metrik uzayı *tamdır* denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.1.4. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}$ Öklid uzayının $\mathbb{R} - \{a\}$ alt uzayı tam değildir.

Çözüm: $x_n = a + \frac{1}{n}$ olmak üzere $\mathbb{R} - \{a\}$ da (x_n) alınırsa

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0$$

olduğundan (x_n) Cauchy dizisidir. Fakat bu $\mathbb{R} - \{a\}$ alt uzayında bu dizi yakınsak değildir. Çünkü $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ dır. $a \notin \mathbb{R} - \{a\}$ dır.

Örnek 2.1.5. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi tam değildir. Gerçekten;
$(x_n) = (1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots,)$ dizisi $(\mathbb{Q}, d)$ de bir Cauchy dizisidir fakat bu dizinin yakınsadığı $\lim_{n\to\infty} x_n = r_2$ sayısı rasyonel sayılar kümesinin içinde değildir. Bundan dolayı $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi tam değildir.

Örnek 2.1.6. $\mathbb{R}$ mutlak değer metriğine göre tamdır.

Tanım 2.1.6. X boş olmayan herhangi bir küme ve $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \to X\,,\ \ (a, b) = a + b$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times X \to X \,, \quad (a, b) \to ab$$

dönüşümleriyle yukarıdaki işlemler tanımlansın. $\forall a, b, c \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

i. $a + b = b + a$,
ii. $a + (b + c) = (a + b) + c,$
iii. $a + 0 = a$ eşitliğini sağlayan yalnız bir $0 \in X$ mevcuttur,
iv. $a + (-a) = 0$ eşitliğini sağlayan yalnız bir $(-a) \in X$ mevcuttur,
v. $1. a = a$,
vi. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$,
vii. $a(\alpha + \beta) = \alpha a + \beta a$,
viii. $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$,

koşulları sağlanıyorsa, X e $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir *vektör (lineer) uzay* denir (Maddox, 1970). Burada, $\mathbb{F}$ nin elemanlarına *skaler*, X in elemanlarına ise *vektör* adı verilir. Ayrıca eğer X vektör uzayında $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ olarak alınırsa *reel vektör uzayı*, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olarak alınırsa da *kompleks vektör uzayı* olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.7. $X = \mathbb{R}^n$ kümesi

$$x = (x_1, \dots, x_n) \,, \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

vb. şeklinde yazılan, tüm sıralı reel sayı *n*-lilerin kümesi olsun. $\mathbb{R}$ nin bir cisim olduğu dikkate alındığında $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ kümesinin

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \,, \quad ax = (ax_1, \dots, ax_n)$$

işlemlerine göre vektör uzayıdır. Burada işlemlere sırasıyla *bileşen toplama* ve *skalerle çarpma* denir.

Tanım 2.1.7. $X, \mathbb{F}$ cismi üzerinde herhangi bir vektör uzayı ve K, X uzayının bir alt kümesi olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve her $a, b \in K$ için,

$$a + b \in K \text{ ve } \alpha a \in K$$

şartları sağlanıyorsa K kümesine X vektör uzayının alt uzayı denir ve bu iki şart $\alpha a + \beta b \in K$ şeklinde de gösterilebilir (Maddox, 1970).

Örnek 2.1.8. X bir vektör uzayı olsun. $\{\theta\} \subset X$ kümesi bir alt vektör uzaydır.

Tanım 2.1.8. $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı X ve Y olsun. Her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y),$$

sağlanıyor ise, $T: X \to Y$ fonksiyonuna bir lineer dönüşüm denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.9. $X \neq \emptyset$ kümesi $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Kabul edelim ki,

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+, \quad x \to \|x\|$$

fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

i. $\|x\| \geq 0$
ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna *norm fonksiyonu* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de *normlu uzay* denir. i, ii, iii ve iv özelliklerine *norm aksiyomları* denir (Maddox, 1970).

Örnek 2.1.9. $X = \mathbb{R}$ ve $x \in X$ için

$$\|\cdot\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \|x\| = |x|$$

şeklinde tanımlanırsa $\mathbb{R}$ kendisi üzerinde normlu uzaydır. Gerçekten, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

i. $\|x\| = |x| \geq 0$
ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
iii. $\|\alpha x\| = |\alpha x| = |\alpha||x| = |\alpha| \|x\|$
iv. $\|x + y\| = |x + y| \leq |x| + |y| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanır. O halde $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ normlu uzaydır. Benzer olarak,

$$\|\cdot\|: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \to \|x\| = |x|$$

için $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|)$ de normlu uzaydır.

Teorem 2.1.3. Her normlu uzay bir metrik uzaydır. Fakat genelde tersi doğru değildir (Musayev ve Alp, 2000).

İspat: $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olmak üzere

$$d : X \times X \to \mathbb{R},\ d(x,y) = \|x-y\|$$

şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğu görülür. Gerçekten, $\forall x, y, z \in X$ için

i. $d(x,y) \geq 0\,, x - y \geq 0 \ \Rightarrow\ \|x-y\| \geq 0$

ii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow\ \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow\ x - y = 0\ \Leftrightarrow x = y$

iii. $d(x,y) = \|x-y\| =\ \|-(y-x)\| = \|y-x\| = d(y,x)$

iv. $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\|$

$$\leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$$

olduğundan dolayı d, X üzerinde bir metriktir. O halde her $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayından bir (X, d) metrik uzayı elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen d metriğine $\|\cdot\|$ *normunun indirgendiği (ürettiği, doğurduğu) metrik* adı verilir

Örnek 2.1.10. $X \neq \{\theta\}$ vektör uzayı üzerinde tanımlı metriğin normdan üretilmediğini gösteriniz.

Çözüm: $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ ve $a \neq 0$ ve $a \neq 1$ olacak şekilde bir a skaları alınır. $x \neq y$ olduğundan $ax \neq ay$ olup $d(ax, ay) = 1 \neq |a| d(x,y) = |a|$ gerçeklenir. O halde öteleme değişmezliği gerçeklenmediğinden d metriği normdan üretilmemiştir.

Tanım 2.1.10. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun, (x_n) bu uzayın içinde bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_0(\varepsilon)$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon$ ise (x_n) dizisi x e *yakınsaktır* denir (Soykan, 2008). Yani,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

ise (x_n) dizisi x noktasına yakınsıyor denir ve $(x_n) \to x$ veya

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

olarak ifade edilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya *norma göre yakınsama* denir.

Tanım 2.1.11. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ normlu uzaylar ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Eğer ki $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık gelen, her $y \in X$ için $\|x - y\| < \delta$ iken $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcutsa f fonksiyonu x noktasında süreklidir denir (Soykan, 2008).

Tanım 2.1.12. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve Y, X in bir alt kümesi olarak tanımlansın. Buna göre,

$$d(Y) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in Y\} \geq 0$$

sayısına Y kümesinin *çapı* denir. Eğer bir $Y \subset X$ kümesinin çapı sonlu ise Y kümesine *sınırlı küme* adı verilir. Ayrıca X içindeki (x_n) dizisine karşılık gelen noktalar kümesi sınırlı ise (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.1.11. $A = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ ise çapı $d(A) = 2$ dir.

Örnek 2.1.12. $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi sınırlı mıdır?

Çözüm: Gerçekten, dizinin terimlerini bir A kümesi içerisinde düşünülür. Burada,

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \text{ ise çapı } d(A) = 1$$

dir. O halde (x_n) dizisi sınırlıdır.

Örnek 2.1.13. $(x_n) = (n)$ dizisi sınırlı değildir. Çünkü, dizinin terimleri bir A kümesi içinde

$$A = \{1, 2, 3, \dots\}$$

olsun. Doğal sayılar üstten sınırlı olmadığı için

$$d(A) < K$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı mevcut olamaz, yani A kümesi sınırsızdır. O halde (x_n) dizisi sınırsızdır.

Teorem 2.1.4. Norm fonksiyonu süreklidir (Soykan, 2008).

Teorem 2.1.5. (x_n), $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ise,

i. x limiti tektir.
ii. (x_n) dizisi sınırlıdır.
iii. (x_n) dizisinin her $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisinin limiti de x dır.
iv. $a, (a_n) \in \mathbb{F}$ için $(a_n) \to a$ ise $(a_n x_n) \to ax$.
v. $y, (y_n) \in X$ için $(y_n) \to y$ ise $(x_n + y_n) \to x + y$.

ifadeleri doğrudur (Soykan, 2008).

Tanım 2.1.13. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ ise (x_n) dizisine X normlu uzayında bir *Cauchy dizisi* adı verilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.14. Eğer bir normlu uzayda her Cauchy dizisi, bu normlu uzayda yakınsak ise bu uzaya bir *tam uzay* denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.1.15. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. Eğer X uzayı norm metriğine göre tamsa X e bir *Banach uzayı* denir (Kreyszig, 1978). O halde her Banach uzayı bir tam normlu uzaydır.

Örnek 2.1.14. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$ kümesi

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

normuna göre bir Banach uzaydır.

Çözüm: $\mathbb{R}^n$ in bir normlu uzay olduğu biliniyor. Bu halde $\mathbb{R}^n$ in bir Banach uzay olduğunu göstermek için tam olduğunu göstermek yeterlidir.

$$(x_m) = \{x_1^m, \dots, x_n^m\}$$

$\mathbb{R}^n$ de bir Cauchy dizisi olsun. Yani, $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall m, r > n_0(\varepsilon)$ iken $\|x_m - x_r\| < \varepsilon$ olsun.

$\forall m, r > n_0(\varepsilon)$ ve $1 \le i \le n$ için

$$\|x_m - x_r\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^m - x_i^r|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

olur. Buradan ise, $\forall m, r > n_0(\varepsilon)$ ve $1 \le i \le n$ için

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i^m - x_i^r|^2 < \varepsilon^2$$
$$|x_i^m - x_i^r|^2 < \varepsilon^2$$
$$|x_i^m - x_i^r| < \varepsilon$$

bulunur. Bu ise (x_i^m) dizisinin $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisi olması demektir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan

$$\lim_{m\to\infty} x_i^m = x_i$$

olacak şekilde $x_i \in \mathbb{R}$ vardır.

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

alınırsa, $x \in \mathbb{R}^n$ dir. Bu halde (x_m) dizisinin x e yakınsak olduğu gösterilsin.

$\forall m, r > n_0(\varepsilon)$ ve $1 \le i \le n$ için

$$|x_i^m - x_i^r| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin her iki tarafının $m > n_0(\varepsilon)$ ve $r \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{r\to\infty}|x_i^m - x_i^r| < \lim_{r\to\infty}\varepsilon$$

$$|x_i^m - x_i| < \varepsilon$$

$$x_i^m \to x_i$$

bulunur. O halde, $(x_m) \to x$ olup $\mathbb{R}^n$ in n-boyutlu Öklid uzayı tamdır.

Örnek 2.1.15. $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C},\ 1 \le i \le n\}$ kümesi

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

normuna göre Banach uzaydır.

Tanım 2.1.16. $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay X olmak üzere, $f: X \to \mathbb{F}$ lineer dönüşümüne bir *lineer fonksiyonel* adı verilir. Yani lineer fonksiyonel, kompleks ya da reel değerli lineer bir dönüşüm olur (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.17. $X, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olsun. X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan Banach uzayına, X nin *normlu duali* denir. X' ile gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.18. X' Banach uzayının normlu duali $X'' = (X')'$ uzayına, X in ikinci duali denir. O halde ikinci *dual uzay* da bir *Banach uzaydır* (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.19. $X, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir normlu uzay ve $X = X''$ ise X uzayına *yansımalı (reflektif) uzay* adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.20. X bir normlu uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

olacak şekilde bir $x \in X$ var ise, (x_n) dizisi x e *kuvvetli yakınsaktır* denir. $x_n \xrightarrow{k} x$ şeklinde gösterilir (Maddox, 1970).

Tanım 2.1.21. X bir normlu uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Eğer her $f \in X'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisi x_0 a *zayıf yakınsaktır* denir. $x_n \overset{z}{\rightarrow} x$ şeklinde gösterilir (Maddox, 1970).

Tanım 2.1.22. X, bir reel vektör uzay olsun. X üzerinde

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

i. $\langle x, x \rangle \geq 0$

ii. $\langle x, x \rangle = 0$ ancak ve ancak $x = 0$

iii. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

iv. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

özelliklerini sağlıyorsa $\langle \cdot,\cdot \rangle$ fonksiyonuna *bir iç çarpım* denir. X kompleks değerli bir iç çarpım ise iii şartı aşağıdaki şekilde ifade edilir

v. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

(Bayraktar, 2006).

Örnek 2.1.16. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k \ ,$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır.

Örnek 2.1.17. $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cisim ve $C[a, b]$ ise $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi olsun. Bu takdirde $f, g \in C[a, b]$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ olmak üzere;

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ \text{ ve } \ (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

şeklinde tanımlanırsa $C[a, b]$ bir lineer (vektör) uzaydır.

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\;dx$$

şeklinde tanımlanan $\langle\cdot,\cdot\rangle$ fonksiyon ise bir iç çarpım fonksiyonudur.

Tanım 2.1.23. İç çarpımdan elde edilen norma göre bir iç çarpım uzayı tam oluyor ise bu uzay bir *Hilbert uzayı* olarak adlandırılır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.24. $1 \leq p < +\infty$ olsun. X kümesi üzerinde tanımlı, $\mathbb{R}$ değerli, Σ ölçülebilir $|f|^p$ fonksiyonunun Σ ölçümüne göre integralinin sonlu olduğu μ denklik sınıflarının oluşturduğu aile $L^p = L^p(X, \Sigma, \mu)$ ile gösterilsin. $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p < \infty$ için L^p ailesi

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p},$$

normuna göre bir Banach uzaydır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1998).

2.2. İntegral Denklemler

Tanım 2.2.1. Bilinmeyen fonksiyon integral altında olan denklemlere *integral denklem* denir.

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds \tag{1}$$

Bu denklemde $x(t)$ fonksiyonu bilinmeyen fonksiyon, $f(t)$ ve $K(t,s)$ fonksiyonları önceden verilmiş belli fonksiyonlardır, λ ise parametredir. $K(t,s)$, $a \leq t, s \leq b$ fonksiyonuna *integral denklemin çekirdeği* denir. $f(t)$, $a \leq t \leq b$ fonksiyonuna ise *integral denklemin serbest terimi* denir (Köklü, 2018).

İntegral denklemleri lineer ve lineer olmayan integral denklemler olmak üzere iki farklı sınıfa ayırabiliriz.

Tanım 2.2.2. (1) integral denkleminde $x(t)$ bilinmeyen fonksiyonu lineer olduğunda bir *lineer integral denklemdir*. Eğer,

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x^n(s)ds, \quad n \neq 1 \tag{2}$$

ise bu integral denklemde $x(t)$ bilinmeyen fonksiyonunun n. kuvveti bulunduğundan *lineer olmayan integral denklemdir* (Köklü, 2018).

Tanım 2.2.3. (1) integral denkleminde $f(t)$ serbest terimi $[a, b]$ aralığında sıfıra dönüştüğünde, yani her bir $t \in [a, b]$ için $f(t) \equiv 0$ şartı sağlandığında (1) denklemine homojen, aksi halde homojen olmayan integral denklem denir (Köklü, 2018).

Homojen integral denklemlerin, kolayca görülebileceği gibi $x(t) \equiv 0$ olan bir çözümü vardır. Buna *aşikar çözüm* veya *trivial çözüm* denir.

İntegral denklemler yapılarına göre üç sınıfa ayrılır.

Tanım 2.2.4. $x(t)$ fonksiyonu bilinmeyen fonksiyon, $f(t)$ ve $\phi(t)$ fonksiyonları önceden verilmiş belli fonksiyonlar ve $K(t, s)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$\phi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) ds \tag{3}$$

şeklindeki denklem tiplerine *I. çeşit (cins)integral denklemler* denir.

Eğer, integral denklem

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) ds \tag{4}$$

şeklinde ise yani bilinmeyen fonksiyon integralin hem içinde hem de dışında ise *II. çeşit (cins) integral denklemler* denir.

Eğer, integral denklem

$$\phi(t) x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) ds \tag{5}$$

şeklinde ki integral denklemlere ise *III. çeşit (cins) integral denklemler* denir (Köklü, 2018).

Burada dikkat edilmelidir ki I. çeşit ve II. çeşit integral denklemler III. çeşit integral denklemlerin birer özel halidir. Yani, III. çeşit integral denklemde $\phi(t) \equiv 0$ alınırsa I. çeşit integral denklem; $\phi(t) \equiv 1$ alınırsa II. çeşit integral denklem elde edilir.

Öte yandan, integral denklemlerin lineer ve homojen olup olmadıklarına bakmaksızın integral sınırlarının değişken veya sabit olmalarına göre de sınıflandırmalar yapılmaktadır.

Tanım 2.2.5. İntegral sınırları sabit olan denklemlere *Fredholm integral denklemler*, integral sınırlarından biri değişken olan denklemlere *Volterra integral denklemler* denir (Köklü, 2018).

Yukarıda ifade edilen integral denklem sınıfları için aşağıda bazı örnekler verelim.

$x(t) = \sin t + \frac{1}{2}\int_0^1 (t + s^2).x(s)\,ds$ (ikinci çeşit lineer homojen olmayan Fredholm integral denklemi)

$t = \int_0^1 e^{-|t-s|}.x^2(s)\,ds$ (birinci çeşit lineer olmayan homojen Fredholm integral denklemi)

$cost = t - \pi + \int_0^t s.\sin x(s)\,ds$ (birinci çeşit lineer ve homojen olmayan Volterra integral denklemi)

$x(t) = \int_0^t s.x(s)\,ds$ (ikinci çeşit lineer ve homojen Volterra integral denklemi)

$t.x(t) = e^t + 1 - \int_1^t (t - s)^2.x(s)\,ds$ (üçüncü çeşit lineer ve homojen Volterra integral denklemi)

2.3. Sabit Nokta Teorisi ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

İterasyon yöntemleri lineer olmayan problemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılan çok yararlı matematiksel yöntemlerden biridir. Bu yöntem ilk olarak Liouville (1837) tarafından tanıtılmış ve Cauchy (1821) tarafından kullanılmıştır. Fakat Picard (1890) tarafından sistematik olarak geliştirilmiştir. Banach (1922) tarafından adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerin çözümünün varlığı ve tekliğine ilişkin ispata kullanılmıştır. Banach sabit nokta teoremi, özellikle 20. yüzyılın ikinci yarısında birçok araştırmacının geliştirdiği iterasyon modelleri, daralma dönüşümleri ve farklı uzay seçimleri ile birçok sabit nokta teoremlerinin tanımlanmasına olanak sağlamıştır. Bu gelişmelerle birlikte zaman içerisinde konunun literatüre sabit nokta teorisi olarak yerleşmesine neden olmuştur.

Tanım 2.3.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun.

$$Tx = x \tag{6}$$

eşitliğini sağlayan $x \in X$ elemanına T nin bir *sabit noktası* denir. T nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T , $F(T)$ ya da $Fix(T)$ ile gösterilir (Berinde, 2007). Bu tez çalışmasında F_T gösterimi kullanılacaktır.

Ayrıca bir $T : X \to X$ dönüşümünün hiçbir sabit noktası olmayabilir, yalnız bir sabit noktası olabilir veya birden fazla sabit noktası olabilir.

Örnek 2.3.1. $X = [0,1]$ ve $T: X \to X$, $Tx = x^2$ ise $F_T = \{0,1\}$ olur.

Örnek 2.3.2. $X = \mathbb{R}$ ve $T: X \to X$, $Tx = 6 - x$ olsun. $Tx = x$ yani $6 - x = x$ den bu dönüşümün sabit noktası $x = 3$ dür. Yani $F_T = \{3\}$ dür.

Örnek 2.3.3. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $I: X \to X, Ix = x$ özdeş (birim) dönüşümü verilsin. Bu durumda X in her noktası I özdeşlik dönüşümünün bir sabit noktası olur. Yani, $F_I = X$ dir.

Örnek 2.3.4. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $X = [0,1]$ ve

$$T: X \to X\,,\ \ Tx = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,, & x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \\ 0\,, & x \in \left(\dfrac{1}{3}, 1\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün sabit noktası $F_T = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ dir.

Örnek 2.3.5. $X = \mathbb{R}^2$ kümesi göz önüne alınsın.

i. $a \neq 0$ olmak üzere, $Tx = a + x$ olarak tanımlan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ öteleme dönüşümünü alalım. Şu halde,

$$Tx = x$$
$$a + x = x$$

olduğundan T dönüşümünün bir <u>sabit noktası mevcut değildir.</u>

ii. $0 < \theta < 2\pi$ için

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta\,, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{aligned}$$

ile verilen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönme dönüşümünün tek bir sabit noktası mevcuttur ve bu $(0,0)$ noktasıdır. Gerçekten,

$$T(x,y) = (x,y)$$
$$(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) = (x,y)$$
$$\begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta = x \\ x\sin\theta + y\cos\theta = y \end{cases}$$

iii. $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin her bir elemanı

$$T(x,y) = (x,-y)$$

ile tanımlı $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yansıma dönüşümünün sabit noktasıdır. Başka bir deyişle, T dönüşümünün sonsuz sabit noktası mevcuttur.

$T : X \to X$ dönüşümünün sabit noktaları aslında, X üzerindeki I birim fonksiyonu için verilen,

$$(T - I)(x) = 0$$

denkleminin çözümleri ile aynıdır. Bu halde bir denklemin çözümünü bulmak için standart bir yöntem, buna karşılık gelen fonksiyonun sabit noktalarını araştırmaktır.

Şimdi sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalarda kullanılan bazı daralma dönüşümleri ve iterasyon kavramlarına yer verilecektir.

Tanım 2.3.2. (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y \in X$ için;

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y) \tag{7}$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı mevcut ise T ye bir *Lipschitz dönüşümü* denir (Berinde, 2007).

Örnek 2.3.6. $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ ve $Tx = 4x$ olsun.

$$d(Tx,Ty) = |4x - 4y| = 4|x-y| = 4d(x,y)$$

dir. Bu durumda $\lambda \geq 4$ için T dönüşümü Lipschitz şartını sağlar. Tanımdan da anlaşılacağı üzere, her T Lipschitz dönüşümü düzgün süreklidir. Fakat her düzgün sürekli dönüşümün ise Lipschitz şartını sağlaması gerekmez.

Örnek 2.3.7. $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlanan $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzgün süreklidir. Fakat Lipschitz şartını sağlamaz.

Tanım 2.3.3. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitz dönüşümü olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in [0,1)$ sayısı bulunabiliyorsa, T ye *daralma (contraction) dönüşümü* denir (Berinde, 2007).

Örnek 2.3.8. $X = [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ olsun ve $T: X \to X$ dönüşümü $T(x) = 3 + \frac{1}{2} arctan(x)$ şeklinde tanımlansın. $\forall\, x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned}
d(Tx, Ty) &= \left|3 + \tfrac{1}{2} arctan(x) - \left(3 + \tfrac{1}{2} arctan(y)\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}|arctan(x) - arctan(y)| \\
&= \frac{1}{2}\left|arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left|\frac{x-y}{1+xy}\right| \\
&\leq \frac{1}{2}|x-y| \\
&\leq \frac{1}{2} d(x, y)
\end{aligned}$$

böylece $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ için T dönüşümünün daralma dönüşüm olduğu elde edilir.

Uyarı 2.3.1. Lipschitz şartını sağlayan her dönüşüm düzgün süreklidir, o halde daralma dönüşümleri de düzgün sürekli olur. Yani T sürekli değil ise, bir daralma dönüşümü olamaz. Fakat, T daralma dönüşümü olmasa da, herhangi bir n için T^n bir daralma dönüşümü olabilir.

Tanım 2.3.4. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise T ya bir *kesin (strict) daralma dönüşümü* denir (Berinde, 2007).

Örnek 2.3.9. $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı $T(x) = x + 1 - \frac{x}{1+|x|}$ dönüşümü ele alalım.

$$|T'(x)| = 1 - (1 + |x|)^{-2} < 1$$

dir. Her $x < y$ için

$$\begin{aligned} |Ty - Tx| &= \left| \int_x^y T'(t)dt \right| \\ &\leq \int_x^y |T'(t)|\, dt \\ &< \int_x^y dt \\ &= |y - x| \end{aligned}$$

olur. $\mathbb{R}$ de mutlak değer metriğine göre T kesin daralma dönüşümüdür.

Tanım 2.3.5. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir Lipschitz dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise T ye bir *genişlemeyen (nonexpensive) dönüşüm* denir (Berinde, 2007).

Örnek 2.3.10. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü $Tx = x + 4$ şeklinde tanımlansın. Şu halde,

$$d(Tx, Ty) = |x + 4 - y - 4| = |x - y| = d(x, y)$$

olup, her $x, y \in X$ için $|Tx - Ty| \leq |x - y|$ şartı sağlandığından T bir genişlemeyen dönüşüm olur.

Yukarıda tanımlanan dönüşümler arasında,

Daralma $\Longrightarrow$ Kesin Daralma $\Longrightarrow$ Genişlemeyen $\Rightarrow$ Lipschitz şeklinde bir bağıntı vardır.

Tanım 2.3.6. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $T : X \to X$ bir dönüşüm ise,

$$ToT(x) = T\big(T(x)\big)$$

ile verilen T^2 dönüşümü de $X \to X$ bir dönüşümdür ve buna T nin *ikinci iterasyonu* denir (Soykan, 2008). Genel olarak m adet T den elde edilen

$$\underbrace{T\ o\ T\ o \dots o\ T(x)}_{m \text{ tane } T} = T\big(T(\dots T(x)\dots)\big)$$

ifadesine T nin m. *iterasyonu* denir ve T^m ile gösterilir.

Bir iterasyon yönteminin en genel tanımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. f bir fonksiyon olacak şekilde, bir sabit nokta iterasyon yöntemi en genel şekilde;

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f(T, x_n), \quad n = 0,1,2, \dots \end{cases} \tag{8}$$

denklemi ile tanımlanır.

Tanım 2.3.7. (Picard İterasyon Yöntemi): (8) ile verilen ifade de her $n \in \mathbb{N}$ için Picard iterasyonu (ardışık yaklaşıklar dizisi)

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = Tx_n$$

şeklinde tanımlanır (Picard, 1890).

Örnek 2.3.11. $X = [0,1]$ ve $T: [0,1] \to [0,1]$, $Tx = 1 - x$ olacak şekilde genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu dönüşümün sabit noktası $\frac{1}{2}$ dir. Yani $F_T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Burada herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için Picard iterasyonu:

$$x_1 = Tx_0 = 1 - a$$
$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = a$$
$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = 1 - a$$
$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = T^3x_{n-3} = \cdots = T^nx_0$$

şeklinde bulunur ve bu $a, 1-a, a, 1-a, a$,.... salınımlı diziye karşılık gelir. Bu salınımlı dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığı için, Picard iterasyonu bu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz.

Aşağıda verilen Banach sabit nokta teoremi, bir tam metrik uzay üzerindeki herhangi bir daralma dönüşümü için bir sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eder ve hesaplamak için bir yöntem sağlar (Banach, 1922).

Teorem 2.3.1: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda,

i. T nın bir tek $x \in X$ sabit noktası vardır.

ii. Herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi, T nın bu sabit noktasına yakınsar. (yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T(x_{n-1})$ ile tanımlı (x_n) iterasyon dizisi T nın bu sabit x noktasına yakınsar).

3. BULANIK KÜME KAVRAMI

3.1. Bulanık Küme ile İlgili Temel Kavramlar

Bir büyüklüğün niceliğini veya niteliğini anlatmak için günlük dilde kullandığımız bazı kavramlar, birden fazla özelliği aynı anda gösterebilir, açık ve net tek bir anlamı yoktur. Örneğin "iyi" sıfatı bir çekici nitelerken kullanışlı, fonksiyonel gibi anlamlara gelirken, bir öğrenci için örnek-çalışkan, bir çorba için lezzetli-güzel anlamları taşıyabilir. Kesin değerli kümelerle bulanık kümelerin farkını şu ifadelerle de açıklamak mümkündür. Birçok büyüklüğü veya ifadeyi kesin sınırlarla sınıflara ayırmak mümkündür. Bazı kavramlar ise, az ya da çok gibi birden fazla özelliği aynı anda gösterebilir. Bu kavramı, baskın özelliğini gösterdiği sınıfa dahil etmek, diğer özelliğini ihmal etmek doğru bir yaklaşım olmayabilir. Yaşlı-genç, ılık, soğuk, sıcak gibi kavramlar net olmayan ifadelerdir ve ifadeleri açıklayabilmek için kümeler kavramından yararlanılır.

Tanım 3.1.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde A bulanık kümesi $\mu_A: X \to I < [0,1]$ olmak üzere $A = \{(x, \mu_A(x)) \ : \ x \in X\}$ şeklinde tanımlanır. Burada $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine x in A bulanık kümesine *ait olma (üyelik) derecesi* ve μ_A fonksiyonuna da *üyelik fonksiyonu* denir. Tanımdan anlaşılacağı üzere her A klasik (crisp) kümesi

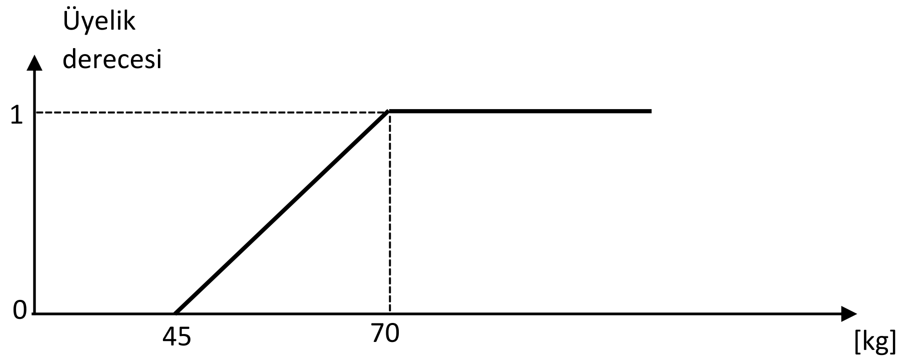
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in A \\ 0\,, & x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı karakteristik fonksiyonu ile bir *bulanık küme* olarak ifade edilebilir (De Luca ve Termini,1970).

Tanım 3.1.2. (Bulanık Kümelerde Üyelik Dereceleri)

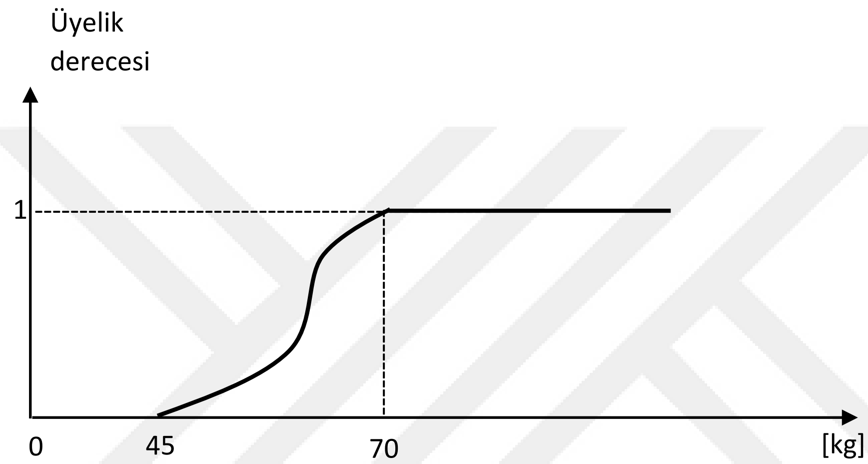
Bir bulanık kümesinin üyelik dereceleri $[0,1]$ arasındadır (Zadeh, 1965).

Genel bilgilerde ifade edilen "$9/A$ sınıfındaki kilosu 45 in üzerinde olan kilolu öğrenciler" örneğinin grafiğini aşağıda Şekil 2 ve Şekil 3'de inceleyelim.



Şekil 2. Kilosu 45 in üzerinde olan kilolu öğrenciler

veya,



Şekil 3. Kilosu 45 in üzerinde olan kilolu öğrenciler

Bulanık kümesi = {üyelik derecesi (μ)/eleman} ile gösterilir. Yani, $F = \sum \mu_A(X)/X$ şeklinde de gösterilir.

Bulanık küme örnekleri:

Matematik mühendisliği bölümündeki zayıf öğrenciler =

$\{0{,}3/\text{Murat} + 0{,}5/\text{Ahmet} + 0{,}4/\text{Selin} + 0{,}2/\text{Büşra}\}$

Matematik mühendisliği bölümündeki şişman öğrenciler =

$\{0{,}7/\text{Murat} + 0{,}5/\text{Ahmet} + 0{,}6/\text{Selin} + 0{,}8/\text{Büşra}\}$

Tanım 3.1.3. μ, X kümesinin bir bulanık kümesi olsun. O zaman $t \in [0,1]$ için

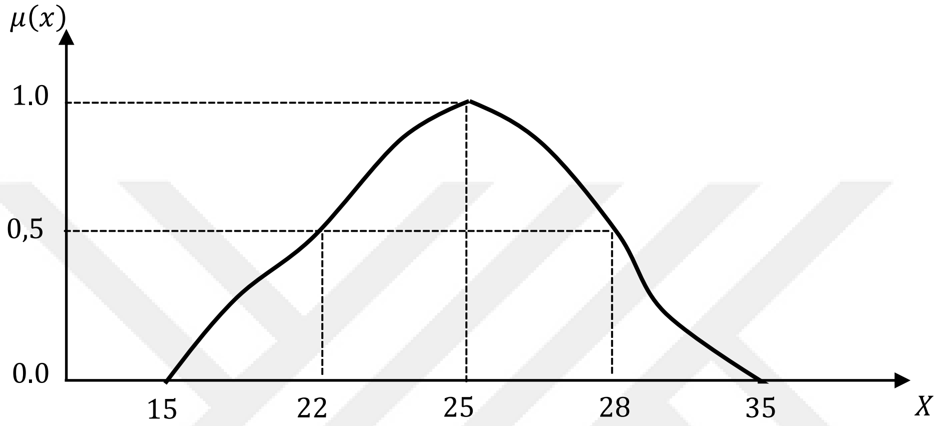
$$\mu_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\}$$

kümesine μ bulanık kümesinin *seviye alt kümesi* denir (Kandasamy, 2003).

Örnek 3.1.1. X kümesi hava sıcaklığının derecelerinin kümesi olsun. μ bulanık kümesi ise ideal olan hava sıcaklığının bir bulanık kümesi olsun. İdeal hava sıcaklığı 25 ile belirlenirse, bu durumda $\mu_X(25) = 1$ olur. 15 in altında veya 35 in üzerinde olan hava sıcaklıklarının üyelik dereceleri ise 0 olur. O halde 15 ile 35 dereceleri arasındaki sıcaklıkların üyelik dereceleri $[0,1]$ aralığında iken 22 ile 28 arasında kalan sıcaklıkların üyelik dereceleri $[0,5,1]$ aralığında değişiyorsa, μ bulanık kümesinin seviye alt kümesi 22 ile 28 arasında bulunan sıcaklıkların bulanık kümesi olur ve

$$\mu_{0,5} = \{x \in X: \mu(x) \geq 0,5\}$$

şeklinde gösterilir. Aşağıda Şekil 4'ü inceleyelim.



Şekil 4. Hava sıcaklıklarının üyelik dereceleri

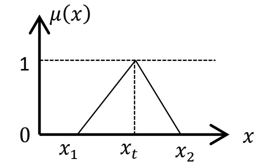
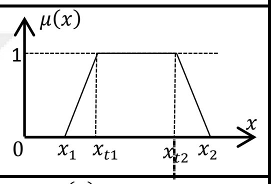
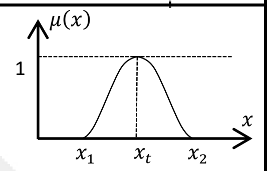
Tanım 3.1.4. Birçok değişik yöntemle bulanık değişkenlerinin üyelik derecelerini belirleyebiliriz. Bu metotlardan bazıları aşağıda sıralanmıştır (Timoty, 1997).

- Sezgisel (Intuitionistic)
- Sonuç çıkarma (Inference)
- Tercihlerin düzenlenmesi (Rank ordering)
- Açısal bulanık kümeler (Angular bulanık sets)
- Sinir ağları (Neural Networks)
- Genetik algoritma-Yapay zeka (Genetic algorithms)

$\mu_A(x)$, üyelik fonksiyonundaki bir x noktasının A bulanık kümesindeki üyelik derecesi olduğunu Tanım 3.1 de ifade edilmişti. $\mu_A(x) = 1$ durumu x in A bulanık kümesine kesin olarak ait olduğunu göstermektedir. Benzer şekilde $\mu_A(x) = 0$ durumu ise x in A bulanık kümesi dışında olduğunu ifade eder. $0 < \mu_A(x) < 1$ arasında ki her değer, x in A bulanık kümesindeki üyeliğinin belirsiz değerleridir. Bu yüzden kesin olmayan büyüklükler üyelik fonksiyonları tarafından belirtilmiş bulanık kümelerle temsil edilirler.

Bulanık üyelik fonksiyonları, olayların gerçek uzaylarını ya da dağılımlarını içerecek özellikleri sergilemektedir. Tablo 1 de çok sık kullanılan fonksiyonların adları, denklemleri ve grafikleri gösterilmiştir (Kıyak, 2003).

Tablo 1. Önemli üyelik fonksiyonları

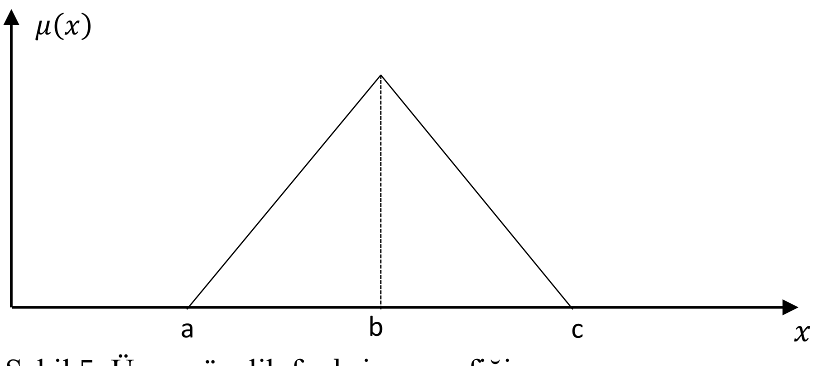
Adı	Denklemi	Grafiği
Üçgen Üyelik Fonksiyonu	$\mu(x) = \max\left\{\min\left[\frac{x-x_1}{x_t-x_1}, \frac{x_2-x_1}{x_2-x_t}, 0\right]\right\}$	
Yamuk Üyelik Fonksiyonu	$\mu(x) = \max\left\{\min\left[\frac{x-x_1}{x_{t1}-x_1}, 1, \frac{x_2-x_1}{x_2-x_{t2}}, 0\right]\right\}$	
Gauss Üyelik Fonksiyonu	$\mu(x) = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_1}{\sigma}\right)^t}$	

Tanım 3.1.5. Her $a \in (0,1]$ ve $u \in X$ için üyelik fonksiyonu

$$\mu_a(v) = \begin{cases} a, & v = u \\ 0, & diğer\ durumda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mu_a : X \to [0,1]$ bulanık kümesine X de bir *bulanık nokta* denir (Wong, 1974).

Tanım 3.1.6 (Üçgen Üyelik Fonksiyonu) A bulanık kümesine ait elemanların, üçgen üyelik fonksiyonu Şekil 10'da gösterilmiştir.



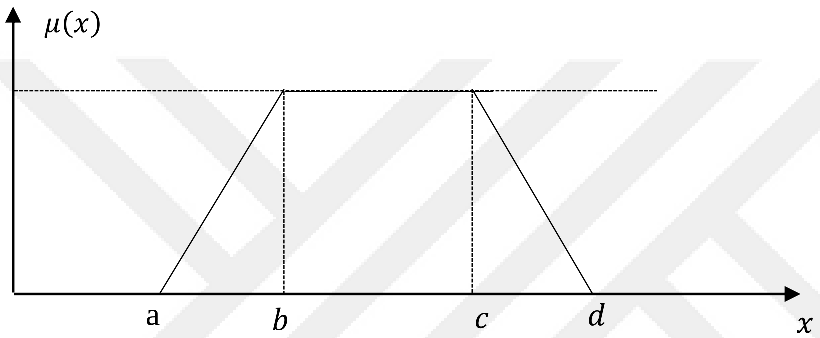
Şekil 5. Üçgen üyelik fonksiyon grafiği

Matematiksel olarak ise aşağıdaki gibi ifade edilir (Nguyen, 1999).

$$\mu_A(x) = \mu_A(x; a, b, c) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & eğer \quad a \le x < b \\ (c-x)/(c-b) & eğer \quad b \le x \le c \\ 0 & eğer \quad x > c \;\; veya \;\; x < a \end{cases}$$

Aynı şekilde burada da $\mu_A(x)$ ifadesi x elemanının, A kümesine ait olma derecesini (üyelik derecesi) göstermektedir.

Tanım 3.1.7. (Yamuk Üyelik Fonksiyonu) A bulanık kümesine ait elemanların, yamuk üyelik fonksiyonu Şekil 11'de gösterilmiştir.

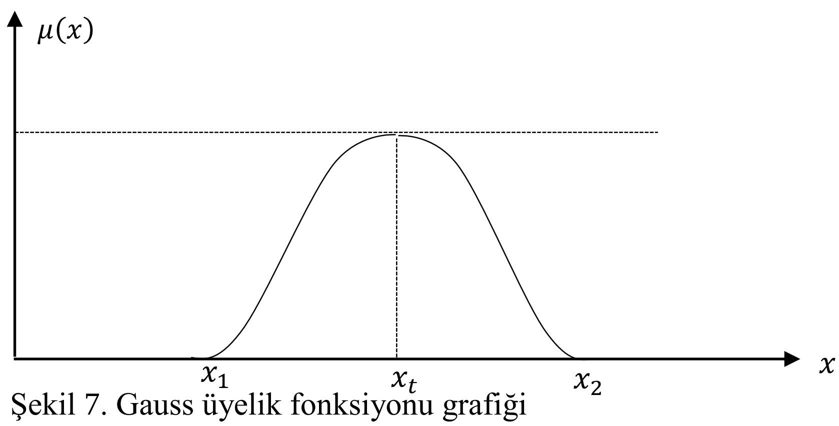


Şekil 6. Yamuk üyelik fonksiyonu grafiği

Matematiksel olarak ise aşağıdaki gibi ifade edilir (Şen, 2001).

$$\mu_A(x) = \mu_A(x; a, b, c, d) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & eğer \quad a \le x < b \\ 1 & eğer \quad b \le x \le c \\ (d-x)/(d-c) & eğer \quad c < x \le d \\ 0 & eğer \quad x > d \;\; veya \;\; x < a \end{cases}$$

Tanım 3.1.8. (Gauss Üyelik Fonksiyonu)



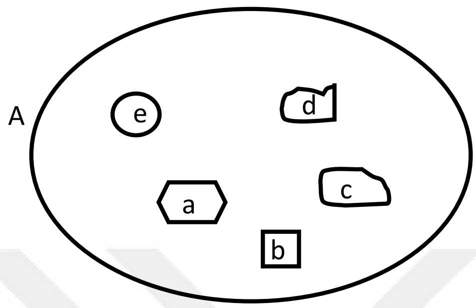
Şekil 7. Gauss üyelik fonksiyonu grafiği

$$\mu(x) = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_1}{\sigma}\right)^t}$$

(Kıyak, 2003).

3.2. Bulanık Kümelerde Temel İşlemler

Aşağıdaki şekillerin oluşturduğu A uzayını ele alalım



Şekil 8. Bulanık küme

A uzayının elemanları, $A = \{e, d, c, b, a\}$
Daire şekillerinden oluşan B bulanık kümesi, $B = \{1/e + 0{,}8/d + 0{,}6/b + 0{,}3/c\}$
Kare şekillerinden oluşan C bulanık kümesi, $C = \{1/b + 0{,}9/d + 0{,}3/a + 0{,}1/c\}$
$F(A)$: Bulanık kümelerinin ait olduğu A uzayı
$B, C \in F(A)$

Tanım 3.2.1. A ve B, X üzerindeki bulanık kümeler olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise A ve B bulanık kümelerine *eşittir* denir ve $\mu_A = \mu_B$ şeklinde gösterilir (Chang, 1968).

Tanım 3.2.2. A ve B, X üzerinde herhangi iki bulanık küme olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ şeklinde ise B bulanık kümesi A bulanık kümesini *kapsar* denir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir (Chang, 1968).

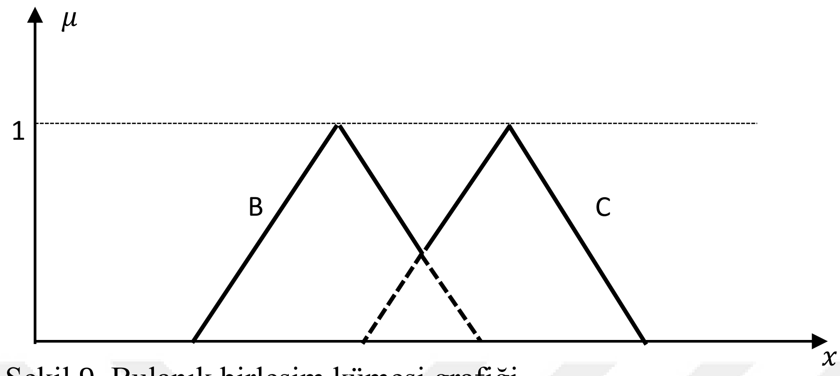
Tanım 3.2.3. A, X üzerindeki bir bulanık küme olsun. Bu taktirde; $\forall x \in X$ için $0 \le \mu_A(x) \le 1$ ve $\mu_X(x) = 1$ olduğundan, $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ dır. Dolayısıyla X üzerindeki bir A bulanık kümesine, X in *bulanık alt kümesi* de denir (De Luca ve Termini,1970).

Tanım 3.2.4. B, C kümeleri X de iki bulanık küme olsun. μ_B ve μ_C fonksiyonları ise B ve C nin üyelik fonksiyonları olmak üzere $\forall a \in X$ için

$$B \cup C = \{(a, f_{B\cup C}(a)) : \ f_{B\cup C}(a) = \max\{\mu_B(a), \mu_C(a)\}\},$$

kümesi B ve C bulanık kümelerinin *birleşimidir* (Chang, 1968).
Daire veya kare şekillerinin oluşturduğu bulanık küme;

$$B \vee C = \{1/e + 1/b + 0{,}9/d + 0{,}3/c + 0{,}3/a\}$$



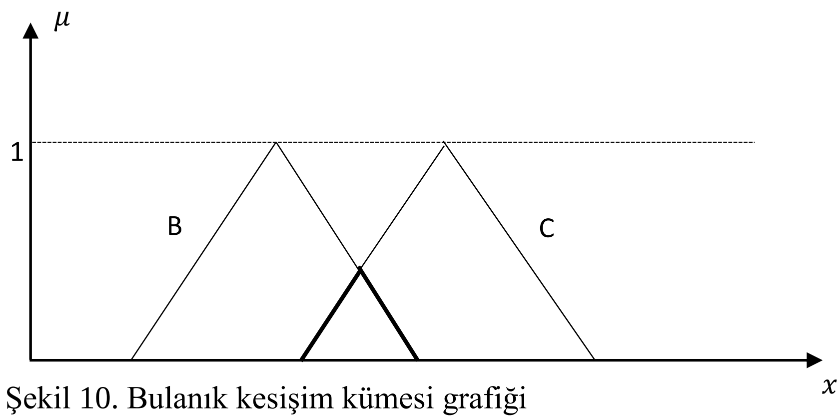
Şekil 9. Bulanık birleşim kümesi grafiği

Tanım 3.2.5. B, C kümeleri X de iki bulanık küme olsun. μ_B ve μ_C fonksiyonları ise B ve C nin üyelik fonksiyonları olmak üzere $\forall a \in X$ için

$$B \cap C = \{(a, f_{B\cap C}(a)) : f_{B\cap C}(a) = \min\{\mu_B(a), \mu_C(a)\}\},$$

kümesi B ve C bulanık kümelerinin *kesişimidir* (Chang, 1968).
daire veya kare şekillerinin oluşturduğu bulanık küme;

$$B \cap C = \{0{,}6/b + 0{,}8/d + 0{,}1/c + 0{,}6/b\}$$



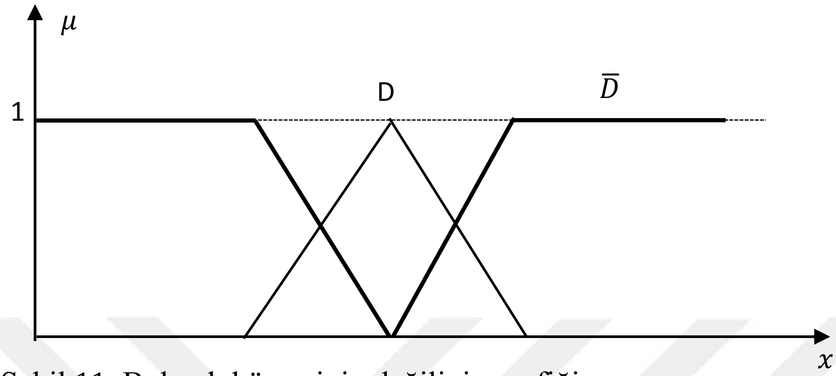
Şekil 10. Bulanık kesişim kümesi grafiği

Tanım 3.2.6. B bulanık kümesinin *değili* aşağıdaki gibi gösterilebilir (Chang, 1968).

$\bar{B} \approx \{a/\notin B\}$; $\mu_{\bar{B}}(a) \approx 1 - \mu_B(a)$

daire olmayan şekillerin oluşturduğu bulanık küme;

$\bar{B} = \{1/a + 0{,}4/b + 0{,}7/c + 0{,}2/d\}$



Şekil 11. Bulanık kümesinin değilinin grafiği

Bulanık kümelerde bazı temel özellikler vardır. Bu özellikler aşağıda verilmiştir.

Birleşme Özelliği $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Dağılma Özelliği $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Aynı Kuvvet Özelliği $A \cup A = A$ ve $A \cap A = A$

Özdeşlik $A \cup \emptyset = A$ ve $A \cap X = A$ X evrensel küme

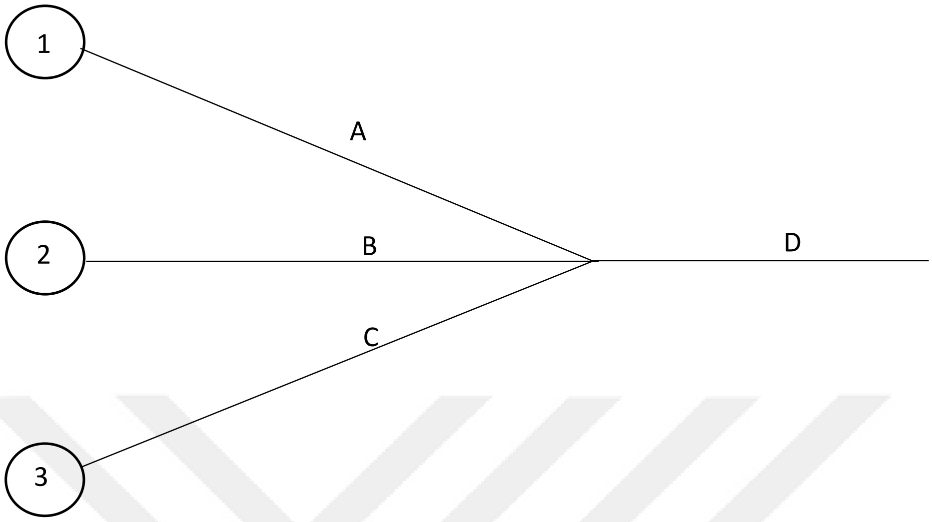
$A \cap \emptyset = \emptyset$ ve $A \cup X = X$

Geçişlilik Özelliği $A \subseteq B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$

De Morgen Kuralı $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Örnek 3.2.1. Bir şehre su 1,2 ve 3 kaynaklarından iletilmektedir. A, B, C ve D borularının arıza gösterme bulanık kümesine aitlik dereceleri sırasıyla 0,15, 0,10, 0,05 ve 0,02 dir. Şehrin susuz kalma durumunu inceleyiniz.



Şekil 12. Şehre iletilen su kaynaklarının şeması

Şehrin susuz kalması $(A \cap B \cap C) \cup D$

Şehrin susuz kalmaması $\overline{(A \cap B \cap C) \cup D}$

Demorgan kuralına göre

$$\overline{(A \cap B \cap C) \cup D} = (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{D}$$

$$\bar{A} = 1 - A = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$$

$$\bar{B} = 0{,}90$$

$$\bar{C} = 0{,}95$$

$$\bar{D} = 0{,}98$$

$$(0{,}85 \cup 0{,}90 \cup 0{,}95) \cap 0{,}98$$

verilen şebekeye göre şehir şebeke hattının arızalanmamasının üyelik derecesi 0,95 dir.

4. BULANIK METRİK UZAYLAR

Bu bölümde çalışmamıza temel teşkil eden bulanık metrik uzaylar ile ilgili bazı kavramlara ve örneklere yer verilecektir. İlk olarak sürekli t-norm ve bu tanıma bağlı olarak farklı bulanık metrik tanımları ifade edilecektir.

Tanım 4.1. $*: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlem tanımlansın. $\forall a, b, c, d \in [0,1]$ için

i. $a * b = b * a$,

ii. $(a * b) * c = a * (b * c)$,

iii. $*$ işlemi süreklidir ,

iv. $a * 1 = a$,

v. $a \leq c$ ve $b \leq d$ iken $a * b \leq c * d$

koşullarını sağlayan $*$ işlemine *sürekli t-norm* denir (Schwiezer ve Sklar 1960).

Örnek 4.1. Her $a, b \in [0,1]$ için

$$a *_1 b = max\{0, a + b - 1\}$$

şeklinde tanımlı ikili işlem sürekli t-normdur. Bu sürekli t-norma *Lukasiewicz t-normu* denir.

Çözüm: $\forall\, a, b, c, d \in [0,1]$ için

i.

$a *_1 b = max\{0, a + b - 1\} = max\{0, b + a - 1\} = b *_1 a$ olur. Böylece $*_1$ işlemi değişme özelliğine sahiptir.

ii.
$$\begin{aligned} (a *_1 b) *_1 c &= (max\{0, a + b - 1\}) *_1 c \\ &= max\{0, max\{0, a + b - 1\} + c - 1\} \\ &= max\{0, a + b - 1 + c - 1\} \\ &= max\{0, a + b + c - 1 - 1\} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} a *_1 (b *_1 c) &= a *_1 (max\{0, b + c - 1\}) \\ &= max\{0, a + max\{0, b + c - 1\} - 1\} \\ &= max\{0, a + b + c - 1 - 1\} \end{aligned} \tag{10}$$

olup (9) ve (10) dan

$$(a *_1 b) *_1 c = a *_1 (b *_1 c)$$

dir. Böylece $*_1$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

iii. $(a_n), (b_n) \subset [0,1]$ üzerinde tanımlı iki dizi ve $a_n \to a$, $b_n \to b$; $n \to \infty$ ise

$$a_n *_1 b_n = max\{0, a_n + b_n - 1\} \xrightarrow{n\to\infty} max\{0, a + b - 1\} = a *_1 b$$

dır. Dolayısıyla,

$$a_n *_1 b_n \to a *_1 b \; ; n \to \infty$$

olduğu görüldüğünden $*_1$ dizisel süreklidir. O halde $*_1$ işlemi süreklidir.

iv. $\forall a \in [0,1]$ için

$$a *_1 1 = max\{0, a + 1 - 1\} = max\{0, a\} = a \Rightarrow a *_1 1 = a$$

elde edilir.

v. $a \leq c$ ve $b \leq d$ olmak üzere her $a, b, c, d \in [0,1]$ için

$$a + b \leq c + d$$

dir. O halde,

$$a + b - 1 \leq c + d - 1$$
$$max\{a + b - 1\} \leq max\{c + d - 1\}$$
$$a *_1 b \leq c *_1 d$$

olur. Böylece (i)-(v) den $*_1$ işlemi bir sürekli t-normdur.

Örnek 4.2. Her $a, b \in [0,1]$ için

$$a *_2 b = ab$$

şeklinde tanımlı ikili işlem sürekli t-normdur. Bu sürekli t-norma *çarpım t-normu* denir.

Çözüm: $\forall\, a, b, c, d \in [0,1]$ için

i. $$a *_2 b = ab = ba = b *_2 a$$

olur. Böylece $*_1$ işlemi değişme özelliğine sahiptir.

ii. $$\begin{aligned}(a *_2 b) *_2 c &= (ab) *_2 c\\ &= (abc)\\ &= a(bc)\\ &= a *_2 (bc)\\ &= a *_2 (b *_2 c)\end{aligned}$$

dir. Böylece $*_2$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

iii. $(a_n), (b_n) \subset [0,1]$ üzerinde tanımlı iki dizi ve $a_n \to a$, $b_n \to b$; $n \to \infty$ ise

$$a_n *_2 b_n = a_n b_n \xrightarrow{n\to\infty} ab = a *_2 b$$

dır. Dolayısıyla,

$$a_n *_2 b_n \to a *_2 b \; ; n \to \infty$$

olduğundan $*_2$ işlemi dizisel süreklidir. Dolayısıyla $*_2$ işlemi süreklidir.

iv.

$$a *_2 1 = (a1) = a$$

olup

$$a *_2 1 = a$$

dir.

v. $a \leq c$ ve $b \leq d$ olmak üzere

$$ab \leq cd$$

dir. O halde,

$$a *_2 b \leq c *_2 d$$

olur.

Böylece (i)-(v) den $*_2$ işlemi bir sürekli t-normdur.

Örnek 4.3. Her $a, b \in [0,1]$ için

$$a *_3 b = min\{a, b\}$$

olarak tanımlı ikili işlem bir sürekli t-normdur. Bu sürekli t-norma *minimum t-normu* adı verilir.

Yukarıda ifade edilen $*_1$, $*_2$ ve $*_3$ sürekli t-normları arasında

$$a *_1 b \leq a *_2 b \leq a *_3 \ b$$

bağıntısı mevcuttur.

Olasılıksal metrik uzay kavramı klasik metrik uzayın başka bir ifadesidir. Bu kavram Menger tarafından 1942 yılında tanımı yapılmış, Schweizer ve Sklar tarafından 1960 yılında geliştirilmiş ve 1975 yılında Kramosil ve Michalek tarafından bulanık metriğe genelleştirilmiştir.

Tanım 4.2. X keyfi seçilmiş küme, $*$ sürekli bir t-norm olsun. M, $X^2 \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir bulanık kümesi olsun. Her $x, y, z \in X$ ve her $s, t > 0$ için

- **i.** $M(x, y, 0) = 0$,
- **ii.** $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,
- **iii.** $M(x, y, t) = M(y, x, t)$
- **iv.** $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$
- **v.** $M(x, y, \ \cdot\ ) : [0,1) \rightarrow [0,1]$ sol süreklidir,

şartları sağlanıyorsa $(X, M, *)$ sıralı üçlüsüne bir *bulanık metrik uzay* denir. $M(x, y, t)$ değeri x ile y arasında t ye göre yakınlık derecesi olarak düşünülebilir. Her $t > 0$ için $M(x, y, t) = 1$ ile $x = y$ ve $M(x, y, t) = 0$ ile ∞ aynı anlama gelmektedir (Kramosil ve Michalek, 1975).

Şimdi Kaleva ve Seikkala tarafından ifade edilen bulanık metrik tanımını ifade edelim.

Tanım 4.3. $\forall t < 0$ için $u(t) = 0$ ise u (bulanık sayısı) negatif olmayandır. Negatif olmayan bütün bulanık sayıların kümesi $\mathcal{G}$ ile gösterilecektir. $\mathbb{R}$ deki tüm bulanık sayıların kümesi için ise $L(\mathbb{R})$ sembolü kullanılacaktır. Öte yandan bulanık sayıların toplamaya göre birimi ve çarpmaya göre birimleri sırasıyla $\bar{0}$ ve $\bar{1}$ olarak gösterilecektir. $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\bar{r} \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayısı

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} 1, & t = r \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Tanım 4.4. X bir keyfi küme, $L, R : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ simetrik ve artan iki dönüşüm ve $L(0,0) = 0$, $R(1,1) = 1$ olsun. Bu durumda $\bar{d} : X \times X \to \mathcal{G}$ fonksiyonu

i. $\bar{d}(x,y) = \bar{0} \Leftrightarrow x = y$

ii. $\forall\, x, y \in X$ için $\bar{d}(x,y) = \bar{d}(y,x)$

iii. $\forall\, x, y, z \in X$ için

a) $s \leq u_1(x,z),\ t \leq u_1(z,y),\ s + t \leq u_1(x,y)$ olmak üzere

$$\bar{d}(x,y)(s+t) > L\left(\bar{d}(x,z)(s), \bar{d}(z,y)(t)\right)$$

b) $\bar{d}(x,y)(s+t) \leq R\left(\bar{d}(x,z)(s), \bar{d}(z,y)(t)\right)$

$$s \geq u_1(x,z)$$
$$t \geq u_1(z,y)$$
$$s + t \geq u_1(x,y)$$

koşullarını sağlıyorsa $(X, \bar{d}, L, R)$ ye *bulanık metrik uzay* denir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Şimdi, Kromasil ve Michalek anlamındaki bulanık metrik üzerinde çalışılarak geliştirilen ve literatürde geniş bir uygulama alanına sahip olan George ve Veeramani tarafından ortaya konulan bulanık metrik uzay tanımını verelim.

Tanım 4.5. X boştan farklı herhangi bir küme ve $*$ işlemi bir sürekli t-norm ve M, $X^2 \times (0, \infty)$ da tanımlı bir bulanık küme olsun. Eğer M her $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için

i. $M(x, y, t) > 0$

ii. $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$

iii. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

iv. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$

v. $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \to (0,1]$ süreklidir.

koşullarını sağlanıyorsa M ye X de bir *bulanık metrik* ve $(X, M,*)$ üçlüsüne de bir *bulanık metrik uzay* denir (George ve Veeremani, 1994).

Lemma 4.1. $(X, M,*)$ üçlüsü bir bulanık metrik uzay olsun. Bu taktirde her $x, y \in X$ için $M(x, y, \cdot)$ azalmayan bir fonksiyondur **(**Grabiec, 1988).

Tanım 4.6. $(X, M,*)$ bulanık metrik uzay, $x \in X,\ 0 < r < 1$ ve $t > 0$ ise

$$B_M(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r\}$$

kümesine x merkezli, r *yarıçaplı açık yuvar* denir (George ve Veeramani, 1994).

Lemma 4.2. Her açık yuvar açık bir kümedir (George ve Veeramani, 1994).

Sonuç 4.1. $(X, M,*)$ bir bulanık metrik uzay olsun.

$$\tau_M = \{A \subseteq X : \text{her bir } x \in A \text{ için } B_M(x, r, t) \subseteq A \text{ olacak şekilde } r \in (0,1) \text{ ve } t > 0 \text{ vardır}\}$$

ailesi X üzerinde bir topoloji tanımlar (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 4.7. $(X, M,*)$ bulanık metrik uzay ve $x \in A$ olmak üzere (A, τ_M) topolojisine göre

$$\left\{B_M\left(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : n = 1,2, \ldots\right\},$$

açık yuvarının ailesi x noktasının bir *yerel bazıdır* (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 4.8. $(X, M,*)$ bir bulanık metrik uzay $(x_n) \subset X$ olsun. $\forall t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$ şartı sağlanırsa (x_n) dizisi x noktasına *yakınsar* denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 4.9. $(X, M,*)$ bir bulanık metrik uzay $(x_n) \subset X$ olsun. $\forall t > 0$ ve $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall\, m, n > n_0(\varepsilon)$ için $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ ise (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 4.10. $(X, M,*)$ bir bulanık metrik uzay $(x_n) \subset X$ olsun. X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise $(X, M,*)$ bulanık metrik uzayına *tamdır* denir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 4.11. $(X, M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinde ki yakınsak her dizinin limiti A da ise A ya X de *kapalıdır* denir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 4.12. $(X, M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinde ki her dizinin A da en az bir yakınsak alt dizi var ise A kümesine X de *kompakt* denir (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 4.13. $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer M, t den bağımsız ise yani her $x, y \in X$ için

$$M_{x,y}(t) = M(x, y, t)$$

sabit ise M ye X üzerinde *yerleşik bulanık metrik* ve $(X, M,*)$ da yerleşik (stationary) *bulanık metrik uzay* denir. Bu durumda $M(x, y, t)$ yerine $M(x, y)$ kullanılır (Gregori ve Romaguera, 2004)

Tanım 4.14. $(X, M,*)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer her bir $x \in X$ ve $t > 0$ için

$$\{B(x, r, t) : \ r \in (0,1)\}$$

ailesi X in bir yerel tabanı ise M ye *temel bulanık metrik* ve $(X, M,*)$ üçlüsüne de temel (*principal) bulanık metrik uzay* denir (Gregori vd, 2009).

Tanım 4.15. $(X, M,*)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer M her $x, y, z \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(x, z, t) \geq M(x, y, t) * M(y, z, t)$$

eşitsizliğini sağlanıyorsa M ye *kuvvetli (strong) bulanık metrik* ve $(X, M,*)$ üçlüsüne de *kuvvetli bulanık metrik uzay* denir (Gregori vd, 2010).

Uyarı 4.1. Tanım 4.5 deki bulanık metrik tanımının (iv) aksiyomu ile Tanım 4.15 daki aksiyom değiştirilemez. Çünkü bu durumda M, X de bulanık metrik olmayabilir. Tanım 4.5 deki (iv) aksiyom yerine Tanım 4.15 deki aksiyom alınarak ve Tanım 4.5 ki (v) aksiyomda $M(x, y, \cdot)$ nın t ye göre artan sürekli olması istenerek bir kuvvetli bulanık metrik tanımından bulanık metrik elde etmek mümkündür. Gerçekten,

$$M(x, z, t+s) \geq M(x, y, t+s) * M(y, z, t+s) \geq M(x, y, t) * (y, z, s)$$

dir.

Uyarı 4.2. Yerleşik metrik ve kuvvetli bulanık metrik uzay tanımlarından da kolayca görüleceği gibi yerleşik bulanık metrikler aynı zamanda kuvvetli bulanık metriklerdir.

Şimdi George ve Veeramani tarafından verilen bulanık metrik tanımı dikkate alarak değişik sürekli t-normlar için bazı örnekler verelim.

Örnek 4.4. $X = \mathbb{R}$ ve $a *_2 b = ab$ olsun. $\forall x, y \in X$ ve $t > 0$ için M fonksiyonu

$$M(x, y, t) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *_2)$ bir bulanık metrik uzaydır.

Çözüm: $\forall x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için

i. $M(x, y, t) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} > 0$

ii. $M(x, y, t) = 1$ ise

$$\frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} = 1$$

$$e^{\frac{|x-y|}{t}} = 1$$

$$\frac{|x-y|}{t} = 0$$

$$|x-y| = 0$$

$$x = y$$

iii. $M(x,y,t) = \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} = \frac{1}{e^{\frac{|y-x|}{t}}} = M(y,x,t)$

iv. $M(x,y,t) *_2 M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$

olduğunu göstermek için

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$$

olup

$$|\, x-z| \leq \left(\frac{t+s}{t}\right)|x-y| + \left(\frac{t+s}{s}\right)|y-z|$$

eşitsizliğini ele alalım.

$$\left(\frac{1}{t+s}\right)|\, x-z| \leq \left(\frac{1}{t+s}\right)\left(\frac{t+s}{t}\right)|x-y| + \left(\frac{1}{t+s}\right)\left(\frac{t+s}{s}\right)|y-z|$$
$$\frac{|x-z|}{t+s} \leq \frac{|x-y|}{t} + \frac{|y-z|}{s}$$
$$e^{\frac{|x-z|}{t+s}} \leq e^{\frac{|x-y|}{t}+\frac{|y-z|}{s}}$$
$$e^{\frac{|x-z|}{t+s}} \leq e^{\frac{|x-y|}{t}} e^{\frac{|y-z|}{s}}$$
$$\frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}} e^{\frac{|y-z|}{s}}} \leq \frac{1}{e^{\frac{|x-z|}{t+s}}}$$
$$\frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}} \frac{1}{e^{\frac{|y-z|}{s}}} \leq \frac{1}{e^{\frac{|x-z|}{t+s}}}$$

$$M(x,y,t) *_2 M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$$

v) $\forall\, t_0 > 0$ için;

$$\lim_{t\to t_0} M(x,y,t) = \lim_{t\to t_0} \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t}}}$$
$$= \frac{1}{\lim_{t\to t_0} e^{\frac{|x-y|}{t}}}$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{|x-y|}{t_0}}}$$

$$= M(x, y, t_0)$$

olup

$$\lim_{t \to t_0} M(x, y, t) = M(x, y, t_0)$$

dir. Şu halde, $M(x, y, \ \cdot\ ) : (0, \infty) \to [0,1]$ süreklidir.
Böylece $(X, M, *_2)$ bir bulanık metrik uzaydır.

Bulanık metrikler ile ilgili örneklerin çözümünde kullanılan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.3. (X, d) bir metrik uzay, $s, t > 0$ ve $x, y, z \in X$ olsun. $\forall n \geq 1$ tam sayısı için

$$\frac{d(x,z)}{\frac{d(x,y)}{t^n}(t+s)^n} \leq max\left\{\frac{d(x,y)}{t^n}, \frac{d(y,z)}{s^n}\right\} \tag{11}$$

eşitsizliği doğrudur **(**Sapena, 2001).

Örnek 4.5. (X, d) metrik uzay olsun. $x, y \in X$ ve $t > 0$ ise $\forall\ n \in \mathbb{N}$ için

$$M(x, y, z) = \frac{1}{e^{\frac{d(x,y)}{t^n}}}$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde $(X, M, *_3)$ bir bulanık metriktir. Özel olarak $n = 1$ George ve Veeramani, tarafından verilmiş olup bu durumda $(X, M, *_3)$ temel bulanık metrik uzaydır. Ayrıca $(X, M, *)$ de kuvvetli bulanık metrik uzaydır.

Çözüm: Tanım 4.5, Lemma 4.3 nin sonucu olup diğer özellikler açık olduğundan $(X, M, *_3)$ bir bulanık metriktir.

Örnek 4.6. (X, d) bir metrik uzay ve $a *_2 b = ab$ olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$M_d(x, y, t) = \frac{\alpha t^n}{\alpha t^n + \beta d(x, y)}$$

olarak ifade edilen fonksiyon bir bulanık metriktir (George ve Veeramani, 1994). Bu şekilde tanımlanan bulanık metriğe d tarafından indirgenen standart bulanık metrik denir.

Çözüm:

i. $t \in (0, \infty)$ ve metrik uzay tanımından $d(x, y) > 0$ olur ve $M(x, y, t) > 0$ dır.

ii. $\forall\, x, y \in X$ ve $t > 0$ için;

$$M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow \frac{t}{t + d(x, y)} = 1$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

olur.

iii. Metrik tanımından $d(x, y) = d(y, x)$ olup

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} = \frac{t}{t + d(y, x)} = M(y, x, t)$$

dir.

iv. $\forall x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ için

$$M(x, y, t) *_2 M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$$

eşitsizliğinin sağlanmasına bakalım. Metrik tanımına göre

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

ve

$$\frac{t + s}{t} > 1\,, \quad \frac{t + s}{s} > 1$$

olduğundan

$$d(x, z) \leq \left(\frac{t + s}{t}\right) d(x, y) + \left(\frac{t + s}{s}\right) d(y, z)$$

$$\frac{d(x,z)}{t+s} \le \frac{d(x,y)}{t} + \frac{d(y,z)}{s}$$

$$\frac{d(x,z)}{t+s} \le \frac{sd(x,y)+td(y,z)}{st}$$

$$1 + \frac{d(x,z)}{t+s} \le 1 + \frac{sd(x,y)+td(y,z)}{st}$$

$$\frac{t+s+d(x,z)}{t+s} \le \frac{st+sd(x,y)+td(y,z)}{st}$$

$d(x,y)d(y,z) > 0$ olduğundan

$$\frac{t+s+d(x,z)}{t+s} \le \frac{st+sd(x,y)+td(y,z)}{st}$$

$$\le \frac{st+sd(x,y)+td(y,z)+d(x,y)d(y,z)}{st}$$

$$\frac{st}{st+sd(x,y)+td(y,z)+d(x,y)d(y,z)} \le \frac{t+s}{t+s+d(x,z)}$$

$$\left(\frac{t}{t+d(x,y)}\right)\left(\frac{s}{s+d(y,z)}\right) \le \frac{t+s}{t+s+d(x,z)}$$

$$M(x,y,t) *_2 M(y,z,s) \le M(x,z,t+s)$$

elde edilir.

v. Her $x, y \in X$ ve $t_0 > 0$ için;

$$\lim_{t\to t_0} M(x,y,t) = \lim_{t\to t_0} \frac{t}{t+d(x,y)}$$

$$= \frac{\lim_{t\to t_0} t}{\lim_{t\to t_0} t+d(x,y)}$$

$$= \frac{t_0}{t_0+d(x,y)}$$

$$= M(x,y,t_0)$$

olduğundan $M(x,y,\ \cdot) : (0,\infty) \to [0,1]$ süreklidir.

O halde M, X de bir bulanık metrik ve $(X, M, *_2)$ bir bulanık metrik uzaydır.

Bu son örnekte sürekli t-norm $*_3$ olarak alındığında da $(X, M, *_3)$ bir bulanık metrik uzaydır.

Örnek 4.7. (X,d) metrik uzay olsun. $x,y \in X$ ve $t > 0$ olmak üzere her bir $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$M(x,y,t) = \frac{\alpha t^n}{\alpha t^n + \beta d(x,y)}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman $(X, M, *_3)$ bir bulanık metrik uzaydır.

Çözüm: Diğer aksiyomlar aşikar olup sadece bulanık metrik koşullarından (iv) aksiyomu gösterilecektir. Lemma 4.3 den

$$1 + \frac{\beta d(x,z)}{\alpha(t+s)^n} \leq max\left\{1 + \frac{\beta d(x,y)}{\alpha t^n}, 1 + \frac{\beta d(y,z)}{\alpha s^n}\right\}$$

olup buradan

$$\frac{\alpha(t+s)^n}{\alpha(t+s)^n + \beta d(x,z)} \geq min\left\{\frac{\alpha t^n}{\alpha t^n + \beta d(x,y)}, \frac{\alpha s^n}{\alpha s^n + \beta d(y,z)}\right\}$$

bulunur. Böylece $M(x,z,t+s) > M(x,y,t) *_3 M(x,z,t)$ ispatlanmış olur.

Bu örnek $n \in \mathbb{R}^+$ için geçerli değildir. Gerçekten d, $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriği ise $\alpha = \beta = 1$ olmak üzere $n = \frac{1}{2}$ olarak alındığında $M, \mathbb{R}$ üzerinde bulanık metrik uzay olmaz.

Tanım 4.16. Örnek 4.6 ve Örnek 4.7 da eğer $\alpha = \beta = n = 1$ alınırsa

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)}$$

bulunur. Bu durumda M_d bulanık metriğine d tarafından indirgenen *standart bulanık metrik* denir (George ve Veeramani, 1994).

Sonuç 4.2. Örnek 4.6 ve Örnek 4.7 örneklerinin bir sonucu olarak her metrik uzay bir bulanık metrik uzaydır diyebiliriz. Ancak tersi her zaman değildir. Aşağıda bu durum için bir örnek verilmiştir.

Örnek 4.8. $X \in \mathbb{N}$ ve $a *_2 b = ab$ olsun. Her $t > 0$ için

$$M(x,y,t)=\begin{cases}\dfrac{x}{y} & ; \ x\le y\\ \dfrac{y}{x} & ; \ y\le x\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $(\mathbb{N},M,*_2)$ bir bulanık metriktir. Fakat bu bulanık metrik için $\mathbb{N}$ üzerinde

$$M(x,y,t)=\frac{t}{t+d(x,y)}$$

eşitliğini sağlayan bir d metriği yoktur. Gerçekten d metriğinin var olduğu kabul edilerek gerekli işlemler yapılırsa,

$$d(x,y)=\frac{t\big(1-M(x,y,t)\big)}{M(x,y,t)}$$

dir. Bu fonksiyon metriğin üçüncü aksiyomunu sağlamaz. Bu nedenle (X,d) nin bir metrik uzay olmadığı görülür. Dolayısıyla her bulanık metrik uzay, bir metrik uzay değildir.

Örnek 4.9. (X,d) metrik uzay olsun. $x,y\in X$ ve $\alpha>0$ bir sabit ise

$$M(x,y,t)=\frac{\alpha}{\alpha+d(x,y)}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(X,M,*)$ bulanık metriktir (Gregori vd., 2011).

Örnek 4.10. $X\neq\emptyset$ bir küme $f\colon X\to\mathbb{R}^+$ birebir fonksiyon ve $g\colon\mathbb{R}^+\to[0,\infty)$ artan sürekli fonksiyon olsun. $\alpha,\beta>0$ sabit sayılar $a*_2 b=ab$ olmak üzere $x,y\in X$, $t>0$ için

$$M(x,y,t)=\left(\frac{(min\{f(x),f(y)\}^{\alpha})+g(t)}{(max\{f(x),f(y)\}^{\alpha})+g(t)}\right)^{\beta}$$

şeklinde tanımlanan M fonksiyonu, X üzerinde bir bulanık metriktir (Gregori vd., 2011).

Uyarı 4.3. Eğer Örnek 4.10 de $f=I$ ve $\alpha=\beta=1$ olarak alınırsa;

a) $X = \mathbb{R}^{+}$ olsun. $x, y \in X,\ t > 0$ için

$$M(x, y, t) = \frac{min\{x, y\} + t}{max\{x, y\} + t}$$

b) $X \in \mathbb{N}$ ve $g(t) = 0$ olması halinde

$$M(x, y, t) = \frac{min\{x, y\}}{max\{x, y\}}$$

olarak tanımlanırsa $(X, M, *)$ bir bulanık metriktir.

Uyarı 4.4.

- Standart bulanık metrik uzaylar ve yerleşik bulanık metrik uzaylar temel bulanık metrik uzaylara birer örnektir.
- Örnek 4.9 da $(X, M, *)$ yerleşik bulanık metrik dolayısıyla kuvvetli ve temel bulanık metriktir. Fakat genelde $(M, *_3)$ yerleşik bulanık metrik olmaz.

5. BULANIK METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Kramosil ve Michalek ve George ve Veeramani anlamında temel sabit nokta teoremleri ve ilgili sonuçlar verilecektir. İkinci kısımda ise (Mishra vd., 2016) çalışmasında $\alpha - \phi -$bulanık daralma dönüşümü kullanılarak elde edilen sabit nokta teoremi ve integral denklemlere olan uygulama ayrıntılı olarak incelenecektir.

Sabit nokta teoremlerinin ispatında kullanılan daralma dönüşümü, tamlık ve Cauchy dizisi gibi kavramların farklı tiplerde tanımları mevcuttur. Dolayısıyla, karışıklık olmaması için Grabiec anlamında Cauchy dizisi ve tamlık kavramları ifade edilirken "G-Cauchy dizisi" ve "G-tam" ifadeleri kullanılacaktır. George ve Veeramani anlamında Cauchy dizisi ve tamlık kavramları ifade edilirken "G-V-Cauchy dizisi" ve "G-V-tam" ifadeleri kullanılacaktır. Ayrıca, Grabiec anlamında bulanık daralma dönüşümü için "G-bulanık daralma dönüşümü"; Gregori ve Sapena anlamında bulanık daralma dönüşümü için "G-S-bulanık daralma dönüşümü" ifadesi kullanılacaktır.

5.1 Bazı Bulanık Metrik Uzaylarında Sabit Nokta Teoremleri

İlk olarak Kramosil ve Michalek anlamındaki bulanık metrik uzaylardaki temel sabit nokta teoremlerini verelim.

Tanım 5.1.1. $(X, M,*)$ bir bulanık metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $0 < k < 1$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(Tx, Ty, kt) \geq M(x, y, t)$$

sağlanıyorsa T ye bulanık *G-daraltan dönüşüm* denir (Grabiec, 1988).

Tanım 5.1.2. $(X, M,*)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer X deki her G-Cauchy dizisi X deki bir elemana yakınsıyorsa $(X, M,*)$ bulanık metrik uzayına G-*tam* denir (Grabiec, 1988).

Teorem 5.1.1 $(X, M,*)$ Kramosil ve Michalek anlamındaki G-tam bulanık metrik uzayı olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\lim_{t\to\infty} M(x, y, t) = 1$$

sağlansın. Eğer $T: X \to X$ bulanık G-daraltan dönüşüm ise, bu taktirde T nin X de bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir (Grabiec, 1988).

Tanım 5.1.3. $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X,\ t > 0$ için,

$$\frac{1}{M(Tx, Ty, t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{M(x, y, t)} - 1\right)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in (0,1)$ sayısı varsa, T ye G-S-*bulanık daraltan dönüşüm*, k ya da, T nin *daraltan sabiti* denir (Gregori ve Sapena, 2002).

Teorem 5.1.2 $(X, M, *)$ Kramosil ve Michalek anlamında G-tam bulanık metrik uzay ve $T: X \to X$ bir G-S-bulanık daraltan dönüşüm olsun. Bu taktirde T nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir (Gregori ve Sapena, 2002).

Şimdi de V. George ve P. Veeramani anlamındaki $(X, M, *)$ bulanık metrik uzaylarda temel sabit nokta teoremleri ifade edilecektir.

Önerme 5.1.1. (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) üzerinde bir $T: X \to X$ dönüşümünün daraltan sabiti k olan bir daraltan dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul, d ile indirgenen $(X, M_d, *)$ standart bulanık metrik uzayı üzerinde, T nin daraltan sabiti k olan bir G-S-bulanık daraltan dönüşüm olmasıdır (Gregori ve Sapena, 2002).

Sonuç 5.1.1. $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay ve (x_n) de X de bir dizi olsun. Eğer $\forall t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{M(x_{n+1}, x_{n+2}, t)} - 1 \leq k\left(\frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t)} - 1\right)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in (0,1)$ sayısı varsa, (x_n) dizisine *bulanık daraltan dizi* denir.

Teorem 5.1.3. $(X, M, *)$ bulanık daraltan dizilerin G-V Cauchy dizisi olduğu bir G-V tam bulanık metrik uzay olsun. $T: X \to X$, daraltan sabiti k olan bir G-S-bulanık daraltan dönüşümü ise o zaman T nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir (Gregori ve Sapena, 2002).

İspat: Sabit bir $x \in X$ alınsın ve $\{x_n\}$ dizisi $n \in N$ olmak üzere $x_n = T^n(x)$ biçiminde tanımlansın. Her $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{M(Tx,T^2x,t)}-1\leq k\left(\frac{1}{M(x,x_1,t)}-1\right)$$

olup tümevarımla

$$\frac{1}{M(x_{n+1},x_{n+2},t)}-1\leq k\left(\frac{1}{M(x_n,x_{n+1},t)}-1\right)$$

bulunur. Böylece $\{x_n\}$ dizisi G-V Cauchy dizisi olup, $(X,M,*)$, G-V tam olduğundan bir $y\in X$ e yakınsar. $n\to\infty$ için

$$\frac{1}{M(Ty,T(x_n),t)}-1\leq k\left(\frac{1}{M(x,x_n,t)}-1\right)\to 0$$

olduğundan $\forall t>0$ için

$$\lim_{n\to\infty} M(Ty,T(x_n),t)=1$$

olur. Buradan,

$$T(y)=\lim_{n\to\infty} T(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=y$$

bulunur. Yani y,T nin bir sabit noktasıdır. Ayrıca, bu y noktası T nin tek bir sabit noktasıdır. Gerçekten $T(z)=z$ olacak biçimde T nin başka bir $z\in X$ sabit noktası olsaydı

$$\begin{aligned}\frac{1}{M(y,z,t)}-1&=\frac{1}{M(Ty,Tz,t)}-1\\&\leq k\left(\frac{1}{M(y,z,t)}-1\right)\\&=k\left(\frac{1}{M(Ty,Tz,t)}-1\right)\\&\leq k^2\left(\frac{1}{M(y,z,t)}-1\right)\\&\vdots\end{aligned}$$

$$\leq k^n \left(\frac{1}{M(Ty,Tz,t)} - 1\right)$$

olurdu. Burada $n \to \infty$ için limite geçildiğinde, $k \in (0,1)$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ olur ki buradan

$$M(y,z,t) = 1 \Rightarrow y = z$$

bulunur.

Sonuç 5.1.2. $(X, M_d, *)$ d metriği tarafından indirgenen bir tam standart bulanık metrik uzay ve $T: X \to X$ bir G-S-bulanık daraltan dönüşüm olsun. Bu taktirde T nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.

George ve Veeramani (1994, 1997) anlamında bulanık metrik uzaylarda bir bulanık ψ-daralma dönüşümü Dorel Mihet (2004) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 5.1.4. $\psi: [0,1] \to [0,1]$ olarak tanımlı

i. ψ sürekli ve azalmayan,

ii. Her $t \in (0,1)$ için $\psi(t) > t$,

şartlarını sağlayan bütün ψ fonksiyonların kümesi Ψ olsun. $(X, M, *)$ bir bulanık metrik uzay, $\psi \in \Psi$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu taktirde,

$$M(x,y,t) > 0 \Rightarrow M(Tx,Ty,t) \geq \psi\big(M(x,y,t)\big)$$

sağlanıyorsa T ye *bulanık* ψ *−daralma dönüşümü* denir. X içinde herhangi bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi her dizisi her $n \in \mathbb{N}$ ve her $t > 0$ için,

$$M(x_{n+2}, x_{n+1}, t) \geq \psi\big(M(x_{n+1}, x_n, t)\big)$$

ifadesini sağlıyorsa (x_n) dizisine *bulanık* ψ *−daralma dizisi* denir (Gregori ve Sapena, 2002).

Lemma 5.1.1. $\psi \in \Psi$ ise $\psi(1) = 1$ dir (Di Bari ve Vetro, 2005).

Lemma 5.1.2. $\psi \in \Psi$ ise $t \in (0,1)$ için $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 1$ dir (Di Bari ve Vetro, 2005).

Örnek 5.1.1. $X = [0,\infty)$ her $a,b \in [0,1]$ için $a *_3 b = min\{a,b\}$ ve

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 0\ , & t \leq |x-y| \\ 1\ , & t > |x-y| \end{cases}$$

olsun. $(X, M, *_3)$ bir bulanık metrik uzaydır (Gregori ve Sapena, 2002). $\psi \in \Psi$ olsun. $\psi(1) = 1$ olduğundan ve

$$\begin{aligned} M(x,y,t) > 0 \qquad & \Rightarrow M(x,y,t) = 1 \\ & \Rightarrow \psi\big(M(x,y,t)\big) = 1 \end{aligned}$$

ifadesi sağlandığından dolayı, $(X, M, *)$ de alınan bir T bulanık dönüşümü için $|x-y| < t \Rightarrow |Tx - Ty| < t$, yani, her $x,y \in X$ için $|Tx - Ty| \leq |x-y|$ dir. Aksine, $T: X \to X$ dönüşümü ve her $x,y \in X$ için $|Tx - Ty| \leq |x-y|$ oluyorsa, $\psi(0) = 0$ ve $\psi \in \Psi$ olmak üzere T bir bulanık ψ-daralma dönüşümüdür.

Önerme 5.1.2. Her $t > 0$ için $M(x,y,t) > 0$ olmak üzere $(X, M, *)$ George ve Veeramani anlamında bir bulanık metrik ve $T: X \to X$ bir bulanık ψ $-$daralma dönüşümü olsun. O halde T dönüşümünün en az bir sabit noktası vardır (Gregori ve Sapena, 2002).

5.2 $\alpha - \phi$ −Bulanık Daralma Dönüşümü Kullanılarak Elde Edilen Sabit Nokta Teoremi ve İntegral Denklemlere Uygulaması

Bu kısımda yer alan bütün sonuçlar (Mishra vd., 2016) çalışmasından alınarak ayrıntılı olarak açıklaması yapılmıştır. Bu çalışmada, George ve Veeramani anlamında bulanık metrik uzaylar üzerinde yapılmıştır.

İlk olarak teoremlerin ispatlarında kullanacak olan bulanık metrik uzaylarda üçgensellik tanımını verelim. Daha sonra ise sabit nokta teoremleri, sonuçlar ve örneklere yer verilecektir. Son olarak, elde edilen sabit nokta teoremlerinin integral denklemlere uygulamasına yer verilecektir.

Tanım 5.2.1. $(X, M, *)$ George ve Veeramani anlamında bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer $\forall x,y,z \in X$ ve $\forall t > 0$ için

$$\left(\frac{1}{M(x,y,t)}-1\right)\leq\left(\frac{1}{M(x,z,t)}-1\right)+\left(\frac{1}{M(y,z,t)}-1\right) \qquad (12)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $(X, M,*)$ bulanık metriğe *üçgenseldir* denir (Di Bari ve Vetro, 2003; 2005).

Bu kısımda, bulanık metrik uzaylarda modifiye edilmiş $\alpha-\phi$ −bulanık daralma dönüşümü ve η ye göre α −geçişli daralma dönüşümünü kullanılarak bazı sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

$\phi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ sağdan sürekli ve $\forall c > 0$ için $\phi(c) < c$, şartını sağlayan fonksiyonların ailesi Φ ile gösterilsin.

Uyarı 5.2.1. Her $\phi \in \Phi$ fonksiyonu için $\phi^n(c)$, ϕ nin n. iterasyonu olmak üzere $\lim_{n\to+\infty} \phi^n(c) = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.

α −geçişli dönüşüm kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Salimi vd., 2013) ve (Hussain vd., 2013).

Tanım 5.2.2. $(X, M,*)$ George ve Veeramani anlamında bir bulanık metrik uzay ve $\alpha,\eta: X\times X\times(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ iki fonksiyon ve $T: X\to X$ olsun. $\forall x,y\in X$ ve $\forall t>0$ için

$$\alpha(x,y,t)\geq\eta(x,y,t) \quad \Rightarrow \quad \alpha(Tx,Ty,t)\geq\eta(Tx,Ty,t)$$

sağlanıyorsa T ye *η ye göre α −geçişli* olduğu söylenir.

Dikkat edilmelidir ki eğer $\eta(x,y,t) = 1$ olarak alınırsa, bu durumda (Gopal ve Vetro, 2014) kaynağındaki Tanım 5.2.2. α −geçişli tanımına indirgenir. Ayrıca, $\alpha(x,y,t) = 1$ olarak alınırsa, bu durumda T bir η −altgeçişli dönüşüm olur.

(Gopal ve Vetro, 2014) da bulanık metrik uzaylarda $\alpha-\phi$ −bulanık daralma dönüşümü kavramını aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 5.2.3. $(X, M,*)$ George ve Veeramani anlamında bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer $\alpha: X\times X\times(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ ve $\phi\in\Phi$ iki fonksiyon ve $T: X\to X$ olsun. $\forall x,y\in X$ ve $\forall t>0$ için

$$\alpha(x,y,t)\left(\frac{1}{M(Tx,Ty,t)}-1\right)\leq\phi\left(\frac{1}{M(x,y,t)}-1\right)$$

sağlanıyorsa T ye bir $\alpha-\phi-$*bulanık daralma dönüşümü* denir (Gopal ve Vetro, 2014).

Yukarıdaki tanımdan hareketle aşağıdaki genelleme yapılmıştır (Mishra vd., 2016).

Tanım 5.2.4. $(X, M,*)$ George ve Veeramani anlamında bir bulanık metrik uzay olsun. $\alpha, \eta: X \times X \times (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ iki fonksiyon ve $\phi \in \Phi$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her $t > 0$ için $N(x,y,t) = \min\{M(x,y,t), M(x,Tx,t), M(y,Ty,t)\}$ olmak üzere

$$\alpha(x,y,t) \geq \eta(x,y,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{M(Tx,Ty,t)} - 1 \leq \phi\left(\frac{1}{N(x,y,t)} - 1\right) \tag{13}$$

ise T ye bir *modifiye* $\alpha-\phi-$*bulanık daralma dönüşümü* denir.

Uyarı 5.2.2. Eğer $\eta(x,y,t) = 1$ ve $N(x,y,t) = M(x,y,t)$ ise, o zaman bu tanım (Gopal ve Vetro, 2014) deki Tanım 5.2.3'e indirgenir. Böylece Gregori ve Sapena (2002) tarafından verilen bulanık daralma tanımı sağlanacaktır. Bu ise gösterir ki bulanık daralma dönüşümü modifiye edilmiş bir $\alpha-\phi-$bulanık daralma dönüşümüdür, fakat genelde tersi doğru değildir.

Şimdi ilk temel sonuç olan aşağıdaki teoremi verelim (Mishra vd.,2016).

Teorem 5.2.1. $(X, M,*)$ George ve Veeramani anlamında bir G-V tam bulanık metrik uzay olsun. $T: X \to X$ modifiye edilmiş $\alpha-\phi-$bulanık daralma dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlasın:

i. T, η ye göre $\alpha-$geçişlidir.

ii. Her $t > 0$ için $\alpha(x_0, Tx_0, t) \geq \eta(x_0, Tx_0, t)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

iii. T süreklidir.

Bu taktirde, T nin bir sabit noktası vardır, yani $Tx^* = x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır.

İspat. $x_0 \in X$ ve her $t > 0$ için $\alpha(x_0, Tx_0, t) \geq \eta(x_0, Tx_0, t)$ olsun. X üzerinde bir (x_n) dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ olarak tanımlansın. Bu durumda açıkça görülür ki, eğer $\exists n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n+1}$ ise bu durumda $x = x_n$ olup Tnin bir sabit noktasıdır. Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \neq x_n$ olduğunu kabul edelim. T, η'ye göre $\alpha-$geçişli bir dönüşüm ve $\alpha(x_0, Tx_0, t) \geq \eta(x_0, Tx_0, t)$ olduğundan

$$\alpha(x_1, x_2, t) = \alpha(Tx_0, T^2x_0, t) \geq \eta(Tx_0, T^2x_0, t) = \eta(x_1, x_2, t)$$

olur. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için işleme devam edilirse $\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \geq \eta(x_n, x_{n+1}, t)$ elde edilir. Şimdi $x = x_{n-1}$, $y = x_n$ ile (13) den

$$\begin{aligned} N(x_{n-1}, x_n, t) &= \min\{M(x_{n-1}, x_n, t), M(x_{n-1}, Tx_{n-1}, t), M(x_n, Tx_n, t)\} \\ &= \min\{M(x_{n-1}, x_n, t), M(x_{n-1}, x_n, t), M(x_n, x_{n+1}, t)\} \\ &= \min\{M(x_{n-1}, x_n, t), M(x_n, x_{n+1}, t)\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{M(Tx_{n-1}, Tx_n, t)} \leq \phi\left(\frac{1}{N(x_{n-1}, x_n, t)}\right),$$

elde edilir. Şu halde,

$$\frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t)} - 1 \leq \phi\left(\frac{1}{\min\{M(x_{n-1}, x_n, t), M(x_n, x_{n+1}, t)\}} - 1\right)$$

olur. Şimdi, $\exists n \in \mathbb{N}$ için, $\min\{M(x_{n-1}, x_n, t), M(x_n, x_{n+1}, t)\} = M(x_n, x_{n+1}, t)$ ise

$$\frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t)} - 1 \leq \phi\left(\frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t)} - 1\right) < \frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t)} - 1,$$

olup bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t)} - 1 < \frac{1}{M(x_{n-1}, x_n, t)} - 1$$

dir. Sonuç olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $M(x_n, x_{n+1}, t) > M(x_{n-1}, x_n, t)$ olduğundan, $\{M(x_{n-1}, x_n, t)\}$, $[0,1]$ aralığında artan bir pozitif reel dizidir.

$s(t) = \lim_{n \to +\infty} M(x_{n-1}, x_n, t)$ olsun. Göstermek istiyoruz ki her $t > 0$ için $s(t) = 1$ dir. Aslında, $s(t_0) < 1$ olacak şekilde $t_0 > 0$ olduğunu varsayalım.

$$\frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t_0)} - 1 < \phi\left(\frac{1}{M(x_{n-1}, x_n, t_0)} - 1\right)$$

olduğu ve ϕ fonksiyonunun sağdan sürekli olduğu kullanılırsa, $n \to +\infty$ iken

$$\frac{1}{s(t_0)} - 1 \leq \phi\left(\frac{1}{s(t_0)} - 1\right) < \frac{1}{s(t_0)} - 1$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu ise her $t > 0$ için $\lim_{n\to+\infty} M(x_{n-1}, x_n, t) = 1$ olduğu anlamına gelir. Şu halde, sabit bir $p \in \mathbb{N}$ için

$$M(x_n, x_{n+p}, t) \geq M(x_n, x_{n+1}, t/p) * M(x_{n+1}, x_{n+2}, t/p) * \dots$$
$$* M(x_{n+p-1}, x_{n+p}, t/p) \to 1 * \dots * 1 = 1$$

elde edilir. $n \to +\infty$ iken (x_n) G-V Cauchy dizisidir. $(X, M, *)$ G-V tam olduğundan, (x_n), bazı $x^* \in X$ e yakınsar. Ayrıca, T sürekli olduğundan $Tx_n \to Tx^*$ sonucuna varırız ve böylece her $t > 0$ için,

$$\lim_{n\to+\infty} M(x_{n+1}, Tx^*, t) = \lim_{n\to+\infty} M(x_n, Tx^*, t) = 1$$

dir, yani x_n dizisi Tx^* a yakınsar. Limit tek olacağından, $x^* = Tx^*$ sonucu çıkarılır. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıda verilen teoremde, süreklilik hipotezinin regülerlik hipotezi ile değiştirildiği gösterilecektir.

Teorem 5.2.2. $(X, M, *)$ George ve Veeramani anlamında G-V tam bulanık metrik uzay ve üçgensel olsun. $T: X \to X$ bir modifiye edilmiş $\alpha - \phi$ −bulanık daralma dönüşümü aşağıdaki koşullar sağlasın:

i. T, η ye göre α −geçişlidir.

ii. Her $t > 0$ için $\alpha(x_0, Tx_0, t) \geq \eta(x_0, Tx_0, t)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

iii. Her $n \in \mathbb{N}, t > 0$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \geq \eta(x_n, x_{n+1}, t)$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ herhangi bir dizisi olsun. Eğer, $n \to +\infty$ iken $x_n \to x$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $\alpha(x_n, x, t) \geq \eta(x_n, x, t)$ olur.

Bu taktirde, T nin bir tek sabit noktası vardır, yani $Tx^* = x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır.

İspat: Teorem 5.2.1'in ispatından, her $n \in \mathbb{N}$ için ki $\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \geq \eta(x_n, x_{n+1}, t)$ olacak şekildeki (x_n) dizisinin, $(X, M, *)$ G-V tam bulanık metrik uzayında bir G-V Cauchy dizisi olduğunu görüyoruz. $n \to +\infty$ iken $x_n \to x^*$ olacak şekilde X de bir x^* noktası vardır. Teoremin (iii) hipotezinden her $n \in \mathbb{N}$ ve her $t > 0$ için,

$$\alpha(x_n, x^*, t) \geq \eta(x_n, x^*, t) \tag{14}$$

olur.

Eğer $x^* \neq Tx^*$ ise, yani bazı $t > 0$ için $M(x^*, Tx^*, t) < 1$ ise, bu taktirde sırasıyla (12), (13) ve (14)'den M üçgensel olduğu için

$$\begin{aligned}\frac{1}{M(x^*, Tx^*, t)} - 1 &\leq \left(\frac{1}{M(x^*,, x_{n+1}, t)} - 1\right) + \left(\frac{1}{M(Tx_n, Tx^*, t)} - 1\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{M(x^*, x_{n+1}, t)} - 1\right) + \phi\left(\frac{1}{N(x_n, x^*, t)} - 1\right)\end{aligned}$$

elde edilir. $n \to +\infty$ iken,

$$\begin{aligned}N(x_n, x^*, t) &= \min\{M(x_n, x^*, t), M(x_n, Tx_n, t), M(x^*, Tx^*, t)\} \\ &\to \min\{1,1, M(x^*, Tx^*, t)\} \\ &= M(x^*, Tx^*, t)\end{aligned}$$

olup böylece, $c > 0$ için $\phi(c) < c$ ile çelişmemek için,

$$\frac{1}{M(Tx^*, x^*, t)} - 1 = 0$$

sonucuna ulaşılır. Buradan $Tx^* = x^*$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki verilenlerden aşağıdaki bazı sonuçlar çıkarılabilir. Özellikle, Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.2.2'de $\eta(x, y, t) = 1$ alınarak (M nin üçgenselliği ile birlikte) aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.1. $(X, M, *)$ George ve Veeramani anlamında bir G-V tam bulanık metrik uzay olsun (M üçgensel olmak üzere). $T: X \to X$ $\alpha -$geçişli bir dönüşüm olsun.

Kabul edelim ki $x, y \in X$ ve $t > 0$ için, öyle bir $\phi \in \Phi$ vardır ki $N(x, y, t) = \min\{M(x, y, t), M(x, Tx, t), M(y, Ty, t)\}$ olmak üzere

$$\alpha(x, y, t) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{M(Tx, Ty, t)} - 1 \leq \phi\left(\frac{1}{N(x, y, t)} - 1\right) \tag{15}$$

dir. Ayrıca, aşağıdaki şartlar geçerli olduğunu kabul edelim;

- **i.** $x_0 \in X$ vardır, öyle ki her $t > 0$ için $\alpha(x_0, Tx_0, t) \geq 1$ olsun.
- **ii.** T ya süreklidir ya da X te $\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \geq 1$ olan herhangi bir (x_n) dizisi için her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $n \to +\infty$ iken $x_n \to x$ ise, bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $\alpha(x_n, x, t) \geq 1$ olur.

Şu halde, T nin bir tek sabit noktası vardır.

Ayrıca, Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.2.2'de $\alpha(x, y, t) = 1$ alınarak (M üçgensel olmak üzere) aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.2. $(X, M, *)$ George ve Veeramani anlamında bir G-V tam bulanık metrik uzay olsun (M üçgensel olsun). $T: X \to X$ η −altgeçişli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki öyle bir $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $N(x, y, t) = \min\{M(x, y, t), M(x, Tx, t), M(y, Ty, t)\}$ olmak üzere

$$\eta(x, y, t) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{M(Tx, Ty, t)} - 1 \leq \phi\left(\frac{1}{N(x, y, t)} - 1\right),$$

$\phi \in \Phi$ vardır. Ayrıca, aşağıdaki iddiaların geçerli olduğunu varsayalım:

- **i.** Her $t > 0$ için $\eta(x_0, Tx_0, t) \leq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır,
- **ii.** Her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için T ya süreklidir ya da X te $\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \geq 1$ olacak şekilde herhangi bir (x_n) dizisi için $n \to +\infty$ iken $x_n \to x$ ise, bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $\alpha(x_n, x, t) \geq 1$ olur.

Şu halde, T nin bir tek sabit noktası vardır.

Şimdi, iki basit açıklayıcı örnek verilecektir.

Örnek 5.2.1. $X = [0, +\infty)$ de her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için t −normu $*_2$ olmak üzere bulanık metriği $M(x, y, t) = \frac{t}{t+|x-y|}$ olsun. M nin üçgensel olduğu açıktır. $T: X \to X$

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & x \in [0,1] \\ 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

şekilde tanımlansın. $\alpha, \eta: X \times X \times (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ fonksiyonları her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\alpha(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x, y \in [0,1], \ t > 0 \\ 0, & aksi\ taktirde \end{cases}$$

ve

$$\eta(x, y, t) = 1/3$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde, Teorem 5.2.2'nin uygulanması olarak her $c \geq 0$, $\phi(c) = \frac{c}{2}$ için T nin bir sabit noktası vardır.

Örnek 5.1.1'de yapılacak küçük bir değişiklikle, Sonuç 5.2.2'nin kapsadığı bir örnek elde edilebilir.

Örnek 5.2.2. $X = \left\{\frac{1}{2}, \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0,2\}$ her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için bulanık metrik $M(x, y, t) = \frac{t}{t+|x-y|}$ ve t −normu $*_2$ ile verilmiş olsun. $T: X \to X$ ve $\eta: X \times X \times (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & x \in X/\{2\} \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

$$\eta(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x \in X/\{2\}, t > 0 \\ 3, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Bu taktirde, Sonuç 5.2.2'nin uygulanması olarak her $c \geq 0$, $\phi(c) = \frac{c}{2}$ için T nin bir sabit noktası vardır.

Daha sonra, modifiye edilmiş $\alpha-\phi-$bulanık daralma dönüşümünün sabit noktasının tekliğini belirlemek için aşağıdaki hipotez dikkate alınacaktır:

(H) Her $x, y \in X$ ve her $t>0$ için $\alpha(x,z,t) \geq \eta(x,z,t)$, $\alpha(y,z,t) \geq \eta(y,z,t)$ ve $\lim_{n\to+\infty} M(T^{n-1}z, T^n z, t) = 1$ olacak şekilde $z \in X$ vardır.

Teorem 5.2.3. Teorem 5.2.1 (Teorem 5.2.2) e (H) hipotezi eklendiğinde, $\phi \in \Phi$ azalmayan olması koşuluyla T nin bir tek x^* sabit noktası olduğu elde edilir.

İspat. Kabul edelim ki x^* ve y^* T nin iki sabit noktası olsun. Eğer, $\alpha(x^*, y^*, t) \geq \eta(x^*, y^*, t)$ ise, (13) koşulundan $x^* = y^*$ olur. Kabul edelim ki $\alpha(x^*, y^*, t) < \eta(x^*, y^*, t)$ olsun, bu taktirde (H) hipotezinden

$$\alpha(x^*, \mathrm{z}, t) \geq \eta(x^*, \mathrm{z}, t) \text{ ve } \alpha(y^*, \mathrm{z}, t) \geq \eta(y^*, \mathrm{z}, t) \tag{16}$$

olacak şekilde $z \in X$ vardır.

T, η ye göre $\alpha-$geçişli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ ve her $t>0$ için,

$$\alpha(x^*, T^n z, t) \geq \eta(x^*, T^n z, t)$$

elde edilir. Şimdi her $t>0$ için $n \to +\infty$ iken $M(x^*, T^n z, t) \to 1$ olduğu ispatlanacaktır. Kabul edelim ki $\lim_{n\to+\infty} M(x^*, T^n z, t) < 1$ olacak şekilde $t>0$ mevcut olsun. O halde, (13) ve (16) dan

$$\begin{aligned} N(x^*, T^{n-1}z, t) &= \min\{M(x^*, T^{n-1}z, t), M(x^*, Tx^*, t), M(T^{n-1}z, T(T^{n-1})z, t)\} \\ &= \min\{M(x^*, T^{n-1}z, t), M(x^*, Tx^*, t), M(T^{n-1}z, T^n z, t)\} \\ &= \min\{M(x^*, T^{n-1}z, t), M(T^{n-1}z, T^n z, t)\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(x^*, T^n z, t)} - 1 &= \frac{1}{M(Tx^*, T(T^{n-1}z), t)} - 1 \\ &\leq \phi\left(\frac{1}{N(x^*, T^{n-1}z, t)}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Her $n \geq n_0$ için $M(x^*, T^n z, t) \leq M(T^n z, T^{n+1} z, t)$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ olsun. Dolayısıyla, her $n > n_0$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M(x^*, T^n z, t)} - 1 &= \frac{1}{M(Tx^*, T(T^{n-1}z), t)} - 1 \\
&\leq \phi\left(\frac{1}{\min\{M(x^*, T^{n-1}z, t), M(T^{n-1}z, T^n z, t)\}} - 1\right) \\
&= \phi\left(\frac{1}{M(x^*, T^{n-1}z, t)} - 1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M(x^*, T^n z, t)} - 1 &= \frac{1}{M(Tx^*, T(T^{n-1}z), t)} - 1 \\
&\leq \phi^{n-n_0}\left(\frac{1}{M(x^*, T^{n_0}z, t)} - 1\right)
\end{aligned}$$

olacağı anlamına gelir. Bu taktirde, $n \to +\infty$ iken $T^n z \to x^*$ elde edilir. Benzer şekilde, $n \to +\infty$ iken $T^n z \to y^*$ elde edilebilir. Sonuç olarak, $x^* = y^*$ olduğu sonucu elde edilir. O halde teklik kanıtlanmış olur.

Aşağıdaki fonksiyon sınıfları daha sonraki sonuçlarımızda kullanılacaktır. "$\psi(r) = \phi(r) = 0$ ancak ve ancak $r = 0$" olmak üzere

$$\Psi = \{\psi | \ \psi: [0, +\infty) \to [0, +\infty) \text{ azalmayan ve sürekli}\},$$

ve

$$\Phi_1 = \{\phi | \ \phi: [0, +\infty) \to [0, +\infty) \text{ altyarı sürekli}\},$$

olsun.

Teorem 5.2.4. $(X, M, *)$ bir G-V tam bulanık metrik uzay olsun ve $T: X \to X$ η ye göre bir $\alpha-$geçişli dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $\alpha(x, Tx, t)\alpha(y, Ty, t) \geq \eta(x, Tx, t)\eta(y, Ty, t)$ ve

$$\psi\left(\frac{1}{M\big((Tx, Tx, t)\big)} - 1\right) \leq \psi\left(\frac{1}{M(x, y, t)} - 1\right) - \phi\left(\frac{1}{M(x, y, t)} - 1\right) \qquad (17)$$

olacak şekilde $\psi \in \Psi$ ve $\phi \in \Phi_1$ olsun.

Ayrıca aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

i. Her $t > 0$ için $\alpha(x_0, Tx_0, t) \geq \eta(x_0, Tx_0, t)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır,

ii. T ya süreklidir ya da X te $\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \geq \eta(x_n, x_{n+1}, t)$ olan herhangi bir (x_n) dizisi için her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $n \to +\infty$ iken $x_n \to x$ ise, bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $\alpha(x_n, x, t) \geq \eta(x_n, x, t)$ ve $\alpha(x, Tx, t) \geq \eta(x, Tx, t)$ dir.

Şu halde, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\alpha(x_0, Tx_0, t) \geq \eta(x_0, Tx_0, t)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ olacak şekilde X de bir (x_n) dizisi tanımlansın. Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = x_n$ ise, bu taktirde $x = x_n$, T nin bir sabit noktadır ve bu durumda sonuç ispatlanır. Şimdi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğu varsayalım. T, η ye göre α −geçişli ve $\alpha(x_0, Tx_0, t) \geq \eta(x_0, Tx_0, t)$ olduğundan,

$$\alpha(x_1, x_2, t) = \alpha(Tx_0, T^2x_0, t) \geq \eta(Tx_0, T^2x_0, t) = \eta(x_1, x_2, t)$$

sonucu çıkarılır. Her $n \in \mathbb{N}$ için işleme devam edilirse,

$$\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \geq \eta(x_n, x_{n+1}, t)$$

elde edilir.

$$\alpha(x_{n-1}, Tx_{n-1}, t)\alpha(x_n, Tx_n, t) \geq \eta(x_{n-1}, Tx_{n-1}, t)\eta(x_n, Tx_n, t)$$

olduğu açıktır. Şimdi $x = x_{n-1}$, $y = x_n$ olmak üzere (17) den

$$\psi\left(\frac{1}{M(Tx_{n-1}, Tx_n, t)} - 1\right) \leq \psi\left(\frac{1}{M(x_{n-1}, x_n, t)} - 1\right) - \phi\left(\frac{1}{M(x_{n-1}, x_n, t)} - 1\right)$$

$$\psi\left(\frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t)} - 1\right) \leq \psi\left(\frac{1}{M(x_{n-1}, x_n, t)} - 1\right) - \phi\left(\frac{1}{M(x_{n-1}, x_n, t)} - 1\right)$$

dir. Eğer, $M(x_{n-1}, x_n, t) = 1$ ise, o halde $M(x_n, x_{n+1}, t) = 1$ olur. Aksi takdirde, eğer $M(x_{n-1}, x_n, t) < 1$ ise, bu taktirde

$$\psi\left(\frac{1}{M(x_n, x_{n+1}, t)} - 1\right) < \psi\left(\frac{1}{M(x_{n-1}, x_n, t)} - 1\right)$$

olur ve ψ azalmayan olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $M(x_n, x_{n+1}, t) \geq M(x_{n-1}, x_n, t)$ elde edilir. Böylece, $\{M(x_{n-1}, x_n, t)\}$, $[0,1]$ aralığında azalmayan bir pozitif reel dizisidir. $s(t) = \lim_{n \to +\infty} M(x_{n-1}, x_n, t)$. Şimdi, her $t > 0$ için $s(t) = 1$ olduğunu gösterelim. Aksine, $s(t) < 1$ olacak şekilde $t > 0$ mevcut olsun. Dolayısıyla, yukarıdaki eşitsizlikten, $n \to +\infty$ iken

$$\psi\left(\frac{1}{s(t)} - 1\right) \leq \psi\left(\frac{1}{s(t)} - 1\right) - \phi\left(\frac{1}{s(t)} - 1\right)$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir ve böylece her $t > 0$ için $\lim_{n \to +\infty} M(x_{n-1}, x_n, t) = 1$ elde edilir. Daha sonra, sabit bir $p \in \mathbb{N}$ için $n \to +\infty$ iken

$$\begin{aligned} M(x_n, x_{n+p}, t) &\geq M(x_n, x_{n+1}, t/p) * M(x_{n+1}, x_{n+2}, t/p) \\ &\quad * \dots * M(x_{n+p-1}, x_{n+p}, t/p) \\ &\to 1 * \dots * 1 = 1 \end{aligned}$$

dir ve (x_n) bir G-V Cauchy dizisidir. $(X, M, *)$ G-V tam olduğundan, bazı $x^* \in X$ için (x_n) dizisi x^* a yakınsar. Şimdi, iki durumu birbirinden ayıralım.

Durum 1. T süreklidir. O halde, $Tx_n \to Tx^*$ dir ve dolayısıyla her $t > 0$ için,

$$\lim_{n \to +\infty} M(x_{n+1}, Tx^*, t) = \lim_{n \to +\infty} M(x_n, Tx^*, t) = 1.$$

Yani, $x_n \to Tx^*$. Limitin tekliğinden, $x^* = Tx^*$ elde edilir, yani x^*, T nin bir sabit noktasıdır.

Durum 2. Her $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$ ve $n \to +\infty$ iken $x_n \to x^*$ ve $\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \geq \eta(x_n, x_{n+1}, t)$ olacak şekilde X de herhangi bir x_n dizisi için bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $\alpha(x_n, x^*, t) \geq \eta(x_n, x^*, t)$ ve $\alpha(x^*, Tx^*, t) \geq \eta(x^*, Tx^*, t)$ dir. Bu durumda, kolayca

$$\alpha(x_n, x_{n+1}, t)\alpha(x^*, Tx^*, t) \geq \eta(x_n, x_{n+1}, t)\eta(x^*, Tx^*, t)$$

elde edilir. Şimdi, (17) den

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{1}{M(x_{n+1}, Tx^*, t)} - 1\right) &= \psi\left(\frac{1}{M(Tx_n, Tx^*, t)} - 1\right)\\ &\leq \left(\frac{1}{M(x_n, x^*, t)} - 1\right) - \phi\left(\frac{1}{M(x_n, x^*, t)} - 1\right)\end{aligned}$$

olur.

Eğer $M(x_n, x^*, t) = 1$ ise, bu taktirde $M(x_{n+1}, Tx^*, t) = 1$ olur. Aksi takdirde, eğer $M(x_n, x^*, t) < 1$ ise, o halde

$$\psi\left(\frac{1}{M(x_{n+1}, Tx^*, t)} - 1\right) < \psi\left(\frac{1}{M(x_n, x^*, t)} - 1\right)$$

dir. Buradan her $t > 0$ için $n \to +\infty$ iken $M(x_{n+1}, Tx^*, t) \geq M(x_n, x^*, t) \to 1$ olduğu elde edilir, böylece $x^* = Tx^*$ dir.

Teorem 5.2.4'de $\eta(x, y, t) = 1$ alınarak aşağıdaki sonuç çıkarılır.

Sonuç 5.2.3. $(X, M, *)$ bir G-V tam bulanık metrik uzay olsun ve $T: X \to X$ bir $\alpha -$geçişli dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned}&\alpha(x, Tx, t)\alpha(y, Ty, t) \geq 1\\ &\Rightarrow \quad \psi\left(\frac{1}{M(Tx, Ty, t)} - 1\right) \leq \psi\left(\frac{1}{M(x, y, t)} - 1\right) - \phi\left(\frac{1}{M(x, y, t)} - 1\right)\end{aligned}$$

olacak şekilde $\psi \in \Psi$ ve $\phi \in \Phi_1$ olsun.

Ayrıca aşağıdaki şartlar sağlansın:

- **i.** Her $t > 0$ için $\alpha(x_0, Tx_0, t) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır,
- **ii.** T ya süreklidir ya da $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için X te $\alpha(x_n, x_{n+1}, t) \geq 1$ olan herhangi bir (x_n) dizisi için her $n \to +\infty$ iken $x_n \to x$ ise, bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $(x_n, x, t) \geq 1$ ve $\alpha(x, Tx, t) \geq 1$ dir.

O halde, T nin bir tek sabit noktası vardır.

Ayrıca, Teorem 5.2.4'de $\alpha(x,y,t) = 1$ alarak aşağıdaki sonucu çıkarırız.

Sonuç 5.2.4. $(X, M,*)$ bir G-V tam bulanık metrik uzay ve $T: X \to X$ bir η −altgeçişli dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\eta(x,Tx,t)\eta(y,Ty,t) \leq 1$$
$$\Rightarrow \quad \psi\left(\frac{1}{M(Tx,Ty,t)} - 1\right) \leq \psi\left(\frac{1}{M(x,y,t)} - 1\right) - \phi\left(\frac{1}{M(x,y,t)} - 1\right)$$

olacak şekilde $\psi \in \Psi$ ve $\phi \in \Phi_1$ olsun.

Ayrıca aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

i. Her $t > 0$ için $\eta(x_0, Tx_0, t) \leq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır,

ii. T ya süreklidir ya da $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için X de $\eta(x_n, x_{n+1}, t) \leq 1$ olan herhangi bir (x_n) dizisi için her $x_n \to x$, $n \to +\infty$ olduğunda, bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için $\eta(x_n, x, t) \leq 1$ ve $\eta(x, Tx, t) \leq 1$ dir.

O halde T nin bir sabit noktası vardır.

Şimdi de (Shisheng, 1985; Gopal vd., 2014)'den esinlenerek, yukarıda elde edilen sabit nokta teorileri kullanarak integral denklemlere sabit nokta tekniklerinin bir uygulaması yapılacaktır. Burada tam olarak, $I > 0$ ve her $x \in C[0,1]$ için aşağıdaki genel integral denkleminin çözümün varlığını araştırıyoruz.

$$x(r) = g(r) + \int_0^r K\big(r,s,x(s)\big)\,ds \tag{18}$$

$[0, I]$ de tanımlı ve supremum normu,

$$\|x\| = \sup_{r\in[0,I]} |x(r)| \quad , \quad x \in C([0,I],\mathbb{R})$$

ile donatılmış tüm sürekli fonksiyonların Banach uzayı $C([0,I],\mathbb{R})$ olsun ve bu normun doğurduğu metrik ise

$$d(x,y) = \sup_{r\in[0,I]} |x(r) - y(r)| \qquad x, y \in C([0,I],\mathbb{R})$$

olarak tanımlıdır.

Öncelikle, (George ve Veeramani, 1994)'a göre, her $a, b \in [0,1]$ ve $a *_2 b = ab$ sürekli t-normu için

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)}, \quad t > 0 \quad x, y \in C([0,I], \mathbb{R}) \tag{19}$$

bulanık metriği göz önüne alınsın. Bu M_d, d tarafından üretilen(doğur) standart bulanık metrik olarak adlandırılır. Standart bulanık metrik ve ilgili metrik tarafından indirgenen topolojiler aynıdır (George ve Veeramani, 1994). (19) göz önüne alındığında, $C([0,I], \mathbb{R})$ Banach uzayı bir bulanık Banach uzayı olarak düşünülebilir. Gerçekten de $(C([0,I], \mathbb{R}), M_d, *_2)$ uzayı, $C([0,I], \mathbb{R})$ Banach uzayı tarafından indirgenen G-V tam bulanık metrik uzaydır (Hadzic ve Ovcin, 1994; Kramosil ve Michalek, 1975).

Bu nedenle, Banach uzaylar ve bulanık Banach uzaylar birbirleriyle güçlü bir şekilde bağlantılıdır (Saadati ve Vaezpour, 2005). Ayrıntılara girmeden, Banach uzayı olmayan bulanık Banach uzaylar için örnekler vardır. Bu nedenle, bulanık Banach uzaylar, karşılık gelen Banach uzaylardan daha geniş bir yelpazeyi kapsar. Bu ise, bulanık uzaylarda uygulamalar geliştirmek için oldukça yeterli bir motivasyondur.

Şimdi, (18) integral denklemi için bir çözümün varlığı araştırılacaktır.

Teorem 5.2.5. $T: C([0,I], \mathbb{R}) \to C([0,I], \mathbb{R})$, $K \in C([0,I] \times [0,I] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$Tx(r) = g(r) + \int_0^r K(r, s, x(s))\, ds, \quad g \in C([0,I], \mathbb{R})$$

şeklinde verilen integral operatör olsun. Burada aşağıdaki koşul sağlansın:

i. Her $r \in [0,I]$; $f(r,.) \in L^1([0,I], \mathbb{R})$ için ve her $x, y \in C([0,I], \mathbb{R})$; her $r, s \in [0,I]$ için,

$$\begin{aligned} &|K(r,s,x(s)) - K(r,s,y(s))| \\ &\qquad \le f(r,s) \max\{|x(s) - y(s)|, |x(s) - Tx(s)|, |y(s) - Ty(s)|\}, \end{aligned}$$

olacak şekilde $f: [0,I] \times [0,I] \to [0,+\infty)$ vardır.

ii. Burada [0,1] üzerinde $\int_0^r f(r,s)\,ds$ sınırlıdır ve $\sup\limits_{r\in[0,I]} \int_0^r f(r,s)\,ds \leq \lambda < 1$ dir.

O halde (18) integral denkleminin $x^* \in C([0,I],\mathbb{R})$ bir çözümü vardır.

İspat. Her $x, y \in C([0,I],\mathbb{R})$ için

$$
\begin{aligned}
|Tx(r) - Ty(r)| & \\
&= \left|\left(g(r) + \int_0^r K\big(r,s,x(s)\big)\,ds\right) - \left(g(r) + \int_0^r K\big(r,s,y(s)\big)\,ds\right)\right| \\
&= \left|\int_0^r \left[K\big(r,s,x(s)\big) - K\big(r,s,y(s)\big)\right] ds\right| \\
&\leq \int_0^r \left|K\big(r,s,x(s)\big) - K\big(r,s,y(s)\big)\right| ds \\
&\leq \int_0^r f(r,s)\max\{|x(s)-y(s)|, |x(s)-Tx(s)|, |y(s)-Ty(s)|\}\,ds \\
&\leq \int_0^r f(r,s)\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}\,ds \\
&\leq \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}\int_0^r f(r,s)\,ds \\
&\leq \lambda\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani,

$$|Tx(r) - Ty(r)| \leq \lambda\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}$$

olup bu son eşitsizlikte her iki tarafın supremumu alınırsa

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} \tag{20}$$

sonucu çıkar. (19) dan, her $x, y \in C([0,I],\mathbb{R})$ ve $t > 0$ için

$$N_d(x,y,t) = \min\left\{\frac{t}{t+d(x,y)}, \frac{t}{t+d(x,Tx)}, \frac{t}{t+d(y,Ty)}\right\}$$

$$= \frac{t}{t + \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\frac{1}{N_d(x,y,t)} - 1 = \frac{t + \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}}{t} - 1$$

$$= \frac{\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}}{t} \tag{21}$$

dir. Sonuç olarak, $M_d(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ burada rutin hesaplama yapılırsa

$$\frac{1}{M_d(Tx,Ty,t)} - 1 = \frac{d(Tx,Ty)}{t}$$

olup (20) ve (21) den

$$\frac{1}{M_d(Tx,Ty,t)} - 1 \le \lambda \frac{\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}}{t}$$

$$= \lambda\left(\frac{1}{N_d(x,y,t)} - 1\right)$$

elde edilir. Yani,

$$\frac{1}{M_d(Tx,Ty,t)} - 1 \le \lambda\left(\frac{1}{N_d(x,y,t)} - 1\right)$$

dir. Bu ise, her $c \ge 0$ için $\phi(c) = \lambda c$ ve her $x, y \in C([0,I],\mathbb{R})$ ve $t > 0$ için $\alpha(x,y,t) = 1$ olması durumunda (15)' in doğru olduğu anlamına gelir.

Yukarıda belirtildiği gibi, $C([0,I],\mathbb{R})$ tam olduğundan, $(C([0,I],\mathbb{R}), M_d, *_2)$ bulanık metrik uzayı M üçgensellik ile birlikte G-V tamdır. Sonuç 5.2.1'in diğer hipotezleri hemen sağlanır ve dolayısıyla T operatörünün (18) integral denkleminin bir çözümü olan $x^* \in C([0,I],\mathbb{R})$, sabit noktasına sahip olduğu sonucuna varılır.

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında, genel olarak bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ve integral denklemlere uygulamaları ele alındı. Bulanık metrik uzaylar hakkında genel bir literatür taraması yapıldı. Farklı uzaylar ve farklı daralma dönüşümleri için bir çok sabit nokta teoremleri incelendi. Ayrıca, (Mishra vd., 2016) çalışmasında $\alpha - \phi -$bulanık daralma dönüşümü kullanılarak elde edilen sabit nokta teoremi ve integral denklemlere olan uygulama ayrıntılı olarak irdelendi.

Tez çalışması boyunca yapılan çalışmalar sonucunda aşağıdaki kazanımlar elde edildi:

- Kesinlik dışında belirsizlik durumlarını matematiksel olarak modellemek için bulanık kavramı kullanılmaktadır.
- Birçok matematikçi tarafından başta topoloji olmak üzere fonksiyonel analizin temel kavramları bulanıklık kavramı ile yeniden yorumlanmıştır. Özelikle metrik uzay yapısı bulanık metrik uzay olarak farklı tiplerde yeniden ifade edilmiştir.
- Bulanık metrik uzaylardaki çalışmalar neticesinde sabit nokta teorisi üzerine çok sayıda çalışma ortaya konmuştur. Bu çalışmalara paralel olarak hem klasik analizdeki bazı daralma dönüşümlerinin bulanık kapsamında yeniden tanımları yapıldı hem de bulanık uzaylarda yeni daralma dönüşümleri tanımlandı.
- Bulanık alanındaki tüm bu gelişmeler doğal olarak hem teorik hem uygulamalı matematikte yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu kazanımlar, gelişmeler sadece matematikle sınırlı kalmayıp fizik, genetik, astronomi ve mühendislik gibi birçok farklı bilim dalında kullanmaktadır.

KAYNAKÇA

Abbas, M., Ali, B., Sintunavarat, W. and Kumam, P. (2012). Tripled fixed point and tripled coincidence point theorems in intuitionistic fuzzy normed spaces. *Fixed Point Theory Appl.*, 2012:187.

Abu Osman, M.T. (1983). Fuzzy metric spaces and fixed fuzzy set theorem. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 6(1), 1-4.

Ahmad, J., Aydi, H. and Mlaiki, N. (2019). Fuzzy fixed points of fuzzy mappings via f-contractions and an application. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, vol. 37, No. 4, 5487–5493.

Alaca, C. (2009). On fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 24(4), 565-579.

Aliprantis, C.D., and Burkinshaw, O. (1998). *Principles of Real Analysis*. Academic Press, Inc., London.

Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 133-181.

Başkan, T., Bizim O. ve Cangül, İ. N. (2006). *Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş*. (2. Baskı), Ankara: Nobel Yayınevi.

Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*, Gazi Kitabevi, Ankara.

Beg, I., Sedghi, S. and Shobe, N. (2013). Fixed point theorems in fuzzy metric spaces. *Internat. J. Anal.*, Article ID 934145, 1-4.

Berinde, V. (2007). *Iterative Approximation of Fixed Points*, Berlin: Springer.

Cauchy, A. L. (1821). *Analyse Algebrique*. Paris: Chez Debure Freres.

Chang, C .L. (1968). Fuzzy topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24, 182-190.

Chauhan, S., Khan, M.A. and Sintunavarat, W. (2013). Common fixed point theorems in fuzzy metric spaces satisfying $\phi -$contractive condition with common limit range property. *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 735217, 1-14.

Chitra, A. and Subrahmanyam P. V. (1987). Fuzzy sets and fixed points. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 124, 584-590.

Cho, Y. J., Rassias, T. M. and Saadati, R. (2018). Generalized distances and fixed point theorems in fuzzy metric spaces. In Fuzzy Operator Theory in Mathematical Analysis. *Springer, Cham.*, 155-176.

De Luca, A. and Termini, S. (1970). A definition of non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Inform. and Control*, 20, 301-312.

Di Bari, C. and Vetro, C. (2003). A fixed point theorem for a family of mappings in a fuzzy metric space. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 52, 315-321.

Di Bari C. and Vetro, C. (2005). Fixed points, attractors and weak fuzzy contractive mappings in a fuzzy metric space. *J. Fuzzy Math.*, 13, 973-982.

George, A. and Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 6495-399.

George, A. and Veeramani, P. (1997). On some results of analysis for fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 90, 365-368.

Gopal, D, Abbas, M. and Vetro, C. (2014). Some new fixed point theorems in Menger PM-Spaces with application to Volterra type integral equation. *Appl. Math. Comput*. 232, 955-967.

Gopal, D. and Vetro, C. (2014). Some new fixed point theorems in fuzzy metric spaces. *Iran. J. Fuzzy Syst*. 11(3), 95-107.

Grabiec, M. (1988). Fixed points in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 27, 385-389.

Gregori, V., Lopez-Crevilén, A., Morillas S. and Sapena A. (2009). On convergence in fuzzy metric spaces. *Topology and its Applications*, 156, 3002-3006.

Gregori, V. and Miñana, J.-J. (2016). On fuzzy $\psi -$contractive sequences and fixed-point theorems. *Fuzzy Sets Syst.*, 300, 93–101.

Gregori, V., Miñana, J.J. and Miravet, D. (2019a). Extended fuzzy metrics and fixed point theorems. *Mathematics*, 7 (3), Article 303.

Gregori, V., Miñana, J.J. and Miravet, D. (2019b). Contractive sequences in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 379, 125-133.

Gregori, V., Minana, J. J., Morillas, S. and Sapena, A. (2016). Characterizing a class of compltable fuzzy metric spaces. *Topology and its Applications*, 203, 3-11.

Gregori, V., Morillas, S. and Sapena, A. (2010). On a class of completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 161, 2193-2205

Gregori, V., Morillas, S. and Sapena, A. (2011). Examples of fuzzy metrics and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 170, 95-111.

Gregori, V. and Romaguera S. (2000). Some properties of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 115: 485-489.

Gregori V. and Romaguera S. (2004). Characterizing completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* 144, 411-420.

Gregori, V. and Sapane, A. (2002). On fixed-point theorems in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 125, 245–252.

Gubran, R., Alfaqih, W.F. and Imdad, M. (2021). Fixed point via WF-contractions. *Krag. J. Math.*, 45 (3), pp. 353-360.

Hadzic, O. and Ovcin, Z. (1994). Fixed point theorems in fuzzy metric and probabilistic metric spaces. *Zb. Rad. Prir.-Mat. Fak., Ser. Mat*. 24(2), 197-209.

Hadzic, O. and Pap, E. (2002). A fixed point theorem for multivalued mapping in propbalitistic metric spaces and an application in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 127, 333-344.

Hussain, N., Salimi, P. and Latif, A. (2013). Fixed point results for single and set-valued α-η-ψ-contractive mappings. *Fixed Point Theory* Article ID 212.

Jain, S. and Jain, S. (2021). Fuzzy generalized weak contraction and its application to Fredholm non-linear integral equation in fuzzy metric space. *Journal of Analysis*, 29, 619-632.

Kaleva, O. and Seikkala, S. (1984). On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 215-229.

Kandasamy, W.B.V. (2003). *Smarandache Fuzzy Algebra*, American Research Press, India.

Kıyak, E. (2003). Bulanık Mantık Yöntemiyle Uçuş Kontrol Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, (AAT 131237).

Köklü, K. (2018). *İntegral Denklemler*. İstanbul: Papatya Yayıncılık.

Kramosil, O. and Michalek, J. (1975). Fuzzy metric and statistical metric spaces. *Kybernetica*, 11, 326-334.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley-Sons, Newyork.

Liouville, J. (1837). Second memoire: Sur le developpement des fonctions ou parties de fonctions en series dont les divers termes sont assujest à satisfare à une meme équ ation différentielles dusecond membre contenant un parametre variable. *Jurnal de Mathématiques pures et appliques*, 2, 16–35.

Lowen, R. (1976). Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56, 621-633.

Maddox, I. J. (1970). *Elements of Functional Analysis.* Cambridge: Cambridge Univercity Press.

Mahmood, Q., Shoaib, A., Rasham, T. and Arshad, M. (2019). Fixed point results for the family of multivalued f-contractive mappings on closed ball in complete dislocated b-metric spaces. *Mathematics*. *7*(1), 56.

Melliani, S. and Moussaoui, A. (2018*).* Fixed point theorem using a new class of fuzzy contractive mappings. *Journal of Universal Mathematics*, Vol.1 No.2 pp.148-154.

Mihet, D. (2004). A Banach contraction theorem in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst*. 144, 431-439.

Mihet, D. (2007). On fuzzy contractive mappings in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst*. 158, 915-921.

Mihet, D. (2008). Fuzzy $\varphi -$contractive mappings in non-archimedean fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*,159, 739-744.

Mishra, U., Vetro, C. and Kumam, P. (2016). On modified $\alpha - \varphi -$fuzzy contractive mappings and an application to integral equations. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016:67.

Mohammadi, B., Hussain, A., Parvaneh, V., Saleem, N. and Shahkoohi, R.J. (2021). Fixed point results for generalized fuzzy contractive mappings in fuzzy metric spaces with application in integral equations. *Journal of Mathematics*, Volume 2021, Article ID 9931066, 11 pages.

Musayev, B. ve Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Kütahya, Balcı Yayınları.

Nguyen, H.T. and Walker, C. and Walker, E.A. (2018). *A First Course in Fuzzy Logic*, Chapman&Hall/CRC, New York.

Picard, E. (1890). Memoire sur la théoire dés équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. *Jurnal deMathématiques pures et appliquées*, 6, 145–210.

Radenovic, S., Vetro, F. and Vujakovic, J. (2017). An alternative and easy approach to fixed-point results via simulation functions. *Demonstr. Math*. 50, 223–230.

Rakic, D., Mukheimer, A., Došenovic, T., Mitrovic, Z.D. and Radenovic, S. (2020). On some new fixed point results in fuzzy *b*-metric spaces. *J. Inequal. Appl*, 99.

Rasham, T., Marino, G., Shahzad, A., Park, C. and Shoaib, A. (2021). Fixed point results for a pair of fuzzy mappings and related applications in *b*-metric like spaces. *Adv. Differ. Equ.*, 2021:259.

Rynne, B. and Youngson, M. A. (2007). *Linear Functional Analysis*. Springer Science & Business Media.

Saadati, R. and Vaezpour, SM. (2005). Some results on fuzzy Banach spaces. *J. Appl. Math. Comput.* 17, 475-484.

Saleem, N., Abbas, M. and Raza, Z. (2017). Fixed fuzzy point results of generalized Suzuki type F-contraction mappings in ordered metric spaces. *Georgian Math. J.* 27(2), 307–320.

Salimi, P., Latif, A. and Hussain, N. (2013). Modified α-ψ-contractive mappings with applications. *Fixed Point Theory.* Article ID 151.

Samet, B., Vetro, C. and Vetro, P. (2012). Fixed Point Theorems for φ-contractive type mappings. *Nonlinear Anal*., 75, 2154-2165.

Sangurlu Sezen, M. and Turkoglu, D. (2017). Some fixed point theorems of $(F, \phi) -$ fuzzy contractıons in fuzzy metric spaces. *Journal of Inequalities and Special Functions*, 4, 10-20.

Sapena, S. (2001). A contribution to the study of fuzzy metric spaces. Applied General Topology, 2(1), 63-75.

Schwiezer, B. and Sklar, A. (1960). Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics,* 10, 314-334.

Sedghi, S., Shobkolaei, N., Došenović, T. and Radenović, S. (2018). Suzuki-type of common fixed point theorems in fuzzy metric spaces. *Mathematica Slovaca,* 68(2), 451-462.

Senocak, M. and Güner, E. (2023). Some fixed point theorems in extended fuzzy Metric spaces. *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 16(1), 67-75

Shisheng, Z. (1985). On the theory of probabilistic metric spaces with applications. *Acta Math. Sin. Engl. Ser*. 1, 366-377.

Shukla, S. and Abbas, M. (2014). Fixed point results in fuzzy metric-like spaces. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Vol. 11, No. 5, pp. 81-92.

Shukla, S., Gopal, D. and Sintunavarat, W. (2018). A new class of fuzzy contractive mappings and fixed-point theorems. *Fuzzy Sets Syst*. 50, 85–94.

Singh, V., Singh, B. and Ahlawat, A. (2023). Fixed point theorem for fuzzy-type contractions in fuzzy metric spaces. *Mapana – Journal of Sciences*, Vol. 22, No: 1, 1-11.

Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz*. Ankara, Nobel Yayın Dağıtımı.

Şen, Z. (2001). *Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri*, Bilge Sanat Yapım Yayınları, İstanbul.

Şola Erduran, F. (2020). Sabit bulanık nokta teoremleri. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 10 (3), 641-650.

Taçgın, E. (2002). Fuzzy Logic Seminer Notları, Marmara Üni. Makine Müh. Bölümü, İstanbul.

Timoty, J.R. (1997). *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, Mc Graw-Hill Book Co., Singapure.

Tiwari, V. and Som, T. (2019). Fixed points for φ-contraction in Menger probabilistic generalized metric spaces, *In Advances in Mathematical Methods and High Performance Computing. Springer, Cham.*, 201-208.

Türkoğlu, D., Alaca, C., Cho, Y. J. and Yıldız, C. (2006). Common fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 22, 411-424.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 338-353.

Zheng, D.W. and Wang, P. (2019). Meir-Keeler theorems in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst*. 370, 120–128.

Wang, G., Zhu, C. and Wu, Z. (2019). Some new coupled fixed point theorems in partially ordered complete Menger probabilistic G-metric spaces. J*ournal of Computational Analysis & Applications*. 27(1).

Wardowski, D. (2013). Fuzzy contractive mappings and fixed points in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst*., 222, 108-114.

Wong, C. K. (1974). Fuzzy Topology: Product and quotient theorems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 45, 512-521.

Wong, K.S., Salleh, Z. and Che M.I. Che Taib. (2023). Fixed-Point results for fuzzy generalized $\beta - F -$contraction mappings in fuzzy metric spaces and their applications. *Fixed Point Theory Algorithms Sci Eng*, 2023:8.

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimimi Afşin'de tamamladı. 2016 yılında lise eğitimini Eshab-ı Kehf Anadolu Lisesi'nde bitirdi. Aynı yıl içerisinde Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği bölümünde lisans eğitimine başladı, 2020 yılında ise lisans eğitimini tamamladı. 2021 yılında Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü bünyesinde Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisans eğitimine başladı. 2021-2022 eğitim-öğretim yılında Matematik öğretmeni olarak görev yapmıştır.