ANKARA
HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN KANTOROVICH STANCU OPERATÖRLERİNİN ÜSTEL FORMU İLE YAKLAŞIM

Merve KISAKOL

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Kadir KANAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

HAZİRAN 2024

ankara

HBV

İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN KANTOROVICH STANCU OPERATÖRLERİNİN ÜSTEL FORMU İLE YAKLAŞIM

MERVE KISAKOL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2024

ETİK BEYAN

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Merve KISAKOL
07.06.2024

TEZ ONAY SAYFASI

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı öğrencisi Merve KISAKOL tarafından hazırlanan İki Değişkenli Bernstein-Kantorovich-Stancu Operatörlerinin Üstel Formu İle Yaklaşım Başlıklı tez çalışması 07/06/2024 tarih ve 13.00 saatinde yapılan tez savunma sınavında aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile YÜKSEK LİSANS olarak **KABUL** edilmiştir.

	Kabul	Ret
Başkan	x	
Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ / Gazi Üniversitesi		
Üye(	x	
Doç. Dr. Kadir KANAT / Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi		
Üye	x	
Dr. Öğr. Ü. Melek SOFYALIOĞLU AKSOY / Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi		

İki Değişkenli Bernstein-Kantorovich-Stancu Operatörlerinin Üstel Formu İle Yaklaşım

(Yüksek Lisans Tezi)

Merve KISAKOL

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Haziran 2024

ÖZET

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş, ikinci bölümde temel kavramlar verilmektedir. Üçüncü bölümde ise Bernstein operatörlerinin üstel formu, dördüncü bölümde ise Bernstein-Kantorovich operatörlerinin üstel formu verilmiştir. Beşinci bölümde, iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörü, altıncı bölümde iki değişkenli Bernstein-Kantorovich-Stancu operatörü ve süreklilik modülü hesaplanmıştır, yedinci bölümde iki değişkenli Bernstein-Kantorovich-Stancu operatörünün üstel formu tanıtıldı yaklaşım özellikleri ve Voronovskaya tip teoremler verilmiştir. Sekizinci bölümde ise bölümde iki değişkenli Bernstein-Kantorovich-Stancu operatörünün üstel formunun verilen bir fonksiyona yakınsaması grafiklerle verilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Lineer Pozitif Operatörler , Korovkin Teoremi, Bernstein Kantorovich-Stancu Operatörler, Süreklilik Modülleri, Voronovskaya Tip Teorem
Sayfa Adedi : 53
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Kadir KANAT

Exponential Form of Bivariate Bernstein Kantorovich-Stancu Operators

(M.Sc. Thesis)

MERVE KISAKOL

ANKARA HACI BAYRAM VELİ UNIVERSITY

THE INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES

June 2024

ABSTRACT

This thesis consists of eight chapters. In the first part, the introduction is given, and in the second part, the basic concepts are given. The exponential form of Bernstein operators is given in the third section. In the fourth section is given the exponential form of Bernstein-Kantorovich operators. In the fifth chapter, the Bernstein-Kantorovich operator in two variables, in the sixth chapter, the Bernstein-Kantorovich-Stancu operator in two variables and the continuity module are calculated, in the seventh chapter, the exponential form of the Bernstein-Kantorovich-Stancu operator in two variables is introduced, approximation properties and Voronovskaya type theorems are given. In the eighth chapter, the convergence of the exponential form of the two-variable Bernstein-Kantorovich-Stancu operator to a given function is given graphically.

Science Code	: 20406
Key Words	: Linear Positive Operators, Korovkin Theorem, Bernstein-Kantorovich-Stancu Operators, Modulus of Continuity, Voronovskaya type theorems
Page Number	: 53
Supervisor	: Assoc. Prof. Dr. Kadir KANAT

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimlerim boyunca engin bilgileri, bilimsel yönlendirmeleri ve her konuda desteklerini benden esirgemeyen sayın danışmanım Doç. Dr. Kadir KANAT’a (Ankara Hacı bayram Veli Üniversitesi Polatlı Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü) şükranlarımı saygılarımla sunarım.

Tez çalışmalarım süresince yardım ve önerilerini benden esirgemeyen başta sayın hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Melek SOFYALIOĞLU AKSOY ve Dr. Öğr. Üyesi Emel KARACA olmak üzere tüm değerli Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Polatlı Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümü öğretim üyelerine şükranlarımı sunarım.

Bu süreçte yüksek lisans eğitimim boyunca 2210- A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı ile beni destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) ‘a en içten teşekkürlerimi saygılarımla sunarım.

Hayatımın her aşamasında beni destekleyen, fedakarlıkları ve varlıklarıyla güç bulduğum fikirleri yoluma ışık olan en büyük destekçilerim kıymetli babam Hacı KISAKOL’a, biricik annem Ayşe KISAKOL’a ve çok değerli kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Merve KISAKOL

Haziran 2024

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLARIN LİSTESİ

Tablo **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyon uzayı
$\|\|h\|\|_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ uzayında $\|\|h\|\|_{C[a,b]} = \underset{a\le x\le b}{\text{maks}} \|h(x)\|$ ile tanımlı normu
M_h	h fonksiyonuna bağlı bir sabit
$\omega(h;\delta)$	h fonksiyonunun süreklilik modülü
$[\|\lambda\|]$	$\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı
$B_n(h;x)$	Bernstein operatörü
$T_n(h;x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere lineer pozitif operatörler dizisi
$p_{n,s}(x)$	Bernstein polinomu
$\widetilde{K}_n(h;x)$	Bernstein Kantorovich operatörünün üstel formu
$K_n(h;x,y)$	İki değişkenli Benstein Kantorovich operatörleri
$K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h;x,y)$	İki değişkenli Benstein Kantorovich-Stancu operatörleri
$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,\nu}(h;x,y)$	İki değişkenli Benstein Kantorovich-Stancu Operatörlerinin üstel formu

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde amaç herhangi bir fonksiyonu daha basit ve daha çok elementer özelliğe sahip (türevlenebilme, integrallenebilme vb.) diğer fonksiyonlar yardımıyla elde edebilmektir. Matematiğin yanı sıra fizikte ve mühendislikte veri gösterimi, sinyal işleme, termografik görüntüleme gibi bir çok alan ve konuda kullanılmaktadır.

Alman matematikçi Karl Weierstrass tarafından verilen kendi ismini taşıyan Weierstrass yaklaşım teorisi ile birlikte sürekli fonksiyonlara yaklaşım probleminin temeli atılmıştır. Bu teorem kapalı ve sonlu bir $[a,b]$ aralığında sürekli her fonksiyona yine bu aralıkta düzgün olarak yakınsayan bir polinom dizisin varlığını ispat etmiştir. Borel (1905) sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşımı incelerken

$$\sum p_{n,s}(x)h\left(\frac{s}{n}\right)$$

formunda ele alıp bu biçimdeki polinomlar yardımıyla ispatı elde etmiştir. Bernstein (1912) Borel'in ispatından yola çıkarak $p_{n,s}(x)$ fonksiyonunu

$$p_{n,s}(x) = \binom{n}{s} x^s(1-x)^{n-s}$$

olarak ele almıştır ve $h \in C[0,1]$ olmak üzere,

$$B_n(f;x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s(1-x)^{n-s} h\left(\frac{s}{n}\right), \qquad x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$$

şeklinde bir polinom dizisi tanımlanmıştır.

Bohman (1952) ve Korovkin (1953) lineer pozitif operatörlerin sonlu aralıkta sürekli fonksiyona yaklaşımına ilişkin çok önemli teoremler vermişlerdir. Bernstein operatörü ile ilgili düzenli olarak makaleler yayınlanmakta ve her geçen gün yeni uygulamalar ve genellemeler keşfedilmektedir. Bunlardan bazıları [Barbosu, 2004], [Atakut ve İspir, 2004], [Mursaleen ve ark., 2016], [Chen ve ark, 2017] ve [Kajla, 2019]'dır.

İki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörleri ise [Pop and Farcas, 2009]' da verilmiştir. Bernstein Kantorovich operatörlerinin üstel formu 2018 yılında [Aral ve ark., 2018]' de verilmiştir.

Bu tezin ilk bölümünde lineer pozitif operatörler ile ilgili temel tanımlar, Korovkin teoremi ve süreklilik modülünün tanımı ve özellikleri incelenmiştir. Bununla birlikte tezin devamında Bernstein Kantorovich operatörlerinin üstel formuna ait yaklaşım sonuçları incelenecektir. Daha sonra iki değişkenli Bernstein-Kantorovich-Stancu operatörünün yaklaşım sonuçları ve süreklilik modülü hesaplanacaktır. Son olarak iki değişkenli Bernstein-Kantorovich-Stancu operatörünün üstel formunun yaklaşım sonuçları, süreklilik modülü, Voronovskaya tip teorem ile elde edilirken, verilen bir fonksiyona yakınsaması grafikler yardımı ile incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

2.1. Tanım

U ve V fonksiyon uzayları olmak üzere

$T: U \rightarrow V$

$h \rightarrow T(h) = g$ şeklinde U'deki bir h fonksiyonunun V'deki bir g fonksiyonuna dönüştüren dönüşüme operatör denir ve $\mathrm{T}(h(t); x) = g(x)$ ile de gösterilir.

2.2. Tanım

T bir operatör olsun. $\forall\, h, g \in U$ ve her $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$ için

$$T(\theta h + \gamma g) = \theta T(h) + \gamma T(g)$$

koşulu sağlanıyor ise T operatörüne lineer operatör denir.

2.3. Tanım

h bir fonksiyon ve T bir operatör olmak üzere $h \geq 0$ iken $T(h) \geq 0$ sağlanıyor ise T operatörüne pozitif operatör denir.

2.1. Lemma

Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani $g \leq h \Rightarrow T(g) \leq T(h)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat

$g \leq h$ olsun. T operatörünün pozitifliğinden $h - g \geq 0$ iken

$$T(h - g) \geq 0 \tag{2.1}$$

dir. Burada T operatörünün lineerlik özelliği kullanılarak

$$T(h - g) = T(h) - T(g) \geq 0$$

bulunur, böylece ispat tamamlanır.

2.2. Lemma

T bir lineer pozitif operatör ise

$$|T(h)| \leq T(|h|)$$

sağlanır.

İspat

Herhangi bir h fonksiyonu için

$$-|h| \leq h \leq |h| \tag{2.2}$$

gerçeklenir. Lemma 2.1. ve 2.2' den

$$T(-|h|) \leq T(h) \leq T(|h|) \tag{2.3}$$

bulunur. T lineer olduğundan $\mathrm{T}(-|h|) = -T(|h|)$'dir. Bu ifadenin (2.3)'de kullanılmasıyla

$$-T(|h|) \leq T(h) \leq T(|h|)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

2.4. Tanım

Bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. $C[a, b]$ uzayında ki norm

$h \in C[a, b]$ olmak üzere

$$\|h\|_{C[a,b]} = \operatorname*{maks}_{a \leq x \leq b} |h(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

2.5. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $h_n: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan (h_n) dizisine fonksiyon dizisi denir.

2.6. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $T_n: U \to V$, $T_n(h; x) = \big(T_n(h)\big)(x)$ şeklinde tanımlanan (T_n) dizisine operatör dizisi denir.

2.7. Tanım

Her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \operatorname*{maks}_{a\le x\le b} |h_n(x) - h(x)| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa (h_n) fonksiyonlar dizisi h fonksiyonuna $C[a,b]$ normunda düzgün yakınsaktır denir ve

$$h_n(x) \rightrightarrows h(x)$$

notasyonu ile gösterilir.

2.8. Tanım

$$T_n((t-x)^s;x)\,, \qquad \{s = 0,1,2,\dots\} \tag{2.4}$$

ile tanımlanan ifadelere (T_n) operatör dizisinin s −yıncı merkezi momentleri denir.

2.1. Teorem

$x \in [0,1]$ için $0 \le \alpha_{s,n} \le 1$ olmak üzere

$$T_n(h;x) = \sum_{s=0}^{n} h(\alpha_{s,n}) p_{n,s}(x)\,, \qquad p_{n,s}(x) \ge 0$$

pozitif lineer operatör dizisinin $T_n(h;x) \rightrightarrows h(x)$ olması için gerekli ve yeterli koşullar;

i. $T_n(1;x) \rightrightarrows 1$
ii. $T_n(t;x) \rightrightarrows x$
iii. $T_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

dır. 1953 yılında Korovkin aşağıdaki teoremi ispatlayarak, Bohman’ın koşullarının genel durumda da gerçeklediğini göstermiştir.

2.2. Teorem

$T_n: C[a,b] \to C[a,b]$ ile tanımlı T_n pozitif lineer operatör dizisi teorem 2.1‘ in koşulları gerçekleniyorsa $T_n(h;x)$ operatörü $[a,b]$ de h ye düzgün yakınsar. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - h\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \operatorname*{maks}_{a\le x\le b} |T_n(x) - h(x)| = 0$$

dır.

İspat

Kabul edelim ki, $h \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulabiliriz ki, $|t-x| \leq \delta$ için

$$|h(t)-h(x)| < \varepsilon \tag{2.5}$$

olur. (2.5) ve üçgen eşitsizliğinden

$$|h(t)-h(x)| \leq |h(t)| + |h(x)| \leq 2M_h \tag{2.6}$$

yazılabilir. Eğer $|t-x| > \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} > 1$ olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \tag{2.7}$$

olur. (2.6) ve $(2.7)'$ den

$$|h(t)-h(x)| \leq 2M_h \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde $|t-x| \leq \delta$ için

$$|h(t)-h(x)| < \varepsilon$$

ve $|t-x| > \delta$ için

$$|h(t)-h(x)| \leq 2M_h \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

olur. Dolayısıyla her $x,t \in [a,b]$ için

$$|h(t)-h(x)| < \varepsilon + 2M_h \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.8}$$

gerçeklenir. (i), (ii), (iii) koşullarını sağlayan T_n operatörlerinin

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(h)-h\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığı gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Operatörün lineerlik özelliği ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned}|T_n(h(t);x)-h(x)| &= |T_n(h(t);x)-h(x)+T_n(h(x);x)-T_n(h(x);x)| \\ &= |T_n(h(t);x)-T_n(h(x);x)+T_n(h(x);x)-h(x)| \\ &= |T_n((h(t)-h(x));x)+h(x)(T_n(1;x)-1)|\end{aligned}$$

ve

$$|T_n(h(t);x)-h(x)| \leq |T_n((h(t)-h(x));x)| + |h(x)||T_n(1;x)-1|$$

yazılır. Lemma 2.2' den

$$|T_n(h(t);x)-h(x)| \leq T_n((|h(t)-h(x)|);x) + |h(x)||T_n(1;x)-1|$$

olup (2.5)' den

$$|T_n(h(t);x)-h(x)| \leq T_n(|h(t)-h(x)|;x) + M_h|T_n(1;x)-1|$$

yazılır. T_n operatörünün monotonluğundan ve (2.8)' den

$$|T_n(h(t);x)-h(x)| \leq T_n\left(\varepsilon + 2\frac{M_h}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) + M_h|T_n(1;x)-1| \qquad (2.9)$$

elde edilir.

Diğer taraftan T_n lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
T_n\left(\varepsilon + 2\frac{M_h}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) &= T_n(\varepsilon;x) + T_n\left(2\frac{M_h}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) \\
&= \varepsilon T_n(1;x) + 2\frac{M_h}{\delta^2}T_n(t^2-2xt+x^2;x) \\
&= \varepsilon T_n(1;x) + 2\frac{M_h}{\delta^2}\{T_n(t^2;x)-x^2-x^2 \\
&\quad +2x^2-2xT_n(t;x)+x^2T_n(1;x)\} \\
&= \varepsilon T_n(1;x) + 2\frac{M_h}{\delta^2}\{T_n(t^2;x)-x^2+2x^2 \\
&\quad -2xT_n(t;x)+x^2T_n(1;x)-x^2\} \\
&= \varepsilon T_n(1;x) + 2\frac{M_h}{\delta^2}\{(T_n(t^2;x)-x^2) \\
&\quad +2x\big(x-T_n(t;x)\big)+x^2(T_n(1;x)-1)\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son ifade (2.9)' da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|T_n(h(t);x)-h(x)| \leq{}& \varepsilon T_n(1;x) + 2\frac{M_h}{\delta^2}\{(T_n(t^2;x)-x^2)+2x\big(x-T_n(t;x)\big) \\
&+x^2(T_n(1;x)-1)\} + M_h|(T_n(1;x)-1)| \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(i), (ii), (iii) koşullarının $(2.10)'$ da kullanılmasıyla

$$\|T_n(h)-h\| = \lim_{n\to\infty}\left\{\operatorname*{maks}_{a\le x\le b}|T_n(h;x)-h(x)|\right\} = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

2.9. Tanım

$h \in C[a,b]$ olsun. $\forall\, \delta > 0$ için

$$\omega(h;\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\ |t-x|\le\delta}} |h(t)-h(x)| \tag{2.11}$$

ile tanımlanan $\omega(h;\delta)$ ifadesine h fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\omega(h;\delta) \ge 0$
ii. $\delta_1 \le \delta_2$ ise, o zaman $\omega(h;\delta_1) \le \omega(h;\delta_2)$
iii. $\mu \in \mathbb{N}$ için $\omega(h;\mu\delta) = \mu\omega(h;\delta)$
iv. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(h;\lambda\delta) \le (1+\lambda)\omega(h;\delta)$
v. $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(h;\delta) = 0$
vi. $\omega(h;|t-x|) \ge |h(t)-h(x)|$
vii. $|h(t)-h(x)| \le \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(h;\delta)$.

İspat

i. Süreklilik modülü, tanımı gereğince bir mutlak değerin supremumu olduğundan ispat açıktır.
ii. $\delta_1 \le \delta_2$ için $|t-x| \le \delta_2$ bölgesinin $|t-x| \le \delta_1$ bölgesinden daha büyük olduğu açıktır. Bölge büyüdükçe alınan supremum büyüyeceğinden ispat tamamlanır.
iii. Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(h;\mu\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\ |t-x|\le\mu\delta}} |h(t)-h(x)|$$

yazılır. Burada

$$|t-x| \le \mu\delta \Rightarrow x-\mu\delta \le t \le x+\mu\delta$$

olup, $t = x + \mu h$ seçimiyle $|h| \leq \delta$ ve

$$\omega(h; \mu\delta) = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |h(x + \mu h) - h(x)|$$

şeklinde yazılır.

Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |h(x + \mu h) - h(x)| = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{\zeta=0}^{\mu-1} [h(x + (\zeta + 1)h) - h(x + \zeta h)] \right|$$

olup eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |h(x + \mu h) - h(x)| &\leq \sum_{\zeta=0}^{\mu-1} \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |h(x + (\zeta + 1)h) - h(x + \zeta h)| \\ &\leq \omega(h; \delta) + \cdots + \omega(h; \delta) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\omega(h; \mu\delta) \leq \mu\omega(h; \delta)$$

elde edilir.

iv. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmını $[|\lambda|]$ ile gösterilirse

$$[|\lambda|] \leq \lambda < [|\lambda|] + 1$$

eşitsizliklerinin yazılabileceği açıktır. O halde bu eşitsizlikleri ve $\omega(h; \delta)$'nın azalmayan fonksiyon olmasını kullanarak

$$\omega(h; \lambda\delta) \leq \omega(h; ([|\lambda|] + 1)\delta)$$

eşitsizliği yazılır. $[|\lambda|]$ pozitif bir tam sayı olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliği uygulanır. Bu durumda

$$\omega(h; ([|\lambda|] + 1)\delta) \leq ([|\lambda|] + 1)\omega(h; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için

$$[|\lambda|] + 1 \leq \lambda + 1$$

Olduğundan

$$\omega(h;([|\lambda|]+1)\delta) \leq (\lambda+1)\omega(h;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak

$$\omega(h;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(h;\delta)$$

yazılır. İspat tamamlanır.

v. $|t-x| \leq \delta$ eşitsizliğindeki δ'nın sıfıra yaklaşması $t \to x$ olması anlamına gelir. h fonksiyonu sürekli olduğundan süreklilik tanımına göre $t \to x$ için $|h(t)-h(x)| \to 0$

olduğundan ispat açıktır.

vi. $\omega(h;\delta)$ ifadesinde $\delta = |t-x|$ seçilirse

$$\omega(h;|t-x|) = \sup_{x\in[a,b]} |h(t)-h(x)|$$

elde edilir. O halde $|h(t)-h(x)|$' lerin supremumu $\omega(h;|t-x|)$ olacağından ispat aşikardır.

vii. (vi) özelliğinden

$$|h(t)-h(x)| \leq \omega\left(h;\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)$$

yazılır. Bu eşitsizlikte (iv) özelliği kullanılırsa

$$|h(t)-h(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(h;\delta)$$

bulunur. İspat tamamlanır.

2.3. Teorem

$h(x,y) \in C(a,b;c,d)$ ve tüm reel eksende $|h(x,y)| \leq M_h$ olsun. $T_n(h(t,r);x,y)$ lineer pozitif operatörleri için düzgün olarak

i) $T_n(1;x,y) \rightrightarrows 1$

ii) $T_n(t;x,y) \rightrightarrows x$

iii) $T_n(r;x,y) \rightrightarrows y$

iv) $T_n(t^2+r^2;x,y) \rightrightarrows x^2+y^2$

koşulları sağlanıyorsa

$$T_n(h(t,r);x,y) \rightrightarrows h(x,y)$$

olur.

İspat

$h(x,y) \in C(a,b;c,d)$ olduğundan $\forall\, \varepsilon > 0$ için öyle bir δ vardır ki $|(x,y)-(t,r)| < \delta$ yani

$\sqrt{(x-t)^2+(y-r)^2} < \delta$ iken $|h(t,r)-h(x,y)| < \varepsilon$ sağlanır.

Ayrıca $\sqrt{(x-t)^2+(y-r)^2} \geq \delta$ iken $\frac{(x-t)^2+(y-r)^2}{\delta^2} \geq 1$ olur,

$|h(x,y)| \leq M_h$ olduğunun kullanılmasıyla

$$|h(t,r)-h(x,y)| \leq 2M_h\left[\frac{(x-t)^2+(y-r)^2}{\delta^2}\right]$$

yazılır. O halde

$$|h(t,r)-h(x,y)| \leq \varepsilon + 2M_h\left[\frac{(x-t)^2+(y-r)^2}{\delta^2}\right]$$

$$= \varepsilon + \frac{2M_h}{\delta^2}\left[x^2+y^2-2(xt-yr)+t^2+r^2\right] \quad (2.12)$$

yazılır. Diğer yandan T_n operatörlerin lineerliği ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$|T_n(h(t,r);x,y)-h(x,y)| \leq |T_n((h(t,r)-h(x,y));x,y)|$$

$$+|h(x,y)||T_n(1;x,y)-1|$$

$$\leq |T_n((h(t,r)-h(x,y));x,y)| + M_h|T_n(1;x,y)-1| \quad (2.13)$$

elde edilir. T_n operatörlerinin monotonluğundan

$$|T_n(h(t,r);x,y)-h(x,y)| \leq T_n(|h(t,r)-h(x,y)|;x,y)$$

yazılır. (2.12)’ nın (2.13)’ de kullanılması ve operatörün lineerliğinden

$$|T_n(h(t,r);x,y) - h(x,y)|$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon(T_n(1;x,y) - 1) + \frac{2M_h}{\delta^2}[(x^2 + y^2)(T_n(1;x,y) - 1)$$

$$-2x\,(T_n(t;x,y) - x) - 2y\,(T_n(r;x,y) - y)$$

$$+(T_n(t^2 + r^2;x,y) - (x^2 + y^2))] \qquad (2.14)$$

yazılır. (2.14)' nın (2.12)' de kullanılmasıyla ve (i) , (ii), (iii) ve (iv) koşullarının kullanılmasıyla

$$|T_n((h(t,r) - h(x,y));x,y)| \leq \varepsilon$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

3. BERNSTEIN OPERATÖRÜNÜN ÜSTEL FORMU

Bernstein operatörünün üstel formu Aral ve ark. tarafından 2018 yılında verildi.

Bernstein operatörünün üstel formu,

$x \in [0,1]$, $h \in C[0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} G_n h(x) &= e^{\alpha x} B_n\left(\frac{h}{e^{\alpha}}; a_n(x)\right) \\ &= e^{\alpha x} \sum_{s=0}^{n} p_{n,s}\big(a_n(x)\big) h\left(\frac{s}{n}\right) e^{-\frac{\alpha s}{n}}, \end{aligned}$$

burada,

$$p_{n,s}\big(a_n(x)\big) = \binom{n}{s} \big(a_n(x)\big)^{s} \big(1 - a_n(x)\big)^{n-s}$$

ve

$$a_n(x) = \frac{e^{\alpha x/n} - 1}{e^{\alpha/n} - 1} \tag{3.1}$$

dir.

3.1. Lemma

$G_n(h; x)$ operatörü için,

i) $G_n(1; x) = e^{\alpha(x-1)} \left(e^{\frac{\alpha}{n}} + 1 - e^{\frac{\alpha x}{n}}\right)^{n}$,

ii) $G_n(e^{t}; x) = e^{\alpha x}$,

iii) $G_n(e^{2t}; x) = e^{2\alpha x}$,

iv) $G_n(e^{3t}; x) = e^{\alpha x} \left(e^{\frac{\alpha(x+1)}{n}} + e^{\frac{\alpha x}{n}} - e^{\frac{\alpha}{n}}\right)^{n}$,

v) $G_n(e^{4t}; x) = e^{\alpha x} \left(e^{\frac{\alpha(x+2)}{n}} + e^{\frac{\alpha(x+1)}{n}} + e^{\frac{\alpha x}{n}} - e^{\frac{\alpha}{n}} - e^{\frac{2\alpha}{n}}\right)^{n}$,

eşitlikleri gerçekleşir.

İspat

(i) $h(t) = 1$ için,

$$G_n(1; x) = \sum_{s=0}^{n} e^{-\alpha\left(\frac{s}{n}-x\right)} p_{n,s}\big(a_n(x)\big)$$

$$= \sum_{s=0}^{n} e^{-\alpha\left(\frac{s}{n}-x\right)} \binom{n}{s} \big(a_n(x)\big)^s \big(1 - a_n(x)\big)^{n-s}$$

$$= e^{\alpha x} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \left(a_n(x) e^{-\frac{\alpha}{n}}\right)^s \big(1 - a_n(x)\big)^{n-s}$$

$$= e^{\alpha x} \left(a_n(x) e^{-\frac{\alpha}{n}} + 1 - a_n(x)\right)^n$$

$$= e^{\alpha x} \left(a_n(x) \left(e^{-\frac{\alpha}{n}} - 1\right) + 1\right)^n$$

$$= e^{\alpha x} \left(\left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{n}} - 1}{e^{\frac{\alpha}{n}} - 1}\right) \left(e^{-\frac{\alpha}{n}} - 1\right) + 1\right)^n$$

$$= e^{\alpha x} \left(\left(\frac{1 - e^{\frac{\alpha x}{n}}}{e^{\frac{\alpha}{n}}}\right) + 1\right)^n$$

$$= e^{\alpha(x-1)} \left(e^{\frac{\alpha}{n}} + 1 - e^{\frac{\alpha x}{n}}\right)^n$$

olarak elde edilir.

(ii) $h(t) = e^{\alpha t}$ olsun,

$$G_n(e^{\alpha t}; x) = e^{\alpha x} \sum_{s=0}^{n} e^{\frac{-\alpha s}{n}} e^{\frac{\alpha s}{n}} p_{n,s}\big(a_n(x)\big)$$

$$= e^{\alpha x} \sum_{s=0}^{n} p_{n,s}\big(a_n(x)\big)$$

$$= e^{\alpha x}$$

olarak elde edilir.

(iii) $h(t) = e^{2\alpha t}$ olsun,

$$G_n(e^{2\alpha t}; x) = e^{\alpha x} \sum_{s=0}^{n} e^{\frac{-\alpha s}{n}} e^{\frac{2\alpha s}{n}} p_{n,s}\big(a_n(x)\big)$$

$$= e^{\alpha x} \sum_{s=0}^{n} e^{\frac{\alpha s}{n}} p_{n,s}\big(a_n(x)\big)$$

$$= e^{\alpha x} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \left(a_n(x) e^{\frac{\alpha}{n}}\right)^{s} \big(1 - a_n(x)\big)^{n-s}$$

$$= e^{\alpha x} \left(a_n(x) \ \left(e^{\frac{\alpha}{n}} - 1\right) + 1\right)^{n}$$

$$= e^{\alpha x} \left(\left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{n}} - 1}{e^{\frac{\alpha}{n}} - 1} \right) \left(e^{\frac{\alpha}{n}} - 1\right) + 1 \right)^{n}$$

$$= e^{2\alpha x}$$

olarak elde edilir.

4. BERNSTEIN-KANTOROVICH OPERATÖRÜNÜN ÜSTEL FORMU

Bernstein-Kantorovich operatörünün üstel formu Aral ve ark. tarafından 2019 yılında,

$n \in \mathbb{N}, \alpha, \mu > 0$ ve $x \in [0,1]$, $\widetilde{K}_n: C[0,1] \to [0,1]$, $h \in C[0,1]$ için

$$\widetilde{K}_n(h;x) = a'_{n+1}(x)(n+1)e^{\mu x} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (a_{n+1}(x))^s \left(1 - a_{n+1}(x)\right)^{n-s}$$

$$\times \int_{\frac{s}{n+1}}^{\frac{s+1}{n+1}} e^{-\mu t} h(t)dt$$

biçiminde verilir. Burada $a'_{n+1}(x)$ fonksiyonu (3.1) ile verilen ifadenin türevidir.

4.1. Lemma

$\widetilde{K}_n(.\,;x)$ operatörü için;

i) $$\widetilde{K}_n(1;x) = e^{\frac{\mu(x-n-1)}{n+1}} e^{\mu x} \left(e^{\frac{\mu}{n+1}} + 1 - e^{\frac{\mu x}{n+1}}\right)^n$$

ii) $$\widetilde{K}_n(e^{\mu t};x) = \frac{\mu}{n+1} \frac{e^{\frac{\mu x}{n+1}}}{e^{\frac{\mu}{n+1}} - 1} e^{\mu x}$$

iii) $$\widetilde{K}_n(e^{2\mu t};x) = e^{2\mu x}$$

iv) $$\widetilde{K}_n(e^{3\mu t};x) = \frac{1}{2} e^{\mu x + \frac{\mu x}{n+1}} \left(1 + e^{\frac{\mu}{n+1}}\right) \left(-e^{\frac{\mu}{n+1}} + e^{\frac{\mu x}{n+1}} + e^{\frac{\mu}{n+1} + \frac{\mu x}{n+1}}\right)^n$$

v) $$\widetilde{K}_n(e^{4\mu t};x) = \frac{1}{3} e^{\mu x + \frac{\mu x}{n+1}} \left(1 + e^{\frac{\mu}{n+1}} + e^{\frac{2\mu}{n+1}}\right)$$

$$\times \left(-e^{\frac{\mu}{n+1}} - e^{\frac{2\mu}{n+1}} + e^{\frac{\mu x}{n+1}} + e^{\frac{2\mu}{n+1} + \frac{\mu x}{n+1}} e^{\frac{\mu}{n+1} + \frac{\mu x}{n+1}}\right)^n$$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat

(i) $h(t) = 1$ için,

$$\widetilde{K}_n(1;x) = a'_{n+1}(x)(n+1)e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(a_{n+1}(x))^s\big(1-a_{n+1}(x)\big)^{n-s}\int_{\frac{s}{n+1}}^{\frac{s+1}{n+1}} e^{-\mu t}dt$$

$$= a'_{n+1}(x)(n+1)e^{\mu x}\textstyle\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(a_{n+1}(x))^s\big(1-a_{n+1}(x)\big)^{n-s}$$

$$\times\left(\frac{e^{\frac{-\mu(s+1)}{n+1}} - e^{\frac{-\mu s}{n+1}}}{-\mu}\right)$$

$$= a'_{n+1}(x)(n+1)e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(a_{n+1}(x))^s\big(1-a_{n+1}(x)\big)^{n-s}$$

$$\times e^{\frac{-\mu s}{n+1}}\left(\frac{1- e^{\frac{-\mu}{n+1}}}{\mu}\right)$$

$$= e^{\frac{\mu(x-1)}{n+1}}e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\left(a_{n+1}(x)e^{-\frac{\mu}{n+1}}\right)^s\big(1-a_{n+1}(x)\big)^{n-s}$$

$$= e^{\frac{\mu(x-n-1)}{n+1}}e^{\mu x}\left(e^{\frac{\mu}{n+1}} + 1 - e^{\frac{\mu x}{n+1}}\right)^n$$

(ii) $h(t) = e^{\mu t}$ için,

$$\widetilde{K}_n(e^{\mu t};x) = a'_{n+1}(x)(n+1)e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(a_{n+1}(x))^s\big(1-a_{n+1}(x)\big)^{n-s}\int_{\frac{s}{n+1}}^{\frac{s+1}{n+1}} dt$$

$$= a'_{n+1}(x)e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(a_{n+1}(x))^s\big(1-a_{n+1}(x)\big)^{n-s}$$

$$= \frac{\mu}{n+1}\frac{e^{\mu x/(n+1)}}{\left(e^{\frac{\mu}{n+1}} - 1\right)}e^{\mu x}$$

(iii) $h(t) = e^{2\mu t}$ için,

$$\widetilde{K}_n(e^{2\mu t};x) = a'_{n+1}(x)(n+1)e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(a_{n+1}(x))^s\big(1-a_{n+1}(x)\big)^{n-s}\int_{\frac{s}{n+1}}^{\frac{s+1}{n+1}} e^{\mu t}dt$$

$$= a'_{n+1}(x)(n+1)e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(a_{n+1}(x))^s\big(1-a_{n+1}(x)\big)^{n-s}$$

$$\times\left(\frac{e^{\frac{\mu(s+1)}{n+1}}-e^{\frac{\mu s}{n+1}}}{\mu}\right)$$

$$= a'_{n+1}(x)(n+1)e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(a_{n+1}(x))^s\big(1-a_{n+1}(x)\big)^{n-s}e^{\frac{\mu s}{n+1}}$$

$$\times\left(\frac{e^{\frac{\mu}{n+1}}-1}{\mu}\right)$$

$$= e^{\mu x/(n+1)}e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\left(a_{n+1}(x)\,e^{\frac{\mu}{n+1}}\right)^s\big(1-a_{n+1}(x)\big)^{n-s}$$

$$= e^{2\mu x}$$

olup, ispat tamamlanır.

4.2. Lemma

$\widetilde{K}_n(.\,;x)$ operatörü için aşağıdaki limitler gerçeklenir.

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{K}_n(1;x) = 1$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{K}_n(e^{\mu t};x) = e^{\mu x}$

4.1. Teorem

Her $x \in [0,1]$ ve $h \in C[0,1]$ için $\widetilde{K}_n$ operatörleri

$$\widetilde{K}_n(h;x) \rightrightarrows h(x)$$

düzgün yakınsar.

İspat

Lemma 3.2 yardımıyla

i) $\widetilde{K}_n(1;x) \rightrightarrows 1$

ii) $\widetilde{K}_n(e^{\mu t};x) \rightrightarrows e^{\mu x}$

iii) $\widetilde{K}_n(e^{2\mu t};x) \rightrightarrows e^{2\mu t}$

olur böylece Teorem 2.1‘ den ispat tamamlanır.

5. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-KANTOROVICH OPERATÖRLERİ

İki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörlerini 2009 yılında Pop ve Farcas tarafından verilmiştir. $L_1([0,1]\times[0,1])$ ağırlıklı uzayında $n\in\mathbb{N}, h\in L_1([0,1]\times[0,1])$, $K_n: L_1(S)\to C([0,1]\times[0,1])$ ve $(x,y)\in[0,1]$ için

$$K_n(h;x,y)=(n+1)^2\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-s}p_{n,s,j}(x,y)\int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}}\int_{\frac{s}{n+1}}^{\frac{s+1}{n+1}}h(t,s)\,dtds\ ,\qquad s,j\geq 0$$

şeklinde verilir. Burada,

$$p_{n,s,j}(x,y)=\binom{n}{s}\binom{n-s}{j}x^s y^j(1-x-y)^{n-s-j}$$

dir.

5.1. Lemma

$K_n(h;x,y)$ operatörü için,

i) $K_n(1;x,y)=1$,

ii) $K_n(t;x,y)=\frac{2nx+1}{2(n+1)}$,

iii) $K_n(s;x,y)=\frac{2yn+1}{2(n+1)}$,

iv) $K_n(t^2;x,y)=\frac{3x^2n(n-1)+6nx+1}{3(n+1)^2}$,

v) $K_n(s^2;x,y)=\frac{3y^2n(n-1)+6ny+1}{3(n+1)^2}$.

İspat

(i) $h(t,s)=1$ için,

$$K_n(1;x,y)=(n+1)^2\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-s}p_{n,s,j}(x,y)\int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}}\int_{\frac{s}{n+1}}^{\frac{s+1}{n+1}}dtds$$

$$=\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-s}p_{n,s,j}(x,y)$$

$$=1$$

olarak elde edilir.

(ii) $h(t,s) = t$ için,

$$K_n(t;x,y) = (n+1)^2 \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-s} p_{n,s,j}(x,y) \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} \int_{\frac{s}{n+1}}^{\frac{s+1}{n+1}} t\,dtds$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-s} p_{n,s,j}(x,y)\,(2s+1)$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \left(\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-s} \binom{n}{s} \binom{n-s}{j} x^s y^j (1-x-y)^{n-s-j}\, 2s \right)$$

$$+ \frac{1}{2(n+1)} \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-s} p_{n,s,j}(x,y)$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \left(2\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s (1-x)^{n-s} s + \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-s} p_{n,s,j}(x,y) \right)$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \left(2\sum_{s=1}^{n} \frac{n!}{(n-s)!\,(s-1)!} x^s (1-x)^{n-s} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \left(2\sum_{s=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-s-1)!\,s!} x^{s+1} (1-x)^{n-s-1} + 1 \right)$$

$$= \frac{2nx+1}{2(n+1)}$$

olarak elde edilir.

(iii) $h(t,s) = s$ için,

$$K_n(t;x,y) = (n+1)^2 \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-s} p_{n,s,j}(x,y) \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} \int_{\frac{s}{n+1}}^{\frac{s+1}{n+1}} s\,dtds$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-s} \binom{n}{s} \binom{n-s}{j} x^s y^j (1-x-y)^{n-s-j}\,(2j+1)$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{s=0}^{n} 2\binom{n}{s} x^s \sum_{j=0}^{n-s} \frac{(n-s)!}{(n-s-j)!\,j!} y^j (1-x-y)^{n-s-j} j + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{s=0}^{n} 2\binom{n}{s} x^s \sum_{j=1}^{n-s} \frac{(n-s)!}{(n-s-j)!\,(j-1)!}\, y^j (1-x-y)^{n-s-j} + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{s=0}^{n} 2\binom{n}{s} x^s \sum_{j=0}^{n-s-1} \frac{(n-s)!}{(n-s-j-1)!\,j!}\, y^{j-1} (1-x-y)^{n-s-j-1}$$

$$+ \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2yn+1}{2(n+1)}$$

olarak elde edilir.

(iv) $h(t,s) = t^2$ için,

$$K_n(t;x,y) = (n+1)^2 \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-s} p_{n,s,j}(x,y) \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} \int_{\frac{s}{n+1}}^{\frac{s+1}{n+1}} t^2 \, dtds$$

$$= \frac{1}{3(n+1)^2} \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-s} p_{n,s,j}(x,y)(3s^2+3s+1)$$

$$= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{s=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-s} p_{n,s,j}(x,y) 3s^2 + \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-s} p_{n,s,j}(x,y) 3s \right)$$

$$+ \frac{1}{3(n+1)^2} \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-s} p_{n,s,j}(x,y)$$

$$= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} 3s^2 x^s (1-x)^{n-s} + \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} 3s x^s (1-x)^{n-s} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{(n-s)!\,s!} 3s^2 x^s (1-x)^{n-s} \right)$$

$$+ \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{(n-s)!\,s!} 3s x^s (1-x)^{n-s} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{n!}{(n-s)!\,(s-1)!} 3s x^s (1-x)^{n-s} + 3nx + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-s-1)!\,s!} 3(s+1) x^{s+1} (1-x)^{n-s-1} + 6nx + 4 \right)$$

$$= \frac{1}{3(n+1)^2}\left(\sum_{s=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-s-1)!\,s!}3s\,x^{s+1}(1-x)^{n-s-1}\right.$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-s-1)!\,s!}3x^{s+1}(1-x)^{n-s-1}+3nx+1\right)$$

$$= \frac{1}{3(n+1)^2}\left(\sum_{s=1}^{n-1}\frac{n!}{(n-s-1)!\,(s-1)!}3\,x^{s+1}(1-x)^{n-s-1}+6nx+1\right)$$

$$= \frac{1}{3(n+1)^2}\left(\sum_{s=0}^{n-2}\frac{n!}{(n-s-2)!\,s!}3\,x^{s+2}(1-x)^{n-s-2}+9nx+4\right)$$

$$= \frac{3x^2n(n-1)+6nx+1}{3(n+1)^2}$$

olarak bulunur benzer şekilde $h(t,s)=s^2$' de elde edilir.

5.2. Lemma

$K_n(h;x,y)$ operatörü için,

i) $\lim_{n\to\infty} K_n(t;x,y)=x$,

ii) $\lim_{n\to\infty} K_n(s;x,y)=y$,

iii) $\lim_{n\to\infty} K_n(t^2;x,y)=x^2$,

iv) $\lim_{n\to\infty} K_n(s^2;x,y)=y^2$

eşitlikleri gerçeklenir.

5.1 Teorem

Her $h(x,y)\in C([0,1]\times[0,1])$ için $K_n(h;x,y)$ operatörü $h(x,y)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar

$$K_n(h;x,y)\ \rightrightarrows h(x,y).$$

İspat

Lemma 5.2 , Teorem 2.2 ve operatörün lineerliğinden ispat tamamlanır.

6. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-KANTOROVICH-STANCU OPERATÖRLERİ

İki değişkenli Bernstein-Kantorovich-Stancu operatörü ise,

$h \in ([0,1] \times [0,1]), (s,t) \in [0,1], m,n \in \mathbb{N}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2), 0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1,\ 0 \leq \alpha_2 \leq \beta_2$ için,

$$K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h;x,y) = (m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)$$

$$\times \sum_{s=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(x,y) \int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}} \int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} h(t,s)\, dtds$$

ve

$$p_{m,n,s,l}(x,y) = \binom{m}{s}\binom{n}{l} x^s (1-x)^{m-s} y^l (1-y)^{n-l},$$

olarak tanımlanır.

6.1. Lemma

İki değişkenli Bernstein-Kantorovich-Stancu operatörleri lineer ve pozitiftir.

İspat

$h, g \in ([0,1] \times [0,1]), (s,t) \in [0,1], m,n \in \mathbb{N}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2), 0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1,\ 0 \leq \alpha_2 \leq \beta_2$ $p_{m,n,s,l}(x,y) \geq 0$ için $K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h;x,y)$ operatörleri pozitiftir.

$$K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h+g;x,y) = (m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1) \sum_{s=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(x,y)$$

$$\times \int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}} \int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} \big(h(t,s)+g(t,s)\big) dtds$$

$$= (m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(x,y)$$

$$\times\left(\int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} h(t,s)\,dtds+\int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} g(t,s)\,dtds\right)$$

$$= (m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(x,y)\int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} h(t,s)\,dtds$$

$$+(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(x,y)\int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} g(t,s)\,dtds$$

$$= K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h;x,y)+K_{m,n}^{\alpha,\beta}(g;x,y)$$

o halde $K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h+g;x,y)$ operatörü lineerdir.

6.2. Lemma

$K_{m,n}^{\alpha,\beta}(.\,;x,y)$ operatörü için;

i) $K_{m,n}^{\alpha,\beta}(1;x,y)=1,,$

ii) $K_{m,n}^{\alpha,\beta}(t\,;x,y)=\frac{2\alpha_1+1}{2(m+\beta_1+1)}+\frac{m}{m+\beta_1+1}x,$

iii) $K_{m,n}^{\alpha,\beta}(s\,;x,y)=\frac{2\alpha_2+1}{2(n+\beta_2+1)}+\frac{n}{n+\beta_2+1}y,$

iv) $K_{m,n}^{\alpha,\beta}(t^2\,;x,y)=\frac{m(m-1)}{(m+\beta_1+1)^2}x^2+\frac{m(2\alpha_1+1)}{(m+\beta_1+1)^2}x+\frac{(\alpha_1+1)^2+2\alpha_1^2+\alpha_1}{(m+\beta_1+1)^2},$

v) $K_{m,n}^{\alpha,\beta}(s\,;x,y)=\frac{n(n-1)}{(n+\beta_2+1)^2}y^2+\frac{n(2\alpha_2+1)}{(n+\beta_2+1)^2}y+\frac{(\alpha_2+1)^2+2\alpha_2^2+\alpha_2}{(n+\beta_2+1)^2}$

eşitlikleri gerçekleşir.

İspat

(i) $h(t,s)=1$ için,

$$K_{m,n}^{\alpha,\beta}(1;x,y)=(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)\int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}}dtds$$

$$=(m+\beta_1+1)\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)\left(\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}-\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}\right)$$

$$=\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)$$

$$=1.$$

(ii) $h(t,s)=t$ için,

$$K_{m,n}^{\alpha,\beta}(t;x,y)=(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)\int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}}t\,dtds$$

$$=\frac{(m+\beta_1+1)}{2}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)\left(\left(\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}\right)^2-\left(\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2(m+\beta_1+1)}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)\,(2s+2\alpha_1+1)$$

$$=\frac{1}{(m+\beta_1+1)}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)\,k+\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}\right)$$

$$\times\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)$$

$$=\frac{1}{m+\beta_1+1}\sum_{s=0}^{m}\frac{m!}{(m-s)!\,s!}x^s(1-x)^{m-s}\,s+\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}\right)$$

$$= \frac{1}{m+\beta_1+1}\sum_{s=1}^{m}\frac{m!}{(m-s)!\,(s-1)!}x^s(1-x)^{m-s} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}\right)$$

$$= \frac{1}{m+\beta_1+1}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{m!}{(m-s-1)!\,k!}x^{s+1}(1-x)^{m-s-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}\right)$$

$$= \frac{mx}{m+\beta_1+1} + \frac{1}{2}\frac{2\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}.$$

(iii) $h(t,s) = t^2$ için,

$$K_{m,n}^{\alpha,\beta}(t^2;x,y) = (m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)$$

$$\times \int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} x^2\,dtds$$

$$= \frac{(m+\beta_1+1)}{3}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)\left(\left(\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}\right)^3 - \left(\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{3(m+\beta_1+1)^2}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)\,(3s^2+s(6\alpha_1+3)+3{\alpha_1}^2+3\alpha_1+1\,)$$

$$= \frac{1}{(m+\beta_1+1)^2}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)\,s^2 + \frac{(2\alpha_1+1)}{(m+\beta_1+1)^2}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(x,y)\,s$$

$$+ \frac{3{\alpha_1}^2+3\alpha_1+1}{3(m+\beta_1+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(m+\beta_1+1)^2}\sum_{s=1}^{m}\frac{m!}{(m-s)!\,(s-1)!}x^s(1-x)^{m-s}s$$

$$+ \frac{(2\alpha_1+1)}{(m+\beta_1+1)^2}\sum_{s=1}^{m}\frac{m!}{(m-s)!\,(s-1)!}x^s(1-x)^{m-s}$$

$$+ \frac{3{\alpha_1}^2+3\alpha_1+1}{3(m+\beta_1+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(m+\beta_1+1)^2}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{m!}{(m-s-1)!\,s!}x^{s+1}(1-x)^{m-s-1}(s+1)$$

$$+\frac{(2\alpha_1+1)}{(m+\beta_1+1)^2}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{m!}{(m-s-1)!\,s!}x^{s+1}(1-x)^{m-s-1}$$

$$+\frac{3{\alpha_1}^2+3\alpha_1+1}{3(m+\beta_1+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(m+\beta_1+1)^2}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{m!}{(m-s-1)!\,s!}x^{s+1}(1-x)^{m-s-1}s+\frac{ms}{(m+\beta_1+1)^2}$$

$$+\frac{(2\alpha_1+1)ms}{(m+\beta_1+1)^2}+\frac{3{\alpha_1}^2+3\alpha_1+1}{3(m+\beta_1+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(m+\beta_1+1)^2}\sum_{s=1}^{m-1}\frac{m!}{(m-s-1)!\,(s-1)!}x^{s+1}(1-x)^{m-s-1}+\frac{ms}{(m+\beta_1+1)^2}$$

$$+\frac{(2\alpha_1+1)ms}{(m+\beta_1+1)^2}+\frac{3{\alpha_1}^2+3\alpha_1+1}{3(m+\beta_1+1)^2}$$

$$=\frac{m(m-1)x^2}{(m+\beta_1+1)^2}+\frac{mx(2\alpha_1+2)}{(m+\beta_1+1)^2}+\frac{3{\alpha_1}^2+3\alpha_1+1}{3(m+\beta_1+1)^2}$$

bulunur ve benzer şekilde $K_{m,n}^{\alpha,\beta}(s\,;x,y)$ ve $K_{m,n}^{\alpha,\beta}(s^2\,;x,y)$ ifadeleri ispatlanır.

6.3. Lemma

İki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülü

$$\omega(h;\delta)=\sup\{|h(t,s)-h(x,y)|:(t,s)\in S,\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2}\le\delta\}$$

olmak üzere

$$\delta^2=K_{m,n}^{\alpha,\beta}((t-x)^2+(s-y)^2\,;x,y)$$

için

$$|\,K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h\,;x,y)-h(x,y)\,|\le 2\,\omega(h;\delta)$$

dır.

İspat:

$K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h\,; x, y)$ operatörleri için

$$| \, K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h\,; x, y) - h(x, y) \, |$$

$$= \left| (m + \beta_1 + 1)(n + \beta_2 + 1) \sum_{s=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(x, y) \int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}} \int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} h(t, s)\, dtds - h(x, y) \right|$$

dır. Burada $K_{m,n}^{\alpha,\beta}(1\,; x, y) = 1$ olduğundan,

$$= \left| (m + \beta_1 + 1)(n + \beta_2 + 1) \sum_{s=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(x, y) \int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}} \int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} h(t, s) - h(x, y)\, dtds \right|$$

$$\leq (m + \beta_1 + 1)(n + \beta_2 + 1) \sum_{s=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(x, y) \times \int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}} \int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} |h(t, s) - h(x, y)| \, dtds$$

$$\leq (m + \beta_1 + 1)(n + \beta_2 + 1) \sum_{s=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(x, y) \times \int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}} \int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} \left(\sup_{\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2} \leq \delta} (|h(t, s) - h(x, y)|) \right) dtds$$

$$\leq \left(1+\frac{K_{m,n}^{\alpha,\beta}((t-x)^2+(s-y)^2\,;x,y)}{\delta^2}\right)\omega(h;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. $K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h\,;x,y)$ operatörlerinin lineerliğinden

$$|\,K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h\,;x,y)-h(x,y)\ \leq (\,1+\frac{K_{m,n}^{\alpha,\beta}(t^2\,;x,y)-K_{m,n}^{\alpha,\beta}(2tx;x,y)+K_{m,n}^{\alpha,\beta}(x^2;x,y)}{\delta^2}$$

$$+\frac{K_{m,n}^{\alpha,\beta}(s^2;x,y)-K_{m,n}^{\alpha,\beta}(2sy;x,y)+K_{m,n}^{\alpha,\beta}(y^2;x,y)}{\delta^2}\,)\ \omega(h;\delta)$$

$$\leq \Bigg(1+\frac{1}{\delta^2}\Bigg(\frac{m(m-1)x^2}{(m+\beta_1+1)^2}+\frac{mx(2\alpha_1+1)}{(m+\beta_1+1)^2}+\frac{(\alpha_1+1)^2+2\alpha_1^2+\alpha_1}{(m+\beta_1+1)^2}$$

$$-2x\left(\frac{2\alpha_1+1}{2(m+\beta_1+1)}+\frac{mx}{m+\beta_1+1}\right)+x^2+\frac{n(n-1)y^2}{(n+\beta_2+1)^2}$$

$$+\frac{ny(2\alpha_2+1)}{(n+\beta_2+1)^2}+\frac{(\alpha_2+1)^2+2\alpha_2^2+\alpha_2}{(n+\beta_2+1)^2}-\frac{2y(2\alpha_2+1)}{2(n+\beta_2+1)}$$

$$-\frac{2ny^2}{n+\beta_2+1}\ +y^2\Bigg)\Bigg)\ \omega(h;\delta)$$

sonuç olarak

$$\delta^2=\frac{m(m-1)x^2}{(m+\beta_1+1)^2}+\frac{mx(2\alpha_1+1)}{(m+\beta_1+1)^2}+\frac{(\alpha_1+1)^2+2\alpha_1^2+\alpha_1}{(m+\beta_1+1)^2}$$

$$-2x\left(\frac{2\alpha_1+1}{2(m+\beta_1+1)}+\frac{mx}{m+\beta_1+1}\right)+x^2+\frac{n(n-1)y^2}{(n+\beta_2+1)^2}$$

$$+\frac{ny(2\alpha_2+1)}{(n+\beta_2+1)^2}+\frac{(\alpha_2+1)^2+2\alpha_2^2+\alpha_2}{(n+\beta_2+1)^2}$$

$$-2y\left(\frac{2\alpha_2+1}{2(n+\beta_2+1)}+\frac{ny}{n+\beta_2+1}\right)+y^2$$

seçilirse,

$$|\,K_{m,n}^{\alpha,\beta}(h\,;x,y)-h(x,y)\,|\leq 2\,\omega(h;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

7. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-KANTOROVICH-STANCU OPERATÖRLERİNİN ÜSTEL FORMU

Bu kısımda Bernstein-Kantorovich-Stancu operatörünün üstel formunun iki değişkenli genelleştirilmesi incelenecektir. $S \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}; x,y \geq\ 0, x+y \leq 1\}$ ve

$S_{\mu,v} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x,y \geq 0\,, r_\mu + r_v \leq 1\right\} \subset S$ olmak üzere $m,n \in \mathbb{N}$ ve $\mu, v > 0$ için,

$$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h;x,y) = r'_\mu(x) r'_v(y)\ (m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1) e^{\mu x+vy}$$

$$\times \sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(r_\mu(x), r_v(y)) \int\limits_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}} \int\limits_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} e^{-\mu t-vs} h(t,s)\, dtds, \quad (7.1)$$

$$p_{m,n,s,l}\left(r_\mu(x), r_v(y)\right) = \binom{m}{s}\binom{n}{l}\left(r_\mu(x)\right)^s \left(1-r_\mu(x)\right)^{m-s} \left(r_v(y)\right)^l \left(1-r_v(y)\right)^{n-l}$$

dir. Buradan $s,t \in [0,1], \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2)\,,\ 0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \quad,\ 0 \leq \alpha_2 \leq \beta_2$ dir.

Ayrıca

$$r_\mu(x) = \frac{e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}} - 1}{e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}} - 1}\,, \qquad r_v(y) = \frac{e^{\frac{vy}{n+\beta_2+1}} - 1}{e^{\frac{v}{n+\beta_2+1}} - 1}$$

ve

$$r'_\mu(x) = \frac{\mu\, e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}}}{(m+\beta_1+1)\left(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}} - 1\right)},$$

$$r'_v(y) = \frac{v e^{\frac{vy}{n+\beta_2+1}}}{(n+\beta_2+1)\left(e^{\frac{v}{n+\beta_2+1}} - 1\right)}$$

şeklinde tanımlanır.

7.1. Lemma

(7.1) ile tanımlanan $\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h;x,y)$ operatörü $x,y \in ([0,1]\times[0,1])$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(1;x,y) = e^{\frac{\mu x-\mu(\alpha_1+1)}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\beta_1+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}\left(e^{\frac{-\mu}{m+\beta_1+1}}-e^{\frac{\mu(x-1)}{m+\beta_1+1}}+1\right)^m$$

$$\times\left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}-e^{\frac{v(y-1)}{n+\beta_2+1}}+1\right)^n,$$

ii) $$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{\mu t};x,y) = \frac{\mu}{(m+\beta_1+1)\left(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}-1\right)}e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}$$

$$\times\left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}-e^{\frac{v(y-1)}{n+\beta_2+1}}+1\right)^n,$$

iii) $$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{vs};x,y) = \frac{v}{(n+\beta_2+1)\left(e^{\frac{v}{n+\beta_2+1}}-1\right)}e^{\frac{vy}{n+\beta_2+1}+\frac{\mu x-\mu(\alpha_1+1)}{m+\beta_1+1}+\mu x+vy}$$

$$\times\left(e^{\frac{-\mu}{m+\beta_1+1}}-e^{\frac{\mu(x-1)}{m+\beta_1+1}}+1\right)^m,$$

iv) $$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{2\mu t};x,y) = e^{\frac{\mu x(m+1)+\mu\alpha_1}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}\left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}-e^{\frac{v(y-1)}{n+\beta_2+1}}+1\right)^n,$$

v) $$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{2vs};x,y) = e^{\frac{vy(n+1)+v\alpha_2}{n+\beta_2+1}+\frac{\mu x-\mu(\alpha_1+1)}{m+\beta_1+1}+\mu x+vy}\left(e^{\frac{-\mu}{m+\beta_1+1}}-e^{\frac{\mu(x-1)}{m+\beta_1+1}}+1\right)^m,$$

vi) $$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{3\mu t};x,y) = \frac{e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}+1}{2}\, e^{\frac{\mu x+2\mu\alpha_1}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}$$

$$\times\left(e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}}-e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}+e^{\frac{\mu(x+1)}{m+\beta_1+1}}\right)^m\left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}-e^{\frac{v(y-1)}{n+\beta_2+1}}+1\right)^n,$$

vii) $$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{4\mu t};x,y) = \frac{e^{\frac{2\mu}{m+\beta_1+1}}+e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}+1}{3}\, e^{\frac{\mu x+3\mu\alpha_1}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}$$

$$\times\left(e^{\frac{\mu(x+2)}{m+\beta_1+1}}+e^{\frac{\mu(x+1)}{m+\beta_1+1}}-e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}+e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}}-e^{\frac{2\mu}{m+\beta_1+1}}\right)^m$$

$$\times\left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}-e^{\frac{v(y-1)}{n+\beta_2+1}}+1\right)^n,$$

viii) $\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{\mu t+vs};x,y)=\dfrac{v\mu\, e^{\frac{vy}{n+\beta_2+1}+\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}+\mu x+vy}}{(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)\left(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}-1\right)\left(e^{\frac{v}{n+\beta_2+1}}-1\right)}.$

İspat

(i) $h(t,k)=1$ için ,

$$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(1;x,y)=r_\mu'(x)r_v'(y)\,(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)e^{\mu x+vy}$$

$$\times\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(r_\mu(x),r_v(y))\int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}}e^{-\mu t-vk}\,dtds\,,$$

$$=r_\mu'(x)r_v'(y)\,(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)e^{\mu x+vy}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(r_\mu(x),r_v(y))$$

$$\times\frac{\left(e^{-\mu\left(\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}\right)}-e^{-\mu\left(\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}\right)}\right)\left(e^{-v\left(\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}\right)}-e^{-v\left(\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}\right)}\right)}{\mu v}$$

$$=e^{\frac{\mu x-\mu(\alpha_1+1)}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(r_\mu(x),r_v(y))\;e^{\frac{-\mu s}{m+\beta_1+1}}e^{\frac{-vl}{n+\beta_2+1}}$$

$$=e^{\frac{\mu x-\mu(\alpha_1+1)}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}\left(r_\mu(x)e^{\frac{-\mu}{m+\beta_1+1}}+1-r_\mu(x)\right)^m$$

$$\times\left(r_v(y)e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}+1-r_v(y)\right)^n$$

$$=e^{\frac{\mu x-\mu(\alpha_1+1)}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}\left(e^{\frac{-\mu}{m+\beta_1+1}}-e^{\frac{\mu(x-1)}{m+\beta_1+1}}+1\right)^m$$

$$\times\left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}-e^{\frac{v(y-1)}{n+\beta_2+1}}+1\right)^n.$$

(ii) $h(t,s)=e^{\mu t}$ için,

$$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{\mu t};x,y)=r_{\mu}'(x)r_{v}'(y)\,(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)$$

$$\times\, e^{\mu x+vy}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(r_{\mu}(x),r_{v}(y))\int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}}e^{-vk}\,dtds\,,$$

$$=r_{\mu}'(x)r_{v}'(y)\,(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)e^{\mu x+vy}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}\left(r_{\mu}(x),r_{v}(y)\right)$$

$$\times\frac{\left(e^{-v\left(\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}\right)}-e^{-v\left(\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}\right)}\right)}{v}$$

$$=\frac{\mu}{(m+\beta_1+1)\left(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}-1\right)}e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}$$

$$\times\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}\left(r_{\mu}(x),r_{v}(y)\right)\;e^{\frac{-vl}{n+\beta_2+1}}$$

$$=\frac{\mu}{(m+\beta_1+1)\left(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}-1\right)}e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}$$

$$\times\left(r_{v}(y)e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}+1-r_{v}(y)\right)^{n}$$

$$=\frac{\mu}{(m+\beta_1+1)\left(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}-1\right)}e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}$$

$$\times\left(\frac{e^{\frac{vy}{n+\beta_2+1}}-1}{e^{\frac{v}{n+\beta_2+1}}-1}\left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}-1\right)+1\right)^{n}$$

$$=\frac{\mu}{(m+\beta_1+1)\left(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}-1\right)}e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}$$

$$\times\left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}-e^{\frac{v(y-1)}{n+\beta_2+1}}+1\right)^{n}.$$

(iii) $h(t,s)=e^{2\mu t}$ için,

$$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{2\mu t};x,y)=r_\mu'(x)r_v'(y)\,(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)$$

$$\times\, e^{\mu x+vy}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(r_\mu(x),r_v(y))\int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} e^{-vk+\mu t}\,dtds\,,$$

$$=r_\mu'(x)r_v'(y)\,(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)e^{\mu x+vy}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}\left(r_\mu(x),r_v(y)\right)$$

$$\times\frac{\left(e^{\mu\left(\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}\right)}-e^{\mu\left(\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}\right)}\right)\left(e^{-v\left(\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}\right)}-e^{-v\left(\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}\right)}\right)}{\mu v}$$

$$=e^{\frac{\mu x+\mu\alpha_1}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(r_\mu(x),r_v(y))\;e^{\frac{\mu s}{m+\beta_1+1}}e^{\frac{-vl}{n+\beta_2+1}}$$

$$=e^{\frac{\mu x+\mu\alpha_1}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}\left(r_\mu(x)e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}+1-r_\mu(x)\right)^m$$

$$\times\left(r_v(y)e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}+1-r_v(y)\right)^n$$

$$=e^{\frac{\mu x+\mu\alpha_1}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy\,\frac{\mu xm}{m+\beta_1+1}}\left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}-e^{\frac{v(y-1)}{n+\beta_2+1}}+1\right)^n.$$

(iv) $h(t,s)=e^{3\mu t}$ için,

$$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{3\mu t};x,y)=r_\mu'(x)r_v'(y)\,(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)$$

$$\times\, e^{\mu x+vy}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}(r_\mu(x),r_v(y))\int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} e^{-vk+2\mu t}\,dtds$$

$$= r_\mu'(x) r_v'(y)\ (m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1) e^{\mu x+vy} \sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}\left(r_\mu(x), r_v(y)\right)$$

$$\times \frac{\left(e^{2\mu\left(\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}\right)} - e^{2\mu\left(\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}\right)}\right)\left(e^{-v\left(\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}\right)} - e^{-v\left(\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}\right)}\right)}{2\mu v}$$

$$= e^{\frac{\mu x+2\mu\alpha_1}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}\ \frac{(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}+1)}{2} \sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(r_\mu(x), r_v(y))$$

$$\times e^{\frac{2\mu s}{m+\beta_1+1}} e^{\frac{-vl}{n+\beta_2+1}}$$

$$= e^{\frac{\mu x+2\mu\alpha_1}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}\ \frac{(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}+1)}{2} \left(r_\mu(x) e^{\frac{2\mu}{m+\beta_1+1}} + 1 - r_\mu(x)\right)^m$$

$$\times \left(r_v(y) e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}} + 1 - r_v(y)\right)^n$$

$$= e^{\frac{\mu x+2\mu\alpha_1}{m+\beta_1+1}+\frac{vy-v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}\ \frac{\left(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}+1\right)}{2} \left(e^{\frac{\mu(x+1)}{m+\beta_1+1}} + e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}} + 1\right)^m$$

$$\times \left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}} - e^{\frac{v(y-1)}{n+\beta_2+1}} + 1\right)^n.$$

(v) $\quad h(t,s) = e^{\mu t + vs}$ için,

$$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{\mu t+vk}; x, y) = r_\mu'(x) r_v'(y)\ (m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)$$

$$\times e^{\mu x+vy} \sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(r_\mu(x), r_v(y)) \int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}} \int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} dtds$$

$$= r_\mu'(x) r_v'(y)\ e^{\mu x+vy} \sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(r_\mu(x), r_v(y))$$

$$= \frac{\mu v e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}+\frac{vy}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}}{(m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)\left(e^{\frac{v}{n+\beta_2+1}}-1\right)\left(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}-1\right)}$$

olur. Böylece ispat tamamlamıştır.

7.2. Lemma

$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h;x,y)$ operatörleri için,

i) $\lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}(1;x,y)=1,$

ii) $\lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{\mu t};x,y)=e^{\mu x},$

iii) $\lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{vs};x,y)=e^{vy},$

iv) $\lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}(e^{2\mu t}+e^{2vs};x,y)=e^{2\mu x}+e^{2vy}$

eşitlikleri gerçeklenir.

7.3. Lemma

$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h;x,y)$ operatörleri için,

i) $\lim\limits_{m\to\infty} m\left(\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}(1;x,y)-1\right)=-2\mu x(x-1)+\mu$

$\times(2x+x\beta_1-\alpha_1-1)+v(2y+vy+y\beta_2-\alpha_2-1-vy^2),$

ii) $\lim\limits_{m\to\infty} m\left(\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}((e^{\mu t}-e^{\mu x});x,y)\right)=\frac{\mu}{2}e^{\mu x}(1+2\alpha_1-2x$

$\times(1+\mu+\beta_1)+2\mu x^2,$

iii) $\lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}((e^{\mu t}-e^{\mu x})^2;x,y)=-\mu^2e^{2\mu x}x(x-1),$

iv) $\lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}\left((e^{\mu t}-e^{\mu x})(e^{vs}-e^{vy});x,y\right)=0,$

v) $\lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}((e^{\mu t}-e^{\mu x})^4;x,y)=0,$

vi) $\lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}((e^{vk}-e^{vy})^4;x,y)=0,$

eşitlikleri gerçeklenir.

7.1. Teorem

$h \in C(S_{\mu,v})$ olmak üzere

$$\left|\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h;x,y)-h(x,y)\right| \leq \left(1+\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{v^2}\right)\omega(f;\delta)$$

olur. Burada,

$$\delta^2=\left(e^{\frac{\mu x}{m+\beta_1+1}+\frac{vy}{n+\beta_2+1}+\mu x+vy}\right)\left[\left(e^{\frac{\mu(\alpha_1+xm)}{m+\beta_1+1}-\frac{v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}}-2\frac{e^{\mu x-\frac{v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}}\mu}{(m+\beta_1+1)\left(e^{\frac{\mu}{m+\beta_1+1}}-1\right)}+\right.\right.$$

$$\left.(e^{\mu x}-e^{vy})e^{\frac{-\mu(\alpha_1+1)}{m+\beta_1+1}-\frac{v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}}\left(e^{\frac{-\mu}{m+\beta_1+1}}-e^{\frac{\mu(x-1)}{m+\beta_1+1}}+1\right)^m\right)\left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}-e^{\frac{v(y-1)}{n+\beta_2+1}}+\right.$$

$$\left.\left.1\right)^n+\left(e^{\frac{v(\alpha_2+1)}{n+\beta_2+1}-\frac{\mu(\alpha_1+1)}{m+\beta_1+1}}-2\frac{ve^{vy-\frac{\mu(\alpha_1+1)}{m+\beta_1+1}}}{(n+\beta_2+1)\left(e^{\frac{v}{n+\beta_2+1}}-1\right)}\right)\left(e^{\frac{-v}{n+\beta_2+1}}-e^{\frac{v(y-1)}{n+\beta_2+1}}+1\right)^n\right]$$

dır.

İspat

$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h;x,y)$ operatörleri için,

$$\left|\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h;x,y)-h(x,y)\right| \leq \left|\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h(t,s);x,y)-\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h(x,y);x,y)\right|$$

$$\leq \left|\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h(t,s)-h(x,y);x,y)\right|$$

$$=\left|r_\mu'(x)r_v'(y)\,(m+\beta_1+1)(n+\beta_2\right.$$

$$+1)\,e^{\mu x+vy}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}p_{m,n,s,l}\left(r_\mu(x),r_v(y)\right)\int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}}\int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}}e^{-\mu t-vs}\big(h(t,s)$$

$$\left.-h(x,y)\big)\,dtds\right|$$

$$\leq r_\mu'(x)r_v'(y)\ (m+\beta_1+1)(n+\beta_2+1)\ \sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(r_\mu(x),r_v(y))$$

$$\times\, e^{\mu x+vy}\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{m,n,s,l}(r_\mu(x),r_v(y)) \int_{\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2+1}}^{\frac{l+\alpha_2+1}{n+\beta_2+1}} \int_{\frac{s+\alpha_1}{m+\beta_1+1}}^{\frac{s+\alpha_1+1}{m+\beta_1+1}} e^{-\mu t-vs}|h(t,s)$$

$$-\,h(x,y)|\,dtds$$

$$\left|\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h(t,s);x,y)-h(x,y)\right|$$

$$\leq\left(1+\frac{\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}((t-x)^2+(s-y)^2\,;x,y)}{\delta^2}\right)\omega(h;\delta)$$

elde edilir. Ortalama değer teoreminden,

$$\left|\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h;x,y)-h(x,y)\right|$$

$$\leq\left\{1+\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{v^2}\right)\frac{\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}((e^{\mu t}-e^{\mu x})^2+(e^{vs}-e^{vy})^2\,;x,y)}{\delta^2}\right\}$$

$$\times\,\omega(h;\delta)$$

olur. Son eşitliksizlikte,

$$\delta^2=\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}((e^{\mu t}-e^{\mu x})^2+(e^{vs}-e^{vy})^2\,;x,y)$$

seçilerek,

$$\left|\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h;x,y)-h(x,y)\right|\leq\left\{1+\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{v^2}\right\}\omega(h;\delta)$$

bulunur.

7.2. Teorem

İki değişkenli fonksiyonlar için Taylor açılımı

$$h(t,s)=h(x,y)+(t-x)h_x(x,y)+(s-y)h_y(x,y)+\frac{1}{2}(t-x)^2h_{xx}(x,y)$$
$$+(t-x)(s-y)h_{xy}(x,y)+\frac{1}{2}(s-y)^2h_{yy}(x,y)$$
$$+[(t-x)^2$$
$$+(s-y)^2]R(t,s,x,y) \qquad (7.2)$$

dır. Burada $R(t,s,x,y)$ kalan terimleri simgelemektedir

$$\lim_{m\to\infty} m\left(\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h;x,y)-h(x,y)\right)$$
$$= h(x,y)\left(-\mu x(x-1)+\mu(2x+x\beta_1-\alpha_1-1)\right.$$
$$\left.+v(2y+vy+y\beta_2-\alpha_2-1-vy^2)\right)$$
$$+\frac{e^{-\mu x}}{\mu}\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\left(\frac{\mu}{2}e^{\mu x}(1+2\alpha_1-2x(1+\mu+\beta_1)+2\mu x^2)\right)$$
$$+\frac{e^{-vy}}{v}\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\left(\frac{v}{2}e^{vy}(1+2\alpha_2-2y(1+v+\beta_2)+2vy^2)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left\{e^{-2\mu x}\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right)\left(-\mu^2 e^{2\mu x}x(x-1)\right)\right.$$
$$+\ e^{-2vy}\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{v}\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\right)\left(-v^2e^{2vy}y(y-1)\right)\right\}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat

$h\in L_1([0,1]\times[0,1])$ için

$$h(t,s)=h(x,y)+(e^{\mu t}-e^{\mu x})\left[\frac{\partial}{\partial x}h\left(log_\mu^v,.\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})}$$
$$+(e^{vs}-e^{vy})\left[\frac{\partial}{\partial y}h\left(.,log_v^\mu\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})}$$
$$+\frac{1}{2}\left\{(e^{\mu t}-e^{\mu x})^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}h\left(log_\mu^v,.\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})}\right.$$
$$+(e^{vs}-e^{vy})^2\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}h\left(.,log_v^\mu\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})}$$
$$\left.+2(e^{\mu t}-e^{\mu x})(e^{vs}-e^{vy})\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h\left(.,log_v^\mu\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})}\right\}$$
$$+R(t,s,x,y)((e^{\mu t}-e^{\mu x})^2$$
$$+(e^{vs}-e^{vy})^2) \qquad (7.3)$$

olur. (7.3) denklemine $\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h(t,s)\,;x,y)$ operatörü uygularak,

$$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h(t,s);x,y)$$
$$= \widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h(x,y);x,y) + \widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}\left((e^{\mu t}-e^{\mu x});x,y\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}h\left(log_{\mu}^{v},.\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})}$$
$$+ \widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}\left((e^{vs}-e^{vy});x,y\right)\left[\frac{\partial}{\partial y}h\left(.,log_{v}^{\mu}\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})}$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}\left((e^{\mu t}-e^{\mu x})^2;x,y\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}h\left(log_{\mu}^{v},.\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})}\right.$$
$$+ \widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}\left((e^{vs}-e^{vy})^2;x,y\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}h\left(.,log_{v}^{\mu}\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})}$$
$$\left.+ 2\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}\left((e^{\mu t}-e^{\mu x})(e^{vs}-e^{vy});x,y\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h\left(.,log_{v}^{\mu}\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})}\right\}$$
$$+ \widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(R(t,s,x,y)((e^{\mu t}-e^{\mu x})^2$$
$$+ (e^{vs}-e^{vy})^2);x,y) \tag{7.4}$$

bulunur. (7.4) denkleminde,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}h\left(log_{\mu}^{v},.\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})} = \frac{e^{-\mu x}}{\mu}\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}h\left(log_{\mu}^{v},.\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})} = e^{-2\mu x}\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h\left(.,log_{v}^{\mu}\right)\right]|_{(e^{\mu x},e^{vy})} = \frac{e^{-(\mu x+vy)}}{\mu v}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x\partial y}$$

eşitlikleri yazılırsa,

$$\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h(t,s);x,y)$$
$$= \widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h(x,y);x,y) + \widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}\big((e^{\mu t}-e^{\mu x});x,y\big)\frac{e^{-\mu x}}{\mu}\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$$
$$+ \widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}\big((e^{vs}-e^{vy});x,y\big)\frac{e^{-vy}}{v}\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}\,((e^{\mu t}-e^{\mu x})^2;x,y)e^{-2\mu x}\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right)\right.$$
$$+ \widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}((e^{vs}-e^{vy})^2;x,y)\;e^{-2vy}\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial y^2}-\frac{1}{v}\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\right)$$
$$\left.+ 2\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}\big((e^{\mu t}-e^{\mu x})(e^{vs}-e^{vy});x,y\big)\frac{e^{-(\mu x+vy)}}{\mu v}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}$$
$$+ \widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(R(t,s,x,y)((e^{\mu t}-e^{\mu x})^2$$
$$+ (e^{vs}-e^{vy})^2);x,y) \tag{7.5}$$

elde edilir. (7.5)'te eşitliğin her iki yanına limit uygulanırsa,

$$\lim_{m\to\infty} m\left(\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h(t,s);x,y)-h(x,y)\right)$$
$$= h(x,y)\lim_{m\to\infty} m\left(\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}(1;x,y)-1\right)$$
$$+\frac{e^{-\mu x}}{\mu}\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\lim_{m\to\infty} m\,\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}\big((e^{\mu t}-e^{\mu x});x,y\big)$$
$$+\frac{e^{-vy}}{v}\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\lim_{m\to\infty} m\,\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}\big((e^{vs}-e^{vy});x,y\big)$$
$$+\frac{1}{2}\left\{e^{-2\mu x}\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right)\lim_{m\to\infty} m\,\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}\,((e^{\mu t}-e^{\mu x})^2;x,y)\right.$$
$$+\; e^{-2vy}\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial y^2}-\frac{1}{v}\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\right)\lim_{m\to\infty} m\,\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}((e^{vs}-e^{vy})^2;x,y)$$
$$\left.+2\frac{e^{-(\mu x+vy)}}{\mu v}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x\partial y}\lim_{m\to\infty} m\,\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}\big((e^{\mu t}-e^{\mu x})(e^{vs}-e^{vy});x,y\big)\right\}$$
$$+\lim_{m\to\infty} m\,\widetilde{K}_{m,n}^{\alpha,\beta,\mu,v}(R(t,s,x,y)((e^{\mu t}-e^{\mu x})^2$$
$$+ (e^{vs}-e^{vy})^2);x,y) \tag{7.6}$$

olur. Lemma 7.2' de verilen eşitlikler kullanılarak,

$$\lim_{m\to\infty} m\left(\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h(t,s);x,y)-h(x,y)\right)$$

$$= h(x,y)\left(-\mu x(x-1)+\mu(2x+x\beta_1-\alpha_1-1)\right.$$

$$\left.+v(2y+vy+y\beta_2-\alpha_2-1-vy^2)\right)$$

$$+\frac{e^{-\mu x}}{\mu}\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\left(\frac{\mu}{2}e^{\mu x}(1+2\alpha_1-2x(1+\mu+\beta_1)+2\mu x^2)\right)$$

$$+\frac{e^{-vy}}{v}\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\left(\frac{v}{2}e^{vy}(1+2\alpha_2-2y(1+v+\beta_2)+2vy^2)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{e^{-2\mu x}\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right)\left(-\mu^2 e^{2\mu x}x(x-1)\right)\right.$$

$$+\ e^{-2vy}\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{v}\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\right)\left(-v^2e^{2vy}y(y-1)\right)\right\}$$

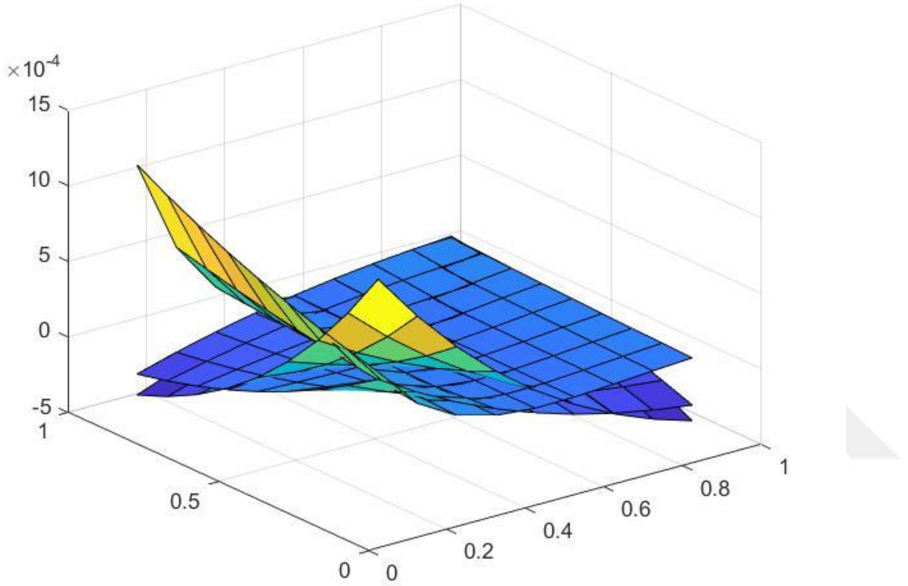
sonucu elde edilir.

8. GRAFİK VE NÜMERİK ANALİZ

Bu bölümde h fonksiyonu için yaklaşım modellemesini gösteren iki değişkenli Bernstein-Kantorovich-Stancu operatörü üstel formunun grafik ve nümerik analizini vereceğiz.

Örnek 8.1.

$h(x,y) = \frac{\cos(x+1)\cos(y+1)}{e^{x+y+5}}$ fonksiyonunu seçelim her $x,y \in [0.1,0.9]$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ ve $\mu = \nu \in \{1,2,3\}$ $m,n \in \{70,80,90\}$ için $\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,\nu}$ operatörünün h fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 8.1'de verilmiştir.



Şekil 8.1. $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ ve μ,ν nin farklı değerleri için $\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,\nu}(h;x,y)$ operatörü

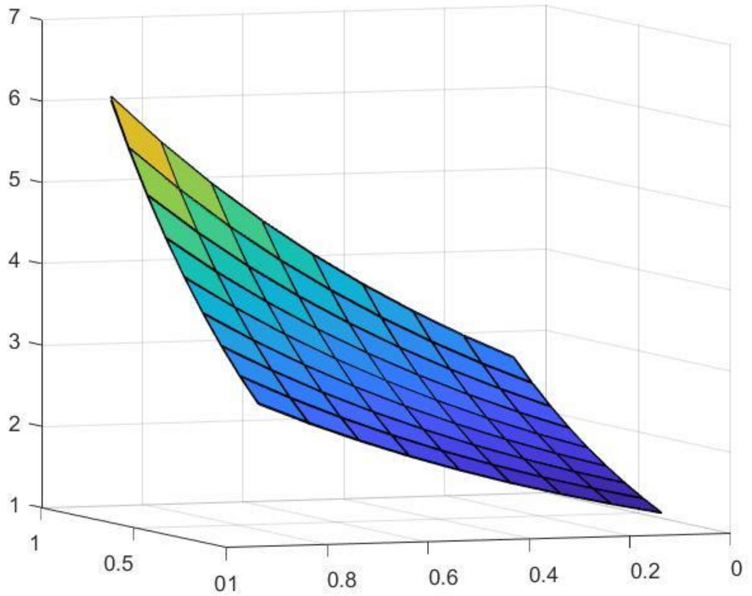
Ayrıca Tablo 8.1' de hata tablosu verilmiştir.

$\boldsymbol{\mu = \nu}$	$\boldsymbol{\alpha_1 = \alpha_2}$	$\boldsymbol{\beta_1 = \beta_2}$	$\boldsymbol{\widetilde{K}_{70,70}^{\alpha,\beta,\mu,\nu}(h) - h}$	$\boldsymbol{\widetilde{K}_{80,80}^{\alpha,\beta,\mu,\nu}(h) - h}$	$\boldsymbol{\widetilde{K}_{90,90}^{\alpha,\beta,\mu,\nu}(h) - h}$
1	1	1	0.00015218	0.00013448	0.00012046
2	1	1	0.00014441	0.00016100	0.00018188
3	1	1	0.00020645	0.00018297	0.00016428
1	10	10	0.00016428	0.00071263	0.00066243
1	100	100	0.00046861	0.00042362	0.00038641

Tablo 8.1. α ve β'nın farklı değerleri ile sabit $\mu = \nu \in \{1, 2, 3\}$ için hata tablosu

Örnek 8.2.

$h(x,y) = e^{x+y}$ fonksiyonunu seçelim $\widetilde{K}_{70,70}^{5,10,0.9,0.9}(h;x,y)$, $\widetilde{K}_{70,70}^{10,20,0.9,0.9}(h;x,y)$ ve $\widetilde{K}_{70,70}^{25,50,0.9,0.9}(h;x,y)$ operatörlerinin $x = y \in [0.9,0.9]$ için $\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}$ operatörünün h fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 8.2' de verilmiştir.



Şekil 8.2. $m = n = 70$ ve α, β, μ, v 'nin farklı değerleri için $\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}(h;x,y)$ operatörü

Ayrıca Tablo 8.2' de hata tablosu verilmiştir.

$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$	$\widetilde{K}_{70,70}^{\alpha,\beta,1,1}(h) - h$	$\widetilde{K}_{80,80}^{\alpha,\beta,1,1}(h) - h$	$\widetilde{K}_{90,90}^{\alpha,\beta,1,1}(h) - h$
1	0.0342	0.0300	0.0267
10	0.0642	0.0567	0.0507
100	0.0484	0.0434	0.0394
1000	0.0364	0.0322	0.0288
10000	0.0344	0.0302	0.0269

Tablo 8.2 Farklı α ve β değerleri ile sabit $\mu = v = 1$ için hata tablosu

$m, n = 90$, $\mu = v = 1$ ve farklı α, β değerleri için $\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta,\mu,v}$ ve $\widetilde{K}_{m,m}^{\alpha,\beta}$ operatörlerinin hata karşılaştırması Tablo 8.3' de verilmiştir.

$\alpha_1 = \alpha_2$	$\beta_1 = \beta_2$	$\widetilde{K}_{90,90}^{\alpha,\beta,1,1}(h) - h$	$\widetilde{K}_{90,90}^{\alpha,\beta}(h) - h$
1	5	0.0520	0.1970
5	10	0.0507	0.2709
10	10	0.0507	0.7197
10	100	0.0394	1.6340

Tablo 8.2. Farklı α, β değerleri için $\widetilde{K}_{90,90}^{\alpha,\beta,1,1}(h; x, y)$ ve $\widetilde{K}_{90,90}^{\alpha,\beta}(h; x, y)$ operatörlerinin hata karşılaştırması

KAYNAKLAR

Aral, A., Cardenas-Morales, D., Garrancho, P. (2018) Bernstein-type operators that reproduce exponential functions. J. Math. Inequal. (3), 861–872.

Aral, A., Otrocol, D., Raşa, I. (2019) On approximation by some Bernstein-Kantorovich
exponential-type polynomials. Period. Math. Hung. (79), 236–254 .

Atakut, C., Ispir, N. (2004) On Bernstein type rational functions of two variables. Math.
Slovaca (3), 291–301.

Barbosu, D. (2004) Kantorovich-Stancu type operators. J. Inequal. Pure Appl. Math. (53(3)), 1443–5756.

Bernstein, S. N. (1912) Demonstration du theoreme de weierstrass fondee sur le calculde probabilities. Commun. Soc. Math. Kharkow (2), 1–2.

Bohman, H. (1952) On approximation of continuous and analytic functions. Ark. Math. (2), 43-56.

Bozkurt, K., Özsaraç, F., Aral, A. (2021) Bivariate Bernstein polynomials that reproduce exponential functions. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. (1),
541–554.

Chen, X., Tan, J., Liu, Z., Xie, J. (2017) Approximation of functions by a new family of generalized Bernstein operators. J. Math. Anal. Appl. (450), 244–261.

Gürel Y., Ö. (2019) Kıng tipli Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri, Yüksek Lisans Tezi Ankara Üniversitesi.

Kajla, A. (2019) Generalized Bernstein-Kantorovich–type operators on a triangle. Math
Meth Appl Sci. (42), 4365–4377.

Karakaş, E. E. (2018) İki Değişkenli Kantorovich-Stancu Operatorleri, Yüksek Lisans Tezi Kırıkkale Üniversitesi.

Korovkin, P.P. (1953) On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Doklady. Akad. Nauk SSSR (N.S.). 90, 961-964.

Mursaleen, M., Ansari, J. K., Khan, A. (2016) On (p,q) −analogue of Bernstein Operators. Appl. Math. Comput. (278), 70–71.

Pop, O. T., Farcas, M. D. (2009) About the bivariate operators of Kantorovich type. Acta Math. Univ. Comenianae (1), 43–52.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : KISAKOL, Merve

Uyruğu : T.C.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi / Matematik ABD	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2021
Lise	Beşikdüzü Anadolu Lisesi	2017

Yabancı Dil

İngilizce

ankara HBV