

BÖLÜM I

GİRİŞ

Düğüm teorisinde hesaplanması zor fakat kolayca tanımlanan bazı önemli invariantlar vardır. Bunlar sayısal, grupsal ve polinom invariantları olarak sınıflandırılır. Bir düğümün veya halkanın bileşen sayısı, minimum kavşak sayısı, halkalanma sayısı, burulma sayısı, örgü sayısı, köprü sayısı gibi sayısal invariantları, düğümün homotopi grubu, homoloji grubu, kristal gibi grupsal invariantları ve Alexander polinomu [1], Conway polinomu [25], Jones polinomu [8,9], Kauffman polinomu [10], Genelleştirilmiş Kauffman polinomu [12,14] ve Homfly polinomu [7] gibi polinom invariantları vardır. Bu invariantlar düğüm ve halkaların ayırt edilmesinde çok önemlidir.

Bu tezde düğüm ve halka invariantlarına özellikle polinom invariantlarına bir diyagramsal yaklaşım üzerinde çalışıldı. Jones polinomu ve birleştirilmiş cebiri diyagramsal yaklaşımla inşa edildi. Jones polinomunun diğer polinomlara genellemeleri üzerinde duruldu. Yine bu çalışmadan ortaya çıkan alterne düğümler hakkında bazı eski tahminler, Jones polinomunun (normalize edilmiş parantez polinomunun) bazı özellikleri kullanılarak ispat edildi. Ayrıca düğüm teorisinin Graf teorisi ve istatistiksel fizik ile ilişkisine değinildi. Grafların polinom invariantları ile düğümün polinom invariantları arasındaki ilişkiler incelendi. Bu sayede düğüm teorisinden graf teorisine ve graf teorisinden düğüm teorisine geçiş yapıldı.

Tezin ikinci bölümünde, diğer bölümlerde kullanılan düğüm teorisinin ve graf teorisinin bazı temel kavramları verildi. Üçüncü bölümde, düğüm ve halkaların bazı sayısal invariantları kısaca anlatıldı. Dördüncü bölümde, düğüm ve halka polinomlarının diyagramsal bir yaklaşımı verildi. Bu yolla genel parantez polinomu ve onun özel hali olan kare parantez polinomu açıklandı. Kare parantez polinomu normalize edildi ve Jones polinomu ile ilişkisi verildi. Beşinci bölümde parantez polinomu tekniği ile ilgili bazı uygulamalar verildi. Bu bölümde alterne düğüm ve halkaların bazı özelliklerinin ortaya çıkarılmasıyla bu düğüm ve halkalarla ilgili bazı klasik tahminler ispatlandı. Aynı zamanda parantez polinomu tekniği örgülere uygulandı. Örgü grubu cebiri ile diyagram cebirinin bir karışımı olan bir karma cebir tanımlandı ve bu cebirdeki

Çarpımın matris çarpımına ve matrislerin soyut tensör çarpımına uygun olduğu gözlemlendi.

Yine bu bölümde bazı düğüm ve halka polinomları ve onların genelleştirilmiş durumları verildi. Ayrıca parantez polinomu tekniği graflara ve istatistiksel fiziğin bazı kavramlarına genişletildi. Bu bağlamda parantez polinomundan bir graf invaryantı olan Tutte polinomuna geçiş yapıldı. Benzer şekilde graf teorisinden de düğüm teorisine geçiş yapıldı.

.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Düzüm ve Halka

Tanım 2.1.1. X ve Y iki Hausdorff uzayı olsun. Eğer $f : X \rightarrow f(X)$ bir homeomorfizm ise $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne bir *yerleştirme* denir.

Tanım 2.1.2. $S^1 = \{ (x,y) : x^2 + y^2 = 1 ; x, y \in \mathbb{R} \}$ birim çember olsun. S^1 in \mathbb{R}^3 veya $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ içine yerleştirmesine bir *düzüm* denir. $n \in \mathbb{N}$ için n tane düğümün ayrık birleşimine bir *halka* denir [4,15,25].

Yönlendirilmiş bir üçgen (veya bir çember) ile aynı tipte olan bir düğüme düğümlenmemiş (aşıkâr) düğüm denir. Halkalanmamış halkaya ise aşıkâr halka denir.

Tanım 2.1.3. $p : S^3 \rightarrow S^3$, $p(x, y, z) = (x, y, 0)$ ile tanımlanan fonksiyona *izdüşüm fonksiyonu* denir.

Eğer K , S^3 içinde bir düğüm ise, K nın p izdüşüm fonksiyonu altındaki resmi, $p(K)$, K nın xoy -düzlemindeki izdüşümüdür. K poligonal bir düğüm ise, $p(K)$ düzlemsel bir poligondur.

Tanım 2.1.4. K , S^3 içinde bir düğüm ve p , izdüşüm fonksiyonu olsun. $a \in p(K)$ için $p^{-1}(a) \cap K$, n tane ($n > 1$) noktadan ibaret ise, a ya $p(K)$ nın bir *n-katlı noktası* denir. Eğer $n = 2$ ise, a noktasına *kavşak noktası* (geçiş noktası, çift katlı nokta) denir [4,25].

Tanım 2.1.5. Regüler pozisyonda bulunan bir K düğümü ile bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. K nın her alt geçit noktasından uzaklığı ε dan küçük olan noktaların kümesi A ise, $p(K-A)$ kümesine K düğümünün normal diyagramı kısaca *düzüm diyagramı* denir [15].

Böylece K düğümünün normal diyagramı ayrık yay parçalarından (veya doğru parçalarından) oluşur.

Tanım 2.1.6. Eğer bir halkanın her bir bileşeni üzerine bir ok konularak yön verilmişse halkaya *yönlendirilmiştir* denir. Yönlendirilmiş kavşaklara Şekil 2.1 de gösterildiği gibi ± 1 işaretleri verilir.



Şekil 2.1. Kavşak işaretleri

Tanım 2.1.7. Bir düğüm diyagramının kavşaklarını alt üst ederek veya işaretini değiştirerek elde edilen diyagrama düğümün *ayna görüntüsü* denir.

Tanım 2.1.8. Kavşak işaretleri ardışık olarak işaret değiştiren diyagrama *alterne diyagram* denir.

Tanım 2.1.9. K ve L , S^3 içinde yönlendirilmiş iki düğüm olsun. Eğer $h(K) = L$ olacak şekilde yönlendirmeyi koruyan bir $h : S^3 \rightarrow S^3$ homeomorfizmi varsa K düğümü L düğümüne *denktir* denir [4].

Bu denklik aslında diyagram hareketlerinin (Reidemeister hareketleri) esas üç tipi ile üretilir

Tanım 2.1.10 (Reidemeister hareketleri).



Şekil 2.2. Reidemeister hareketleri

I.Tip hareket bir burulmuş eğri ekleyerek yada çıkararak, II.Tip hareket iki ardışık alttan yada üstten kavşağı çıkararak yada ekleyerek ve III.Tip hareket üçgen hareketi olarak elde edilir [11,15,24].

İki düğümden ya da halkadan birinin diğerine deforme edilmesi (kuşatan izotop olması) için gerek ve yeter şart onların diyagramlarından birinin diğerine Reidemeister hareketleriyle dönüşmesidir.

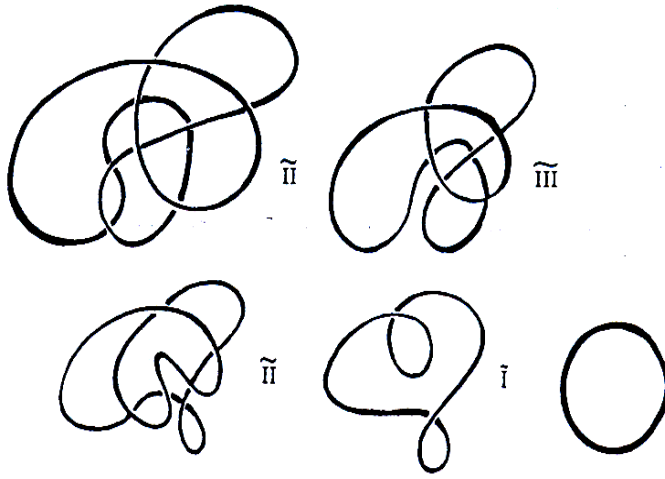
Yani sonlu sayıda Reidemeister hareketlerinin uygulanmasıyla diyagramları birbirine dönüşebilen düğümler denktir.

Tanım 2.1.11. II. ve III. Reidemeister hareketleri ile üretilen denklik bağıntısına *regüler izotopi* denir [11,15].

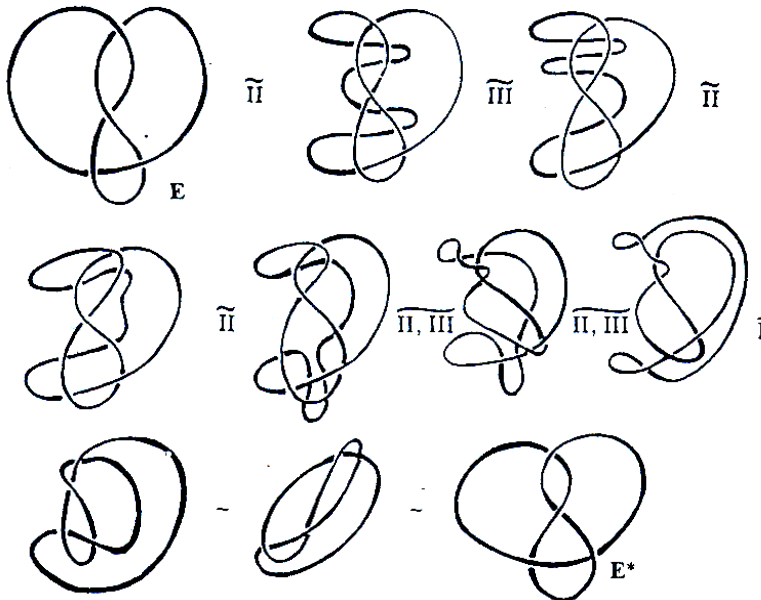
Tanım 2.1.12. Reidemeister hareketlerinin üçü ile üretilen diyagramlar üzerindeki denklik bağıntısına *kuşatan izotopi* denir [11,15].

Böylece II. ve III. hareketler regüler izotopi invariantı; I. II. III. hareketler kuşatan izotopi invariantıdır.

Örnek 2.1.13. Şekil 2.3 bir düğümlenmemiş düğümün bir kuşatan izotopisini gösterir. Şekil 2.4 de E sekiz şekilli düğüm ile ayna görüntüsü E* arasındaki kuşatan izotopisini gösterir.



Şekil 2.3. Denk düğümlenmemiş düğümler

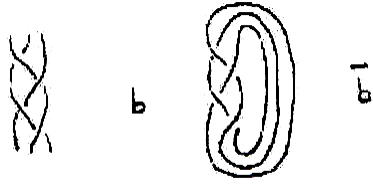


Şekil 2.4. Sekiz şekilli düğümün ayna görüntüsüne denkliği

2.2. Örgüler

Tanım 2.2.1. R^3 uzayında bir D dikdörtgeninin karşılıklı kenarları üzerine $P_i, Q_i, i = 1, \dots, n$ noktaları eşit uzaklıkta yerleştirilsin. f_i, P_i de başlayan ve $Q_{\rho(i)}$ de son bulan R^3 içinde n tane ayrık basit poligonal yay olsun. Burada $i \rightarrow \rho(i), \{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde bir permütasyondur. f_i lerin tam olarak aşağıya gitmesi istenir. Yani her bir f_i ; dikdörtgenin yan kenarına dik herhangi bir düzlemi en çok bir defa keser. f_i yaylarının hepsine birden n -örgü denir ve b ile gösterilir. Dikdörtgene b nin iskeleti ve $i \rightarrow \rho(i)$ ye örgü permütasyonu denir [25].

Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi 3-ipli bir örgünün kapanışı (kapalı örgü), başlangıç noktalarının paralel iplerinin bir koleksiyonu ile bitiş noktalarını birleştirilerek elde edilir [15].



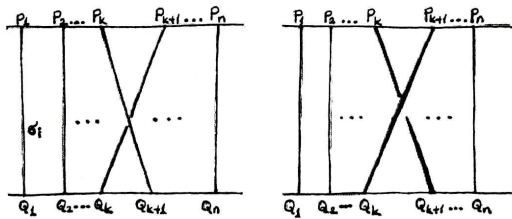
Şekil 2.5. 3-ipli bir örgü ve onun kapanışı

Teorem 2.2.2. Her K halkası bir kapalı örgü ile temsil edilebilir [4].

Tanım 2.2.3. n -örgülerin izotopi sınıfları bir örgü grubu teşkil eder. Bu gruba örgü grubu denir ve B_n ile gösterilir.

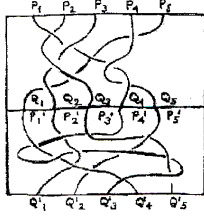
B_n grubu $n-1$ tane σ_i doğurayı ile doğurulabilir (Şekil 2.6). b örgüsü σ_i, σ_i^{-1} örgü elemanlarının bir çarpımı olarak ortaya çıkar. Böylece B_n örgü grubu

$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_j \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}, 1 \leq i \leq n-2, [\sigma_i, \sigma_k], 1 \leq i < k \leq n-2 \right\rangle$ şeklinde temsil edilebilir [4].



Şekil 2.6. Örgü doğurayları

b ve b' iki örgü olsun. Bu iki örgünün bileşimi (çarpımı) b nin Q bitiş noktaları ile b' nün P' başlangıç noktalarının özdeşleşmesiyle elde edilir (Şekil 2.7).



Şekil 2.7. İki örgünün çarpımı

Teorem 2.2.4. B_n örgü grubundan $\{1,2,\dots,n\}$ kümesi üzerinden S_n permütasyon grubuna bir homeomorfizm vardır [15].

$\pi : B_n \rightarrow S_n$ dönüşümü, örgü ile ortaya çıkan üst sıradaki noktalar ile alt sıradaki noktaların bir permütasyonu olarak tanımlanır.

Örneğin,

$$\pi \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ & & \\ & & \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olur.

Burada, sağdaki notasyon $\rho(1) = 3, \rho(2) = 1, \rho(3) = 2$ ile bir $\rho : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ permütasyonunu gösterir. Eğer bir b örgüsü için $\rho = \pi(b)$ ise o zaman j, i noktasında başlayan örgü ipinin alt noktası olmak üzere $\rho(i) = j$ dir.

Eğer Şekil 2.6 da $T_k : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ kabul edilirse, k ve k+1 geçişleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_k(i) = i, i \neq k, k+1$$

$$T_k(k) = k+1, T_k(k+1) = k.$$

Bu geçişler anlamında S_n ,

$$S_n = \langle T_1, \dots, T_{n-1} : T_i^2 = 1, T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \rangle$$

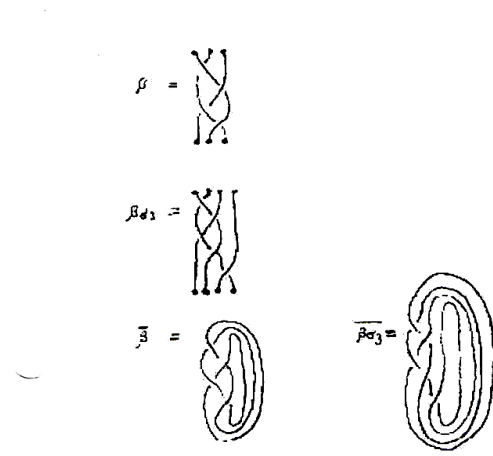
temsiline sahiptir.

Permütasyon grubu, B_n örgü grubunun birime eşit bütün doğuraylarının karelerinin alınmasıyla elde edilen bölüm grubudur [4].

Örgüleri, kapanışları halkalara kuşatan izotopi olacak şekilde değiştirmenin bazı kolay yolları vardır. Bunların ilki Markov hareketidir.

Tanım 2.2.5 (Markov hareketi). β , B_n içinde bir örgü kelimesi (yani $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ ve terslerinden oluşan bir kelime) olsun. O zaman β , $\beta\sigma_n$ ve $\beta\sigma_{n-1}$ örgülerinin üçü de kuşatan izotop kapanışına sahiptirler.

Örneğin,



Şekil 2.8. Denk iki örgü kapanışı

Burada $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \in B_3$ ve $\beta\sigma_3 \in B_4$ dür.

Böylece β , bir I. Tip Reidemeister hareketi ile $\beta_n^{\pm 1}$ den elde edilir.

Bir örgüyü aynı kapanışla yapmanın biraz daha zor bir yolu B_n den herhangi bir g örgüsü seçmek ve $g\beta g^{-1}$ eşlenik örgüsünü almaktır. $g\beta g^{-1}$ in $\overline{g\beta g^{-1}}$ formunda kapanışı alınır, g örgüsü ve onun tersi olan g^{-1} , kapanış ipleri boyunca yer değiştirerek birbirlerini yok edebilirler.

2.3. Graflar

Bir graf noktalardan ve doğru parçalarından oluşan bir şekil olarak düşünülebilir (topolojik olarak buna bir kompleks denir). Genelde bir graf soyut bir ifadenin matematiksel düşüncesidir. Eğer S^2 üzerine bir G uzay grafını yerleştirebilirsek o zaman G ye bir düzlem graf denir.

Tanım 2.3.1. G bir graf ve $V(G)$ ve $E(G)$ sırasıyla G grafının köşelerinin ve kenarlarının kümeleri olsun. Ayrıca $V(G)$ ve $E(G)$ kümelerinin her ikisi de sonlu olsun. Yani G grafi sonlu olsun. Herbir kenarı $+1$ veya -1 ile işaretlenmiş bir G grafına *işaretlenmiş graf* denir. Daha genel olarak eğer G , bir $f_G : E(G) \rightarrow \{1, -1\}$ işaret fonksiyonuna sahip bir graf ise G (veya (G, f_G)) ye bir *işaretli graf* denir. Eğer $f_G(e) = +1$ ise e kenarı pozitif, aksi takdirde negatiftir [21,22].

Bir pozitif graf işaretlenmemiş bir graf olarak göz önünde bulundurulabileceğinden dolayı sonuçlarımız sonlu yönlendirilmemiş graflar içinde uygulanabilir.

G nin bir H alt grafi, $f_H = f_G \setminus E(H)$ oluşmuş işaret fonksiyonuna sahiptir. Eğer $V(H) = V(G)$ ise H alt grafına bir *geren alt graftır* denir. Özel olarak sadece köşelerden ibaret bir *geren alt grafa* *geren köşe graf* denir ve V_G ile gösterilir. Bu çalışmanın başından sonuna kadar graf ile sık sık $S^3 = R^3 \cup \infty$ içinde bir sonlu 1-boyutlu C-W kompleksi olarak grafın geometrik yorumu kastedilecektir. Bir X kümesi için $|X|$, X in kardinalitesini, $\beta_1(G)$, 1- komplekste olduğu gibi bir G grafının i -nci Betti sayısını gösterebilir. Graf teoride $p_0(G)$ ve $p_1(G)$, $\beta_0(G)$ ve $\beta_1(G)$ nin yerine kullanılır. $p_0(G)$, G nin bağlantılı bileşenlerinin sayısını gösterir ve $p_1(G)$, G nin devir sayısıdır. H ve K nin her ikisi de en azından bir kenara sahip olan iki graf olsun. O zaman H ve K nin tek nokta bileşeni $H * K$ ile gösterilecektir. $V \subset V(G)$ ve $E \subset E(G)$ için, E deki kenarları ve V deki köşeleri içermeyen G nin en büyük alt grafi $G - (V, E)$ ile gösterilir. Özel olarak $G - e$, G nin bütün köşelerini ve kenarlarını içeren fakat e yi içermeyen G nin alt grafidir. Bu yüzden $G - e$, e nin çıkarılması ile G den elde edilen alt graftır. Bir v köşesi için $G - v$, bütün köşeleri içeren fakat v yi içermeyen bir alt graftır ve bir v köşesi için $G - v$, G nin v köşesi ve v köşesine bağlı kenarlar hariç diğer bütün köşe ve kenarlardan ibaret bir alt graftır. G bir graf olsun. Eğer $G = H \cup K$ ve $H \cap K = \{v_0\}$ olacak şekilde H ve K alt grafları varsa G ye ayrılabilir denir. Burada H ve K nin her ikisinin de en az bir kenarı vardır ve v_0 bir köşedir. Aksi durumda G ayrılamazdır ve v_0 köşesi bir ayırma köşesi olarak adlandırılır. Eğer G ilmeklere sahip değilse, o zaman bir v köşesi için $\beta_0(G) < \beta_0(G - v)$ olduğu zaman G ayrılabilir.

Bir blok, G nin bir maksimum ayrılamayan bağlantılı alt grafıdır. Bir bağlantılı graf sonlu çoklukta bloklara ayrılabilir. Bu yüzden eğer $G_1, G_2, G_3, \dots, G_k$, G nin blokları ise $G = G_1 * G_2 * G_3 * \dots * G_k$ yazabiliriz ve $G, G_1, G_2, G_3, \dots, G_k$ nin blok toplamı olarak adlandırılır. Eğer G hem ilmeklere hem de $\beta_0(G) < \beta_0(G - e)$ olacak şekilde bir e kenarına sahip değilse G ye indirgenir denir.

Eğer iki veya daha fazla kenar aynı uçlara sahipse bu kenarlara katlı kenarlar denir. Diğer yandan eğer iki farklı köşe bir tek e kenarı ile birleştirilirse o zaman e ye, G nin bir singüler kenarı denir. Bir ilmek bir singüler kenar değildir.

Eğer bütün kenarlar ortak uçlara sahip ve $|E(G)| \geq 2$ (veya $|E(G)| = 1$) ise bir G iki köşeli grafi bir katlı kenar graf (veya bir tek kenarlı graf) olarak adlandırılır.

G bir graf ve v , G nin bir köşesi olsun. Star v , v yi ve v ye ait olan G nin tüm kenarlarını içeren minimum alt graftır. Eğer X , G nin bağlantılı alt kümesi ise o zaman G/X , X deki bütün noktaların bir nokta ile özdeşlenmesiyle G den elde edilen alt graf olarak tanımlanır. Bir G grafının K ve H alt grafları için $H/(H \cap K)$ yı kolaylık olsun diye H/K ile göstereceğiz. Eğer $H \cap K = \emptyset$ ise o zaman H/K , H in kendisi olur. Bir e kenarı için $G/(e)$, e kısıtlama olarak adlandırılan e nin uçlarının özdeşlenmesi ile G -e den inşa edilir. Eğer e bir ilmek ise o zaman $G - e = G/(e)$ dir.

Eğer $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için v_i ve v_{i+1} , e_{i+1} kenarının uçları ise e_i kenarları ve v_i köşelerinin bir alterne dizisi $e_i : v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ dizisine G nin bir zinciri denir. Zincirin uzunluğu n dir. Eğer $v_n = v_0$ ise bir C zinciri bir devir olarak adlandırılır. C nin uzunluğu $|C|$ ile gösterilir ve n e eşittir. Eğer $v_n = v_0$ durumu hariç herhangi i ve j için $i \neq j$ olmak üzere $v_i \neq v_j$ ve $e_i \neq e_j$ ise bir zincir veya bir devir, basit zincir (devir) olarak adlandırılır.

n uzunluğunda bir devire basitçe bir n - devir denir. Bütün kenarları ayıran bir zincir (veya bir devir) bir trail olarak adlandırılır (veya bir kapalı trail).

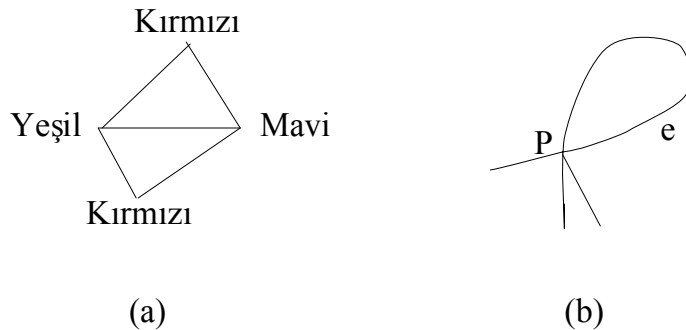
Eğer G nin herhangi bir deviri çift uzunluğa sahipse bir G grafi iki parçalıdır denir. İki parçalı bir graf bir ilmeğe sahip değildir. Her bir köşe bir çift değerliğe sahipse bir graf, çift graf olarak adlandırılır. Değeri 1 olan bir köşe bir stump olarak adlandırılır. 2 değerlikli bir köşe twig olarak adlandırılır.

Eğer G , 1-kompleks olarak $S^2 = R^2 \cup \{ \}$ içine yerleştirilebilir ise G grafına düzlemseldir denir. Eğer G , R^2 ye yerleştirilmiş bir graf ise o zaman G bir düzlem graftır. Eğer G bağlantılı bir düzlem graf ise, G^* dual grafi şu şekilde tanımlanır; $S^2 - G$ içindeki bölgelerin $F(G)$ kümesi, $V(G^*)$ ile birebir karşılık gelir. $E(G^*)$ ile $E(G)$ birebir öyle karşılık gelir ki, $e^* \in E(G^*)$ ve onun eşi köşe noktası olmayan ortak bir noktaya sahiptir. e^* nin işaretini onun eşinin zıttı gibi tanımlayabiliriz. Eğer G bağlantısız bir düzlem graf ise o zaman G^* , G nin bağlantılı bileşenlerinin dualı olan grafların ayrık bir birleşimidir.

Tanım 2.3.2 (Kromatik polinom). Tıpkı düğümlerin invaryantlarında olduğu gibi, iki izomorf graf için aynı değere sahip bir çokluğa grafın bir invaryantı denir. Böylece, modellerin cinsi ile bizim gösterdiğimiz graf arasında problem yoktur, model üzerinde diğer invaryantlar da olacaktır.

Örneğin, bir grafın köşelerinin sayısı, kenarlarının sayısı, en iyi aşikar invaryantlardır. Böyle nümerik invaryantların yanı sıra polinom invaryantları inşa etmek de mümkündür.

G bir graf olsun. n renkli bir palet kullanarak grafın köşelerini renklendireceğiz. Uygulanacak yol bu renklerle bitişikteki iki köşeyi (köşeler bir kenarın uç noktalarıdır) farklı renklerle boyamaktır. Yukarıdaki bu yöntem G nin bir (köşe) renklendirmesi denir. n renkli bir paletle sahip olsak dahi, onların hepsini renklendirme yönteminde kullanmak gerekmez (Şkil 2.9.(a)).



Şkil 2.9. Dört köşeli bir grafın renklendirilmesi

$\tilde{\rho}_n(G)$, (en fazla) n renkli G nin mümkün olan renklendirme sayısını gösterebilir ve $\rho_n(G) = \frac{1}{n} \tilde{\rho}_n(G)$ alalım. Eğer bir köşenin rengini sabit tutarsak $\rho_n(G)$ n tane renk kullanarak diğer köşeleri renklendirebileceğimiz yolların sayısı olur. Dolayısıyla, bu

sayı asla negatif olamaz. Birkaç (sonlu) n için $\rho_n(G)$ den aşağıdaki anlamda bir $\rho_G(t)$ polinomu (tam bir kuvvet serisi oluşturur) tanımlayabiliriz.

$$\rho_G(t) = \rho_1(G)t + \rho_2(G)t^2 + \dots + \rho_n(G)t^n + \dots$$

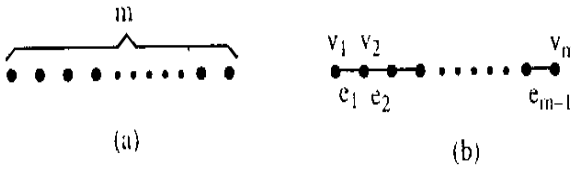
$\rho_G(t)$ kuvvet serisine G nin *kromatik polinomu* denir [21,28].

Eğer G bir ilmeğe sahip ise, o zaman $\rho_n(G)$ sıfır olur (Şekil 2.9.(b)). Bu durumda, ilmeğin P uç noktası kendisine komşu olduğundan, P ye bir renk veremeyiz. Birkaç örnek için $\rho_n(G)$ yi hesaplayalım.

Örnek 2.3.3. Farz edelim ki G sadece m köşelerinden oluşan bir graftır, yani G nin kenarları olmasın (Şekil 2.9.(a)). O zaman her bir köşe diğerinden bağımsız olarak renklendirilebilir; böylece, $\tilde{\rho}_n(G) = n^m$. Buradan,

$$\rho_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} t^n$$

olur.



Şekil 2.10. İki graf diyagramı

Örnek 2.3.4. $G, [v_1, v_2, \dots, v_m]$, m köşelerinden ve $[e_1, e_2, \dots, e_{m-1}]$, $m-1$ kenarlarından oluşan bir graf olsun, öyle ki e_i nin uç noktaları v_i ve v_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, m-1$) olsun (Şekil 2.9.(b)). Bu durumda v_1 köşesini n renkle renklendirebiliriz. Sonraki köşe v_2 , v_1 de kullanılan aynı renk ile renklendirilemez. Mümkün olan $n-1$ renk ile renklendirilebilir. Benzer şekilde v_3 ü $n-1$ renk ile renklendirmek mümkündür. Bu yolu gösterelim.

$$\tilde{\rho}_n(G) = n(n-1)^{m-1}$$

Böylece,

$$\rho_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^{m-1} t^n$$

olur.

Örnek 2.3.5. G bir m kenarlı çokgen olduğu zaman,

$$\rho_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^{m-1} t^n$$

olur

BÖLÜM III

BAZI SAYISAL DÜĞÜM İNVARYANTLARI

3.1. Kavşak Sayısı



Tanım 3.1.1. Bir K düğümünün herhangi bir diyagramındaki kavşakların minimum sayısına K 'nin kavşak sayısı denir ve $c(K)$ ile gösterilir.

Kavşak sayısının düğümün bir invaryantı olduğu açıktır. Örneğin Şekil 2.4 de verilen sekiz şekilli düğümün kavşak sayısı dördür.

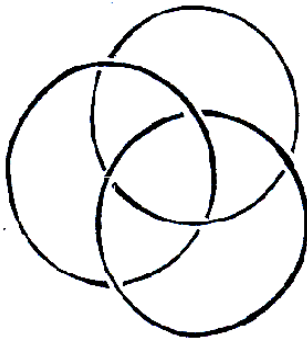
3.2. Bileşen Sayısı

Tanım 3.1.2. Bir halka diyagramının bir yayı üzerinde bir nokta seçildiğinde ve daha sonra diyagram etrafında dolanılıp o noktalara tekrar dönüldüğünde geçit noktalarının kavşaklanması ile oluşan karışık diyagramdan bileşen sayısı belirlenebilir. Her bir bileşen bu yolla elde edilen bir tam devirdir.

Örnek olarak, Şekil 3.1 de bir üç bileşenli halka diyagramı çizilmiştir.

Gerçekte denklik ile değişen bileşen sayısının Reidemeister hareketlerinin bir dizisinin sonucu olduğuna dikkat edilmelidir. Bileşen sayısı çok güçlü bir invaryant değildir. Örneğin  ve  diyagramlarının her biri iki bileşene sahiptir. Ama gerçekte bu diyagramlar denk değildirler.

Bu tanıma göre tek bileşenli halkaya düğüm denilebilir.



Şekil 3.1. Bileşen sayısı üç olan bir halka

3.3. Halkalanma Sayısı

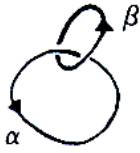
Tanım 3.3.1. Bileşenleri α ve β olan iki bileşenli bir halka verildiğinde $\alpha \cap \beta$, α bileşeni ile β bileşeninin kavşaklanmalarının kümesini gösterebilir (Böylece $\alpha \cap \beta$, α nın yada β nın kendi kavşaklanmalarını içermez.). Bu takdirde α ile β nın halkalanma sayısı

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p)$$

şeklinde tanımlanır [15].

Diğer bir deyişle, halkalanma sayısı bir eğri ile diğerinin kavşaklanma işaretlerinin toplamının yarısıdır. Burada $\varepsilon(p)$, p ile gösterilen kavşağın işaretidir ve toplam bütün p kavşakları üzerinde alınmıştır.

Örnek 3.3.2.



$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

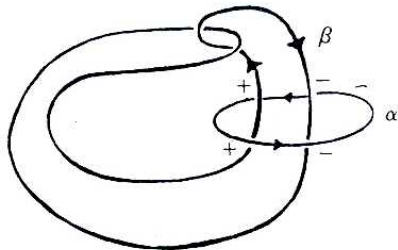
Örnek 3.3.3.



$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1$$

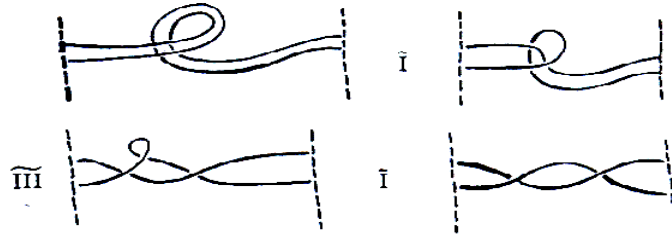
Halkalanma sayısının invariantlığı Reidemeister hareketlerinden hemen çıkar. I.Tip hareketler halkalanma sayısına katkıda bulunmaz. II.Tip hareketlerde halkalanma sayısına +1 ve -1 eklenir yada çıkarılır. III.Tip hareketler toplamları etkilemez. Böylece en basit halkanın halkalanmış olduğunu ispatlamak için yukarıdaki iki örnek yeterlidir.

Örnek 3.3.4.

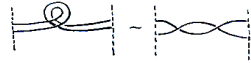


$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(1 + 1 - 1 - 1) = 0$$

Örnek 3.3.5.

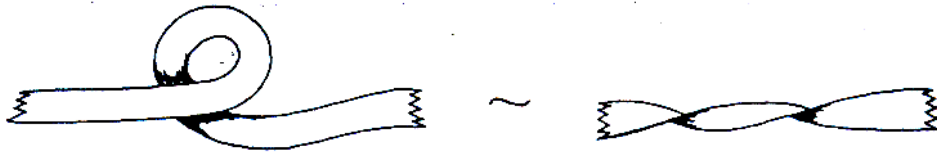


Bu örnekte diyagramın uç noktaları sabit tutularak

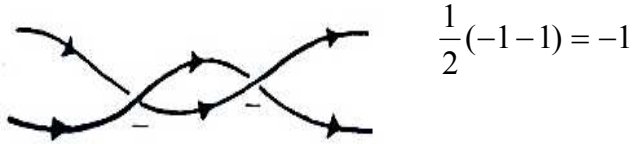


denkliği elde edilir.

Bu bilinen fiziksel olay bir kemer ile şekillendirilir (İki yayı bir kemerin kenarları olarak biçimlendirme).

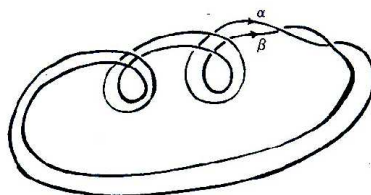




Eğer kemerin kenarları aynı yönde yönlendirilmişse bu takdirde halkalanma sayısının bu formlardan herhangi birine nasıl katkısı olduğu görülür.



Bu gözlemler aşağıdaki şekildeki gibi bir karmaşık halkanın halkalanma sayısından bulunur.

Örnek 3.3.6.

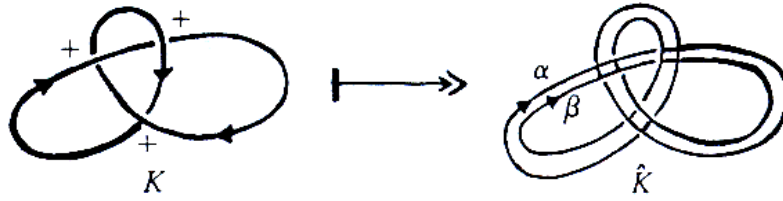


Bu diyagramda  burulması, her bir eğrinin halkalanma sayısına +1 katkıda bulunur ve  kavşağı iki kez $\frac{1}{2}(1+1) = 1$ şeklinde ortaya çıkar. Böylece

$$lk(\alpha, \beta) = 1 + 1 + 1 = 3$$

olur.

Gerçekte bir halkanın halkalanma sayısı aynı zamanda düğüme bir paralel ip eklenmesiyle inşa edilir.



$$lk(\alpha, \beta) = w(K) = 3$$

Sonuçlanan halka \hat{K} nın kavşak işaretlerinin toplamına eşit halkalanma sayısına sahiptir. Bu toplam $w(K)$ ile gösterilir ve K nın burulma sayısı olarak adlandırılır.

3.4. Burulma Sayısı

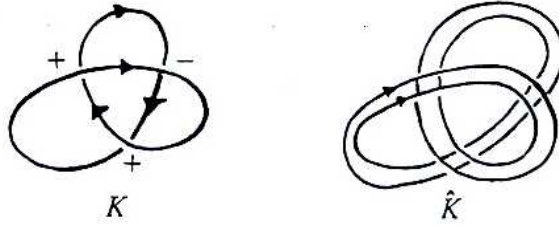
Tanım 3.4.1. K herhangi bir yönlendirilmiş halka diyagramı olsun. $c(K)$, K diyagramındaki kavşakların kümesi olmak üzere K nın burulma sayısı

$$w(K) = \sum_{p \in c(K)} \varepsilon(p)$$

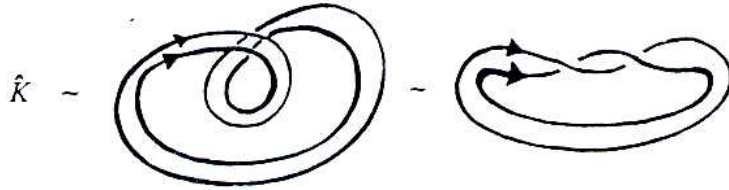
ile tanımlanır. Burada toplam, K diyagramının bütün kavşakları üzerindedir ve $\varepsilon(p)$ ise p kavşağının işaretidir.

Dikkat edilirse, $w(K)$ nın bir regüler izotopi invaryantı olduğu görülür. Kavşak işaretleri I.Tip hareket altında ± 1 ile değiştiği için $w(K)$ nın, K nın invaryantı olması gerekmez. Ama burulma iplerin üzerine paralel iplerin çizilmesiyle elde edilen birleştirilmiş \hat{K} halkasının bir invaryantıdır [15].

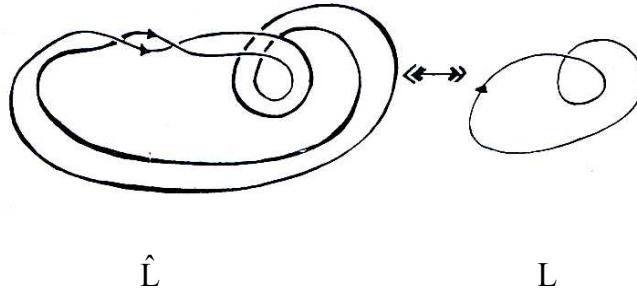
Örnek 3.4.2.



$$\text{lk}(\hat{K}) = w(K) = +1$$

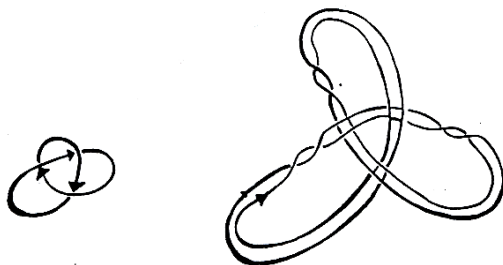


Paralel ipleri birleştirilmiş \hat{K} halkasının durumunda $w(K)$ yı \hat{K} halkasının burulma sayısı olarak ve $T(\hat{K})$ yı iplerin kıvrılma sayısı olarak adlandırmak uygundur. Böylece ∞ tamamen pozitif bir kıvrılma olarak adlandırılır ve $T(\infty) = +1$ olur. Bu takdirde paralel kıvrımlı iplerin oluşturduğu \hat{L} halkası için halkalanma sayısı kıvrımların ve burulmaların toplamıdır. Böylece



$$\left. \begin{array}{l} w(L) = +1 \\ T(\hat{L}) = +1 \end{array} \right\} \implies \text{lk}(\hat{K}) = 1+1 = 2$$

Örnek 3.4.3.



$$w(L) = +3$$

$$T(\hat{L}) = -3$$

$$\text{lk}(\hat{L}) = 3-3 = 0$$

BÖLÜM IV

BAZI POLİNOM İNVARYANTLARI

4.1. Parantez Polinomu

Tanım 4.1.1. Yönlendirilmemiş bir K halka diyagramı verilsin. $[K] \in Z[A,B,d]$ değişmeli A , B ve d cebirsel değişkenlerine karşılık gelen ve K halkasını temsil eden bir polinomu gösterebiliriz. Parantez polinomu adı verilen bu polinom aşağıdaki aksiyomları sağlar [10,11,12,14,15].

$$1. \quad \left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right] = A \left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \right] + B \left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right]$$
$$\left[\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right] = B \left[\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \right] + A \left[\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right]$$

$$2. \quad [O] = d, \quad [OK] = d[K], \text{ burada } O, \text{ sıfır kavşaklı aşık düğümü gösterir}$$

Bu aksiyomların birincisinde; bir yönlendirilmemiş kavşak, aynı köşede buluşan dört bölgeden ikisini dışa doğru ayırır. Bu üstten kavşak çizgisinin saatin dönüş yönünün tersine döndürülmesi ve taranan iki bölgenin seçilmesiyle yapılabilir. Bu bölgeler



biçiminde A ve B ile gösterilirse, bu durumda 1. aksiyomdaki formül

$$\left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right] = A \left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \right] + B \left[\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right]$$

şeklinde verilir. Yani B , B -kanalını açan bir ayırmaya karşılık gelirken A , A -kanalını açan bir ayırmaya karşılık gelir. Bu eşitlikteki kavşaklar küçük diyagramları temsil ederler. Bunlar büyük özdeş diyagramların parçaları olarak alınır.

Örnek 4.1.2. Yonca yaprağı düğümü için bu eşitlik aşağıdaki gibi verilir.

$$\left[\text{Yonca yaprağı} \right] = A \left[\text{Yonca yaprağı (A)} \right] + B \left[\text{Yonca yaprağı (B)} \right]$$

2. aksiyom, hiç bir kavşağı olmayan aşık düğümün (çemberin) parantez değerinin d olduğunu ve halka diyagramının herhangi bir yerinde bulunan bir çember ile halkanın

ayrık bileşiminin parantez değeri, halkanın parantez değerinin d ile çarpılmasını ifade eder. Özel olarak,

$$[\text{ayrık } N \text{ tane basit kapalı eğriler}] = d^N$$

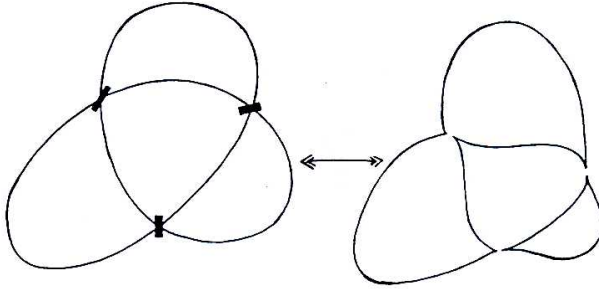
olur. Böylece $[\text{⊙} \text{ } \text{○}] = d^3$ ile gösterilir.

Açıkça, basit kapalı eğrilerin parantez değerleri, yukarıdaki aksiyomlar sayesinde $[K]$ nin hesaplamasına yol gösterir.

$[K]$ değerinin iyi tanımlı olduğunu görmek için $[K]$ yı bir U evreninin S durumları üzerinde bir toplam olarak yeniden formüleştirmek yeterlidir. U, K için bir evren olsun. U nun bir S durumu U nun her bir köşesinde ayırmasının bir seçimidir. Böyle seçimler köşedeki markalarla gösterilir (Şekil 4.1). Yonca yaprağı düğümünün evreninin bir durumunu ve ona karşılık gelen ayırma Şekil 4.2 de gösterildi. Bir S durumu verildiğinde $|S|$ onun ayırımındaki bileşenlerin sayısını gösterebilir.



Şekil 4.1. Kavşakların markalanması ve karşılık gelen ayırmalar



Şekil 4.2. Yonca yaprağı düğümünün evreni, bir markalanması ve karşılık gelen durumu

Lemma 4.1.3. $i_K(S)$, S içindeki açılmış A-kanalının sayısını ve $j_K(S)$, S içindeki açılmış B-kanalının sayısını gösterebilir. Bu durumda K diyagramının parantez değeri

$$[K] = \sum_S A^{i_K(S)} B^{j_K(S)} d^{|S|}$$

formülü ile verilir [12]. Parantezin değeri için bu formül aksiyomlardan direkt çıkar.

Hangi şartlar altında parantez polinomu düğüm ve halkaların bir topolojik invariantı olur, sorusunu cevaplandırmak için bu polinomun Reidemeister hareketleri altındaki davranışlarını incelemek gerekir.

Lemma 4.1.4.

$$[\text{II}] = AB[\text{I}] + (ABd + A^2 + B^2)[\text{III}]$$

İspat.

$$\begin{aligned} [\text{II}] &= A[\text{IIa}] + B[\text{IIb}] \\ &= A^2[\text{IIa1}] + AB[\text{IIa2}] + BA[\text{I}] + B^2[\text{IIa3}] \\ &= AB[\text{I}] + (A^2 + B^2 + dAB)[\text{III}] \end{aligned}$$

Böylece $AB = 1$ ve $d = -A^2 - B^2$ ile II. Tip Reidemeister hareketi altında invariyantlık elde edilir.

Lemma 4.1.5. Eğer $[\text{II}] = [\text{I}]$ ise bu takdirde $[\text{III}]$, III. Tip hareket altında invariyanttır.

İspat. Eğer 1.aksiyom III. Tip harekete uygulanırsa,

$$\begin{aligned} [\text{IIIa}] &= A[\text{IIIb}] + B[\text{IIIc}] \\ &= A[\text{IIIb1}] + B[\text{IIIc1}] \\ \therefore [\text{IIIa}] &= [\text{IIIb}] \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $B = A^{-1}$, $d = -A^2 - A^{-2}$ şartları ile parantez polinomu, II. Tip ve III. Tip Reidemeister hareketleri altında invariyant kalır. Regüler izotopi ile üretilen bu invariyant polinomun genel parantez polinomundan farklı ele alınır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 4.1.6. Yönlendirilmemiş bir K halka diyagramı verilsin. $\langle K \rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$, K halkasını temsil eden bir Laurent polinomu olsun. Kare parantez polinomu adı verilen bu polinom aşağıdaki aksiyomları sağlar.

1. Eğer K diyagramı bir K' diyagramına regüler izotop ise, $\langle K \rangle = \langle K' \rangle$,

$$\begin{aligned} 2. \quad \langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle \\ \langle \text{X} \rangle &= A^{-1} \langle \text{X} \rangle + A \langle \text{X} \rangle \end{aligned}$$

$$3. \quad \langle \bigcirc \rangle = 1, \quad \langle \bigcirc K \rangle = d \langle K \rangle, \quad d = -A^2 - A^{-2}$$

Böylece $\langle K \rangle = d^{-1}[K]$ yazılabilir.

II. ve III. Tip hareketler altında invaryant olan bu özel parantez, I. Tip hareket altında da aşağıdaki gibi davranır.

Lemma 4.1.7. $\alpha = -A^3$ olsun. Bu takdirde

$$\langle \text{X} \rangle = \alpha \langle \text{X} \rangle$$

$$\langle \text{X} \rangle = \alpha^{-1} \langle \text{X} \rangle$$

olur.

Bu lemmanın ispatı Tanım 4.1.6 dan kolayca çıkar.

Bu lemmadan da anlaşılacağı gibi $\langle K \rangle$ kare parantez polinomu kuşatan izotopinin bir invaryantı değildir. $\langle K \rangle$ polinomundan bir kuşatan izotopi invaryantı oluşturmak mümkündür. Bunun için burulma sayısından faydalanılır. Bir yönlendirilmiş K halkasının burulma sayısı $w(K)$ nın bir regüler izotopi invaryantı olduğu bilinmektedir ($w(K)$ bütün kavşakların işaretlerinin toplamıdır).

4.2. Normalize Edilmiş Parantez Polinomu

Tanım 3.2.1. K bir halka diyagramı, $\langle K \rangle$, K nın regüler izotopi invaryantı olan parantez polinomu ve $w(K)$, K nın burulma sayısı olsun.

$$f_K = \alpha^{-w(K)} \langle K \rangle$$

polinomuna normalize edilmiş parantez polinomu denir [10,12].

Önerme 4.2.2. Normalize edilmiş f_K polinomu, yönlendirilmiş K halka diyagramları için kuşatan izotopinin bir invaryantıdır.

İspat. f_K nın yalnızca I.Tip hareket altındaki davranışını incelemek yeterlidir. Çünkü $\langle K \rangle$ ve $w(K)$ regüler izotopinin invariantları olduklarından onların çarpımı şeklinde olan f_K polinomuda regüler izotopinin bir invariantıdır.

$w(\overline{\sigma}) = 1+w(\sigma)$ and $w(\sigma) = -1+w(\overline{\sigma})$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_{\overline{\sigma}} &= \alpha^{-w(\overline{\sigma})} \langle \overline{\sigma} \rangle \\ &= (-A^3)^{-(1+w(\sigma))} (-A^3) \langle \sigma \rangle \\ &= (-A^3)^{-w(\sigma)} \langle \sigma \rangle = f_{\sigma} \end{aligned}$$

bulunur.

Aslında normalize edilmiş parantez polinomu orijinal Jones polinomunun bir versiyonudur.

Tanım 4.2.3. K bir yönlendirilmiş halka olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan \sqrt{t} değişkenli Laurent polinomuna Jones polinomu denir [8,9]. Ve $V_K(t)$ ile gösterilir.

$$1) t^1 V_{\searrow \swarrow} - t V_{\swarrow \searrow} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{\smile \frown}$$

$$2) V_O = 1$$

3) $V_K(t)$ bir kuşatan izotopi invariantıdır.

Teorem 4.2.4. $V_K(t)$, K nın Jones polinomu ve $f_K(A)$, K nın normalize edilmiş parantez polinomu olsun. Bu durumda $f_K(t^{-1/4}) = V_K(t)$ olur.

İspat.

$$\langle \searrow \swarrow \rangle = A \langle \smile \frown \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle$$

$$\langle \swarrow \searrow \rangle = A^{-1} \langle \smile \frown \rangle + A \langle \rangle \langle \rangle$$

eşitliklerinden

$$A^{+1} \langle \searrow \swarrow \rangle - A^{-1} \langle \swarrow \searrow \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \smile \frown \rangle$$

$$A \alpha \langle \searrow \swarrow \rangle \alpha^{-w(\searrow \swarrow)} - A^{-1} \alpha^{-1} \langle \swarrow \searrow \rangle \alpha^{-w(\swarrow \searrow)} = (A^2 - A^{-2}) \langle \smile \frown \rangle \alpha^{-w(\smile \frown)}$$

$$A \alpha f_{\searrow \swarrow} - A^{-1} \alpha^{-1} f_{\swarrow \searrow} = (A^2 - A^{-2}) f_{\smile \frown} \quad (f_K = \alpha^{-w(K)} \langle K \rangle)$$

$$-A^4 f_{\searrow \swarrow} + A^4 f_{\swarrow \searrow} = (A^2 - A^{-2}) f_{\smile \frown}$$

elde edilir. $A=t^{-1/4}$ alınırsa

$$t^{-1}V \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} - tV \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}$$

elde edilir. Bu Tanım 3.2.3 ün 1. aksiyomudur. Diğer aksiyomların sağlandığını görmek zor değildir.

Örnek 4.2.5.

$$\begin{aligned} \langle \text{O} \rangle &= A \langle \text{O} \rangle + A^{-1} \langle \text{O} \rangle \\ &= A(\alpha) + A^{-1}(\alpha^{-1}) \\ &= -A^{-4} - A^{-4} \end{aligned}$$

Örnek 4.2.6.

$$\begin{aligned} \langle \text{T} \rangle &= A \langle \text{T} \rangle + A^{-1} \langle \text{T} \rangle \\ &= A(-A^4 - A^{-4}) + A^{-1}(-A^{-3})^2 \\ &= -A^5 - A^{-3} + A^{-7} \\ f_T &= \alpha^3 \langle T \rangle = -A^{-9} \langle T \rangle = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16} \end{aligned}$$

BÖLÜM V

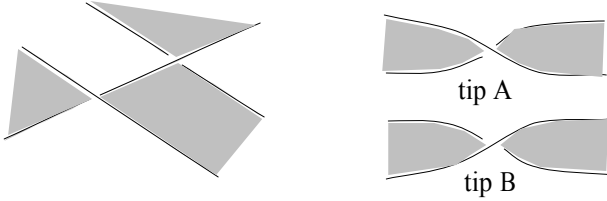
UYGULAMALAR

5.1. Alterne Dügümler ve Halkalar

Parantez polinomunun tekniği, alterne düğüm ve halkaların bazı özelliklerini ortaya çıkarmak için kullanılabilir. Özel olarak böyle halkaların parantez polinomlarının maximum ve minimum dereceli terimlerinin bir özel formülü belirlenebilir.

Tanım 5.1.1. Bir diyagramın kavşakları üst geçit-alt geçit-üst geçit ... şeklinde birbirini takip ediyorsa bu diyagrama bir alterne diyagram denir. Eğer bir halka bir alterne diyagrama sahipse o zaman o halkaya alterne halka denir.

Şekil 5.1 de olduğu gibi bir alterne halkanın taranmış diyagramında, her bir kavşakta taranan bölgelerin hepsi aynı tiptedir (A ve B burada parantezi tanımlamak için aynı ayırımdır).



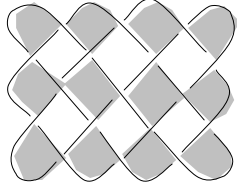
Şekil 5.1. Bir alterne diyagram

$\langle K \rangle$ içinde en yüksek dereceli terimi tahmin etmek için parantez polinomu,

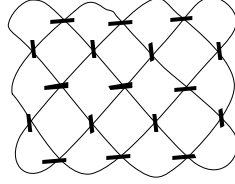
$$\langle K \rangle = \sum_S A^{i_K(S)} A^{-j_K(S)} d^{|S|-1}$$

toplamıyla verilsin. En yüksek dereceli terim bütün markaları A kanalı ile açılan S durumu ile verilsin. Böyle bir durum $A^V d^{|S|-1}$ formundaki bir terim ile gösterilir. Burada V, K diyagramındaki köşelerin sayısıdır. Ve taranmış diyagramından görülür ki alterne halka durumunda S, A-kanal durumunda W bileşenlerine sahiptir ($|S| = W$). Burada W taranmamış bölgelerin sayısıdır ve bütün A-kanalları taranmıştır. Şekil 5.2 ye de bakınız.

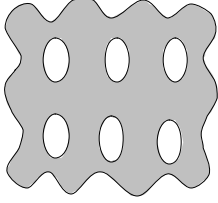
Gerçekten $|S| = W$ dir. Çünkü bütün taranmış kavşaklar ayrılmıştır. Taranmış küçük bölgeler birleşerek bir büyük taranmış bölge oluşturur. Bu bölgenin sınır bileşenleri taranmamış bölgelerin sınırlarıdır. Böylece S durumu $A^V d^{W-1} = A^V (-A^2 - A^{-2})^{W-1}$ teriminin ortaya çıkmasına sebep olur. Buradan aşağıdaki teorem ifade edilebilir.



K



S



S (ayırma)

$$\begin{aligned} V &= 17 \\ W &= 7, B = 12 \\ R &= 7+12 = V+2 \\ |S| &= 7 = W \end{aligned}$$

Şekil 5.2. Bir ayırma durumu

Teorem 5.1.2. K bir indirgenmiş alterne diyagram olsun. Bu takdirde $\langle K \rangle$ içinde en yüksek dereceli terim

$$\max \deg \langle K \rangle = V+2(W-1)$$

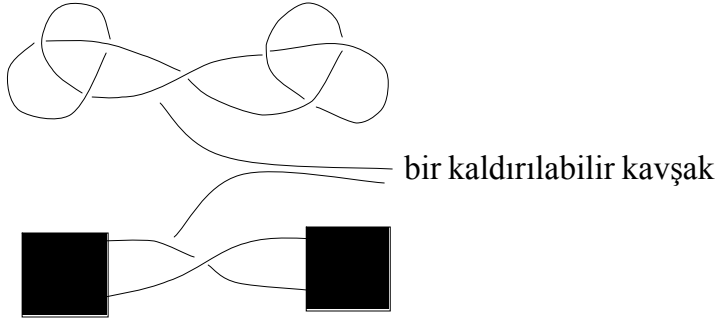
formülü ile verilir. Burada V diyagramdaki köşelerin sayısıdır. W taranmamış bölgelerin sayısıdır (tip A kavşaklarına karşılık gelen taramalar).

Bu terim $\langle K \rangle$ içinde ± 1 e eşit katsayıya sahiptir. Minimum dereceli terim bunun tam tersidir. Yani minimum dereceli terim

$$\min \deg \langle K \rangle = -V-2(B-1)$$

formülü ile verilir. Burada B taranmış bölgelerin sayısıdır.

Hatırlatma 5.1.3. Eğer bir diyagram kaldırılabilir bir kavşak noktasına sahip değilse o diyagram indirgenmiştir. Eğer bir kavşakta dört yerel bölgeden herhangi ikisi bütün diyagramda aynı bölgenin parçaları ise bu kavşağa kaldırılabilir kavşak denir (Şekil 5.3 e bakınız).



Şekil 5.3. Bir kaldırılabilir kavşak

Teorem 5.1.2 nin ispatı: S , bir A -kanal durumu olsun. Bu durumda S durumundan bir başka S' durumu elde edilebilir. Herhangi bir S' durumu için

$$\langle K \rangle = \sum_S A^{i_k(S)} A^{-j_k(S)} d^{|S|-1}$$

parantez toplamında bu duruma karşılık gelen terimi (dağılımı) belirtsin.

$B = A^{-1}, d = -A^2 - A^{-2}$ dir. Böylece

$$\langle K \rangle = \sum_{S'} \langle K|S' \rangle$$

olur. Şimdi aşağıdaki gerçeğe göz önünde bulundurulmalıdır.

(i) Eğer S', S'' den bir A -kanal ayırma yerine bir B -kanal ayırma ile elde edilirse bu takdirde $\max \text{derece} \langle K|S' \rangle \leq \max \text{derece} \langle K|S'' \rangle$ olur. S', S'' den daha az bileşene sahip olduğunda eşitsizlik tamamen doğrudur. Yani $|S'| = |S''| - 1$ olur.

(ii) Eğer S' bir ayırmayla A -kanal durumundan elde edilirse bu takdirde $|S'| = |S| - 1$ olur.

(i) deki ifadenin doğruluğu açıktır. Çünkü $\langle K|S'' \rangle = A^x d^{|S''|-1}$ ise $\langle K|S' \rangle = A^{x-2} d^{|S''|-1}$ olur. S' bir ayrılmayla S'' den elde edildiği için $|S'| = |S''| \pm 1$ olduğu açıktır. Eğer $|S'| = |S''| + 1$ ise, bu takdirde $\langle K|S' \rangle = A^{x-2} d^{|S''|}$ olur. Böylece $\max \text{derece} \langle K|S' \rangle = \max \text{derece} \langle K|S'' \rangle$ olur. Eğer $|S'| = |S''| - 1$ ise bu takdirde $\langle K|S' \rangle = A^{x-2} d^{|S''|-1}$ ($d = -A^2 - A^{-2}$ yi kullanarak) ve $\max \text{derece} \langle K|S' \rangle = \max \text{derece} \langle K|S'' \rangle - 4$ olur. Bu (i) iddiasını doğrular.

(ii) deki ifade kaldırılabilir kavşakların olmaması hipotezinin bir sonucudur. $|S'| = |S| + 1$ olduğu kabul edilir. Bu durumda değişen kavşak tipi S' nün bileşenlerinden birisidir. Bu değişen kavşak tipi orijinal düğüm diyagramının tamamını ya da bir kısmını değiştirmez. Bu değişimin S durumundaki dağılıma ait olduğuna dikkat edilmelidir.

Eğer $|S'| = |S|-1$ ise, bu takdirde değişen kavşak tipinin bulunduğu yerdeki $(\) (\)$ ayırması S nin ayrılan bileşenleri üzerinde bulunur. Bu işleme bu kenarın bir kaldırılabilir kavşağa sahip olmadığı görülene kadar devam edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece $|S'| = |S|-1$ dir ve $\max \text{ derece } \langle K|S' \rangle = \max \text{ derece } \langle K|S \rangle -4$ olur. (i) ve (ii) den anlaşıldığı gibi bütün S'' durumları için $\max \text{ derece } \langle K|S'' \rangle < \max \text{ derece } \langle K|S \rangle$ olur. Buradan

$$\max \text{ derece } \langle K \rangle = \max \text{ derece } \langle K|S \rangle = V+2(W-1)$$

çıkar. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi aşağıdaki teoreme dikkat edilmelidir.

Teorem 5.1.4 (Kauffman-Murasugi-Thistlethwaite). Bir L halkasının bir indirgenmiş alterne izdüşümündeki kavşaklarının sayısı L nin bir topolojik invaryantıdır [12,21,27].

İspat. $\text{span}(L)$, $\langle L \rangle$ nin \max ve \min dereceleri arasındaki farkı gösterebilir. $f_L = \alpha^{-w(L)} \langle L \rangle$, L nin bir kuşatan izotopi invaryantı olduğu için $\text{span}(L)$ nin de aynı zamanda bir kuşatan izotopi invaryantı olduğu sonucuna varılır. Teorem 5.1.2 ile

$$\max \text{ derece } \langle L \rangle = V+2(W-1) \quad \min \text{ derece } \langle L \rangle = -V+2(B-1)$$

dir. Burada V diyagramdaki kavşakların sayısı, W taranmamış bölgelerin sayısı ve B taranmış bölgelerin sayısıdır (Taramada bütün A tipi kavşaklar taranmıştır). $W+B = R$, diyagramdaki bölgelerin toplam sayısıdır ve $R = V+2$ olur. Böylece

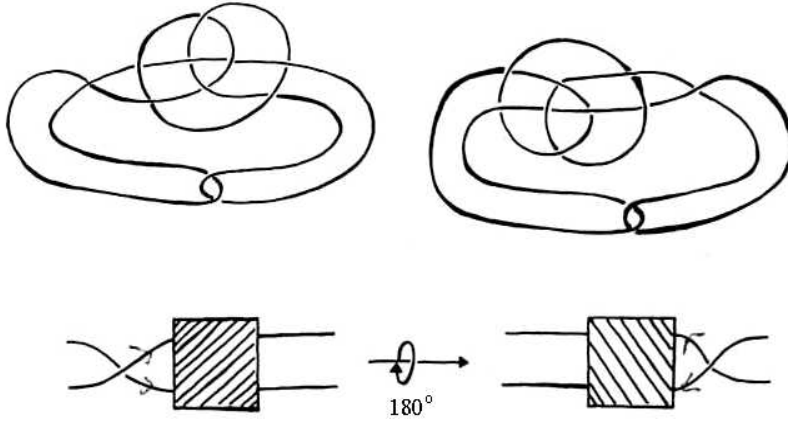
$$\begin{aligned} \text{span}(L) &= V+2(W-1) - (-V+2(B-1)) \\ &= 2V+2(W+B-2) \\ &= 2V+2(R-2) \\ &= 2V+2(V+2-2) = 4V \end{aligned}$$

Bu ispatı tamamlar.

Açıklama 5.1.5. Bu sonuç alterne düğümler ve halkalar hakkındaki klasik tahminlerden birisidir. Bu sonuçla birlikte Tait ve Little ile düğüm tablolarının orijinal listelerine geri dönülebilir. Aynı zamanda bu yazarlar bir indirgenmiş alterne izdüşümün minimum kavşak sayısına sahip izdüşüm olduğunu tahmin ettiler [26]. Bu ancak alınan halkanın herhangi bir izdüşümünün en az sayıda kavşak noktasına sahip olmasıyla gerçekleşir.

Öte yandan bu bir Tait döndürme tahmini olarak bilinir. Bu tahmin şu şekilde yapılmıştır. Aynı halkanın herhangi iki indirgenmiş alterne izdüşümlerinden biri kuşatan izotopi farkıyla diğerinden bir döndürme ile elde edilebilir [26]. Bir dolaşık üzerinde bir döndürme (iki giriş ve iki çıkış ile) dolaşığın 180° döndürülmesi ile elde edilen bir harekettir (Şekil 5.4 e bakınız). Aslında bir döndürme tahmini aşağıdaki ifadeyi gerektirir. Bir indirgenmiş alterne K izdüşümünün burulma sayısı $w(K)$ bir kuşatan izotopi invariantıdır. Morwen Thistlethwaite indirgenmiş alterne diyagramlar için $w(K)$ nın bir kuşatan izotopi invariantı olduğunu ispatlamıştır [27].

Bu ispat da iki değişkenli Brandt-Lickorish-Millett-Ho polinomunun [16,17,18] genişletilmiş olan Kauffman polinomunu [12] kullanılır.



Şekil 5.4. Döndürme hareketi

Aşağıdaki Lemma $\text{span}(K) \leq 4V$ genel eşitsizliğinin bir pratik ispatını verir (İlk kez Murasugi [21] ve Thistlethwaite [27] tarafından birbirinden bağımsız olarak ispatlandı).

Lemma 5.1.6. S bir U evreninin herhangi bir durumu olsun. Bu takdirde $|S| + |\hat{S}| = R$ olur. Burada R , U içindeki bölgelerin sayısı ve \hat{S} bütün S nin ayırmalarının ters çevrilmesiyle elde edilen S nin dual bir durumudur [14]. Örnek için Şekil 5.5 e bakınız.

Bu Lemma aşağıdaki önermeyi ispatlamak için kullanılacaktır.

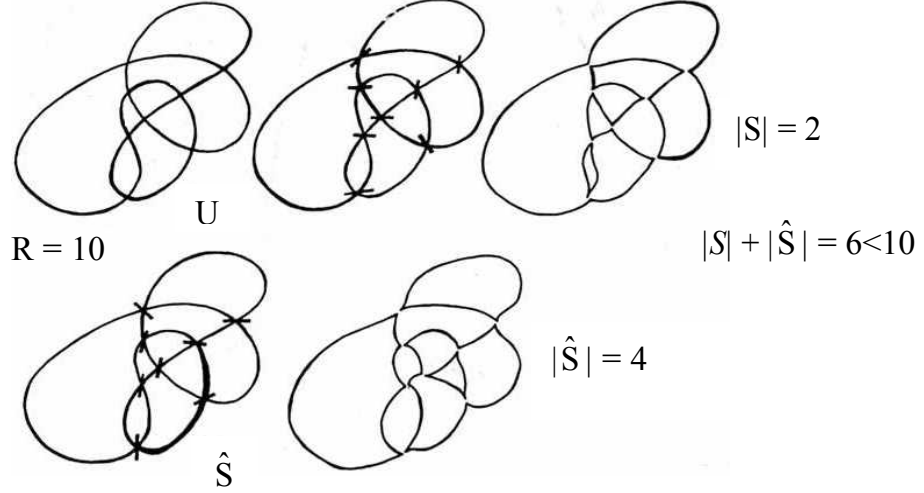
Önerme 5.1.7. Herhangi bir indirgenmiş K diyagramı için $\text{span}(K) \leq 4V$ dir. Burada V , K daki kavşakların sayısıdır.

İspat. S , K nın her bir kavşağı A -yönünde ayrılan bir durumu olsun. Bu durumda Teorem 5.1.2 de olduğu gibi

$$\max \text{derece}(K) \leq V+2 (|S|-1), \quad \min \text{derece}(K) = V-2 (|\hat{S}|-1)$$

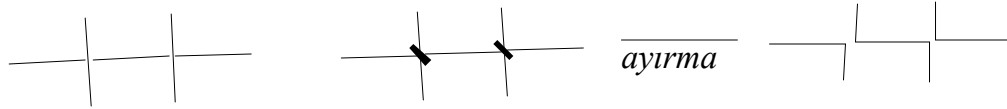
olur. Böylece $\text{span}(K) = 2V + (|S| + |\hat{S}| - 2) \leq 4V$ olur.

Lemma 5.1.6'nın ispatından anlaşılır ki K herhangi bir indirgenmiş alterne olmayan diyagram olduğunda $\text{span}(K) < 4V$ dir.



Şekil 5.5. Bir evrenin durumu ve dual durumu

Bu aynı zamanda Murasugi [21] ve Thistlethwaite[27] ye ait benzer eşitsizliğin bir ispatını verir. Wu nun iyi bir gözlemi şudur: Bir S durumunda bir alterne olmayan diyagram A-yönünde ayrıldığında modeldeki iki ardışık üst ve alt kavşaklara karşılık gelen ayrılmalar görülmelidir.



Bu paralel ayrılmaların bir çifti olarak adlandırılır. Eğer S paralel markaların en az bir çiftine sahipse bu takdirde $|S| + |\hat{S}| \leq V$ dir. Bu Önerme 5.1.7 deki ifade de yerine yazılırsa, K indirgenmiş ve alterne olmadığında $\text{span}(K) < 4V$ eşitsizliği elde edilir. Böylece bir indirgenmiş alterne izdüşüm, halkanın bütün diyagramları arasında minimum kavşaklı diyagrama sahiptir. Bu düğüm teorisindeki ilk sonuçlardan birisidir. Bu tekniğin bazı uygulamaları vardır. Örneğin, D.W.Sumners, düğümlerin sayısını artırmak için bu tekniği kullanarak minimum kavşak sayılarını veren bir üstel fonksiyon yazdı([16] ya bak).

Gözlem 5.1.8. Bir alterne halkanın ayna görüntüsüne denk olmadığını göstermek için Teorem 5.1.2 kullanılabilir. K , Teorem 5.1.2 deki gibi bir indirgenmiş alterne izdüşüm olsun. Bu takdirde

$$\max \text{ derece} \langle K \rangle = V+2(W-1), \quad \min \text{ derece} \langle K \rangle = -V-2(B-1)$$

dir. Böylece $f_K = \alpha^{-w(K)} \langle K \rangle$ polinomunu kullanılması ile

$$\max \text{ derece } f_K = -3w(K)+V+2(W-1)$$

$$\min \text{ derece } f_K = -3w(K)-V+2(B-1)$$

yazılabilir. Eğer K, K^* ayna görüntüsüne kuşatan izotop ise bu takdirde $f_{K^*}(A) = f_K(A^{-1})$ olması $f_K(A) = f_{K^*}(A^{-1})$ olmasını gerektirir. Böylece

$$-\min \text{ derece } f_K = \max \text{ derece } f_K \text{ ve } 3w(K)+V+2(B-1) = -3w(K)+V+2(W-1)$$

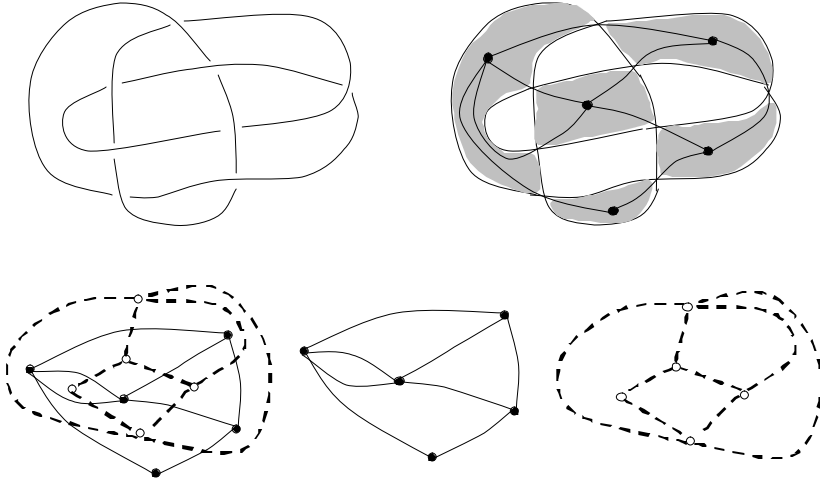
olur. Yani $6w(K) = 2(W-B)$ yada $3w(K) = W-B$ olur.

Böylece bir alterne halkanın ayna görüntüsüne denk olması için gerek şart elde edildi. Bu eşitlikten anlaşılacağı gibi eğer burulma sayısının mutlak değeri $|w(K)|$ kavşak sayılarının üç de birine eşit ya da büyük ise bu durumda halka ayna görüntüsüne denk değildir. Bu Tait tahmini yönünde bir yaklaşımdır.

Tahmin 5.1.9 (Tait Tahmini). $K, w(K) \neq 0$ olan indirgenmiş alterne diyagram olsun. Bu durumda K ayna görüntüsüne denk değildir [26].

Bunun ispatı Thistlethwaite [27] tarafından verildi. Aynı zamanda Murasugi $w(K)$ nın invaryant olduğunu ispatlamıştır [21]. Murasugi metodunda, max ve min derecelerin toplamı $s(K)$ nın, K nın bir kuşatan izotopi sınıfının bir invaryantı olduğuna dikkat edilir.

İndirgenmiş K alterne diyagramı için yukarıdaki ifadeden $s(K) = -6w(K)+2(W-B)$ olduğu alınır. Ayrıca indirgenmiş alterne K diyagramında $(W-B)-w(K)$ nın bir kuşatan izotopi invaryantı olduğunu göstermek için farklı bir teknik, düğümlerin ve halkaların işaretini de kullanır. Böylece $w(K)$ aynı zamanda invaryant olmalıdır. Burulma sayısı 0 olan ayna görüntüsüne denk çok sayıda indirgenmiş alterne düğüm vardır. Aslında bu düğümlerin her biri sadece $W = B$ eşitliğini doğrulamaz ama taranmamış bölgelerden oluşturulan bir graf taranmış bölgelerden oluşturulan bir grafa izomorftur. 8_{17} düğümünün bir örneği için Şekil 5.6 ya bakınız.



Şekil 5.6. 8_{17} Düğümü için izomorfik graf ve dual graf

5.2. Örgüler ve Diyagramlar

Bu bölümde Parantez polinomundaki teknik örgülere uygulanacaktır. n -ipli bir B_n örgü grubu $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ (ve tersleri) elemanları ve

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i - j| \geq 2$$

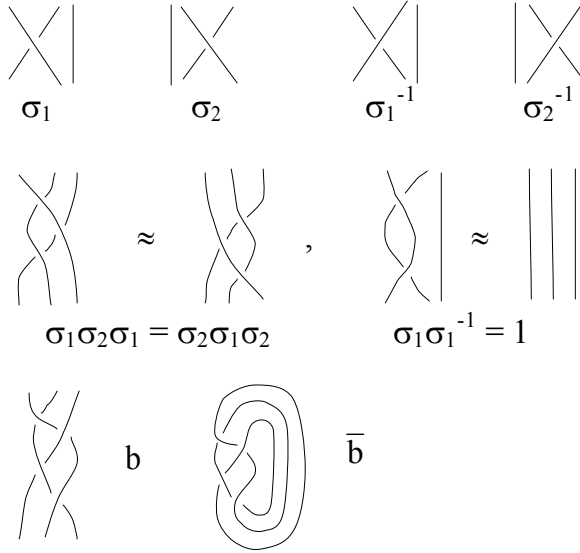
bağıntıları ile üretilir (Bölüm 2.2). Bu elemanların ve bağıntıların anlamı Şekil 5.7 den açıkça anlaşılacaktır. Bir örgü üstteki n noktayı alttaki n noktaya aşağı doğru bağlayan düğümlenmemiş iplerin bir kümesidir. İpler biri diğerinin etrafında yukarıdan aşağıya doğru sarılır.

Bir $b \in B_n$ örgüsü verilsin. Onun kapanışı \bar{b} alttaki n noktasının üstteki karşılık gelen n noktasına bağlanmasıyla elde edilen düğüm ya da halkadır (Şekil 5.7). Tanımdan dolayı bir örgü üzerindeki parantezin değeri örgünün kapanışı üzerindeki değeridir. Yani $\langle b \rangle = \langle \bar{b} \rangle$ dir. b_1, b_2 örgülerinin çarpımı birincinin alt sırasındaki n tane noktanın ikincinin üst sırasındaki n tane noktaya birleştirilmesidir (Şekil 5.7). Şimdi örgü grubunun her bir üreteğine parantez tekniği uygulanırsa Şekil 5.7 den de kolayca anlaşılabilir gibi h_i üreteçleri için

$$h_i^2 = dh_i$$

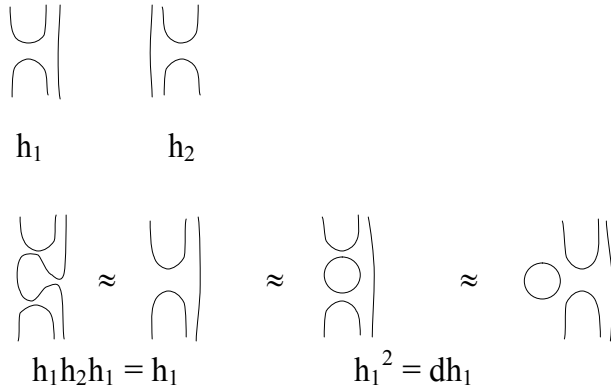
$$h_i h_{i \pm 1} h_i = h_i \quad (*)$$

$$h_i h_j = h_j h_i, \quad |i - j| \geq 2$$



Şekil 5.7. $n = 3$ için örgü üreteçleri, bağıntıları ve bir örgü kapanışı

bağıntıları, h_1, h_2, \dots, h_{n-1} basit diyagramlarının çarpımı olarak inşa edilebilir. Burada d_i h_i nin kendisi ile çarpımından elde edilen kapalı ilmeği temsil etmek için alınır.

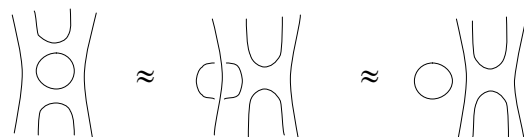


Şekil 5.8. Diyagram çarpımından oluşan cebir ($n=3$)

Diyagramlarda çarpma, örgülerdeki çarpma gibi alınabilir. Böyle çarpımların sonucunda extra kapalı ilmekler meydana geldiği için sonuçlandırılan yapıyı elde etmede karışık topolojik denklik bağıntılarına ihtiyaç duyulmaktadır.

Parantez polinomu bir kapalı bileşenin konumuna bağlı olmadığından, eğer iki diyagramdan biri kapalı ilmekler için serbest regüler izotopi ile uç noktaları sabit regüler izotopi vasıtasıyla diğerinden elde ediliyorsa bu iki diyagrama denktir denir.

Mesela $h_2^2 = d h_2$ özdeşliği ile verilen aşağıdaki denklik buna bir örnektir.



h_i ler *max* ve *min* çiftleri içerdiği için bu yarı grubun h_i lerin çarpımıyla üretilen ilk tanımı biraz yetersizdir. Aynı zamanda örgü üreteçleri ve h_i lerin bir karışımı biraz daha anlaşılması güç bir yapıyı meydana getirir. Örgü durumları çarpılabilir yapıya sahip olduğu için

$\langle \times \rangle = A \langle \smile \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle$ parantez ifadesi örgüler için bir $\rho: B_n \rightarrow D_n$ dönüşümü olarak inşa edilebilir. Burada D_n çarpılabilir h_i üreteçleri ve yukarıdaki (*) bağıntıları ile $Z[A, A^{-1}]$ üzerinde serbest toplamsal cebirdir. Böylece


$$\begin{array}{ccc} \times & \smile & \rangle \langle \\ | & | & | \\ \rho(\sigma_i) & = & Ah_i + A^{-1}I \\ \rho(\sigma_i^{-1}) & = & A^{-1}h_i + AI \end{array}$$

yazılabilir ve D_n içinde $d = -A^2 - A^{-2}$ alınabilir. Bu durumda bu formül $\langle K \rangle$ nın bir kuşatan izotopi invariantı olduğu aynı zamanda ρ nun n -ipli örgü grubundan D_n cebirine bir temsil olduğunu ispatlamak için kullanılır.

Ayrıca bir $\text{tr}: D_n \rightarrow Z[A, A^{-1}]$ iz fonksiyonu da vardır. Bu fonksiyon $\text{tr}(h)$ ın bir lineer ifadesi olarak yorumlanabilir. Burada h , h_i üreteçlerinin bir çarpımıdır. $|h|$, h a karşılık gelen durumdaki çemberlerin sayısı olmak üzere $\text{tr}(h) = d^{|h|-1}$ olarak tanımlanabilir. Bu takdirde $\text{trop} = \langle b \rangle$ olur.

Bu gösterim yoluyla Jones polinomunun orijinal inşasına bir diyagramsal yorum verilebilir ve bu yaklaşım genelleştirilebilir ([10] ve [18] a bakınız). Ama h_i lerin cebiri bu şartlarda saydam bir yapı olarak kalır. Henüz aşikar Jones polinomlu bir aşikar olmayan düğümün var olup olmadığı bilinmemektedir.

Tanım 5.2.1 (Karma Cebir). σ_i örgü üreteçleri ile h_i -durum elemanlarının karması olan ve örgü bağıntıları ile (*) bağıntılarını sağlayan cebire karma cebir adı verilir.

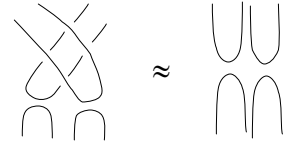
Burada bu cebirin bir soyutlaması Birman ve Wenzel tarafından ve onun birçok sistemi Yeter tarafından kullanıldı. Amaç regüler izotopi farkıyla böyle diyagramların yazılmasıdır. Böylece $\sigma_i h_i$ in  diyagramına sahip olmasından ve 1.tip hareket altında bir hareketi gerektirmesinden dolayı $\sigma_i h_i = h_i$ bağıntısını kullanmaya gerek duyulur. h_i

nin karesi alındığında diyagram çarpımı extra bir d ilmeğini sağladığı için $h_i^2 = dh_i$ bağıntısına ihtiyaç vardır. M_n , h_i lerin yardımıyla örgülerin bu çarpımsal ifadesini gösterebilir. Açıkça M_n in daha iyi bir formal tanımının yapılması için önce aşağıdaki alıştırmalar göz önüne alınmalıdır.

1°. 

$$\sigma_1 h_2 h_1 = \sigma_2^{-1} h_1$$

Bu karma bağıntının bir esas tipidir. Sol taraftaki h_1 çarpımında *max/min* çiftlerinin sağ tarafta farklı eğrilerle nasıl elde edildiğine dikkat edilmelidir.

2°. 

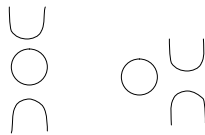
$$\sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 h_1 h_3 = h_1 h_3$$

3°. 

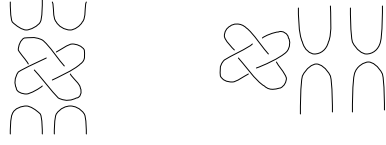
$$\sigma_2 \sigma_1 h_2 = h_1 h_2 = h_1 \sigma_2 \sigma_1$$

Bu M_n içindeki olası bağıntıların birçoğunun var olduğuna bakılarak anlaşılabilir. Bu doğrudur, ama 1° de verilen bağıntı çeşidine ek olarak, bilinen örgü bağıntıları ve h_i bağıntıları diğer örnekleri üretmek için yeterlidir ([29] a bakınız ve [10], [14] ile karşılaştırınız).

Böylece örgü gruplarında olduğu gibi, M_n için üreteçler ve bağıntılar verilebilir. Ama böyle bir karara varabilmek için kapalı ilmeklerin görünüşlerini elden geçirerek anlam çıkarılmalıdır. Dikdörtgen dışına çıkarılan kapalı ilmek formları



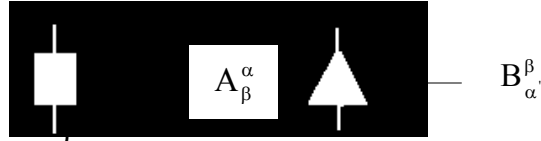
şeklinde alınabilir. Bu takdirde bütün düğümler ve halkalar aşağıdaki gibi içine ve dışına hareket ettirilebilir.



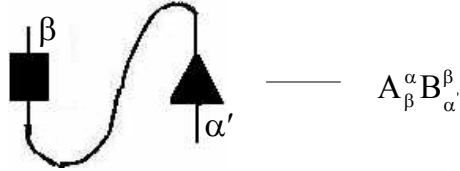
Böylece Λ verilen bir halka olmak üzere $h_1 h_3 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2 h_1 h_3 = \Lambda h_1 h_3$ yazılabilir. Bu formülde düğüm ve halkaların ayrık birleşimleri sayesinde çarpım yaparak üreteçlerin ve bağıntıların basit kümesinin ötesine gidilebilir.

Örneğin kare parantezde $[K] = d \langle K \rangle$ nin kullanılmasıyla, $[K \cup K'] = [K][K']$ eşitliği elde edilir ki kare parantez dış çarpımın yapısını korur.

Sonuç olarak bu dış çarpım formu, bilinen tensör çarpımına ve matris çarpımı gibi indeks kısılmasında farklı formlara karşılık gelen çarpımın iki tipinden ibaret bir genelleştirilmiş tensör formuna uygun olur [23]. Böylece eğer,



bu durumda



olur. Ortaya çıkan toplam α üzerinden alınır. Bir tek bağlantılı çizgi ile oluşan çarpım matris çarpımına karşılık gelir. Birden fazla bağlantılı çizgilerin çarpımı bir tensör çarpımındaki çarpıma karşılık gelir. \cup ve \cap diyagramları için sırasıyla $M_{\alpha\beta}$ ve $M^{\alpha\beta}$ matrisleri dikkate alınır bu takdirde \bigcup , $h = M_{\alpha\beta} M^{\alpha'\beta'}$ tensör çarpımına karşılık gelir. Böylece $h^2 = M_{\alpha\beta} M^{\alpha'\beta'} M^{\alpha\beta} M_{\alpha''\beta''} = (M_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}) h = \Delta h$ olur. Bu formül $\Delta = M_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}$ skalerine karşılık gelen \bigcirc ile h^2 için doğrudan diyagrama karşılık gelir. Bu yolla diyagram cebiri h_i lerin çarpımsal yapısının özel matris temsilleri için alt yapı olarak yorumlanabilir ([12] ye bakınız).

Bu son yorumdaki ifade genişletilmiş örgü benzeri çarpımsal yapılara göre örgü durumlarından doğal olarak ortaya çıkar. Bu ifade iç çarpıma kısıtlanırsa (alttaki ve üstteki ipleri eşleyerek) örgü grubunun anlamlı genellemeleri elde edilebilir. Kapalı

formlar (düğüm ve halkalar) ile ortaya çıkan dış çarpımın eklenmesi bu kapalı formlara karşılık gelen temsillerin tensör çarpımlarını oluşturur.

5.3. Genelleştirilmiş Polinomlar

Düğüm ve halkalar için iki 2-değişkenli genelleşmiş polinom invariantları vardır. Bunların her ikisi de Jones polinomunun genellemesidir. Bunlar Homfly polinomu [7] ve Kauffman polinomlarıdır [14]. Homfly Polinomu $P_K(\alpha, z)$ ile ve Kauffman Polinomunu $F_K(\alpha, z)$ ile gösterilir.

Bu bölümde bu polinomların formüllendirilmesi üzerinde durulacaktır. Conway polinomu [25] hatırlatılarak ve Alexander-Conway [25] genellemesini yapmak için yol gösterecek bazı ipuçlarına değinilerek başlanmalıdır.

Bu polinomların ilki $\Delta_K(t)$ Alexander polinomudur [1]. Alexander bu polinomu muhtemelen örtü uzayları hakkında düşünerek keşfetti ama burada lineer cebir, determinantlar ve Reidemeister hareketleri kullanıldı. Alexander Conway iki yönlendirilmiş K, K' düğüm yada halkası kuşatan izotop ise bu takdirde $\Delta_K(t) \doteq \Delta_{K'}(t)$ olduğunu göstermiştir. Burada \doteq , n tamsayıları için $\pm t^n$ in bir çarpanı farkıyla eşitliği kasteder.

Bu polinom, düğümleri ve halkaları ayırt etmede kullanılan iyi bir metod olmasına rağmen bir düğüm ve halkayı ayna görüntüsünden ayırt edemez. Alexander polinomu başlangıçtan beri düğüm teorisinin gelişmesinde yararlı bir polinomdur. Model çalışmaları ve düzenlemeleriyle birçok yeni çalışmalara ve farklı görüş açlarına yol gösterir. Bu yaklaşımlardan en dikkate değerlerinden birisi olan RH.Fox un serbest diferansiyel hesabıdır [25]. Bu teknik Alexander polinomunun, K nın esas grubunun herhangi bir temsilinden çıkarılması için bir tekniktir.

Bir Conway Polinomu $\nabla_K(z)$, aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 5.3.1. K bir yönlendirilmiş halka diyagramı olsun. Bu durumda $\nabla_K(z) \in Z[z^{\pm 1}]$ aşağıdaki şartları sağlayan bir Laurent polinomudur.

1. $\nabla \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} - \nabla \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = z \nabla \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}$

2. $\nabla_O = 1$, burada O düğümlememiş düğüm diyagramını gösterir,

3. Eğer K, K' ne kuşatan izotopsa $\nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z)$.

Alexander polinomu, $\Delta_K(t) \doteq \nabla_K(\sqrt{t} - 1/\sqrt{t})$ formülü ile tanımlanır.

Bütün dikkatler bu tekrarlanan şemanın nasıl kullanılacağı ve şemanın Alexander polinomuna nasıl bir anlam vereceği üzerinde yoğunlaşmıştır. Bazı kullanımlar, Conway polinomundaki extra bilgilerden yapılıdır. Mesela birçok çift sayılı bileşene sahip halkanın ayna görüntüsünden ayırt edilebildiği görülmüştür. $\nabla_K(z)$ ile ilgili combinatorial ve diyagramsal çalışma üzerinde bir graf çizilmiştir. Özellikle $\nabla_K(z)$ için bir durum toplamı ile bir durum modeli bulunmuştur ki parantez için olan modelden daha karışıktır. Bu model alterne düğümlerin cinsi üzerinde Murasugi [20] ve Crowell [5,6] teoremlerinin bir yeni ispatına ve alterne düğümler olarak adlandırılan kategoriye bu sonuçların bir genellemesine imkan verir. 1984 de Vaughan Jones yeni bir invaryant üzerinde çalışarak Artin örgü grubunun bir temsilinden Neumann cebirine bir invaryant türetene kadar uzun süre Conway polinomunun birinci formülü olan

$$\nabla \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} - \nabla \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = z \nabla \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}$$

eşitliği üzerinde hiç çalışılmadı. Vaughan Jones polinomu

$$t^{-1}V \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} - tV \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}$$

özdeşliğini sağlar. Conway formülüne benzer olan bu formülden hareketle

$$\alpha^{-1}P \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} - \alpha P \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = zP \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}$$

genelleme bağıntısıyla çalışılmıştır. Böylece iki değişkenli $P_K(\alpha, z)$ polinomu, ($\alpha = 1$) ile Conway ve ($\alpha = t, z = \sqrt{t} - 1/\sqrt{t}$) ile Jones polinomunun bir genellemesidir. Bu literatürde Homfly polinomu olarak bilinir.

Daha sonra Brandt, Lickorish, Millet ve Ho [3] yönlendirilmemiş halkalar için yeni bir

$$Q \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} + Q \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = z(Q \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} + Q \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array})$$

denklemini sağlayan $Q_K(z)$ polinom invaryantını buldular.

Bu Homfly polinomundan farklı bir 1-değişkenli polinomdur ve düğümü ayna görüntüsünden ayırt etmeye yetmez. Dolayısıyla $Q_K(z)$ polinomunun konusu içine diğer bir değişken yerleştirilmelidir.

Regüler izotopi kategorisinde çalışmak için bu bir fikirdir. Böylece aşağıdaki şartları sağlayan bir iki değişkenli L polinomu varlığı gösterilebilir.

1. $L \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + L \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = z(L \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + L \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array})$
2. $L \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \alpha L \quad , \quad L \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \alpha^{-1} L$
3. $L_{\emptyset} = 1$
4. K ve K' regüler izotop ise $L_K = L_{K'}$.

Bu takdirde L , yönlendirilmiş düğüm ve halkalar için bir kuşatan izotopi invaryantını oluşturmak için $F_K = \alpha^{-w(K)} L_K$ denklemi ile normalize edilir. Burada $w(K)$, K diyagramının burulma sayısıdır.

Bu F_K polinomu düğüm ve halkaları ayna görüntülerinden ayırt etmede oldukça iyidir. Bu polinom $P_K(\alpha, z)$ Homfly polinomuna uygun yakınlıkta görünür.

Oceanu ve Jones $V_K(t)$ için Homfly polinomunun benzer temsillerini meydana getirmek için $c_i c_i^{-1} = z$ Conway tipi bağıntıları ve örgü bağıntılarını sağlayan c_i elemanları ile üretilen Hecke cebiri üstüne bir iz in nasıl koyulacağını keşfetti. Hugh Morton bu cebirle kapsamlı çalıştı. Örgüler için Homfly polinomunun hesaplamasında çok iyi programlar meydana getirdi. Morton bu polinomlarla ilgili derin teorik çalışmalar yapmaya devam etmektedir ([19] a bakınız).

Birman ve Wenzel, c_i nin bir örgü üreticisine karşılık geldiği ve h_i lerin formal özellikleri gösterdiği zaman $c_i + c_i^{-1} = z(1 + E_i)$ bağıntıları ile bir cebir kullanarak Kauffman polinomu için bir benzer işleyiş verdi.

İki değişkenli genelleştirilmiş polinomların her ikisi de bir özel durum olarak Jones polinomuna sahiptir [10,12,14]. F_K polinomunda $z = A + A^{-1}$ ve $\alpha = -A^3$ alınırsa $\langle K \rangle = L_K(-A^3, A + A^{-1})$ ve $f_K = F_K(-A^3, A + A^{-1})$ olur. Böylece $V_K(t) = f_K(t^{-1/4})$ olduğundan $V_K(t) = (-t^{-3/4}, t^{-1/4} + t^{1/4})$ bulunur.

İki 2-değişkenli polinomlar direk tümevarım tanımı yoluyla tespit edilebilir. Bu polinomlarla çalışmak için ilgili modellerin var olup olmadığı açık bir sorudur. Çünkü bu polinomlar geometri ile direk olarak birleştirilebilir. Böyle bağlantıların olması doğaldır ve bu bağlantılar bir bütün olarak topoloji için büyük önem taşıyacaklardır.

Uyarı 5.3.2. İndirgenmiş alterne diyagramlar için Thistlethwaite burulma invaryanlığının ispatında Kauffman polinomunu kullanır. K indirgenmiş alterne diyagramları ile L_K için z değişkeninin en yüksek terim katsayısı $k(\alpha + \alpha^{-1})$, $k > 0$ ve z^{n-1} kuvvetine sahiptir. Burada n , K diyagramındaki kavşakların sayısıdır. Böylece K indirgenmiş alterne diyagramı için $L_K = k(\alpha + \alpha^{-1})z^{n-1} + (\text{diğer } z \text{ içindeki düşük dereceli terimler})$ olur. $F_K = \alpha^{-w(K)}L_K$ bir kuşatan izotopi invaryanı olduğu için $w(K)$ nın aynı zamanda bir kuşatan izotopi invaryanı olduğu ortaya çıkar. Bununla ilgili aşağıdaki gözleminin ispatı tümevarım yoluyla yapılır.

Gözlem 5.3.3. Eğer \times indirgenmiş alterne diyagram ise bu takdirde \simeq ve $\langle \rangle$ diyagramları da alternedir ve en azından biri indirgenmiş diyagramdır.

5.4. Graflar ve İstatistiksel Fizik

Bölüm 4 de $[K] \in Z[A, B, d]$ ve

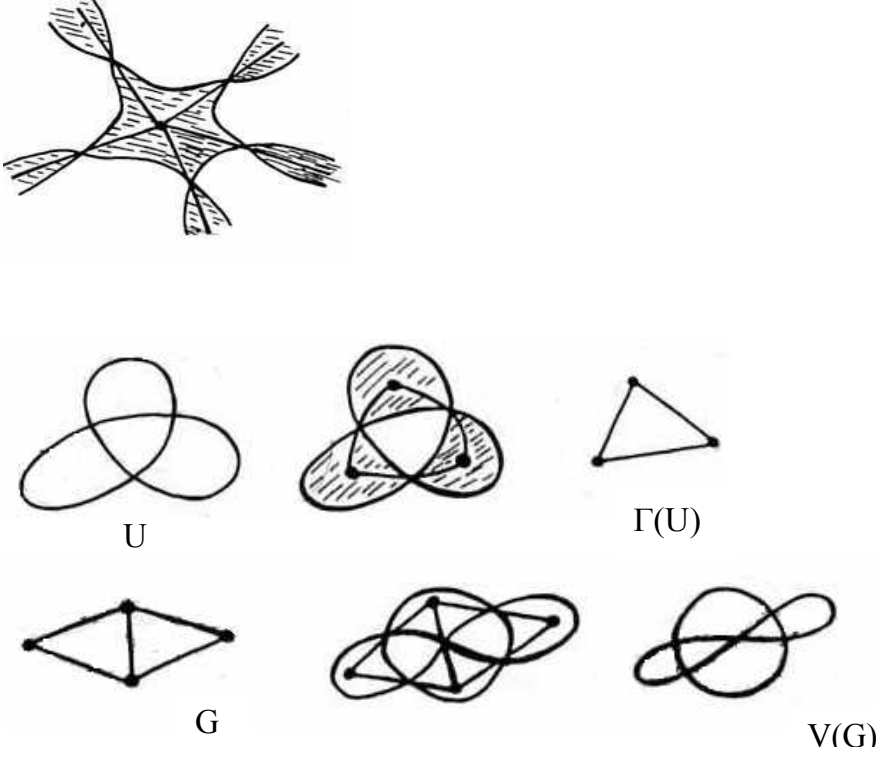
1. $[\times] = A[\times] + B[\langle \rangle]$
 $[\langle \rangle] = B[\times] + A[\langle \rangle]$
2. $[O] = d$, $[OK] = d[K]$

olacak şekilde bir genelleştirilmiş parantez polinomu tanımlandı. Bu durumda $B = A^{-1}$, $d = A^2 - A^{-2}$ ve $\langle K \rangle = d^{-1}[K]$ şartıyla ($\langle O \rangle = 1$ olması için) regüler izotopinin bir invaryanı oluşturulabilir. Kare parantez başka yollarla da özelleştirilebilir. Özellikle bu, bir düzlemsel graf için A ve B nin doğru seçimine göre dikromatik (iki renkli) bir polinomdur. Bu ilişki parantez polinomu, istatistiksel fizikteki Potts modelinde parçalı fonksiyon ifadesinin bir yolu olarak görünebilir [2]. Bu ilişkiyi anlamak için aşağıdaki teorem önemlidir.

Teorem 5.4.1. Düğüm evrenleri düzlemsel graflara bire bir karşılık gelir.

İspat. Sınırlanmamış bölge taranmayacak şekilde her bir evren taransın. U evreninden $\Gamma(U)$ grafi aşağıdaki şekilde elde edilir. $\Gamma(U)$ nun köşeleri U nun taranmış bölgelerine karşılık gelirse taranmış bölgeyi taranmış bölgeye bağlayan ve kavşaklardan geçen ve köşeleri birbirine bağlayan eğriler $\Gamma(U)$ nun kenarlarını gösterecektir. Bu şekilde elde edilen grafa $\Gamma(U)$ grafi denir. Bir G grafi verildiğinde G nin her bir kenarı üstüne \times

formunda bir kavşağını yerleştirilirse ve Şekil 5.9 da gösterildiği gibi her bir köşeye bu kavşaklar bağlanırsa G grafi bir $V(G)$ evrenine birleştirilmiş olur. $\Gamma(V/G) = G$ ve $V(\Gamma(U)) = V$ olduğunu doğrulamak kolaydır. Dolayısıyla bu ispatı tamamlar.



Şekil 5.9. Bazı düğüm evrenleri ve grafları

Tanım 5.4.2. G grafi için $Z_G(q,v) \in Z[q,v]$ dikromatik polinomu,

$$1. Z \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} = Z \text{---} \bullet \bullet \text{---} + vZ \text{---} \bullet \text{---}$$

$$2. Z_{\bullet G} = qZ_G, Z_{\bullet} = q$$

tekrarlama formülleri ile tanımlanır [15].

Birinci formülde bir G grafi üzerindeki Z nin değeri, G den bir kenarın çıkarılmasıyla elde edilen bir G' grafi üzerindeki Z değeri ile bir noktaya bu kenarın kısıtlanmasıyla elde edilen G'' grafi için Z değerinin v ile çarpımının toplamına eşittir. İkinci formülde bir ayrık köşenin G grafına ilavesi q ile dikromatik polinomun çarpımıdır. İzole edilmiş bir köşe için Z nin değeri q dur.

Örnek 5.4.3.

$$\begin{aligned}
 Z \text{ —•—} &= Z \bullet \bullet \quad vZ \bullet \bullet = q^2 + vq \\
 Z \text{ } \bigcirc &= Z \bullet \bullet \quad vZ \bullet \bullet = (q + vq) \\
 Z \text{ } \triangle &= Z \text{ —•—} + vZ \text{ } \bigcirc \\
 &= Z \text{ —•—} + vZ \text{ —•—} + v(Z \text{ —•—} \quad vZ \bigcirc) \\
 &= q(q^2 + vq) + v(q^2 + vq) + v(q^2 + vq) + v^2(q + vq) \\
 &= (q + 2v)(q^2 + vq) + v^2(q + vq)
 \end{aligned}$$

$v = -1$ için dikromatik polinom, kromatik polinoma özelleşir. Böylece, $Z_G(q, -1) = K_G(q)$ iki bitişik köşenin aynı renk olmaması için q renkleri ile G grafinin köşe renklerine olan yolların sayısıdır. Bu, $K_{\text{—•—}}$ iki köşenin aynı rengi aldığı yerdeki durumlara karşılık gelirken $K_{\text{••}}$, bu iki köşenin bütün ihtimallerini hesaba kattığı için tekrarlama bağıntısından kolayca görülür.

(1) tekrarlama formülü göz önüne alınırsa aşağıdaki şekil elde edilir.

$$\begin{aligned}
 Z \text{ —•—} &= Z \text{ —•—} + vZ \text{ —•—} \\
 Z \text{ } \bigcirc &= Z \text{ } \bigcirc + vZ \text{ } \bigcirc \\
 Z \text{ } \triangle &= Z \text{ } \triangle + vZ \text{ } \triangle
 \end{aligned}$$

Görülüyor ki graflardaki çıkarma ve kısıtlama düğüm diyagramlarındaki kavşakların iki yolla ayrılmasına karşılık gelir. Z için yapılan genişletme bir parantez ifadesidir. Dolayısıyla bazı ilave dönüşümler ile bir parantez polinomu Z_G yi yeniden yazmayı gerektirir.

Bütün taranmış bölgeler, A -tipinde olacak şekilde $V(G)$ ile ilişkilendirilmiş alterne halka diyagramı $K(G)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 5.4.4. $Z_G(q, v) = q^{N/2} [K(G)]$ dir. Burada N , G nin köşe sayısıdır ve kare parantez polinomu $A = q^{-1/2}v$, $B = 1$, $d = q^{1/2}$ ile ifade edilmiştir. Bu durumda

$$[\times] = q^{-1/2}v [\times] + [> <]$$

ve $[\bigcirc] = q^{1/2}$ olur [15].

Örnek 5.4.5.

$$K(\bullet \text{---} \bullet) = \infty$$

$$\begin{aligned} q^{N/2} [\infty] &= q (q^{-1/2} v [\circ] + [\circ \circ]) \\ &= q (q^{-1/2} v q^{1/2} + (q^{1/2})^2) \\ &= qv + q^2 \\ q[\infty] &= Z \bullet \text{---} \bullet \end{aligned}$$

Böylece görülebilir ki kare parantez hem düğüm teorisi hem de graf teorisi ile ilgilidir. Bu bağlantı bir çok sorunun çoğalmasını sağlar. Kare parantez bir A,B,d parametreler uzayının resmini verir, topolojik ve dikromatik özellikler gösterir.

Bu konuyu tamamlamak için istatistiksel fizikteki Potts modeli için parçalı fonksiyonun nasıl bir dikromatik polinom olduğu açıklanacaktır ([2] ve [15] e bakınız).

Potts modelde parçalı fonksiyon, $Z_G = \sum e^{E(\sigma)}$ formuna sahiptir. Burada σ , G kafesinin bütün durumları üzerinde hareket eder. G kafesi bir düzlemsel graf olarak alınabilir. $E(\sigma)$ verilen durumun enerjisidir.

Potts modelinde enerji $E(\sigma) = \frac{1}{kT} \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j)$ formuna sahiptir. Burada $\langle i, j \rangle$, köşeleri i ve j olan G nin bir kenarını, σ_i ve σ_j bu köşelere atanan durumları belirtir. Her bir köşeye bir q değerinin serbestçe atandığı kabul edilsin. Bir σ durumu böyle bir atanma ile belirlenir. Bu formülde δ Kronecker deltası

$$\delta(a,b) = \begin{cases} 1, & a = b \quad \text{ise} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ile tanımlanır ve T, k bir sabit (Boltzman sabiti) iken sistemin sıcaklığıdır.

Parçalı fonksiyon bu konuda bir çok kullanıma sahiptir. Örneğin verilen bir E enerjisi durumunda, olasılık $p(E) = e^{-E}/Z_G$ ile tanımlanır.

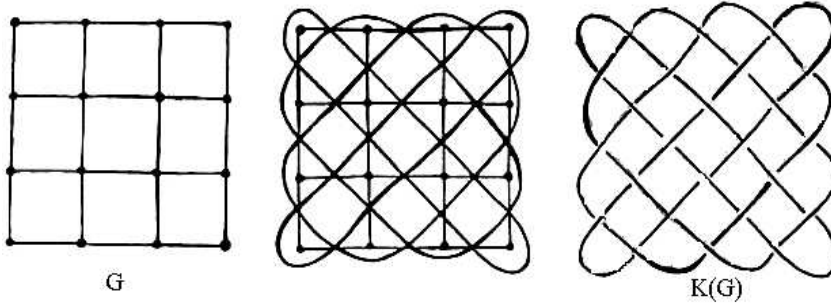
Önerme 5.4.6. $E(\sigma) = \frac{1}{kT} \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j)$ ve q lokal durumları için $v = e^{-(1/kT)} - 1$ olsun. Bu

takdirde q ve v değişkenli parçalı fonksiyon bir dikromatik polinomdur. Yani $\sum_{\sigma} e^{-E(\sigma)} = Z_G(q,v)$ dir.

$$\begin{aligned}
\text{İspat } \sum_{\sigma} e^{-E(\sigma)} &= \sum_{\sigma} e^{-1/kT} \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \\
&= \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle} (e^{-(1/kT)\delta(\sigma_i, \sigma_j)}) \\
\sum_{\sigma} e^{-E(\sigma)} &= \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle} (1+v\delta(\sigma_i, \sigma_j))
\end{aligned}$$

Bu denklemin sağ tarafının, q ve v değişkenli dikromatik polinom için tekrarlama bağıntısını sağladığını görmek kolaydır.

Teorem 5.4.4 ile Önerme 5.4.6 birleştirilirse parçalı fonksiyonun bir parantez ifadesi olduğu anlaşılır. Bu, kare kafes için Potts modelinin yapısındaki cebir Bölüm 5. 2 deki diyagram cebiri için bir teorik ifade verir [2].



Şekil 5.10. Kare kafesin düğüme (örgüye) dönüşümü

Bu kafes özel bir örgünün kapanışına (plat kapanışı) karşılık gelir (Şekil 5.10). Bir örgü için herhangi bir parantez değerlendirmesi bu operatör (diyagram) cebiri dilinde ifade edilebilir. Geriye Potts modeli için parantez formülünün onun fiziği üzerine nasıl dağıtılacağı kaldı. Potts modeli ile Jones modeli arasındaki ilişki operatör cebiri yoluyla Vaughan Jones sayesinde keşfedildi. Yani bu formül dönüştürülebilen graflar ve halka diyagramları içindeki direk bağlantıyı gösterir [9].

5.5. Parantez ve Tutte Polinomu

Düzlemsel graflarda dikromatik polinomu vermek için parantezin nasıl kullanıldığı bir önceki kısımda gösterildi. Burada genel parantez fonksiyonu, durum genişletme formülü şeklinde yeniden ifade edilecektir. Bu durum sadece bir bileşenli durumlarda hesaplanır. Yeniden formül şeklinde ifade etme işlemi Morwen Thistlethwaite çalışmasını [27] geneller. Parantez ve Jones polinomu için bunun nasıl yapıldığı [27] de gösterildi. Buradaki fikir, Tutte polinomu olarak bilinen dikromatik polinomun bir

genellemesini yapmaktır ([28] e bakınız). Tutte polinomu aşağıdaki gibi tekrarlı olarak tanımlanır.

Tanım 5.5.1. Her bir G grafi bir $T_G(x,y) \in Z[x,y]$ polinomu ile ilişkilendirilsin. Eğer G , yalnız kaldırılabilir kavşaklar ve ilmeklerden oluşuyorsa bu takdirde $T_G = x^i y^l$ olur. Burada i , kaldırılabilir kavşakların sayısı ve l , ilmeklerin sayısıdır. Polinom $T_G = T_{G'} + T_{G''}$ tekrarlama bağıntısı sağlanır. Burada G' ve G'' grafları ne bir ilmek nede bir kaldırılabilir kavşağı olmayan kenarın çıkarılıp kısıtlanmasıyla elde edilen graflardır.

Örnek 5.5.2.

$$\begin{aligned}
 T \text{ ————— } &= x, \quad T \text{ (ilmeğe) } = y \\
 T \text{ ————— (ilmeğe) } &= x^2 y \\
 T \text{ (üçgen) } &= T \text{ (iki kenar) } + T \text{ (ilmeğe) } \\
 &= T \text{ (iki kenar) } + T \text{ (kenar) } + T \text{ (ilmeğe) } \\
 T \text{ (üçgen) } &= x^2 + x + y
 \end{aligned}$$

Önerme 5.5.3. $Z_G(q,v)$, dikromatik polinomu ve $T_G(x,y)$, Tutte polinomunu gösterebilirsin. Bu iki polinom arasındaki ilişki;

$$i. Z_G(q,v) = qv^{N-1} T_G(1+qv^{-1}, 1+v)$$

$$ii. T_G(x,y) = \frac{1}{(x-1)(y-1)^N} Z_G((x-1)(y-1), (y-1))$$

formülleri ile verilir. Burada N , G nin köşelerinin sayısıdır.

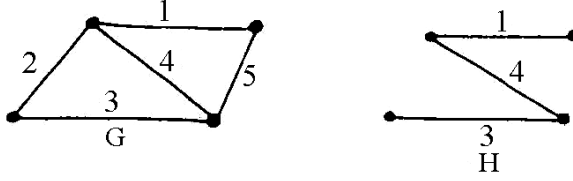
Örneğin $qv(1+q/v) = qv+q^2 = Z \text{ ————— } \bullet \bullet$ ve $q(1+v) = q+qv = Z \text{ (ilmeğe) }$ eşitlikleri gösterir ki (i) formülü bir tek ilmek ve kaldırılabilir kavşak için doğrudur.

Aslında Tutte polinomu G grafinin maximal ağaçlarına iliştilen ağırlıklardan hesaplanır. Bu ağırlıklar G nin kenarlarının bir sıralanışına bağlıdır. Ama özel bir sıralamadan bağımsızdır.

Tanım 5.5.4. G , kenarları $1,2,3,\dots,n$ ile numaralandırılan bir graf olsun. $H \subset G$, G içinde bir maximal ağaç olsun. $i \in \{1,2,\dots,n\}$, H in bir kenarını gösterebilirsin. H_i , H -(i.ci kenarı) belirtsin. H bir maximal ağaç olduğu için H_i iki bileşene sahiptir.

Eğer $G-H$ deki her j kenarı ve H_i nin her iki bileşeninin uç noktaları için $i < j$ ise i ye içten hareketli denir. $i \in G-H$ bir dış kenar olsun. Eğer i nin bir uç noktasından diğer uç

noktasına genişleyen H içindeki devirler üzerinde bütün j kenarları için $i < j$ ise i ye dıştan hareketli denir.



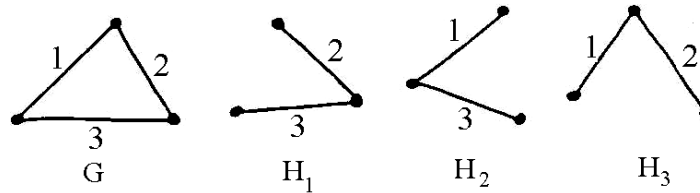
Burada;1 ile numaralandırılan kenar içten hareketli, 2 ile numaralandırılan kenar dıştan hareketlidir.

Teorem 5.5.5 (Tutte). H, bir G grafi içindeki maximal ağaçların sınıfını, $i(H)$ verilen bir H ağacına göre G içindeki içten hareketli kenarların sayısını ve $e(H)$, G içindeki dıştan hareketli kenarların sayısını gösterebilir. Bu takdirde Tutte polinomu

$$T_G(x,y) = \sum_{H \in \mathcal{H}} x^{i(H)} y^{e(H)}$$



formülü ile verilir [28].

Örnek 5.5.6.

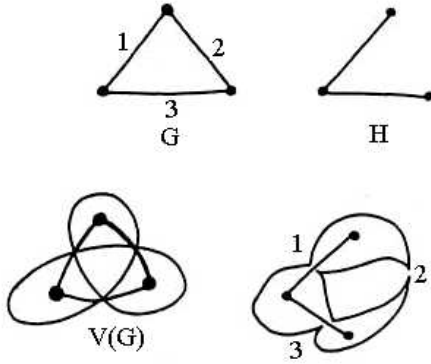


$$T_G = y + x + x^2$$

İçten ve dıştan hareketliliğin tanımlarından bu kavramların farklı olduğu kolayca görülür. Gerçekte düzlemsel graflar için bir simetri tanımı vardır. Bu simetriten yararlanarak Tutte ağırlıkları evrenler ve düğüm teorisi ile ilişkilendirilir.

Bu simetri bir düzlemsel G grafi ile ilişkilendirilmiş $V(G)$ evrenini göz önüne alındığında anlaşılır. Her bir maximal $H \subset G$ ağacı bir bileşenli $V(G)$ nin bir $S = S(H)$ durumunu belirler. Bu durum $V(G)$ nin, H nın kenarları boyunca ayrılmasıyla ve diğer bütün kavşakların ayrılmasıyla elde edilir [ \rightarrow ].

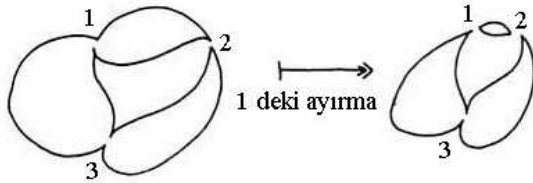
Örnek 5.5.7.



G nin numaralandırılan bir kenarı V(G) nin aynı sayı ile numaralandırılan bir köşesi olur. S(H) in köşelerine (kavşaklarına), S(H) Jordan izinin içe ya da dışa doğru ayrılmasına göre iç ya da dış köşe denir. Böylece yukarıdaki örnekte 1 ve 3 iç, 2 dış köşedir.

Tanım 5.5.8. Köşeleri (\times kenarları) $1,2,3,\dots,n$ ile numaralandırılan bir S Jordan iz evreninde ($|S| = 1$ olan bir evren) eğer i köşesinde S nin ayrılmasından sonuçlanan iki bileşenli bütün j bölgeleri için $i < j$ ise i bölgesine i hareketlidir denir.

Örnek 5.5.9.



$1 < 2$ olduğu için 1 hareketlidir.

Eğer bir iz üzerindeki bir kenar iç ve hareketli ise bu kenar içten hareketlidir. Eğer bir kenar dış ve hareketli ise bu kenar dıştan hareketlidir. V(G) üzerindeki Jordan izleri yardımıyla ağaçların tekrar G içine yerine koyulmasıyla $T_G(x,y)$ nin bir simetrik tanımı elde edilir.

Bu düzenlemeden kolayca görülebilir ki $T_G(x,y) = T_{\bar{G}}(y,x)$ dir. Burada \bar{G} , düzlemsel G grafına düzlemsel dual graftır. Her bir Jordan izi, bir G için ve bir \bar{G} için maximal ağaçların bir çiftini verir..

Tutte ağırlıklarını kullanarak halka diyagramları için [K], parantez polinomunun nasıl hesaplanacağı açıklanabilir.

[K] parantez polinomunun A,B,d cebirsel değişkenlerine ve

$$[\times] = A[\times] + B[> <]$$

$$[O K] = d [K],$$

$$[\text{diagram}] = (Ad+B)[\text{diagram}]$$

$$[\text{diagram}] = (A+Bd)[\text{diagram}]$$

bağıntılarına sahip olduğu 4. Bölümden bilinmektedir.

$\alpha = Ad+B$, $\bar{\alpha} = A+Bd$ olsun. K verilen bir diyagram ve S , K diyagramının bir bileşenli ($|S| = 1$) bir durumu olsun. φ , bir bileşenli bütün S durumlarının sınıfını gösterecek. K 'nin kavşakları $1, 2, 3, \dots, n$ ile numaralandırılabilir. K 'nin her bir kavşağı S 'nin karşılık gelen bölgedeki bir lokal dağılımı belirleyecektir. Eğer bölge hareketli değilse genel parantez dağılımı;

$$[\times | \times] = A$$

$$[\times | > <] = B,$$

şeklinde eğer bölge hareketli ise

$$[\times | \times] = \bar{\alpha}$$

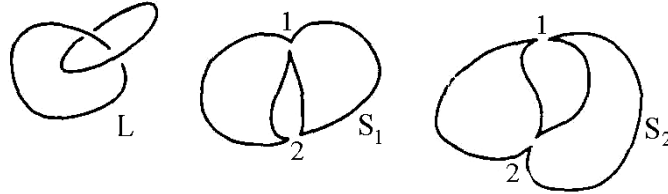
$$[\times | > <] = \alpha$$

şeklinde alınır. Bu takdirde $[K|S]$ bu yerel dağılımların hepsinin çarpımıdır ve $[K]$,

$$[K] = \sum_{S \in \varphi} [K|S] \text{ formülü ile verilir.}$$

Örnek 5.5.10.

1.



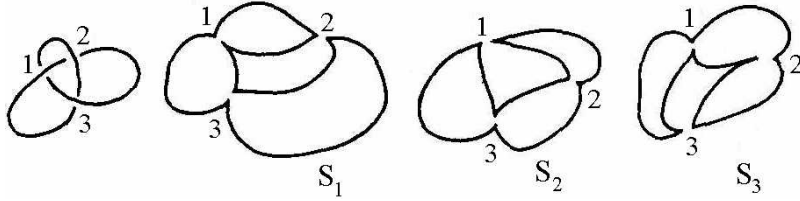
$$[L] = \sum_{S \in \varphi} [L|S] = \bar{\alpha}B + \alpha A \quad (1, S_1 \text{ içinde hareketli ayrıca } S_2 \text{ içinde de hareketlidir}).$$

Bu örnek uzun yolla yapılırsa

$$\begin{aligned}
[\text{link}] &= A [\text{link}] + B [\text{link}] \\
&= A(A\alpha + B) + B(A + Bd) \\
&= A\alpha + B\bar{\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.



$$[K] = \sum_{S \in \varphi} [K | S] = \bar{\alpha}BA + \alpha A^2 + \bar{\alpha}^2 B. \text{ Yonca yaprağı düğümünün parantez değerinin}$$

$$\langle K \rangle = -A^{-3} - A^5 + A^{-7} \text{ olması için } \alpha = -A^3, \bar{\alpha} = -A^{-3}, B = A^{-1} \text{ dir.}$$

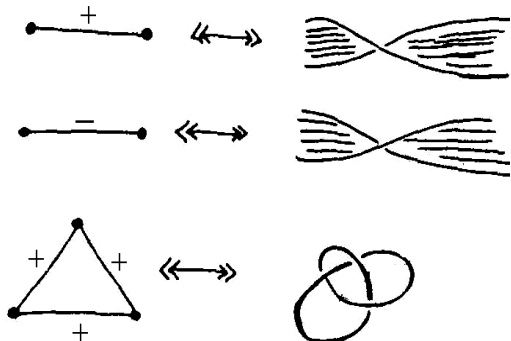
Örnek 5.5.11.

$$\begin{aligned}
[\infty] &= [\infty | \infty] = \bar{\alpha} \\
[\text{link}] &= [\text{link} | \text{link}] = \alpha
\end{aligned}$$

Bunlar kaldırılabilir kavşak ve ilmek için temel dağılımlara grafiksel olarak karşılık gelir. Bununla birlikte eğer kavşağı değiştirilirse, bu takdirde dağılımlar kıvrıma (flip) karşılık gelir.

Uyarı 5.5.12. Çemberin parantez polinomu $[0] = 1$ olduğundan yeni durum için bu zorluk çıkarmaz.

Örnek 5.5.13. Düğümlerin ve halkaların diyagramların işaretli düzlemsel graflara 1-1 karşılık geldiğine dikkat edilirse burada (+), bir A-kanalına, (-) de bir B-kanalına karşılık gelecek şekilde işaretler grafin kenarları üzerine yerleştirilir.



Bu gerçekte bir yeni formülüzasyondur. Genelleştirilmiş parantezin bu yeni Tutte formülüzasyonu, işaretli graflar için aşağıdaki şartları sağlayan bir genelleştirilmiş Tutte polinomunu verir.

1. Eğer G , i_+ pozitif kaldırılabilir kavşaklara, i_- negatif kaldırılabilir kavşaklara, l_+ pozitif ilmeklere, l_- negatif ilmeklere sahipse bu takdirde

$$T_G = x^{i_+ + l_-} y^{i_- + l_+}$$

olur.

2. Eğer işaretlenmiş bir kenar bir kaldırılabilir kavşak ya da ilmek değilse bu takdirde

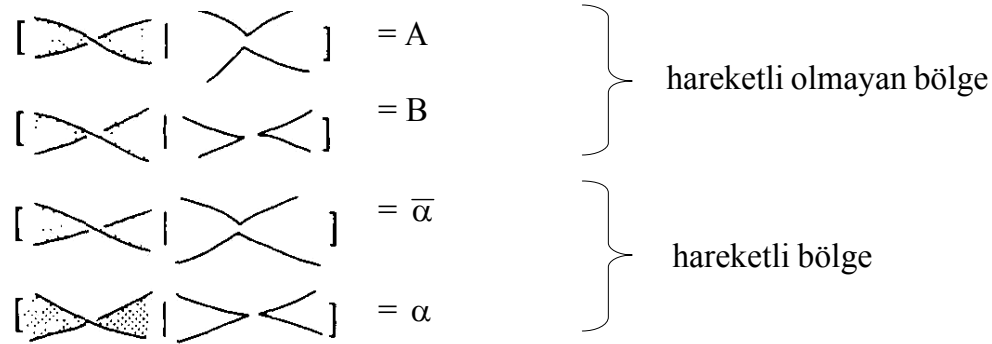
$$\begin{array}{l} T \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } = BT \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } + AT \text{ --- } \bullet \text{ --- } \\ T \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } = AT \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } + BT \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \end{array}$$

olur.

Böylece $T_G(A, B, x, y)$ kare parantezin bir teorik graf versiyonudur (Önceki notasyonda $x = \alpha$, $y = \bar{\alpha}$ dir).

Bu, geren ağaçlar teriminde $Ax + B^2 = A^2 + By$ şeklinde bir Tutte ifadesine sahiptir

Örnek 5.5.14. Eğer K bir alterne diyagram ise bu takdirde bütün kavşaklar aynı içten tipe sahiptir. Böylece dağılımlar



formlarını alırlar. Bu formlardan $B = A^{-1}$, $\alpha = -A^3$, $\bar{\alpha} = -A^{-3}$ iken parantez hakkında bazı özellikleri görmek kolaydır.

$\alpha = -A^4 (A^{-1})$, $\bar{\alpha} = -A^{-4}(A)$ olduğunu dikkate alınsın. Bu durumda K alterne diyagramı için $\langle K \rangle = A^{I-E} T_{G(K)}(-A^{-4}, -A^4)$ olur. Burada T bir Tutte polinomu, I bir iz üzerindeki iç

bölgelerin sayısı, E de bir iz üzerindeki dış bölgelerin sayısıdır. I-E verilen bir iz seçiminden bağımsız bir sabittir.

f_K kuşatan izotopi invariantının

$$f_K = \alpha^{-w(K)} \langle K \rangle = (-A^{-3})^{w(K)} \langle K \rangle$$

formülü ile ve $V_K(t)$ Jones Polinomunun

$$V_K(t) = f_K (t^{-1/4})$$

formülü ile verildiği göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 5.5.15. K bir alterne diyagram, ve $G(K)$, K ya karşılık gelen düzlemsel graf olsun. Bu takdirde $V_K(t)$ Jones polinomu t nin kuvvet ve işareti farkıyla $T_{G(K)}(-t, -t^{-1})$ Tutte polinomuna eşittir.

Bu dikkate değer gözlemden bazı gerçekleri ortaya çıkarmak kolaydır. Örneğin bir alterne halkanın Jones polinomunun katsayılarının işareti, derecenin paritesine göre alternedir. Yani bir alterne halkanın Jones polinomu bir alterne polinomdur.

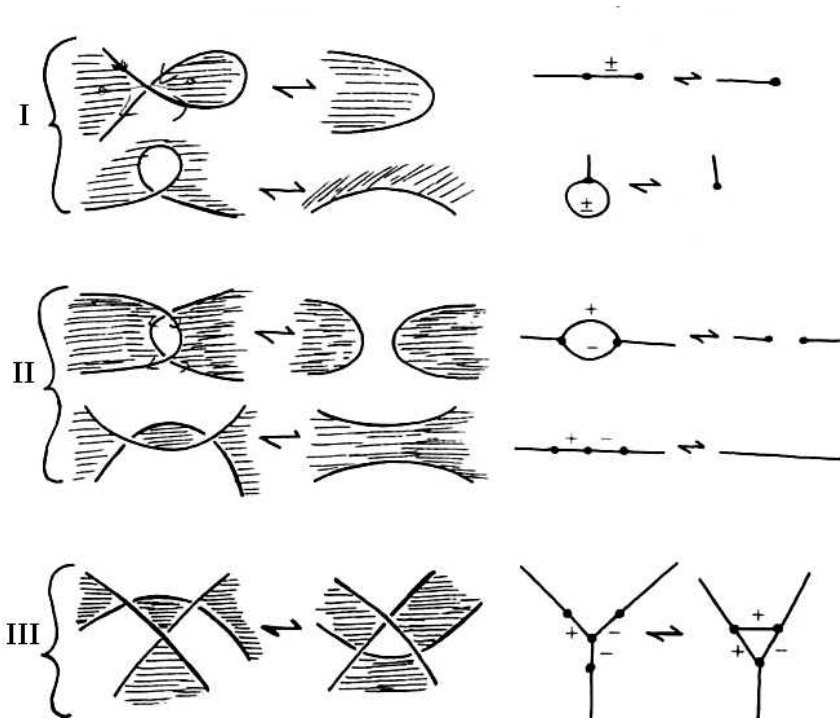
5.6. Graf Teorisinden Düğüm Teorisine Geçiş

Bu bölümde, graf teorisinden parantez polinomunun ve dolayısıyla Jones polinomunun nasıl ortaya çıktığı sorusunun cevabı araştırılacaktır.

Bu polinomların graf teorisinde mümkün olan yeni yapılandırması işaretli graflar için genelleştirilmiş Tutte polinomu şeklindedir.

Düğüm ve halkalar işaretli graflarla kodlandığı için bunun, Tutte polinomunun özelleştirmesinin bir invariantını verdiğini görmek mümkündür. Bu yeni yapılandırmayı test etmek için ilk önce Reidemeister hareketlerinin bir graf teorik versiyonu incelenmelidir. Bunun için Şekil 5.11 e bakınız.

Taranmış bölgeler ışığında graflara geçiş olduğundan II.Tip hareketin iki versiyonu ve III.Tip hareketin iki versiyonu vardır. I.Tip hareket bir dal yada ilmeğin eklenmesi yada çıkarılmasını gerektiriyor iken II.Tip hareketin iki versiyonu çıkarma ve kısıtlama formlarında işaretlenir. Bu ilişkilerden bir invariant elde etmek akla ilk gelen şey bu yolla Tutte polinomunu çalışmaktır.



Şekil 5.11. Reidemeister hareketlerinin bir graf versiyonu

Bu işe bir önceki bölümdeki Örnek 5.5.13 de açıklanan işaretli graflar için genelleştirilmiş Tutte polinomu ile başlanılsın. Yani herhangi bir işaretli G grafına bir $T_G(A,B,x,y)$ polinomu ilişkilendirilsin. Bu polinom aşağıdaki kurallarla karakterize edilir ($x = Ad+B, y = A+Bd$):

1. Eğer G yalnız ilmeklere ve kaldırılabilir kavşaklara sahip ise bu takdirde $T_G = x^{i_+} y^{l_+}$ dir. Burada i_+ pozitif kaldırılabilir kavşakların sayısı, i_- negatif kaldırılabilir kavşakların sayısı, l_+ pozitif ilmeklerin sayısı, l_- de negatif ilmeklerin sayısıdır.

$$\begin{aligned}
 2. \quad T \begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \end{array} &= AT \begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \end{array} + BT \begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \end{array} \\
 T \begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \end{array} &= BT \begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \end{array} + AT \begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \end{array}
 \end{aligned}$$

Bu polinomun II.Tip hareket altındaki davranışı aşağıdaki önermede verildi.

Önerme 5.6.1. $T_G(A,B,x,y)$ nin ikinci hareket altında invaryant olması için gerek ve yeter şart $B = A^{-1}$, $x = -A^{-3}$, $y = -A^3$ olmasıdır.

İspat.

$$\begin{aligned}
 T \text{ --- } \overset{+}{\circ} \text{ ---} &= AT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---} + BT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---} \\
 &= A(BT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---} + AT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---}) + ByT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---} \\
 &= ABT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---} + (A^2 + By)T \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---} \\
 \\
 T \text{ --- } \overset{+}{\circ} \text{ ---} &= AT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---} + BT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---} \\
 &= AxT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---} + B(BT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---} + AT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---}) \\
 &= ABT \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---} + (Ax + B^2)T \text{ --- } \overset{-}{\circ} \text{ ---}
 \end{aligned}$$

İspatın geri kalanı bu özdeşliklerden çıkar.

Parantez için yapılan işlemler aynen burada da yapılırsa, $B = A^{-1}$, $x = -A^{-3}$, $y = -A^3$ ile T_G polinomu keyfi graflar için II. Tip ve III. Tip hareketlerin bir invariantı olur.

Tanım 5.6.2. Herhangi bir bağlantılı G grafi için bir $\Omega \in Z[A, A^{-1}]$, Laurent polinomu,

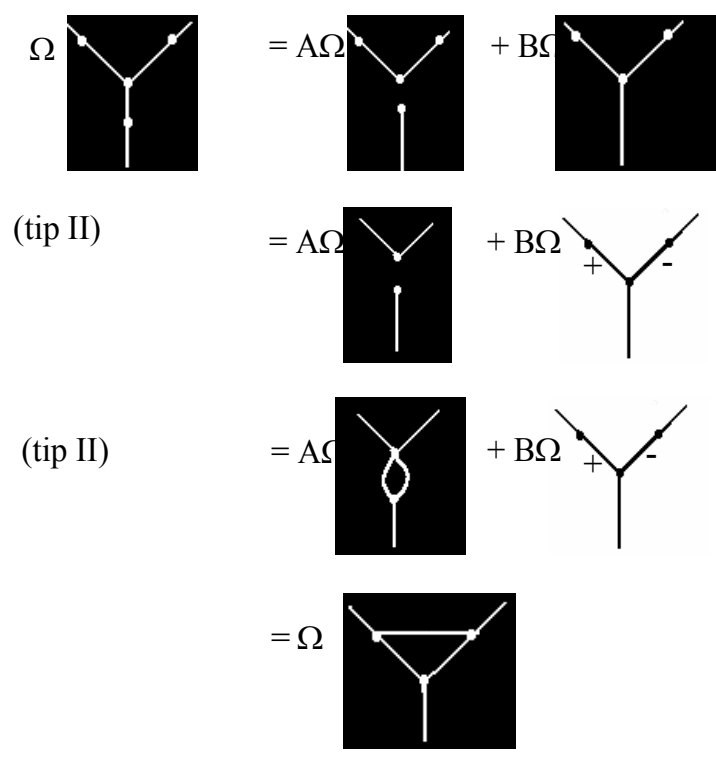
$$\Omega_G = T_G(A, A^{-1}, -A^{-3}, -A^3)$$

ile tanımlansın.

Önerme 5.6.1 den Ω_G , II. Tip grafiksel hareketin bir invariantıdır. III. Tip invariantlık aşağıdaki önermede verildi.

Önerme 5.6.3. Eğer G ve G', III. Tip hareket altında birbirine ilişkili iki işaretli graf ise bu durumda $\Omega_G = \Omega_{G'}$ olur.

İspat.



Uyarı 5.6.4. Graf bağlantısız olsa bile II.Tip hareket altındaki invaryantlık gerçekleştirilebilir. Bu durumda sadece $T_{G \setminus G'}$ için bir formüle ihtiyaç vardır. Burada ayrık birleşimi gösterir. Ayrıca $T_{\text{---}}^+ = Ax+By$ olduğuna dikkat edilmelidir.

$T_{G \setminus G'} = (Ax+By)T_G T_{G'}$ ile tanımlansın. Bu takdirde bu hareket için Ω nın sağ invaryant özelliklerine sahip olduğunu görmek kolaydır. Dikkat edilirse $B = A^{-1}$, $x = -A^{-3}$, $y = -A^3$ için d parantez çarpanına karşılık gelen $Ax + By = -A^{-2} - A^2 = d$ ifadesi elde edilir.

Bu bölüm graf-teorik formülasyonunun bir kabataslağı olarak planlandı. Keyfi işaretli graflar (düzlemsel olması gerekmez) için Ω_G , II. ve III.Tip hareketlerin bir invaryantıdır. Buna, düğüm teorisinin bu dönüşümleri içeren ağlara bir kullanışlı genişletilmesi olarak bakılabilir. Ω_G , I.Tip hareket altında x ya da y ile çarpılır. Soyut graf teorisinde burulma sayısının bir direk benzeri yoktur.

Böylece geriye bütün üç hareketin bir invaryantını elde etmek için Ω_G nın normalize edilip edilemeyeceği kalır. Graf teorisinden düğüm teorisine geçişi aşağıdaki teorem tamamlar.

Teorem 5.6.5. G bir işaretli düzlemsel graf ve $K(G)$, G ye karşılık gelen düğüm veya halka diyagramı olsun. Bu takdirde $\langle K(G) \rangle = \Omega_G$ olur. Yani düğümler ve halkalar için parantez polinomu, işaretli graflar için genelleştirilmiş Tutte polinomunun bir özelleştirilmesidir [13].

Son olarak, işaretli G grafları için $T_G(A,B,x,y)$ genelleştirilmiş Tutte polinomu tekrar ele alındığında onun geren bir ağaç ifadesine sahip olduğu görülecektir. G nin kenarlarının bir sıralanışı ve bir maximal $H \subset G$ ağacı verilsin. Dağılımlar, G nin kenarlarından aşağıdaki gibi tanımlansın.

İçten hareketli,	+ : x
Dıştan hareketli,	- : x
İçten hareketli	- : y
Dıştan hareketli	+ : y
<hr/>	
İçten hareketsiz,	+ : A
Dıştan hareketsiz,	- : A
İçten hareketsiz,	- : B
Dıştan hareketsiz,	+ : B

$T_G(H)$, H için hareketli olan G nin kenarlarının dağılımlarının çarpımını gösterebilir. Bu takdirde

$$T_G = \sum_H G(H)$$

olur. Burada toplam G içindeki bütün maksimal ağaçlar üzerindedir.

Uyarı 5.6.6. T_G nin iyi tanımlı olması için $Ax+B^2 = A^2+By$ olması gerekli ve yeterlidir. Bu, topolojik durum için kesin olarak sağlanır. Genel durumda, kare parantezde olduğu gibi bir d değişkeni ortaya çıkarılarak ve $x = A+Bd$, $y = Ad+B$ alınarak iyi tanımlılık ifade edilebilir. Bu gösterir ki kare parantez, keyfi işaretli graflara $T_G(A,B,x,y) = T_G(A,B,d)$ ile doğrudan genelleştirilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Düğüm polinomları, düğüm ve halkaları sınıflandıran önemli invariantlardır. Çeşitli düğüm polinomları ve bu polinomların genellemeleri vardır. Bu polinomları hesaplamaların da değişik yöntemleri vardır. Literatürde düğüm teorisi ile matematiğin diğer dalları ve fiziğin bazı konuları arasında bazı ilişkiler olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada Parantez polinomu diyagramatik bir yöntemle incelendi. Bu polinom yardımıyla ve bu yöntemle bilinen bütün düğüm polinomları kısaca tanıtıldı. Düğüm teorisindeki bazı klasik tahminlerin ispatları, normalize edilmiş parantez polinomu ve onun bir başka versiyonu olan Jones polinomu yardımıyla verildi.

Graf teorisindeki bazı polinomların hesaplanması parantez polinomu ve bu polinomda kullanılan teknikler yardımıyla yapıldı. Ayrıca diyagram cebiri ve istatistiksel fizikteki bir modele parantez teknikleri ile yaklaşıldı.

Şüphesiz bu çalışmalar daha ileri düzeylere taşınabilir. Örneğin bu çalışmadaki teknikler matris teorisine taşınarak daha somut hale getirilebilir. Fizikteki genlik kavramı ile düğüm parantez tekniği arasında bir ilişki kurulabilir. Burada düzlem grafları ile parantez polinomu arasındaki ilişkiden söz edildi. Benzer şekilde parantez polinomu ile uzay grafları arasındaki ilişkiler incelenebilir.