

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇOKLU HIZLI İŞARET İŞLEME YÖNTEMLERİYLE
İŞARETLERİN ELDE EDİLMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Mustafa Ersin KARAAĞAÇ**

Anabilim Dalı : ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ

Programı : TELEKOMÜNİKASYON MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2007

**ÇOKLU HIZLI İŞARET İŞLEME YÖNTEMLERİYLE
İŞARETLERİN ELDE EDİLMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Mustafa Ersin KARAAĞAÇ
(504041331)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Mayıs 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 8 Haziran 2007**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Ahmet Hamdi KAYRAN
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Bilge GÜNSEL(İ.T.Ü.)
Prof.Dr. Aydın AKAN (İ. Ü.)**

HAZİRAN 2007

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında değerli katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Ahmet Hamdi Kayran'a, her türlü konu hakkında bilgisini esirgemeyen Araş. Gör. Hacı İlhan, Araş. Gör. Korhan Taç, Öğr. Gör. Dr. Aydın Kızılkaya, bütün Haberleşme Anabilim Dalı Araştırma Görevlilerine, tez çalışmam boyunca burs imkanı sağlayan TÜBİTAK BAYG'na, manevi ve maddi desteklerini benden esirgemeyen, bana her zaman moral veren annem Saliha Karaağaç, babam Mehmet Karaağaç ve kardeşim Esra Karaağaç'a, dualarını benden esirgemeyen anneannem Zeliha Başeskiöglü ve teyzem Fatma Karamancı'ya teşekkür ederim.

Haziran 2007

Mustafa Ersin Karaağaç

İÇİNDEKİLER

| | |
|---|------------|
| KISALTMALAR | v |
| TABLO LİSTESİ | vi |
| ŞEKİL LİSTESİ | vii |
| SEMBOL LİSTESİ | ix |
| ÖZET | x |
| SUMMARY | xi |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. İŞARET İŞLEME VE MATEMATİKSEL KAVRAMLAR | 9 |
| 2.1 İşaretler | 9 |
| 2.1.1 Deterministik işaretler ve diziler | 9 |
| 2.1.2 Rastgele işaretler ve diziler | 11 |
| 2.1.3 Çok kanallı işaretler ve diziler | 11 |
| 2.2 Çoklu Hızlı Sistemlerde Kullanılan Lineer Cebir Kavramları | 11 |
| 2.3 Rastgele İşaretlerin İstatistiksel Gösterimi | 13 |
| 2.4 Sayı Teorisi | 15 |
| 3. ÇOKLU HIZLI SİSTEM VE İŞARETLERİN ANALİZİ | 18 |
| 3.1 Çoklu Hızlı Sistemlere Giriş | 18 |
| 3.2 Temel Kavramlar | 19 |
| 3.3 Çoklu Hızlı İşaret İşleme | 23 |
| 3.3.1 Örnek seyreltme | 23 |
| 3.3.2 Ara değerlendirme | 26 |
| 3.3.3 Örnekleme hızı dönüştürme | 29 |
| 3.3.4 Alt ve üst örneklemenin bazı yararlı özellikleri | 30 |
| 3.4 Alt ve Üst Örneklemenin İstatistiksel Özellikleri ve Çevrimsel Durağanlık | 31 |
| 3.5 Çoklu Hızlı Sistem Özellikleri | 33 |
| 3.6 Filtre Çeşitleri | 35 |
| 3.6.1 Doğrusal zamanla değişmeyen filtreler | 35 |
| 3.6.2 Doğrusal zamanla periyodik olarak değişen filtreler | 36 |
| 3.7 Matris Gösterimleri | 39 |
| 3.7.1 Alt örneklemenin matris gösterilimi | 39 |
| 3.7.2 Üst örneklemenin matris gösterilimi | 40 |
| 3.7.3 Gecikmeli örnekleme hızı dönüştürmenin matris gösterimi | 40 |
| 4. ÇOKLU HIZLI KESTİRİM TEORİSİ | 42 |
| 4.1 Tek Hızlı En İyi Filtreleme | 42 |
| 4.1.1 Tek hızlı Wiener filtreleme | 42 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 4.2 | Çoklu Hızlı En İyi Filtreleme | 46 |
| 4.2.1 | Tek kanallı çoklu hızlı en iyi filtreleme problemi | 46 |
| 4.2.1.1 | İndis eşleme | 46 |
| 4.2.1.2 | Tek kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri | 49 |
| 4.2.1.3 | Tek kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri için matris gösterimi | 51 |
| 4.2.2 | Çok kanallı çoklu hızlı en iyi filtreleme problemi | 52 |
| 4.2.2.1 | Çok kanallı indis eşleme | 52 |
| 4.2.2.2 | Çok kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri | 53 |
| 4.2.2.3 | Çok kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri için matris gösterimi | 54 |
| 5. | ÇOKLU HIZLI EN KÜÇÜK ORTALAMA KARELER METODU | 59 |
| 5.1 | Problem Tanımı | 59 |
| 5.2 | Çoklu Hızlı Gözlemler Kullanılarak En Küçük Ortalama Kareler (LMS) Filtrelemesi | 63 |
| 5.2.1 | En küçük ortalama kareler metodu | 63 |
| 5.2.2 | Çoklu hızlı en küçük ortalama kareler metodu | 65 |
| 6. | UYGULAMALAR | 68 |
| 6.1 | Çoklu Hızlı Wiener Filtresiyle İlgili Uygulamalar | 68 |
| 6.1.1 | Orjinal işaretin yeniden elde edilmesi | 68 |
| 6.1.2 | Çoklu hızlı kestirim | 73 |
| 6.2 | Çoklu Hızlı En Küçük Ortalama Kareler Metodunun Uygulamaları | 88 |
| 7. | SONUÇLAR VE TARTIŞMA | 94 |
| | KAYNAKLAR | 96 |
| | ÖZGEÇMİŞ | 102 |

KISALTMALAR

| | |
|--------------|---|
| AFD | : AyrıkFourier Dönüşümü |
| LPTV | : Doğrusal Zamanla Peryodik Değişen |
| LTI | : Doğrusal Zamanla Değişmeyen |
| WSS | : Geniş Anlamda Durağan |
| JWSS | : Birleşik Geniş Anlamda Durağan |
| WSCS | : Geniş Anlamda Çevrimsel Durağan |
| MIMO | : Çok Girişli Çok Çıkışlı |
| SISO | : Tek Girişli Tek Çıkışlı |
| MSE | : Ortalama Karesel Hata (Mean Square Error) |
| DAT | : Sayısal Ses Teypi |
| LMS | : En Küçük Ortalama Kareler |
| LS | : En Küçük Kareler |
| ACF | : Özilişki Fonksiyonu |
| MRMR | : Çokluçözünürlü Çoklu Hızlı |
| AR | : Özbağlanımlı |
| LSTV | : Doğrusal Anahtarlamalı Zamanla Değişen |
| TAMSE | : Zaman Ortalamalı Ortalama Karesel Hata |
| AWGN | : Toplamsal Beyaz Gauss Gürültüsü |
| SNR | : İşaret Gürültü Oranı |
| MMSE | : Minimum Ortalama Karesel Hata |

TABLO LİSTESİ

| | <u>Sayfa No</u> |
|---|-----------------|
| Tablo 2.1 Kronecker Çarpımının Özellikleri..... | 12 |
| Tablo 2.2 Tersine Çevrilmiş Matris ve Vektörün Özellikleri..... | 13 |
| Tablo 4.1 Kestirilen İşaretin İndisinden Gözlem İşaretinin İndisine Eşleme..... | 49 |
| Tablo 5.1 Çoklu Hızlı Filtredeki İşlem..... | 61 |
| Tablo 6.1 $\sigma_v^2 = \sigma_\eta^2 = 1$ için MSE ve Filtre Katsayılarının Normunun Karşılaştırılması..... | 78 |
| Tablo 6.2 $\sigma_v^2 = 1, \sigma_\eta^2 = 0$ için MSE ve Filtre Katsayılarının Normunun Karşılaştırılması..... | 78 |
| Tablo 6.3 $\sigma_v^2 = 0, \sigma_\eta^2 = 1$ için MSE ve Filtre Katsayılarının Normunun Karşılaştırılması..... | 78 |
| Tablo 6.4 $\sigma_v^2 = 1000, \sigma_\eta^2 = 1$ için MSE ve Filtre Katsayılarının Normunun Karşılaştırılması..... | 79 |
| Tablo 6.5 $\sigma_v^2 = 1, \sigma_\eta^2 = 1000$ için MSE ve Filtre Katsayılarının Normunun Karşılaştırılması..... | 79 |

ŞEKİL LİSTESİ

| | <u>Sayfa No</u> |
|---|-----------------|
| Şekil 3.1 : Çoklu Hızlı Sistem Gösterimi..... | 19 |
| Şekil 3.2 : Farklı Örnekleme Frekansına Sahip İki İşaret..... | 20 |
| Şekil 3.3 : Sistem Periyodu ve Alt Örnekleme Çarpanlarının Gösterimi | 22 |
| Şekil 3.4 : Alt Örnekleme..... | 23 |
| Şekil 3.5 : $L=2$ için Alt Örnekleme İşleminin Bir Örneği..... | 24 |
| Şekil 3.6 : Alt Örnekleme için Frekans Spektrumu Gösterimi..... | 25 |
| Şekil 3.7 : Örnek Seyreltme Diyagramı..... | 25 |
| Şekil 3.8 : Zaman Ötelemeli Alt Örnekleme Diyagramı..... | 26 |
| Şekil 3.9 : Maksimum Örnek Seyreltilmiş İşaret Kümesi($L=3$)..... | 26 |
| Şekil 3.10 : Üst Örnekleme Blok Diyagramı..... | 27 |
| Şekil 3.11 : Üst Örneklemenin Bir Örneği($I=3$)..... | 27 |
| Şekil 3.12 : Üst Örnekleme için Frekans Spektrumu Gösterimi($I=2$)..... | 28 |
| Şekil 3.13 : Ara Değerleme Diyagramı..... | 28 |
| Şekil 3.14 : Ara Değerleyicideki İşaretler..... | 29 |
| Şekil 3.15 : Rasyonel Bir Çarpanla Örnekleme Hızı Dönüştürme | 29 |
| Şekil 3.16 : (a) Örnekleme Hızı Dönüştürücü Girişinin Frekans Cevabı (b) Alçak Geçiren Filtre Çıkışındaki ve Örnekleme Hızı Dönüştürücü Çıkışındaki Frekans Cevabı ($L/I = 3/2$)..... | 30 |
| Şekil 3.17 : Alt Örnekleme ve Filtre Yapısına Eşdeğer Gösterim..... | 31 |
| Şekil 3.18 : Filtre ve Üst Örnekleme Yapısına Eşdeğer Gösterim..... | 31 |
| Şekil 3.19 : Alt ve Üst Örnekleme yapılarının Kaskat Bağlantıları..... | 31 |
| Şekil 3.20 : Çoklu Hızlı Sistem için Nedensellik Kavramı..... | 35 |
| Şekil 3.21 : LPTV Filtre..... | 36 |
| Şekil 4.1 : Wiener Filtreleme Probleminin Blok Diyagramı..... | 43 |
| Şekil 4.2 : Tek Kanallı Çoklu Hızlı Filtreleme Probleminin Blok Diyagramı..... | 46 |
| Şekil 4.3 : $d[n]$ ile $x[n]$ arasındaki ilişki($P=4$)..... | 47 |
| Şekil 4.4 : Tek Kanallı Çoklu Hızlı Wiener Filtreleme Gösterimi ve $d[n]$ ile $x[m]$ arasındaki ilişki($P=3$)..... | 47 |
| Şekil 4.5 : $n=5$ için $D[n, m] / \bar{T}$ | 48 |
| Şekil 4.6 : Çok Kanallı Çoklu Hızlı En İyi Filtreleme Probleminin Blok Diyagramı..... | 52 |
| Şekil 4.7 : Çok Kanallı Çoklu Hızlı Wiener Filtrelemede İndis Eşleme Kavramı..... | 53 |
| Şekil 4.8 : Çoklu Hızlı Gözlem Modeli..... | 55 |
| Şekil 4.9 : Çoklu Hızlı En İyi Filtre..... | 56 |
| Şekil 5.1 : Kestirim Süreci..... | 60 |
| Şekil 5.2 : Çoklu Hızlı En İyi Filtrenin En Basit Şekli..... | 60 |
| Şekil 5.3 : Çoklu Hızlı LMS Algoritmasının Basitleştirilmiş Diyagramı..... | 65 |
| Şekil 5.4 : Çoklu Hızlı LMS Algoritmasının Basamakları..... | 67 |

| | | |
|-------------------|---|----|
| Şekil 5.5 | : Çoklu Hızlı LMS Algoritmasının Diyagramı..... | 67 |
| Şekil 6.1 | : $x_i[m_i]$ Gözlem İşaretlerinin $d[n]$ İşaretinden Üretildiği Gözlem Modeli | 68 |
| Şekil 6.2 | : Orjinal İşaretin Çoklu Hızlı Wiener Filtresiyle Yeniden Elde Edilmesi..... | 70 |
| Şekil 6.3 | : İşaretin $P = 3$, $K = 3$ olan FIR Wiener Filtre Kullanılarak Gözlem İşaretlerinden Elde Edilmesi..... | 70 |
| Şekil 6.4 | : En İyi Doğrusal Filtreleme Kullanılarak Orjinal İşaretin Yeniden Elde Edilmesi..... | 71 |
| Şekil 6.5 | : Şekil 6.4'e ait MSE..... | 72 |
| Şekil 6.6 | : Alt Örneklenmiş Gürültülü Gözlem İşaretleri..... | 72 |
| Şekil 6.7 | : İki Kanallı Gözlem Modeli..... | 73 |
| Şekil 6.8 | : İki Kanallı Çoklu Hızlı Wiener Filtresinin Blok Diyagramı..... | 73 |
| Şekil 6.9 | : (a) AR Süreç (b) AR Sürecin Çoklu Hızlı Wiener Filtresiyle Kestirimi ($K=2$) (c) AR Sürecin Tek Hızlı Wiener Filtresiyle Kestirimi..... | 80 |
| Şekil 6.10 | : Çoklu Hızlı ve Tek Hızlı Zaman Ortalamalı Karesel Hata..... | 80 |
| Şekil 6.11 | : Çoklu Hızlı Wiener Filtreyle AR Sürecin Elde Edilmesi($K=2$)... | 81 |
| Şekil 6.12 | : (a) Çoklu Hızlı Wiener Filtreyle Elde Edilen MSE (b) Tek Hızlı Wiener Filtreyle Elde Edilen MSE..... | 82 |
| Şekil 6.13 | : (a) $K=2$ (b) $K=3$ (c) $K=5$ için TAMSE..... | 82 |
| Şekil 6.14 | : $K=2$ için Çoklu Hızlı Wiener Filtreyle Orjinal İşaretin Kestirimi | 83 |
| Şekil 6.15 | : Şekil 6.14'e ait Ortalama Karesel Hata..... | 83 |
| Şekil 6.16 | : Çok Kanallı Çoklu Hızlı Bir Model..... | 84 |
| Şekil 6.17 | : En İyi Kestiricinin Blok Diyagramı..... | 85 |
| Şekil 6.18 | : Peryodik İşaret için Hata Varyansı-SNR Grafiği..... | 86 |
| Şekil 6.19 | : Düşük Hızlı İşaret için $\text{SNR}=-6\text{dB}$ olduğunda $d[n]$ ile $\hat{d}[n]$ | 87 |
| Şekil 6.20 | : Düşük Hızlı İşaret için $\text{SNR}=6\text{dB}$ olduğunda $d[n]$ ile $\hat{d}[n]$ | 87 |
| Şekil 6.21 | : İki Referans Girişli Uyarlamalı Gürültü Giderme..... | 88 |
| Şekil 6.22 | : (a) Orjinal Konuşma İşareti (b) Girişime Uğramış Konuşma İşareti..... | 89 |
| Şekil 6.23 | : (a) Orjinal İşaret (b) Her İki Referans Girişle Elde Edilen Filtrelenmiş İşaret..... | 90 |
| Şekil 6.24 | : Sadece Düşük Hızlı Referans Girişi Kullanılarak Elde Edilen Filtrelenmiş İşaret..... | 90 |
| Şekil 6.25 | : Referans Girişlerinin Elde Edildiği Blok Diyagram..... | 91 |
| Şekil 6.26 | : (a) Girişim İşareti (b) Girişim İşaretinin Kestirimi..... | 91 |
| Şekil 6.27 | : (a) İstenen İşaret (b) Girişim İşareti (c) $\mu = 0.01$ için Filtrelenmiş işaret (d) $\mu = 0.02$ için Filtrelenmiş İşaret..... | 92 |
| Şekil 6.28 | : (a) $\mu = 0.01$ için Öğrenme Eğrisi (b) $\mu = 0.02$ için Öğrenme Eğrisi..... | 92 |

SEMBOL LİSTESİ

| | |
|------------------------|------------------------------|
| ε | : Hata |
| d | : İstenen İşaret |
| x | : Gözlem İşareti |
| L | : Alt Örnekleme Çarpanı |
| I | : Üst Örnekleme Çarpanı |
| K | : Sistem Periyodu |
| k | : Sistem Fazı, Periyodikliği |
| t | : Zaman |
| D | : Alt Örnekleme Matrisi |
| U | : Üst Örnekleme Matrisi |
| σ | : Varyans |
| τ | : Öteleme değeri |
| ω | : Frekans |
| n | : Zaman İndisi |
| M | : Eşleme Fonksiyonu |
| R | : Özilişki Matrisi |
| T | : Örnekleme Periyodu |
| μ | : Adım Boyu |
| \bar{T} | : Sistem Örnekleme Aralığı |
| \bar{F} | : Sistem Hızı |
| σ_ε^2 | : Ortalama Karesel Hata |

ÇOKLU HIZLI İŞARET İŞLEME YÖNTEMLERİYLE İŞARETLERİN ELDE EDİLMESİ

ÖZET

Çoklu hızlı işaret işleme teknikleri son yıllarda konuşma ve görüntü sıkıştırma, istatistiksel ve uyarlamalı işaret işleme, sayısal radyo yayını gibi çok geniş alandaki uygulamalar için geliştirilmektedir. Çoklu hızlı istatistiksel ve uyarlamalı işaret işleme yöntemleri, farklı hızlarda örneklenmiş gözlem işaretleri kullanılarak orjinal işaretin yeniden elde edilmesi problemine çözüm sağlayabilmektedir.

Bu tezde çoklu hızlı sistemlerde kullanılan temel bloklar ve kavramlar açıklanmıştır. Therrien ve öğrencileri tarafından tanımlanan çoklu hızlı istatistiksel ve uyarlamalı filtreleme teknikleri belirtilmiştir. Çoklu hızlı sistem teorisine dayanan çoklu hızlı en iyi filtreleme teknikleri gösterilmiştir. Çoklu hızlı sistemdeki işaretlerin örnekleme hızlarındaki farklılıktan dolayı çoklu hızlı Wiener filtre katsayıları periyodiklik göstermektedir. Bu çalışmada çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemlerinin türetilmesinden de bahsedilmiştir. Çok kanallı çoklu hızlı FIR Wiener filtreleme kullanılarak orjinal bir işaretin kestirim problemi uygulamalarla gösterilmiştir.

Ayrıca; bir rastgele sürecin farklı hızlarda örneklenmiş iki gözlem işaretinden kestirilmesi problemi uyarlamalı filtreleme teknikleri kullanılarak açıklanmıştır. Çoklu hızlı uyarlamalı LMS algoritması ele alınmıştır. Bu algoritma uyarlamalı gürültü gidermeye uygulanmıştır. Sadece düşük hızlı gözlem işareti kullanılarak filtrenin girişimi giderebilme özelliği bu çalışmada gösterilmiştir.

SIGNAL RECONSTRUCTION WITH MULTIRATE SIGNAL PROCESSING METHODS

SUMMARY

Multirate digital signal processing techniques have been developed in the recent years for a wide range of applications, such as speech and image compression, statistical and adaptive signal processing, digital audio. Multirate statistical and adaptive signal processing methods provide solution to the problem of original signal reconstruction using observation signals sampled at different rates.

In this thesis, basic blocks and concepts using at the multirate systems are explained. Multirate statistical and adaptive filtering techniques derived by Therrien and his students are expressed. Multirate optimal filtering techniques based on multirate system theory are indicated. Multirate Wiener filter coefficients exhibit periodicity due to the difference in the sampling rates of signals at the multirate system. In this work derivation of multirate Wiener-Hopf equations is also mentioned. The problem of original signal estimation using multichannel multirate FIR Wiener filtering is shown with applications.

Also, the problem of estimating a random process from two observed signals sampled at different rates is explained by using adaptive filtering techniques. Multirate adaptive LMS algorithm is discussed. This algorithm is applied to adaptive noise cancellation. The ability of filter to remove interference using only low rate observation signal is demonstrated in this work.

1. GİRİŞ

İşaret işlemenin bir parçasını oluşturan çoklu hızlı (multirate) işaret işleme son otuz yıldır hızla gelişmektedir. Bu alan, farklı hızda örneklenmiş birçok işareti içeren sistemler üzerine odaklanmıştır. Sayısal işaret işlemenin birçok uygulamasında bir işaretin örnekleme hızının değiştirilmesi problemiyle karşılaşılabilir. Örneğin, çeşitli işaretlerin (faks, konuşma, video vb...) iletildiği ve alındığı haberleşme sistemlerinde farklı örnekleme hızlarına sahip işaretlerin işlenmesine ihtiyaç duyulur. Bir işareti verilen örnekleme hızından farklı bir örnekleme hızına dönüştürme işlemine örnekleme hızı dönüştürme denir. Farklı hızlardaki işaretlerin işlendiği sistemler ise çoklu hızlı sayısal işaret işleme sistemleri olarak adlandırılır.

Çoklu hızlı işaret işlemenin birçok avantajı bulunmaktadır ve çoklu hızlı işaret işleme teknikleri birçok alana uygulanmaktadır. Bunlardan birkaçı konuşma ve görüntü sıkıştırma, sayısal ses kodlama/kod çözme, istatistiksel ve uyarlamalı işaret işleme, ayrık-zamanlı çok boyutlu işaret işleme, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü, jeofiziksel işaret işleme, yüksek çözünürlüklü görüntü elde etme ve rasyonel örnekleme hızı dönüştürme (rational sampling rate conversion) olarak verilebilir [1-3].

Çoklu hızlı işaret işlemedeki araştırmaların çoğu temel blokların belirlenmesi ve geliştirilmesinden başka filtre banka teorisi ve çoklu hızlı Kalman filtreleme hakkındadır [3,5]. Son yirmi yıl boyunca çoklu hızlı filtre bankaları birçok farklı uygulamada kullanılmıştır. Bunlardan birkaçı konuşma kodlama, uyarlamalı işaret işleme, görüntü sıkıştırma, ses ve görüntü işleme uygulamaları olarak verilebilir. Çoklu hızlı filtre bankalarının kullanılmasındaki amaç, frekans domeninde işareti iki veya daha fazla işarete ayırmak ve iki veya daha fazla işareti birleştirerek tek bir işaret oluşturmak olarak söylenebilir. Çoklu hızlı filtre bankaları analiz yada sentez filtre bankaları olarak kullanılırlar. Filtre bankasıyla ilgili yapılan araştırmaların çoğunda tek bir giriş işareti yada aynı hızda örneklenmiş giriş işaretlerinden oluşan vektör mevcuttur. Filtre bankasında işaret farklı hızlardaki altbandlara ayrılır. İşaret işleme teknikleri uygulandıktan sonra elde edilen işaretlerden bir çıkış işareti veya

aynı hızda örneklenmiş çıkış işaretlerini içeren vektör sentezlenir. Bu alanda yapılan araştırmalarda farklı örnekleme hızlarındaki birçok giriş işaretini işlemek için yöntemler geliştirilmemiştir. İstatistiksel çoklu hızlı işaret işleme alanında yapılan çok sayıdaki yayında üzerinde durulan konulardan biri periyodik rastgele süreçlerin tanımlanmasıdır. Bu yayınlarda periyodik rastgele süreçlerin hem zaman hem frekans domeninde belirlenmesi için yöntemler sunulmuştur ve periyodik rastgele süreçlerin çevrimsel durağanlığı gibi kavramlar tartışılmıştır. Stokastik çoklu hızlı işaret işleme alanındaki bazı yayınlarda stokastik sistemlerin ikinci dereceden moment analizi, Kalman ve Wiener filtreleme teorisini içeren en iyi kestirim teorisi işlenmektedir. İstatistiksel çoklu hızlı işaret işlemedeki diğer önemli araştırma alanı da durum-uzay çoklu hızlı Kalman filtrelerinin geliştirilmesidir.

1975'den sonra çoklu hızlı işaret işleme önem kazanmıştır [4]. Çoklu hızlı işaret işlemedeki ilk araştırma, temel yapı bloklarını içeren çoklu hızlı sistemlerin tanımlanması ve çoklu hızlı işaret işleminin filtre banka teorisine nasıl uygulanacağı hakkındadır. 1983'de Crochiere ve Rabiner çoklu hızlı işaret işleme hakkındaki ilk kapsamlı kitabı yayınlamışlardır. Yapılan çalışmada çoklu hızlı işaretlerin zaman ve frekansta gösterimi, örnek seyreltme ve aradeğerleme kullanılarak örnekleme hızı dönüştürme ve çoklu hızlı sistemlerde verimliliğin artırılması açıklanmıştır. İşaretin birçok parçaya ayrıldığı ve bütün parçaların aynı değerle örnek seyreltildiği düzgün filtre bankalarının (Ayrık Fourier dönüşümü (AFD) filtre bankası, düzgün tek yanbant (SSB) filtre bankası vb.) çeşitli biçimlerini tanımlamışlardır. Crochiere ve Rabiner'in kitabından sonra 1993'te Vaidyanathan çoklu hızlı işaret işleme hakkında önemli bir yayın sunmuştur [7]. Vaidyanathan'ın çalışmasında çoklu hızlı işaret işleminin temeli ve filtre bankası ile ilgili uygulamalar açıklanmaktadır. Vaidyanathan, çoklu hızlı filtre bankalarının birçok biçimini tanımlamıştır. Vaidyanathan, ayrıca çalışmasında çoklu hızlı işaretlerin işlenmesinde çok önemli bir rol oynayan zamanla periyodik olarak değişen (LPTV) filtre kavramını açıklamış ve dalgacık dönüşüm teorisi ile çoklu hızlı işaret işleme arasındaki ilişkiyi tanımlamıştır. Her iki kitapta çoklu hızlı işaret işleme konusunda yapılan araştırmaların çoğuna temel oluşturmuştur.

Shenoy, Burnside ve Parks çoklu hızlı filtre bankası ile yapılan çalışmayı en iyi minimaks filtrelere genişletmişlerdir [3]. Genelleştirilmiş Fourier analizini kullanarak en iyi minimaks çoklu hızlı filtre tasarımı için yeni bir hata ölçütü

türetmişlerdir. Chen ve Vaidyanathan, rasyonel örnekleme hızı değiştirmeyi tanımlamak için çokevrelili filtre kavramını açıklamışlardır [8]. Çokevrelili filtreleri örnek seyreltilmiş periyodik işaretlerin periyodiklik özelliğini göstermek için kullanmışlardır. Evans, Bamberger ve McClellan tarafından çoklu hızlı yapılarıdaki kurallar, en büyük ortak alt kafesler bulunup koset vektörleri hesaplanarak çok boyutlu yapılar için genişletilmiştir [9].

Çoklu hızlı sistem farklı örnekleme hızlarındaki işaretleri içerdiğinden çoklu hızlı sistemde periyodiklik görülür. Doğrusal zamanla periyodik olarak değişen (LPTV) filtrelerin bazı çeşitleri Vaidyanathan tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca Saadat Mehr ve Chen, ayrık zamanlı doğrusal anahtarlama zamanla değişen (LSTV) iki yapı sunmuşlardır [10]. Her bir yapı farklı doğrusal zamanla değişmeyen (LTI) sisteme bağlı olan periyodik bir anahtardan oluşur. Bu yapılar doğrusal zamanla periyodik olarak değişen bir sistemin gösteriminde kullanılır. Saadat Mehr ve Chen elde ettikleri sonuçları, periyodu \hat{p} olan LPTV sistemle periyodu p olan bir LPTV sisteme nasıl yaklaşılanacağını içeren problemin çözümünde kullanmışlardır. LPTV yapıları konusundaki bu çalışmayı LPTV sistemlerin çokevrelili gösterimini açıklamak için genişletmişlerdir [11]. Bir filtre bankasının, iki LPTV sistemin kaskad bağlanmasına eşdeğer olduğunu göstermişlerdir. Eğer p ve m aralarında asallarsa periyodu m olan LPTV filtrelere sahip p kanallı filtre bankası, LTI filtreler içeren mp kanallı filtre bankasıyla gösterilebilir. Chen ve Qui, ayrık zamanlı LPTV sistemlerdeki örtüşme etkisinin miktarını ölçmek için çeşitli yollar önermişlerdir [12].

Dong Wei en iyi doğrusal zamanla periyodik olarak değişen ters evrişim filtresi üzerine çalışmış ve en iyi LPTV filtrenin Wiener filtresine göre daha iyi bir performansa sahip olduğunu göstermiştir [13]. Phoong ve Vaidyanathan, zamanla değişen filtre bankalarının temelini açıklamışlar ve LTI filtre bankaları tarafından gösterilmeyen özellikleri belirtmek için zamanla değişen filtre bankalarına çokevrelili bir yaklaşım kullanmışlardır [14]. Vaidyanathan çalışmasını periyodik sistemlere genişletmiş ve periyodik LTI sistemlerin durum-uzay gösterimlerini belirtmiştir. Ayrıca çevrimsel çoklu hızlı sistemleri ve filtre bankalarını tanımlamıştır [15]. Gadre ve Patney, vektörel çoklu hızlı sistemi tanımlamışlar ve bir vektörel LPTV sisteminin zamanla değişmez olması için gerekli olan koşulları türetmişlerdir [16]. Ayrık doğrusal zamanla periyodik olarak değişen (LPTV) sistemlerin dalgacık kullanılarak

modellenebileceği Borat, Dorfan ve Feuer tarafından gösterilmiştir [17]. Peryodik sistemlerin anlatıldığı diğer bir çalışmada Misra tarafından yapılmıştır. Misra, periyodik sistem için eşdeğer zamanla değişmez bir sistemin bulunması koşuluyla doğrusal zamanla değişmeyen teorideki birçok sonucun periyodik sistemlere genişletebildiğini göstermiştir. Eşdeğer zamanla değişmez sistemleri bulmak için basit ve güvenilir bir yöntem sunmuştur [18].

Buraya kadar belirtilen çalışmalar deterministik işaret işleme üzerine odaklanmıştır. Çoğu uygulamada işaretler rastgele süreçler olmakla birlikte bazı çalışmalar çoklu hızlı işaret işleme tekniklerinin istatistiksel özelliklerinin belirlenmesiyle ilgilidir. Çoklu hızlı sistemlerin periyodik olmasından dolayı çoklu hızlı sistemlerdeki işaretler genellikle geniş anlamda durağan (WSS) değildirler. Çoklu hızlı sistemlerde durağan giriş işaretleri çevrimsel durağanlık yada geniş anlamda çevrimsel durağanlık (WSCS) gösterebilir. Çevrimsel durağan süreçler zamanın periyodik fonksiyonu olmamakla birlikte istatistiksel özellikleri zamanla periyodik olarak değişen süreçlerdir. Haberleşme, radar ve sonar uygulamalarında ise modülasyon, örnekleme, çoğullama ve kodlama işlemlerinden dolayı periyodiklik mevcuttur. Gardner, Napolitano ve Paura, yaptıkları çalışmada çevrimsel durağanlık üzerine literatür taraması sunmuşlar ve geniş bir kaynakça vermişlerdir. Çalışmalarındaki alıntılar yirmi iki kategoriye ayrılmış ve kronolojik sıraya göre listelenmiştir. İşaret analizi için hem stokastik hem stokastik olmayan yaklaşımlar ele alınmış ve çevrimsel durağanlık uygulamaları incelenmiştir [19]. Gardner, N .dereceden çevrimsel durağan işaretlerin spektral olarak tanımlanması konusunda yöntemler sunmuştur [20]. Vaidyanathan, stokastik işaretlerin çoklu hızlı sistemlerden geçtiği zaman istatistiksel özelliklerinin nasıl değiştiğini araştırmıştır. İşaretlerin örnek seyreltici, aradeğerleyici ve daha karmaşık yapılardan geçerken istatistiksel davranışlarına ilişkin teoremler sunmuştur [21]. Örneğin, WSS bir işaretin örnek seyreltilmiş şekli WSS kalır, fakat WSS bir giriş işareti L katlı aradeğerleyiciye uygulanırsa çıkış işareti L ile periyodik çevrimsel geniş anlamda durağan olacaktır. WSS giriş işaretinin L katlı aradeğerleme filtresi çıkışında WSS kalması için gerek ve yeter koşul, filtrenin örnek seyreltilmiş değerlerinin örtüşme meydana getirmemesidir. Ayrıca bant sınırlı kanalların tanımlanmasında kullanılan çoklu hızlı uyarlamalı filtre yapısı geliştirilmiştir. Akkarakaran ve Vaidyanathan, [21]'deki çalışmayı iki frekanslı harita ve ikiz-spektrum harita kullanarak göstermişlerdir. İki frekanslı

harita, LTV sistemleri tanımlamak için kullanılan iki boyutlu Fourier dönüşümüdür. İkiz-spektrum harita ise durağan olmayan rastgele süreçleri tanımlayan iki boyutlu Fourier dönüşümüdür. Bu kavramlar kullanılarak [21]'deki sonuçlar basitleştirmiş ve kayıpsız LTV sistemlerin iki frekanslı karakteristiği türetilmiştir [22,23]. Therrien, çoklu hızlı rastgele süreçler için ilişki fonksiyonlarını ve güç spektrumunu tanımlayan yöntemleri açıklamış ve çoklu hızlı işaretlerin birleştirilmesi için bazı en iyi filtreleme yapıları önermiştir [24,25]. Çalışmasını durağan olmayan rastgele süreçlere genişletmiştir. Peryodik, çevrimsel durağan ve diğer rastgele süreçlerin iki boyutlu spektral gösterimleri arasındaki ilişkiyi tanımlamıştır [26,27]. Napolitano, çoklu hızlı işaretlerin çevrimsel yüksek dereceli istatistiklerini (HOS) incelemiştir [28]. Çevrimsel durağan girişlerin uygulandığı çok girişli çok çıkışlı (MIMO) doğrusal zamanla periyodik olarak değişen sistemler için giriş-çıkış ilişkilerini üretmek amacıyla çevrimsel yüksek dereceli istatistikleri kullanmıştır. Tek girişli tek çıkışlı (SISO) doğrusal zamanla değişmeyen bir sistem için ikinci dereceden çevrimsel spektruma dayanan Wiener sistem tanımlama formülünü yüksek dereceli istatistiklere genelleştirmiştir. Sürekli zaman dizisinin çevrimsel yüksek dereceli istatistiklerinin örneklerinden elde edilmesini açıklamıştır. Ohno ve Sakai, yüksek frekanslı altband işaret çıkarıldığında zaman ortalamalı ortalama karesel hatayı (time-averaged mean-square error, TAMSE) minimize eden en iyi çift dikgen FIR filtre bankası tasarım yöntemini çevrimsel durağan spektral analiz kullanarak önermişlerdir. Geniş anlamda durağan bir giriş için filtre bankası çıkışı çevrimsel durağan olduğundan çevrimsel durağan spektral analiz kullanılmıştır [29].

İstatistiksel çoklu hızlı işaret işlemedeki en önemli tekniklerden biri Kalman filtrelemedir. Çoklu hızlı Kalman filtre birçok uygulamada kullanılmıştır. Çoklu hızlı Kalman filtre konusundaki en eski çalışma Andrisani ve Gau tarafından iki farklı Kalman filtrenin paralel kullanılmasıyla yapılmıştır [30]. Kalman filtrelerinden biri düşük dereceli olup yüksek hızlı ölçümü işler. Diğeri ise ilk Kalman filtreden kalanlarla düşük hızlı ölçümü işler. Andrisani ve Gau çoklu hızlı Kalman filtresiyle hesaplama karmaşıklığını düşürmüşlerdir. Chen ve çalışma arkadaşları da Kalman filtresini incelemiştir. Özyinelemeli (AR) yada hareketli ortalamalı (MA) stokastik işaretin sadece gürültülü ve alt örneklenmiş biçimi ölçüldüğünde işaretin değerlerini aradeğerlemek ve kestirmek için çoklu hızlı Kalman filtre kullanılmıştır [31]. Çoklu hızlı Kalman yeniden elde etme filtresi, bir paket anahtarlama

şebekesinde kaybolan konuşma paketlerinin geri elde edilmesi için uygulanmıştır. Chen ve arkadaşları benzetim sonuçlarıyla çoklu hızlı Kalman filtresinin Wiener filtresine göre daha iyi kestirim ve ara değerlendirme performansına sahip olduğunu göstermişlerdir. Gürültülü bir filtre bankası sisteminde giriş işaretini en iyi şekilde yeniden elde etmek için klasik sentez filtreleri yerine çoklu hızlı Kalman sentez filtresi önerilmiştir [32]. Burada çoklu hızlı durum-uzay modeli türetilmiş ve çoklu hızlı Kalman filtresine ait algoritma çoklu hızlı durum-uzay modeline göre elde edilmiştir. Klasik çoklu hızlı sistemlerde işaretin yeniden elde edilme performansı kanal gürültüsü yüzünden kötüleşmektedir. Kanal gürültüsüne sahip çoklu hızlı sistemlerde işaretin yeniden elde edilmesi için çoklu hızlı ters evrişim filtresi önerilmiştir [33]. Hem filtre bankaları hem çapraz çoğullayıcılar çoklu hızlı ters evrişim filtresinin tasarımında kullanılmıştır. Kanal gürültüsü varken çoklu hızlı evrişim filtresi klasik sistemlere göre daha iyi performans göstermiştir. Kanal gürültülü çapraz çoğullayıcı sistemlerde işareti yeniden elde etme problemi Wiener-Hopf teorisi yönünden incelenmiştir [34]. De Leon ve çalışma arkadaşları, Kalman filtresini hedef izleme uygulamasında kullanmışlardır [35]. Gürültülü ölçümlerden dolayı hesaplama hızını düşürmek için işaretler altbantlara ayrılmış ve her bir altbanda Kalman filtresi uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar hedef izleme uygulamasında kullanılmıştır. Ni ve çalışma arkadaşları, gürültüye daha az duyarlı Kalman filtreleri geliştirmişlerdir [36]. Gürültülü filtre banka sisteminin çoklu hızlı durum-uzay modelini elde etmek için altbant işaretlerin çok kanallı gösterimi giriş işaretinin istatistiksel modeliyle birleştirilmiştir.

Çoklu hızlı Kalman filtresinin uygulandığı diğer bir araştırma alanında çokluçözünürlü çoklu hızlı (MRMR) kestirimdir. MRMR tekniklerinin bir diğeri de dalgacık dönüşümüdür. Farklı örnekleme hızı ve çözünürlükteki gözlemleri ve kestirimleri en iyi birleştiren özyineli algoritma, MRMR kestirim için bir çözümdür. İlk çalışma Basseville ve çalışma arkadaşları tarafından çokluçözünürlü istatistiksel süreçlerin kestirimi ve modellenmesi üzerinde yapılmıştır [37]. Chou ve çalışma arkadaşları bu çalışmayı özyineli kestirim ve Kalman filtresine genişletmişlerdir [38,39]. Chou'nun çalışması, Riccati denkleminin çözümüne dayanır. Cristi ve Tummala ise özyineli MRMR Kalman filtre geliştirmişlerdir [40]. Farklı örnekleme frekansındaki gözlemlere dayalı olarak en iyi filtreleme incelenmiştir. [40]'daki

çalışmanın amacı, bir stokastik süreci farklı çözünürlük ve örnekleme hızlarında modellemektir. Stokastik modelin MRMR durumuna genişletilebildiği gösterilmiştir.

Hong, bir filtre bankası kullanılarak yüksek hızlı ölçümlerden düşük hızlı kestirimin elde edilmesi üzerine çalışmıştır [41]. Filtre bankasının alçak geçiren filtreleme etkisinden dolayı daha iyi kestirimler elde edilmiştir. Jahromi, farklı örnekleme hızlarındaki gözlemleri kullanarak rastgele bir işaretin en iyi şekilde kestirilmesi üzerine çalışmıştır. Yüksek hızlı işaretin örneklerinin kestirimi için optimal en küçük ortalama karesel kestirimi kullanmıştır. Kestirici, orjinal rastgele işaretin maksimum entropi metoduyla elde edilen güç spektral yoğunluğunun bir fonksiyonudur [42-44]. Therrien ve öğrencileri, yakın zamanda bir işaretin farklı örnekleme hızlarındaki gözlemlerini kullanarak en iyi doğrusal filtre yardımıyla kestirilmesi üzerinde çalışmışlardır. İşaret biri orjinal hızda diğeri yarı hızda olan iki gözlem dizisinden kestirilmiştir ve çoklu hızlı kestirimle ortalama karesel hatanın azalacağı açıklanmıştır [45,46]. İkinci gözlem dizisinin keyfi seçilmiş örnekleme hızına sahip olduğu durum için en küçük kareler metodu incelenmiştir [47]. Kuchler ve Therrien, keyfi seçilmiş örnekleme hızına sahip herhangi bir sayıdaki gözlem işaretleri için genelleştirme yapmıştır ve Kuchler ayrıca çoklu hızlı bir sistem için ardışıl sınıflandırma uygulaması yapmıştır [48,6]. Ek olarak Therrien çoklu hızlı işaretler için doğrusal öngörü metodunu sunmuştur [49]. Therrien ve Hawes çoklu hızlı sistemler için en küçük ortalama kareler yöntemini sunmuştur [50]. En son olarak Scorfani ve Therrien, önceki yöntem ve teoremleri yüksek çözünürlüklü işaret ve görüntü elde etmede kullanmışlar ve bir boyutlu çoklu hızlı sistemleri iki boyutlu çoklu hızlı sistemlere genişletecek yöntemler sunmuşlardır [51,52].

Bu tezde Therrien ve öğrencilerinin yakın zamanda yapmış oldukları çalışmalar incelenecektir. Therrien ve öğrencilerinin tarafından yapılan uygulamalar gösterilecektir. İstatistiksel çoklu hızlı işaret işleme farklı örnekleme hızlarına sahip birçok giriş işaretinin en iyi filtrelenmesi açısından incelenecektir. İlerde yapılabilecek uygulamalar belirtilecektir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde belirtilen işaret işleme ile ilgili temel kavramlar diğer bölümlerde kullanılacaktır. Kısaca çeşitli işaret tanımları, ikinci dereceden moment analizi, Kronecker çarpım ve sayı teorisinden bahsedilmektedir.

Üçüncü bölümde çoklu hızlı sistemlerden bahsedilmektedir. Doğrusal zamanla değişmeyen (LTI) ve doğrusal zamanla periyodik olarak değişen (LPTV) sistemler

açıklanmaktadır. Çoklu hızlı sistem teorisi açıklanıp çoklu hızlı sistemdeki farklı örnekleme hızlarına sahip işaretler ile çoklu hızlı sistem arasındaki ilişki belirtilir. Çoklu hızlı sistem özelliklerinden bahsedilir. Çoklu hızlı işaret işlemede kullanılan alt örneklemenin ve üst örneklemenin hem zaman hem frekansta etkisi incelenir. Örnek seyreltici ve aradeğerleyicinin rastgele süreçlere etkisi anlatılır. Çevrimsel durağanlık kavramı tanımlanır. Bölüm sonunda çoklu hızlı işlemlerin matris formda gösterimi ifade edilir.

Dördüncü bölümde en iyi filtreleme için çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri türetilir. İlk olarak en iyi filtreleme tek hızlı Wiener-Hopf denklemiyle tanımlanır ve daha sonra tek kanallı çoklu hızlı kestirim problemi ile çok kanallı çoklu hızlı kestirim problemine genişletilir. Çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemlerinin gösteriminde kullanılan indis eşleme açıklanır. İndis eşleme, farklı örnekleme hızlarındaki işaretler arasındaki ilişkiyi tanımlar.

Beşinci bölümde en iyi filtreleme için en küçük ortalama kareler yöntemi açıklanır ve uyarlamalı çoklu hızlı filtre tanımlanır.

Altıncı bölümde çoklu hızlı Wiener filtresi ile ilgili [5],[45],[50] ve [52]'deki uygulamalar incelenmiştir. Çoklu hızlı Wiener filtresiyle ilgili uygulamalar açıklanmıştır. Tanımlanan uyarlamalı çoklu hızlı en küçük ortalama kareler filtresi uyarlamalı gürültü giderme uygulamasında kullanılmıştır.

Yedinci bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve ne gibi yeni çalışmalar yapılabileceğine değinilmiştir.

2. İŞARET İŞLEME VE MATEMATİKSEL KAVRAMLAR

İşaret işleme, işaretlerin gösterimi, işlenmesi, dönüşümü ve taşıdıkları bilgiyle ilgilenir. Bir radar işaretindeki hedefin sınıflandırılması gibi işareten bilginin çıkartılması ve bir işarettaki gürültünün azaltılması örnek olarak verilebilir [53]. Sayısal işaret işleme, işaretlerin sayısal bilgisayar yada özel amaçlı sayısal donanımda bir sayılar dizisi olarak gösterilmesi ve bu işaret dizisi üzerinde çeşitli işlemler yaparak istenen bilgi yada büyüklüğün diziden çıkarılmasına dayanmaktadır [54]. İşaret işlemenin çeşitli uygulamalarında birçok kavram kullanılır. Bu bölümde çoklu hızlı işaretleri ve sistemleri tanımlamak için kullanılacak olan çeşitli matematiksel ve işaret işleme kavramları açıklanacaktır.

2.1 İşaretler

İşaret kelimesi, Latince “signum” kelimesinden türetilmiştir. Genellikle bir fiziksel sistemin davranışına yada durumuna ilişkin bilgi taşıyan ve bir yada birden fazla bağımsız değişkene bağlı olarak değişen her türlü büyüklüğe işaret denir. Konuşma, elektrokardiyografi, bir elektronik devrede ölçülen gerilim değişimi işarete örnek olarak verilebilir. İşaret bir, iki veya N bağımsız değişkenin fonksiyonu olabilir. Örneğin bir konuşma işareti zamanın bir fonksiyonu olarak gösterilebilir. Görüntü işaretinde ise her iki bağımsız değişken uzaysal boyutludur. Bir işaret bilginin farklı biçimlerini taşıyabilir. Buna elektromanyetik dalgaların video ve ses bilgisini bir radyo yada televizyon vericisinden alıcısına taşınması örnek olarak verilebilir [55]. Bu bölümde çeşitli işaretler ve diziler kısaca tanıtılacaktır.

2.1.1 Deterministik işaretler ve diziler

Deterministik işaret genellikle zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanır. İşaretin her $t \in \mathbb{R}$ için aldığı değerler belirlidir. İşaret, matematiksel bir ifade, kural yada tablodan belirlenebilir. Deterministik işaretin gelecek değerleri geçmiş değerlerinden elde edilebilir. Bir deterministik analog işaret yada analog işaret, $\{x(t)\}$ yada $x(t)$ ile gösterilir. İşaretin değerleri reel sayılardan oluşuyorsa işarete reel değerli analog

işaret denir. Eğer işaretin değerleri kompleks ise kompleks değerli analog işaret denir. İşaretleri tanımlarken birçok özellikten faydalanırız. Çoklu hızlı sistemlerdeki en önemli özellik periyodiktir. Bir işaret tüm t değerleri ve pozitif bir reel T_p için

$$x(t) = x(t + T_p) \quad (2.1)$$

koşulu sağlıyorsa periyodiktir. (2.1)'deki en küçük T_p değerine periyod denir. Deterministik dizi, $\{x[n]\}$ yada $x[n]$ ile gösterilen her $n \in \mathbb{Z}$ için aldığı değerleri belirli olan dizidir. Eğer dizinin bütün değerleri reel ise dizi, reel değerli dizidir. Dizinin elemanları kompleks ise dizi kompleks değerli dizidir. $x[n]$ dizisinin periyodik olması için bütün n değeri için

$$x[n] = x[n + N] \quad (2.2)$$

koşulunun sağlanması gerekir. En küçük N değeri dizinin periyodudur. Periyodik analog işaretin örneklenmesiyle elde edilen bütün diziler periyodik olmayabilir. $x(t)$ analog işaretinin örneklenmesiyle $x[n] = x(nT)$ olarak tanımlanan dizi elde edilir. Deterministik işaret ve dizi farklı domenlerde (\mathbb{R} yada \mathbb{Z}) tanımlanır. Dizideki n , indis değişkenidir. Bağımsız değişken n 'in zamanı göstermesi gerekli olmamasına rağmen $x[n]$ 'den genellikle zamanın fonksiyonu olarak söz edilir. Bir deterministik ayrık zamanlı işaret $\{x_T(t)\}$ yada $x_T(t)$ ile gösterilir ve her $t \in \Omega_T$ için belirli bir değer alır. Zamanın belirli anlarında tanımlanmıştır. $\Omega_T = \{nT; n \in \mathbb{Z}\}$ ve T örnekleme periyodu olarak gösterilir

$$x_T(t) = \{x[n], T\} = \{x[n], F\} \quad , n \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Ayrık zamanlı bir işaret (2.3)'de gösterildiği gibi bir dizi ve $F = 1/T$ örnekleme hızıyla tanımlanabilir. Tek hızlı sistemlerde örnekleme hızından bahsedilmeyebilir. Fakat çoklu hızlı sistemlerde farklı örnekleme hızları mevcut olduğu için ayrık zamanlı işaretlerden bahsederken örnekleme hızlarının belirtilmesi gerekir. Mesela $y[m]$ ve $x[n]$ dizileri farklı örnekleme hızlarına sahip ayrık zamanlı işaretlerdir.

2.1.2 Rastgele işaretler ve diziler

Bir işaretin herhangi bir anda aldığı değer kesin değilse ve alabileceği değerlerin olasılık dağılımı biliniyorsa işarete rastgele işaret denir. Bir rastgele işaretin gelecek değerleri doğru olarak öngürülemez. Öyleki her $t \in \mathbb{R}$ için uygun bir $X(t)$ rastgele değişkenin var olduğu rastgele değişkenler kümesine reel rastgele işaret denir ve $\{X(t)\}$ yada $X(t)$ ile gösterilir. Her $n \in \mathbb{Z}$ değerine karşılık bir $X[n]$ rastgele değişkenin var olması koşuluyla rastgele değişkenler kümesine reel rastgele dizi denir. $\{X[n]\}$ yada $X[n]$ ile gösterilir. Her $t \in \Omega_T$ ($\Omega_T = \{nT; n \in \mathbb{Z}\}$) için uygun bir $X_T(t)$ rastgele değişkenin var olduğu rastgele değişkenler kümesine deterministik ayrık domen işareti veya zaman serileri denir. $\{X_T(t)\}$ ile gösterilir ve T örnekleme aralığıdır.

2.1.3 Çok kanallı işaretler ve diziler

Çok kanallı işaretler ve diziler işaret işlemede birçok alanda kullanılır. Örneğin çoğul ortam teknolojileri ve renkli görüntü işleme alanlarında çok kanallı işaretler kullanılır. Birçok kaynaktan elde edilen işaret ve dizileri göstermek için çok kanallı işaret ve diziler tanımlanır. Çok kanallı bir işaret, ortak domendeki tek kanallı işaretlerin bir kümesidir ve $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_N(t)]^T$ vektörüyle gösterilir. Buradaki çok kanallı işaretin elemanları analog işaretlerdir. Tek kanallı işaretler rastgele yada deterministik olabilir. Çok kanallı bir dizi ise $\mathbf{x}[n] = [x_1[n] \ x_2[n] \ \dots \ x_N[n]]^T$ vektörüyle gösterilir. Rastgele bir \mathbf{X} vektörü sınırlı uzunluklu olup $0 \leq n \leq N-1$ aralığındaki $X[n]$ rastgele dizisinden elde edilir ve $\mathbf{X} = [X[0] \ X[1] \ \dots \ X[N-1]]^T$ ile gösterilir.

2.2 Çoklu Hızlı Sistemlerde Kullanılan Lineer Cebir Kavramları

Kronecker çarpım birçok uygulamada kullanılmakta olup tensör çarpma olarak bilinir. Çoklu hızlı sistemleri matrisler şeklinde göstermek için Kronecker çarpım kullanılır. \mathbf{A} ve \mathbf{B} matrisleri verildiğinde Kronecker çarpım

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1j}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2j}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}\mathbf{B} & a_{i2}\mathbf{B} & \cdots & a_{ij}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

olarak ifade edilir. Burada \mathbf{A} , $p \times l$ matris ve \mathbf{B} , $k \times m$ bir matris ise Kronecker çarpım $pk \times lm$ bir matristir.

Tablo 2.1: Kronecker Çarpımının Özellikleri

| | |
|---|--|
| 1 | $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$ |
| 2 | $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$ |
| 3 | $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$ |
| 4 | $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$ |
| 5 | $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$ |
| 6 | $tr(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) \otimes tr(\mathbf{B})$ |

Tablo 2.1’de Kronecker çarpımına ait özellikler verilmiştir. Çoklu hızlı işaretlerde en çok kullanılan diğer işlem tersine çevirme işlemidir. Ayrık zamanlı işaret işlemede işaretler genellikle vektörlerle gösterilir. Vektör ve matrislerin tersine çevrilme işleminin tanımlanması gerekir. Bir \mathbf{x} vektörünün tersine çevrilmiş şekli elemanlarının geriye doğru sıralanmasıyla bulunur. Bir \mathbf{x} vektörü ve geriye doğru sıralanmış şekli olan $\tilde{\mathbf{x}}$ vektörü (2.5) denklemiyle gösterilir.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_N \\ x_{N-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Bir \mathbf{A} matrisinin tersine çevrilmiş şekli, matrisin sütun ve satır elemanlarının geriye doğru sıralanmasıyla elde edilir. $P \times Q$ boyutunda bir \mathbf{A} matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{1Q} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{P1} & a_{P2} & \vdots & a_{PQ} \end{bmatrix}$$

olarak verildiğinde tersine çevrilmiş şekli olan $P \times Q$ boyutunda bir $\tilde{\mathbf{A}}$ matrisi

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{PQ} & \cdots & a_{P2} & a_{P1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2Q} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1Q} & \cdots & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

şeklinde elde edilir. Tersine çevrilmiş vektör ve matrisin özellikleri Tablo 2.2’de gösterilmiştir.

Tablo 2.2: Tersine Çevrilmiş Matris ve Vektörün Özellikleri

| | Nicelik | Tersine Çevrilmiş Şekli |
|--------------------|---------------------------------|---|
| Matris Çarpımı | \mathbf{AB} | $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}$ |
| Matris Tersi | \mathbf{A}^{-1} | $(\tilde{\mathbf{A}})^{-1}$ |
| Matris Eşleniği | \mathbf{A}^* | $(\tilde{\mathbf{A}})^*$ |
| Matris Transpozesi | \mathbf{A}^T | $(\tilde{\mathbf{A}})^T$ |
| Kronecker Çarpım | $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ | $\tilde{\mathbf{A}} \otimes \tilde{\mathbf{B}}$ |

2.3 Rastgele İşaretlerin İstatistiksel Gösterimi

Rastgele süreçler için yöntem ve model geliştirmek isteniyorsa rastgele süreçlerin istatistiksel özelliklerinin tanımlanması gereklidir. Bir rastgele süreç, sonsuz sayıda gerçekleşebilir. Bu sebeple rastgele sürecin tanımlanması için istatistiksel özelliklerinin belirlenmesi önem kazanır. Bir rastgele sürecin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun tamamen tanımlanamadığı durumlarda süreç birinci ve ikinci dereceden momentleri kullanılarak tanımlanır. Eğer süreç Gauss ise birinci ve ikinci dereceden momentleri süreci tanımlamak için yeterlidir. Eğer rastgele süreçler Gauss değilse ikinci dereceden moment analizi bütün sistemlerde işaretler arasındaki istatistiksel ilişkiyi belirlemek için yeterlidir. $X[n]$ rastgele süreci verildiğinde rastgele sürecin birinci dereceden momenti yada ortalaması

$$\mu_x[n] = \mathcal{E}\{X[n]\} \quad (2.7)$$

ile bulunur. Ortalama, genellikle zamanın bir fonksiyonudur ve geniş anlamda durağan (WSS) işaretler için sabittir. Çoklu hızlı işaret ve sistemlerde ortalama genellikle zamanın periyodik bir fonksiyonudur. $\mu_x[n] = \mathcal{E}\{X[n+M]\}$ şeklinde gösterilip burada M periyottur. Bir rastgele sürecin ikinci dereceden momentleri özilişki ve çapraz ilişki fonksiyonlarıyla tanımlanır

$$R_x[n_0, n_1] = \mathcal{E}\{X[n_0]X^*[n_1]\}. \quad (2.8)$$

Bir rastgele sürecin özilişki fonksiyonu (ACF) (2.8) denklemiyle gösterilir. Zamana bağlı ilişki fonksiyonu (2.9) ile gösterilir

$$R_x[n; l] = \mathcal{E}\{X[n]X^*[n-l]\}. \quad (2.9)$$

Eğer süreç geniş anlamda durağan ise ortalama değeri μ_x sabit ve ilişki fonksiyonu da n ve $n-l$ gözlem zamanları arasındaki farka bağlı bir fonksiyondur. $R_x[n; l] = R_x[l]$ olarak ifade edilir. Aynı hızda örneklenmiş $X[n]$ ve $Y[n]$ rastgele süreçleri için herhangi iki örneği arasındaki ilişki

$$R_{xy}[n; l] = \mathcal{E}\{X[n]Y^*[n-l]\} \quad (2.10)$$

zamana bağlı çapraz ilişki fonksiyonuyla gösterilir. WSS iki süreç arasındaki çapraz ilişki fonksiyonu sadece zaman farkına bağlı bir fonksiyondur ve $R_{xy}[n; l] = R_{xy}[l]$ olarak gösterilir. Rastgele işaretlerin analizinde sınırlı uzunluklu dizileri diğer bir deyişle vektörleri kullanırız. Verilen \mathbf{X} rastgele vektör için ortalama değeri $\boldsymbol{\mu}_x = \mathcal{E}\{\mathbf{X}\}$ şeklinde ifade edilir. Rastgele süreç WSS ise, vektörün ortalaması sabit değerlerden oluşmaktadır. Rastgele vektörün ilişki matrisi

$$\mathbf{R}_x = \mathcal{E}\{\mathbf{X}\mathbf{X}^{*T}\} = \begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[-1] & \cdots & R_x[-N+1] \\ R_x[1] & R_x[0] & \ddots & R_x[-N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x[N-1] & R_x[N-2] & \cdots & R_x[0] \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

ile gösterilir. \mathbf{X} , N uzunluklu bir rastgele vektör ve \mathbf{Y} ise M uzunluklu bir rastgele vektör olsun. Rastgele iki süreç de WSS ise çapraz ilişki fonksiyonu

$$\mathbf{R}_{\mathbf{XY}} = \mathcal{E}\{\mathbf{XY}^{*T}\} = \begin{bmatrix} R_{XY}[0] & R_{XY}[-1] & \cdots & R_{XY}[-M+1] \\ R_{XY}[1] & R_{XY}[0] & \ddots & R_{XY}[-M] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{XY}[N-1] & R_{XY}[N-2] & \cdots & R_{XY}[N-M] \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ile ifade edilir. Tersine çevrilmiş \mathbf{X} rastgele vektörü, $\tilde{\mathbf{X}}$ ile gösterilmekte olup ortalaması $\boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{X}}} = \mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{X}}\} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{X}}$ ile ifade edilir. Özilişki matriside $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{X}}} = \mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^{*T}\} = \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}$ ile gösterilir. Özilişki fonksiyonunun hermityen simetri özelliğinden dolayı ($R_X(l) = R_X^*(-l)$) $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}^* = \mathbf{R}_{\mathbf{X}}$ eşitliği yazılır.

2.4 Sayı Teorisi

Sayı teorisi tamsayıların özellikleriyle ilgilenen bir daldır [58]. Tam sayıların özellikleri çok eski zamanlardan beri incelenmektedir. Örneğin asal sayı dizisinin sonsuz olması ve karekök ikinin irrasyonel sayı olması gerçeği M.Ö.350 yıllarında yaşayan Euclid tarafından biliniyordu. Sayı teorisi lineer cebir, geometri ve soyut cebir gibi matematiğin diğer alanlarına yakından bağlıdır. Bağımsız değişkenlerin tamsayı olduğu ayrık zamanlı sistemlerin analizinde sayı teorisi kullanılır. Çoklu hızlı sistemlerde bölünebilme, çarpanlara ayırma ve denklik kavramları önemlidir [56,57,58]. Sayı teorisinin temelini oluşturan bölme algoritması (2.13) denkleminle tanımlanmıştır. $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $m > 0$ ise

$$n = qm + r, \quad 0 \leq r < m, \quad (2.13)$$

olacak şekilde bir tek q ve r tamsayıları mevcuttur. Burada q 'ya bölüm, r 'ye ise kalan denir. Eğer $m = 7$ ve $n = 592$ ise $q = 84$ ve $r = 4$ elde edilir. $0 \leq 4 < 7$ sağlanacağından tek bir çözüm mevcuttur. Sıfır olmayan n tamsayısı bir m tamsayısına bölündüğünde $n = cm$ şeklinde bir c tamsayısı mevcutsa “ n , m ile bölünebilir” yada “ m , n 'yi böler” denir. Bu taktirde c ve m 'ye n 'nin çarpanı; n 'ye c veya m 'nin katı denir. Şayet, m , n 'nin böleni ise bu $m|n$ ile, aksi halde

$m \nmid n$ ile gösterilir. $3|6$, $-3|6$, $5|5$, $2|-6$, $2 \nmid 5$, $8 \nmid 4$ örnek olarak verilebilir. Bölünebilirliğin birçok özelliği vardır.

m, p, n tamsayı olmak üzere $m|n$ ve $n|p$ ise $m|p$ 'dir. $m|n$ ve $n|m$ ise $m = \pm n$ 'dir. $m|n$ ve $n|p$ ise her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $m|na + pb$ 'dir. m ve n tamsayı olmak üzere $d = \text{ebob}(m, n)$ ile gösterilen d 'nin, m ve n 'nin en büyük ortak böleni olması için gerek ve yeter şart:

- 1) $d > 0$
- 2) $d|n$ ve $d|m$
- 3) $k|n$ ve $k|m$ ise $k|d$

olarak ifade edilir. Şayet $m = n = 0$ ise en büyük ortak bölen mevcut değildir. m ve n aralarında asal ise $d = \text{ebob}(m, n) = 1$ 'dir. Eğer $m = 21$ ve $n = 12$ ise $d = \text{ebob}(m, n) = 3$ 'dür. m ve n tamsayı olmak üzere $g = \text{ekok}(m, n)$ ile gösterilen g 'nin, m ve n 'nin en küçük ortak katı olması için gerek ve yeter şart:

- 1) $g > 0$
- 2) $n|g$ ve $m|g$
- 3) $n|k$ ve $m|k$ ise $g|k$

olarak verilir. En küçük ortak kat $\text{ekok}(m, n) = \frac{mn}{\text{ebob}(m, n)}$ olarak ifade edilir. Eğer

$m = 21$ ve $n = 12$ ise $g = \text{ekok}(m, n) = 84$ 'dir. Her $x \in \mathbb{R}$ için x 'e eşit yada x 'den küçük en büyük tamsayı değerine taban fonksiyonu yada en büyük tamsayı fonksiyonu denir ve $\lfloor x \rfloor$ ile gösterilir. Örnek olarak $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$ ve $\lfloor -2.6 \rfloor = -3$ verilebilir. m pozitif bir tamsayı olmak üzere $a, b \in \mathbb{Z}$ için $m|(a-b)$ ise a ile b , m modülüne göre denk(kongrüent)'tir. $a \equiv b \pmod{m}$ ile gösterilir ve “ a, b modül m 'e denktir.” şeklinde ifade edilir. $9 \equiv 7 \pmod{2}$ ve $17 \equiv 2 \pmod{5}$ denklige örnek olarak verilebiliriz. a ve b , m modülüne göre denk değilse yada a, b modül m 'e denk değilse $a \not\equiv b \pmod{m}$ olarak yazılır. (2.13) denkleminde m 'in sabit ve r kalan değerinin aynı kalması durumunda n sonsuz sayıda değer alabilir. Bu durumda r 'ye

ortak rezidü, m 'e modül denir. “ n , modül m 'ye denktir” şeklinde ifade edilir. Örneğin 2 modülüne denk iki tam sayı kümesi vardır. $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ kümesi $0(\text{mod } 2)$ 'ye denktir. $\{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ kümesi $1(\text{mod } 2)$ 'ye denktir. Eğer $a \equiv b(\text{mod } m)$ ise b 'ye a modül m 'in rezidüsü denir. $0 \leq b < m$ ise b ortak rezidüdür. Örneğin 2, 17 modül 5'in ortak rezidüsü ve 5, 8 modül 3'ün rezidüsüdür. Ortak rezidü $\langle \cdot \rangle_m$ ile gösterilebilir. b , a modül m 'in ortak rezidüsü olup

$$b = \langle a \rangle_m = a - \left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor m \quad (2.14)$$

ile ifade edilebilir. Burada $\lfloor \cdot \rfloor$, taban işlemini gösteriyor.

$$b = \langle 20 \rangle_6 = 20 - \left\lfloor \frac{20}{6} \right\rfloor 6 = 20 - 18 = 3 \text{ örnek olarak verilebilir.}$$

3. ÇOKLU HIZLI SİSTEM VE İŞARETLERİN ANALİZİ

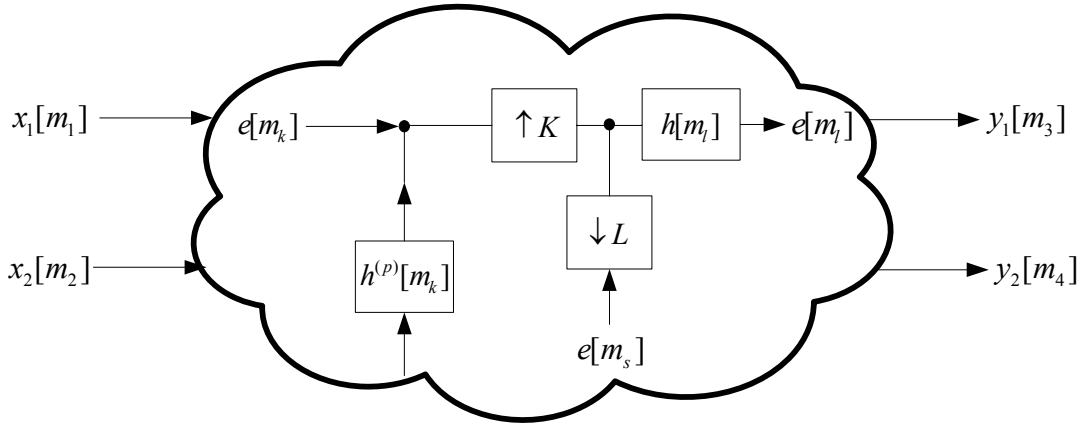
Tek girişli tek çıkışlı (SISO) sistemler ve tüm işaretlerin aynı örnekleme hızına sahip olduğu çok girişli çok çıkışlı sistemler için işaret işleme teknikleri geliştirilmektedir. İşaret işlemenin bazı uygulamalarında gözlem işaretleri farklı hızlarda örneklenirler. Kestirim, öngörü, sınıflandırma yada algılama gibi çeşitli işlemleri uygulamak için bu işaretlerin birlikte işlenmesi gerekmektedir. Bu tür problemlere temel oluşturmak amacıyla tek hızlı işaret ve sistemler için kullanılan teorinin çoklu hızlı teoriye genişletilmesi gerekir. Çoklu hızlı istatistiksel işaret işleme için geliştirilen teori tek kanallı yada tek hızlı çok kanallı problemlere indirgenebilmelidir.

Bu bölümde çoklu hızlı sistemler için geliştirilen teori anlatılmış ve çoklu hızlı bir sistemdeki temel işlemler tanıtılmıştır. Stokastik çok kanallı sistem ve işaretleri tanımlamak için bazı kavramlar belirtilmiştir. Çoklu hızlı bir sistemdeki çeşitli işaretlerin ortak domende gösterimi ve çoklu hızlı işlemlerin matris formda gösterimi incelenmiştir.

3.1 Çoklu Hızlı Sistemlere Giriş

Sayısal işaret işlemenin birçok uygulamasında sayısallaştırılmış bir işaretin örnekleme frekansının değiştirilmesi problemiyle karşı karşıya kalınır [61]. Örneğin CD çalar, sayısal ses teypi (DAT) ve sayısal yayın (digital broadcasting) farklı örnekleme frekanslarına sahiptirler. Sayısal yayın 32 kHz, DAT'lar 48 kHz, CD'ler 44.1 kHz örnekleme frekansına sahiptirler. Avrupa ve Amerika'da standartların tamamen farklı olduğu video işaretleri için de durum buna benzerdir. Birçok uygulamada ses işaretlerinin örnekleme hızlarının birbirleri arasında dönüştürülmesi gerekir. Bazı sistemlerde ise farklı örnekleme hızlarındaki ayrık zamanlı işaretlerin birbirine uydurulması gerekir. 44.1 kHz bir CD sisteminden 48 kHz DAT sistemine müzik kaydedilmesi buna bir örnektir. Bazı durumlarda kullanılan aşırı örnekleme bandgenişliğinde israfa neden olduğundan sistem hızı düşürülmelidir. Sayısallaştırılmış bir işaretin örnekleme hızının değiştirilmesinin diğer nedeni de daha iyi bir sistemin geliştirilmek istenmesidir. Örneğin bir CD çalarda örnekleme

frekansı 44.1 kHz iken ses işaretinin bandgenişliği 22 kHz'dir. Analog yeniden elde etme filtresi 22 kHz'e kadar olan bütün frekans bileşenlerini geerir ve $(44.1/2)=22.05$ kHz üzerindeki geermez. Keskin geçiş bölgesi olan bir analog filtre tasarlamak çok pahalıdır ve yüksek frekanslardaki faz bozunumu işaretin kalitesini kötüleştirir. Ses işaretinin yüksek frekansları, analog yeniden elde etme filtresinin geçiş bandından çok yüksek değerde olduğundan kaliteli bir sistem oluşturmak için örnekleme frekansı arttırılmalıdır. Böylece sınırlı faz bozunumu sağlanır. Birçok uygulamada farklı örnekleme hızındaki çeşitli işaretleri içeren sistemler kullanılır [62]. Mesela farklı örnekleme hızında çalışan iki alt sistem haberleştiğinde örnekleme hızları birbirlerine göre uygun olmalıdır. Bir genişband sayısal işaretin çeşitli darband kanallarda iletilmesi için ayrıştırılması örnek olarak verilebilir. Bu tür sistemler genellikle çoklu hızlı sistemler olarak adlandırılır. Çoklu hızlı sistemler sayısal filtre tasarımından işaret kodlama ve sıkıştırmaya kadar birçok uygulamada kullanılır. Bir oklu hızlı sistem Şekil 3.1'de gösterilmiştir [5].



Şekil 3.1 : Çoklu Hızlı Sistem Gösterimi

3.2 Temel Kavramlar

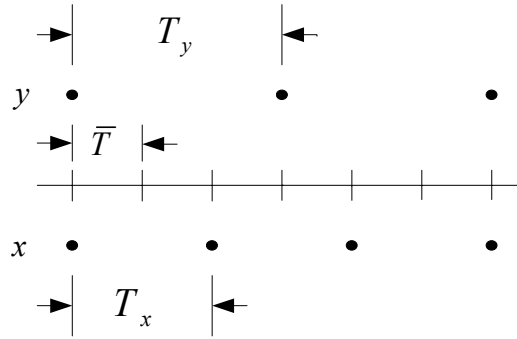
Çoklu hızlı bir sistemde farklı örnekleme hızlarındaki işaretleri ortak bir domende tanımlamak için bazı kavramların açıklanması gerekir. Şekil 3.1'de görüldüğü gibi işaretlerin örnekleme hızlarının bazıları aynı olmasına rağmen genellikle farklıdır. İşaretlerin örnekleme hızlarının farklı olmasından dolayı gözlemler sürekli zamanda farklı yerlerde gözlenebilirler yani m_i indisleri aynı hizada olmayabilir. 3000 Hz'de örneklenmiş bir x işareti ile 2000 Hz'de örneklenmiş y işaretini içeren çoklu hızlı bir sistem ele alınacaktır. Burada, örnekleme hızları F_x ve F_y tamsayı değerli

alınacaktır. Bu iki ayrık işaret, analog iki işaretin örneklenmesiyle şu şekilde elde edilir:

$$x[n_x] = x(n_x T_x) = x(t)|_{t=n_x T_x} \quad n_x \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

$$y[n_y] = y(n_y T_y) = y(t)|_{t=n_y T_y} \quad n_y \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

$t = 0$ anında her iki işaretinde örneği varsa iki işaretin gözlemlerinin hangi anlarda bulunduğu Şekil 3.2'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 3.2 : Farklı Örnekleme Frekansına Sahip İki İşaret

Çoklu hızlı sistemdeki bütün işaretleri ortak bir domende göstermek için temel katman (fundamental layer) diye adlandırılan bir kavram tanımlanır. Temel katman, sistem seviyesi olarak da belirtilir [5,52]. Şekil 3.2'de x işaretinin örnekleri ile y işaretinin örnekleri arasında gösterilen çizgi sistem ızgarası olarak belirtilir. Bir işaretin sistem ızgarasına karşılık gelen örnekleri, analog işaretin gözlenen ve gözlenmeyen örneklerinden oluştuğu söylenebilir. Her bir işaret, gerçek örnekleme hızının tamsayı katındaki bir örnekleme hızında ifade edilebilir. Sistemdeki bütün işaretlerin örnekleme hızının bir katı olan değer mevcuttur. $F_x = 3000$ Hz ve $F_y = 2000$ Hz örnekleme hızlarına sahip x ve y işaretleri için sistem hızının yani temel hızın tanımlanması gerekir. x ve y 'nin bütün örneklerinin gösterilebildiği maksimum örnekleme aralığı \bar{T} 'ye sistem örnekleme aralığı denir. Şekil 3.2'de verilen sistem için \bar{T} gösterilmiştir. $\bar{T} = 1/\bar{F}$ olmak üzere \bar{F} pozitif tamsayısı

$$\bar{F} = \text{ekok}(F_x, F_y) \quad (3.3)$$

olarak ifade edilir. \bar{F} sistem hızı yada temel hız olarak adlandırılır. Şekil 3.2'deki sistemde temel hız (\bar{F}) 6000 Hz'dir. Sistem hızı, çoklu hızlı sistemdeki bütün işaretleri tanımlamak için gerekli olan minimum örnekleme hızıdır. Şekil 3.2'deki işaretler sistem seviyesinde n ortak indisiyle $\bar{x}[n]$ ve $\bar{y}[n]$ olarak gösterilir. (3.3)'deki ifade M işaretten oluşan çoklu hızlı sistem için

$$\bar{F} = \text{ekok}(F_1, F_2, \dots, F_M) \quad (3.4)$$

olarak ifade edilebilir. \bar{F} , F_x ve F_y 'nin en küçük ortak katı olup sistem hızı şu şekilde ifade edilebilir:

$$\bar{F} = K_x F_x \quad \text{ve} \quad \bar{F} = K_y F_y. \quad (3.5)$$

M işaretten oluşan bir çoklu hızlı sistem için

$$K_i = \frac{\bar{F}}{F_i} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.6)$$

elde edilir. Burada, K_i 'ye i . işarete ait örnek seyreltme yada alt örnekleme çarpanı denir. Alt örnekleme çarpanı, sistem örnekleme hızının (\bar{F}) i . işaretin örnekleme hızına (F_i) oranıdır. Çoklu hızlı bir sistemdeki her ayırık işaret, \bar{F} örnekleme hızına sahip işaretin alt örnekleme hızıyla elde edilebilir. Diğer bir deyişle $x(t)$ sürekli işaretinin F_x hızında örnekleme hızıyla elde edilen ayırık işaret, $x(t)$ sürekli işaretinin \bar{F} hızında örnekleme hızından sonra K_x çarpanıyla alt örnekleme hızıyla elde edilen işarete denktir. Alt örnekleme çarpanı i . işaretin örnekleme aralığının (T_i) sistem örnekleme aralığına (\bar{T}) oranı olarak da ifade edilebilir

$$K_i = \frac{T_i}{\bar{T}} \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (3.7)$$

$x[m_x]$, F_x örnekleme hızındaki ayırık işareti gösterirken $\bar{x}[n]$ ise işareti sistem seviyesinde gösterecektir. Aralarındaki ilişki şu şekilde ifade edilir:

$$x[m_x] = \bar{x}[n] \Big|_{n=K_x m_x} = \bar{x}[K_x m_x]. \quad (3.8)$$

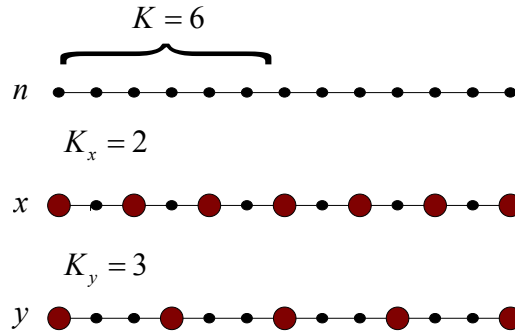
Çoklu hızlı sistemde önemli bir kavramda periyodiktir. Sistem periyodu (K) sistemdeki bütün işaretlerin minimum ortak periyodudur. K_i , çoklu hızlı sistemdeki i . işaretin alt örnekleme çarpanı olup sistem periyodu

$$K = \text{ekok}(K_1, K_2, \dots, K_M) \quad (3.9)$$

olarak gösterilir. i . işarettaki periyod başına örnek sayısı

$$M_i = \frac{K}{K_i} \quad (3.10)$$

olarak bulunur. K , sistem seviyesinde bir periyottaki adım sayısıdır. M_i , i . işaretin bir sistem periyodundaki adım sayısıdır. Şekil 3.3'de $F_x = 3000$ Hz ve $F_y = 2000$ Hz örnekleme hızlarına sahip x ve y işaretleri için alt örnekleme çarpanları ve sistem periyodu gösterilmektedir.



Şekil 3.3 : Sistem Periyodu ve Alt Örnekleme Çarpanlarının Gösterimi

Şekil 3.3'de görüldüğü gibi $K_x = 2$ ve $K_y = 3$ olmak üzere alt örnekleme çarpanlarıdır. Sistem periyodu $K = 6$ 'dır. K_x ve K_y , bir işaretin sistem seviyesinde ardarda gözlenen örnekleri arasındaki adım sayısıdır. $M_x = 3$ ve $M_y = 2$ 'dir. n anında x ve y 'nin örneklerinin birbirine göre durumu $n + Ki$ anındakine eşdeğerdir. Sistem fazı, k ,

$$n = mK + k \quad \text{yada} \quad n \equiv k \pmod{K} \quad (3.11)$$

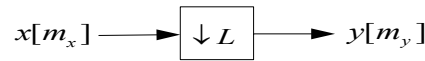
ile gösterilir. Burada $m = \left\lfloor \frac{n}{K} \right\rfloor$ 'dir ve n , sistem seviyesindeki zamandır.

3.3 Çoklu Hızlı İşaret İşleme

Örnekleme hızı dönüştürmede iki temel işlem vardır. Bunlardan biri tamsayı çarpanı L ile örnekleme hızını düşürme; ikincisi ise tamsayı çarpanı I ile örnekleme hızını arttırmadır. L çarpanıyla örnekleme hızını düşürme işlemine örnek seyreltme; I çarpanıyla örnekleme hızını arttırma işlemine ara değerlendirme denir. Alt örnekleme giriş-çıkış ilişkisi ve üst örnekleme giriş-çıkış ilişkisi hem zaman hem frekans domeninde açıklanacaktır. Örnekleme hızı dönüştürme tamsayı yerine rasyonel bir sayıyla da yapılabilir [1,63]. Kısaca çoklu hızlı işaret işlemenin temel işlemleri alt örnekleme, üst örnekleme ve filtrelemedir.

3.3.1 Örnek seyreltme

Çoklu hızlı bir sistemdeki işaret diğer bir işaretten örnek seyreltilerek elde edilebilir. Örnek seyreltme iki adımdan oluşmaktadır. Bunlar, filtreleme ve alt örneklemedir [63,2]. Alt örnekleme Şekil 3.4'de gösterilmektedir. Alt örnekleme çarpanı (L) tamsayı olarak verilsin. Alt örnekleme, $x[m_x]$ giriş işaretinin her L örneğinin alınıp diğerlerinin atılmasıyla $y[m_y]$ çıkış işaretinin üretilmesi işlemidir. Alt örnekleme, giriş işaretinin örnekleme hızını L çarpanıyla azaltır. Alt örnekleme çıkışındaki işaretin örnekleme hızı $F_y = F_x/L$ olarak elde edilir.

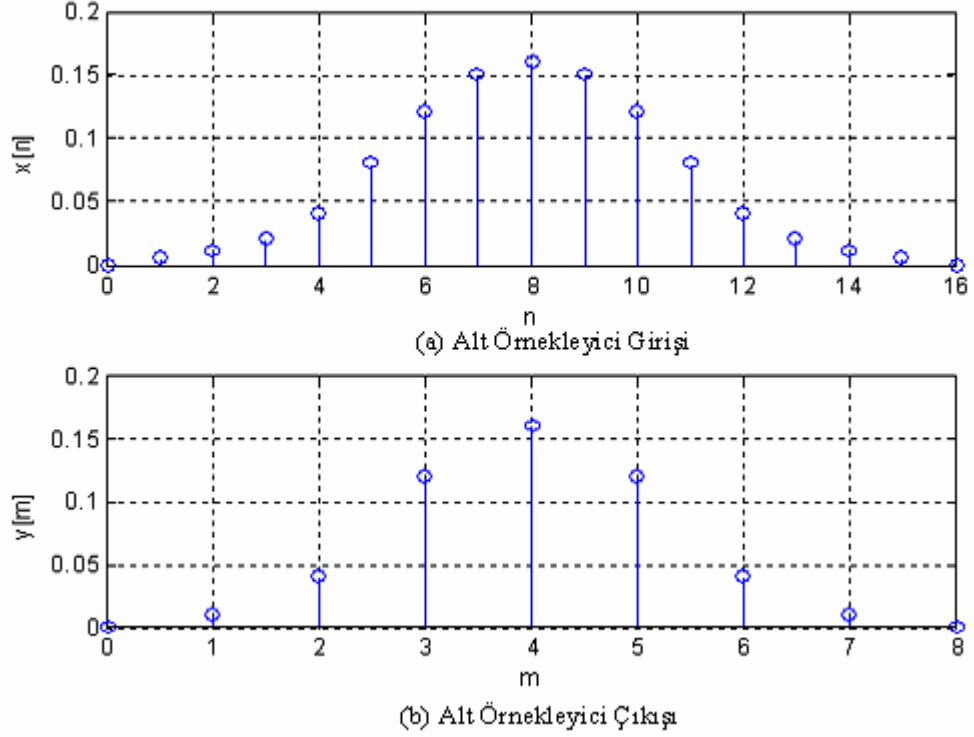


Şekil 3.4 : Alt Örnekleme

Şekil 3.4'de blok diyagramı gösterilen alt örnekleme

$$y[m_y] = x[Lm_y], \quad m_y = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (3.12)$$

olarak ifade edilir. Burada m_y alt örnekleme hızındaki işaretin indisidir ve giriş işaretinin indisisiyle arasındaki ilişkisi $m_x = Lm_y$ 'dir. $L = 2$ alındığı durum için Şekil 3.5'de alt örnekleme bir örnek verilmiştir. Alt örnekleme çıkışındaki işaret, girişin sıkıştırılmış şeklindedir. Alt örnekleme işleminde bilgi kaybı olmasından dolayı $x[m_x]$ işareti $y[m_y]$ çıkış işaretinden geri elde edilemez, sadece yakın değerler alır.



Şekil 3.5 : $L = 2$ için Alt Örnekleme İşleminin Bir Örneği

Orjinal işaretin frekans spektrumu $X(\omega)$ olmak üzere çıkış işaretinin spektrumu $Y(\omega)$

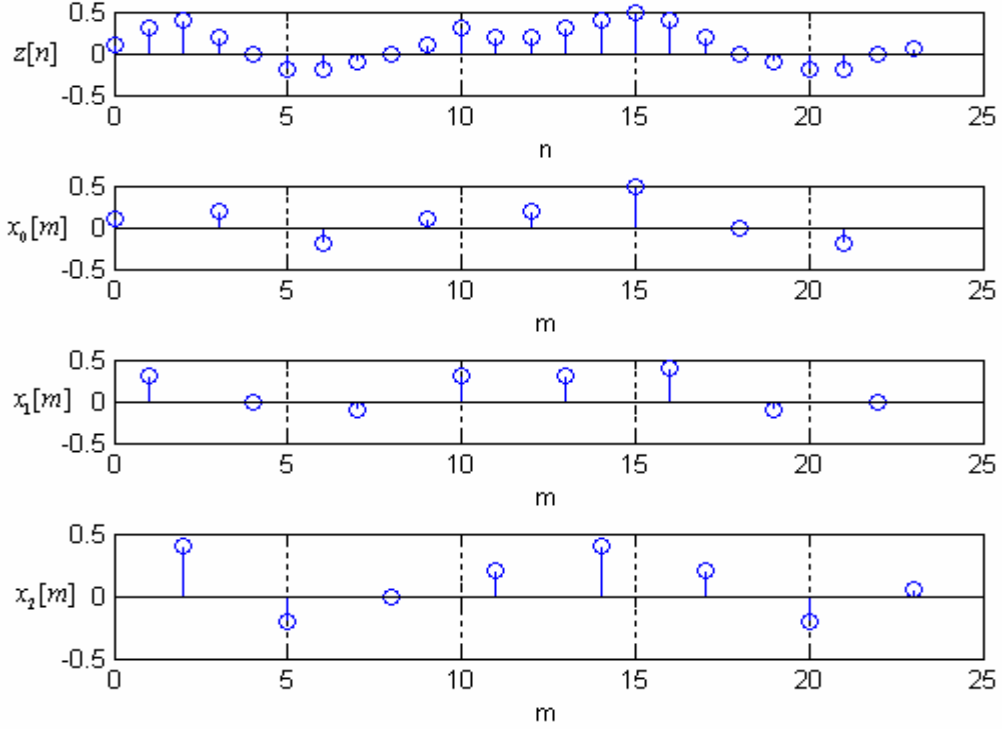
$$Y(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X\left(\frac{\omega - 2\pi k}{L}\right) \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. (3.13) denkleminde çıkış spektrumunun adım adım nasıl elde edildiği açıklanabilir. $X[\omega/L]$ 'yi elde etmek için $X[\omega]$, L çarpanıyla genişletilir ve genişletilmiş spektrum 2π 'nin katlarıyla ötelenerek $L-1$ tane ötelenmiş spektrum elde edilir. Genişletilen spektrumun bütün ötelenmiş biçimleri ile genişletilen spektrum ($X[\omega/L]$)'nin ötelenmemiş şekli toplanır ve L 'ye bölünür [6,7]. Şekil 3.6'da giriş işareti $x[m_x]$ ile alt örnekleme işareti $y[m_y]$ 'nin frekans spektrumu gösterilmiştir. Alt örnekleme işareti giriş işaretinin zamanda sıkıştırılmış şeklidir. Zamanda sıkıştırma frekansta genişlemeye yol açar. Alt örnekleme işareti spektrumu giriş işaretinin spektrumunun genişletilmiş şeklidir. Orjinal işaretin spektrumu $|\omega| > \pi/L$ aralığında sıfır değilse yani orjinal işaret π/L ile band sınırlı değilse, alt örnekleme çıkışında örtüşme meydana gelir. Örtüşme olduğunda $x[m_x]$

olarak gösterilir.



Şekil 3.8 : Zaman Ötelemeli Alt Örnekleme Diyagramı



Şekil 3.9 : Maksimum-Örnek Seyreltilmiş İşaret Kümesi ($L = 3$)

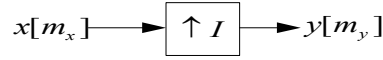
Şekil 3.8’de zaman ötelemeli alt örnekleme diyagramı verilmiştir. $L = 3$ için Şekil 3.9’da maksimum-örnek seyreltilmiş işaret kümesi verilmiştir.

3.3.2 Ara değerlendirme

Ara değerlendirme örnek seyreltmenin tersi bir işlemdir. Ara değerlendirmeyle işaretin örnekleme hızında artış olur. Ara değerlendirme iki işlemde oluşur. Bunlar sırasıyla üst örnekleme ve filtrelemedir. Üst örneklemede işaretin ardarda gelen örnekleri arasına sıfırlar eklenerek örnekleme hızı artırılır. İşaret I çarpanıyla üst örneklenirse işaretin ardışıl her iki örneği arasına $I-1$ sıfır eklenir ve böylece örnekleme hızı I çarpanıyla artırılmış olur. Üst örnekleme şu şekilde elde edilir:

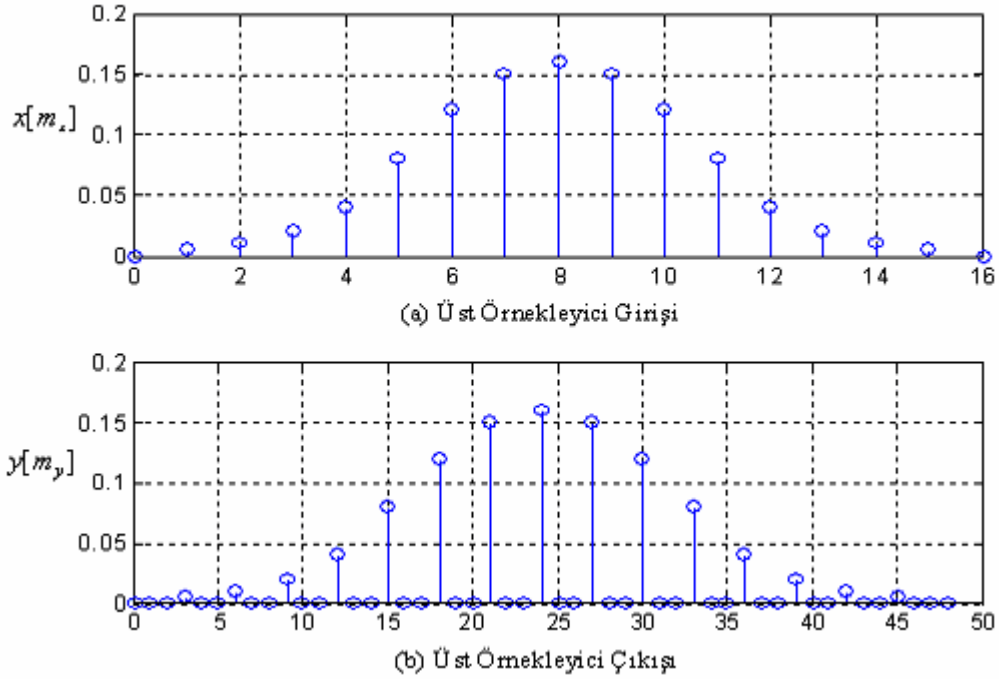
$$y[m_y] = \begin{cases} x[m_y/I] & m_y = Ir \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.15)$$

Burada $m_y/I = r$ tamsayıdır. Üst örnekleme blok diyagramı Şekil 3.10'da görülmektedir.



Şekil 3.10 : Üst Örnekleme Blok Diyagramı

Üst örnekleme işlemine $I = 3$ için bir örnek Şekil 3.11'de gösterilmiştir.

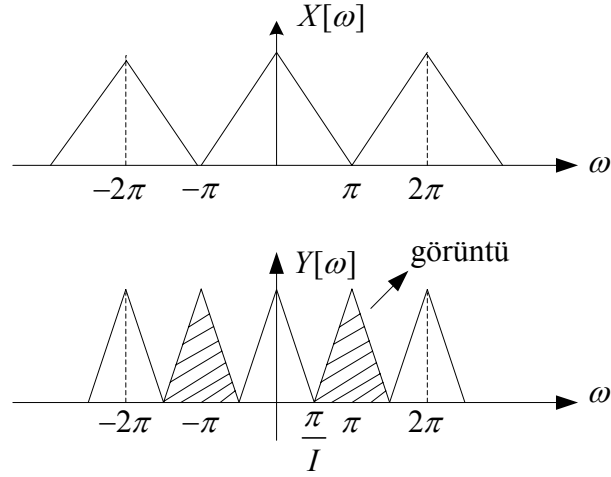


Şekil 3.11 : Üst Örneklemenin Bir Örneği ($I = 3$)

Giriş işareti $x[m_x]$ 'in spektrumu ile üst örneklenmiş işaret $y[m_y]$ 'nin spektrumu arasında bir ilişki vardır

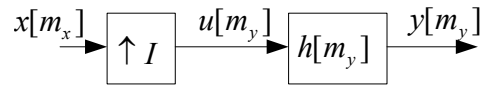
$$Y[\omega] = X[\omega L]. \quad (3.16)$$

Bu ifadeden $Y[\omega]$ 'nin orjinal spektrum $X[\omega]$ 'nin L çarpanıyla sıkıştırılmış şekli olduğu çıkarılır. Üst örneklemenin frekans spektrumundaki etkisi sıkıştırmadır. Şekil 3.12'de görüldüğü gibi orjinal işaretin spektrumu 2π periyodu ile periyodik olup ara değerlendirilmiş işaretin spektrumu $2\pi/I$ ile periyodiktir. Üst örnekleme işlemi her $2\pi/I$ değerinde temel spektrumun kopyalarını oluşturur. Buna görüntüleme etkisi denir. Orjinal spektrumun kopyalarına da görüntü denir. Şekil 3.12'de üst örnekleme çıkışı spektrumu $Y[\omega]$ 'da görüntü taralı olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.12 : Üst Örnekleme İçin Frekans Spektrumu Gösterimi ($I = 2$)

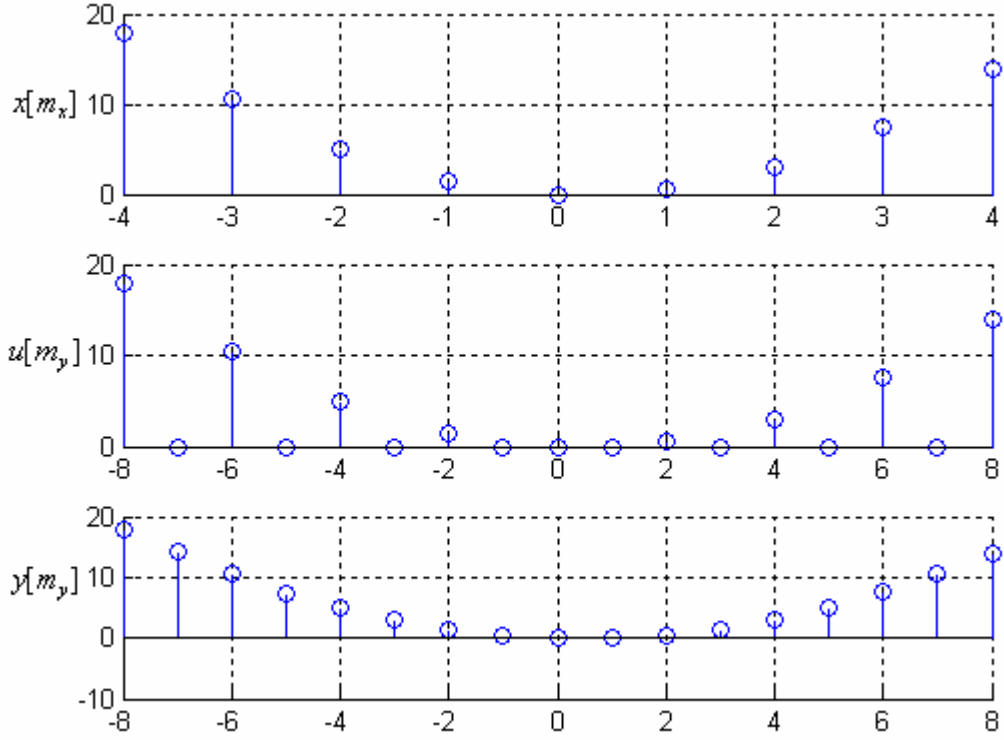
Üst örneklemeyle $[0, 2\pi]$ aralığında $I - 1$ tane istenmeyen görüntü oluşacaktır. Görüntüleme etkisini yok etmek yani istenmeyen görüntü spektrumlarını kaldırmak için üst örneklemeden sonra kazancı I olan kesim frekansı $|\omega_s| \leq \frac{\pi}{I}$ olacak şekilde ideal alçak geçiren bir filtre kullanılır. Bu filtreye ara değerlendirme filtresi denir. Sırasıyla filtreleme ve üst örneklemenin yapıldığı işleme ara değerlendirme denir. Şekil 3.13 ile gösterilmiştir.



Şekil 3.13 : Ara Değerleme Diyagramı

Üst örneklemeyle elde edilen sıfır değerli örnekler alçak geçiren filtre kullanıldıktan sonra “ara değerlendirilmiş” değerlere dönüşürler yani “ara değerlendirilmiş” değerler sıfır değerli örneklerin yerini alırlar. Ara değerlendirici çıkışındaki işaret zaman domeninde ara değerlendirilmiş örneklere sahiptir.

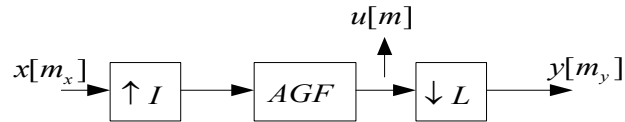
Ara değerlendirici çıkışındaki işaret üst örnekleme çıkışındaki işaret ile filtre katsayılarının konvolüsyonu sonucu elde edilir. Şekil 3.14’de buna bir örnek verilmiştir [7]. Alt örnekleme gibi üst örnekleme de doğrusal ve zamanla değişen bir işlem olup ara değerlendirme de zamanla değişen doğrusal bir işlemdir. Üst örnekleme bilgi kaybına neden olmadığından giriş işareti çıkış işaretinden elde edilebilir. Üst örnekleme çıkışındaki işaret $L = I$ olacak alt örnekleme çarpanıyla alt örnekleme üst örnekleme girişindeki işaret bulunmuş olacaktır.



Şekil 3.14 : Ara Değerleyicideki İşaretler

3.3.3 Örnekleme hızı dönüştürme

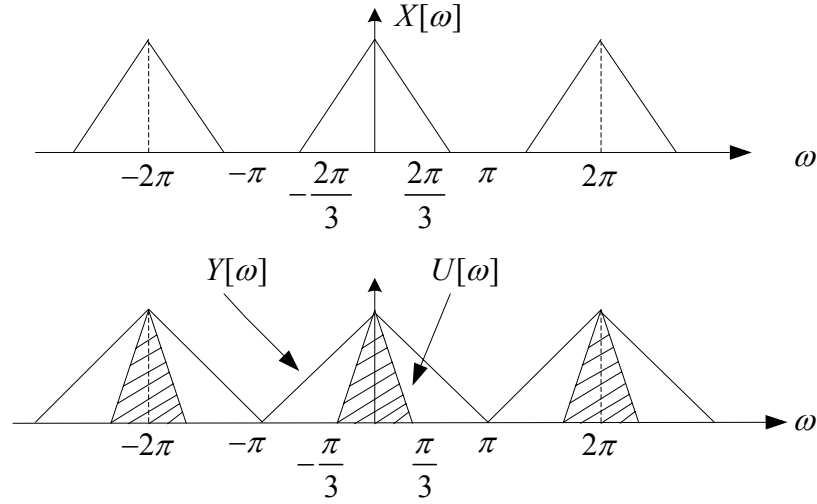
Bazı uygulamalarda örnekleme hızının rasyonel bir çarpan (I/L) kullanılarak değiştirilmesi gerekebilir. Bunu gerçekleştirmek için Şekil 3.15'deki yapı kullanılır. I ve L aralarında asaldır. I çarpanına sahip ara değerleyici ile L çarpanına sahip örnek seyreltici'nin kaskad bağlanması sonucu rasyonel çarpanla örnekleme hızı dönüştürme gerçekleştirilir. Şekil 3.15'deki yapı sırasıyla üst örnekleme, alçak geçiren filtreleme ve alt örneklemeden oluşmaktadır.



Şekil 3.15 : Rasyonel Bir Çarpanla Örnekleme Hızı Dönüştürme

Giriş işareti $x[m_x]$, F_x örnekleme hızına sahiptir. Alçak geçiren filtre ise $F_x I$ hızında çalışmaktadır. Alçak geçiren filtre üst örneklemeyle oluşan görüntüleri yok eder ve aynı zamanda alt örnekleme'nin neden olabileceği örtüşmeyi engeller. Alçak geçiren filtrenin kesim frekansı $\omega_s = \min(\pi/L, \pi/I)$ değerine eşit veya bu değerden daha küçük olmalıdır. Şekil 3.15'deki yapıda çıkış işaretinin örnekleme hızı

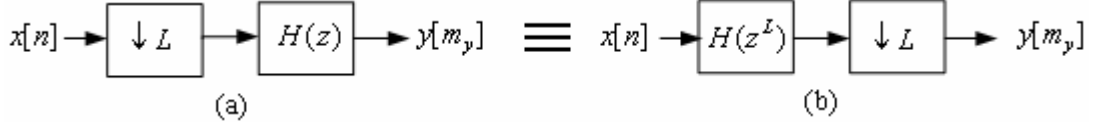
$F_y = F_x I / L$ 'dir. Sistem hızı ise $\bar{F} = F_x L$ 'dir. Şekil 3.16'da $L/I = 3/2$ için örnekleme hızı dönüştürmeye bir örnek verilmiştir [2]. Burada $X[\omega]$ giriş işaretinin spektrumunu, $U[\omega]$ alçak geçiren filtre çıkışındaki işaretin spektrumunu ve $Y[\omega]$ çıkış işaretinin spektrumunu göstermektedir. Şekil 3.16 için ideal alçak geçiren filtre kesim frekansı $\pi/3$ 'dür. $X[\omega]$, $Y[\omega]$ ve $U[\omega]$ hepsi 2π ile periyodiktirler.



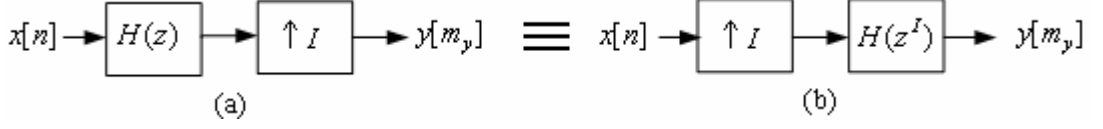
Şekil 3.16 : (a) Örnekleme Hızı Dönüştürücü Girişinin Frekans Cevabı (b) Alçak Geçiren Filtre Çıkışındaki ve Örnekleme Hızı Dönüştürücü Çıkışındaki Frekans Cevabı ($L/I = 3/2$)

3.3.4 Alt ve üst örneklemenin bazı yararlı özellikleri

Şekil 3.7 ve Şekil 3.13'de alt ve üst örnekleme hızlarının doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerle kaskat bağlantıları görülmektedir. Şekil 3.17(a)'da transfer fonksiyonu $H(z)$ olan filtre bir alt örnekleme hızı takip etmektedir. Şekil 3.18(a)'da bir üst örnekleme hızı transfer fonksiyonu $H(z)$ olan filtreyi takip etmektedir. $H(z)$ rasyonel ise (z yada z^{-1} içeren polinomların bir oranıysa) Şekil 3.17(a), Şekil 3.17(b) olarak ve Şekil 3.18(a) da Şekil 3.18(b) olarak gösterilebilir. $H(z^M)$, $h[n]$ impuls cevabının üst örnekleme hızı şeklini göstermektedir. $H(z^M)$ üst örnekleme hızı filtre olup orijinal filtrede z^{-1} yerine z^{-M} yazılmasıyla bulunur. Yapılan işlem, zaman domeninde impuls cevabının orijinal örnekleri arasına $M-1$ tane sıfır eklenmesine eşdeğerdir. Bu eşdeğer yapılar alt ve üst örnekleme hızı filtrelerin çoklu gösteriliminde kullanılır. Bu gösterilimlere çoklu hızlı sistem teorisinde sık rastlanır.



Şekil 3.17 : Alt Örnekleyici ve Filtre Yapısına Eşdeğer Gösterim



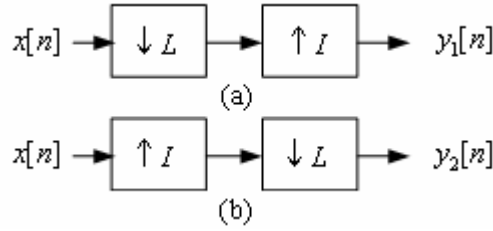
Şekil 3.18 : Filtre ve Üst Örnekleyici Yapısına Eşdeğer Gösterim

Diğer önemli özellik ise alt ve üst örnekleyicilerin kaskat bağlanmasıdır. Şekil 3.19'da kaskat bağlantılar gösterilmiştir. Eğer $L=I$ olursa $y_2[n]=x[n]$ ve

$$y_1[n] = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[n] e^{-j2\pi kn/L}$$

elde edilir. L ve I aralarında asal sayılarsa (en büyük ortak

bölen 1 ise) Şekil 3.19'daki iki sistem birbirine eşdeğerdir.



Şekil 3.19 : Alt ve Üst Örnekleyicilerin Kaskat Bağlantıları

3.4 Alt ve Üst Örneklemenin İstatistiksel Özellikleri ve Çevrimsel Durağanlık

En iyi filtrelemede kestirilen işaret ile gözlenen işaret geniş anlamda durağan varsayılmaktadır. Her iki işaretin örnekleme hızları aynı olup kullanılan filtre doğrusal zamanla değişmeyen filtredir. Doğrusal zamanla değişmeyen filtre durağanlığı korumaktadır. Çoklu hızlı sistemlerde durum farklıdır. Çoklu hızlı sistemlerde periyodiklik söz konusudur. Alt ve üst örnekleme doğrusal zamanla değişen işlemler olduğundan çoklu hızlı sistemlerde durağanlık kavramı yerine çevrimsel durağanlık kavramı önem kazanmaktadır. Durağanlık bu sistemlerde korunmamaktadır. Şekil 3.19(a)'da alt ve üst örnekleyicinin ardarda bağlanması gösterilmektedir. Şekil 3.19(a)'daki $y_1[n]$ işareti $L=I=2$ için doğrusal zamanla periyodik olarak değişen işarettir [7]. Çıkış işareti

$$y_1[n] = \begin{cases} x[n] & n = 2r \quad r = \dots, -1, 0, 1, \dots \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.17)$$

olarak elde edilir. Bu sistem, 2'nin katlarında 1 değerini alan ve diğer değerleri sıfır olan bir çarpıcıya eşdeğerdir. Peryodu 2 olan ve zamanla periyodik olarak değişen katsayılara sahip doğrusal bir sistemdir. Rastgele bir giriş işareti için çıkış işareti geniş anlamda durağan olmaz. Bu durumda çevrimsel durağanlık kavramından bahsedilir. Çoklu hızlı bir sistem girişine WSS bir işaret uygulandığında sistem boyunca işaretin istatistiksel davranışında değişiklik olmaktadır. WSS bir işaret alt örnekleyiciye uygulandığında çıkıştaki işaret WSS olmaktadırken üst örnekleyiciye uygulandığında çıkıştaki işaret çevrimsel geniş anlamda durağan olmaktadır. Birçok yayında çoklu hızlı sistemlerde çevrimsel durağanlık açıklanmış ve çoklu hızlı sistem boyunca işaretin istatistiksel davranışının nasıl değişeceği incelenmiştir [21]. Bir çevrimsel durağan süreç zaman domeninde çevrimsel ilişki fonksiyonuyla, frekans domeninde çevrimsel spektral yoğunluğuyla belirtilmektedir [29]. İlişki fonksiyonu $R_X[n_1, n_0] = \mathcal{E} \{X[n_1]X^*[n_0]\}$ şeklinde tanımlanan sıfır ortalamalı bir $X[n]$ sürecinin çevrimsel geniş anlamda durağan olması için

$$R_X(n_1, n_0) = R_X(n_1 + N, n_0 + N) \quad \forall n_1, \forall n_0 \quad (3.18)$$

eşitliğinin sağlanması yani ilişki fonksiyonunun periyodik olması gereklidir. Periyodik bir rastgele sürecin ortalaması N ile periyodik olup ilişki fonksiyonu, k_0 ve k_1 herhangi iki tamsayı için

$$R_X(n_1, n_0) = R_X(n_1 + k_1 N, n_0 + k_0 N) \quad \forall n_1, \forall n_0 \quad (3.19)$$

koşulunu sağlamalıdır [25-27]. (3.19) eşitliği sadece $k_1 = k_0$ için sağlanıyorsa süreç çevrimsel durağandır. Bütün periyodik süreçler çevrimsel durağandır. Fakat tersi doğru değildir. Periyodik süreçlerin zamana bağlı ilişki fonksiyonu şu koşulu sağlar:

$$R_X(n; l) = R_X(n + k_0 N; l + (k_1 - k_0)N). \quad (3.20)$$

Periyodik rasgele süreçler için zamana bağlı ilişki fonksiyonunun her iki değişkeni de periyodiktir. $k_1 = k_0$ için (3.20) denklemi, çevrimsel durağan süreçlere ait zamana bağlı ilişki fonksiyonunun sağlaması gereken koşulu verir

$$R_X(n; l) = R_X(n + k_0 N; l). \quad (3.21)$$

Çevrimsel durağan sürecin zamana bağlı ilişki fonksiyonunun sadece ilk değişkeni periyodiktir. $y[m_y] = x[Lm_y]$ alt örnekleme denklemini kullanarak alt örnekleme çıkışındaki işaretin öz ilişki fonksiyonu ile giriş işaretinin öz ilişki fonksiyonu arasındaki ilişki belirlenebilir

$$R_y[m_0, m_1] = \mathcal{E} \{ x[Lm_0] x^*[Lm_1] \} = R_x[Lm_0, Lm_1]. \quad (3.22)$$

Zamana bağlı ilişki fonksiyonu için

$$R_y[m; l] = \mathcal{E} \{ x[Lm] x^*[L(m-l)] \} = R_x[Lm; Ll] \quad (3.23)$$

elde edilir. Eğer giriş işareti WSS ise ilişki fonksiyonu m değişkeninden bağımsız olur ve $R_y[l] = R_x[Ll]$ elde edilir. Alt örnekleme çıkış işaretinin WSS olduğu buradan görülebilmektedir. (3.15) üst örnekleme denklemini kullanarak üst örnekleme çıkışındaki işaretin özilişki fonksiyonu ile giriş işaretinin özilişki fonksiyonu arasındaki ilişki belirlenebilir

$$R_y[m_0, m_1] = \begin{cases} \mathcal{E} \{ x[m_0/I] x^*[m_1/I] \} = R_x[m_0/I, m_1/I]. & m_0, m_1 \text{ } I \text{'nin katı} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.24)$$

Zamana bağlı ilişki fonksiyonu için

$$R_y[m; l] = \begin{cases} R_x[m/I; l/I] & m, l \text{ } I \text{'nin katı} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.25)$$

elde edilir. Üst örneklemede sıfırların eklenmesinden dolayı giriş işareti WSS ise çıkış işareti hiçbir zaman WSS olamaz. Giriş işareti WSS ise çıkış işareti CWSS'dir.

3.5 Çoklu Hızlı Sistem Özellikleri

Çoklu hızlı bir sistem farklı örnekleme hızlarına sahip işaretleri içeren bir sistemdir. Çoklu hızlı bir sistemde giriş işaretinin ve çıkış işaretinin örnekleme hızları farklı olup işaretler $x[m_x]$ ve $y[m_y]$ ile gösterilir. Çoklu hızlı bir sistem doğrusallık, zamanda değişmezlik, nedensellik ve periyodiklik açısından incelenebilir. Aynı hızda örneklenmiş iki dizi için

$$\tau \{ax[n] + by[n]\} = a\tau \{x[n]\} + b\tau \{y[n]\} \quad (3.26)$$

koşulu sağlanırsa sistem doğrusaldır. Çoklu hızlı sistemde giriş dizisinin örnekleme hızı çıkış dizisinininkine farklı olduğundan çoklu hızlı sistem teorisi için doğrusallığı tanımlamak gerekli değildir. Ayrıca alt örnekleyci ve üst örnekleyci doğrusal sistemlerdir. Diğer bir kavram zamanla değişmezlik olup giriş ve çıkış dizisinin örnekleme hızları aynı olan sistem için

$$\tau \{x[n-P]\} = y[n-P] \quad (3.27)$$

koşulu her P değeri için sağlanırsa sistem zamanla değişmezdir. (3.27) koşulu her P için değil sadece sabit bir P değeri ve katları için sağlanırsa sistem P ile periyodiktir. Giriş ve çıkış dizilerinin örnekleme hızlarının farklı olduğu sistemler için zamanla değişmezlik kavramı yerine zamanla periyodik olarak değişmezlik kavramı tanımlanır. $\tau \{x[m_x]\} = y[m_y]$ şeklinde ayrık zamanlı bir sistem verilsin. Sistemin zamanla periyodik olarak değişmez olması için

$$\tau \{x[m_x - P_x]\} = y[m_y - P_y] \quad (3.28)$$

koşulunu sağlayacak P_x ve P_y tamsayılarının olması gerekir. Tek hızlı bir sistemin nedensel olması için sistemin çıkışının sadece o andaki ve geçmişteki giriş değerlerine bağlı olması gerekir. Çoklu hızlı bir sistemde nedensellik kavramını tanımlamak için giriş ve çıkış işaretlerinin örnekleme hızlarının bilinmesi gerekmektedir. Çoklu hızlı sistemin nedensel olması için $y[m_y]$ çıkış dizisinin $k = \{0,1,\dots\}$ için yalnız $x[m_x - k]$ giriş değerlerine bağlı olması gerekir. Burada

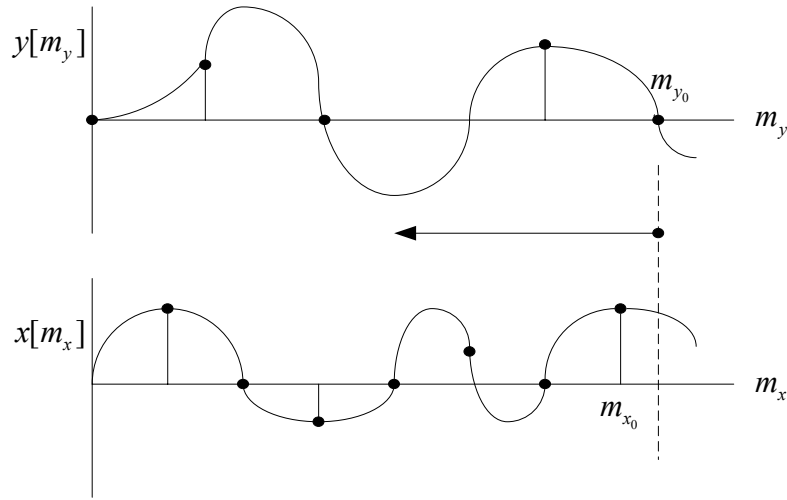
$m_x = \left\lfloor \frac{K_y m_y}{K_x} \right\rfloor$, ve K_x, K_y alt örnekleme çarpanlarıdır. Çoklu hızlı bir sistemin

nedensel olması $m_{x_0} T_x \leq m_{y_0} T_y$ yani $m_{x_0} \leq \left\lfloor \frac{K_y m_{y_0}}{K_x} \right\rfloor$ koşulunun sağlanması gerekir.

Şekil 3.20'de çoklu hızlı sistem için destek bölgesi gösterilmiştir.

Nedenselliğin diğer bir tanımı da impuls cevabına bağlıdır. Doğrusal zamanla periyodik olarak değişen bir sistemin nedensel olması için impuls cevabının

$m_{y_0} T_y < m_{x_0} T_x$ için sıfır olması istenir.



Şekil 3.20 : Çoklu Hızlı Sistem için Nedensellik Kavramı

3.6 Filtre Çeşitleri

Çoklu hızlı sistemlerde iki farklı filtre yapısı kullanılır. Bunlar doğrusal zamanla değişmeyen (LTI) ve doğrusal zamanla periyodik olarak değişen (LPTV) filtrelerdir. LPTV filtreler, çoklu hızlı sistemlerin birçok uygulamasında kullanılmaktadır. Örneğin LPTV filtreler, çoklu hızlı filtre bankalarında sayısal işaretlerin kodlanması ve iletilmesi için kullanılır. LPTV sistemlerin LTI sistemlerden bir farkı da örtüşmenin oluşabilmesidir. LPTV sistemlerde örtüşme etkisinin nasıl ölçüleceği ve LTI sistemle LPTV sisteme en iyi nasıl yaklaşıklık yapılacağı anlatılmıştır [12].

3.6.1 Doğrusal zamanla değişmeyen filtreler

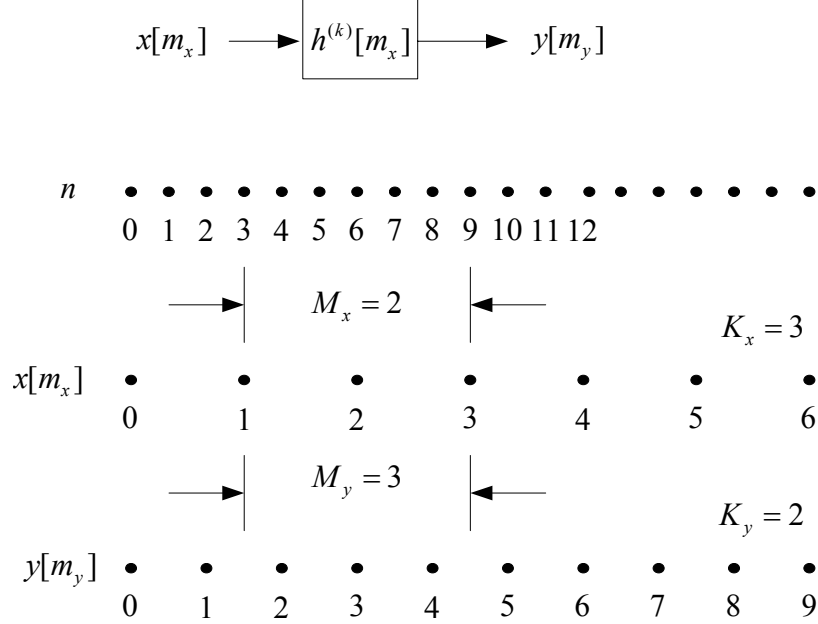
Bu tür filtreler belirli bir hızda örneklenmiş giriş işaretini kullanarak aynı hıza sahip çıkış işaretini üretirler. Giriş işareti x , çıkış işareti y ve $h[m]$ impuls cevabı olmak üzere doğrusal zamanla değişmeyen sistemin genel denklemi şu şekildedir:

$$y[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \quad (3.29)$$

x ve y aynı örnekleme hızına sahiptirler. İmpuls cevabı m 'in negatif değerlerinde sıfır değerini alırsa sistem nedenseldir. Sınırlı giriş sınırlı çıkış şartı sağlanırsa sistem kararlıdır.

3.6.2 Doğrusal zamanla periyodik olarak değişen filtreler

Çoklu hızlı sistemlerin periyodiklik özelliğinden dolayı LPTV filtreleri çoklu hızlı uygulamalarda kullanılır. Örneğin çoklu hızlı kestirim uygulamasında kullanılan filtreler LPTV filtreler olup katsayıları periyodik olarak değişmektedir.



Şekil 3.21 : LPTV Filtre

Şekil 3.21’de bir LPTV sistem gösterilmiştir. Filtre çıkışı $y[m_y]$, girişi ise $x[m_x]$ ile gösterilmektedir. n zaman indisi, sistem hızını ifade eder. $K_x = 3$ ve $K_y = 2$ olmak üzere alt örnekleme çarpanlarıdır. Filtrenin nedensel olması için herhangi bir anda hesaplanan çıkış değeri sistem seviyesinde o andaki ve önceki giriş değerlerine bağlı olmalıdır. Şekil 3.21’e bakarsak $m_y = 6$ ’da giriş ve çıkış dizilerinin örnekleri sistem seviyesine göre aynı hizada bulunmaktadırlar. $m_y = 7$ için aynı hizada değildir. Sistem seviyesindeki farklı zamanlarda giriş dizisi ve çıkış dizisi arasındaki ilişki değişmektedir. $m_y = 6$ ve $m_y = 7$ için giriş dizisinin aynı örnekleri kullanılmaktadır, fakat filtre katsayıları değişmektedir. Bu durumda kullanılan filtreler doğrusal zamanla periyodik olarak değişen filtrelerdir. Şekil 3.21’de görüldüğü gibi filtre derecesi 3 alınırsa $m_y = 6$ ’daki çıkış

$$y[6] = h^{(0)}[0]x[4] + h^{(0)}[1]x[3] + h^{(0)}[2]x[2] \quad (3.30)$$

olarak bulunmaktadır. $h^{(l)}[l]$, $l = 0, 1, 2$ filtre katsayılarıdır. $m_y = 7$ için kullanılan örnekler değişmemekte fakat filtre katsayıları değişmektedir

$$y[7] = h^{(2)}[0]x[4] + h^{(2)}[1]x[3] + h^{(2)}[2]x[2] \quad (3.31)$$

$y[6]$ ve $y[7]$ için farklı filtre katsayıları kullanılmaktadır. $m_y = 9$ 'da giriş dizisi ile çıkış dizisinin örnekleri aynı hizada meydana gelmektedir. $m_y = 9$ anında kullanılan en iyi filtre katsayıları $m_y = 6$ 'dakiyle aynıdır. $m_y = 6$ ve $m_y = 9$ anındaki sistem fazı aynıdır. Şekil 3.21'de verilen örnek kullanılarak LPTV filtre denklemini genelleştirilebilir. (3.30) ve (3.31) denklemleri işaret seviyesinde tanımlı olan denklemlerdir. \bar{x} ve \bar{y} , x ve y 'nin sistem seviyesindeki gösterimleri olsun. Zamanla değişen filtre katsayıları $\bar{h}^{(k)}[i]$ ile gösterilsin. Doğrusal periyodik olarak zamanla değişen filtre denklemini

$$\bar{y}[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{h}^{(k)}[i] \bar{x}[n-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{h}^{(k)}[n-i] \bar{x}[i] \quad (3.32)$$

olarak yazılır. \bar{x} 'nin gözlemleri sadece K_x 'in katlarında varolduğundan (3.32) şu hali alır:

$$\bar{y}[n] = \sum_{m_x=-\infty}^{\infty} \bar{h}^{(k)}[K_x m_x] \bar{x} \left[K_x \left\lfloor \frac{n}{K_x} \right\rfloor - K_x m_x \right], \quad K_y | n, \quad (3.33)$$

Burada $K_x \left\lfloor \frac{n}{K_x} \right\rfloor$ terimi x 'in sistem seviyesindeki n anına en yakın eski gözlem değerini verir. (3.33) denkleminde değişken değiştirme uygulanırsa

$$\bar{y}[n] = \sum_{m_x=-\infty}^{\infty} \bar{h}^{(k)} \left[K_x \left\lfloor \frac{n}{K_x} \right\rfloor - K_x m_x \right] \bar{x}[K_x m_x], \quad K_y | n, \quad (3.34)$$

elde edilir. Burada $k = \langle n \rangle_K$ olup K sistem periyodudur. $K = \text{ekok}(K_x, K_y)$ olarak bulunur. Filtre nedensel ise (3.34) şöyle yazılır:

$$\bar{y}[n] = \sum_{m_x=-\infty}^{\left\lfloor \frac{K_y m_y}{K_x} \right\rfloor} \bar{h}^{(k)} \left[K_x \left\lfloor \frac{n}{K_x} \right\rfloor - K_x m_x \right] \bar{x}[K_x m_x], \quad K_y | n, \quad (3.35)$$

x dizisi \bar{x} 'nin alt örneklenmiş biçimidir yani $x[m_x] = \bar{x}[K_x m_x]$ 'dir. Aynı durum filtre katsayıları içinde geçerli olup $h^{(k)}[m] = \bar{h}^{(k)}[K_x m]$ olarak tanımlanabilir. $\bar{y}[n] = \bar{y}[K_y m_y] = y[m_y]$, çıkış dizisinin sadece K_y 'nin katlarında var olduğu kullanılarak yazılabilir. Elde edilen eşitlikler (3.33)'de yerine yazılırsa doğrusal zamanla periyodik olarak değişen filtre denklemi sistem seviyesinden işaret seviyesine aktarılmış olur

$$\bar{y}[K_y m_y] = \sum_{m_x=-\infty}^{\infty} \bar{h}^{(k)}[K_x m_x] \bar{x} \left[K_x \left\lfloor \frac{K_y m_y}{K_x} \right\rfloor - K_x m_x \right], \quad k = \langle m_y \rangle_{M_y}. \quad (3.36)$$

Elde edilen denklem sistemini sistem seviyesinden işaret seviyesine geçirilebilir

$$y[m_y] = \sum_{m_x=-\infty}^{\infty} h^{(k)}[m_x] x \left[\left\lfloor \frac{K_y m_y}{K_x} \right\rfloor - m_x \right], \quad k = \langle m_y \rangle_{M_y}. \quad (3.37)$$

Bu denklemde $T_x = T_y$ ve $K_x = K_y$ ise denklem doğrusal zamanla değişmeyen filtre denklemine dönüşür. Şekil 3.21'de verilen örnek için y dizisinin $m_y = 6$ 'daki örneğini bulmak için hem sistem seviyesindeki hem işaret seviyesindeki denklemler yazılabilir. Şekil 3.21'deki sistemde $K_x = 3$, $K_y = 2$, $M_x = K/K_x = 6/3 = 2$, $K = \text{ekok}(K_x, K_y) = 6$, $M_y = K/K_y = 6/2 = 3$ olarak gözlenmektedir. Filtre derecesi $P=3$ verilmiştir. (3.34) denklemi kullanılarak sistem seviyesinde $m_y = 6$ 'daki değer şöyle kestirilir:

$$\begin{aligned} \bar{y}[12] &= \sum_{m_x=2}^{\left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor=4} \bar{h}^{(k)} \left[3 \left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor - 3m_x \right] \bar{x}[3m_x] \\ &= \sum_{m_x=0}^2 \bar{h}^{(k)}[3m_x] \bar{x} \left[3 \left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor - 3m_x \right], \quad k = \langle 12 \rangle_6 \end{aligned} \quad (3.38)$$

(3.38) denklemde değerleri yerine yazarsak

$$\bar{y}[12] = \bar{h}^{(0)}[6]\bar{x}[6] + \bar{h}^{(0)}[3]\bar{x}[9] + \bar{h}^{(0)}[0]\bar{x}[12], \quad (3.39)$$

elde edilir. (3.37) denklemini kullanılarak ise işaret seviyesinde $m_y = 6$ 'daki değer şöyle kestirilir:

$$y[6] = \sum_{m_x=0}^2 h^{(k)}[m_x]x\left[\left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor - m_x\right], \quad k = \langle 6 \rangle_3. \quad (3.40)$$

(3.40) denkleminde değerleri yerine yazarsak

$$y[6] = h^{(0)}[0]x[4] + h^{(0)}[1]x[3] + h^{(0)}[2]x[2], \quad (3.41)$$

elde edilir. (3.41) denkleminde $x[m_x] = \bar{x}[3m_x]$, $h^{(k)}[m] = \bar{h}^{(k)}[3m]$, $y[m_y] = \bar{y}[2m_y]$ eşitlikleri kullanılırsa (3.39) denkleminin elde edileceği görülmektedir.

3.7 Matris Gösterimleri

Çoklu hızlı sistemlerde kullanılan alt örnekleme, üst örnekleme gibi temel işlemleri vektör ve matrisler cinsinden ifade etmek işlemlerin daha basit bir şekilde yapılmasını sağlar. Doğrusal zamanda periyodik olarak değişen filtre yapısını da matrislerle ifade edebiliriz. Burada temel işlemlerden olan alt örnekleme ve üst örneklemenin matris gösterimleri verilecektir.

3.7.1 Alt örneklemenin matris gösterimi

Alt örnekleme diyagramı Şekil 3.4'de gösterilmiş olup giriş çıkış ilişkisi (3.12) denkleminde verilmiştir. Alt örnekleme girişine

$$\mathbf{x} = [x[0] \quad x[1] \quad \dots \quad x[LM-1]]^T$$

vektörü uygulanırsa çıkış vektörü

$$\mathbf{y} = [x[0] \quad x[L] \quad \dots \quad x[L(M-1)]]^T$$

olarak elde edilir. Burada M çıkış vektörünün uzunluğudur. Alt örnekleme matrisi \mathbf{D}_L , $M \times ML$ boyutunda bir matris olup şu şekilde tanımlanır:

$$\mathbf{D}_L = \mathbf{I} \otimes \mathbf{d}^T. \quad (3.42)$$

Burada \mathbf{I} , $M \times M$ boyutunda birim matris; \mathbf{d} ise $[1\ 0\ 0 \dots 0]^T$ olarak ifade edilen ilk değeri 1 diğerleri 0 olan $L \times 1$ boyutunda bir vektördür. Alt örnekleme giriş-çıkış ilişkisi

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}_L \mathbf{x}. \quad (3.43)$$

olarak elde edilir.

3.7.2 Üst örneklemenin matris gösterilimi

Üst örnekleme diyagramı Şekil 3.11’de gösterilmiş olup giriş çıkış ilişkisi (3.16) denkleminde verilmiştir. Üst örnekleme girişine

$$\mathbf{x} = [x[0] \quad x[1] \quad \dots \quad x[M-1]]^T$$

vektörü uygulanırsa $\mathbf{O} = [0\ 0 \dots 0]$, $1 \times I - 1$ boyutunda bir vektör olmak üzere çıkış vektörü

$$\mathbf{y} = [x[0] \quad \mathbf{O} \quad x[1] \quad \mathbf{O} \quad \dots \quad x[(M-1)] \quad \mathbf{O}]^T$$

olarak elde edilir. Alt örnekleme matrisi \mathbf{U}_I , $MI \times M$ boyutunda bir matris olup şu şekilde tanımlanır:

$$\mathbf{U}_I = \mathbf{I} \otimes \mathbf{d}. \quad (3.44)$$

Burada \mathbf{I} , $M \times M$ boyutunda birim matris; \mathbf{d} ise $[1\ 0\ 0 \dots 0]^T$ olarak ifade edilen ilk değeri 1 diğerleri 0 olan $I \times 1$ boyutunda bir vektördür. Üst örnekleme giriş çıkış ilişkisi

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}_I \mathbf{x}. \quad (3.45)$$

olarak bulunur. Alt örnekleme ve üst örnekleme arasındaki ilişki $L = I$ için $\mathbf{D}_L = (\mathbf{U}_I)^T$ ’dir.

3.7.3 Gecikmeli örnekleme hızı dönüştürmenin matris gösterimi

Gecikmenin yani zamanda kaydırmanın (ötelemenin) var olduğu çoklu hızlı sistemlerde alt ve üst örnekleme gibi temel işlemler daha farklı gösterilir. Ayrık bir dizideki gecikme, dizinin M örnek kadar sağa yada sola ötelenmesiyle olur. z^M

dizinin sola ötelenerek $x[n+M]$ elde edilmesini; z^{-M} dizinin sağa ötelenerek $x[n-M]$ elde edilmesini sağlar. Alt örneklemeden önce dizinin M örnek kadar sağa ötelenmesiyle Şekil 3.8'deki gecikmeli alt örnekleme diyagramı yani zaman ötelemeli alt örnekleme diyagramı elde edilir. Şekil 3.8'deki diyagram vektör ve matrislerle ifade etmek istenirse

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}_L^{(k)} \mathbf{x}. \quad (3.46)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{D}_L^{(k)}$, $N \times NL$ boyutunda gecikmeli alt örnekleme matrisi olup şu şekilde gösterilir:

$$\mathbf{D}_L^{(k)} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{d}_k^T, \quad k \in \{0, 1, \dots, L-1\}. \quad (3.47)$$

Burada \mathbf{I} , $N \times N$ boyutunda birim matris; \mathbf{d}_k ise $(k+1)$. elemanının değeri 1 diğerleri 0 olan $L \times 1$ boyutunda bir vektördür. Üst örneklemeden önce dizi M örnek kadar sağa ötelenmesiyle giriş çıkış ilişkisi

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}_I^{(k)} \mathbf{x} \quad (3.48)$$

olarak elde edilir. Burada $\mathbf{U}_I^{(k)}$, $NI \times N$ boyutunda gecikmeli üst örnekleme matrisi olup şu şekilde gösterilir:

$$\mathbf{U}_I^{(k)} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{d}_k. \quad (3.49)$$

Burada \mathbf{I} , $N \times N$ boyutunda birim matris; \mathbf{d}_k ise $(k+1)$. elemanının değeri 1 diğerleri 0 olan $I \times 1$ boyutunda bir vektördür. $L = I$ için $\mathbf{D}_L^{(k)} = \left(\mathbf{U}_I^{(k)}\right)^T$ 'dur.

4. ÇOKLU HIZLI KESTİRİM TEORİSİ

Bu bölümde düşük hızlı gözlem yada gözlemler kullanılarak yüksek hızlı bir işaret kestirilmek istenmektedir. Ayrıca çoklu hızlı gözlemler kullanılarak en iyi filtreleme incelenmiştir. Çoklu hızlı kestirim teorisinin tek hızlı kestirim teorisinden elde edildiği açıklanmıştır. Çoklu hızlı gözlem işaretleri ve istenilen işaret çoklu hızlı bir sistemi oluşturmaktadır. Çoklu hızlı sistemlerdeki periyodiklikten dolayı en iyi filtreleme probleminin çözümü için bir tane en iyi filtre denklemi yerine sistem periyodikliğine göre elde edilen en iyi filtre denklemler kümesi kullanılır.

4.1 Tek Hızlı En İyi Filtreleme

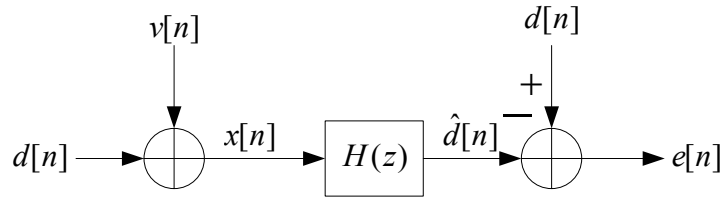
En iyi filtreleme, doğrusal ortalama karesel kestirim gibi diklik prensibine dayanmaktadır. En iyi filtrelemenin çeşitli örnekleri olarak doğrusal öngörü, FIR yada IIR Wiener filtreleme ve Kalman filtreleme verilebilir. Gözlenebilen bir işaretten başka bir işaretin kestirimi işaret işlemenin önemli problemlerinden biridir ve çok geniş uygulama alanı mevcuttur [53]. Bu uygulamaların çoğunda istenilen işaret konuşma, görüntü, EEG veya radar işareti şeklinde olup doğrudan gözlenemeyebilir. Birçok nedenden dolayı istenilen işaret gürültülü yada bozulmuş olabilir. Örneğin işareti ölçmek için kullanılan cihazlar sınırlı çözünürlüğe sahip olabilir veya işaret gürültü gibi girişim işaretlerinin varlığında gözlenebilir. Bazı durumlarda alçak-geçiren, yüksek-geçiren veya band-geçiren şeklindeki klasik filtreler, gözlenen işaretten istenilen işaretin elde edilmesi için kullanılır. Fakat bu tür filtreler işaretin en iyi kestirimini üretecek optimum filtreler değildir. Bu sebepten dolayı en iyi doğrusal filtrelemenin genel bir çeşidi olan Wiener filtreleme türetilmiştir.

4.1.1 Tek hızlı Wiener filtreleme

Tek hızlı en iyi filtreleme probleminde gözlem işareti $x[n]$, istenen işaret $d[n]$ 'e bağlı olup filtre girişine uygulanmakta ve filtre çıkışında istenen işaretin kestirimi elde edilmektedir [52,53,59]. Amaç, $x[n]$ gözlem dizisinden $d[n]$ dizisini doğrusal

FIR filtre aracılığıyla kestirmektir. 1940'larda Norbert Wiener tarafından gürültülü bir gözlem işaretinden en iyi kestirimi verecek optimum filtre (Wiener Filtresi) tasarlanmıştır. Wiener filtreleme probleminin blok diyagramı Şekil 4.1'de gösterilmiştir. $x[n]$ işareti doğrudan gözlenemeyen $d[n]$ işaretine bağlı olarak şu şekilde gözlenmektedir:

$$x[n] = d[n] + v[n]. \quad (4.1)$$



Şekil 4.1 : Wiener Filtreleme Probleminin Blok Diyagramı

Şekil 4.1'de görülen $d[n]$ işareti ile $v[n]$ gürültü işaretinin geniş anlamda durağan oldukları varsayılmaktadır. Ayrıca Wiener filtresi tasarlanırken $R_x(k)$, $R_d(k)$ özilişkileri ve $R_{dx}(k)$ çapraz ilişkisinin bilindiği varsayılmaktadır. $x[n]$ ile $d[n]$ birleşik (jointly) geniş anlamda durağandırılar. $d[n]$ 'in kestirilmesi için $x[n]$ 'nin şimdiki değerini ve $P-1$ geçmiş değerini ($x[n-1], x[n-2], \dots, x[n-P+1]$) kullanmak gerekir. Ortalama karesel hatayı minimize edecek doğrusal FIR filtre katsayıları bulunmaya çalışılmaktadır. İstenen işaret ile kestirilen işaret arasındaki ortalama karesel hata

$$\sigma_e^2[n] = \mathcal{E} \left\{ |\varepsilon[n]|^2 \right\} \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir. Kestirim hatası, istenen işareten kestirilen işaretin çıkarılmasıyla

$$e[n] = d[n] - \hat{d}[n] \quad (4.3)$$

olarak elde edilir. MSE değerini minimize etmek için diklik prensibinin sağlanması yeter ve gerek şarttır. Buna göre kestirim hatası tüm gözlem uzayına istatistiksel anlamda diktir. Diklik prensibi şu şekilde ifade edilir:

$$\mathcal{E} \left\{ x[n-i] \varepsilon^*[n] \right\} = \mathcal{E} \left\{ \varepsilon[n] x^*[n-i] \right\} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, P-1. \quad (4.4)$$

Diklik prensibiyle elde edilen filtre katsayıları $(h[0], h[1], \dots, h[P-1])$ optimum doğrusal filtrenin katsayılarıdır. En iyi kestirimin yapıldığı minimum hata varyansı (minimum MSE)

$$\sigma_{\varepsilon_{MIN}}^2 = \mathcal{E} \{ \varepsilon[n] d^*[n] \} = \mathcal{E} \{ d[n] \varepsilon^*[n] \} \quad (4.5)$$

olarak gösterilir. Optimum Wiener filtre katsayılarını bulmak için Wiener-Hopf denkleminin tanımlanması gerekir. Doğrusal FIR filtre girişine $x[n]$ ve $P-1$ geçmiş değeri uygulanılarak çıkışta istenen işaretin kestirimi $\hat{d}[n]$ elde edilir Gözlem işareti $x[n]$ ile istenen işaret $d[n]$ 'in JWSS olduğu varsayılıp kestirim (4.6) denklemiyle gösterilir

$$\hat{d}[n] = \sum_{k=n-P+1}^n h[n-k]x[k] = \sum_{l=0}^{P-1} h[l]x[n-l]. \quad (4.6)$$

Burada $h[l]$, doğrusal FIR filtrenin zamanla periyodik olarak değişen impuls cevabıdır. P ise impuls cevabı dizisinin ($h[l]$) uzunluğudur. $x[n-i]$, gözlemlerden herhangi birini göstermektedir. Diklik prensibi kullanılarak Wiener-Hopf denklemi elde edilir. (4.6) ve (4.3) denklemleri diklik prensibinde yerine konulursa ayrık Wiener-Hopf denklemi elde edilir. Wiener-Hopf denkleminin bulunması şu şekildedir:

$$\mathcal{E} \{ x[n-i] \varepsilon^*[n] \} = \mathcal{E} \left\{ x[n-i] \left(d^*[n] - \sum_{l=0}^{P-1} h^*[l] x^*[n-l] \right) \right\} \quad (4.7)$$

$$\sum_{l=0}^{P-1} R_x[l-i] h^*[l] = R_{dx}^*[i]; \quad i = 0, 1, \dots, P-1. \quad (4.8)$$

(4.8) denklemi ayrık Wiener-Hopf denklemdir ve (4.8) denkleminde en iyi FIR filtre katsayıları elde edilir. Minimum ortalama karesel hatayı bulmak için (4.3)'teki kestirim hatası (4.5)'de yerine yazılırsa

$$\sigma_{\varepsilon_{MIN}}^2 = \mathcal{E} \{ \varepsilon[n] d^*[n] \} = \mathcal{E} \left\{ \left(d[n] - \sum_{l=0}^{P-1} h[l] x[n-l] \right) d^*[n] \right\} \quad (4.9)$$

yada

$$\sigma_{\varepsilon_{MIN}}^2 = R_d[0] - \sum_{l=0}^{P-1} h[l]R_{dx}^*[l] \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.8)'deki Wiener-Hopf denklemini matris formunda ifade etmek için (4.6) denklemi matris formunda

$$\hat{d}[n] = (\tilde{\mathbf{x}}[n])^T \mathbf{h} \quad (4.11)$$

olarak yazılır. Burada $\tilde{\mathbf{x}}[n]$ ve \mathbf{h} şu şekilde gösterilir:

$$\tilde{\mathbf{x}}[n] = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-P+1] \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[P-1] \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Wiener-Hopf denklemi matris formunda

$$\tilde{\mathbf{R}}_x \mathbf{h}^* = \tilde{\mathbf{r}}_{dx}^* \quad (4.14)$$

şeklinde yazılır. Burada $\mathbf{R}_x = \mathcal{E}\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^{*T}[n]\}$ ve $\mathbf{r}_{dx} = \mathcal{E}\{d[n](\mathbf{x}[n])^*\}$ 'dir. $\mathbf{R}_x = \tilde{\mathbf{R}}_x^*$ olduğundan (4.14) denklemi $\mathbf{R}_x \mathbf{h} = \tilde{\mathbf{r}}_{dx}$ olarak yazılabilir. Minimum ortalama karesel hata matris formunda

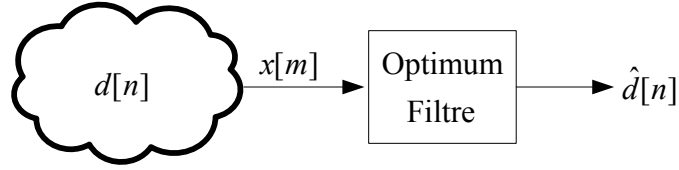
$$\sigma_{\varepsilon_{MIN}}^2 = R_d[0] - \tilde{\mathbf{r}}_{dx}^T \mathbf{h}^* = R_d[0] - \mathbf{h}^{*T} \tilde{\mathbf{r}}_{dx} \quad (4.15)$$

olarak elde edilir.

4.2 Çoklu Hızlı En İyi Filtreleme

4.2.1 Tek kanallı çoklu hızlı en iyi filtreleme problemi

Tek kanallı çoklu hızlı en iyi filtreleme probleminde istenen işaret $d[n]$ iken gözlem işareti $x[m]$ 'dir yani istenen işaret ile gözlem işaretinin örnekleme hızları farklıdır. Amaç, farklı hızdaki gözlem işaretinden istenen işareti kestirmektir.

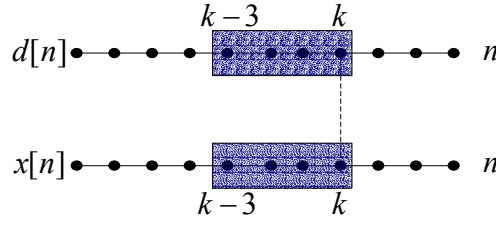


Şekil 4.2 : Tek Kanallı Çoklu Hızlı En İyi Filtreleme Probleminin Blok Diyagramı

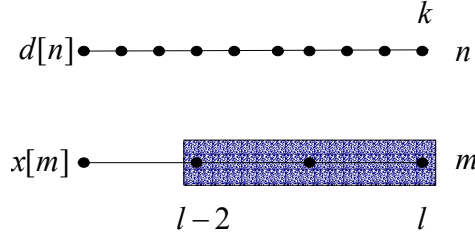
Şekil 4.2’de tek kanallı çoklu hızlı en iyi filtreleme probleminin blok diyagramı verilmiştir. En iyi filtreleme için iki çeşit filtre kullanılır. Bunlar nedensel FIR Wiener filtre ile nedensel olmayan FIR Wiener filtredir.

4.2.1.1 İndis eşleme

Tek hızlı nedensel filtre, $d[n_0]$ değerini kestirmek için $x[n_0]$ ’dan $x[n_0 - P + 1]$ ’a kadar olan gözlem değerlerini kullanır. Çoklu hızlı durumda destek bölgesini belirlemek için istenen dizi ile gözlem dizisi arasında bir bağlantının kurulması gerekir. Bu bağlantı indis eşlemeyle sağlanır. Şekil 4.3’de tek hızlı kestirim ve $d[n]$ ile $x[n]$ dizilerinin örnekleri arasındaki ilişki gösterilmiştir. Şekil 4.4’de tek kanallı çoklu hızlı nedensel FIR Wiener filtreleme ve $d[n]$ ile $x[m]$ örnekleri arasındaki ilişki gösterilmiştir. Şekil 4.3’deki sistemde istenen dizi $d[n]$ ’in $n = k$ değerindeki örneğini kestirmek için kullanılan $x[k]$, $x[k - 1]$, $x[k - 2]$, $x[k - 3]$ gözlem değerleri $P = 4$ durumundaki destek bölgesini içerir. Şekil 4.3’de her iki işaret de aynı domende tanımlanmaktadır. Şekil 4.4’deki tek kanallı çoklu hızlı Wiener filtrelemede her iki işaret de farklı domende gösterilmektedir. Burada $d[n]$ dizisinin $n = k$ ’daki örneğinin çoklu hızlı kestirimi gösterilmektedir. $d[n]$ dizisinin örnekleme hızı T_d , $x[m]$ dizisinin örnekleme hızı T_x olsun. Şekil 4.4’e bakılırsa $d[k]$ ’nın ortaya çıktığı zaman (kT_d) ile $x[k]$ ’nin ortaya çıktığı zaman (kT_x) farklıdır.



Şekil 4.3 : $d[n]$ ile $x[n]$ arasındaki ilişki ($P = 4$)



Şekil 4.4 : Tek Kanallı Çoklu Hızlı Wiener Filtreleme Gösterimi ve $d[n]$ ile $x[m]$ arasındaki ilişki ($P = 3$)

$d[k]$ ve $x[l]$ örneklerinin aynı anda yada birbirine yakın bir zamanda olduğu l indis değerinin tanımlanması gerekir. Filtrenin nedensel olduğu göz önüne alınarak l değerinin tanımlanması indis eşlemeyle yapılır. İndis eşleme için $D[n, m]$ indis metriği kullanılır ve şu şekilde tanımlanır:

$$D[n, m] \equiv |nT_d - mT_x| = \bar{T} |nK_d - mK_x|. \quad (4.16)$$

Burada \bar{T} sistem örnekleme aralığıdır. İndis metriği farklı domenlerdeki herhangi iki indis arasındaki uzaklığı belirtir. $K_x = 3$ ve $K_d = 1$ için normalize indis metriği $D[n, m]/\bar{T} = |n - 3m|$ olarak ifade edilir. $n = 3m$ olduğu durumda indis metriği $D[n, m]$ sıfırdır. $d[n]$ ve $x[m]$ işaretleri farklı örnekleme hızlarında olup $d[n]$ istenen işaretinin $n = n_0$ 'daki değeri verilsin. $D[n_0, m_0]$ uzaklığını minimize eden $m = m_0$ indisinin bulunması istenir. Çoklu hızlı nedensel filtreleme için sağlanması gereken şart şu şekilde gösterilir:

$$nT_d \geq mT_x \quad \text{yada} \quad n \geq \frac{K_x}{K_d} m. \quad (4.17)$$

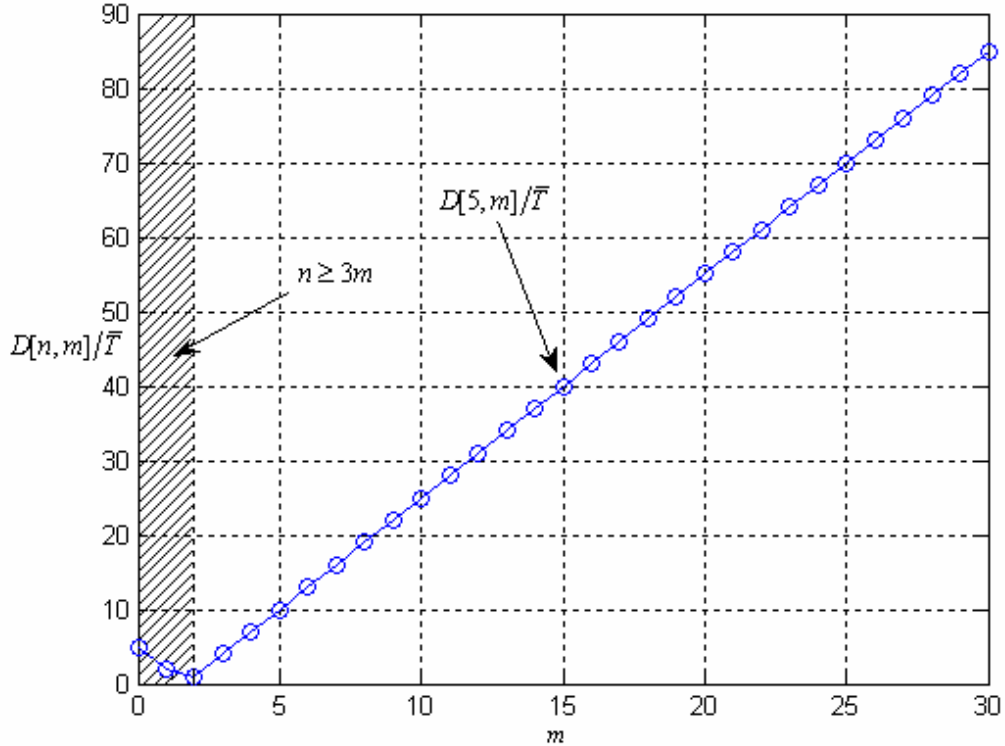
$n \geq \frac{K_x m}{K_d}$ şartının sağlanması durumunda $D[n, m]$ metriğini minimize edecek m değeri aranır. İndeks eşleme

$$M_{nedensel} : n \rightarrow \left\lfloor \frac{nK_d}{K_x} \right\rfloor \quad (4.18)$$

ve

$$m = M_{nedensel}(n) \quad (4.19)$$

denklemleriyle ifade edilir. $K_x = 3$ ve $K_d = 1$ için nedensellik sınırı $n \geq 3m$ olarak Şekil 4.5’de gösterilmiştir. $K_x = 3$ ve $K_d = 1$ olduğu durumda $n = 5$ değerine ait indis metriği Şekil 4.5’de verilmiştir. Nedensellik koşulu altında $D[5, m]$ indis metriğinin $m = 1$ ’de minimum değerini aldığı görülmektedir. $m = 1$ ’de metriğin değeri 2’dir.



Şekil 4.5 : $n = 5$ için $D[n, m]/\bar{T}$

Tablo 4.1’de $K_x = 3$ ve $K_d = 1$ için kestirilen işaretin indisinin gözlem işaretinin indisine eşleşmesi gösterilmiştir.

Tablo 4.1: Kestirilen İşaretin İndisinden Gözlem İşaretinin İndisine Eşleme

| | |
|---------------|---|
| n | $m = \left\lfloor \frac{nK_d}{K_x} \right\rfloor$ |
| $\{0, 1, 2\}$ | 0 |
| $\{3, 4, 5\}$ | 1 |
| $\{6, 7, 8\}$ | 2 |

4.2.1.2 Tek kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri

Tek kanallı çoklu hızlı kestirim problemi için (3.35) denklemini yani çoklu hızlı filtreleme giriş-çıkış ilişkisini tekrar yazarsak

$$\hat{d}[n] = \sum_m h^{(k)}[m] x \left[\left\lfloor \frac{K_d n}{K_x} \right\rfloor - m \right], \quad k = \langle n \rangle_{M_d} \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.18) ve (4.19)'da tanımlanan eşleme fonksiyonu kullanılarak (4.20) denklemini

$$\hat{d}[n] = \sum_m h^{(k)}[m] x[M[n] - m], \quad k = \langle n \rangle_{M_d} \quad (4.21)$$

olarak yazılabilir. Burada $M[n]$, eşleme fonksiyonudur ve $i = 0, 1, \dots, P-1$ için $x[M[n] - i]$ gözlem dizisinin örnekleridir. (4.21)'de gösterilen tek kanallı çoklu hızlı kestirim problemine ait $\hat{d}[n]$ işareti için diklik prensibini uygularsak

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} \left\{ \varepsilon[n] x^* [M[n] - i] \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \left(d[n] - \sum_{m=0}^{P-1} h^{(k)}[m] x[M[n] - m] \right) x^* [M[n] - i] \right\} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, P-1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

yada

$$\sum_{m=0}^{P-1} R_x [M[n] - m; i - m] h^{(k)}[m] = R_{dx} [n; n - M[n] + i], \quad i = 0, 1, \dots, P-1 \quad (4.23)$$

$k = \langle n \rangle_{M_d}$ olup bu denkleme ayırık tek kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemini denir. Minimum ortalama karesel hata ise

$$\sigma_{\varepsilon_{MIN}}^2 [n] = R_d [n; 0] - \sum_{m=0}^{P-1} h^{(k)}[m] R_{dx}^* [n; n - M[n] + m] \quad (4.24)$$

olarak tanımlanır. Gözlem dizisi durağan ise (4.23) denklemini aşağıdaki şekli alır:

$$\sum_{m=0}^{P-1} R_x [i-m] h^{(k)} [m] = R_{dx} [n; n-M[n]+i], \quad i = 0, 1, \dots, P-1. \quad (4.25)$$

Burada $k = \langle n \rangle_{M_d}$ 'dir. Tek kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemini matris formunda elde etmek için (4.21) denklemini matris formuna

$$\hat{d}[n] = (\tilde{\mathbf{x}}[M[n]])^T \mathbf{h}^{(k)} \quad (4.26)$$

olarak getirilmelidir. $\mathbf{x}[M[n]]$, $\tilde{\mathbf{x}}[M[n]]$ ve $\mathbf{h}^{(k)}$ vektörleri sırasıyla

$$\mathbf{x}[M[n]] = \begin{bmatrix} x[M[n]-P+1] \\ x[M[n]-P] \\ \vdots \\ x[M[n]] \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}[M[n]] = \begin{bmatrix} x[M[n]] \\ x[M[n]-1] \\ \vdots \\ x[M[n]-P+1] \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

ve

$$\mathbf{h}^{(k)} = \begin{bmatrix} h^{(k)}[0] \\ h^{(k)}[1] \\ \vdots \\ h^{(k)}[P-1] \end{bmatrix}, \quad k = \langle n \rangle_{M_d} \quad (4.29)$$

olarak tanımlanır. (4.25)'deki Wiener-Hopf denklemini matris formunda şu şekilde ifade edilir:

$$\tilde{\mathbf{R}}_x^* \mathbf{h}^{(k)} = \tilde{\mathbf{r}}_{dx[M[n]}. \quad (4.30)$$

Burada $k = \langle n \rangle_{M_d}$ ve

$$\mathbf{r}_{dx[M[n]]} = \mathcal{E} \left\{ d[n] \mathbf{x}^* [M[n]] \right\} \quad (4.31)$$

olarak belirtilir. (4.24)'deki minimum ortalama karesel hata matris formunda

$$\sigma_{\varepsilon_{MN}}^2 [n] = R_d [n; 0] - \tilde{\mathbf{r}}_{dx[M[n]]}^T \mathbf{h}^{(k)*} \quad (4.32)$$

olarak elde edilir.

4.2.1.3 Tek kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri için matris gösterimi

Çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemlerinin elde edilmesinde kullanılan diğer bir yaklaşımda bölüm 3.7’de açıklanan matris gösterimlerinden elde edilir. F_x örnekleme hızına sahip $x[n]$ gözlem işareti ile F_d örnekleme hızına sahip $d[n]$ arzulanan işareti içeren bir çoklu hızlı sistem verilsin. Filtre derecesi P , sistem hızı $\bar{F} = \text{ekok}(F_x, F_d)$, alt örnekleme çarpanları $K_i = \bar{F}/F_i$, sistem periyodu $N = \text{ebob}(K_x, K_d)$ ve tek kanallı çoklu hızlı kestirimde kullanılan filtrelerin periyodu $K = N/K_d$ olarak tanımlanır. Her n indisi için gözlem vektörü $\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}[n]$ ile ifade edilir. $x[n]$ ’in gözlenen yada gözlenmeyen bütün değerleri de $\tilde{\mathbf{x}}[n]$ ile gösterilir

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}[n] = \mathbf{D}_K^{(k)} \tilde{\mathbf{x}}[n], \quad k = 0, 1, \dots, K-1. \quad (4.33)$$

Burada $\mathbf{D}_K^{(k)}$ gecikmeli alt örnekleme matrisi ve

$$\tilde{\mathbf{x}}[n] = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-PK_x+1] \end{bmatrix}$$

olarak belirtilir. Ayrıca işaretler ve işlemler sistem hızındadır. En iyi filtrelemedeki kestirim ifadesi

$$\hat{d}_k[n] = (\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}[n])^T \mathbf{h}^{(k)}, \quad k = \{0, 1, \dots, K-1\} \quad (4.34)$$

olarak elde edilir. Sistem seviyesindeki her nokta kestirilmekte ve daha sonra istenen kestirim K_d ile alt örneklenecek elde edilmektedir. (4.25)’deki Wiener-Hopf denklemi

$$\tilde{\mathbf{R}}_x^{(k)} \mathbf{h}^{(k)*} = \tilde{\mathbf{r}}_{dx}^{(k)*}, \quad k = \{0, 1, \dots, K-1\} \quad (4.35)$$

olarak matris formunda yazılabilir. (4.35) denklemi \mathbf{R}_x matrisi ve \mathbf{r}_{dx} vektörüyle tekrar yazılabilir

$$\mathbf{D}_K^{(k)} \tilde{\mathbf{R}}_x \mathbf{D}_K^{(k)T} \mathbf{h}^{(k)*} = \mathbf{D}_K^{(k)} \tilde{\mathbf{r}}_{dx}^*, \quad k = \{0, 1, \dots, K-1\}. \quad (4.36)$$

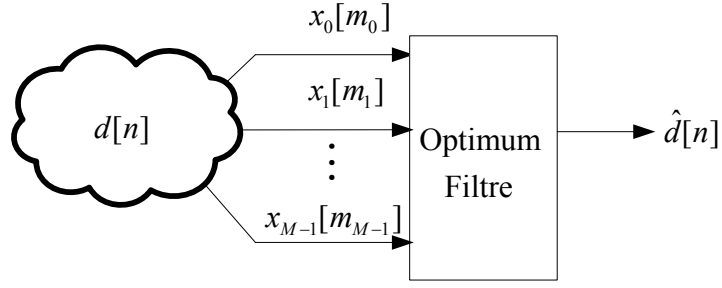
Ortalama karesel hata da

$$\sigma_k^2 = R_d[0] - \tilde{\mathbf{r}}_{dx}^{(k)T} \mathbf{h}^{(k)*}, \quad k = \{0, 1, \dots, K-1\} \quad (4.37)$$

olarak elde edilir. Ortalama karesel hatadaki altsimge hatanın zamanla periyodik değiştiğini gösterir.

4.2.2 Çok kanallı çoklu hızlı en iyi filtreleme problemi

Bu problemde istenen işaretten elde edilen farklı örnekleme hızlarına sahip birçok gözlem işareti mevcuttur. Farklı hızlardaki gözlem işaretlerinden istenen işaret kestirilmek istenmektedir. Şekil 4.6'da farklı hızlardaki M gözlem işaretinden istenen işaretin en iyi kestirimi gösterilmiştir.



Şekil 4.6 : Çok Kanallı Çoklu Hızlı En İyi Filtreleme Probleminin Blok Diyagramı

4.2.2.1 Çok kanallı indis eşleme

Çok kanallı çoklu hızlı bir sistemde destek bölgelerini belirlemek için kestirilen işaretin indisi ile gözlem işaretlerinin indisleri arasında bir ilişki elde edilir. İndis eşleme problemi, kestirime ait bir n indisi için $D[n, m_i]$ indis uzaklıklarını minimum yapan M gözlem indisi m_i 'nin bulunması olarak belirtilir. Burada $i = 0, 1, \dots, M-1$ olarak tanımlanır. Filtre nedensel ise

$$n \geq \frac{K_i m_i}{K_d} \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.38)$$

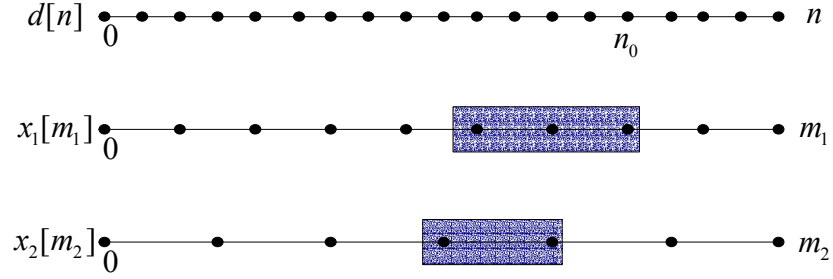
koşulu altında $i = 0, 1, \dots, M-1$ için $D[n, m_i]$ 'yi minimum yapan m_i indislerinin bulunması istenmektedir. Bu problem, kestirim indisinden gözlem indisine eşleme yapılarak çözülür.

$$M_{nedensel} : n \rightarrow \left\lfloor \frac{nK_d}{K_i} \right\rfloor \quad (4.39)$$

ve

$$m_i = M_{nedensel}(n) \quad (4.40)$$

ile gösterilir. Çok kanallı çoklu hızlı FIR Wiener filtrelemedeki indis eşleme kavramı şekil 4.7’de gösterilmektedir.



Şekil 4.7 : Çok Kanallı Çoklu Hızlı Wiener Filtrelemede İndis Eşleme Kavramı

4.2.2.2 Çok kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri

(4.21)’deki tek kanallı çoklu hızlı filtreleme denklemi çok kanallı duruma genişletilirse

$$\hat{d}[n] = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{P-1} h^{(k)}[m] x_i[M_i[n] - m], \quad k = \langle n \rangle_{\frac{N}{K_d}} \quad (4.41)$$

elde edilir. (4.41) denklemi $\mathcal{E}\{\varepsilon[n] x_i^*[M_i[n] - j]\} = 0$ olarak tanımlanan diklik prensibinde kullanılırsa

$$\sum_{s=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{P-1} R x_s x_i [M_s[n] - r; M_s[n] - M_i[n] + j - r] h_s^{(k)}[r] = R_{dx_i} [n; n - M_i[n] + j], \quad (4.42)$$

şeklinde tanımlanan ayrık çok kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemi elde edilir.

Burada $k = \langle n \rangle_{\frac{N}{K_d}}, 0 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq P-1$ olarak tanımlanır. (4.42) denklemi

matris formunda yazmak istenirse

$$\hat{d}[n] = \sum_{i=0}^{M-1} (\tilde{\mathbf{x}}_i[M_i[n]])^T \mathbf{h}_i^{(k)}, \quad (4.43)$$

elde edilir. $\mathbf{x}_i[M_i[n]]$, $\tilde{\mathbf{x}}_i[M_i[n]]$ ve $\mathbf{h}_i^{(k)}$ vektörleri

$$\mathbf{x}_i[M_i[n]] = \begin{bmatrix} x_i[M_i[n]-P+1] \\ x_i[M_i[n]-P] \\ \vdots \\ x_i[M_i[n]] \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_i[M_i[n]] = \begin{bmatrix} x_i[M_i[n]] \\ x_i[M_i[n]-1] \\ \vdots \\ x_i[M_i[n]-P+1] \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

ve

$$\mathbf{h}_i^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_i^{(k)}[0] \\ \mathbf{h}_i^{(k)}[1] \\ \vdots \\ \mathbf{h}_i^{(k)}[P-1] \end{bmatrix}, \quad k = \langle n \rangle_{\frac{N}{K_d}} \quad (4.46)$$

olarak kullanılır. $\mathcal{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_i[M_i[n]]\mathcal{E}^*[n]\} = 0$ diklik prensibi kullanılarak Wiener-Hopf denklemini matris formunda yazılır

$$\sum_{s=0}^{M-1} \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_s}^* \mathbf{h}_s^{(k)} = \tilde{\mathbf{r}}_{d\mathbf{x}_i[M_i[n]]}, \quad 0 \leq i \leq M-1. \quad (4.47)$$

Burada $k = \langle n \rangle_{\frac{N}{K_d}}$, $\tilde{\mathbf{r}}_{d\mathbf{x}_i[M_i[n]]} = \mathcal{E}\{d[n]\mathbf{x}_i^*[M_i[n]]\}$ kullanılır. $\sigma_{\varepsilon_{MIN}}^2[n] = \mathcal{E}\{d[n]\mathcal{E}^*[n]\}$

olarak tanımlanan minimum ortalama karesel hata, periyodiklik göz önüne alınarak

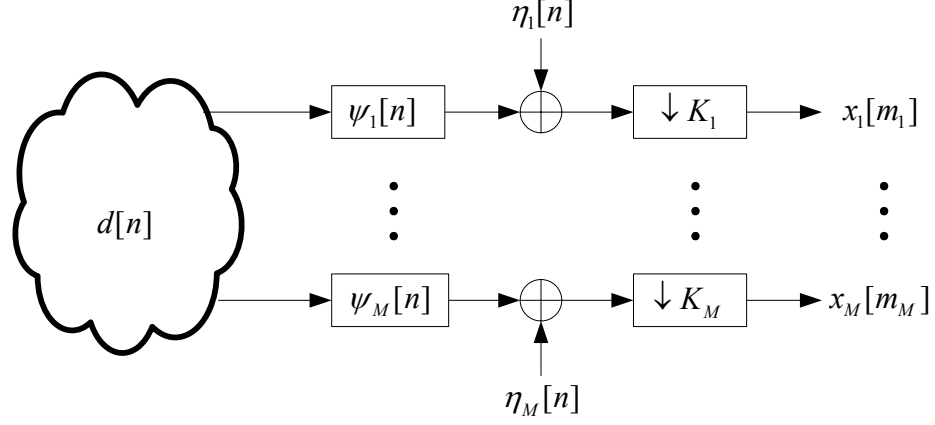
$$\sigma_k^2 = R_d[n;0] - \sum_{s=0}^{M-1} \tilde{\mathbf{r}}_{d\mathbf{x}_s}^T [n; n - M_s[n]] \mathbf{h}_s^{(k)*}, \quad 0 \leq i \leq M-1. \quad (4.48)$$

olarak elde edilir.

4.2.2.3 Çok kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri için matris gösterimi

Çok kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri bölüm 3.7'de açıklanan kavramlar kullanılarak da elde edilebilir. Bu problemde $M \geq 2$ olacak şekilde geniş anlamda durağan M gözlem dizisinden $\{x_1[m_1], x_2[m_2], \dots, x_M[m_M]\}$ oluşan bir çoklu hızlı

gözlem modelini ele alalım. Bu diziler $d[n]$ istenen işaretinin çeşitli gürültü ve bozunuma uğramasıyla elde edilir ve Şekil 4.8’de çoklu hızlı gözlem modeli gösterilmiştir.



Şekil 4.8 : Çoklu Hızlı Gözlem Modeli

Şekil 4.8’de $d[n]$ istenen işareti, $\psi_i[n]$ doğrusal zamanla değişmeyen filtrelerin impuls cevabını, $\eta_i[n]$ bağımsız gürültü dizilerini, K_i alt örnekleme çarpanlarını, $x_i[m_i]$ gözlem dizilerini gösterir. M gözlem dizisi farklı örnekleme hızına sahiptir. F_1, F_2, \dots, F_M gözlem dizilerinin örnekleme frekanslarını, K_1, K_2, \dots, K_M dizilerin alt örnekleme çarpanlarını gösterebilir. $K = \text{ekok}(K_1, K_2, \dots, K_M)$ sistem periyodunu göstermektedir. İstenen işaretin n anındaki değeri

$$d[n] = d[Kl + k]$$

olarak yazılır. Burada $l = \lfloor n/K \rfloor$, $k \equiv n \pmod{K}$ olarak belirtilir. k sistem fazı, periyodiklik indisi, olup $0 \leq k \leq K-1$ aralığında değerler alır. Herhangi bir n anındaki $\tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)}[n]$ gözlem dizisi

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)}[n] = \mathbf{D}_{K_i}^{(k)} \tilde{\mathbf{x}}_i[n], \quad 0 \leq k \leq K_i - 1 \quad (4.49)$$

olarak tanımlanır. $\mathbf{D}_{K_i}^{(k)}$, (3.47)’de tanımlanmıştır. K_i , i . kanala ait alt örnekleme çarpanıdır. $\tilde{\mathbf{x}}_i[n]$ ise

$$\tilde{\mathbf{x}}_i[n] = [x_i[n] \quad x_i[n-1] \quad \dots \quad x_i[n - P_i K_i + 1]]^T \quad (4.50)$$

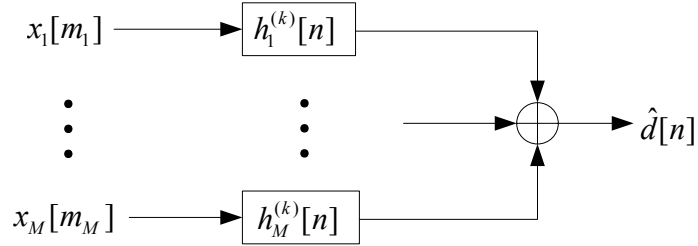
olarak yazılır. P_i , i . filtrenin derecesini gösterir. $\tilde{\mathbf{x}}_i[n]$, $x_i[n]$ 'in gözlenen yada gözlenmeyen bütün değerlerinden oluşur. $\tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)}[n]$ ise filtre tarafından kullanılan gözlem değerlerini içerir. $\mathbf{D}_{K_i}^{(k)}$ alt örnekleme matrisi 0 yada 1'lerden oluşmaktadır ve filtre tarafından kullanılan gözlem değerlerini $\tilde{\mathbf{x}}_i[n]$ vektöründen seçer. Şekil 4.7'de gösterilen $K_1 = 2$, $K_2 = 3$, $P_1 = 3$ ve $K = 6$ olduğu durum için çoklu hızlı bir sistem ele alınırsa $x_1[m_1]$ işareti için alt örnekleme matrisleri

$$\mathbf{D}_{K_1}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{D}_{K_1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Çoklu hızlı en iyi filtre Şekil 4.9'da gösterilmektedir. M tane LPTV filtrenin çıkışı toplanarak en iyi kestirim üretilir. Her bir gözlem dizisi bir LPTV filtrenin girişine uygulanmaktadır.



Şekil 4.9 : Çoklu Hızlı En İyi Filtre

$h_i^{(k)}[n]$, LPTV filtrelerin katsayılarını gösterir. Filtre katsayılarından oluşan vektör

$$\mathbf{h}_i^{(k)} = \begin{bmatrix} h_i^{(k)}[0] \\ h_i^{(k)}[1] \\ \vdots \\ h_i^{(k)}[P_i - 1] \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq M, 0 \leq k \leq K - 1 \quad (4.51)$$

olarak gösterilir. İstenen işaretin kestirimi

$$\hat{d}_k[n] = \sum_{i=1}^M \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)T}[n] \mathbf{h}_i^{(k)} = \sum_{i=1}^M \mathbf{h}_i^{(k)T} \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)}[n]; \quad k \equiv n \pmod{K} \quad (4.52)$$

elde edilir. $\hat{d}_k[n]$ 'daki k altsimgesi kestirimin istatistiksel özelliklerinin zamanla periyodik olarak değiştiğini göstermek için kullanılmıştır. Bütün işaretler ve hesaplamalar sistem hızındadır ve istenen kestirim, K_d ile alt örneklenecek elde edilir. Çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemini matris formunda tanımlamak için kestirim hatası

$$\varepsilon_k[n] = d[n] - \hat{d}_k[n] \quad (4.53)$$

olarak belirtilir. $\mathcal{E} \left\{ |\varepsilon_k[n]|^2 \right\}$ minimize edecek en iyi filtre katsayıları bulunmaya çalışılır. Diklik prensibi yani hatanın gözlem vektörlerine dik olduğu

$$\mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)}[n] \varepsilon_k^*[n] \right\} = \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)}[n] \left(d[n] - \sum_{j=1}^M \tilde{\mathbf{x}}_j^{(k)T}[n] \mathbf{h}_j^{(k)} \right)^* \right\} = 0 \quad (4.54)$$

kullanılarak çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri matris formunda elde edilir. k değeri $\langle n \rangle_K$ 'yı ifade eder. $\tilde{\mathbf{x}}_i[n]$ ve $\tilde{\mathbf{x}}_j[n]$ 'in çapraz ilişki matrisi (4.49) denklemini kullanarak

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^{(k)} = \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)}[n] \tilde{\mathbf{x}}_j^{(k)*T}[n] \right\} = \mathbf{D}_{K_i}^{(k)} \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \mathbf{D}_{K_j}^{(k)T} \quad (4.55)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\tilde{\mathbf{R}}_{ij}$, sistem hızındaki $\tilde{\mathbf{x}}_i[n]$ ve $\tilde{\mathbf{x}}_j[n]$ 'in çapraz ilişki matrisidir ve $\tilde{\mathbf{R}}_{ij} = \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_i[n] \tilde{\mathbf{x}}_j^*[n] \right\}$ ile ifade edilir. $\tilde{\mathbf{x}}_i[n]$ ile $d[n]$ arasındaki çapraz ilişki vektörü

$$\tilde{\mathbf{r}}_{di}^{(k)*} = \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)}[n] d^*[n] \right\} \quad (4.56)$$

olarak tanımlanır. Burada (4.49) denklemini kullanarak $\tilde{\mathbf{x}}_i[n]$ ile $d[n]$ arasındaki çapraz ilişki vektörü $\tilde{\mathbf{r}}_{di}^{(k)} = \tilde{\mathbf{D}}_{K_i}^{(k)} \tilde{\mathbf{r}}_{di} = \tilde{\mathbf{D}}_{K_i}^{(k)} \mathcal{E} \left\{ d[n] \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)*}[n] \right\}$ olarak yazılabilir. Çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemini matris formunda (4.55) ve (4.56) kullanılarak elde edilir

$$\sum_{j=1}^M \tilde{\mathbf{R}}_{ij}^{(k)} \mathbf{h}_j^{(k)*} = \mathbf{r}_{di}^{(k)*}, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (4.57)$$

İlişki matrisi hermityen simetriktir ve $\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^{(k)} = \tilde{\mathbf{R}}_{ji}^{(k)*T}$ ile gösterilir. (4.57) denklemini matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{11}^{(k)} & \tilde{\mathbf{R}}_{12}^{(k)} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{1M}^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{12}^{(k)*T} & \tilde{\mathbf{R}}_{22}^{(k)} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{2M}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{R}}_{1M}^{(k)*T} & \tilde{\mathbf{R}}_{2M}^{(k)*T} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{MM}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(k)*} \\ \mathbf{h}_2^{(k)*} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_M^{(k)*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{d1}^{(k)*} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{d2}^{(k)*} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{r}}_{dM}^{(k)*} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

elde edilir. Minimum ortalama karesel hata yada hata varyansı

$$\sigma_k^2 = \mathcal{E} \left\{ d[n] \varepsilon_k^*[n] \right\} = \mathcal{E} \left\{ d[n] \left(d[n] - \sum_{j=1}^M \tilde{\mathbf{x}}_j^{(k)T}[n] \mathbf{h}_j^{(k)} \right)^* \right\} \quad (4.59)$$

yada

$$\sigma_k^2 = R_d[0] - \sum_{i=1}^M \tilde{\mathbf{r}}_{di}^{(k)T} \mathbf{h}_i^{(k)*}, \quad 1 \leq i \leq M \quad (4.60)$$

olarak tanımlanır. Ortalama karesel hata σ_k^2 zamanla periyodik olarak değişir. Çoklu hızlı sistem için bir başarımlı ölçüsünün bulunması istenirse ortalama hata

$$\sigma_\varepsilon^2 = \left(\prod_{k=0}^{K-1} \sigma_k^2 \right)^{\frac{1}{K}} \quad (4.61)$$

tanımlanır.

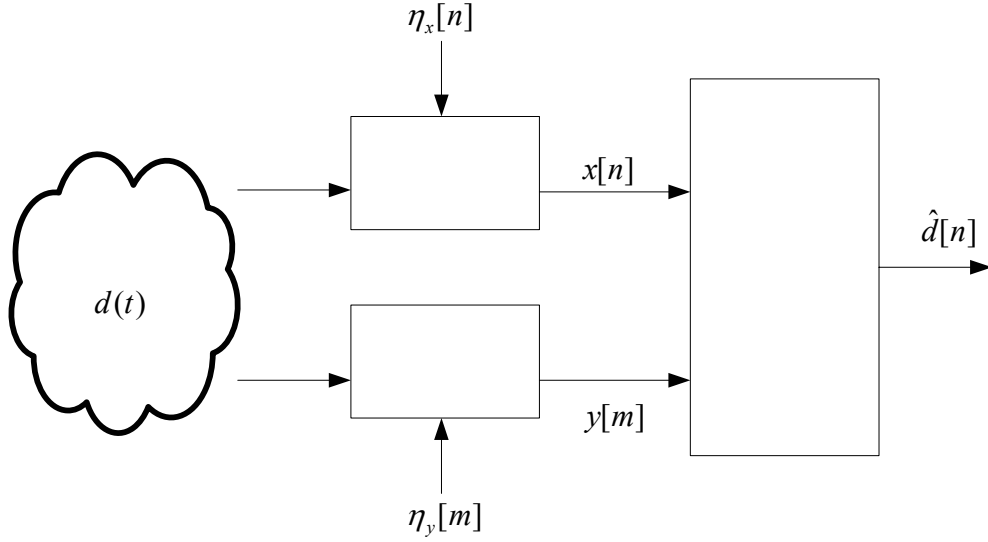
5. ÇOKLU HIZLI EN KÜÇÜK ORTALAMA KARELER METODU

Bu bölümde bir rastgele sürecin farklı hızlarda örneklenmiş iki gözlem dizisinden kestirilmesi incelenecektir. Gözlem dizilerinden biri kestirilen süreçle aynı hızda, diğeri ise kestirilen süreçten daha düşük hızdadır. Çoklu hızlı uyarlamalı filtre algoritması açıklanacaktır [50]. Farklı hızdaki gözlem dizilerini kullanarak işaretin en iyi filtrelemeyle kestirilmesi problemi ilişki fonksiyonlarına göre incelenmiştir [46,48]. Bir diğerk çoklu hızlı filtre algoritması en küçük kareler metodu kullanılarak en iyi filtreleme için Wiener-Hopf denklemlerinin çoklu hızlı şeklidir [47]. En küçük kareler en iyi filtreleme problemi, bilinen yada kestirilen ikinci dereceden istatistiklere değil ölçülen veriye dayanmaktadır [59]. Bu metodla arzulanan veri dizisi ile gözlenen veri dizisi ölçülür, kaydedilir ve filtre tasarlamak için kullanılır. En küçük kareler metodundaki ölçüt, hata terimlerinin karelerinin toplamının minimize edilmesidir. En küçük kareler algoritmasını kullanan çoklu hızlı en iyi filtreleme Therrien ve öğrencileri tarafından açıklanmıştır [47]. Bu filtreyle her iki gözlem dizisinin kullanılmasının sadece yüksek hızlı yada düşük hızlı gözlem dizilerinin kullanılmasına göre daha düşük ortalama karesel hata sağlayacağı gösterilmiştir. Bu bölümde açıklanacak olan çoklu hızlı filtre uyarlamalı olup Widrow ve Hoff'un en küçük ortalama kareler (LMS) algoritmasına dayanmaktadır. 6. bölümde bu algoritma uyarlamalı gürültü giderme yapısında kullanılır. Ayrıca sadece düşük hızlı gözlemleri kullanılarak gürültü giderme incelenmiştir.

5.1 Problem Tanımı

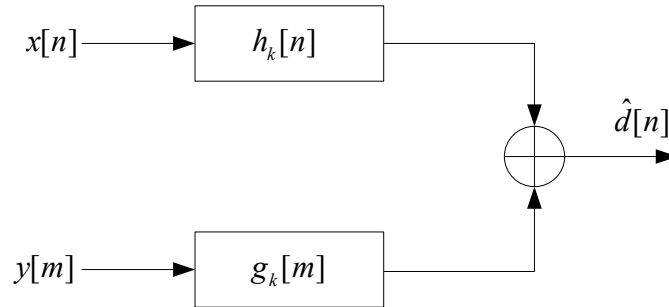
Bu kısımda farklı örnekleme hızlarındaki sensörlerden alınan bilginin birleştirilmesi için yöntemler tanıtılmaktadır. Bir sürekli zamanlı işaret, her biri farklı hızda örnekleme yapan ve farklı sinyal gürültü oranına (SNR) sahip sensörlerle ölçülsün. Sensörlerden alınan farklı hızda örneklenmiş ve farklı sinyal gürültü oranlarına sahip veriler en iyi biçimde birleştirilerek orjinal işaretin kestirilmesi amaçlanmaktadır. Şekil 5.1'de iki sensör için kestirim süreci gösterilmektedir. Sürekli zamanlı işaret $d(t)$, gürültülü gözlem dizileri üreten iki sensör tarafından gözlenmiştir. Toplamsal

gürültü dizileri sırasıyla $\eta_x[n]$ ve $\eta_y[m]$ ile gösterilmektedir. Farklı örnekleme hızlarını belirtmek için farklı ayrık zaman indisleri ‘ n ’ ve ‘ m ’ kullanılmaktadır. Bir sensör R kHz hızında örnekleme alırken diğeri R/L kHz örnekleme hızında çalışmaktadır. L çarpanı, iki sensörün veri hızı arasındaki orandır. Yüksek örnekleme hızı, düşük örnekleme hızının tamsayı katıdır.



Şekil 5.1 : Kestirim Süreci

Orjinal işaret $d(t)$ ’nin en iyi kestirimi $\hat{d}[n]$ her iki gözlem dizisinin en iyi çoklu hızlı filtreye uygulanmasıyla elde edilir. Kestirilen işaret yüksek hızda örnekleme yapan sensör çıkışındaki gözlem dizisiyle aynı hızdadır. En iyi çoklu hızlı filtre Wiener filtresi olabileceği gibi LMS filtresi de olabilir.



Şekil 5.2 : Çoklu Hızlı En iyi Filtrenin En Basit Şekli

Şekil 5.2’de gürültülü iki gözlem dizisinin giriş olarak kullanılması durumunda çoklu hızlı Wiener filtresinin en basit şekli verilmiştir. Gürültülü gözlem dizileri $x[n]$ ve

$y[m]$, zamanla değişen doğrusal filtrelere uygulanmaktadır. $h_k[n]$ filtresi $x[n]$ ile $g_k[m]$ filtresi ise $y[m]$ ile aynı örnekleme hızında çalışır. Filtre katsayıları ortalama karesel hatayı (MSE) minimize edecek şekilde seçilir ve filtre çıkışındaki işaretler toplanarak kestirilen işaret elde edilir. Filtre katsayıları zamanla periyodik olarak değişmektedir. Tablo 5.1’de çoklu hızlı filtredeki işlem gösterilmiştir ve her iki filtrenin birbirine göre konumu verilmiştir.

Tablo 5.1: Çoklu Hızlı Filtredeki İşlem

| Adım | Yüksek Hızlı Filtrenin Konumu | Düşük Hızlı Filtrenin Konumu | Gösterim |
|------|-------------------------------|------------------------------|----------|
| 0 | n_0 | m_0 | |
| 1 | $n_0 + 1$ | m_0 | |
| 2 | $n_0 + 2$ | m_0 | |
| 3 | $n_0 + 3$ | $m_0 + 1$ | |

Düşük hızlı gözlem dizisi ile yüksek hızlı gözlem dizisi kullanılarak istenen işaret yüksek hızda kestirilmek istenmektedir. Tablo 5.1’de görüldüğü gibi yüksek hızlı filtrenin derecesi (P) 4 iken düşük hızlı filtrenin derecesi (Q) 2’dir. Ayrıca Tablo 5.1’deki durum için örnekleme hızları arasındaki oranın (L) 3 olduğu

söylenmektedir. Yüksek hızlı ve düşük hızlı filtrelerin başlangıç noktaları sırasıyla n_0 ve m_0 olarak gösterilmektedir. Tablo 5.1'deki filtrelerin ilk konumu için $\hat{d}[n_0]$ kestirimi elde edilir. 0. adımda $\hat{d}[n_0]$, 1. adımda $\hat{d}[n_0 + 1]$ değerleri kestirilir. 1. adımda düşük hızlı filtre aynı konumunu korurken yüksek hızlı filtre bir birim sağa kayar. Tablo 5.1'de $\hat{d}[n_0 + 2]$ ve $\hat{d}[n_0 + 3]$ kestirim değerlerinin nasıl elde edileceği gösterilmiştir. 3. adımda görülmektedir ki her iki filtrede başlangıçtaki gibi aynı konumdadırlar. Kestirim süreci tüm veri boyunca bu şekilde devam eder. En iyi filtreler doğrusal zamanla periyodik olarak değişen (LPTV) yapıdadır. Filtre katsayıları L ile periyodiktir ve L sistem periyodikliğini gösterir. Filtrelerin birbirine göre L farklı şekilleri mevcuttur. Filtreler birbirlerine göre aldıkları her bir konum için farklı filtre katsayılarına sahiptirler. Çoklu hızlı filtrenin parametrelerinin toplam sayısı $L(P + Q)$ 'dur. İstenen işaretin kestirimi

$$\hat{d}[n] = \sum_{j=0}^{P-1} h_k[j]x[n-j] + \sum_{i=0}^{Q-1} g_k[i]y[m-i] \quad (5.1)$$

olarak elde edilir. Burada k indisi filtrelerin zamanla periyodik olarak değiştiğini ifade eder ve n indisi

$$n = Lm + k, \quad k \equiv n \pmod{L} \quad (5.2)$$

denklemleriyle gösterilir. L . adımdaki filtre katsayıları

$$\mathbf{h}_k = [h_k[0] \quad h_k[1] \quad \cdots \quad h_k[P-1]]^T, \quad (5.3)$$

ve

$$\mathbf{g}_k = [g_k[0] \quad g_k[1] \quad \cdots \quad g_k[Q-1]]^T, \quad (5.4)$$

olarak gösterilmiştir. Gözlem vektörleri

$$\mathbf{x}[n] = [x[0] \quad x[1] \quad \cdots \quad x[n-(P-1)]]^T, \quad (5.5)$$

ve

$$\mathbf{y}[m] = [y[0] \quad y[1] \quad \cdots \quad y[m-(Q-1)]]^T \quad (5.6)$$

olarak tanımlanır. (5.1) denklemini matris formunda yazarsak

$$\hat{d}[n] = \mathbf{h}_k^T \mathbf{x}[n] + \mathbf{g}_k^T \mathbf{y}[m]; \quad k \equiv n \pmod{L} \quad (5.7)$$

elde ederiz.

Çoklu hızlı en küçük kareler metodu kullanarak en iyi filtre katsayılarını elde etmek istenirse bilinen yada kestirilen istatistiksel özellikleri değil sadece ölçülen veri kullanılır. En küçük kareler yöntemi veriye bağlı yöntemdir [47]. İstenen veri vektörü

$$\mathbf{d} = [d[n_0] \quad d[n_0 + 1] \quad \cdots \quad d[n_0 + (N - 1)]]^T. \quad (5.8)$$

olarak tanımlanır. Burada, N , örneklerin sayısı ; n_0 , kestirimin başlangıç noktasıdır.

5.2 Çoklu Hızlı Gözlemler Kullanılarak En Küçük Ortalama Kareler (LMS) Filtrelemesi

Farklı hızdaki iki yada daha fazla gözlem dizisi için LMS uyarlamalı filtre yapısı açıklanacaktır. Kestirilen işaret ile gözlemlerin aynı hızda örneklenmediği durum için en iyi filtreleme problemi incelenmiştir [45,46,48,50]. En iyi doğrusal filtre zamanla periyodik olarak değişir.

5.2.1 En küçük ortalama kareler metodu

Widrow ve Hoff tarafından 1960'da gerçekleştirilen LMS algoritması, stokastik gradyant algoritması olarak da adlandırılır. LMS algoritması ve onun türevleri uyarlamalı filtrelemenin geniş bir alanını kapsar. Tek hızlı LMS algoritması uyarlamalı filtrelemeye basit bir çözüm getirir ve LMS algoritmasında matris tersi alma işlemi bulunmamaktadır. Bu sebeple LMS algoritması tüm uyarlamalı doğrusal filtre algoritmaları içinde en fazla kullanılan algoritmadır. LMS algoritması rekürsif bir algoritmadır. Filtre katsayı vektörü için başlangıç değeri seçilir ve katsayılar her n zaman adımında yani her yeni gözlemde güncellenir. Eğer veri geniş anlamda durağansa ve adım boyu parametresi uygun seçilirse filtre katsayıları Wiener-Hopf denklemleriyle tanımlanan en iyi katsayılara yakınsayacaktır. Eğer veri geniş anlamda durağan değilse ve zamanla değişiyorsa filtre katsayıları en iyi zamanla değişen filtreyi izlemeye eğilimlidir. Eğer her iterasyonda gradyant vektör tam olarak

ölçülebilseydi ve adım boyu parametresi uygun seçilseydi, hızlı iniş(steepest descent) algoritması kullanılarak hesaplanan katsayı vektörü gerçekten optimum Wiener çözümüne yakınsayacaktı. Gradyant vektörü şu şekilde tanımlanır [53,60]:

$$\nabla[n] = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w}[n] \quad (5.9)$$

Gradyant vektörü $\nabla[n]$ 'nin tam olarak hesaplanması için \mathbf{R} ilişki matrisi ve \mathbf{p} çapraz ilişki vektörünün önceden bilinmesi gerekmektedir. Ancak, gerçekte gradyant vektörü tam olarak bulmak mümkün değildir. $\nabla[n]$ gradyant vektörü kestirimini elde etmek için ilişki matrisi \mathbf{R} 'nin ve çapraz ilişki \mathbf{p} 'nin kestirimleri kullanılır. \mathbf{R} ve \mathbf{p} 'nin en basit kestirimleri giriş vektörünün ve istenen işaretin örneklerine dayalı ani kestirimleridir. Gradyant vektörünün kestirimi kullanılarak filtre katsayı vektörü \mathbf{w} 'nin güncellenmesi için (5.10) eşitliğiyle gösterilen yeni bir rekürsif ilişki elde edilir. $\hat{d}[n]$ kestirilen işareti $\mathbf{x}[n]$ gözlem vektörü yani giriş vektörü kullanılarak elde edilir. Kestirilen işaret $\hat{d}[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}[n]$ ile gösterilir. En küçük ortalama kareler metodu

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \mu e[n] \mathbf{x}[n] \quad (5.10)$$

$$e[n] = d[n] - \mathbf{w}^T[n] \mathbf{x}[n]. \quad (5.11)$$

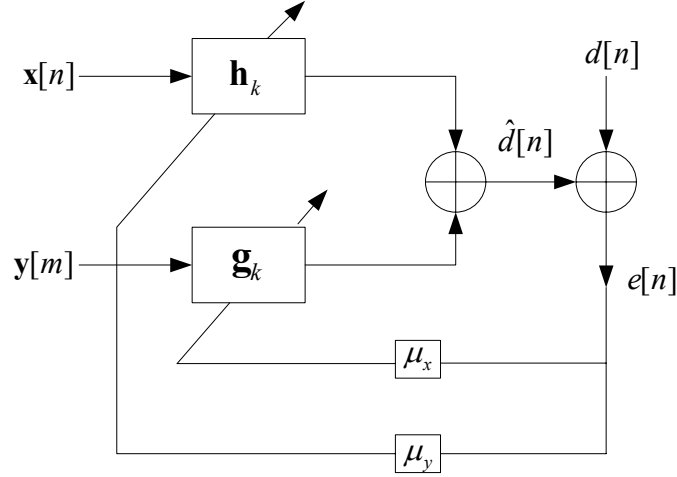
denklemleriyle ifade edilir. Burada μ adım boyu parametresidir. (5.11) eşitliği, katsayı vektörü $\mathbf{w}[n]$ 'in şimdiki kestirimine dayalı olarak kestirim hatasını ($e[n]$) tanımlar. LMS algoritması, $d[n]$ işareti ve $\mathbf{x}[n]$ giriş vektörünün deterministik olması durumunda da kullanılabilir. Eğer adım boyu değeri uygun seçilirse ağırlık katsayıları Wiener filtrenin çözümüne yakın bir çözüme yakınsayacaktır. Adım boyundaki koşul şu şekildedir:

$$0 < \mu < \left[2 / (P.R_x[0]) \right]. \quad (5.12)$$

Burada P filtre derecesini, $R_x[0]$ giriş işaretinin özilişki fonksiyonun sıfır zaman gecikmesindeki değeri yani sinyalin gücüdür.

5.2.2 Çoklu hızlı en küçük ortalama kareler metodu

Çoklu hızlı LMS kestirim algoritması farklı örnekleme hızında birçok giriş işaretinin olduğu durum için geliştirilmiştir. Bu sebeple çoklu hızlı durum için denklemler biraz daha karmaşıktır. Şekil 5.3’de görüldüğü gibi iki giriş işareti mevcuttur ve bu işaretler $d[n]$ arzulanan işaretini kestirmek için birlikte kullanılır.



Şekil 5.3 : Çoklu Hızlı LMS Algoritmasının Basitleştirilmiş Diyagramı

x girişi ile kestirim aynı hızdadır. y girişinin hızı, x girişinin hızının $1/L$ ’sidir. \mathbf{h}_k ve \mathbf{g}_k terimleri sırasıyla yüksek hızlı ve düşük hızlı filtrelere ait katsayı vektörlerini ifade eder. m düşük hızlı işaretin indisini gösterir. $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$ için $n = Lm + k$ yazılır. Yüksek hızlı gözlem vektörü ile düşük hızlı gözlem vektörü sırasıyla

$$\mathbf{x}[n] = [x[n] \quad x[n-1] \quad \dots \quad x[n-(P-1)]]^T \quad (5.13)$$

$$\mathbf{y}[m] = [y[m] \quad y[m-1] \quad \dots \quad y[m-(Q-1)]]^T \quad (5.14)$$

şeklinde ifade edilir. Burada P ve Q , \mathbf{h}_k ve \mathbf{g}_k ile gösterilen iki FIR filtrenin derecelerini gösterir. Kestirim de şu şekli alır:

$$\hat{d}[n] = \mathbf{h}_k^T \mathbf{x}[n] + \mathbf{g}_k^T \mathbf{y}[m]; \quad n = Lm + k. \quad (5.15)$$

Filtre katsayıları periyodiktir. Çoklu hızlı LMS algoritmasında katsayı vektörleri zamanla güncellenir. Herhangi bir n anındaki katsayı vektörleri, $\mathbf{h}_k[m]$ ve $\mathbf{g}_k[m]$ ile gösterilir ve kestirim

$$\hat{d}[n] = \mathbf{h}_k^T[m]\mathbf{x}[n] + \mathbf{g}_k^T[m]\mathbf{y}[m]; \quad k \equiv n(\text{mod } L) \quad (5.16)$$

olarak yazılır. Hata $e[n]$, $d[n] - \hat{d}[n]$ 'e eşittir. μ_x ve μ_y adım boyu parametreleri olmak üzere çoklu hızlı LMS algoritmasının filtre katsayılarının güncellendiği kısım şu şekildedir:

$$\mathbf{h}_k[m+1] = \mathbf{h}_k[m] + \mu_x e[n] \mathbf{x}[n] \quad (5.17)$$

$$\mathbf{g}_k[m+1] = \mathbf{g}_k[m] + \mu_y e[n] \mathbf{y}[m]. \quad (5.18)$$

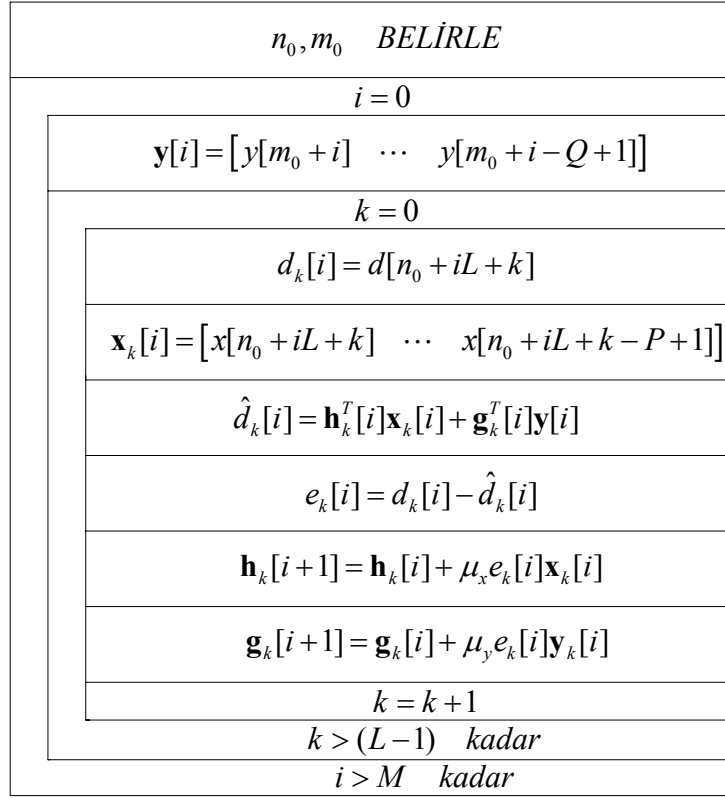
Bütün algoritma adım adım Şekil 5.4'de verilmiştir. Zamanla değişen filtrelerin periyodu L olup yüksek hızlı filtre için PL kadar katsayı ve düşük hızlı filtre için QL kadar katsayı gereklidir. Yüksek hızlı filtrenin bütün katsayıları, sütunları her $k = 0, 1, \dots, L-1$ adımdaki filtreyi gösteren $P \times L$ boyutunda

$$\mathbf{H}[i] = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{h}_0[i] & \mathbf{h}_1[i] & \cdots & \mathbf{h}_{L-1}[i] \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

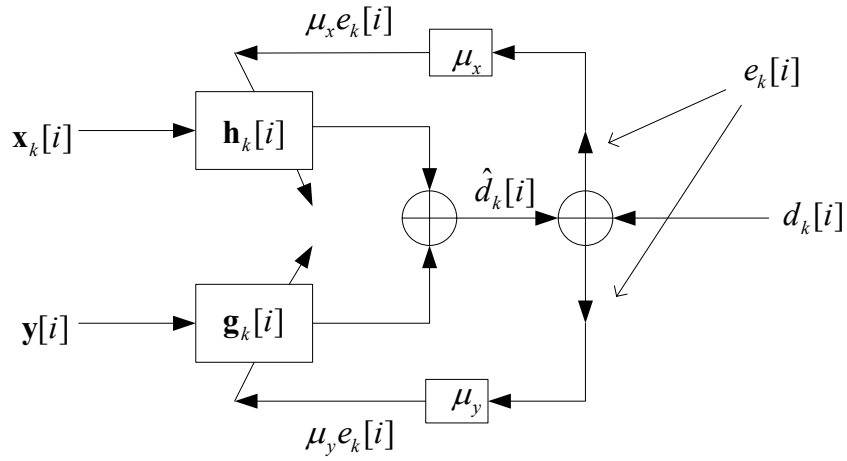
matrisyle gösterilir. Şekil 5.4'e bakılırsa kestirilen dizinin her bir değeri için $\mathbf{H}[i]$ 'nin sadece bir sütunu güncellenir. Kestirime gözlem dizilerinin n_0 ve m_0 başlangıç noktaları seçilerek başlanır. $\mathbf{H}[i]$ 'nin tüm L sütunu blok blok güncellenir. Orjinal dizinin her L değerinde belirli bir \mathbf{h}_k sütunu güncellenir. Benzer işlem düşük hızlı katsayılara da uygulanır. Düşük hızlı filtrenin katsayılarının $Q \times L$ boyutunda

$$\mathbf{G}[i] = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{g}_0[i] & \mathbf{g}_1[i] & \cdots & \mathbf{g}_{L-1}[i] \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

matrisiyle gösterilir. Orjinal dizinin her L noktasında belirli bir \mathbf{g}_k sütünü güncellenir.



Şekil 5.4 : Çoklu Hızlı LMS Algoritmasının Basamakları



Şekil 5.5 : Çoklu Hızlı LMS Algoritmasının Diyagramı

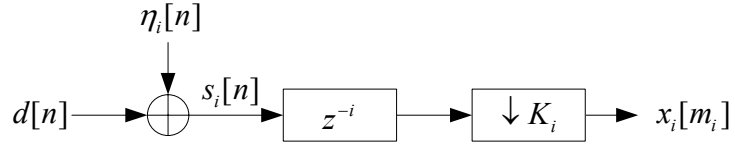
6. UYGULAMALAR

Bu bölümde Therrien ve öğrencileri tarafından çoklu hızlı Wiener filtreleme ve çoklu hızlı LMS filtreleme konusunda yapılan çalışmalar incelenecektir [46,48,50,51]. Yapılan çalışmalar düşük çözünürlüklü işaretlerden yüksek çözünürlüklü bir işaretin elde edilmesi ve gürültü giderme üzerinedir.

6.1 Çoklu Hızlı Wiener Filtresiyle İlgili Uygulamalar

6.1.1 Orjinal işaretin yeniden elde edilmesi

$d[n]$ ayrık rasgele sürecinin kestirimi problemini ele alalım. $d[n]$ doğrudan gözlenmemektedir ve $\{x_0[m_0], x_1[m_1], \dots, x_{M-1}[m_{M-1}]\}$ ile gösterilen M gözlem işareti tarafından gözlenmektedir. Gözlem işaretleri, $d[n]$ rasgele sürecinin çeşitli bozunum ve girişime uğramış şekilleridir. Probleme ait gözlem modeli Şekil 6.1'de verilmiştir.



Şekil 6.1 : $x_i[m_i]$ Gözlem İşaretlerinin $d[n]$ İşaretinden Üretildiği Gözlem Modeli

Şekil 6.1'de görüldüğü gibi $\eta_i[n]$ bağımsız toplamsal gürültü istenen işaret $d[n]$ 'e eklenir. Elde edilen işaret sistem seviyesinde ötelendikten sonra alt örnekleterek $x_i[m_i]$ gözlem işaretleri elde edilir. Gözlem işaretleri $d[n]$ işaretine göre farklı hızdadır. Eğer istenen işaret $d[n]$ ile $x_i[m_i]$ gözlemleri birleşik geniş anlamda durağan ise en iyi kestirimi sağlayan doğrusal filtreler zamanla periyodik olarak değişir [25]. Kestirim

$$\hat{d}_k[n] = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)T}[n] \mathbf{h}_i^{(k)}; \quad k \equiv n(\text{mod } K) \quad (6.1)$$

olarak elde edilir. Burada K sistem periyodudur. $\mathbf{h}_i^{(k)}$, P_i dereceli zamanla değişen filtrenin katsayılarını içerir. Bu problemin analiz kısmında gözlem işaretlerinin bölüm 3.3.1’de açıklanan $d[n]$ ’in maksimum-örnek seyreltilmiş işaret kümesinden (maximally-decimated signal set) oluştuğu düşünülmektedir ve $K_i = K$ olarak alınmaktadır. Şekil 6.1’e göre gözlem işaretleri

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)}[n] = \mathbf{D}_K^{((k-i)_K)} \tilde{\mathbf{s}}_i[n] \quad (6.2)$$

olarak elde edilir. $\tilde{\mathbf{s}}_i[n]$,

$$\tilde{\mathbf{s}}_i[n] = [s_i[n] \quad s_i[n-1] \quad \cdots \quad s_i[n - P_i K_i + 1]]^T \quad (6.3)$$

olarak tanımlanır. $\mathbf{D}_K^{((k-i)_K)}$ matrisi her bir gözlem vektörünün elde edilmesi için gerekli olan örneklerin $\tilde{\mathbf{s}}_i[n]$ vektöründen alınmasını sağlar. Ortalama karesel hatayı minimize eden en iyi filtre katsayıları

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{00}^{(k)} & \tilde{\mathbf{R}}_{01}^{(k)} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{0K-1}^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{01}^{(k)*T} & \tilde{\mathbf{R}}_{11}^{(k)} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{1K-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{R}}_{0K-1}^{(k)*T} & \tilde{\mathbf{R}}_{1K-1}^{(k)*T} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{K-1K-1}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0^{(k)*} \\ \mathbf{h}_1^{(k)*} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{K-1}^{(k)*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{d0}^{(k)*} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{d1}^{(k)*} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{r}}_{dK-1}^{(k)*} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq k \leq K-1 \quad (6.4)$$

olarak gösterilen Wiener-Hopf denklemleriyle elde edilir. TAMSE (Time Average Mean-Square Error- Zaman Ortalamalı Ortalama-Karesel Hata)

$$\sigma_\varepsilon^2 = R_d[0] - \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} \tilde{\mathbf{r}}_{dj}^{(k)T} \mathbf{h}_j^{(k)*} \quad (6.5)$$

olarak yazılır ve σ_k^2 ’nin $0 \leq k \leq K-1$ aralığındaki aritmetik ortalamasıdır. Wiener-Hopf denkleminde ve TAMSE ifadesinde kullanılan ilişki terimleri

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ij} = \mathcal{E} \{ \tilde{\mathbf{s}}_i[n] \tilde{\mathbf{s}}_j^{*T}[n] \}, \quad (6.6)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{di} = \mathcal{E} \{ d[n] \tilde{\mathbf{s}}_i^{*T}[n] \}, \quad (6.7)$$

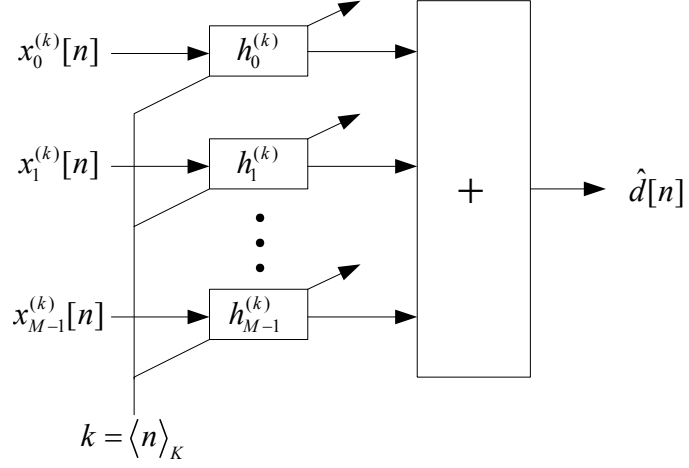
$$R_d[0] = \mathcal{E} \{ d[n] d^*[n] \}, \quad (6.8)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^{(k)} = \mathbf{D}_K^{((k-i)_K)} \tilde{\mathbf{R}}_{ij} \mathbf{D}_K^{((k-j)_K)*T} \quad (6.9)$$

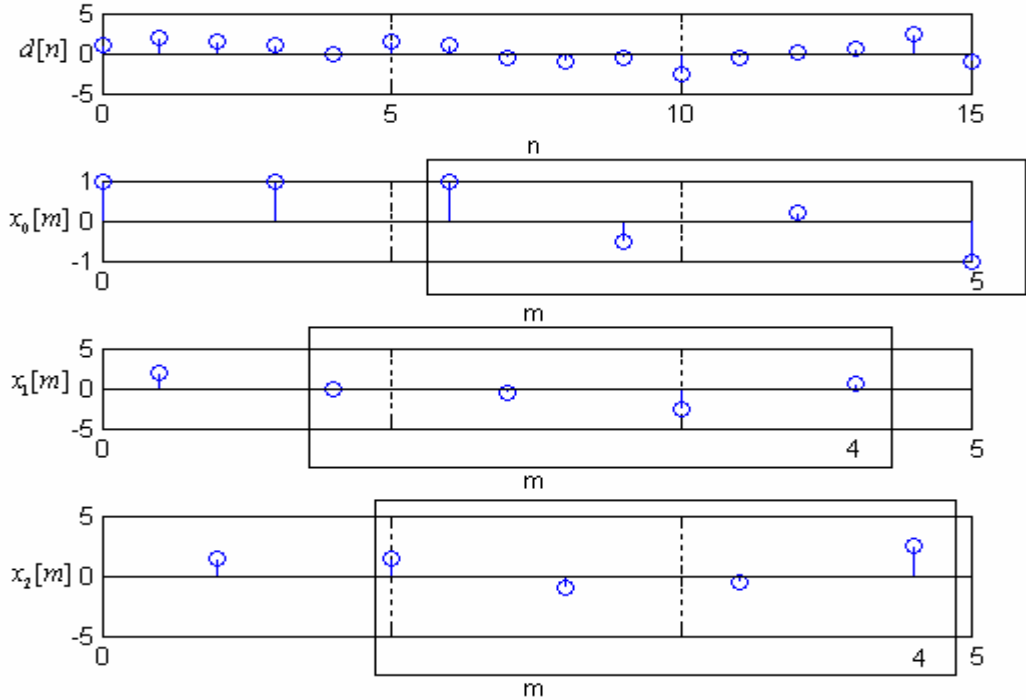
ve

$$\tilde{\mathbf{r}}_{di}^{(k)} = \mathbf{D}_K^{((k-i)_K)} \tilde{\mathbf{r}}_{di} \quad (6.10)$$

olarak belirtilir.

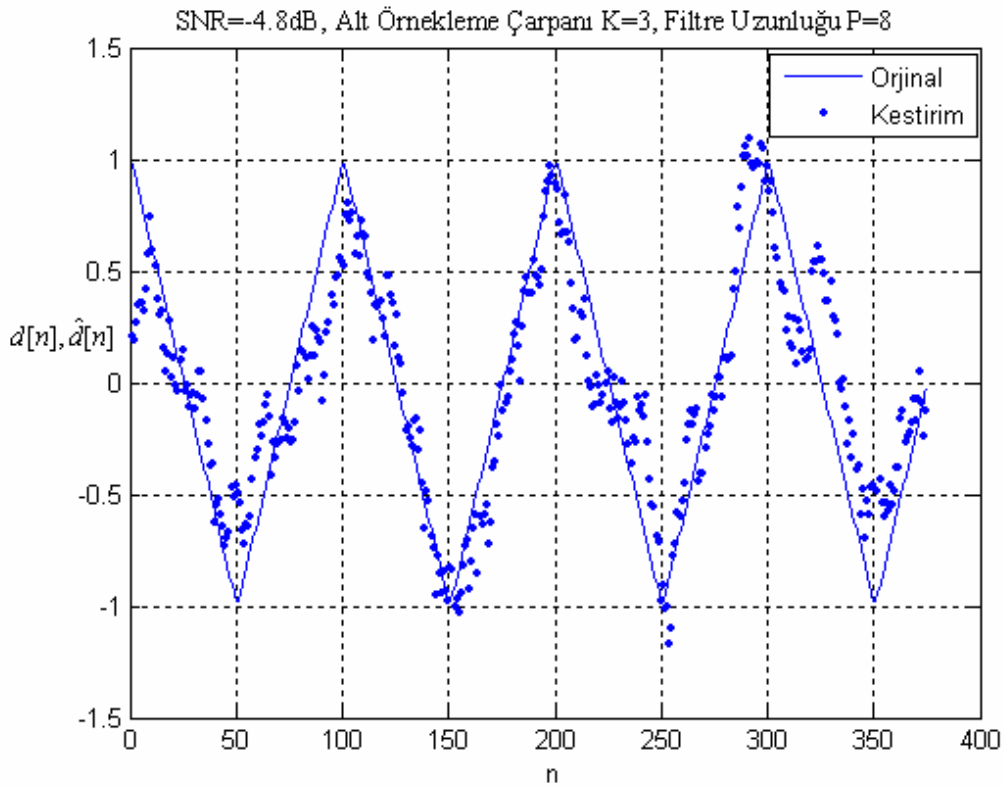


Şekil 6.2 : Orjinal İşaretin Çoklu Hızlı Wiener Filtresiyle Yeniden Elde Edilmesi



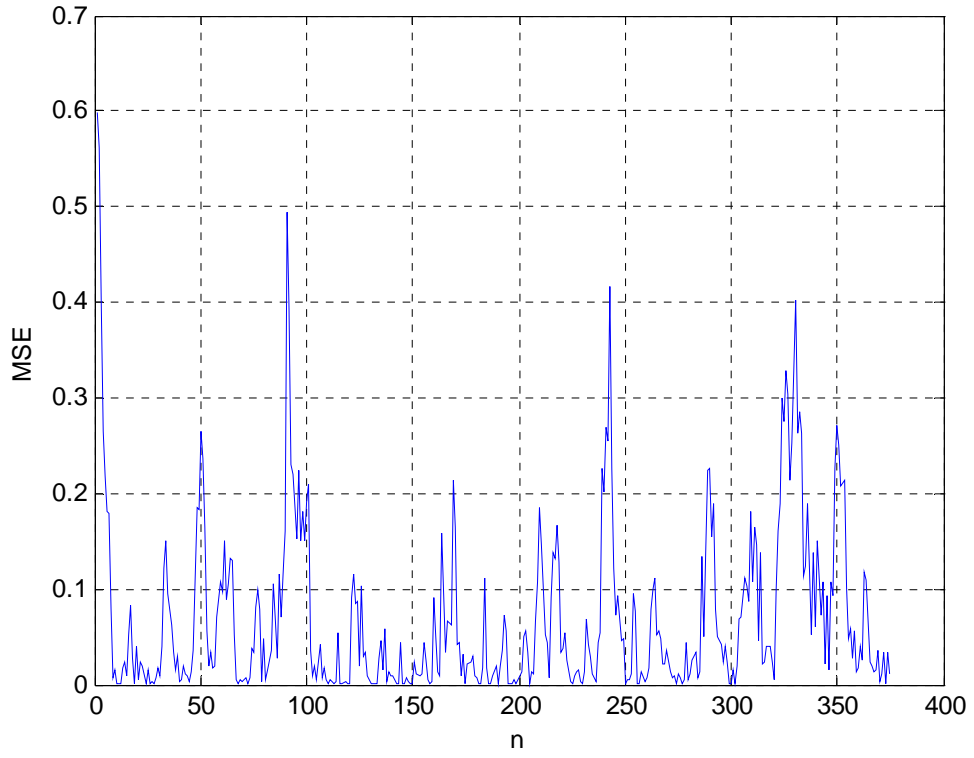
Şekil 6.3 : İşaretin $P = 3$, $K = 3$ olan FIR Wiener Filtre Kullanılarak Gözlem İşaretlerinden Elde Edilmesi ($n = 15$, $k = 0$)

(6.4)'deki çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemiyle bulunan filtre katsayıları istenen işaretin kestiriminde kullanılır. Şekil 6.2'de çoklu hızlı Wiener filtresi kullanılarak orjinal işaretin yeniden elde edilmesini sağlayan blok diyagram verilmektedir. Şekil 6.3'de istenen işaretin $n = 15$ anındaki değerini kestirmek için gözlem işaretlerine filtrelerin nasıl uygulanacağı çerçeve içine alınarak gösterilmiş ve orjinal işaretin filtre derecesi $P=3$, alt örnekleme çarpanı $K=3$ olan FIR Wiener filtre kullanılarak gözlem işaretlerinden yeniden elde edilmesi resmedilmiştir. İstenen işaret yani orjinal işaret $d[n]$ için Şekil 6.4'de verilen üçgen işaretini ele alınsın.

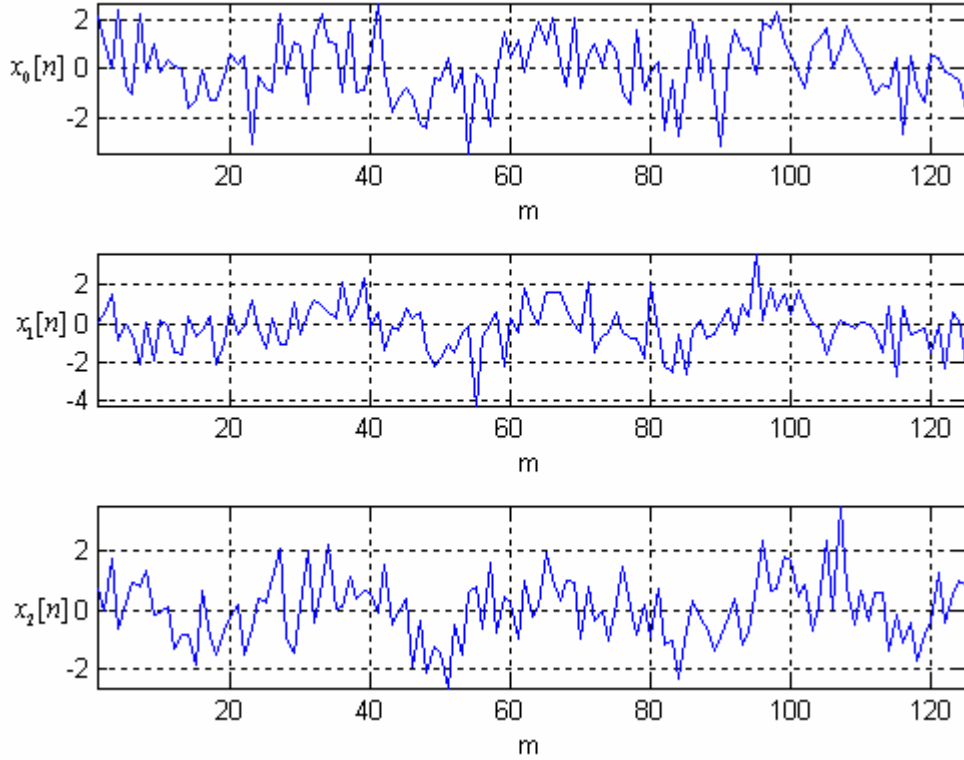


Şekil 6.4 : En İyi Doğrusal Filtreleme Kullanılarak Orjinal İşaretin Yeniden Elde Edilmesi(SNR=-4.8dB, Alt Örnekleme Çarpanı K=3, Filtre Uzunluğu P=8)

$d[n]$ işaretinin maksimum-örnek seyreltilmiş işaret kümesinden (maximally-decimated signal set) gözlem işaretleri üretilir. (6.6)'dan (6.10)'a kadar tanımlanan ilişki terimleri hesaplanır. Wiener-Hopf denklemleri kullanılarak filtre katsayıları bulunur. Filtre katsayılarıyla orjinal işaret yeniden elde edilmeye çalışılır. Şekil 6.4'de '.' ile gösterilen işaret orjinal işaretin kestirimi olan $\hat{d}[n]$ işaretidir. Şekil 6.5'de ortalama karesel hata (MSE) gösterilmiştir.



Şekil 6.5 : Şekil 6.4'e ait Ortalama Karesel Hata(MSE)

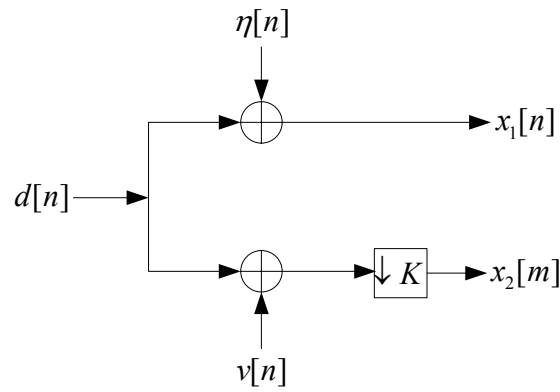


Şekil 6.6 : Alt Örneklenmiş Gürültülü Gözlem İşaretleri($K = 3$)

Elde edilen üç gözlem dizisi ise Şekil 6.6’da gösterilmiştir. Gözlem dizileri, orjinal işarete $\eta_i[n]$ bağımsız toplamsal beyaz gauss gürültünün (AWGN) ekleme, öteleme ve $K = 3$ çarpanıyla alt örnekleme işlemlerinin ardarda uygulanmasıyla elde edilir. Bu örnekte işaret-gürültü oranı(SNR) -4.8 dB ve filtre derecesi $P = 8$ olarak alınmaktadır. SNR, işaretin gücünün gürültü varyansına oranı olarak tanımlanır. Böylece düşük çözünürlüklü gözlem işaretleri kullanılarak yüksek çözünürlüklü üçgen işareti yeniden elde edilmektedir.

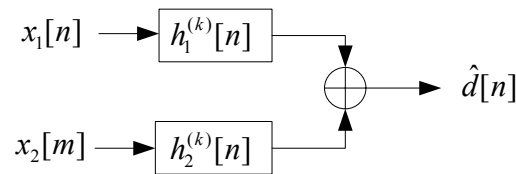
6.1.2 Çoklu hızlı kestirim

Çoklu hızlı işaret işlemedeki problemlerden biri farklı sensörlerden yada kaynaklardan alınan gözlemlerin kullanılmasıyla istenen işaretin en iyi kestiriminin elde edilmesidir. Şekil 6.7’deki gözlem modelini ele alalım.



Şekil 6.7 : İki Kanallı Gözlem Modeli

Bu modeldeki iki gözlem işareti farklı örnekleme frekansına sahiptir. $d[n]$ ve $x_1[n]$ işaretleri yüksek hızda örneklenirken $x_2[m]$ işareti daha düşük hızda örneklenmektedir. Şekil 6.8’de iki gözlem işareti için çoklu hızlı Wiener filtresinin blok diyagramı verilmiştir.



Şekil 6.8 : İki Kanallı Çoklu Hızlı Wiener Filtresinin Blok Diyagramı

$d[n]$ sıfır ortalamalı ve WSS bir süreç olsun. $x_1[n]$ ve $x_2[m]$ gözlem işaretleri kullanılarak iki kanallı çoklu hızlı en iyi filtreyle $d[n]$ istenen işareti kestirilmek istenmektedir. Kestirim $\hat{d}[n]$, orjinal işaretle aynı hızdadır. (4.51) ile tanımlanan $\mathbf{h}_1^{(k)}$ ve $\mathbf{h}_2^{(k)}$ filtre çıkışları toplanarak istenen işaretin kestirimi elde edilir. Gözlem vektörleri sistem hızında

$$\tilde{\mathbf{x}}_1^{(k)}[n] = \tilde{\mathbf{x}}_1[n], \quad \tilde{\mathbf{x}}_2^{(k)}[n] = \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)} \tilde{\mathbf{x}}_2[n] \quad (6.11)$$

olarak ifade edilir. Burada $\tilde{\mathbf{x}}_1[n] = [x_1[n] \ x_1[n-1] \ \dots \ x_1[n-P_1+1]]^T$ ve $\tilde{\mathbf{x}}_2[n] = [x_2[n] \ x_2[n-1] \ \dots \ x_2[n-P_2K+1]]^T$ olarak tanımlanır. P_1 ve P_2 filtre derecelerini göstermektedir. $\hat{d}[n]$, gözlem vektörlerinin doğrusal zamanla periyodik olarak değişen filtreye uygulanması sonucunda elde edilir. (4.52) denklemi kullanılarak kestirim

$$\hat{d}[n] = \left[\tilde{\mathbf{x}}_1^{(k)T} \mid \tilde{\mathbf{x}}_2^{(k)T} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(k)} \\ \mathbf{h}_2^{(k)} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}_1^{(k)T} \mathbf{h}_1^{(k)} + \tilde{\mathbf{x}}_2^{(k)T} \mathbf{h}_2^{(k)} \quad (6.12)$$

şeklinde yazılır. En iyi filtrenin diklik prensibini sağladığı yada hatanın gözlem vektörlerine dik olduğu kullanılarak $M=2$ için (4.57) denklemi tekrar yazılır. $M=2$ için çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemi

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{11}^{(k)} & \tilde{\mathbf{R}}_{12}^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{12}^{(k)*T} & \tilde{\mathbf{R}}_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(k)*} \\ \mathbf{h}_2^{(k)*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{d1}^{(k)*} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{d2}^{(k)*} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

olarak yazılır. $\tilde{\mathbf{R}}_{11}^{(k)} = \tilde{\mathbf{R}}_{11} = \mathbf{R}_{11}^*$, $\tilde{\mathbf{r}}_{d1}^{(k)} = \tilde{\mathbf{r}}_{d1}$, $\tilde{\mathbf{R}}_{22}^{(k)} = \mathbf{R}_{22}^{(k)*}$ ve $\tilde{\mathbf{R}}_{12}^{(k)} = \mathbf{R}_{12}^{(k)*}$ kullanılırsa (6.13) denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{R}_{12}^{(k)*T} & \mathbf{R}_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^{(k)} \\ \mathbf{h}_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_{d1} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{d2}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

olarak yazılır. $d[n]$ 'in kestiriminde kullanılan Şekil 6.8'deki filtreler doğrusal zamanla periyodik olarak değişirler. (6.14) denklemindeki $\mathbf{h}_1^{(k)}$ ve $\mathbf{h}_2^{(k)}$ birleşiminden oluşan vektör $P_1 + P_2$ uzunluğundadır. Kestirim, periyodu alt örnekleme çarpanı (K)

olan LPTV iki filtre çıkışının toplanmasıyla elde edilir. En iyi filtre Şekil 6.8’de gösterilmiştir. [45]’de çoklu hızlı Wiener filtrenin diğer şekli verilmiştir. $x_1[n]$ ve $x_2[m]$ gözlemleri kullanılarak minimum ortalama karesel hata (MMSE)’yi sağlayan kestirim hesaplanır. Minimum hata varyansı yada minimum ortalama karesel hata (4.59) ve (4.60) ile gösterilmiştir. Filtrenin LPTV özelliğinden dolayı minimum ortalama karesel hata (σ_k^2), k ’nın bir fonksiyonudur. $M = 2$ için minimum ortalama karesel hata

$$\sigma_k^2 = R_d[0] - \tilde{\mathbf{r}}_{d1}^T \mathbf{h}_1^{(k)*} - \tilde{\mathbf{r}}_{d2}^{(k)T} \mathbf{h}_2^{(k)*} = R_d[0] - \mathbf{h}_1^{(k)*T} \tilde{\mathbf{r}}_{d1} - \mathbf{h}_2^{(k)*T} \tilde{\mathbf{r}}_{d2} \quad (6.15)$$

olarak tanımlanır. Tek hızlı Wiener filtre ile çoklu hızlı Wiener arasında MMSE açısından bir ilişki vardır. Çoklu hızlı Wiener filtrenin MMSE değeri σ_k^2 ile tek hızlı Wiener filtrenin MMSE değeri σ_0^2 ’nin karşılaştırılması gerekir. σ_0^2 , sadece yüksek örnekleme hızındaki $x[n]$ gözlemini kullanan tek hızlı Wiener filtrenin MMSE değeridir. σ_k^2 değeri her zaman σ_0^2 ’den küçüktür. (6.14) denklemindeki matris

$$\mathbf{R}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{R}_{12}^{(k)*T} & \mathbf{R}_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

olarak gösterilirse (6.16)’daki kare matrisin tersi

$$\mathbf{R}^{(k)-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{11}^{-1} + \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{*T} & -\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} \\ \hline -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{*T} & \mathbf{B}^{-1} \end{array} \right] \quad (6.17)$$

olarak bulunur [53]. Burada $\mathbf{A} = \mathbf{R}_{11}^{-1}\mathbf{R}_{12}^{(k)}$ ve $\mathbf{B} = \mathbf{R}_{22}^{(k)} - \mathbf{R}_{12}^{(k)*T}\mathbf{R}_{11}^{-1}\mathbf{R}_{12}^{(k)}$ olarak tanımlanır. (6.17) denklemini kullanılarak filtre katsayıları $\mathbf{h}_1^{(k)}$ ve $\mathbf{h}_2^{(k)}$,

$$\mathbf{h}_1^{(k)} = \mathbf{R}_{11}^{-1}\tilde{\mathbf{r}}_{d1} - \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}(\tilde{\mathbf{r}}_{d2}^{(k)} - \mathbf{A}^{*T}\tilde{\mathbf{r}}_{d1}), \quad (6.18)$$

$$\mathbf{h}_2^{(k)} = \mathbf{B}^{-1}(\tilde{\mathbf{r}}_{d2}^{(k)} - \mathbf{A}^{*T}\tilde{\mathbf{r}}_{d1}) \quad (6.19)$$

olarak bulunur. $\mathbf{h}_1^{(k)}$ ve $\mathbf{h}_2^{(k)}$ ’nin bulunabilmesi için \mathbf{B} ’nin tersi alınabilmelidir. $\mathbf{R}^{(k)}$ tersi alınabilir ve pozitif tanımlı olduğu için \mathbf{B} de tersi alınabilir ve pozitif

tanımlıdır. Tek hızlı Wiener-Hopf denkleminin çözümü $\mathbf{h}_0 = \mathbf{R}_{11}^{-1}\tilde{\mathbf{r}}_{d1}$ olup $\mathbf{h}_1^{(k)} = \mathbf{h}_0 - \mathbf{A}\mathbf{h}_2^{(k)}$ olarak elde edilir. MMSE değerlerine bakarsak çoklu hızlı kestirimin daha iyi sonuç verdiği görülür. (6.15) denklemindeki çoklu hızlı Wiener filtresine ait MMSE değeri, tek hızlı Wiener filtrenin MMSE değeri $\sigma_0^2 = R_d[0] - \mathbf{h}_0^{(k)*T}\tilde{\mathbf{r}}_{d1}$ olmak üzere

$$\sigma_k^2 = \sigma_0^2 - \mathbf{h}_2^{(k)*T} \left(\tilde{\mathbf{r}}_{d2}^{(k)} - \mathbf{A}^{*T}\tilde{\mathbf{r}}_{d1} \right) \quad (6.20)$$

olarak bulunur. (6.19) kullanılarak (6.20) denkleminin sağ tarafındaki ikinci terimin her zaman pozitif olduğu bulunur [45]. Her iki MMSE değeri de pozitif olduğundan çoklu hızlı Wiener filtrenin MSE değerinin her zaman tek hızlı Wiener filtrenin MSE değerinden büyük olduğu ($\sigma_k^2 < \sigma_0^2$) bulunur. Sıfır ortalamalı ve WSS $d[n]$ işareti Şekil 6.7'de gösterildiği gibi iki ayrı kanal üzerinden farklı örnekleme hızlarında gözlemleniyor. İkinci kanalda $K = 2$ çarpanıyla alt örnekleme yapılmaktadır. Her iki gözlem işareti, $d[n]$ işaretinden bağımsız ve varyansı bilinen gürültünün istenen işarete eklenmesiyle elde edilir. İki gözlem dizisi sistem seviyesinde $x_1[n] = d[n] + \eta[n]$ ve $x_2[n] = d[n] + \nu[n]$ olarak tanımlanır. $\eta[n]$ ve $\nu[n]$ bağımsız beyaz gürültü dizilerinin varyansı sırasıyla σ_η^2 ve σ_ν^2 olarak alınmaktadır. (6.14) ile gösterilen çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemindeki ilişki matrisleri $\eta[n]$ ve $\nu[n]$ gürültü dizileri kullanılarak basitleştirilebilir. $\tilde{\mathbf{x}}_1^{(k)}[n]$ gözlem dizisinin özilişki matrisi

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{11} = \mathbf{R}_{11}^* &= \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_1[n] \tilde{\mathbf{x}}_1^{*T}[n] \right\} = \mathcal{E} \left\{ (\tilde{\mathbf{d}}[n] + \tilde{\boldsymbol{\eta}}[n]) (\tilde{\mathbf{d}}[n] + \tilde{\boldsymbol{\eta}}[n])^{*T} \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{d}}[n] \tilde{\mathbf{d}}^{*T}[n] \right\} + \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{d}}[n] \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{*T}[n] \right\} + \mathcal{E} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\eta}}[n] \tilde{\mathbf{d}}^{*T}[n] \right\} + \mathcal{E} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\eta}}[n] \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{*T}[n] \right\} \quad (6.21) \\ &= \tilde{\mathbf{R}}_{dd}^{(P_1, P_1)} + \sigma_\eta^2 \mathbf{I}_{P_1} \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve $\tilde{\mathbf{R}}_{dd} = \mathbf{R}_{dd}^*$ kullanılarak (6.21) denklemi $\mathbf{R}_{11} = \mathbf{R}_{dd}^{(P_1, P_1)} + \sigma_\eta^2 \mathbf{I}_{P_1}$ olarak yazılır. $\mathbf{R}_{dd}^{(P_1, P_1)}$ ilişki matrisi, Toeplitz olup P_1 satır ve P_1 sütuna sahiptir. $\tilde{\mathbf{x}}_2^{(k)}[n]$ gözlem dizisinin özilişki matrisi

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{R}}_{22}^{(k)} &= \mathbf{R}_{22}^{(k)*} = \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_2^{(k)}[n] \tilde{\mathbf{x}}_2^{(k)*T}[n] \right\} = \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)} \tilde{\mathbf{R}}_{22} \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)T} = \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)} \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_2[n] \tilde{\mathbf{x}}_2^{*T}[n] \right\} \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)T} \\
&= \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)} \mathcal{E} \left\{ (\tilde{\mathbf{d}}[n] + \tilde{\mathbf{v}}[n]) (\tilde{\mathbf{d}}[n] + \tilde{\mathbf{v}}[n])^{*T} \right\} \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)T} \\
&= \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)} \left(\tilde{\mathbf{R}}_{dd}^{(KP_2, KP_2)} + \sigma_v^2 \mathbf{I}_{KP_2} \right) \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)T}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

olarak elde edilir. $K = 2$ için $\tilde{\mathbf{D}}_K^{(0)} = \mathbf{D}_K^{(1)}$ 'dir. $\mathbf{D}_K^{(1)} \cdot \mathbf{D}_K^{(1)T}$ çarpımı matrisin boyutunu yarıya böler. $\mathbf{D}_K^{(1)} \cdot \mathbf{D}_K^{(1)T}$ yada $\mathbf{D}_K^{(0)} \cdot \mathbf{D}_K^{(0)T}$ kullanılması arasında farklılık yoktur. Böylece (6.22) denklemi

$$\mathbf{R}_{22}^{(k)} = \mathbf{R}_{22} = \mathbf{D}_K^{(1)} \left(\mathbf{R}_{dd}^{(KP_2, KP_2)} + \sigma_v^2 \mathbf{I}_{KP_2} \right) \mathbf{D}_K^{(1)T} \tag{6.23}$$

olarak yazılabilir. $\tilde{\mathbf{x}}_1^{(k)}[n]$ ve $\tilde{\mathbf{x}}_2^{(k)}[n]$ 'in ilişki matrisi

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{R}}_{12}^{(k)} &= \mathbf{R}_{12}^{(k)*} = \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_1^{(k)}[n] \tilde{\mathbf{x}}_2^{(k)*T}[n] \right\} = \tilde{\mathbf{R}}_{12} \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)T} = \mathcal{E} \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_1[n] \tilde{\mathbf{x}}_2^{*T}[n] \right\} \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)T} \\
&= \mathcal{E} \left\{ (\tilde{\mathbf{d}}[n] + \tilde{\mathbf{u}}[n]) (\tilde{\mathbf{d}}[n] + \tilde{\mathbf{v}}[n])^{*T} \right\} \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)T} \\
&= \tilde{\mathbf{R}}_{dd}^{(P_1, KP_2)} \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)T}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

olarak elde edilir. (6.24) denklemi

$$\mathbf{R}_{12}^{(k)} = \mathbf{R}_{dd}^{(P_1, KP_2)} \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)T} \tag{6.25}$$

olarak yazılabilir. (6.14) denkleminin sol tarafında yer alan çapraz ilişki matrisleri

$$\tilde{\mathbf{r}}_{d1} = \mathcal{E} \left\{ d[n] \tilde{\mathbf{x}}_1^*[n] \right\} = \mathcal{E} \left\{ d[n] (\tilde{\mathbf{d}}[n] + \tilde{\mathbf{u}}[n])^* \right\} = \tilde{\mathbf{r}}_{dd}^{(P_1, 1)} \tag{6.26}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{r}}_{d2}^{(k)} &= \mathcal{E} \left\{ d[n] \tilde{\mathbf{x}}_2^{(k)*}[n] \right\} = \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)} \mathcal{E} \left\{ d[n] (\tilde{\mathbf{d}}[n] + \tilde{\mathbf{v}}[n])^* \right\} \\
&= \tilde{\mathbf{D}}_K^{(k)} \tilde{\mathbf{r}}_{dd}^{(KP_2, 1)}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

olarak elde edilir. Çoklu hızlı Wiener-Hopf denkleminde (6.21), (6.23), (6.25), (6.26) ve (6.27) matrisleri kullanılarak $\mathbf{h}_1^{(k)}$ ve $\mathbf{h}_2^{(k)}$ en iyi filtre katsayıları elde edilir. İlk olarak transfer fonksiyonu $1/(1-1.3z^{-1}+0.4z^{-2})$ şeklinde olan 2. dereceden AR(Özbağlanımlı) modeli ele alalım. 2. dereceden AR model girişine varyansı 1,

ortalaması 0 olan beyaz gürültü işareti uygulansın. AR model çıkışında ise $d[n]$ işareti elde edilir. Tablo 6.1, Tablo 6.2, Tablo 6.3 , Tablo 6.4 ve Tablo 6.5’de farklı gürültü varyansları için çoklu hızlı Wiener filtre ile tek hızlı Wiener filtre arasındaki ortalama karesel hata ve filtre katsayılarının 2. dereceden normu karşılaştırılmaktadır.

$\mathbf{h}_1^{(k)}$ ve $\mathbf{h}_2^{(k)}$ filtre vektörleri için filtre katsayılarının 2.dereceden normu ($\|\mathbf{h}\|_2$) filtre dereceleri $P_1 = 6$ ve $P_2 = 4$ olduğu durum için hesaplanmıştır. $\sigma_\eta^2 = \sigma_v^2 = 1$ olduğu durumda $\mathbf{h}_1^{(1)}$, $\mathbf{h}_2^{(1)}$ ’den daha yüksek ağırlığa sahiptir ve $k = 0$ durumunda her iki filtre benzer ağırlığa sahiptir.

Tablo 6.1: $\sigma_v^2 = \sigma_\eta^2 = 1$ için MSE ve Filtre Katsayılarının Normunun Karşılaştırılması

| | MSE | $\ \mathbf{h}_1^{(k)}\ _2$ | $\ \mathbf{h}_2^{(k)}\ _2$ |
|--------|--------|----------------------------|----------------------------|
| k=0 | 0.3950 | 0.4234 | 0.3956 |
| k=1 | 0.6095 | 0.6346 | 0.1760 |
| Wiener | 0.6547 | 0.7050 | - |

σ_η^2 yada σ_v^2 ’nin sıfır olduğu durumlarda gürültünün etkilemediği kanaldaki filtre katsayılarının ağırlığı daha fazladır.

Tablo 6.2: $\sigma_\eta^2 = 0, \sigma_v^2 = 1$ için MSE ve Filtre Katsayılarının Normunun Karşılaştırılması

| | MSE | $\ \mathbf{h}_1^{(k)}\ _2$ | $\ \mathbf{h}_2^{(k)}\ _2$ |
|--------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|
| k=0 | $1,1411 \cdot 10^{-14}$ | 1.0 | $2,2204 \cdot 10^{-16}$ |
| k=1 | $3,6874 \cdot 10^{-14}$ | 1.0 | $1,1194 \cdot 10^{-16}$ |
| Wiener | $1,4211 \cdot 10^{-14}$ | 1.0 | - |

Tablo 6.3: $\sigma_v^2 = 0, \sigma_\eta^2 = 1$ için MSE ve Filtre Katsayılarının Normunun Karşılaştırılması

| | MSE | $\ \mathbf{h}_1^{(k)}\ _2$ | $\ \mathbf{h}_2^{(k)}\ _2$ |
|--------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|
| k=0 | $1,0658 \cdot 10^{-14}$ | $1,6526 \cdot 10^{-15}$ | 1.0 |
| k=1 | 0.5102 | 0.5137 | 0.5664 |
| Wiener | 0.6547 | 0.7050 | - |

$\sigma_v^2 = 1000$ yada $\sigma_\eta^2 = 1000$ olduğu durumlarda filtre katsayılarının ağırlığı düşük gürültü varyansına sahip olan kısımda daha azdır.

Tablo 6.4: $\sigma_v^2 = 1000, \sigma_\eta^2 = 1$ için MSE ve Filtre Katsayılarının Normunun Karşılaştırılması

| | MSE | $\ \mathbf{h}_1^{(k)}\ _2$ | $\ \mathbf{h}_2^{(k)}\ _2$ |
|--------|--------|----------------------------|----------------------------|
| k=0 | 0.6543 | 0.7046 | $6,5618 \cdot 10^{-4}$ |
| k=1 | 0.6547 | 0.7049 | $2,5707 \cdot 10^{-4}$ |
| Wiener | 0.6547 | 0.7050 | - |

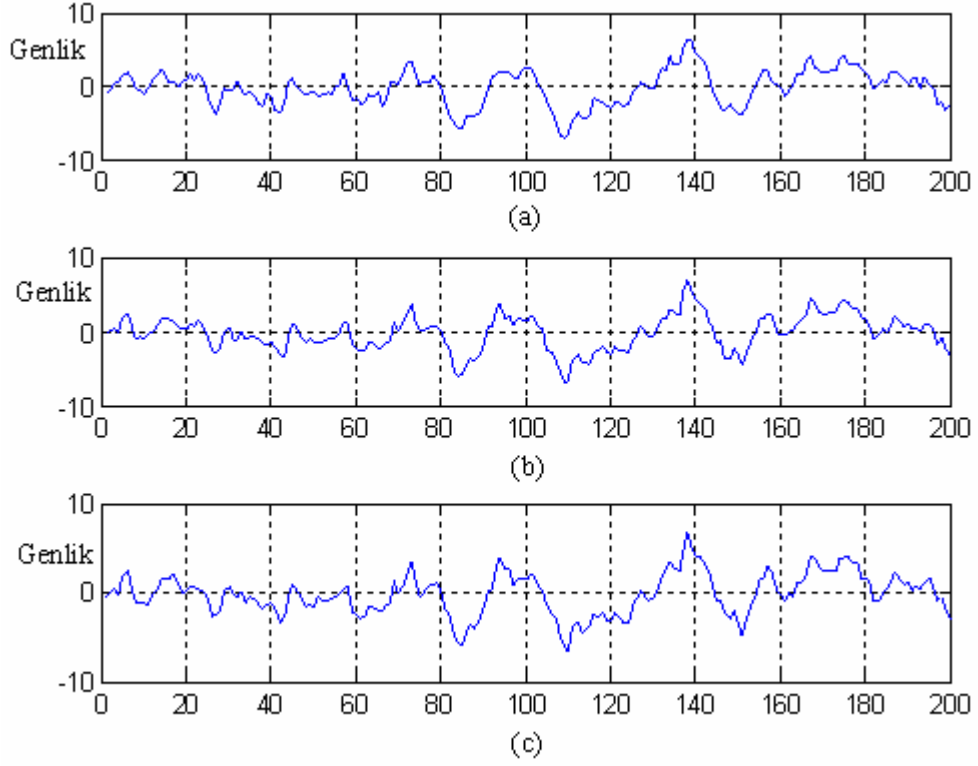
Tablo 6.5: $\sigma_v^2 = 1, \sigma_\eta^2 = 1000$ için MSE ve Filtre Katsayılarının Normunun Karşılaştırılması

| | MSE | $\ \mathbf{h}_1^{(k)}\ _2$ | $\ \mathbf{h}_2^{(k)}\ _2$ |
|--------|--------|----------------------------|----------------------------|
| k=0 | 0.7777 | $9,2993 \cdot 10^{-4}$ | 0.7945 |
| k=1 | 1.9284 | 0.0021 | 0.8085 |
| Wiener | 8.1981 | 0.0153 | - |

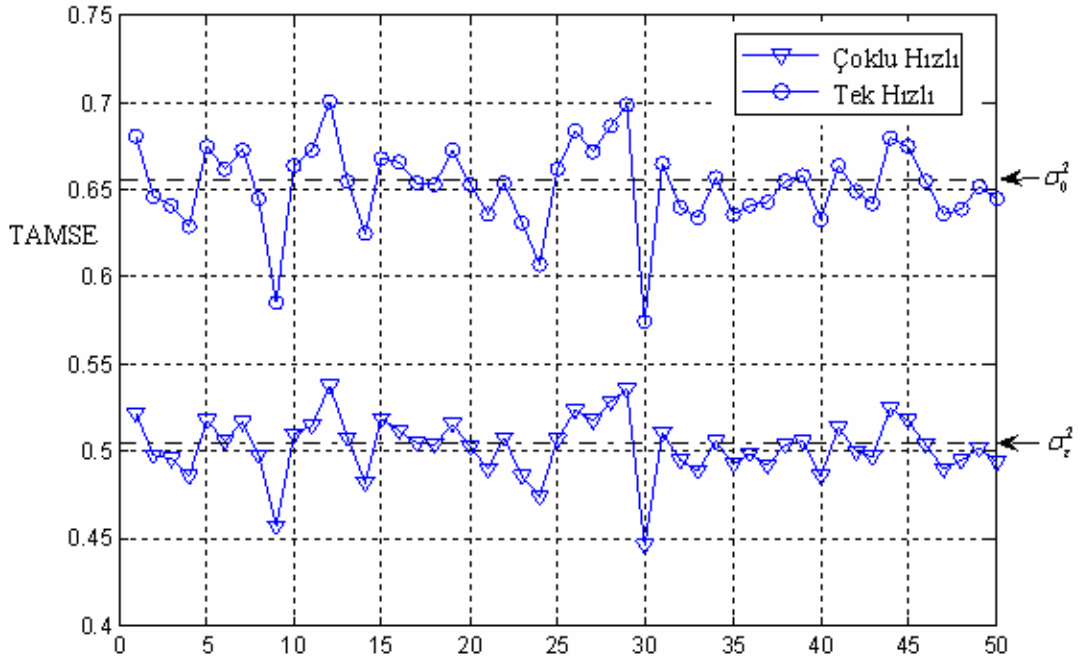
Şekil 6.7'deki gözlem modeli $K = 2$ için ele alınsın. Şekil 6.8'deki çoklu hızlı filtrenin dereceleri $P_1 = 12$ ve $P_2 = 8$ olarak seçilmektedir. Tek hızlı Wiener filtrenin derecesi ise $P_1 + P_2 = 20$ alınmaktadır ve 2. dereceden AR modelle elde edilen $d[n]$ işareti kestirilmeye çalışılmaktadır. Gürültü varyansları $\sigma_v^2 = \sigma_\eta^2 = 1$ alınmıştır.

İstenen işaret $d[n]$ ile çoklu hızlı ve tek hızlı Wiener kullanılarak elde edilen kestirim işareti $\hat{d}[n]$ Şekil 6.9'da verilmiştir. Kestirim işlemi 50 kez tekrarlanır ve (6.5) denklemindeki zaman ortalamalı ortalama karesel hata (time averaged mean square error-TAMSE) hem çoklu hızlı hem tek hızlı Wiener filtre için hesaplanmaktadır ve Şekil 6.10 iki filtreye ait TAMSE değerleri karşılaştırılmaktadır..

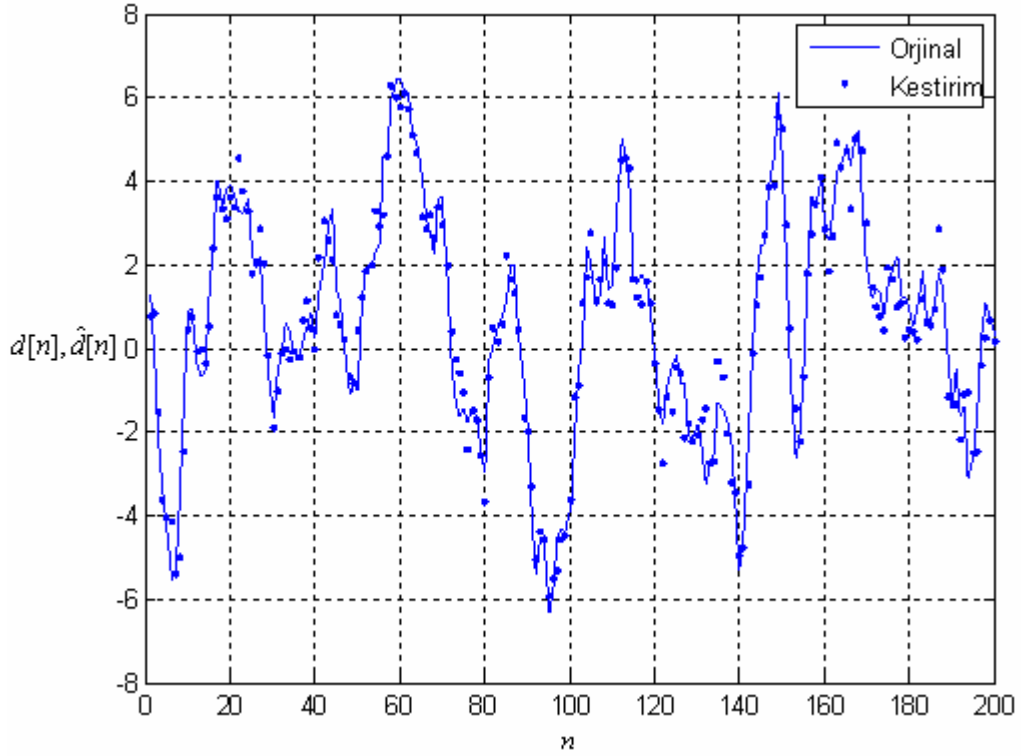
Tablo 6.1'de görüldüğü gibi $\sigma_v^2 = \sigma_\eta^2 = 1$ olduğu durumda $k = 0$ için çoklu hızlı Wiener filtrenin MSE değeri 0.3950 iken $k = 1$ için 0.6095'dir. Ortalama σ_ε^2 değeri 0.5022'dir. Tek hızlı Wiener filtre için MSE değeri 0.6547'dir.



Şekil 6.9 : (a) AR Süreç (b) AR Sürecin Çoklu Hızlı Wiener Filtresiyle Kestirimi ($K = 2$) (c) AR Sürecin Tek Hızlı Wiener Filtresiyle Kestirimi



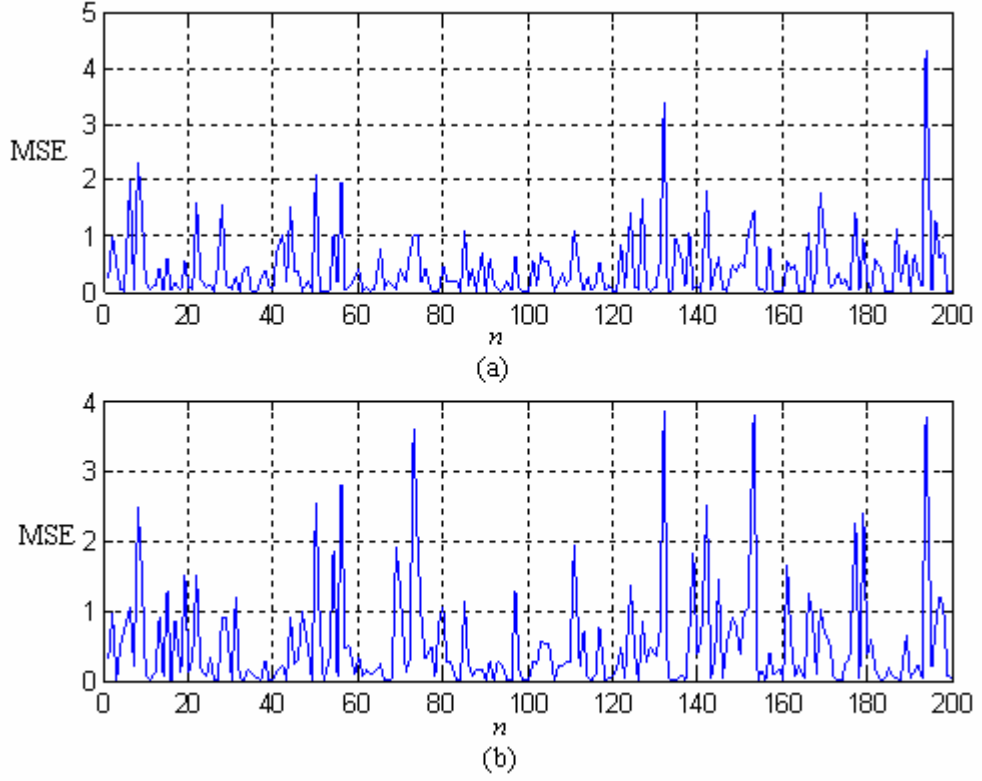
Şekil 6.10 : Çoklu Hızlı ve Tek Hızlı Zaman Ortalamalı Karesel Hata (TAMSE)



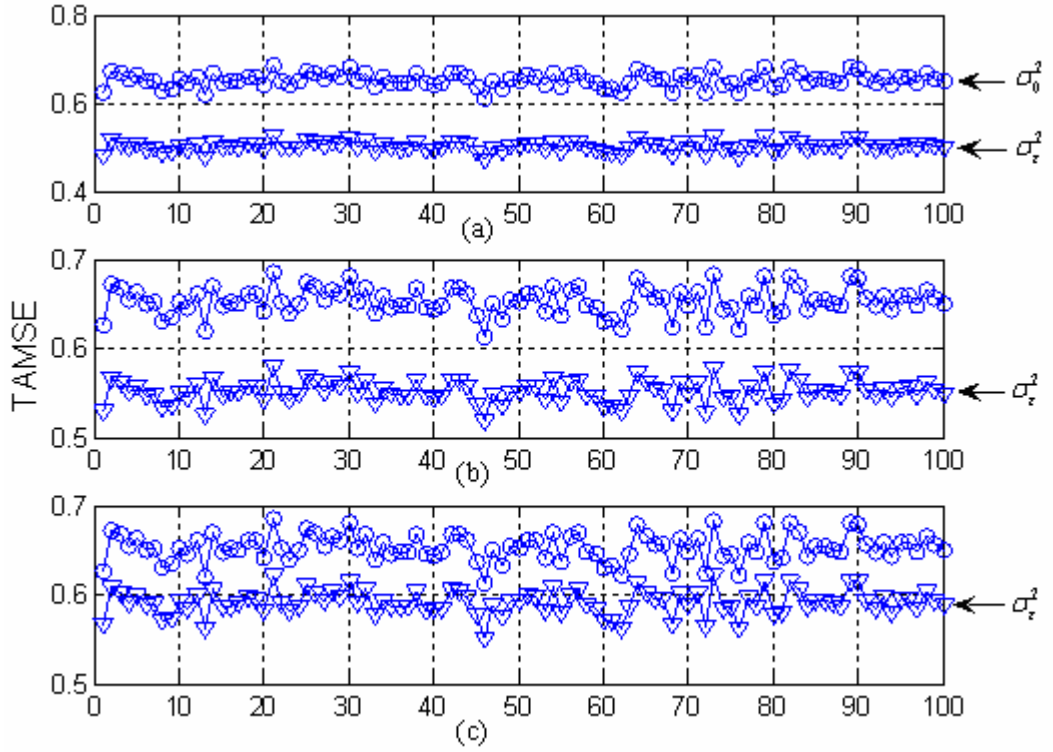
Şekil 6.11 : Çoklu Hızlı Wiener Filtreyle AR Sürecin Elde Edilmesi (Alt Örnekleme Çarpanı $K=2$)

Şekil 6.10'daki 50 tane TAMSE'nin ortalama değeri Tablo 6.1'deki değerlerle karşılaştırıldığında birbirlerine yakın değerler olduğu görülmektedir. Çoklu Hızlı Wiener filtresi kullanılarak elde edilen TAMSE değerlerinin ortalaması 0.5029 olarak bulunmuştur. Tek Hızlı durumda ise 0.6525 bulunmuştur.

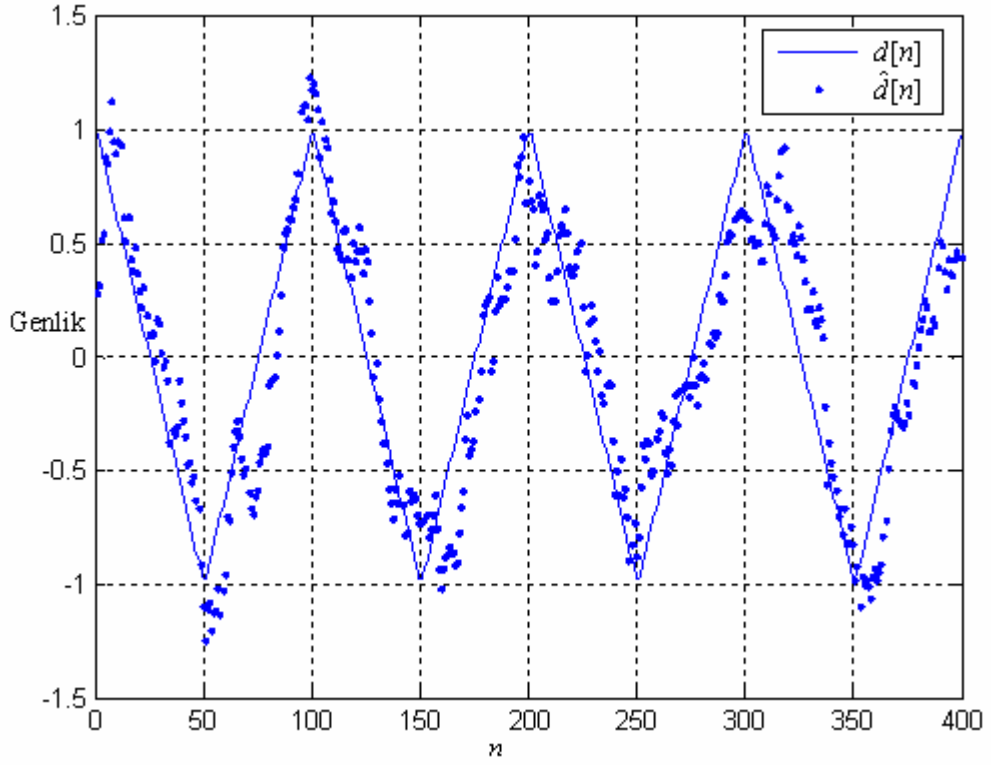
Şekil 6.11'de $d[n]$ orjinal işareti ve $K=2$ için elde edilen $\hat{d}[n]$ kestirim işareti gösterilmektedir. Şekil 6.12'de $K=2$ için çoklu hızlı Wiener filtre kullanılarak elde edilen MSE ile tek hızlı Wiener filtreyle elde edilen MSE gösterilmektedir. Çoklu hızlı Wiener filtreyle elde edilen MSE daha düşük değerlere sahiptir. Şekil 6.13'de $K=2$, $K=3$ ve $K=5$ için 50 denemeye hesaplanan TAMSE değerleri gösterilmektedir. $K=2$ için hesaplanan TAMSE değerlerinin ortalaması 0.5030 iken $K=3$ için 0.5523 ve $K=5$ için 0.5918 olarak hesaplanmaktadır. Tek hızlı Wiener filtre için ortalama TAMSE değeri 0.6537'dir. Alt örnekleme çarpanı K değeri arttıkça ortalama TAMSE değeri artmaktadır ve daima tek hızlı Wiener filtre için hesaplanan ortalama TAMSE değerinden küçük olmaktadır.



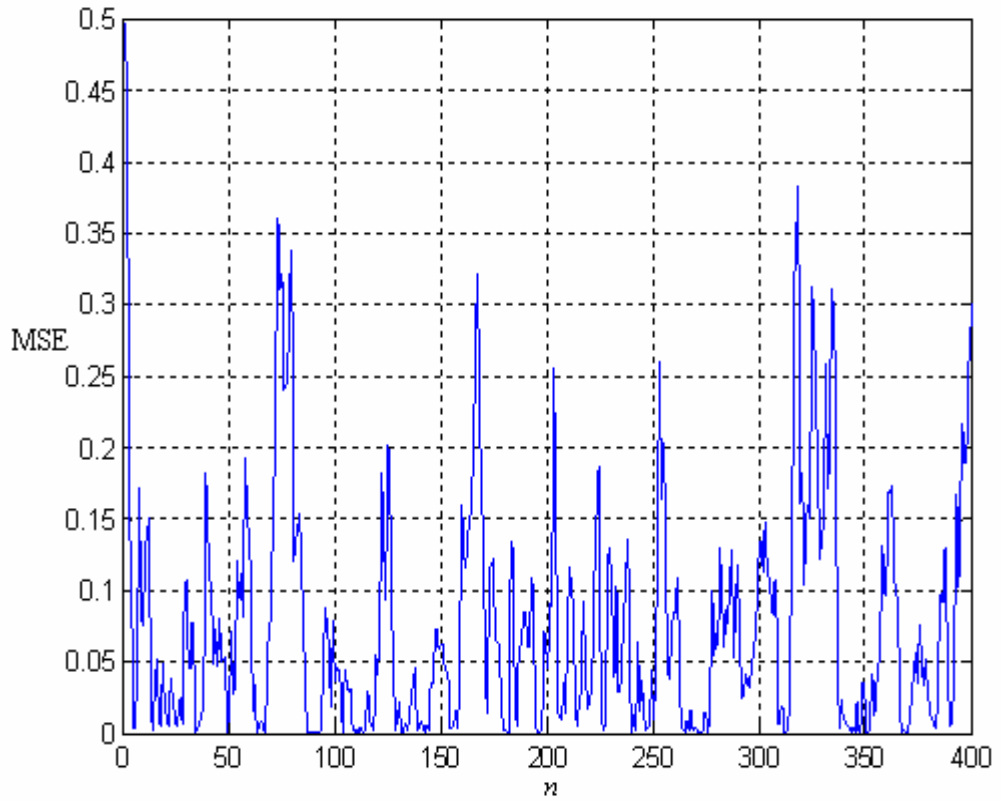
Şekil 6.12 : (a) Çoklu Hızlı Wiener Filtreyle Elde Edilen MSE(K=2) (b) Tek Hızlı Wiener Filtreyle Elde Edilen MSE



Şekil 6.13 : (a) K=2 için (b) K=3 için (c) K=5 için TAMSE



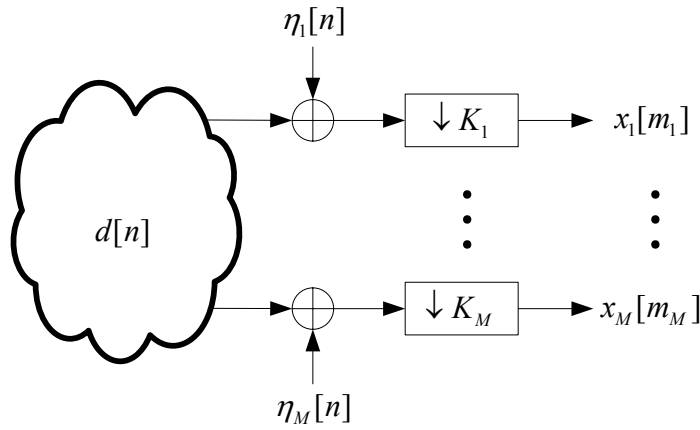
Şekil 6.14 : $K=2$ için Çoklu Hızlı Wiener Filtreyile Orjinal İşaretin Kestirimi



Şekil 6.15 : Şekil 6.14'e ait Ortalama Karesel Hata(MSE)

Şekil 6.14'de $d[n]$ üçgen işareti ve $K = 2$ için çoklu hızlı Wiener filtreye elde edilen $d[n]$ 'in kestirimi ($\hat{d}[n]$) gösterilmektedir. Şekil 6.15'de Şekil 6.14'deki $d[n]$ ve $\hat{d}[n]$ işaretleri kullanılarak elde edilen MSE gösterilmektedir.

Bahsedilen problem istenen işaretin örnekleme hızından farklı örnekleme hızlarına sahip ikiden fazla gözlem işaretinin olduğu duruma uyarlanabilir. Çoklu hızlı kestirim için Şekil 6.16'deki model göz önüne alınsın.



Şekil 6.16 : Çok Kanallı Çoklu Hızlı Bir Model

İstenen işaret her kanalda alt örneklemeden önce bağımsız toplamsal gürültüye maruz kalmaktadır. $x_1[m_1]$ 'e ait alt örnekleme çarpanı $K_1 = 2$ 'dir. $x_2[m_2]$ 'e ait alt örnekleme çarpanı $K_2 = 5$ 'dir. İstenen işaret iki sinuzoidden oluşan periyodik bir işaret olsun

$$d[n] = 4 \cos[0.2\pi n] + 2 \cos[0.02\pi n]. \quad (6.28)$$

İki gözlem dizisi sistem seviyesinde $x_1[n] = d[n] + \eta_1[n]$ ve $x_2[n] = d[n] + \eta_2[n]$ olarak tanımlanır. Burada $\eta_1[n]$ ve $\eta_2[n]$ bağımsız beyaz gürültü dizileridir ve varyansları SNR (işaret-gürültü oranı) değerine göre değişmektedir. SNR, -6dB, -3 dB, -1.7dB, 0dB, 1.7dB, 3dB ve 6dB değerlerini almaktadır. (6.28) denklemindeki istenen işaretin özilişki fonksiyonu

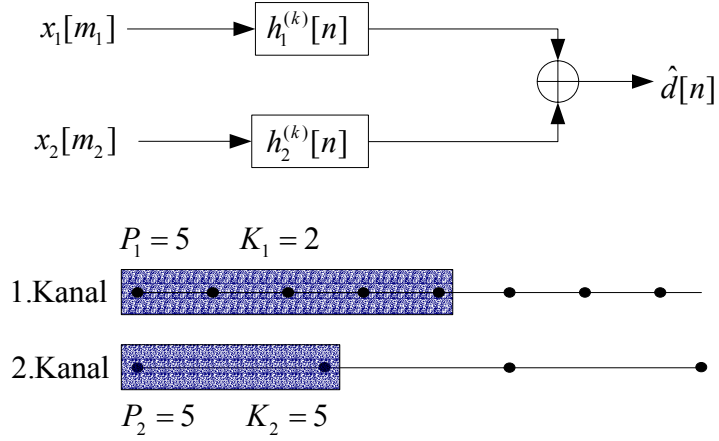
$$R_d[l] = 8 \cos[0.2\pi l] + 2 \cos[0.02\pi l] \quad (6.29)$$

olarak hesaplanmıştır. Gürültü varyansı

$$\sigma_{\eta}^2 = \frac{R_d(0)}{10^{(SNR/10)}} \quad (6.30)$$

olarak hesaplanır. R_d , $d[n]$ 'in özilişki fonksiyonudur.

Şekil 6.17'da en iyi kestiricinin blok diyagramı verilmiş. Ayrıca 1. ve 2. kanaldaki gözlem işaretleri gösterilmiştir. Zamanla periyodik filtrelerin dereceleri $P_1 = P_2 = 5$ olarak kullanılır.

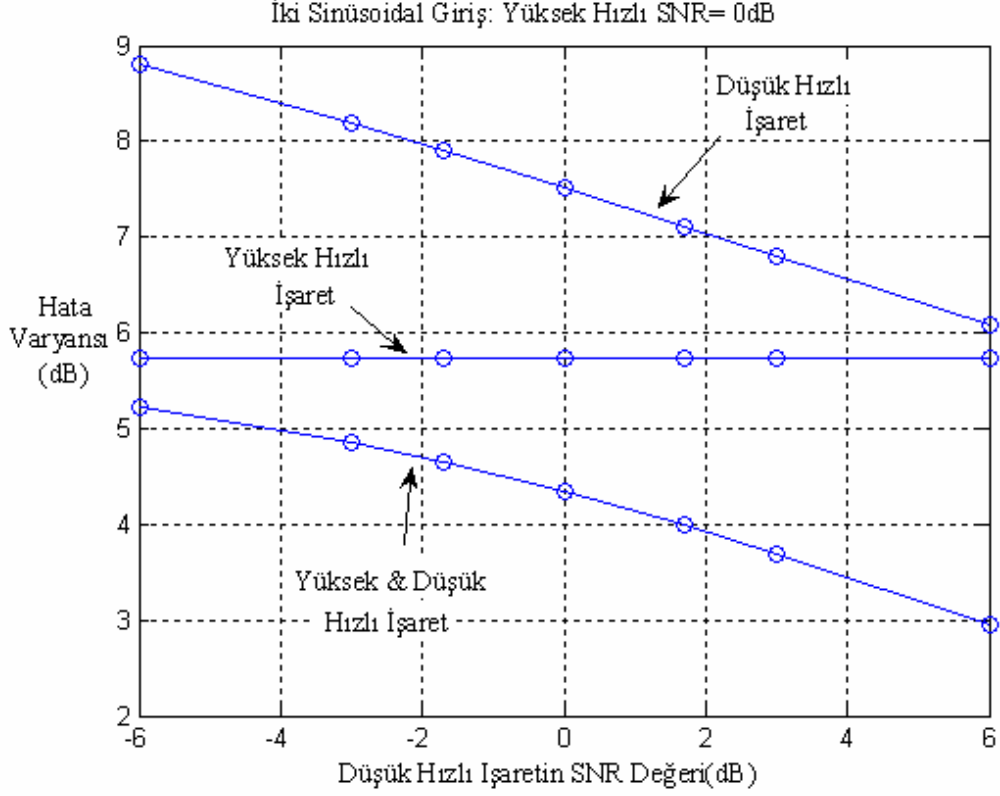


Şekil 6.17 : En İyi Kestiricinin Blok Diyagramı

Şekil 6.18'de (4.59) ve (4.60) kullanılarak hesaplanan sinuzoidal işarete ait hata varyansı gösterilmektedir. Burada sadece düşük hızlı işaretin, sadece yüksek hızlı işaretin ve hem yüksek hem düşük hızlı işaretlerin kullanıldığı üç durum için hata varyansları karşılaştırılmaktadır.

Yüksek hızlı gözlem işareti $x_1[m_1]$ SNR değerinin 0dB olduğu gürültü altında gözlenmektedir. Düşük hızlı gözlem işareti $x_2[m_2]$ SNR değerinin -6 dB ile 6 dB aralığında değiştiği bir ortamda gözlenmektedir.

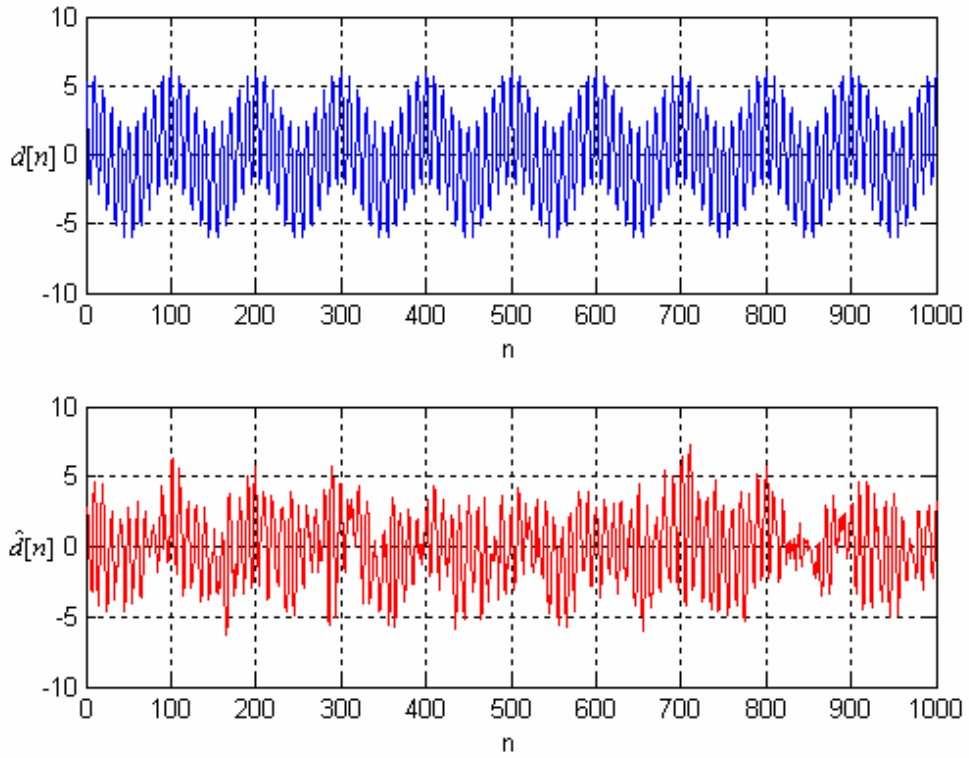
Şekil 6.18'den tüm SNR değerleri için sadece düşük hızlı işaretin kullanıldığı duruma ait hata varyansının sadece 0 dB SNR altında gözlenen yüksek hızlı bir işaretin kullanılmasına göre elde edilen hata varyansından daha yüksek olduğu gözlenmektedir. Hem yüksek hızlı hem düşük hızlı işaretin kullanıldığı durumdaki hata varyansı her iki işaretin tek tek kullanıldığı durumdaki hata varyansından daha düşüktür. Belirli SNR aralığında düşük hızlı işaretin yüksek hızlı işareten daha kötü performansa sahip olduğu gösterilmektedir.



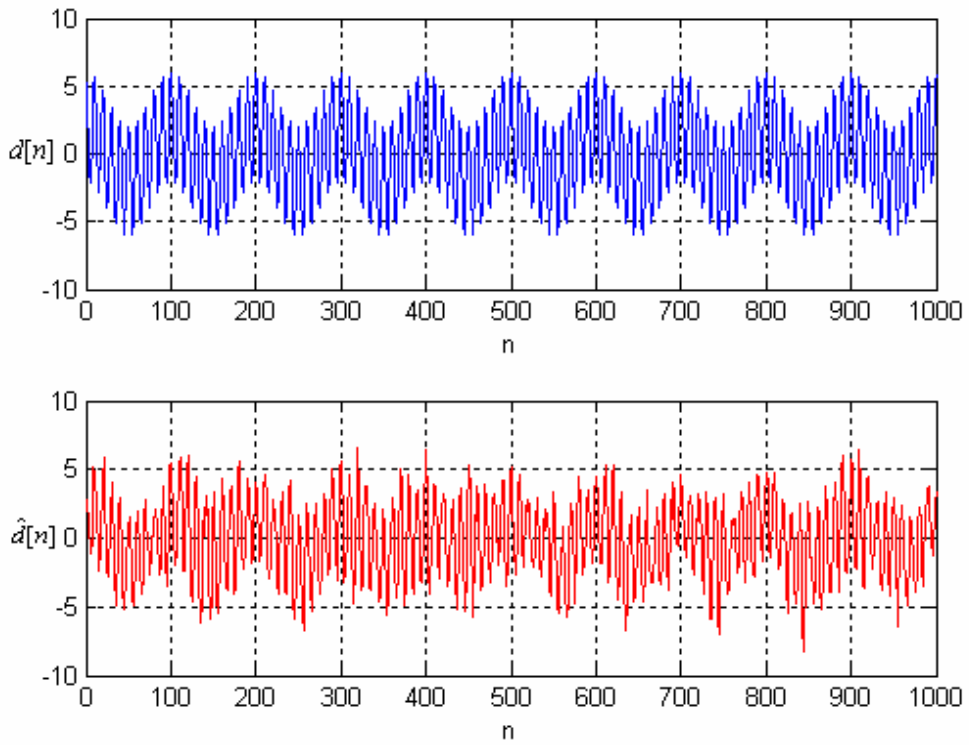
Şekil 6.18 : Peryodik İşaret İçin Hata Varyansı-SNR Grafiği

Çoklu hızlı teknikler kullanılarak her iki işaretin işlenmesiyle önemli gelişmeler elde edildiği görülmektedir. Şekil 6.19’da düşük hızlı işaretin SNR değerinin -6dB olduğu durum için istenen işaret $d[n]$ ile kestirim işareti $\hat{d}[n]$ verilmiştir.

Şekil 6.20’de düşük hızlı işaretin SNR değerinin 6dB olduğu durum için istenen işaret $d[n]$ ile kestirilen işaret $\hat{d}[n]$ verilmiştir. Yüksek hızlı işaretin SNR değeri 0dB alınmaktadır. Düşük hızlı işaretin SNR değeri arttıkça daha iyi kestirim yapıldığı görülmektedir.



Şekil 6.19 : Düşük Hızlı İşaret için $\text{SNR}=-6\text{dB}$ olduğunda $d[n]$ ile $\hat{d}[n]$



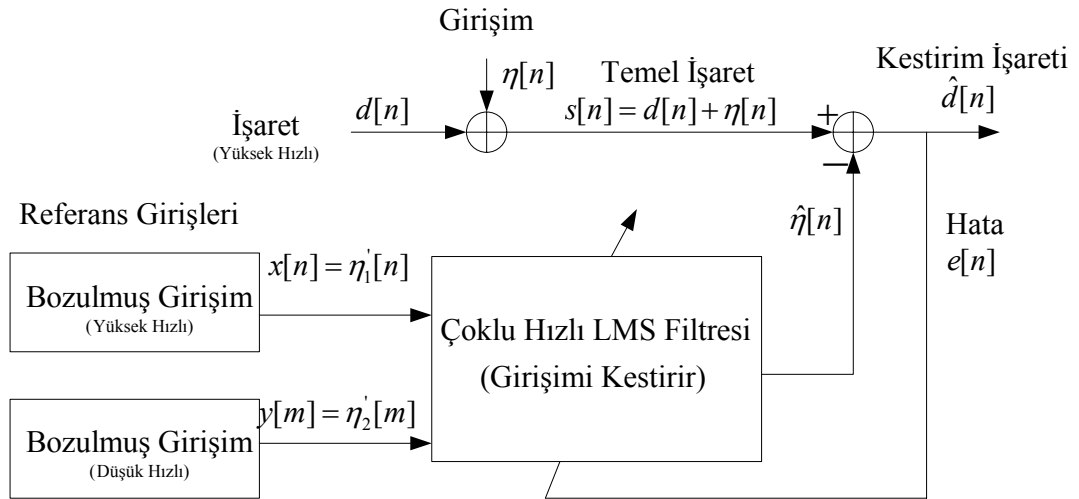
Şekil 6.20 : Düşük Hızlı İşaret için $\text{SNR}=6\text{dB}$ olduğunda $d[n]$ ile $\hat{d}[n]$

6.2 Çoklu Hızlı En Küçük Ortalama Kareler Metodunun Uygulamaları

Çoklu hızlı LMS filtresi uyarlamalı gürültü giderme olarak bilinen uyarlamalı girişim giderme konusunda incelenecektir. Temel giriş işareti istenen işaretle girişimin toplamından oluşur. Referans girişleri girişimin bozulmuş şeklidir. Uyarlamalı filtre, referans girişlerini girişteki girişim işaretini ($\eta[n]$) kaldırmak için kullanır. Şekil 6.21’de uyarlamalı gürültü giderme, birçok referans girişinin olduğu duruma genişletilmektedir. Filtre girişine girişimin farklı hızlarda örneklenmiş biçimleri yani referans girişleri uygulanmaktadır.

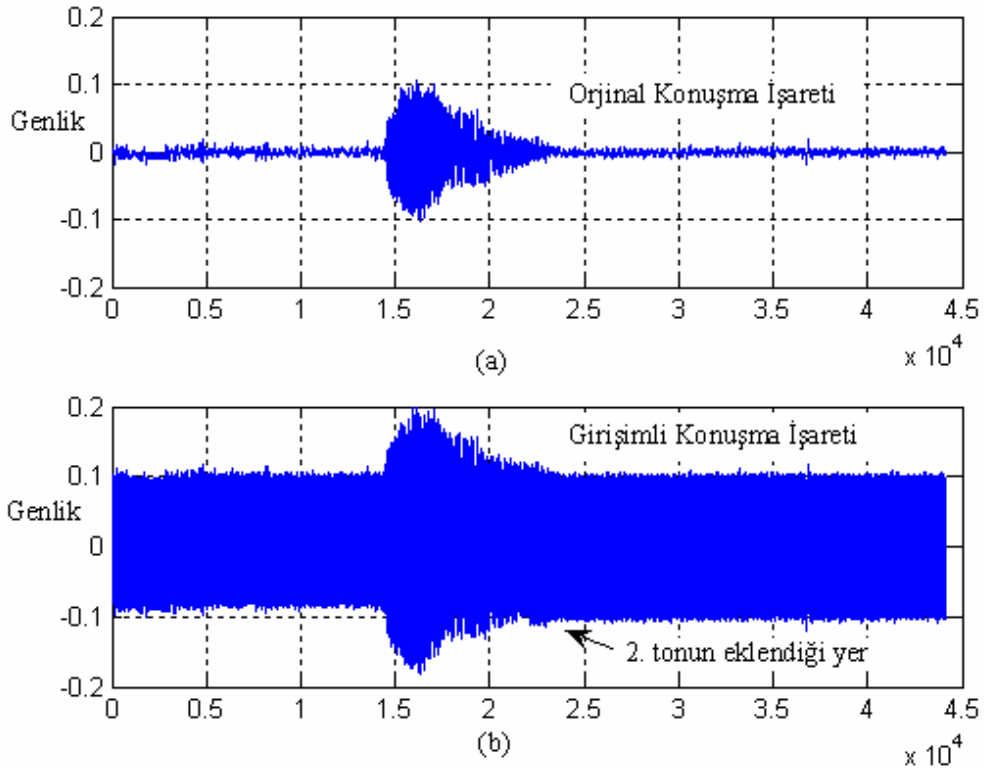
LMS filtresinin amacı girişimin iki tane bağımsız gözlemine kullanarak yüksek hızlı işarete eklenen girişimi kestirmektir. Sadece $y[m]$ referans işaretinin kullanıldığı durumda incelenmiştir.

Şekil 6.21’de iki referans girişinin uygulandığı uyarlamalı girişim giderme modeli verilmiştir. Uygulama olarak ‘hello’ kelimesi kaydedilmiş ve bu konuşma işareti yüksek hızlı orjinal işaret olarak ele alınmıştır.



Şekil 6.21 : İki Referans Girişli Uyarlamalı Gürültü Giderme

Şekil 6.22(a)’de orjinal konuşma işareti gösterilmektedir. Konuşma işareti iki saniye süresince kaydedilmiş ve 22.05 kHz örnekleme frekansında örneklenmiştir. Şekil 6.22(b)’de girişim içeren konuşma işareti gösterilmektedir.

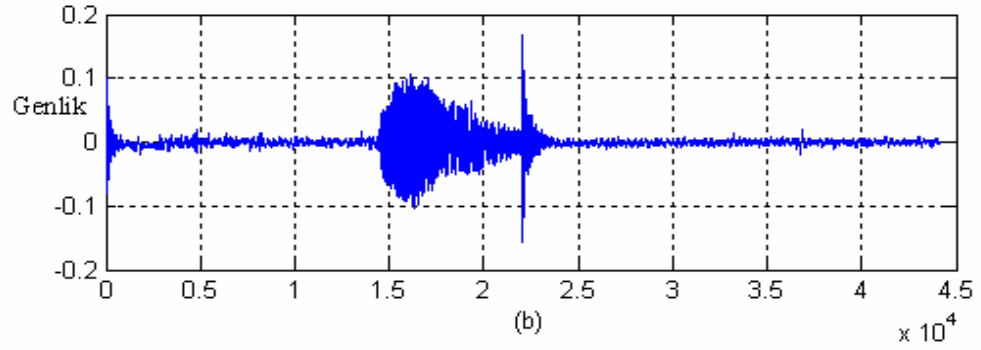
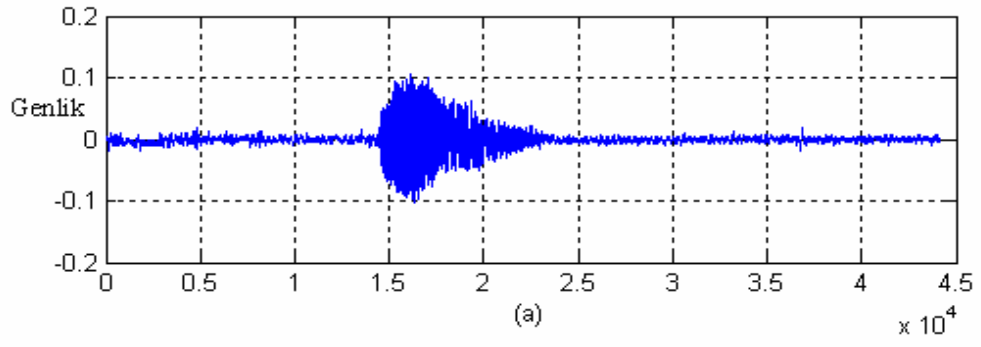


Şekil 6.22 : (a) Orjinal Konuşma İşareti (b) Girişime Uğramış Konuşma İşareti

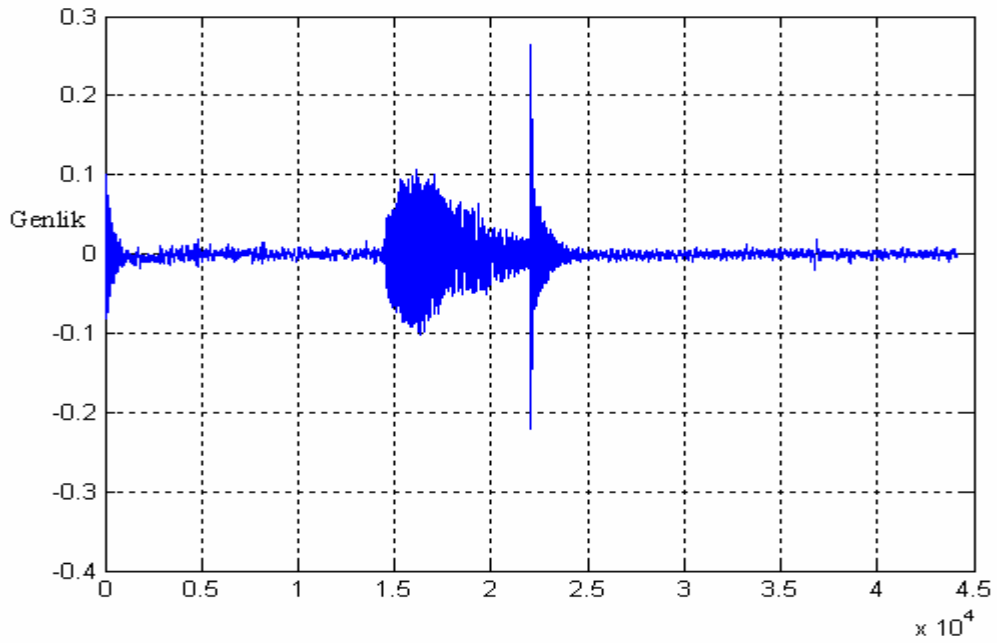
Girişim işareti iki sinuzoidal tondan oluşmaktadır. Girişim işareti konuşma işaretinin yarısına kadar 4.41 kHz'lik sinuzoidal bir tondan, diğer yarısı da 2.205 kHz'lik ikinci bir tondan oluşmaktadır. Referans girişleri girişimin rastgele seçilmiş katsayılarla sahip üçüncü dereceden FIR filtrelerden geçirilmesiyle oluşturulmaktadır. FIR filtre katsayıları 1 ile 10 arasında düzgün dağılmış sayılardan elde edilmektedir. Düşük hızlı gözlem işareti, filtremeden sonra alt örnekleme yapılarak elde edilmektedir.

Düşük hızlı referans girişi, girişim işaretinin üçüncü dereceden FIR filtreden geçip $K = 4$ ile alt örneklemeyle elde edilir. Yüksek hızlı filtre derecesi (P) 2'dir. Düşük hızlı filtre derecesi (Q) de 2'dir.

Şekil 6.23(b)'de hem düşük hem yüksek hızlı gözlem işaretleri kullanılarak elde edilen filtrelenmiş işaret gösterilmektedir. Şekil 6.24 sadece düşük hızlı gözlem işareti kullanılarak elde edilen filtrelenmiş işareti göstermektedir. Referans girişi olarak sadece düşük hızlı işareti kullanırsak her iki hızdaki referans girişlerini kullandığımız duruma yakın sonuç elde edilmektedir.

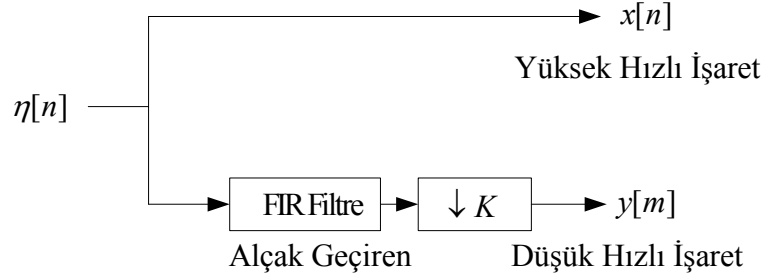


Şekil 6.23 : (a) Orjinal işaret (b) Her İki Referans Girişle Elde Edilen Filtrelenmiş İşaret



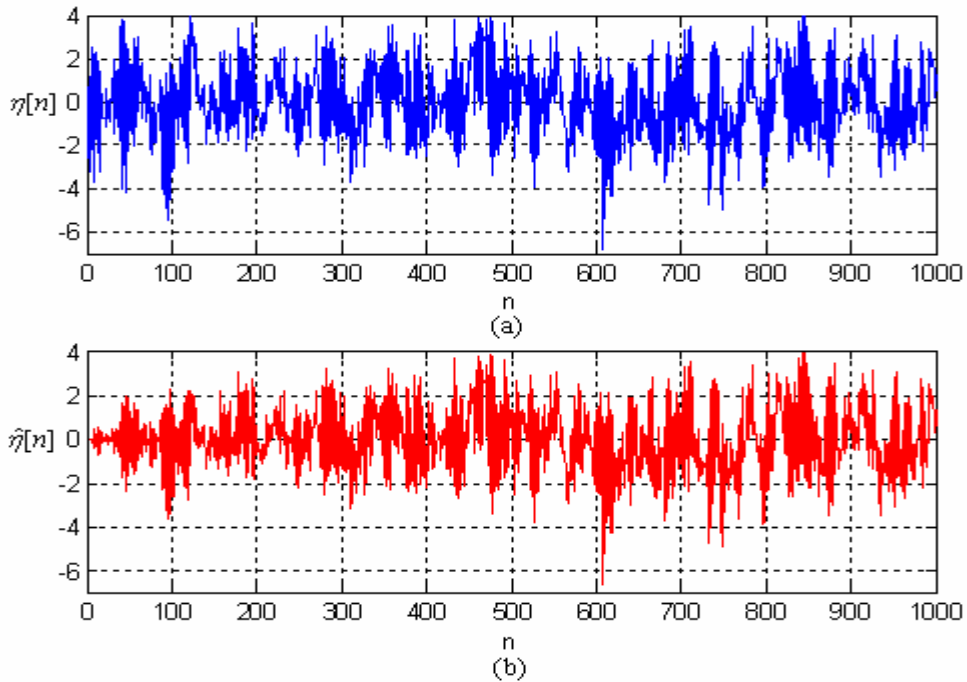
Şekil 6.24 : Sadece Düşük Hızlı Referans Girişi Kullanılarak Elde Edilen Filtrelenmiş İşaret

Uyarlamalı gürültü giderme için diğer bir uygulamada ise istenen işaret $d[n]$ üçgen işareti olarak kullanılsın. Girişim işareti $\eta[n]$, transfer fonksiyonu $1/(1+0.1z^{-1}-0.8z^{-2})$ olan 2. dereceden AR modelden elde edilir.

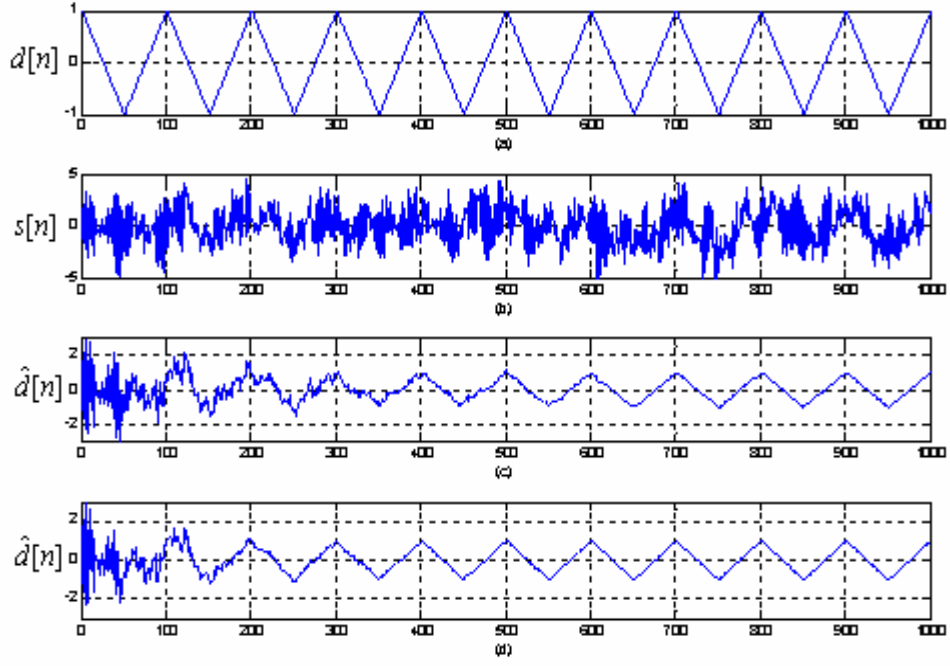


Şekil 6.25 : Referans Girişlerinin Elde Edildiği Blok Diyagram

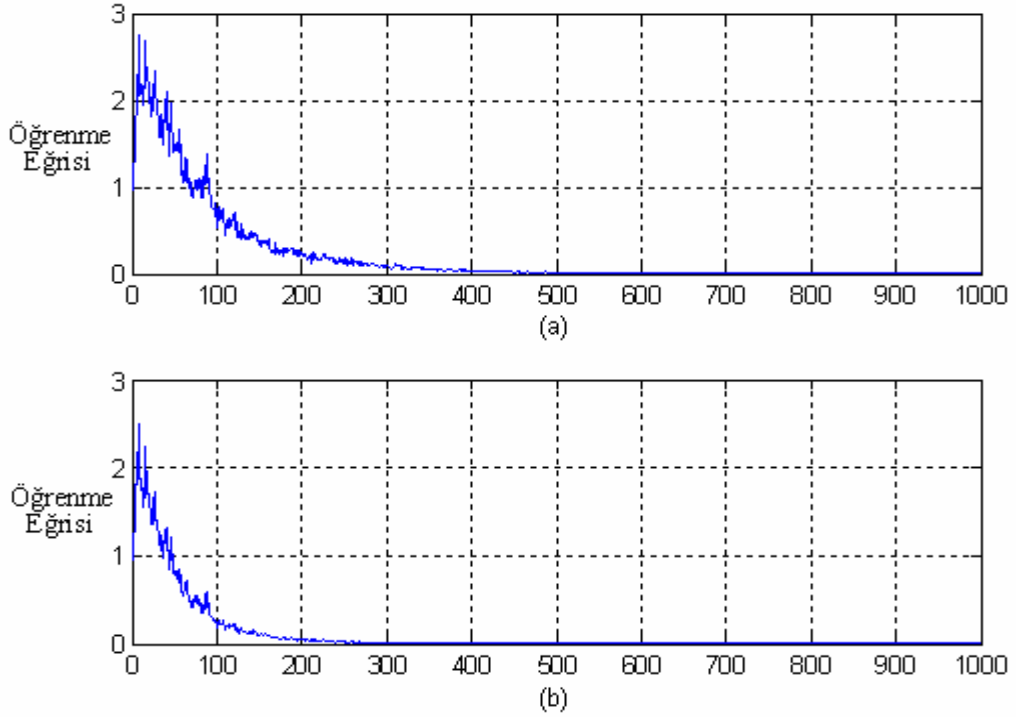
Referans girişleri Şekil 6.25’de gösterildiği gibi oluşturulmaktadır. Şekil 6.26’da girişim işareti $\eta[n]$ ve çoklu hızlı LMS algoritmasıyla girişim işaretinin kestirimi $\hat{\eta}[n]$ gösterilmektedir. Burada adım boyu (μ) 0.01 alınmaktadır. Şekil 6.27’de adım boyu (μ) 0.01 ve 0.02 alınarak Şekil 6.21 çıkışında elde edilen gürültüsüz işaret $\hat{d}[n]$ gösterilmektedir. Şekil 6.27’de filtrelenmiş işaret ($\hat{d}[n]$) adım boyu 0.01 ve 0.02 değerlerine göre incelenmektedir.



Şekil 6.26 : (a) Girişim İşareti (b) Girişim İşaretinin Kestirimi



Şekil 6.27 : (a) İstenen İşaret (b) Girişim İşareti (c) $\mu = 0.01$ için Filtrelenmiş İşaret
(d) $\mu = 0.02$ için Filtrelenmiş İşaret



Şekil 6.28 : (a) $\mu = 0.01$ için Öğrenme Eğrisi (b) $\mu = 0.02$ için Öğrenme Eğrisi

Şekil 6.27(a)'da istenen işaret $d[n]$, Şekil 6.27(c)'de $\mu = 0.01$ için gürültüsüz işaret $\hat{d}[n]$ ve Şekil 6.27(d)'de $\mu = 0.02$ için gürültüsüz işaret $\hat{d}[n]$ gösterilmektedir. Şekil 6.28'de $\mu = 0.01$ için ve $\mu = 0.02$ öğrenme eğrileri gösterilmiştir. Şekil 6.28'nin elde edilmesi için 100 deney yapılmıştır. $\mu = 0.02$ için öğrenme eğrisinin daha hızlı yakınsadığı görülmektedir.

7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada Therrien ve öğrencileri tarafından yapılan çoklu hızlı istatistiksel işaret işleme ile ilgili teori ve uygulamalar açıklanmıştır. Orjinal işaretin yeniden elde edilmesinde temel oluşturan çoklu hızlı sistem teorisi belirtilmiştir. En iyi filtreleme teorisinin çoklu hızlı sistemlere geliştirilmesini sağlayan kavramlardan bazıları olan sistem periyodu, sistem hızı ve temel hız açıklanmıştır. Bir çoklu hızlı sistemde işaretlerin ortak domende gösterilmesini sağlayan sistem ızgarası kavramı anlatılmıştır. Çoklu hızlı işaret işlemede kullanılan temel bloklar hem zaman hem frekans domeninde gösterilmiştir. Çoklu hızlı sistemler için nedensellik kavramı belirtilmiştir. Bir çoklu hızlı sistemde kullanılan LPTV filtrelerin giriş-çıkış ilişkileri hem sistem seviyesinde hem işaret seviyesinde incelenmiştir. Alt örnekleme ve üst örnekleme için matris gösterimleri verilmiştir. Çoklu hızlı en iyi filtrelemeyle orjinal bir işaretin yeniden elde edilmesi açıklanmıştır. Yeniden elde etme problemi istenen işaret ile gözlem işaretlerinden oluşan çoklu hızlı bir sistemde düşük hızlı işaretler kullanılarak yüksek hızlı işaretin kestirim problemi olarak ele alınabilir. Tek hızlı sistemler için bilinen sonuçlar çoklu hızlı sistemlere genişletilmiştir. Çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemlerinin üretilmesinde indis eşleme kavramı tanımlanmıştır. İndis eşleme farklı hızlardaki işaretlerin örnekleri arasındaki ilişkiyi tanımlar ve doğrusal filtrelemede destek bölgesinin belirlenmesinde önemli yer tutar. Ayrıca çok kanallı çoklu hızlı Wiener-Hopf denklemleri gösterilmiş ve çoklu hızlı en iyi kestiriciyle farklı hızlardaki birçok giriş işaret kullanılarak istenen işaret kestirilmeye çalışılmıştır. LMS algoritmasına dayalı çoklu hızlı uyarlamalı filtre gösterilmiş ve farklı hızlarda örneklenmiş işaretler kullanılarak istenen işaretin kestirildiği çoklu hızlı LMS algoritması açıklanmıştır. Uygulama kısmında çoklu hızlı Wiener filtresi kullanılarak orjinal işaretin yeniden elde edilmesi açıklanmıştır. Orjinal işaret olarak üçgen bir dalga da kullanılmıştır. İki kanallı durum için çoklu hızlı Wiener filtreleme incelenmiştir. Çok kanallı çoklu hızlı Wiener Hopf denklemi matris formunda elde edilmiştir. Bu denklemler kullanılarak iki sinuzoidin toplamından oluşan periyodik bir işaretin iki kanallı çoklu hızlı en iyi filtrenmesiyle tek bir kanal kullanılarak en iyi filtrenmesi performans açısından karşılaştırılmıştır. Tek bir kanal kullanıldığında

en iyi filtreleme daha yüksek hata varyansına sahiptir. Çoklu hızlı LMS filtre kullanılarak uyarlamalı gürültü giderme işlemi yapılmıştır. Girişimin sadece düşük çözünürlüklü gözlemler kullanılarak kaldırılabilirdiği gözlemlenmiştir. Bu filtrenin avantajı düşük hızlı gözlemler kullanılarak yüksek hızlı işaretin kestirilebilmesidir. Çoklu hızlı istatistiksel işaret işleme alanında birçok araştırma konusu mevcuttur. En iyi filtrelemenin diğer şekilleri araştırılabilir. Çoklu hızlı yinelemeli en küçük kareler (RLS) metodu çoklu hızlı LMS metoduna dayanarak geliştirilebilir. Bu filtrelerin kafes (lattice) gösterilimlerinin araştırılması daha sonraki adımı oluşturabilir. Bir çoklu hızlı sistemde işaretler arasındaki ilişkiyi tanımlamak için birçok sonuç elde edilmiştir. Bu sonuçlar çoklu hızlı sistemlerin ikinci dereceden moment analizinde kullanılmıştır, fakat ikinci dereceden moment ilişkileri tamamiyle anlaşılmamıştır. Çoklu hızlı sistemlerin ikinci dereceden momentler hatta yüksek dereceden momentlerinin belirlenmesi önemli bir adım olacaktır. Bu tür sistemlerin frekans domeni özellikleri de önemlidir. Bu çalışmada çoklu hızlı sistemin yapısını oluşturan işaretlerin örnekleme hızları tamsayı değerli olarak sınırlandırılmıştır. Bu çalışmada anlatılan teori örnekleme hızlarının reel değerli olacak şekilde genişletilebilir. Anlatılan çoklu hızlı istatistiksel ve uyarlamalı filtreler tek boyutta değil de iki boyutta gerçekleştirilebilir. Kullanılan en iyi çoklu hızlı filtre FIR filtredir. Bununla birlikte ileriki çalışmalarda çoklu hızlı filtreleme teorisi IIR filtre için uygulanabilir. Çoklu hızlı sistemlerdeki diğer bir çalışma alanı da kafes yapılarıdır. Kafes yapıları üzerine bazı çalışmalar yapılmaktadır; fakat çoklu hızlı doğrusal öngörü gibi kafes teorisinin çoklu hızlı durum için geliştirilmesi gerekmektedir. Zaman domeni teknikleri kullanılarak çoklu hızlı sistemlerin en iyi filtrelenmesine yeni çözümler getirilebilir. [52]'te gösterildiği gibi en iyi çoklu hızlı filtreleme kavramları 2 boyutlu işaret işlemeye geliştirilmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Proakis, J.G. and Manolakis, D.G.**, 1996. Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [2] **Miao, G.J. and Clements, M.A.**, 2002. Digital Signal Processing and Statistical Classification, Artech House, London.
- [3] **Shenoy, R.G., Burnside, D. and Parks, T.W.**, 1994. Linear Periodic Systems and Multirate Filter Design, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **42**, 2242-2256.
- [4] **Crochiere, R.E. and Rabiner, L.R.**, 1983. Multirate Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [5] **Kuchler, R.J.**, 2005. Theory of Multirate Statistical Signal Processing and Applications, *PhD thesis*, Naval Postgraduate School, Monterey, CA.
- [6] **Jovanovic-Dolecek, G.**, 2002. Multirate Systems: Design and Applications, Idea Group Publishing, Hershey, PA, USA.
- [7] **Vaidyanathan, P.P.**, 1993. Multirate Systems and Filter Banks, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [8] **Chen, T. and Vaidyanathan, P.P.**, 1993. The Role of Integer Matrices in Multidimensional Multirate Systems, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **41**, 1035-1047.
- [9] **Evans, B.L., Bamberger, R.H. and McClellan, J.H.**, 1994. Rules for Multidimensional Multirate Structures, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **42**, 762-771.
- [10] **Mehr, A.S. and Chen, T.**, 2000. Properties of Linear Switching Time-Varying Discrete Time Systems with Applications, *Elsevier Systems & Control Letters*, **39**, 229-235.
- [11] **Mehr, A.S. and Chen, T.**, 2002. Representations of Linear Periodically Time-Varying and Multirate Systems, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **50**, 2221-2229.

- [12] **Chen, T. and Qui, L.**, 1997. Linear periodically time-varying discrete-time systems: Aliasing and LTI approximations, *Systems and Control Letters*, **30**, 225-235.
- [13] **Wei, D.**, 2000. Optimum linear periodically time-varying filter, *Proceedings of the Tenth IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, PA, USA, 14-16 August, 123-126.
- [14] **Phoong, S.M. and Vaidyanathan, P.P.**, 1996. Time-Varying Filters and Filter Banks: Some Basic Principles, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **44**, 2971-2987.
- [15] **Vaidyanathan, P.P. and Kirac, A.**, 1999. Cyclic LTI Systems in Digital Signal Processing, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **47**, 433-447.
- [16] **Gadre, V.M. and Patney, R.K.**, 1992. Vector Multirate Filtering and Matrix Filter Banks, *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuit and Systems*, San Diego, CA, USA, 10-13 May, 1360-1363.
- [17] **Dorfan, Y., Feuer, A. ve Porat, B.**, 2004. Modeling and Identification of LPTV systems by wavelets, *Elsevier Signal Processing Letters*, **84**, 1285-1297.
- [18] **Misra, P.**, 1996. Time-Invariant Representations of Discrete Periodic Systems, *Automatica*, **32**, 267-272.
- [19] **Gardner, W.A., Napolitano, A. and Paura, L.**, 2006. Cyclostationarity: Half a century of research, *Elsevier Signal Processing Letters*, **86**, 639-697.
- [20] **Gardner, W.A.**, 1990. Spectral Characterization of N-th Order Cyclostationarity, *Fifth ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, Rochester, New York, 10-12 October, 251-255.
- [21] **Vaidyanathan, P.P. and Sathe, V.P.**, 1993. Effects of Multirate Systems on the Statistical Properties of Random Signals, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **41**, 131-146.
- [22] **Akkarakaran, S. and Vaidyanathan, P.P.**, 1998. New insights into multirate systems with stochastic inputs using bifrequency analysis. *Proceedings of IEEE International Symp. On Circuits and Systems*, Monterey, CA, USA, 31 May-3 June, 53-56.
- [23] **Akkarakaran, S. and Vaidyanathan, P.P.**, 2000. Bifrequency and bispectrum maps: a new look at multirate systems with stochastic inputs, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **48**, 723-736.

- [24] **Therrien, C.W.**, 2005. Defining Correlation Functions and Power Spectra for Multirate Random Processes, *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuit and Systems*, Kobe, Japan, 23-26 May, 6010-6013.
- [25] **Therrien, C.W.**, 2001. Issues in Multirate Statistical Signal Processing. *Proceedings of the 35th Asimolar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Pacific Grove, CA, USA, 4-7 October, 573-576.
- [26] **Therrien, C.W. and Cristi, R.**, 2002. Two-dimensional Spectral Representation of Periodic, Cyclostationary, and More General Random Processes, *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, Signal Processing*, Orlando, Florida, USA, 4, 3561-3563.
- [27] **Therrien, C.W.**, 2002. Some Considerations for Statistical Characterization of NonFingerprint Compression Using Multiwavelets, *International Journal of Signal Processing*, 2, 78-87.
- [28] **Napolitano, A.**, 1995. Cyclic Higher-Order Statistics: Input/Output Relations for Discrete- and Continuous-Time MIMO Linear Almost-Periodically Time-Variant Systems, *Elsevier Signal Processing*, 42, 147-166.
- [29] **Ohno, S. and Sakai, H.**, 1996. Optimization of Filter Banks Using Cyclostationary Spectral Analysis, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44, 2718-2725.
- [30] **Andrisani, D., II and Gau C.F.**, 1987. Estimation Using a Multirate Filter, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32, 653-656.
- [31] **Chen, B.S. and Chen, Y.L.** 1995. Multirate Modeling of AR/MA Stochastic Signals and Its Applications to the Combined Estimation-Interpolation Problem, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43, 2302-2312.
- [32] **Chen, B.S., Chen, Y.L. and Lin, C.W.**, 1995. Optimal Signal Reconstruction in Noisy Filter Bank Systems: Multirate Kalman Filtering Approach, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43, 2496-2504.
- [33] **Chen, B.S. and Lin, C.W.**, 1995. Optimal Design of Deconvolution Filters for Stochastic Multirate Signal Systems, *Signal Processing*, 47, 287-305.
- [34] **Chen, B.S. and Chen, L.M.**, 2000. Optimal Reconstruction in Multirate Transmultiplexer Systems under Channel Noise: Wiener Separation Filtering Approach, *Signal Processing*, 80, 637-657.

- [35] **De Leon, P., Kober, W., Krumvieda, J. And Thomas, J.,** 1999. Subband Kalman Filtering with Applications to Target Tracking, *International Conference on Signal Processing Applications and Technologies*, Orlando, Florida, 1-4 November.
- [36] **Ni, J.Q., Ho, K.L., Tse, K.W., Ni, J.S. and Shen, M.H.,** 1997. Multirate Kalman Filtering Approach for Optimal Two-Dimensional Signal Reconstruction from Noisy Subband Systems, *International Conference on Image Processing*, Santa Barbara, California, 26-26 October, 157-160.
- [37] **Basseville, M., Benveniste, A., Chou, K.C., Golden, A.A., Nikoukhah, R., and Willsky, A.S,** 1992. Modeling and Estimation of Multiresolution Stochastic Processes, *IEEE Transactions on Information Theory*, **38**, 766-784.
- [38] **Chou, K.C., Willaky, A.S. and Benveniste, A.,** 1994. Multiscale Recursive Estimation, Data Fusion and Regularization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**, 464-478.
- [39] **Chou, K.C., Willsky, A.S. and Nikoukhah, R.,** 1994. Multiscale Systems, Kalman Filters and Riccati Equations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**, 479-492.
- [40] **Cristi, R. and Tummala, M.,** 2000. Multirate, Multiresolution Recursive Kalman Filter, *Elsevier Signal Processing*, **80**, 1945-1958.
- [41] **Hong, L.,** 1994. Multirate Estimation, *National Aerospace and Electronics Conference*, Dayton, Ohio, 435-440.
- [42] **Jahromi, O.S., Francis, B.A. and Kwong, R.H.,** Multirate Signal Estimation, *Proceedings of 2001 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Toronto, Ontario, Canada, 13-16 May, 147-152.
- [43] **Jahromi, O.S.,** 2002. Theory of Multirate Statistical Signal Processing, *PhD thesis*, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada.
- [44] **Jahromi, O.S., Francis, B.A. and Kwong, R.H.,** 2001. Information Theory of Multirate Systems, *IEEE Int. Symp. On Information Theory*, Washington, DC, USA, 24-26 June.
- [45] **Koupatsiaris, D.,** 2000. Analysis of Multirate Random Signals, *Master's thesis*, Naval Postgraduate School, Monterey, Canada.

- [46] **Cristi, R., Koupatsiaris, D.A. and Therrien, C.W.**, 2000. Multirate Filtering and Estimation: The Multirate Wiener Filter, *Proceedings of 34th Asimolar Conf. On Signals, Systems, and Computers*, Pasific Grove, California, USA, 29 October-1 November, 450-454.
- [47] **Therrien, C.W. and Hawes, A.H.**, 2002. Least Squares Optimal Filtering with Multirate Observations, *Proceedings of the 36th Asimolar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Pasific Grove, California, 3-6 November, 1782-1786.
- [48] **Kuchler, R.J. and Therrien, C.W.**, 2003. Optimal Filtering with Multirate Observations, *Proceeding of the 37th Asimolar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Pasific Grove, California, 9-12 November, 1208-1212.
- [49] **Therrien, C.W.**, 2005. Multirate Linear Prediction, *Proceedings of the European Signal Processing Conference*, Antalya, Turkey.
- [50] **Hawes, A.H. and Therrien, C.W.**, 2003. LMS Adaptive Filtering with Multirate Observations, *Proceedings of the 37th Asimolar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Pasific Grove, California, 9-12 November, 567-570.
- [51] **Scorfani, J.W. and Therrien, C.W.**, 2005. A Stochastic Multirate Signal Processing Approach to High-Resolution Signal Reconstruction, *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech , and Signal Processing*, Philadelphia, Pennsylvania, 561-564.
- [52] **Scorfani, J.W.**, 2005. Theory of Multirate Signal Processing with Application to One- and Two-Dimensional Signal Reconstruction, *PhD thesis*, Naval Postgraduate School, CA.
- [53] **Hayes, M.H.**, 1996. *Statistical Digital Signal Processing And Modeling*, John Wiley & Sons, Inc., Toronto, Canada.
- [54] **Kayran, A.H. ve Ekşioğlu, E.M.**, 2004. *Bilgisayar Uygulamalarıyla Sayısal İşaret İşleme*, Birsen Yayınevi, İstanbul, Türkiye.
- [55] **Oppenheim, A.V. and Schaffer, R.W.**, 1975. *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [56] **Bayraktar, M.**, 1998. *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi*, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum.
- [57] **Eynden, C.V.**, 2001. *Elementary Number Theory*, McGraw-Hill, New York.

- [58] **Zuckerman, H.S., Niven, I. and Montgomery, H.L.**, 1991. An Introduction to Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., Canada.
- [59] **Therrien, C.W.**, 1992. Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing, Prentice-Hall, Inc., Monterey, California, USA.
- [60] **Haykin, S.S.**, 1991. Adaptive Filter Theory, Prentice-Hall, Inc., USA.
- [61] **Cristi, R.**, 2004. Modern Digital Signal Processing, Thomson/Brooks/Cole, Pacific Grove, California.
- [62] **Diniz, P.S.R.**, 2001. Digital Signal Processing: System Analysis and Design, Cambridge University Press, Port Chester, NY, USA.
- [63] **Jovanovic-Dolecek, G.**, 2002. Multirate Systems: Design and Applications, Idea Group Publishing, Hershey, PA, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa Ersin Karaağaç, 24.03.1981 tarihinde Antalya’da doğdu. İlk öğrenimini Namık Kemal İlköğretim Okulu’nda, Orta ve Lise öğrenimini Metin Nuran Çakallıklı Anadolu Lisesi’nde bitirmiştir ve Lisans öğrenimini Uludağ Üniversitesi Elektronik Mühendisliği’nde bölümü 2. olarak tamamlamıştır. Lisans Öğreniminin son senesinde TOFAŞ Üstün Başarı Bursu almıştır. 2004 Eylül’de İstanbul Teknik Üniversitesi Telekomünikasyon Mühendisliği bölümünde Yüksek Lisans öğrenimine başlamıştır. Yüksek Lisans öğrenimi boyunca TÜBİTAK Yurtiçi Yüksek Lisans Bursu almıştır. 2005 Aralık ayından itibaren İTÜ Elektrik ve Elektronik Fakültesi Haberleşme Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.