

**T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI ÖLÇÜLÜ FONKSİYON UZAYLARI VE ÖZELLİKLERİ**

**İLKER ERYILMAZ**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN  
YRD. DOÇ. DR. CENAP DUYAR**

**SAMSUN – 2007**

# BAZI ÖLÇÜLÜ FONKSİYON UZAYLARI VE ÖZELLİKLERİ

## ÖZET

$G$  bir metriklenebilir yerel kompakt Abel grubu olmak üzere ilk olarak  $Lip(\alpha, pq)$  ve  $lip(\alpha, pq)$  şeklinde gösterilen Lipschitz-Lorentz uzayları tanımlanıp, bazı temel özellikleri gösterildi.  $L^1(G)$  uzayından  $A$  uzayına tanımlanan çarpanlar uzayı  $(L^1(G), A)$  ve  $lip(\alpha, pq)$  uzayının relatif tamlaması  $\overline{lip(\alpha, pq)}$  ile gösterildiğinde  $(L^1(G), lip(\alpha, pq))$ ,  $\overline{lip(\alpha, pq)}$ ,  $Lip(\alpha, pq)$ ,  $(L^1(G), Lip(\alpha, pq))$  uzaylarının izometrik izomorf olduğu gösterildi. İkinci bölümde ise Lorentz uzaylarından  $LA_*(\alpha, pq; G)$  ve  $L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  biçiminde gösterilen Lipschitz-Lorentz-Zygmund sınıflarına giden çarpanlar uzayı incelendi.

Üçüncü bölümde  $G$  bir yerel kompakt Abel grup,  $\lambda$  ise onun üzerinde bir Haar ölçümü olduğunda  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G) = L_{w_1}^r(G) \cap L(p, q, w_2 d\mu)(G)$  uzayının temel özellikleri incelendi. Bir sonraki bölümde,  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayları arasındaki kompakt gömülmeler için yeterli koşullar araştırıldı. Beşinci bölümde ise  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzaylarının özel bir hali olan  $B_{1,p,q}(G)$  uzayları üzerinde tanımlı çarpanlar uzayı incelendi.

Son bölümde  $L(p, q)(G)$  uzayı üzerindeki çarpanlar uzayı, Banach cebiri olan bazı uzaylar üzerindeki çarpanlar uzayı olarak belirlendi.

**Anahtar Kelimeler:** Lipschitz-Lorentz uzayları, Lipschitz-Lorentz-Zygmund sınıfları, ağırlıklı Lorentz uzayları, kompakt gömülme, ölçülü fonksiyon.

## SOME TEMPERATE FUNCTION SPACES AND THEIR PROPERTIES

### ABSTRACT

Let  $G$  be a metrizable locally compact abelian group. It was firstly defined that the spaces  $(L^1(G), lip(\alpha, pq))$ ,  $\overline{lip(\alpha, pq)}$ ,  $Lip(\alpha, pq)$ ,  $(L^1(G), Lip(\alpha, pq))$  are isometrically isomorphic where  $Lip(\alpha, pq)$  and  $lip(\alpha, pq)$  denote the Lipschitz-Lorentz spaces defined on  $G$ .  $(L^1(G), A)$  is the space of multipliers from  $L^1(G)$  to  $A$ , and  $\overline{lip(\alpha, pq)}$  denotes the relative completion of  $lip(\alpha, pq)$ . In the second part, the space of multipliers from Lorentz spaces to Lipschitz-Lorentz-Zygmund classes  $L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  and  $L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  is characterized.

In the third part,  $G$  is assumed to be a locally compact abelian group with Haar measure  $\lambda$ . Firstly, some basic properties of  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G) = L_{w_1}^r(G) \cap L(p, q, w_2 d\mu)(G)$  spaces are discussed. Then in the fourth part of this thesis, the necessary conditions for compact embeddings of the spaces  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  are showed. In the fifth part, the multipliers space of  $B_{1,p,q}(G)$ , special case of  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$ , is investigated.

In the last part, the space of multipliers on  $L(p, q)(G)$  is examined and characterized as the space of multipliers of certain Banach algebra.

**Key Words:** Lipschitz-Lorentz spaces, Lipschitz-Lorentz-Zygmund classes, weighted Lorentz spaces, compact embedding, temperate function.

## TEŐEKKÜR

Tez konumu veren ve çalıőmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Cenap DUYAR'a,

İlgi ve alakalarını hiç eksik etmeyen, bilgilerini sınırsızca paylaőan saygıdeğer hocalarım, Prof. Dr. A.Turan GÜRKANLI ve Yrd. Doç. Dr. Birsen SAĐIR DUYAR'a,

Aldığım burs sayesinde daha rahat koőullarda çalıőmamı sağlayan TÜBİTAK-BİDEB'e,

Başta Ailem ve dostlarım olmak üzere bana inanan ve beni destekleyen herkese, teőekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

<b>1. Giriş ve Literatür Özeti</b> .....	1
<b>2. Genel Bilgiler</b> .....	6
<b>3. Materyal ve Metot</b> .....	18
<b>4. Bulgular</b> .....	19
4.1. Lipschitz –Lorentz Uzayları ve Bazı Özellikleri.....	19
4.2. Lipschitz-Lorentz-Zygmund Sınıfları ve $L(p,q)(G)$ Uzayından Bu Sınıflara Tanımlanan Çarpanlar Uzayı.....	40
4.3. $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$ Uzayı ve Bazı Özellikleri.....	54
4.4. $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$ Uzaylarında Kompakt Gömülmeler.....	72
4.5. $B_{1,p,q}(G)$ Uzaylarının Çarpanlar Uzayı.....	87
4.6. Ölçülü Lorentz Uzayları ve Bazı Özellikleri.....	96
<b>5. Tartışma</b> .....	118
<b>6. Sonuç ve Öneriler</b> .....	119
<b>7. Kaynaklar</b> .....	120
<b>8. Özgeçmiş</b> .....	123

## SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$L_x f$	: $f$ fonksiyonunun sol ötelemesi
$\widehat{G}$	: $G$ grubunun karakter grubu
$\widehat{f}$	: $f$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$K$	: Vektör uzayının cismi
$*$	: Girişim işlemi
$\cong$	: İzometrik izomorfizma
$\prec$	: Önde gelme bağıntısı
$(h.h.h.)$	: hemen hemen her yerde
$supp f$	: $f$ fonksiyonunun desteği
$f = O(g)$	: $\frac{f}{g}$ oranı sınırlı
$f = o(g)$	: $\frac{f}{g}$ oranının limiti sıfır
$Hom_S(X, Y)$	: $X$ uzayından $Y$ uzayına tanımlanan sürekli $S$ -modül homomorfizmlerinin uzayı
$M(A)$	: $A$ Banach cebiri üzerindeki çarpanlar uzayı
$(A, B)$	: $A$ uzayından $B$ uzayına giden çarpanlar uzayı
$\mathbb{R}^d$	: $d$ – boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi

## 1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Bir  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her  $x, y \in A$  için

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

olacak şekilde bir  $L > 0$  sabiti bulunabiliyorsa,  $f$  fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyor, denir. İlk defa R.O. Sigismund Lipschitz tarafından ortaya koyulan bu koşul daha sonra Hölder tarafından genelleştirilmiştir. Şöyle ki  $[a, b]$  aralığından  $\mathbb{R}$  kümesine tanımlanan  $f$  fonksiyonu ve herhangi  $x, y \in [a, b]$  için

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\alpha$$

olacak şekilde  $A > 0$  ve  $\alpha \in (0, 1]$  sayıları varsa  $f$  fonksiyonu  $\alpha$  üssel mertebeli Hölder koşulunu sağlıyor, denir. Özel olarak  $\alpha = 1$  için Lipschitz koşulu elde edilmektedir.

Lipschitz uzaylarının tarihsel gelişimi içinde M. H. Taibleson ( J. Math. and Mech., 13(13), 407–480, 1964, J. Math. and Mech., 14(5), 821–840, 1965 ) , S. M. Nikolskii ( Russian Math. Surveys, London Math. Soc, 16(5), 55–104, 1961 ) ve J. Peetre ( Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16(1), 279–317, 1966 ) çalışmalarının önemi büyüktür. Fakat ilk olarak Lipschitz uzayları Zygmund [41, Ch.1,2] çalışmasında görüldü. Bu çalışmada  $0 < \alpha < 1$  ve  $f \in L^p [0, 2\pi]$  olduğunda  $1 \leq p < \infty$  için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{0 < h < \delta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

ifadesi  $f$  fonksiyonunun süreklilik modülünün integrali olarak tanımlandı. Burada  $f \in \Lambda_\alpha^p [0, 2\pi] = Lip(\alpha, p)$  olması için gerek ve yeter koşul  $\omega(f; \delta) = O(\delta^\alpha)$  olmalıdır ifadesi gösterildi. Yine  $p = \infty$  için  $\omega_\infty(f; \delta) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$  ile gösterilen

süreklilik modülü tanımlandı. Bunun önemli bir sonucu olarak,  $f \in \Lambda_\alpha^\infty$  fonksiyonunun Poisson integralinin elde edilmesi için gerek ve yeter koşullar gösterildi. M. H. Taibleson ( J. Math. and Mech., 13(13), 407–480, 1964 ve J. Math. and Mech., 14(5),

821–840, 1965) çalışmalarında  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  ve  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonu için  $1 \leq p < \infty$  olduğunda  $f \in \Lambda(\alpha; p, q)$  olması için gerek ve yeter koşulun

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[ |h|^{-\alpha} \|f(x+h) - f(x)\|_{p,dx} \right]^q \frac{dh}{|h|^n} \right\}^{1/q} < \infty$$

olduğunu elde etti. Yine  $q = \infty$  ve  $0 < \alpha < 1$  için  $\Lambda(\alpha; p, q) = Lip(\alpha, p)$  olduğunu gösterdi. Yine Zygmund [41] çalışmasını referans alarak  $f \in \Lambda(\alpha; p, q)$  fonksiyonunun Poisson integrali için gerek ve yeter koşullar bulundu.

Bunların yanı sıra, 1935 yılında E.S.Quade ( Bulletin of the American Mathematical Society. Volume 41(2), 83–84, 1935) çalışmasında  $0 < \alpha \leq 1$  için  $(a, b)$  aralığında tanımlanan  $Lip(\alpha, p)$  uzaylarının birleşiminin  $L^p(a, b)$  uzayında birinci kategoriden olduğu gösterildi. Yine H.Mirtil ( Canadian Journal of Mathematics, 12, 674–685, 1960 ) çalışmasında Zygmund [41] çalışmasında tanımlanan  $Lip\alpha$  ve  $lip\alpha$  uzayları incelendi ve  $lip\alpha$  uzayının trigonometrik polinomlar tarafından gerilen,  $Lip\alpha$  uzayının kapalı doğrusal bir alt uzayı olduğu gösterildi. Yine bu uzayların Banach uzayı olduğu ve kompakt küme üzerinde  $lip\alpha$  uzayının ikinci topolojik dualinin  $Lip\alpha$  uzayı olduğu K.D.Leeuw ( Studia Mathematica, 21, 55–63, 1961) çalışmasında gösterildi. D.R. Sherbert (Pacific Journal of Mathematics. Volume 13(4), 1387–1399, 1963) çalışmasında  $(X, d)$  bir metrik uzay ve bu uzay üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, sınırlı fonksiyonlar uzayı  $Lip(X, d)$  olduğunda, bu uzayların Banach cebiri olduğu gösterildi ve Lipschitz cebirleri adı altında incelendi. Yine metrik uzay üzerinde tanımlı vektör değerli Lipschitz fonksiyonlarının Banach uzayı J.A.Johnson tarafından ( Bulletin of the American Mathematical Society. Volume 75(6), 1334–1338, 1969) çalışmasında incelendi. Grup olmayan  $\mathbb{R}^n$  uzayının birim küresinin yüzeyinde tanımlı Lipschitz uzayı H.C.Greenwald tarafından (Pacific Journal of Mathematics. Volume 50(1), 63–81, 1974) çalışmasında incelendi.  $(S, d)$  bir metrik uzay,  $\alpha \in (0, 1)$  olduğunda  $Lip(S, d^\alpha)$  uzayı Jerry A. Johnson (Pacific Journal of Mathematics. Volume 51(1), 177–186, 1974) çalışmasında incelendi. Bu çalışmada  $lip(S, d^\alpha)$  uzayının  $c_0$

uzayına,  $Lip(S, d^\alpha)$  uzayının  $\ell_\infty$  uzayına izomorf olan birer alt uzaylarının olduğu gösterildi.

$G$  bir yerel kompakt Abel grup olmak üzere, Burnham ve Goldberg ( Bull. Inst. Math. Acad. Sinica V.2, 1974, 153–164 ), Goldberg ve Seltzer (J. Math. Anal. Appl. V.59, 1977, 488–497) çalışmalarında  $L^1(G)$  uzayından bir  $S(G)$  Segal cebirine olan çarpanlar uzayı çalışıldı. Feichtinger (J. Math. Anal. Appl. V.61, 1977, 341–358) çalışmasında  $L^1(G)$  uzayından bir homojen Banach uzayına olan çarpanlar uzayı ile ilgili sonuçlar elde edildi. Yine  $G$  bir metriklenebilir yerel kompakt Abel grup olmak üzere, Bloom [1] ile Zygmund [41] çalışmalarından esinlenerek Feichtinger [10] ve Quek ve Yap [29, 30] çalışmalarında Lipschitz koşulu  $L^p(G)$  Lebesgue uzaylarına genelleştirildi ve  $lip(\alpha, p)$ ,  $Lip(\alpha, p)$  ile gösterilen Lipschitz uzayları tanımlandı. Yine bu çalışmalarda Lipschitz uzaylarının bazı temel özellikler incelendi.

Bu tezin bulgular bölümünün birinci kısmında yukarıdaki çalışmalara ek olarak Blozinski [2, 3], Ferreyra [12], Hunt [17] ve Wang [36] çalışmalarından yararlanılarak önce  $Lip(\alpha, pq)$ ,  $lip(\alpha, pq)$  sembolleriyle gösterilen Lipschitz-Lorentz uzayları tanımlandı ve  $Lip(\alpha, pq)$  uzayında maksimal homojen Banach uzayı araştırıldı. Daha sonra  $lip(\alpha, pq)$  uzayının  $L^1(G)$  uzayı üzerinde Banach modül olma özelliği verilip, çarpanlara ayrılma (factorization) özellikleri incelendi. İkinci kısımda, Quek ve Yap'ın [30] çalışmasında genel öteleme operatörlerini kullanarak tanımlanan  $LA_*(\alpha, p; G)$ ,  $L\lambda_*(\alpha, p; G)$  ile gösterilen Lipschitz-Zygmund sınıfları, Blozinski [2, 3], Hunt [17], O'Neil [27] ve Saeki ve Thome [35] çalışmalarında kullanarak  $LA_*(\alpha, pq; G)$ ,  $L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  ile gösterilen Lipschitz-Lorentz-Zygmund sınıfları tanımlandı ve bazı özellikleri verildi. Quek ve Yap'ın [30] çalışmasında bulunan  $L^p(G)$  uzaylarından  $LA_*(\alpha, p; G)$ ,  $L\lambda_*(\alpha, p; G)$  Lipschitz-Zygmund sınıflarına tanımlanan çarpanlar uzayı, benzer teknikle  $L(p, q)(G)$  Lorentz uzaylarından  $LA_*(\alpha, pq; G)$ ,  $L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  Lipschitz-Lorentz-Zygmund sınıflarına tanımlanan çarpanlar uzayına genelleştirildi.

Bu çalışmada kullanılan  $w$  ağırlık fonksiyonu tanımı ilk defa A. Beurling tarafından ( LX. Congre's Math. Scand., Helsinki, 1938, 345-366) çalışmasında verildiğinden Beurling ağırlık fonksiyonu olarak da bilinir. Ayrıca bu ağırlık fonksiyonu kullanılarak tanımlanan  $L_w^1(G)$  ile gösterilen ağırlıklı  $L^1(G)$  uzayıda Beurling cebiri olarak adlandırılır. Benzer şekilde  $L_w^p(G)$  ile gösterilen ağırlıklı  $L^p(G)$  uzaylarının bazı özellikleri [13, 26] çalışmalarında incelendi. Yine  $w$  herhangi bir ağırlık fonksiyonu olduğunda H.M. Chung, R.A. Hunt ve D.S. Kurtz ( Indiana Univ. Math. J., V.31(1), 1982, 109-120), E.Sawyer ( Trans. Amer. Math. Soc., V.281(1), 1984, 329-337) , [7] ve [12] çalışmalarında  $\mu$  ölçümü yerine  $w d\mu$  ölçümü alınarak oluşturulan ve  $L(p, q, w d\mu)(G)$  ile gösterilen ağırlıklı Lorentz uzaylarının temel özellikleri incelendi. Ayrıca [37] çalışmasında iki Lebesgue uzayı olan  $L^1(G)$  ve  $L^2(G)$  uzaylarının kesişimi incelendi. Buradan hareketle  $L(p, q, w d\mu)(G)$  ağırlıklı Lorentz uzayları ile  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue uzaylarının kesişimi üçüncü bölümde  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2}(G)$  uzayı adı altında incelendi.

Fonksiyon uzaylarındaki kompaktlık kavramı genellikle Arzela –Ascoli teoremi ile betimlendi.  $G$  bir yerel kompakt Abel grup olduğunda  $L^p(G)$  Lebesgue uzaylarındaki kompaktlık kavramı ilk defa A.Weil ( *L'integration dans les Groupes Topologiques*. Hermann, 2.ed., 1965) çalışmasında ele alındı. E.C.Lawrence ( *Partial differential equations*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998) ve M.Rennardy ve R.C.Rogers ( *An Introduction to Partial Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1992) çalışmalarında ise  $(X, \|\cdot\|_X)$  ve  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  iki normlu uzay ve  $X \subseteq Y$  olduğunda  $X$  uzayının  $Y$  uzayına kompakt gömülmesi için  $C > 0$  bir sabit olduğunda her bir  $x \in X$  için  $\|x\|_Y \leq C \|x\|_X$  olması ve  $X$  uzayındaki her sınırlı kümenin  $Y$  uzayında önkompakt olması şartları kullanıldı. Yine  $Y$  bir Banach uzayı olduğunda gömülme ( birim ) dönüşümü  $i: X \rightarrow Y$  kompakt operatör adını aldı. Gürkanlı, [14] çalışmasında  $A_{w,\omega}^p(\mathbb{R}^d)$  uzayını tanımlayıp bu uzaylardaki kompakt gömülmeler için gerekli koşulları araştırdı. Buradaki teknikler  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzaylarındaki kompakt gömülmeleri incelediğimiz dördüncü bölümde kullanıldı.

Bu tezin bulgular bölümünün beşinci kısmında  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzaylarının özel bir hali olan  $B_{1,p,q}(G)$  uzayları üzerindeki çarpanlar uzayı, [21, 22, 23] çalışmalarında da kullanılan farklı bir teknikle çalışıldı. Yine tezin bulgular bölümünün altıncı kısmında da kullanılan bu teknik ilk defa McKennon ve Griffin [21, 22, 23] tarafından verildi. Bu tekniğe göre, Banach cebiri olmayan  $L^p(G)$  Lebesgue uzayları üzerindeki çarpanlar uzayı,  $L^p(G)$  uzaylarında girişim işleminin tanımlı olduğu, her yerde yoğun bir alt uzay olan (ölçülü) temperate  $L^p(G)$  olarak adlandırılan  $L_r^p(G)$  uzayları üzerindeki çarpanlar uzayı ile ifade edilebilir.  $L^1(G)$ ,  $L^p(G)$  ve  $L(p,q)(G)$  uzayları üzerindeki çarpanlar uzayı daha önce [5, 19, 21, 22, 23, 35] çalışmalarında incelendi. McKennon ve Griffin [21, 22, 23] çalışmalarında  $L^p(G)$  Lebesgue uzayları üzerindeki çarpanlar uzayı,  $L_r^p(G)$  üzerindeki çarpanlar uzayına izometrik izomorf bulundu. Altıncı kısımda ise bu yapılanlar  $L(p,q)(G)$  Lorentz uzayları için incelendi.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezde kullanılacak olan önemli tanımlar ve teoremler tanıtılacaktır.

**2.1.Tanım:**  $X$  bir topolojik uzay,  $E$  bir vektör uzayı  $f$  fonksiyonu da  $X$  kümesinden  $E$  uzayına tanımlı olmak üzere

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümenin kapanışına  $f$  fonksiyonunun desteği denir ve bu küme  $Supp f$  ile gösterilir.

$X$  bir yerel kompakt uzay olmak üzere  $X$  üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, sürekli ve kompakt destekli fonksiyonların vektör uzayı  $C_c(X)$  ile gösterilir [34].

**2.2.Tanım:**  $G$  bir yerel kompakt Abel grup olmak üzere  $G$  üzerinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif regüler  $\mu$  Borel ölçümüne Haar ölçümü denir,

- i.  $E \subset G$  kompakt ise  $\mu(E) < \infty$
- ii. Her  $E \subset G$  kompakt alt kümesi ve  $\forall x \in G$  için  $\mu(x + E) = \mu(E)$ .

Yine her yerel kompakt Abel grubu üzerinde bir tek Haar ölçümü vardır [18, 31].

**2.3.Tanım:**  $X$  bir topolojik uzay olsun.  $X$  uzayındaki tüm açık kümeleri kapsayan bir  $\beta$  en küçük  $\sigma$ -cebiri vardır. Buna Borel cebiri,  $\beta$  nin her elemanına da bir Borel kümesi denir.

$(X, \beta)$  ölçülebilir uzay,  $(Y, \tau)$  bir topolojik uzay olmak üzere  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Her  $V \in \tau$  için  $f^{-1}(V) \in \beta$  oluyorsa  $f$  fonksiyonuna Borel ölçülebilir fonksiyon denir.

$f$  ve  $g$  fonksiyonları  $G$  yerel kompakt Abel grubu üzerinde birer Borel fonksiyonları olsunlar. Bu fonksiyonların girişimi  $f * g$  şeklinde gösterilir ve

$$(f * g)(x) = \int_G f(x - y) g(y) dy$$

biçiminde tanımlıdır. Bu girişim işleminin tanımlı olabilmesi için

$$\int_G |f(x-y)g(y)|dy < \infty$$

olmalıdır [34].

**2.4.Tanım:**  $(B, \|\cdot\|_B)$  bir Banach uzayı olsun. Her  $f \in B$  ve  $\forall x, y \in G$  için  $L_y f(x) = f(y^{-1}x) \in B$  ( $R_y f(x) = f(xy) \in B$ ) ise  $B$  uzayı ötelemeler altında sol (sağ) değişmezdir, denir. Yine  $B$  uzayı ötelemeler altında değişmez ve  $\|L_y f\|_B = \|f\|_B$  koşulu sağlanıyorsa  $B$  uzayı ötelemeler altında kuvvetli değişmezdir, denir [11, 13].

**2.5.Tanım:**  $X, K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer  $X$  uzayı üzerinde bir  $\diamond$  işlemi her  $x, y, z \in X$  ve her  $\alpha, \beta \in K$  için

- i.  $x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z$
- ii.  $x \diamond (y + z) = (x \diamond y) + (x \diamond z)$
- iii.  $(\alpha x) \diamond (\beta y) = \alpha \beta (x \diamond y)$

koşullarını sağlıyorsa,  $X$  kümesi  $K$  cismi üzerinde bir cebirdir, denir. Eğer  $K = \mathbb{C}$  ise  $X$  uzayına karmaşık cebir denir.

$(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay olsun. Eğer  $X, K$  cismi üzerinde bir cebir ve her  $x, y \in X$  için

$$\|x \diamond y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa,  $X$  cebirine  $K$  cismi üzerinde bir normlu cebir denir. Özel olarak  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayı bir Banach uzayı ise  $X$  cebirine Banach cebiri denir [20].

**2.6.Tanım:**  $(A, \|\cdot\|)$  normlu cebirinde bir  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  ağı verilmiş olsun. Eğer her  $x \in A$  için  $\lim_{\alpha} (e_\alpha x) = x$  ( $\lim_{\alpha} (x e_\alpha) = x$ ) sağlanıyorsa  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  ağına  $A$  normlu cebiri için sol (sağ) yaklaşık birim denir. Eğer  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  hem sol, hem de sağ yaklaşık birimse  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  ağına  $A$  normlu cebirinin yaklaşık birimi denir. Buna ek olarak her  $\alpha \in I$  için

$\|e_\alpha\| \leq M$  olacak şekilde bir  $M > 0$  sayısı varsa,  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  ağına  $A$  normlu cebiri için sınırlı yaklaşık birim denir. Ayrıca,  $M = 1$  ise minimal yaklaşık birim adını alır [7].

**2.7.Tanım:**  $(B, \|\cdot\|)$  bir Banach uzayı olsun. Eğer her  $f \in B, x \in G$  için  $L_x f \in B$  ve  $\|L_x f\| = \|f\|$  koşulları sağlanıyorsa  $B$  uzayına  $G$  üzerinde bir yarı homojen Banach uzayı denir. Bunun yanı sıra  $G$  grubundan  $(B, \|\cdot\|)$  uzayına giden  $x \rightarrow L_x f$  dönüşümü sürekli ise  $(B, \|\cdot\|)$  uzayına  $G$  grubu üzerinde homojen Banach uzayı denir [36].

$1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $(L^p(G), \|\cdot\|_p)$  Lebesgue uzayları Homojen Banach uzaylarıdır. Ayrıca  $H(G), B(G)$  uzayında bir homojen Banach uzayı ve  $D(G), B(G)$  uzayında herhangi bir homojen Banach uzayı olduğunda  $D(G) \subset H(G)$  ise  $H(G)$  uzayına  $B(G)$  uzayında bir maksimal homojen Banach uzayı denir. Her  $B(G)$  yarı homojen Banach uzayının içinde bir maksimal homojen Banach uzayı vardır. Daha kesin olarak,  $B_c(G)$  kümesi  $G$  den  $B(G)$  uzayına giden  $x \rightarrow L_x f$  dönüşümünün  $0 \in G$  noktasında sürekli olduğu  $f \in B(G)$  elemanlarının kümesi olsun. Bu takdirde  $B_c(G), B(G)$  uzayında bir maksimal homojen Banach uzayıdır [36].

**2.8.Tanım:**  $(B, \|\cdot\|_B)$  bir Banach uzayı ve  $(A, \|\cdot\|_A)$  bir Banach cebiri olsun.  $A \times B$  den  $B$  içine tanımlanan  $\otimes$  işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa  $B$  uzayı  $A$  uzayı üzerinde bir sol Banach modülü veya sol Banach  $A$ -modülüdür, denir.

Her  $f, g \in A$  ve  $h, k \in B$  için

- i.  $(f + g) \otimes h = (f \otimes h) + (g \otimes h)$  ,  $f \otimes (h + k) = (f \otimes h) + (f \otimes k)$
- ii.  $(f \cdot g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
- iii.  $\forall a \in \mathbb{C}$  için  $a(f \otimes h) = af \otimes h = f \otimes ah$
- iv.  $\|f \otimes h\|_B \leq \|f\|_A \|h\|_B$ .

Bunun yanı sıra  $B, A$  üzerinde bir ideal ve  $A$  cebiri üzerindeki işleme göre bir Banach modülü ise  $B$  uzayına  $A$  cebirinde bir Banach ideali denir [36].

**2.9.Tanım:**  $X$  bir sol Banach  $A$ -modül olmak üzere

$$AX = \{ ax \mid a \in A, x \in X \}$$

kümesinin gerdiği uzayın kapanışına  $X$  modülünün esas kısmı denir ve  $X_e$  ile gösterilir. Eğer  $X = X_e$  ise  $X$  modülüne esas sol Banach  $A$ -modülü denir [7].

$(A, \|\cdot\|_A)$  bir Banach cebiri  $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$  ağı da onun bir yaklaşık birimi olsun. Bu takdirde bir  $X$  sol Banach  $A$ -modülünün esas Banach  $A$ -modül olması için gerekli ve yeterli koşul her  $x \in X$  için  $\lim_{\alpha} e_\alpha x = x$  olmasıdır [7].

**2.10.Teorem (Module Factorization Theorem)** :  $(A, \|\cdot\|_A)$  sınırlı yaklaşık birime sahip bir Banach cebiri ve  $(X, \|\cdot\|_X)$  bir Banach  $A$ -modül olsun. Eğer  $AX$ ,  $X$  uzayında yoğunsa  $AX = X$  olur [7].

**2.11.Tanım:**  $V$  ve  $W$  birer Banach  $S$ -modül olmak üzere her  $s \in S$  ve  $v \in V$  için

$$f(sv) = sf(v)$$

eşitliğini sağlayan  $f : V \rightarrow W$  sınırlı ve doğrusal fonksiyonuna sürekli  $S$ -modül homomorfizması (çarpan) denir. Yine  $V$  uzayından  $W$  uzayına giden tüm sürekli  $S$ -modül homomorfizmalarının uzayı  $Hom_S(V, W)$  (veya  $M(V, W)$ ) ile gösterilir. Ayrıca bu uzayın operatör normuna göre bir Banach uzayı olduğu biliniyor [19, 32].

**2.12.Tanım:**  $G$  bir yerel kompakt Abel grup,  $(B, \|\cdot\|_B)$  ise  $L^1(G)$  uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan bir alt cebiri olsun.

- i.  $(B, \|\cdot\|_B)$  bir homojen Banach uzayıdır.
- ii.  $(B, \|\cdot\|_B)$  uzayı  $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_1$  normuna göre Banach cebiridir.
- iii.  $(B, \|\cdot\|_B)$  uzayı  $L^1(G)$  uzayında  $\|\cdot\|_1$  normuna göre her yerde yoğundur.

Bu takdirde  $(B, \|\cdot\|_B)$  uzayına Segal cebiri denir [31, 36].

**2.13.Tanım:**  $(B, \|\cdot\|_B)$  bir Banach uzayı olsun. Her  $f \in B$ ,  $x \in G$  ve  $t \in \widehat{G}$  için  $M_t f(x) = \langle x, t \rangle f(x)$  olmak üzere  $M_t f(x) \in B$  ise  $B$  uzayı karakter değişmezdir, denir. Yine  $B$  karakter değişmez ve  $\|M_t f\|_B = \|f\|_B$  koşulu sağlanıyorsa  $B$  kuvvetli karakter değişmez denir [13].

**2.14.Teorem:**  $E$  ve  $F$  birer Banach uzayı olsunlar. Eğer  $E \xrightarrow{u} F$  fonksiyonu doğrusal, sürekli, birebir ve örtense bu  $u$  fonksiyonu  $E$  uzayından  $F$  uzayına bir homeomorfizmadır [4].

Bu teoremin sonucu olarak, herhangi bir  $E$  vektör uzayı hem  $P_1$  hem de  $P_2$  normuna göre bir Banach uzayı ise  $P_1$  ve  $P_2$  normları denktir. Ayrıca  $E$ , bu normlardan birine göre Banach uzayı, diğerine göre Banach uzayı değilse  $P_1$  ve  $P_2$  normları denk değildir.

**2.15.Tanım:** Bir  $G$  yerel kompakt grubu üzerinde tanımlı reel değerli bir  $w$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:

- i. Her  $x \in G$  için  $w(x) \geq 1$ ,
- ii. Her  $x, y \in G$  için  $w(xy) \leq w(x)w(y)$ ,
- iii.  $w$  fonksiyonu ölçülebilir ve yerel sınırlı.

Bu takdirde  $w$  fonksiyonuna Beurling ağırlık fonksiyonu denir. Bundan yararlanarak  $L_w^p(G)$  ile gösterilen ağırlıklı Lebesgue uzayları

$$L_w^p(G) = \{f : fw \in L^p(G)\}$$

biçiminde tanımlanır.  $L_w^p(G)$  uzayı

$$\|f\|_{p,w} = \left( \int_G |f(x)|^p w^p(x) d\mu(x) \right)^{1/p}$$

normuna göre bir Banach uzayı olup,  $p=1$  için bu uzay girişim işlemine göre bir Banach cebiridir ve Beurling cebiri olarak adlandırılır.

$G$  üzerinde tanımlı iki  $w_1, w_2$  ağırlık fonksiyonu verildiğinde eğer her  $x \in G$  için  $w_2(x) \leq Cw_1(x)$  olacak şekilde  $C > 0$  sayısı varsa  $w_2$ ,  $w_1$  ağırlık fonksiyonundan

önde gelir denir ve  $w_2 \prec w_1$  şeklinde gösterilir. Eğer  $w_2 \prec w_1$  ve  $w_1 \prec w_2$  ise  $w_1$  ve  $w_2$  ağırlık fonksiyonları denktir denir ve bu durum  $w_1 \approx w_2$  simgesi ile gösterilir [11, 13].

**2.16. Tanım:**  $G$  bir yerel kompakt Abel grup,  $\mu$  onun üzerinde bir Haar ölçümü olmak üzere bir  $(G, \mu)$  ölçüm uzayı verilsin. Yine herhangi bir  $f$  fonksiyonu  $G$  üzerinde  $\mu$ -ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere bir  $\lambda_f(\cdot)$  fonksiyonunu herhangi bir  $y \geq 0$  için

$$\lambda_f(y) = \mu\{x \in G : |f(x)| > y\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu  $\lambda_f(\cdot)$  fonksiyonuna,  $f$  fonksiyonunun dağılım fonksiyonu denir. Ayrıca  $t \geq 0$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \inf\{y : y > 0, \lambda_f(y) \leq t\} \\ &= \sup\{y : y > 0, \lambda_f(y) > t\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan  $f^*$  fonksiyonuna  $f$  fonksiyonunun yeniden düzenlenmiş fonksiyonu,  $x > 0$  olmak üzere

$$f^{**}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f^*(t) dt$$

biçiminde tanımlanan  $f^{**}$  fonksiyonuna da  $f$  fonksiyonunun ortalama fonksiyonu denir. Bu çalışma boyunca  $\inf \emptyset = \infty$  ve  $\sup \emptyset = 0$  olarak kabul edilecektir. Yine  $\lambda_f(\cdot)$ ,  $f^*(\cdot)$  ve  $f^{**}(\cdot)$  fonksiyonlarının artmayan ve sağdan sürekli fonksiyonlar olduğu biliniyor [2, 3, 5, 17].

**2.17. Tanım:**  $G$  bir yerel kompakt Abel grup,  $\mu$  onun üzerinde bir Haar ölçümü,  $f$  ise  $G$  üzerinde herhangi bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Yine  $\|\cdot\|_{p,q}^*$  fonksiyonu

$$\|f\|_{p,q}^* = \|f\|_{p,q,\mu}^* = \begin{cases} \left( \frac{q}{p} \int_0^\infty t^{\frac{q-1}{p}} (f^*(t))^q dt \right)^{\frac{1}{q}} & ; 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & ; 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde  $\|f\|_{p,q}^* < \infty$  koşulunu sağlayan  $G$  üzerinde tanımlı ölçülebilir  $f$  fonksiyonlarının (denklik sınıflarının) vektör uzayına Lorentz uzayı denir ve  $L(p,q)(G) = L(p,q,\mu)(G)$  ile gösterilir [17, 35].

Özel olarak  $p = q$  ise

$$\|f\|_{p,p}^* = \left( \int_0^\infty (f^*(t))^p dt \right)^{1/p} = \left( \int_G |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} = \|f\|_p$$

olduğu biliniyor. Bunun sonucu  $L(p,p,\mu)(G) = L^p(G)$  çıkar [17]. Yine  $L(p,q)(G)$  Lorentz uzayı üzerinde

$$\|f\|_{p,q} = \|f\|_{p,q,\mu} = \begin{cases} \left( \frac{q}{p} \int_0^\infty t^{q-1} [f^{**}(t)]^q dt \right)^{1/q} & ; 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t) & ; 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_{p,q,\mu}$  fonksiyonu bir norm olup  $(L(p,q)(G), \|\cdot\|_{p,q})$  uzayı bu norm altında Banach uzayıdır. Ayrıca  $1 < p < \infty$  ve  $1 \leq q < \infty$  olmak üzere  $G$  üzerinde tanımlı herhangi bir  $f$  ölçülebilir fonksiyonu için

$$\|f\|_{p,q}^* \leq \|f\|_{p,q} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{p,q}^*$$

eşitsizliği vardır. Yani  $\|\cdot\|_{p,q}^*$  fonksiyonu  $\|\cdot\|_{p,q}$  normuna denktir [5, 17]. Ayrıca  $f$  ve  $g$ ,  $G$  üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar ve  $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$  olmak üzere aşağıdaki özelliklerin varlığı biliniyor [17, 35].

- i.**  $\lambda_{|f|}(\cdot) = \lambda_f(\cdot)$ ,  $|f|^* = f^*$ ,  $|f|^{**} = f^{**}$  ve  $f^{**} \geq f^*$  olur.
- ii.** Eğer (h.h.h.)  $|f| \leq |g|$  ise  $\lambda_f(\cdot) \leq \lambda_g(\cdot)$ ,  $f^* \leq g^*$  ve  $f^{**} \leq g^{**}$  bulunur.
- iii.**  $(|f|^p)^* = (f^*)^p$  ve her  $\alpha \in \mathbb{C}$  için  $(\alpha f)^* = |\alpha| f^*$ ,  $(\alpha f)^{**} = |\alpha| f^{**}$  olur.
- iv.**  $s > 0, t > 0$  olmak üzere  $f^*(t) \leq s$  olması için gerekli ve yeterli koşul  $\lambda_f(s) \leq t$  olmasıdır. Bundan dolayı

$$\|f\|_{p,\infty}^* = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) = \sup_{s>0} s (\lambda_f(s))^{1/p}$$

olur.

v.  $0 < p < \infty, 0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$  olmak üzere

$$\|f\|_{p,q_2}^* \leq \|f\|_{p,q_1}^*$$

eşitsizliği vardır. Böylece  $L(p, q_1)(G) \subset L(p, q_2)(G)$  kapsaması gerçekleşir.

**2.18.Tanım:**  $(X, \mu), (Y, \lambda)$  ve  $(Z, \nu)$  ölçüm uzayları ve  $T$  ise  $X$  ve  $Y$  uzaylarından alınan basit fonksiyon çiftlerini,  $Z$  uzayındaki negatif olmayan, ölçülebilir fonksiyonlara dönüştüren bir operatör olsun. Eğer  $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2$  basit fonksiyonlar olmak üzere bu  $T$  operatörü aşağıdaki koşulları sağlarsa pozitif girişim operatörü olarak adlandırılır [2, 3].

- $\|T(f, g)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ ;
- $\|T(f, g)\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ ;
- $\|T(f, g)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$ ;
- $T(f_1 + f_2, g) = T(f_1, g) + T(f_2, g)$ ;
- $T(f, g_1 + g_2) = T(f, g_1) + T(f, g_2)$ .

**2.19.Önerme:**  $T$  bir girişim operatörü ve  $h = T(f, g)$  olsun.  $1 < p < \infty, q \neq \infty$  ve  $g \in L^1(G)$  olduğunda her  $f \in L(p, q)(G)$  için  $h \in L(p, s)(G)$  ( $q \leq s$ ) olacak şekilde  $T$ 'nin bir tek genişlemesi vardır [3].

**2.20.Teorem:**  $G$  bir yerel kompakt Abel grup,  $\mu$  onun üzerinde bir Haar ölçümü olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır [5].

i. Herhangi bir  $s \in G$  için  $f_s(x) = f(x-s)$  olmak üzere

$$\lambda_{f_s} = \lambda_f, f_s^* = f^*, f_s^{**} = f^{**}, \|f_s\|_{p,q}^* = \|f\|_{p,q}^*, \|f_s\|_{p,q} = \|f\|_{p,q}$$

eşitlikleri vardır.

ii.  $1 < p < \infty$  ve  $1 \leq q < \infty$  olmak üzere  $G$  grubundan  $L(p, q)(G)$  Lorentz uzayına giden  $s \rightarrow f_s$  fonksiyonu süreklidir.

iii.  $1 < p < \infty$  ve  $1 \leq q < \infty$  olmak üzere her  $f \in L(p, q)(G)$  için  $f * e_\alpha \rightarrow f$  ve her  $\alpha \in I$  için  $\|e_\alpha\|_1 = 1$  olacak şekilde  $L^1(G)$  uzayının bir  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  yaklaşık birimi vardır.

**2.21.Tanım:**  $(G, \mathfrak{M}, \mu)$  bir ölçüm uzayı,  $f$  fonksiyonu  $G$  üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun.  $w(x)$  fonksiyonu bir ağırlık fonksiyonu olduğunda herhangi bir  $E \in \mathfrak{M}$  için

$$w(E) = \int_E w(x) d\mu(x)$$

olsun. Bu takdirde  $\mu$  Haar ölçümü yerine  $w d\mu$  ölçümünü alırsa,  $f$  fonksiyonu  $G$  üzerinde tanımlı karmaşık değerli ve  $w d\mu$ -ölçülebilir bir fonksiyon olduğunda  $\lambda_f(\cdot)$  fonksiyonu herhangi bir  $y \geq 0$  için

$$\lambda_{f,w}(y) = w\{x \in G : |f(x)| > y\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu  $\lambda_{f,w}(\cdot)$  fonksiyonuna  $f$  fonksiyonunun  $w d\mu$  ölçümünü göre dağılım fonksiyonu denir. Ayrıca  $t \geq 0$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f_w^*(t) &= \inf \{y : y > 0, \lambda_{f,w}(y) \leq t\} \\ &= \sup \{y : y > 0, \lambda_{f,w}(y) > t\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan  $f_w^*$  fonksiyonuna  $f$  fonksiyonunun  $w d\mu$  ölçümünü göre yeniden düzenlenmiş fonksiyonu,  $x > 0$  olmak üzere

$$f_w^{**}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f_w^*(t) dt$$

biçiminde tanımlanan  $f_w^{**}$  fonksiyonuna da  $f$  fonksiyonunun  $w d\mu$  ölçümünü göre ortalama fonksiyonu denir. Bu çalışma boyunca  $\inf \emptyset = \infty$  ve  $\sup \emptyset = 0$  olarak kabul edilecektir. Yine  $\lambda_{f,w}(\cdot)$ ,  $f_w^*(\cdot)$  ve  $f_w^{**}(\cdot)$  fonksiyonlarının artmayan ve sağdan sürekli fonksiyonlar olduğu bilinmektedir [8, 25].

**2.22.Tanım:**  $G$  bir yerel kompakt Abel grup olsun.  $\mu$ ,  $G$  üzerinde bir ölçüm ve  $w$ ,  $G$  üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $G$  üzerinde tanımlı herhangi bir  $w d\mu$ -ölçülebilir  $f$  fonksiyonu verilsin ve

$$\|f\|_{p,q,w}^* = \|f\|_{p,q,wd\mu}^* = \begin{cases} \left( \frac{q}{p} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} (f_w^*(t))^q dt \right)^{1/q} & ; 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_w^*(t) & ; 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde  $\|f\|_{p,q,w}^* < \infty$  olan  $G$  üzerinde tanımlı ölçülebilir  $f$  fonksiyonlarının denklik sınıflarının vektör uzayına ağırlıklı Lorentz uzayı denir ve  $L(p,q,wd\mu)(G)$  ile gösterilir [8, 25].

Özel olarak  $w=1$  alınır, Lorentz uzaylarının kendisi elde edilir. Yine  $L(p,q,wd\mu)(G)$  ağırlıklı Lorentz uzayı üzerinde

$$\|f\|_{p,q,w} = \|f\|_{p,q,wd\mu} = \begin{cases} \left( \frac{q}{p} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} [f_w^{**}(t)]^q dt \right)^{1/q} & ; 0 < p < \infty, 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_w^{**}(t) & ; 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $\|\cdot\|_{p,q,w} = \|\cdot\|_{p,q,wd\mu}$  fonksiyonu bir norm olur ve  $L(p,q,wd\mu)(G)$  uzayı bu norma göre bir Banach uzayıdır. Ayrıca  $1 < p < \infty$  ve  $1 \leq q < \infty$  olmak üzere  $G$  üzerinde tanımlı herhangi bir  $f$  ölçülebilir fonksiyonu için

$$\|f\|_{p,q,w}^* \leq \|f\|_{p,q,w} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{p,q,w}^*$$

eşitsizliği vardır. Yani  $\|\cdot\|_{p,q,w}^*$  fonksiyonu  $\|\cdot\|_{p,q,w}$  normuna denktir [5, 8, 17, 25]. Ayrıca  $f$  ve  $g$  fonksiyonları  $G$  üzerinde tanımlı  $wd\mu$ -ölçülebilir fonksiyonlar ve  $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$  olmak üzere aşağıdaki özelliklerin varlığı biliniyor [8, 25].

- i.**  $\lambda_{|f|_w}(\cdot) = \lambda_{f_w}(\cdot)$ ,  $|f|_w^* = f_w^*$ ,  $|f|_w^{**} = f_w^{**}$  ve  $f_w^{**} \geq f_w^*$  olur.
- ii.** Eğer  $wd\mu$  ölçümüne göre (h.h.h.)  $|f| \leq |g|$  ise  $\lambda_{f_w}(\cdot) \leq \lambda_{g_w}(\cdot)$ ,  $f_w^* \leq g_w^*$  ve  $f_w^{**} \leq g_w^{**}$  bulunur.
- iii.**  $(|f|_w^p)^* = (f_w^*)^p$  ve her  $\alpha \in \mathbb{C}$  için  $(\alpha f_w)^* = |\alpha| f_w^*$ ,  $(\alpha f_w)^{**} = |\alpha| f_w^{**}$  olur.
- iv.**  $0 < p < \infty, 0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$  olmak üzere

$$\|f\|_{p,q_2,w}^* \leq \|f\|_{p,q_1,w}^*$$

eşitsizliği vardır. Bundan dolayı  $L(p, q_1, w d\mu)(G) \subset L(p, q_2, w d\mu)(G)$  kapsaması gerçekleşir. Yine  $w \geq 1$  olduğundan  $L(p, q, w d\mu)(G) \subset L(p, q, d\mu)(G)$  yazılır.

**2.23.Tanım:**  $A$  kümesi  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  için  $L(p, q)(G)$  uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan bir alt vektör uzayı olsun.

- i.  $(A, \|\cdot\|_A)$  uzayı girişim işlemine göre bir Banach  $L^1(G)$ -modül ve  $\|\cdot\|_A \geq \|\cdot\|_{pq}$  olsun.
- ii. Her  $\alpha \in I$  için  $\|e_\alpha\|_1 = 1$  ve her  $f \in A$  için  $\|f * e_\alpha - f\|_A \rightarrow 0$  koşulunu sağlayan  $L^1(G)$  uzayının bir  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  yaklaşık birimi vardır.

Bu takdirde  $A$  uzayının relatif tamlaması,

$$\tilde{A} = \left\{ f \in L(p, q)(G) : \text{her } \alpha \in I \text{ için } f * e_\alpha \in A \text{ ve } \sup_\alpha \|f * e_\alpha\|_A < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır.  $\tilde{A}$  uzayı  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  yaklaşık biriminin seçiminden bağımsızdır. Ayrıca bu uzay üzerindeki norm  $f \in \tilde{A}$  için

$$\|f\|_{\tilde{A}} = \sup_\alpha \|f * e_\alpha\|_A$$

şeklinde tanımlanır [8, 29].

**2.24.Önerme:**  $A$  kümesi 2.23.Tanımdaki gibi olsun. Bu takdirde

- i. Eğer  $f \in \tilde{A}$  ve  $g \in L^1(G)$  ise  $f * g \in \tilde{A}$  ve  $\|f * g\|_{\tilde{A}} \leq \|f\|_{\tilde{A}} \|g\|_1$  olur,
- ii. Her  $f \in A$  için  $\|f\|_{\tilde{A}} = \|f\|_A$  dır,
- iii.  $A, \tilde{A}$  uzayının kapalı bir alt uzayıdır [8, 29].

**2.25.Tanım:**  $X$  bir yerel kompakt Hausdorff uzayı,  $M(X)$  ise  $X$  üzerindeki karmaşık Radon ölçümlerinin uzayı olsun. Sürekli, karmaşık değerli ve sonsuzda sıfır olan fonksiyonların uzayı  $C_0(X)$  ile gösterilsin. Bu uzayın duali  $C_0(X)^*$  olsun. Bu takdirde Riesz temsil teoremiyle  $M(X)$  uzayı  $C_0(X)^*$  uzayına izometrik izomorftur. Buradaki izometri  $\mu$  ölçümünü  $I_\mu(\cdot) = \int_X (\cdot) d\mu$  ile tanımlı  $I_\mu$  doğrusal fonksiyonuna dönüştürür.

$C_0(X)^*$  üzerindeki belirsiz topoloji yukarıda belirtilen doğrusal fonksiyonelin noktasal yakınsamasıdır. Yani,  $I_{\mu_\alpha} \rightarrow I_\mu$  olması için gerek ve yeter koşul her  $f \in C_0(X)$  için  $I_{\mu_\alpha}(f) \rightarrow I_\mu(f)$  olmasıdır.

$M(X)$  ve  $C_0(X)^*$  arasında oluşturulan izometri yardımıyla kurulan topolojiye belirsiz (vague) topoloji denir [6].

### 3.MATERYAL VE METOT

Bulgular bölümünün ilk kısmında bahsedilen  $Lip(\alpha, pq)$ ,  $lip(\alpha, pq)$  Lipschitz-Lorentz uzaylarının temel özellikleri Feichtinger [10], Ferreyra [12], Hewitt-Ross [15], Quek-Yap [29, 30] ve Zygmund [41] çalışmalarındaki metotlar kullanılarak incelendi. İkinci kısımda incelenen Lipschitz-Lorentz-Zygmund sınıfları ve Lorentz uzaylarından bu sınıflara olan çarpanlar uzayı konularında Quek-Yap [30] çalışması ağırlıklı olmak üzere yukarıda belirtilen tüm çalışmalardaki metotlar sık sık kullanıldı.

Bulgular bölümünün üçüncü kısmında çalışılan  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayı ve temel özellikleri Duyar-Gürkanlı [8], Feichtinger-Gürkanlı [11], Ferreyra [12], Hunt [17], Moritoh vd.[25], Murthy-Unni [26], O'Neil [27] ve Saeki-Thome[35] çalışmalarındaki metotlar kullanılarak incelendi. Dördüncü kısımda bahsedilen  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzaylarında kompakt gömülmeler konusunda ise Gürkanlı [14] çalışması başta olmak üzere Dieudonne [6] ve Feichtinger-Gürkanlı [11] çalışmalarındaki metotlar kullanıldı.

Son iki kısımda çalışılan  $L^1(G) \cap L(p,q)(G)$  uzayları, ölçülü Lorentz uzayları ve bazı özellikleri konusunda Mckennon [21, 22, 24], Mckennon-Griffin [23], Öztop [28] çalışmalarındaki metotlar ağırlıklı olmak üzere Blozinski [2, 3], Chen-Lai [5], Hewitt-Ross [15], Hunt [17], Rieffel [32] ve Yap [38, 39] çalışmalarındaki metotlar kullanıldı.

## 4. BULGULAR

### 4.1. Lipschitz –Lorentz Uzayları ve Bazı Özellikleri

$G$  bir metriklenebilir yerel kompakt Abel grup,  $\mu$  onun üzerindeki Haar ölçümü ve  $d$  metriği ötelemeler altında değişmez kalan bir metrik olsun.  $0 < \alpha < 1$  ve  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $G$  grubunun biriminin sayılabilir azalan (açık) bir tabanı olsun. Herhangi bir  $y \in G$  için  $d(0, y) = |y|$  olduğunda  $\Delta$  işareti simetrik farkı göstermek üzere  $y \rightarrow 0$  iken  $\mu((y+V_n)\Delta V_n)/|y|^\alpha \rightarrow 0$  olduğunu kabul edelim.  $\chi$  karakteristik fonksiyon olmak üzere

$$e_n = \mu(V_n)^{-1} \chi_{V_n}$$

şeklinde tanımlanan  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L^1(G)$  uzayında bir yaklaşık birim olur [30]. Herhangi bir  $f \in L(p, q)(G)$  ve  $\delta > 0$  sayısı verilsin. Her  $x, y \in G$  için  $L_y f(x) = f(x - y)$  olmak üzere  $f$  fonksiyonunun süreklilik modülü

$$\omega_{pq}(f; \delta) = \sup \left\{ \|L_y f - f\|_{pq} : |y| \leq \delta \right\}$$

olsun. Bu takdirde  $0 < p, q \leq \infty$  için Lipschitz- Lorentz uzayları

$$Lip(\alpha, pq) = \{f \in L(p, q)(G) : \omega_{pq}(f; \delta) = O(\delta^\alpha)\}$$

ve

$$lip(\alpha, pq) = \{f \in Lip(\alpha, pq) : \omega_{pq}(f; \delta) = o(\delta^\alpha)\}$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi bu uzayların neden vektör uzayı olduklarını kısaca belirtelim.  $K = \mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$  olduğunda

$$+ : Lip(\alpha, pq) \times Lip(\alpha, pq) \rightarrow Lip(\alpha, pq) \quad (f, g) \rightarrow f + g$$

$$+ : lip(\alpha, pq) \times lip(\alpha, pq) \rightarrow lip(\alpha, pq) \quad (f, g) \rightarrow f + g$$

$$\bullet : K \times Lip(\alpha, pq) \rightarrow Lip(\alpha, pq) \quad (\alpha, f) \rightarrow \alpha f$$

$$\bullet : K \times lip(\alpha, pq) \rightarrow lip(\alpha, pq) \quad (\alpha, f) \rightarrow \alpha f$$

dönüşümleri toplama ve skalerle çarpma işlemlerini gösterebiliriz. Bu işlemlere göre  $Lip(\alpha, pq)$  ve  $lip(\alpha, pq)$  uzayları  $K$  cismi üzerinde birer vektör uzayıdır. Önce toplama ve çarpma işlemlerinin kapalılık özelliğini gösterelim. Herhangi  $f, g \in Lip(\alpha, pq)$  verilsin. Bu takdirde

$$\omega_{pq}(f; \delta) = O(\delta^\alpha) \text{ ve } \omega_{pq}(g; \delta) = O(\delta^\alpha)$$

yazılır. Buradan bir  $A > 0$  sayısına karşılık  $0 < \delta < \delta_A$  olduğunda  $\omega_{pq}(f; \delta) \leq A\delta^\alpha$  olacak şekilde bir  $\delta_A > 0$  sayısı ve bir  $B > 0$  sayısına karşılık  $0 < \delta < \delta_B$  olduğunda  $\omega_{pq}(g; \delta) \leq B\delta^\alpha$  olacak şekilde bir  $\delta_B > 0$  sayısı vardır. O zaman  $0 < \delta < \min\{\delta_A, \delta_B\}$  olduğunda

$$\begin{aligned} \omega_{pq}(f + g; \delta) &\leq \omega_{pq}(f; \delta) + \omega_{pq}(g; \delta) \\ &\leq (A + B)\delta^\alpha \end{aligned}$$

olur. Böylece  $\omega_{pq}(f + g; \delta) = O(\delta^\alpha)$  ve  $f + g \in Lip(\alpha, pq)$  bulunur. Herhangi  $\lambda \in K$  alalım.  $\lambda = 0$  ise  $\lambda \cdot f = 0 \cdot f = [0] \in Lip(\alpha, pq)$  bulunur. Eğer  $\lambda \neq 0$  ise  $f \in Lip(\alpha, pq)$  olduğundan bir  $A > 0$  sayısı için  $0 < \delta < \delta_A$  olduğunda  $\omega_{pq}(f; \delta) \leq A\delta^\alpha$  olacak şekilde bir  $\delta_A > 0$  sayısı vardır.  $A' = A|\lambda|$  olsun. O zaman  $0 < \delta < \delta_A$  olduğunda  $\omega_{pq}(\lambda f; \delta) \leq A'\delta^\alpha$  olur. Böylece  $\omega_{pq}(\lambda f; \delta) = O(\delta^\alpha)$  ve  $\lambda f \in Lip(\alpha, pq)$  yazılır.

Şimdi de herhangi  $f, g \in lip(\alpha, pq)$  alalım. Aynı zamanda  $f, g \in Lip(\alpha, pq)$  olduğundan  $f + g \in Lip(\alpha, pq)$  ve her  $\lambda \in K$  için  $\lambda f \in Lip(\alpha, pq)$  olur.  $lip(\alpha, pq)$  uzayının tanımı ile  $f, g \in lip(\alpha, pq)$  ise herhangi  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda  $\omega_{pq}(f; \delta) \leq \frac{\varepsilon}{2}\delta^\alpha$  olacak şekilde  $a_\varepsilon > 0$  ve her  $0 < \delta < b_\varepsilon$  için

$\omega_{pq}(g; \delta) \leq \frac{\varepsilon}{2}\delta^\alpha$  olacak şekilde  $b_\varepsilon > 0$  sayıları vardır. O zaman  $0 < \delta < \min\{a_\varepsilon, b_\varepsilon\}$  için

$$\omega_{pq}(f + g; \delta) \leq \omega_{pq}(f; \delta) + \omega_{pq}(g; \delta) \leq \varepsilon\delta^\alpha$$

olur. Böylece  $\omega_{pq}(f + g; \delta) = o(\delta^\alpha)$  ve  $f + g \in lip(\alpha, pq)$  yazılır. Herhangi  $\lambda \in K$  alalım.  $\lambda = 0$  ise  $\lambda \cdot f = 0 \cdot f = [0] \in lip(\alpha, pq)$  bulunur. Eğer  $\lambda \neq 0$  ise  $f \in lip(\alpha, pq)$

olduğundan her  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda  $\omega_{pq}(f; \delta) \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \delta^\alpha$  olacak şekilde bir  $a_\varepsilon > 0$  sayısı vardır. O zaman her  $\varepsilon > 0$  sayısı için her  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda  $\omega_{pq}(\lambda f; \delta) \leq \varepsilon \delta^\alpha$  olur. Böylece  $\omega_{pq}(\lambda f; \delta) = o(\delta^\alpha)$  ve  $\lambda f \in \text{lip}(\alpha, pq)$  yazılır.

Böylece  $\text{Lip}(\alpha, pq)$  ve  $\text{lip}(\alpha, pq)$  uzayları toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Yine

1.  $f + g = g + f$
2.  $f + (g + h) = (f + g) + h$
3.  $f + 0 = f$  eşitliğini sağlayan bir tek  $0 = [0] \in \text{Lip}(\alpha, pq)$  vardır.
4.  $f + (-f) = 0$  eşitliğini sağlayan bir tek  $-f = [-f] \in \text{Lip}(\alpha, pq)$  vardır.
5. her  $f \in \text{Lip}(\alpha, pq)$  için  $1 \cdot f = f$ .
6.  $\lambda \cdot (f + g) = \lambda f + \lambda g$ .
7.  $(\lambda + \beta) \cdot f = \lambda f + \beta f$
8.  $(\lambda \beta) \cdot f = \lambda(\beta f)$

koşulları sağlandığından  $\text{Lip}(\alpha, pq)$  ve  $\text{lip}(\alpha, pq)$  uzayları  $K$  cismi üzerinde birer vektör uzayı olur.

**4.1.1.Önerme:**  $\text{Lip}(\alpha, pq)$  ve  $\text{lip}(\alpha, pq)$  uzayları  $0 < p, q \leq \infty$  için

$$\|f\|_{(\alpha, pq)} = \|f\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha}$$

şeklinde tanımlanan  $\|\cdot\|_{(\alpha, pq)}$  fonksiyonu her iki Lipschitz-Lorentz uzayında birer norm olur.

**İspat:** Herhangi bir  $c \in \mathbb{C}$  ve herhangi  $f, g \in \text{Lip}(\alpha, pq)$  fonksiyonlarını alalım. Yine

$\|\cdot\|_{pq}$  fonksiyonunun bir norm olduğunu biliyoruz. Bu nedenle

- i.  $\|f\|_{(\alpha, pq)} \geq 0$  olması  $\|\cdot\|_{pq}$  fonksiyonunun bir norm olmasından kolayca görülür.

ii.  $\|f\|_{(\alpha,pq)} = 0$  olsun. Bu takdirde  $\|f\|_{pq} = 0$  ve  $\sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} = 0$  elde edilir.

$\|\cdot\|_{pq}$  fonksiyonu bir norm olduğundan  $f = 0$  (h.h.h.) yazılır. Tersine  $f = 0$  ise

$\|f\|_{pq} = 0$  ve  $\|L_y f - f\|_{pq} \leq 2\|f\|_{pq} = 0$  olur. Böylece  $\|f\|_{(\alpha,pq)} = 0$  bulunur.

iii.  $\|\cdot\|_{pq}$  bir norm olduğu için

$$\begin{aligned} \|cf\|_{(\alpha,pq)} &= \|cf\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(cf) - (cf)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &= |c|\|f\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{|c|\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} = |c|\|f\|_{(\alpha,pq)} \end{aligned}$$

olur.

iv.  $\|\cdot\|_{pq}$  bir norm olduğu için

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{(\alpha,pq)} &= \|f + g\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(f + g) - (f + g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\leq \|f\|_{pq} + \|g\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y f - f + L_y g - g\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\leq \|f\|_{pq} + \|g\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y g - g\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &= \|f\|_{(\alpha,pq)} + \|g\|_{(\alpha,pq)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $\|\cdot\|_{(\alpha,pq)}$  fonksiyonu her iki Lipschitz-Lorentz uzayında norm olur.

**4.1.2.Önerme:**  $p = q = 1, p = q = \infty$  veya  $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$  olsun. Bu takdirde  $Lip(\alpha, pq)$  ve  $lip(\alpha, pq)$  uzayları  $\|\cdot\|_{(\alpha,pq)}$  normuna göre birer Banach uzaylarıdır.

**İspat:**  $Lip(\alpha, pq)$  normlu uzayından herhangi bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy dizisi alalım. Bu takdirde herhangi  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $n, m \geq N$  için

$$\|f_n - f_m\|_{(\alpha,pq)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.1.2.1)$$

olacak şekilde bir  $N \in \mathbb{N}$  vardır. O zaman her  $n, m \geq N$  için

$$\left| \|f_n\|_{(\alpha, pq)} - \|f_m\|_{(\alpha, pq)} \right| \leq \|f_n - f_m\|_{(\alpha, pq)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılır. Böylece  $\{\|f_n\|_{(\alpha, pq)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $\mathbb{R}$  uzayında bir Cauchy dizisi olur.  $\mathbb{R}$  tam olduğundan  $\{\|f_n\|_{(\alpha, pq)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  sayı dizisi yakınsaktır.  $\mathbb{R}$ 'de yakınsak her dizi sınırlı olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\|f_n\|_{(\alpha, pq)} \leq M$  olacak şekilde bir  $M > 0$  sayısı vardır. Böylece her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f_n \in Lip(\alpha, pq)$  olduğundan her  $\delta > 0$  için

$$\sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y f_n - f_n\|_{pq}}{\delta^\alpha} \leq M$$

olur. Böylece  $|y| \leq \delta$  olduğunda her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\frac{\|L_y f_n - f_n\|_{pq}}{\delta^\alpha} \leq M \quad (4.1.2.2)$$

yazılır. Yine  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L(p, q)(G)$  uzayında da bir Cauchy dizisi ve  $L(p, q)(G)$  uzayı  $\|\cdot\|_{pq}$  normuna göre bir Banach uzayı olduğundan  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi bir  $f \in L(p, q)(G)$  fonksiyonuna  $\|\cdot\|_{pq}$  normuna göre yakınsar. O zaman her  $\varepsilon > 0$  sayısı için, her  $n \geq K$  olduğunda

$$\|f_n - f\|_{pq} < \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{4(2 + \delta^\alpha)} \quad (4.1.2.3)$$

olacak şekilde bir  $K \in \mathbb{N}$  vardır. Yine aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için, her  $n \geq K$  olduğunda (4.1.2.3) ile

$$\left| \frac{\|L_y f_n - f_n\|_{pq} - \|L_y f - f\|_{pq}}{\delta^\alpha} \right| \leq \frac{\|L_y (f_n - f) - (f_n - f)\|_{pq}}{\delta^\alpha} \leq \frac{2\|f_n - f\|_{pq}}{\delta^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2(2 + \delta^\alpha)}$$

bulunur. O zaman  $\varepsilon > 0$  için  $n \geq K$  olduğunda (4.1.2.2) eşitsizliğiyle  $y \in G$  için  $|y| \leq \delta$  olduğunda

$$\frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{\delta^\alpha} \leq \frac{\|L_y f_n - f_n\|_{pq}}{\delta^\alpha} + \frac{\varepsilon}{2(2 + \delta^\alpha)} \leq M + \frac{\varepsilon}{2(2 + \delta^\alpha)}$$

elde edilir. Buradan  $\varepsilon > 0$  sayısı keyfi olduğundan

$$\sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{\delta^\alpha} \leq M$$

bulunur. Buna göre  $f \in Lip(\alpha, pq)$  olur. Yine (4.1.2.3) eşitsizliğiyle  $0 \neq y \in G$  için

$$\|f_k - f\|_{pq} < \frac{\varepsilon}{8} |y|^\alpha \quad (4.1.2.4)$$

olacak şekilde  $k(y) \geq K$  olan bir  $k$  pozitif tamsayısı seçilsin. Böylece  $S = maks\{K, N\}$  olarak seçildiğinde her  $n \geq S$  için (4.1.2.1) ve (4.1.2.4) eşitsizliğiyle

$$\begin{aligned} \|L_y(f_n - f) - (f_n - f)\|_{pq} &\leq \|L_y(f_n - f_k) - (f_n - f_k)\|_{pq} \\ &\quad + \|L_y(f_k - f)\|_{pq} + \|(f_k - f)\|_{pq} \\ &\leq 2\|(f_k - f)\|_{pq} + \|L_y(f_n - f_k) - (f_n - f_k)\|_{pq} \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{4} |y|^\alpha \end{aligned} \quad (4.1.2.5)$$

olur. Böylece her  $n \geq S$  için (4.1.2.3) ve (4.1.2.5) eşitsizlikleriyle

$$\|f_n - f\|_{(\alpha, pq)} = \|f_n - f\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(f_n - f) - (f_n - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece her  $n \geq S$  için  $\|f_n - f\|_{(\alpha, pq)} < \varepsilon$  bulunur.

Şimdide  $lip(\alpha, pq)$  uzayının Banach uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için  $lip(\alpha, pq)$  normlu uzayından herhangi bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy dizisi alalım. Bu takdirde  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L(p, q)(G)$  uzayında da bir Cauchy dizisi olur.  $L(p, q)(G)$  uzayı  $\|\cdot\|_{pq}$  normuna göre bir Banach uzayı olduğundan  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi bir  $f \in L(p, q)(G)$  fonksiyonuna  $\|\cdot\|_{pq}$  normuna göre yakınsar. Yani herhangi  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $n, m \geq N$  için

$$\|f_n - f\|_{pq} < \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{4(2 + \delta^\alpha)} \quad \|f_n - f_m\|_{(\alpha, pq)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.1.2.6)$$

olacak şekilde bir  $N \in \mathbb{N}$  vardır. Yine  $f_N \in lip(\alpha, pq)$  olduğundan her  $\varepsilon > 0$  için  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y f_N - f_N\|_{pq}}{\delta^\alpha} \leq \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{4(2 + \delta^\alpha)} \quad (4.1.2.7)$$

olacak şekilde  $a_\varepsilon > 0$  sayısı vardır. O zaman (4.1.2.7) eşitsizliğiyle aynı  $\varepsilon > 0$  için  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\begin{aligned} \sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{\delta^\alpha} &\leq \sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y (f - f_N) - (f - f_N)\|_{pq}}{\delta^\alpha} + \sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y f_N - f_N\|_{pq}}{\delta^\alpha} \\ &\leq \frac{2\|f - f_N\|_{pq}}{\delta^\alpha} + \sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y f_N - f_N\|_{pq}}{\delta^\alpha} \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{4(2 + \delta^\alpha)} + \sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y f_N - f_N\|_{pq}}{\delta^\alpha} < \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $\omega_{pq}(f; \delta) = o(\delta^\alpha)$  ve  $f \in \text{lip}(\alpha, pq)$  olur. Şimdi  $y \neq 0$  olan  $y \in G$  için

$$\|f_k - f\|_{pq} < \frac{\varepsilon}{8} |y|^\alpha$$

olacak şekilde  $k(y) \geq N$  olan bir  $k$  pozitif tamsayısı seçilsin. Böylece her  $n \geq N$  için

$$\begin{aligned} \|L_y (f_n - f) - (f_n - f)\|_{pq} &\leq \|L_y (f_n - f_k) - (f_n - f_k)\|_{pq} \\ &\quad + \|L_y (f_k - f)\|_{pq} + \|(f_k - f)\|_{pq} \\ &\leq 2\|(f_k - f)\|_{pq} + \|L_y (f_n - f_k) - (f_n - f_k)\|_{pq} \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{4} |y|^\alpha \end{aligned} \quad (4.1.2.8)$$

olur. Bu takdirde (4.1.2.6) ve (4.1.2.8) eşitsizlikleriyle her  $n \geq N$  için

$$\|f_n - f\|_{(\alpha, pq)} = \|f_n - f\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y (f_n - f) - (f_n - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} < \varepsilon \quad (4.1.2.9)$$

elde edilir. Böylece her  $n \geq N$  için  $\|f_n - f\|_{(\alpha, pq)} < \varepsilon$  bulunur.

**4.1.3.Önerme:**  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  ve  $e_n = \mu(V_n)^{-1} \chi_{V_n}$  olsun. O zaman herhangi bir  $x \in G$  ve  $f \in lip(\alpha, pq)$  için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \|L_x f - f\|_{(\alpha, pq)} = 0$ .
- ii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * e_n - f\|_{(\alpha, pq)} = 0$ .

**İspat:** Herhangi bir  $f \in lip(\alpha, pq)$  ve  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin.

(i)  $f \in lip(\alpha, pq)$  olduğundan her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\sup_{0 < |y| \leq \delta} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{\delta^\alpha} < \frac{\varepsilon}{6}$$

olacak şekilde bir  $a_\varepsilon > 0$  sayısı vardır. Bu takdirde  $0 < |y| \leq \delta < a_\varepsilon$  için

$$\frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{6} \quad (4.1.3.1)$$

yazılabilir. Herhangi  $x, y \in G$  için

$$\begin{aligned} \|L_y (L_x f - f) - (L_x f - f)\|_{pq} &= \|L_x (L_y f - f) - (L_y f - f)\|_{pq} \\ &\leq 2 \|L_y f - f\|_{pq} \end{aligned}$$

ve (4.1.3.2)

$$\|L_y (L_x f - f) - (L_x f - f)\|_{pq} \leq 2 \|L_x f - f\|_{pq}$$

olduğundan (4.1.3.1) ve (4.1.3.2) eşitsizlikleriyle  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \|L_x f - f\|_{(\alpha, pq)} &= \|L_x f - f\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y (L_x f - f) - (L_x f - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &= \|L_x f - f\|_{pq} + \sup_{0 < |y| \leq \delta} \frac{\|L_y (L_x f - f) - (L_x f - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\quad + \sup_{|y| > \delta} \frac{\|L_y (L_x f - f) - (L_x f - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\leq \|L_x f - f\|_{pq} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2 \|L_x f - f\|_{pq}}{\delta^\alpha} \end{aligned} \quad (4.1.3.3)$$

bulunur.  $L(p, q)(G)$  uzayında  $x \rightarrow 0$  olduğunda  $\|L_x f - f\|_{pq} \rightarrow 0$  olduğundan [5], her  $x \in U$  için

$$\|L_x f - f\|_{pq} < \frac{2\delta^\alpha \varepsilon}{3(\delta^\alpha + 2)} \quad (4.1.3.4)$$

olacak şekilde  $G$  grubunun biriminin bir  $U$  komşuluğu vardır. Böylece (4.1.3.4) eşitsizliği (4.1.3.3) eşitsizliğinde yerine yazılırsa her  $x \in U$  için

$$\|L_x f - f\|_{(\alpha, pq)} < \varepsilon$$

elde edilir. O halde  $\lim_{x \rightarrow 0} \|L_x f - f\|_{(\alpha, pq)} = 0$  bulunur.

(ii) Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\int_G e_n(y) d\mu(y) = \int_G \mu(V_n)^{-1} \chi_{V_n}(y) d\mu(y) = 1$  olduğundan

$$(f * e_n - f)(x) = \int_G e_n(y) (L_y f - f)(x) d\mu(y) \quad (4.1.3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu takdirde 4.1.3(i) Önermeyle  $\lim_{x \rightarrow 0} \|L_x f - f\|_{(\alpha, pq)} = 0$  olduğundan

her  $\varepsilon > 0$  ve  $x \in V_N$  için  $\|L_x f - f\|_{(\alpha, pq)} < \varepsilon$  olacak şekilde  $N \in \mathbb{N}$  ve birimin  $V_N$

komşuluğu vardır. Şimdi aynı  $\varepsilon > 0$  için her  $n \geq N$  olduğunda  $V_n \subseteq V_N$  olduğundan

$$\begin{aligned} \|f * e_n - f\|_{(\alpha, pq)} &= \left\| \int_G e_n(y) (L_y f - f)(x) d\mu(y) \right\|_{(\alpha, pq)} = \left\| \int_{V_n} \mu(V_n)^{-1} (L_y f - f)(x) d\mu(y) \right\|_{(\alpha, pq)} \\ &\leq \int_{V_n} \mu(V_n)^{-1} \|L_y f - f\|_{(\alpha, pq)} d\mu(y) \\ &\leq \|L_y f - f\|_{(\alpha, pq)} < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu isteneni verir.

**4.1.4.Önerme:**  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  için  $(lip(\alpha, pq), \|\cdot\|_{(\alpha, pq)})$  uzayı girişim işlemine göre bir esas Banach  $L^1(G)$ -modüldür.

**İspat:** Herhangi bir  $g \in L^1(G)$  ve  $f \in lip(\alpha, pq)$  verilsin.  $lip(\alpha, pq)$  uzayının bir Banach uzayı ve  $L^1(G)$  uzayının bir Banach cebiri olduğu biliniyor. Yine

$$L_y(f * g) - f * g = (L_y f - f) * g$$

eşitliğini göstermek kolaydır. Ayrıca  $L(p, q)(G)$  uzayı  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  için bir Banach  $L^1(G)$ -modül olduğundan [2]

$$\begin{aligned} \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(f * g) - f * g\|_{pq}}{|y|^\alpha} &= \sup_{y \neq 0} \frac{\|(L_y f - f) * g\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y f - f\|_{pq} \|g\|_1}{|y|^\alpha} < \|g\|_1 \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} \end{aligned} \quad (4.1.4.1)$$

yazılır. Diğer taraftan  $f \in lip(\alpha, pq)$  olduğundan  $lip(\alpha, pq)$  uzayının tanımı gereği her  $\varepsilon > 0$  için  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{\delta^\alpha} < \frac{\varepsilon}{\|g\|_1}$$

olacak şekilde  $a_\varepsilon > 0$  sayısı vardır. Bu takdirde  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $0 < |y| \leq \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\sup_y \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{\|g\|_1} \quad (4.1.4.2)$$

yazılabilir. O zaman (4.1.4.1) ve (4.1.4.2) ifadeleri kullanılırsa aynı  $\varepsilon > 0$  için  $0 < |y| \leq \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\sup_{0 < |y| \leq \delta} \frac{\|L_y(f * g) - f * g\|_{pq}}{|y|^\alpha} < \varepsilon$$

bulunur. Bu takdirde  $\omega_{pq}(f * g, \delta) = o(\delta^\alpha)$  yazılır. Böylece  $f * g \in lip(\alpha, pq)$  ve

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{(\alpha, pq)} &= \|f * g\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(f * g) - f * g\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\leq \|f\|_{pq} \|g\|_1 + \|g\|_1 \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} = \|f\|_{(\alpha, pq)} \|g\|_1 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca modül olmanın diğer özelliklerini göstermek kolaydır.

Herhangi bir  $f \in lip(\alpha, pq)$  fonksiyonu alalım. 4.1.3.(ii) Önermeden  $e_n = \mu(V_n)^{-1} \chi_{V_n}$  ve  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(G)$  olduğunda  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * e_n - f\|_{(\alpha, pq)} = 0$  olması

kullanılırsa  $L^1(G) * lip(\alpha, pq)$  uzayı  $lip(\alpha, pq)$  uzayında her yerde yoğun olduğu söylenir. O halde Modül Factorization Teoremine göre  $L^1(G) * lip(\alpha, pq) = lip(\alpha, pq)$  olur.

**4.1.5.Önerme:**  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  için  $lip(\alpha, pq)$  uzayı homojen Banach uzayıdır.

**İspat:** Herhangi bir  $f \in lip(\alpha, pq)$  ve  $s, y \in G$  verilsin. Bu takdirde  $L(p, q)(G)$  uzayı ötelemeler altında kuvvetli değişmez olduğundan  $\|L_s f\|_{pq} = \|f\|_{pq}$  eşitliği vardır. Öte yandan  $L_s(L_y f) = L_y(L_s f)$  olması kullanılırsa  $lip(\alpha, pq)$  uzayının tanımına göre  $L_s f \in lip(\alpha, pq)$  olduğunu görmek kolaydır. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \|L_s f\|_{(\alpha, pq)} &= \|L_s f\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(L_s f) - L_s f\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &= \|f\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} = \|f\|_{(\alpha, pq)} \end{aligned}$$

olur. Bulunan bu sonuç 4.1.3.(i) Önerme ile birleştirilirse istenen elde edilir.

**4.1.6.Önerme:**  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  için  $Lip(\alpha, pq)$  uzayı yarı homojen Banach uzayıdır.

**İspat:** Herhangi bir  $f \in Lip(\alpha, pq)$  ve  $y, s \in G$  verilsin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} L_y(L_s f) - L_s f &= L_s(L_y f) - L_s f \\ &= L_s(L_y f - f) \end{aligned}$$

eşitliği ve  $Lip(\alpha, pq)$  uzayının tanımına göre  $L_s f \in Lip(\alpha, pq)$  olduğu kolayca görülebilir. Yine  $L(p, q)(G)$  uzayının homojen Banach uzayı olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|L_s f\|_{(\alpha, pq)} &= \|L_s f\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(L_s f) - L_s f\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &= \|f\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_s(L_y f - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} = \|f\|_{(\alpha, pq)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece 4.1.2.Önerme ile sonuç görülür.

**4.1.7. Önerme:**  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  için  $Lip(\alpha, pq)$  uzayı bir Banach  $L^1(G)$ -modüldür.

**İspat:** Herhangi bir  $f \in Lip(\alpha, pq)$  ve  $g \in L^1(G)$  fonksiyonları verilsin.  $Lip(\alpha, pq) \subset L(p, q)(G)$  kapsamasından  $f \in L(p, q)(G)$  ve  $L(p, q)(G)$  uzayı  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  için bir Banach  $L^1(G)$ -modül olduğundan  $f * g \in L(p, q)(G)$  olur ve  $\|f * g\|_{pq} \leq \|f\|_{pq} \|g\|_1$  yazılır. Yine  $f \in Lip(\alpha, pq)$  olduğundan bir  $A > 0$  sayısına karşılık  $0 < \delta < \delta_A$  olduğunda

$$\sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{\delta^\alpha} < A \quad (4.1.7.1)$$

olacak şekilde  $\delta_A > 0$  sayısı vardır. Eğer (4.1.7.1) ifadesi kullanılırsa  $0 < \delta < \delta_A$  olduğunda

$$\begin{aligned} \sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y(f * g) - (f * g)\|_{pq}}{\delta^\alpha} &= \sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|(L_y f - f) * g\|_{pq}}{\delta^\alpha} \\ &\leq \sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y f - f\|_{pq} \|g\|_1}{\delta^\alpha} < A \|g\|_1 \end{aligned}$$

Olur ve  $f * g \in Lip(\alpha, pq)$  bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{(\alpha, pq)} &= \|f * g\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(f * g) - (f * g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &= \|f * g\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|(L_y f - f) * g\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\leq \|f\|_{pq} \|g\|_1 + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y f - f\|_{pq} \|g\|_1}{|y|^\alpha} \\ &= \|f\|_{(\alpha, pq)} \|g\|_1 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Banach modülü olmanın diğer koşullarını göstermek kolaydır. Ayrıca  $(Lip(\alpha, pq), \|\cdot\|_{(\alpha, pq)})$  uzayının Banach uzayı olduğu 4.1.2.Önerme ile bulunmuştur. O halde  $Lip(\alpha, pq)$  uzayı  $L^1(G)$  üzerinde bir Banach modüldür.

**4.1.8.Teorem:**  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  olmak üzere  $lip(\alpha, pq)$  uzayı  $Lip(\alpha, pq)$  uzayında bir maksimal homojen Banach uzayıdır.

**İspat :**  $Lip(\alpha, pq)$  uzayının yarı homojen Banach uzayı olduğu 4.1.6.Önermeden biliniyor. Bir  $Lip_c(\alpha, pq)$  kümesini  $G$  den  $Lip(\alpha, pq)$  uzayına tanımlanan  $0 \in G$  noktasında  $x \rightarrow L_x f$  dönüşümünü sürekli yapan  $f$  fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlayalım. Bu  $Lip_c(\alpha, pq)$  uzayının homojen Banach uzayı olduğu biliniyor [36]. O zaman  $lip(\alpha, pq) = Lip_c(\alpha, pq)$  olduğu gösterilirse istenen elde edilir. Herhangi bir  $f \in lip(\alpha, pq)$  alalım. Bu takdirde  $f \in lip(\alpha, pq)$  olduğundan her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{\delta^\alpha} < \frac{\varepsilon}{6}$$

olacak şekilde bir  $a_\varepsilon > 0$  sayısı vardır. Yine  $0 < |y| \leq \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\sup_{0 < |y| \leq \delta} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{6} \quad (4.1.8.1)$$

elde edilir. Ayrıca  $L(p, q)(G)$  uzayı ötelemeler altında kuvvetli değişmez olduğundan

$$\begin{aligned} \|L_y(L_x f - f) - (L_x f - f)\|_{pq} &= \|L_x(L_y f - f) - (L_y f - f)\|_{pq} \\ &\leq 2\|L_y f - f\|_{pq} \end{aligned} \quad (4.1.8.2)$$

ve benzer şekilde

$$\|L_y(L_x f - f) - (L_x f - f)\|_{pq} \leq 2\|L_x f - f\|_{pq} \quad (4.1.8.3)$$

yazılır. Yine (4.1.8.1), (4.1.8.2) ve (4.1.8.3) eşitsizlikleri kullanılırsa  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\begin{aligned}
\|L_x f - f\|_{(\alpha, pq)} &= \|L_x f - f\|_{pq} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(L_x f - f) - (L_x f - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\
&= \|L_x f - f\|_{pq} + \sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|L_y(L_x f - f) - (L_x f - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\
&\quad + \sup_{|y| > \delta} \frac{\|L_y(L_x f - f) - (L_x f - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \quad (4.1.8.4) \\
&\leq \|L_x f - f\|_{pq} + \sup_{|y| \leq \delta} \frac{2\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} + \frac{2\|L_x f - f\|_{pq}}{\delta^\alpha} \\
&\leq \|L_x f - f\|_{pq} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\|L_x f - f\|_{pq}}{\delta^\alpha}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca  $L(p, q)(G)$  uzayında öteleme dönüşümü sürekli olduğundan verilen  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $x \in U$  için

$$\|L_x f - f\|_{pq} < \frac{2\delta^\alpha \varepsilon}{3(\delta^\alpha + 2)}$$

olacak şekilde  $G$  grubunun biriminin bir  $U$  komşuluğu vardır. Bu ifade (4.1.8.4) ifadesinde yerine yazılırsa her  $x \in U$  için

$$\|L_x f - f\|_{(\alpha, pq)} < \varepsilon$$

olur. Bu  $f \in Lip_c(\alpha, pq)$  olduğunu gösterir.

Tersine  $0 \neq f$  olmak üzere herhangi bir  $f \in Lip_c(\alpha, pq)$  ve 4.1.3.Önermede kullanılan  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini alalım.  $Lip(\alpha, pq)$  uzayı bir Banach  $L^1(G)$ -modül olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f * e_n \in Lip(\alpha, pq)$  olur. Ayrıca  $Lip_c(\alpha, pq)$  kümesinin tanımından dolayı  $G$  grubundan  $Lip(\alpha, pq)$  uzayına giden  $y \rightarrow L_y f$  dönüşümü  $0 \in G$  de sürekli olduğundan verilen her  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $y \in V_N$  için

$$\|L_y f - f\|_{(\alpha, pq)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.1.8.5)$$

olacak şekilde bir  $N \in \mathbb{N}$  ve dolayısıyla  $0 \in G$  biriminin bir  $V_N$  komşuluğu vardır.

Şimdi  $y \neq 0$  olan bir  $y \in G$  elemanı alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} &= \frac{\|L_y f - L_y(f * e_n) + L_y(f * e_n) - f * e_n + f * e_n - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\
&\leq \frac{\|L_y f - L_y(f * e_n) - (f - f * e_n)\|_{pq}}{|y|^\alpha} + \frac{\|L_y(f * e_n) - f * e_n\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\
&\leq \frac{\|L_y(f - f * e_n) - (f - f * e_n)\|_{pq}}{|y|^\alpha} + \frac{\|L_y(f * e_n) - f * e_n\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\
&\leq \|f - f * e_n\|_{(\alpha, pq)} + \frac{\|L_y(f * e_n) - f * e_n\|_{pq}}{|y|^\alpha}
\end{aligned}$$

olup, buradan 4.1.3(ii) Önermesi ve (4.1.8.5) ifadesini de kullanarak her  $y \in V_N$  için

$$\begin{aligned}
\frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} &\leq \|L_y f - f\|_{(\alpha, pq)} + \frac{\|L_y(f * e_n) - f * e_n\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|L_y(f * e_n) - f * e_n\|_{pq}}{|y|^\alpha}
\end{aligned} \tag{4.1.8.6}$$

bulunur. Diğer taraftan  $L(p, q)(G)$  uzayı girişim işlemine göre bir Banach  $L^1(G)$ -modül olduğundan

$$\frac{\|L_y(f * e_n) - (f * e_n)\|_{pq}}{|y|^\alpha} = \frac{\|(L_y e_n - e_n) * f\|_{pq}}{|y|^\alpha} \leq \frac{\|L_y e_n - e_n\|_1}{|y|^\alpha} \|f\|_{pq}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned}
\|L_y e_n - e_n\|_1 &= \int_G |e_n(x-y) - e_n(x)| d\mu(x) \\
&= \mu(V_n)^{-1} \int_G |\chi_{V_n}(x-y) - \chi_{V_n}(x)| d\mu(x)
\end{aligned}$$

yazılır. Yine

$$\begin{aligned}
|\chi_{V_n}(x-y) - \chi_{V_n}(x)| &= \begin{cases} 1 & x-y \in V_n, x \notin V_n \\ 0 & x-y \notin V_n, x \in V_n \\ 0 & x-y \in V_n, x \in V_n \\ 0 & x-y \notin V_n, x \notin V_n \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \in (y+V_n) \Delta V_n \\ 0 & x \notin (y+V_n) \Delta V_n \end{cases} \\
&= \chi_{(y+V_n) \Delta V_n}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $\|L_y e_n - e_n\|_1 = \mu(V_n)^{-1} \mu((y+V_n)\Delta V_n)$  elde edilir. Yine 4.1.Kesimin başında  $y \rightarrow 0$  için  $\mu(V_n)^{-1} \mu((y+V_n)\Delta V_n)/|y|^\alpha \rightarrow 0$  olduğunu kabul etmiştik. O zaman kabulümüz gereğince her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $0 < |y| \leq \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\frac{\mu(V_n)^{-1} \mu(y+V_n\Delta V_n)}{|y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{pq}}$$

olacak şekilde bir  $a_\varepsilon > 0$  sayısı vardır. O halde  $\delta_\varepsilon < a_\varepsilon$  ve  $\{y: |y| \leq \delta\} \subset V_N$  olan bir  $\delta_\varepsilon > 0$  sayısı için  $0 < |y| \leq \delta < \delta_\varepsilon$  olduğunda

$$\frac{\|L_y(f * e_n) - (f * e_n)\|_{pq}}{|y|^\alpha} = \frac{\|(L_y e_n - e_n) * f\|_{pq}}{|y|^\alpha} \leq \frac{\|L_y e_n - e_n\|_1}{|y|^\alpha} \|f\|_{pq} < \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. Böylece

$$\sup_{0 < |y| \leq \delta} \frac{\|L_y(f * e_n) - (f * e_n)\|_{pq}}{|y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.1.8.7)$$

bulunur. O halde (4.1.8.6) ve (4.1.8.7) ifadeleri birleştirilirse

$$\sup_{0 < |y| \leq \delta} \frac{\|L_y f - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu takdirde  $f \in lip(\alpha, pq)$  olduğunu gösterir. Sonuç olarak  $Lip_c(\alpha, pq) = lip(\alpha, pq)$  elde edilir.

2.23.Tanımı dikkate alarak  $lip(\alpha, pq)$  uzayının relatif tamlamasını

$$\overline{lip(\alpha, pq)} = \left\{ f \in L(p, q)(G) : \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } f * e_n \in lip(\alpha, pq) \text{ ve } \sup_n \|f * e_n\|_{(\alpha, pq)} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca bu uzay üzerine  $f \in \overline{lip(\alpha, pq)}$  olmak için

$$\|f\|_{(\alpha, pq)^-} = \sup_n \|f * e_n\|_{(\alpha, pq)}$$

normunu koyalım.

**4.1.9.Önerme:**  $lip(\alpha, pq)$  uzayının relatif tamlaması olan  $\widetilde{lip(\alpha, pq)}$  uzayı  $Lip(\alpha, pq)$  uzayına eşittir.

**İspat:** Herhangi bir  $f \in \widetilde{lip(\alpha, pq)}$  alalım. Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $0 \neq y \in G$  için

$$\begin{aligned} \frac{\|L_y(f * e_n) - (f * e_n)\|_{pq}}{|y|^\alpha} &\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(f * e_n) - (f * e_n)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\leq \|f * e_n\|_{(\alpha, pq)\sim} \leq \|f\|_{(\alpha, pq)\sim} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\|L_y(f * e_n) - (f * e_n)\|_{pq} \leq \|f\|_{(\alpha, pq)\sim} |y|^\alpha \quad (4.1.9.1)$$

olur. Ayrıca her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  için

$$\begin{aligned} \|L_y f - f\|_{pq} &\leq \|L_y f - L_y(f * e_n)\|_{pq} + \|L_y(f * e_n) - (f * e_n)\|_{pq} \\ &\quad + \|f * e_n - f\|_{pq} \\ &\leq \|L_y(f * e_n) - (f * e_n)\|_{pq} + 2\|f * e_n - f\|_{pq} \end{aligned} \quad (4.1.9.2)$$

yazılır. Yine  $L(p, q)(G)$  uzayında  $n \rightarrow \infty$  iken  $\|f * e_n - f\|_{pq} \rightarrow 0$  olduğundan, (4.1.9.1) ve (4.1.9.2) eşitsizlikleriyle

$$\|L_y f - f\|_{pq} \leq \|f\|_{(\alpha, pq)\sim} |y|^\alpha$$

elde edilir. Bu takdirde  $f \in Lip(\alpha, pq)$  olur. Böylece  $\widetilde{lip(\alpha, pq)} \subset Lip(\alpha, pq)$  kapsaması bulunur.

Tersine, herhangi bir  $f \in Lip(\alpha, pq)$  alalım.  $Lip(\alpha, pq)$  uzayı bir Banach  $L^1(G)$ -modül olduğundan  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  4.1.Kesimin başında tanımladığımız dizi olmak üzere

$$\|L_y(f * e_n) - (f * e_n)\|_{pq} = \|f * (L_y e_n - e_n)\|_{pq} \leq \|f\|_{pq} \|L_y e_n - e_n\|_1$$

olur. Yine 4.1.8.Önermede gösterildiği gibi  $\|L_y e_n - e_n\|_1 = \mu(V_n)^{-1} \mu((y+V_n)\Delta V_n)$  olduğundan 4.1.Kesimin başındaki kabulümüz gereğince her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $\varepsilon > 0$  için  $0 < |y| \leq \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\sup_{|y| \leq \delta} \|L_y (f * e_n) - (f * e_n)\|_{pq} / |y|^\alpha < \varepsilon$$

olacak şekilde  $a_\varepsilon > 0$  bulunabildiğinden  $f * e_n \in \text{lip}(\alpha, pq)$  yazılır. Yine her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\|f * e_n\|_{(\alpha, pq)} < \infty$  olduğundan  $f \in \overline{\text{lip}(\alpha, pq)}$  olur. Buna göre  $\text{Lip}(\alpha, pq) \subset \overline{\text{lip}(\alpha, pq)}$  elde edilir. Böylece  $\text{Lip}(\alpha, pq) = \overline{\text{lip}(\alpha, pq)}$  bulunur.

Şimdi  $\|\cdot\|_{(\alpha, pq)^-} \leq \|\cdot\|_{(\alpha, pq)}$  olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir  $f \in \text{Lip}(\alpha, pq)$  alalım. Her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\|f * e_n\|_{(\alpha, pq)} \leq \|f\|_{(\alpha, pq)} \|e_n\|_1 \leq \|f\|_{(\alpha, pq)}$$

yazılır ve buradan  $\|f\|_{(\alpha, pq)^-} = \sup_n \|f * e_n\|_{(\alpha, pq)} \leq \|f\|_{(\alpha, pq)}$  çıkar.

Yine her  $\varepsilon > 0$  sayısı ve  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  için

$$\begin{aligned} \|f - f * e_{n_0}\|_{pq} &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \|(L_y f - f) - (L_y f - f) * e_{n_0}\|_{pq} &< \frac{\varepsilon}{2} |y|^\alpha \end{aligned} \quad (4.1.9.3)$$

olacak şekilde  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır. Bu takdirde (4.1.9.3) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \|f\|_{pq} &< \frac{\varepsilon}{2} + \|f * e_{n_0}\|_{pq} \\ \|L_y f - f\|_{pq} &< \frac{\varepsilon}{2} |y|^\alpha + \|(L_y f - f) * e_{n_0}\|_{pq} \end{aligned} \quad (4.1.9.4)$$

yazılır. Böylece (4.1.9.4) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \|f\|_{pq} + \frac{\|(L_y f - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} &< \varepsilon + \|f * e_{n_0}\|_{pq} + \frac{\|(L_y f - f) * e_{n_0}\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &< \varepsilon + \|f * e_{n_0}\|_{(\alpha, pq)} \\ &< \varepsilon + \|f\|_{(\alpha, pq)^-} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $\|f\|_{(\alpha,pq)} \leq \|f\|_{(\alpha,pq)^-}$  çıkar. Sonuç olarak  $\|\cdot\|_{(\alpha,pq)^-} = \|\cdot\|_{(\alpha,pq)}$  elde edilir.

Şimdi Lipschitz-Lorentz uzaylarında bazı kapsamalar ve çarpanlara ayrılma (factorization) özelliklerini verelim.

**4.1.10. Teorem:**  $G$  bir metriklenebilir yerel kompakt Abel grup ve  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  olsun. Bu takdirde

$$L^1(G) * Lip(\alpha, pq) = lip(\alpha, pq)$$

olur.

**İspat:** Herhangi  $f \in L^1(G)$  ve  $g \in Lip(\alpha, pq)$  fonksiyonları verilsin. Eğer  $L(p, q)(G)$  uzayının  $L^1(G)$ -modül ve  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L^1(G)$  uzayının yaklaşık birimi olması kullanılırsa  $f * g \in L(p, q)(G)$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f * g * e_n \in L(p, q)(G)$  olur. Buna göre  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  için

$$\begin{aligned} \frac{\|L_y(f * g * e_n) - (f * g * e_n)\|_{pq}}{|y|^\alpha} &= \frac{\|(L_y e_n - e_n) * f * g\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\leq \frac{\|L_y e_n - e_n\|_1}{|y|^\alpha} \cdot \|f * g\|_{pq} \end{aligned} \quad (4.1.10.1)$$

olur. Ayrıca  $\|L_y e_n - e_n\|_1 = \mu(V_n)^{-1} \mu((y + V_n) \Delta V_n)$  olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $e_n \in lip(\alpha, 1)$  olur. Dolayısıyla yukarıdaki (4.1.10.1) eşitsizliği kullanılırsa her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f * g * e_n \in lip(\alpha, pq)$  elde edilir. Diğer taraftan  $f * g \in L(p, q)(G)$  ve  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(G)$  yaklaşık birimi  $L(p, q)(G)$  uzayının da yaklaşık birimi olduğundan verilen herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n \geq n_1$  için

$$\|f * g * e_n - f * g\|_{pq} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.1.10.2)$$

olacak şekilde bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Yine  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  için

$$\begin{aligned} \frac{\|L_y(f * g * e_n - f * g) - (f * g * e_n - f * g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} &= \frac{\|(L_y g - g) * (f * e_n - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\leq \frac{\|L_y g - g\|_{pq}}{|y|^\alpha} \|f * e_n - f\|_1 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(f * g * e_n - f * g) - (f * g * e_n - f * g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} &\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y g - g\|_{pq}}{|y|^\alpha} \|f * e_n - f\|_1 \\ &\leq \|g\|_{(\alpha, pq)} \cdot \|f * e_n - f\|_1 \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L^1(G)$  uzayının yaklaşık birimi olduğundan  $\varepsilon > 0$  sayısı için her  $n \geq n_2$  olduğunda

$$\|f * e_n - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2 \|g\|_{(\alpha, pq)}}$$

olacak şekilde  $n_2 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Böylece her  $n \geq n_2$  için

$$\sup_{y \neq 0} \frac{\|L_y(f * g * e_n - f * g) - (f * g * e_n - f * g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \leq \|g\|_{(\alpha, pq)} \frac{\varepsilon}{2 \|g\|_{(\alpha, pq)}} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.1.10.3)$$

olur. Eğer  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  denirse her  $n \geq n_0$  için (4.1.10.2) ve (4.1.10.3) eşitsizliklerinden dolayı

$$\|f * g * e_n - f * g\|_{(\alpha, pq)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece  $(lip(\alpha, pq), \|\cdot\|_{(\alpha, pq)})$  uzayı Banach uzayı olduğundan  $f * g \in lip(\alpha, pq)$  elde edilir. O halde  $L^1(G) * Lip(\alpha, pq) \subset lip(\alpha, pq)$  kapsamı sağlanır. Yine

$$L^1(G) * lip(\alpha, pq) = lip(\alpha, pq)$$

olması kullanılırsa

$$lip(\alpha, pq) = L^1(G) * lip(\alpha, pq) \subset L^1(G) * Lip(\alpha, pq) \subset lip(\alpha, pq)$$

kapsamalarından sonuç görülür.

Bir  $A$  kümesi  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  için  $L(p, q)(G)$  uzayının 2.23.Tanımdaki koşulları sağlayan bir alt vektör uzayı olsun. Yine  $L^1(G)$  uzayından  $A$  uzayına tanımlanan çarpanlar uzayı (öteleme operatörleriyle değişmeli, sınırlı ve doğrusal operatörler uzayı)  $(L^1(G), A)$  ile gösterilsin.

Aşağıda verilen önermenin ispatı, [8] çalışmasındaki 3.8.Teoreminin ispatında  $w = 1$  alınarak kolayca görülebilir.

**4.1.11.Önerme:**  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  olmak üzere için  $L(p, q)(G)$  uzayının 2.23.Tanımdaki koşulları sağlayan bir  $A$  alt vektör uzayı verilsin. Bu takdirde  $(L^1(G), A)$  uzayı  $\tilde{A}$  uzayına izometrik izomorftur.

**4.1.12.Sonuç:**  $(L^1(G), lip(\alpha, pq)) \cong \widetilde{lip(\alpha, pq)} = Lip(\alpha, pq)$ .

**4.1.13.Önerme:**  $(L^1(G), Lip(\alpha, pq)) \subset Lip(\alpha, pq)$ .

**İspat:** Herhangi bir  $T \in (L^1(G), Lip(\alpha, pq))$  alalım. Bu takdirde her  $g \in L^1(G)$  için  $T(g) = f * g$  olacak şekilde  $f \in L(p, q)(G)$  vardır [5]. Ayrıca  $T \in (L^1(G), Lip(\alpha, pq))$  olduğundan her  $g \in L^1(G)$  için  $\|T(g)\|_{(\alpha, pq)} \leq \|T\| \|g\|_1$  olur. O zaman

$$\|f * e_n\|_{(\alpha, pq)} = \|T(e_n)\|_{(\alpha, pq)} \leq \|T\| \|e_n\|_1 = \|T\|, \quad \sup_n \|f * e_n\|_{(\alpha, pq)} \leq \|T\|$$

elde edilir. Böylece  $f \in \widetilde{lip(\alpha, pq)}$  olup 4.1.9.Önerme ile  $f \in Lip(\alpha, pq)$  elde edilir.

**4.1.14.Sonuç:**  $(L^1(G), lip(\alpha, pq)), \widetilde{lip(\alpha, pq)}, Lip(\alpha, pq)$  ve  $(L^1(G), Lip(\alpha, pq))$  uzayları izometrik izomorftur.

**İspat:** 4.1.12.Sonuç ve 4.1.13.Önerme ile

$$Lip(\alpha, pq) = \widetilde{lip(\alpha, pq)} = (L^1(G), lip(\alpha, pq)) \subset (L^1(G), Lip(\alpha, pq)) \subset Lip(\alpha, pq)$$

olduğundan istenen elde edilir.

## 4.2. Lipschitz-Lorentz-Zygmund Sınıfları ve $L(p, q)(G)$ Uzayından Bu Sınıflara Tanımlanan Çarpanlar Uzayı

Bu bölümde [30] çalışması Lorentz uzaylarına genelleştirilecektir. Bu amaçla öteleme operatörü ve özellikleri verilip, bunların ışığında Lipschitz-Lorentz-Zygmund sınıfları tanımlanıp incelenecektir.

**4.2.1.Tanım:**  $L(G) = \bigcup \{f \in L(p, q)(G) : 0 < p, q \leq \infty\}$  olsun.  $G \times L(G)$  uzayından  $L(G)$  uzayına tanımlanan bir  $\tau$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlasın:

- i. Her  $a \in G$  için  $\tau(a, \cdot)$  dönüşümü  $L(p, q)(G)$  uzayından  $L(p, q)(G)$  uzayına bir doğrusal dönüşümdür.
- ii.  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $1 \leq p', q' \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \geq 1$  ve  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \geq 1$  olsun. Her  $a \in G$  için  $f \in L(p, q)(G)$  ve  $g \in L(p', q')(G)$  olduğunda

$$\tau(a, f * g) = \tau(a, f) * g$$

olur.

Bu takdirde  $\tau : G \times L(G) \rightarrow L(G)$  fonksiyonuna bir öteleme operatörü denir [27, 30].

**4.2.2.Örnek:** Her  $a \in G$  ve  $f \in L(G)$  için

$$\tau_1(a, f)(x) = f(x-a) - f(x)$$

$$\tau_2(a, f)(x) = f(x+a) + f(x-a) - 2f(x)$$

şeklinde tanımlanan  $\tau_1, \tau_2$  operatörleri birer öteleme operatörüdürler. Ayrıca  $\tau_1, \tau_2$  birer öteleme operatörleri olduğunda

$$(\tau_1 \circ \tau_2)(a, f) = \tau_1(a, \tau_2(a, f))$$

şeklinde tanımlanan  $\tau_1 \circ \tau_2$  operatörü de bir öteleme operatörüdür.

Bu bölümde  $G$  bir metriklenebilir yerel kompakt Abel grup,  $d$  ötelemeler altında değişmez bir metrik olarak kabul edilecektir. Şimdi  $\delta \in (0, \infty)$ ,  $f \in L(p, q)(G)$ ,

$1 \leq p, q \leq \infty$  ve  $\tau$  herhangi bir öteleme operatörü olsun. Aynı zamanda her  $x \in G$  için  $d(x, 0) = |x|$  olmak üzere

$$\omega_{pq}(f; \delta) = \sup \left\{ \|\tau(y, f)\|_{pq} : |y| \leq \delta \right\}$$

olsun.

**4.2.3.Tanım:**  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $0 < \alpha < \infty$  ve  $\tau: G \times L(G) \rightarrow L(G)$  herhangi bir öteleme operatörü olmak üzere  $L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  ve  $L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  ile gösterilen Lipschitz-Lorentz-Zygmund sınıfları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$L\Lambda_*(\alpha, pq; G) = \left\{ f \in L(p, q)(G) : \omega_{pq}(f; \delta) = O(\delta^\alpha) \right\}$$

$$L\lambda_*(\alpha, pq; G) = \left\{ f \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G) : \omega_{pq}(f; \delta) = o(\delta^\alpha) \right\}.$$

Bu sınıfların birer vektör uzayı olduğu kolayca görülür. Şimdi bu sınıfların birer normlu uzay olduklarını göstereceğiz.

**4.2.4.Önerme:**  $1 \leq p, q \leq \infty$  olmak üzere  $L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  ve  $L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  sınıfları üzerinde

$$\|f\|_{(\alpha, pq)} = \max \left\{ \|f\|_{pq}, \sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \right\}$$

şeklinde tanımlanan  $\|\cdot\|_{(\alpha, pq)}$  fonksiyonu bir normdur.

**İspat:**  $\|\cdot\|_{(\alpha, pq)}$  fonksiyonun iyi tanımlı olduğu kolayca görülür. Herhangi bir  $c \in \mathbb{C}$  sayısını ve herhangi  $f, g \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  fonksiyonlarını alalım.

**i.**  $\|\cdot\|_{pq}$  fonksiyonu bir norm olduğundan  $\|f\|_{(\alpha, pq)} \geq 0$  olduğu açıktır.

**ii.**  $\|f\|_{(\alpha, pq)} = 0$  olsun. Bu takdirde  $\|f\|_{pq} = 0$  ve  $\sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} = 0$  elde edilir.

$\|\cdot\|_{pq}$  fonksiyonu bir norm olduğundan  $f = 0$  (h.h.h.) yazılır. Tersine

$f = 0$  (h.h.h.) olsun. O zaman  $\|f\|_{pq} = 0$  ve  $\|\tau(y, f)\|_{pq} = 0$  olur. Böylece  $\|f\|_{(\alpha, pq)} = 0$  olur.

iii.  $\tau$  öteleme operatörü doğrusal ve  $\|\cdot\|_{pq}$  fonksiyonu bir norm olduğundan

$$\begin{aligned} \|cf\|_{(\alpha, pq)} &= \max \left\{ \|cf\|_{pq}, \sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, cf)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \right\} = \max \left\{ \|cf\|_{pq}, \sup_{y \neq 0} \frac{\|c\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \right\} \\ &= |c| \max \left\{ \|f\|_{pq}, \sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \right\} = |c| \|f\|_{(\alpha, pq)}, \end{aligned}$$

iv.  $\tau$  öteleme operatörü doğrusal ve  $\|\cdot\|_{pq}$  fonksiyonu bir norm olduğundan

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{(\alpha, pq)} &= \max \left\{ \|f + g\|_{pq}, \sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f + g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \right\} \\ &= \max \left\{ \|f + g\|_{pq}, \sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f) + \tau(y, g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \|f\|_{pq} + \|g\|_{pq}, \sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq} + \|\tau(y, g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \right\} \\ &= \max \left\{ \|f\|_{pq} + \|g\|_{pq}, \sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \right\} \\ &= \max \left\{ \|f\|_{pq}, \sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \right\} + \max \left\{ \|g\|_{pq}, \sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \right\} \\ &= \|f\|_{(\alpha, pq)} + \|g\|_{(\alpha, pq)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $\|\cdot\|_{(\alpha, pq)}$  fonksiyonu her iki Lipschitz-Lorentz-Zygmund sınıfları üzerinde norm olur.

Eğer  $\tau$  yerine 4.2.2.Örnekteki  $\tau_1$  alınırsa 4.1.Bölümdeki  $Lip(\alpha, pq)$ ,  $lip(\alpha, pq)$  Lipschitz-Lorentz uzayları,  $\tau_2$  alınırsa  $\Lambda_*(\alpha, pq; G)$ ,  $\lambda_*(\alpha, pq; G)$  Zygmund sınıfları,  $\tau_1 \circ \tau_2$  alınırsa ikinci derece Lipschitz-Lorentz uzayları elde edilir.

**4.2.5.Önerme:**  $1 < p < \infty$  ve  $q \neq \infty$  olmak üzere  $f \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  ve  $g \in L^1(G)$  ise  $f * g \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  olur. Aynı zamanda  $p$  ve  $q$  sayılarına bağlı bir  $C$  sabiti için

$$\|f * g\|_{(\alpha, pq)} \leq C \|f\|_{(\alpha, pq)} \|g\|_1$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** Herhangi  $f \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  ve  $g \in L^1(G)$  alalım. O zaman [2, Teorem 2.9] ile  $f * g \in L(p, q)(G)$  ve  $C$  sayısı  $p, q$  sayılarına bağlı bir sabit olmak üzere

$$\|f * g\|_{pq} \leq C \|f\|_{pq} \|g\|_1$$

olur. Ayrıca  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  için

$$\frac{\|\tau(y, f * g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} = \frac{\|\tau(y, f) * g\|_{pq}}{|y|^\alpha} \leq \frac{C \|\tau(y, f)\|_{pq} \|g\|_1}{|y|^\alpha} \leq C \|f\|_{(\alpha, pq)} \|g\|_1$$

yazılır. Böylece  $f * g \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  ve  $\|f * g\|_{(\alpha, pq)} \leq C \|f\|_{(\alpha, pq)} \|g\|_1$  elde edilir.

Aşağıdaki iki önerme [2] çalışmasındaki Teorem 2.10 ve Teorem 2.11 kullanılarak 4.2.5.Önermedeki gibi ispatlanır.

**4.2.6.Önerme:**  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  ve  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \geq 1$  olduğunda  $f \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$

ve  $g \in L\Lambda_*(\alpha, p'q'; G)$  alalım. Bu takdirde  $f * g \in L\Lambda_*(\alpha, \infty; G)$  ve aynı zamanda  $C$  sayısı  $q$  ile  $q'$  sayılarına bağlı bir sabit olmak üzere

$$\|f * g\|_{(\alpha, \infty)} \leq C \|f\|_{(\alpha, pq)} \|g\|_{(\alpha, p'q')}$$

olur.

**4.2.7.Önerme:**  $1 < p, p' < \infty$ ,  $0 < q, q' \leq \infty$  olsun. O zaman  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} > 1$ ,  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - 1$

ve  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \geq \frac{1}{s}$  olmak üzere herhangi  $f \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  ve  $g \in L\Lambda_*(\alpha, p'q'; G)$  için

$f * g \in L\Lambda_*(\alpha, rs; G)$  olur. Ayrıca  $q, q', r$  ve  $s$  sayılarına bağlı bir  $C$  sabiti için

$$\|f * g\|_{(\alpha,rs)} \leq C \|f\|_{(\alpha,pq)} \|g\|_{(\alpha,p'q')}$$

bulunur.

**4.2.8.Önerme:**  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  ve  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \geq 1$  olsun. Bu takdirde  $L\Lambda_*(\alpha, p'q'; G)$  ve  $Hom_{L(G)}(L(p, q)(G), L\Lambda_*(\alpha, \infty; G))$  uzayları cebirsel olarak izomorf, topolojik olarak homoemorfurlar.

**İspat:** Herhangi  $f \in L\Lambda_*(\alpha, p'q'; G)$  ve  $g \in L(p, q)(G)$  alalım. O zaman [2, 2.8.Teorem] çalışmasına göre  $f * g \in L^\infty(G)$  ve aynı zamanda  $C$  sayısı  $q$  ile  $q'$  sayılarına bağlı bir sabit olmak üzere

$$\|f * g\|_\infty \leq C \|f\|_{p'q'} \|g\|_{pq} \leq C \|f\|_{(\alpha, p'q')} \|g\|_{pq} \quad (4.2.8.1)$$

olur. Ayrıca  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  için

$$\begin{aligned} \|\tau(y, f * g)\|_\infty &= \|\tau(y, f) * g\|_\infty \leq C \|\tau(y, f)\|_{p'q'} \|g\|_{pq} \\ &\leq C |y|^\alpha \|f\|_{(\alpha, p'q')} \|g\|_{pq} \end{aligned} \quad (4.2.8.2)$$

bulunur. Bu takdirde (4.2.8.1) ve (4.2.8.2) eşitsizliklerine göre  $f * g \in L\Lambda_*(\alpha, \infty; G)$  ve

$$\|f * g\|_{(\alpha, \infty)} \leq C \|f\|_{(\alpha, p'q')} \|g\|_{pq} \quad (4.2.8.3)$$

elde edilir. Böylece  $f \in L\Lambda_*(\alpha, p'q'; G)$  fonksiyonuna karşılık her  $g \in L(p, q)(G)$  için  $T_f(g) = f * g$  ile tanımlı bir  $T_f : L(p, q)(G) \rightarrow L\Lambda_*(\alpha, \infty; G)$  dönüşümü bulunmuş olur. Yine (4.2.8.3) eşitsizliği ile  $\|T_f\| \leq C \|f\|_{(\alpha, p'q')}$  olur ve böylece  $T_f \in Hom_{L(G)}(L(p, q)(G), L\Lambda_*(\alpha, \infty; G))$  bulunur.

Tersine herhangi bir  $T \in Hom_{L(G)}(L(p, q)(G), L\Lambda_*(\alpha, \infty; G))$  alalım. Aynı zamanda  $T \in Hom_{L(G)}(L(p, q)(G), L^\infty(G))$  olduğundan [32, 4.5.Teorem] ile her  $g \in L(p, q)(G)$  için  $T(g) = f * g$  olacak şekilde  $T$  operatörüne karşılık bir  $f \in L(p', q')(G)$  vardır. O zaman her  $g \in L(p, q)(G)$  için

$$\sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f * g)\|_\infty}{|y|^\alpha} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, T(g))\|_\infty}{|y|^\alpha} \leq \|T(g)\|_{(\alpha, \infty)} \leq \|T\| \|g\|_{pq} \quad (4.2.8.4)$$

ve

$$\|f * g\|_\infty = \|T(g)\|_\infty \leq \|T(g)\|_{(\alpha, \infty)} \leq \|T\| \|g\|_{pq} \quad (4.2.8.5)$$

bulunur. Ayrıca [12] ve [35] çalışmalarıyla herhangi bir  $f \in L(p', q')(G)$  için  $C$  bir sabit olmak üzere

$$\|f\|_{p', q'} \leq p \|f\|_{p', q'}^* \leq pC \sup \left\{ \left| \int_G f(x) g(x) d\mu(x) \right| : \|g\|_{pq}^* \leq 1 \right\} \quad (4.2.8.6)$$

yazılır.  $G$  grubu değişmeli,  $\mu$  bir Haar ölçümü olduğundan her ölçülebilir  $E \subset G$  için  $\mu(E) = \mu(-E)$  olur [33]. Bu takdirde herhangi bir  $\varphi \in L(p, q)(G)$  için  $\varphi(-x) = g(x)$  dönüşümü yapılırsa  $g \in L(p, q)(G)$  ve  $\|\varphi\|_{pq}^* = \|g\|_{pq}^*$  elde edilir. Çünkü  $\varphi$  ile  $g$  fonksiyonları  $\varphi(-x) = g(x)$  olması kullanılırsa bir  $E$  ölçülebilir kümesi için  $\lambda_g(y) = \mu(E) = \mu(-E) = \lambda_\varphi(y)$  olur ve dolayısıyla  $\varphi^* = g^*$  bulunur. Bu takdirde (4.2.8.5) ve (4.2.8.6) ile

$$\begin{aligned} \|f\|_{p', q'} &\leq p \|f\|_{p', q'}^* \leq pC \sup \left\{ \left| \int_G f(x) \varphi(-x) d\mu(x) \right| : \|\varphi\|_{pq}^* \leq 1 \right\} \\ &= pC \sup \left\{ |(f * \varphi)(0)| : \|\varphi\|_{pq}^* \leq 1 \right\} \\ &\leq pC \sup \left\{ \|f * \varphi\|_\infty : \|\varphi\|_{pq}^* \leq 1 \right\} \\ &\leq pC \sup \left\{ \|T\| \|\varphi\|_{pq} : \|\varphi\|_{pq}^* \leq 1 \right\} \leq pp' C \|T\| \end{aligned}$$

yazılır. Yine benzer şekilde (4.2.8.4) eşitsizliği kullanılarak her  $y \in G$  için

$$\begin{aligned} \|\tau(y, f)\|_{p', q'} &\leq p \|\tau(y, f)\|_{p', q'}^* \\ &\leq pC \sup \left\{ \left| \int_G \tau(y, f)(x) \varphi(-x) d\mu(x) \right| : \|\varphi\|_{pq}^* \leq 1 \right\} \\ &= pC \sup \left\{ |(\tau(y, f) * \varphi)(0)| : \|\varphi\|_{pq}^* \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= pC \sup \left\{ \left| (\tau(y, f * \varphi))(0) \right| : \|\varphi\|_{pq}^* \leq 1 \right\} \\
&\leq pC \sup \left\{ \|\tau(y, f * \varphi)\|_{\infty} : \|\varphi\|_{pq}^* \leq 1 \right\} \\
&\leq pC \sup \left\{ |y|^{\alpha} \|T\| \|\varphi\|_{pq} : \|\varphi\|_{pq}^* \leq 1 \right\} \leq pp'C \|T\| |y|^{\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $f \in L\Lambda_*(\alpha, p'q'; G)$  ve  $\|f\|_{(\alpha, p'q')} \leq pp'C \|T\|$  bulunur. Sonuç olarak  $L\Lambda_*(\alpha, p'q'; G)$  ve  $Hom_{L^1(G)}(L(p, q)(G), L\Lambda_*(\alpha, \infty; G))$  uzayları cebirsel olarak izomorf, topolojik olarak homeomorfturlar.

**4.2.9.Önerme:**  $1 < p, q < \infty$  olmak üzere  $L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  uzayı ile  $(L^1(G), L\Lambda_*(\alpha, pq; G))$  çarpanlar uzayı izometrik izomorftur. Ayrıca  $p = q = 1$  ise  $(L^1(G), L\Lambda_*(\alpha, 1; G)) \subset L^1(G)$  olur.

**İspat:** Herhangi bir  $f \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  alalım. O zaman 4.2.5.Önerme ile her  $g \in L^1(G)$  için  $f * g \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  olur. Böylece her  $g \in L^1(G)$  için  $T_f(g) = f * g$  olmak üzere bir  $T_f : L^1(G) \rightarrow L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  dönüşümü tanımlanmış olur.  $1 < p < \infty, q \neq \infty$  için  $L(p, q)(G)$  uzayı bir Banach  $L^1(G)$ -modül olduğundan her  $g \in L^1(G)$  için

$$\|T_f(g)\|_{pq} = \|f * g\|_{pq} \leq \|f\|_{pq} \|g\|_1 \leq \|f\|_{(\alpha, pq)} \|g\|_1$$

ve  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  için

$$\begin{aligned}
\frac{\|\tau(y, T_f(g))\|_{pq}}{|y|^{\alpha}} &= \frac{\|\tau(y, f * g)\|_{pq}}{|y|^{\alpha}} = \frac{\|\tau(y, f) * g\|_{pq}}{|y|^{\alpha}} \leq \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq} \|g\|_1}{|y|^{\alpha}} \\
&\leq \|f\|_{(\alpha, pq)} \|g\|_1
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece  $\|T_f\| \leq \|f\|_{(\alpha, pq)}$  ve dolayısıyla

$T_f \in (L^1(G), L\Lambda_*(\alpha, pq; G))$  bulunur.

Tersine herhangi bir  $T \in (L^1(G), L\Lambda_*(\alpha, pq; G))$  alalım. O zaman  $1 < p, q < \infty$  için [5, 3.4.Teorem] ile her  $g \in L^1(G)$  için  $T(g) = f * g$  olacak şekilde bir tek  $f \in L(p, q)(G)$  vardır. Böylece her  $g \in L^1(G)$  için

$$\|f * g\|_{pq} = \|T(g)\|_{pq} \leq \|T(g)\|_{(\alpha, pq)} \leq \|T\| \|g\|_1 \quad (4.2.9.1)$$

$$\sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f * g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \leq \|T(g)\|_{(\alpha, pq)} \leq \|T\| \|g\|_1 \quad (4.2.9.2)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Şimdi  $f \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  ve  $\|f\|_{(\alpha, pq)} \leq \|T\|$  olduklarını gösterelim. Her  $\alpha \in I$  için  $\|a_\alpha\|_1 = 1$  olmak üzere  $L^1(G)$  uzayının  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$  yaklaşık birimi verilsin. O zaman her  $\alpha \in I$  ve  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  için (4.2.9.1) ve (4.2.9.2) eşitsizliklerine göre

$$\begin{aligned} \|f * a_\alpha\|_{pq} &= \|T(a_\alpha)\|_{pq} \leq \|T(a_\alpha)\|_{(\alpha, pq)} \leq \|T\| \\ \frac{\|\tau(y, f * a_\alpha)\|_{pq}}{|y|^\alpha} &= \frac{\|\tau(y, f) * a_\alpha\|_{pq}}{|y|^\alpha} \leq \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \leq \|T\| \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. O zaman  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  için

$$\begin{aligned} \|f\|_{pq} &= \lim_{\alpha} \|f * a_\alpha\|_{pq} \leq \|T\| \\ \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} &= \lim_{\alpha} \frac{\|\tau(y, f * a_\alpha)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \leq \|T\| \end{aligned}$$

olur. Böylece  $f \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  ve  $\|f\|_{(\alpha, pq)} \leq \|T\|$  bulunur. Bu ise  $f \rightarrow T_f$  dönüşümünün  $L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  uzayı ile  $(L^1(G), L\Lambda_*(\alpha, pq; G))$  çarpanlar uzayı arasında bir izometrik izomorfizma olduğunu gösterir. Özel olarak  $p = q = 1$  alınırsa istenen [30] çalışmasında görülür.

**4.2.10.Önerme:**  $p = q = 1$ ,  $p = q = \infty$  veya  $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$  için  $L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  uzayı  $\|\cdot\|_{(\alpha, pq)}$  normuna göre bir Banach uzayıdır.

**İspat:**  $L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  uzayından herhangi bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy dizisi alalım. Bu takdirde  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L(p, q)(G)$  uzayında da bir Cauchy dizisi olur. Böylece  $\|f_n - f\|_{pq} \rightarrow 0$  olacak şekilde bir  $f \in L(p, q)(G)$  vardır. O zaman her  $\varepsilon > 0$  için her  $n, m \geq N$  olduğunda

$$\|f_n - f\|_{pq} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (4.2.10.1)$$

ve

$$\|f_n - f_m\|_{(\alpha, pq)} < \frac{\varepsilon}{16} \quad (4.2.10.2)$$

olacak şekilde bir  $N \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Şimdi  $y \neq 0$  olmak üzere herhangi bir  $y \in G$  alalım. O zaman  $L(G)$  uzayının yaklaşık birimi  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  alındığında

$$\|\tau(y, f_N) - \tau(y, f_N) * e_m\|_{pq} < \frac{\varepsilon}{16} |y|^\alpha$$

$$\|\tau(y, f) - \tau(y, f) * e_m\|_{pq} < \frac{\varepsilon}{16} |y|^\alpha$$

eşitsizliklerini sağlayan  $y$  noktasına bağlı bir  $m \in \mathbb{N}$  vardır. Yine (4.2.10.1) ve (4.2.10.2) ifadelerine göre  $j \geq N$  olmak üzere

$$\|\tau(y, f_N) - \tau(y, f_j)\|_{pq} < \frac{\varepsilon}{16} |y|^\alpha \quad \text{ve} \quad \|f_j - f\|_{pq} < \frac{\varepsilon |y|^\alpha}{16(1 + \|\tau(y, e_m)\|_1)}$$

olacak şekilde bir  $j \in \mathbb{N}$  vardır. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \|\tau(y, f_N - f)\|_{pq} &\leq \|\tau(y, f_N) - \tau(y, f_N) * e_m\|_{pq} + \|\tau(y, f_N - f_j) * e_m\|_{pq} \\ &\quad + \|\tau(y, f_j - f) * e_m\|_{pq} + \|\tau(y, f) * e_m - \tau(y, f)\|_{pq} \\ &< \frac{\varepsilon}{16} |y|^\alpha + \frac{\varepsilon}{16} |y|^\alpha + \|\tau(y, e_m)\|_1 \|f_j - f\|_{pq} + \frac{\varepsilon}{16} |y|^\alpha \\ &< \frac{\varepsilon}{4} |y|^\alpha \end{aligned} \quad (4.2.10.3)$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} &\leq \frac{\|\tau(y, f - f_N)\|_{pq}}{|y|^\alpha} + \frac{\|\tau(y, f_N)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\|\tau(y, f_N)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \end{aligned} \quad (4.2.10.4)$$

eşitsizliği elde edilir.  $f_N \in L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  olduğundan her  $\varepsilon > 0$  için  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|\tau(y, f_N)\|_{pq}}{\delta^\alpha} < \frac{3\varepsilon}{4} \quad (4.2.10.5)$$

olacak şekilde bir  $a_\varepsilon > 0$  sayısı vardır. Bu takdirde (4.2.10.4) ve (4.2.10.5) ile aynı  $\varepsilon > 0$  için  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} < \varepsilon$$

ve bundan dolayı  $f \in L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  bulunur. Yine (4.2.10.3) eşitsizliği ile

$$\sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f_N - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (4.2.10.6)$$

yazılır. Bu takdirde (4.2.10.1) ve (4.2.10.6) ile

$$\|f_N - f\|_{(\alpha, pq)} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (4.2.10.7)$$

bulunur. Böylece (4.2.10.2) ve (4.2.10.7) ile her  $n \geq N$  için  $\|f_n - f\|_{(\alpha, pq)} < \frac{5\varepsilon}{16}$  olur. Bu ispatı tamamlar.

$G$  grubunun biriminin azalan sayılabilir açık komşuluklarının bir  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ailesi için  $e_n = \mu(V_n)^{-1} \chi_{V_n}$  şeklinde tanımlanan fonksiyonların  $L\lambda_*(\alpha, 1; G)$  uzayında olduğunu kabul edelim. Bu takdirde “ $G$  grubu  $(E_{\alpha, 1})$  özelliğini sağlıyor” denir.

**4.2.11.Önerme:**  $G, (E_{\alpha, 1})$  özelliğine sahip metriklenebilir bir yerel kompakt Abel grup

olsun. Eğer  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  ve  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \geq 1$  ise

$$L(p, q)(G) * L\lambda_*(\alpha, p'q'; G) \subset L\lambda_*(\alpha, \infty; G)$$

kapsaması vardır.

**İspat:** Herhangi  $f \in L(p, q)(G)$  ve  $g \in L\lambda_*(\alpha, p'q'; G)$  alalım. Bu takdirde [2, 2.10.Teorem] çalışmasına göre  $f * g \in L^\infty(G)$  olur ve  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  için

$$\frac{\|\tau(y, f * g * e_n)\|_\infty}{|y|^\alpha} = \frac{\|\tau(y, e_n) * (f * g)\|_\infty}{|y|^\alpha} \leq \frac{\|\tau(y, e_n)\|_1}{|y|^\alpha} \|f * g\|_\infty \quad (4.2.11.1)$$

yazılır. Yine her  $n \in \mathbb{N}$  için  $e_n \in L\lambda_*(\alpha, 1; G)$  olduğundan her  $\varepsilon > 0$  için  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda

$$\sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|\tau(y, e_n)\|_1}{\delta^\alpha} < \frac{\varepsilon}{\|f * g\|_\infty}$$

olacak şekilde  $a_\varepsilon > 0$  sayısı vardır. O zaman aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $0 < \delta < a_\varepsilon$  olduğunda (4.2.11.1) ile

$$\sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|\tau(y, f * g * e_n)\|_\infty}{\delta^\alpha} \leq \sup_{|y| \leq \delta} \frac{\|\tau(y, e_n)\|_1}{\delta^\alpha} \|f * g\|_\infty < \varepsilon$$

bulunur. Bu takdirde her  $n$  sayısı için  $f * g * e_n \in L\lambda_*(\alpha, \infty; G)$  olur. Yine  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  ve bir  $C$  sabiti için

$$\begin{aligned} \frac{\|\tau(y, f * g * e_n - f * g)\|_\infty}{|y|^\alpha} &= \frac{\|\tau(y, g) * (f * e_n - f)\|_\infty}{|y|^\alpha} \\ &\leq \frac{C \|\tau(y, g)\|_{p'q'} \|f * e_n - f\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\leq C \|g\|_{(\alpha, p'q')} \|f * e_n - f\|_{pq} \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı  $L\lambda_*(\alpha, \infty; G)$  uzayında  $f * g * e_n \rightarrow f * g$  olur. Buradan da  $L\lambda_*(\alpha, \infty; G)$  uzayı bir Banach uzayı olduğundan  $f * g \in L\lambda_*(\alpha, \infty; G)$  olur. Bu ise istenendir.

**4.2.12.Önerme:**  $G, (E_{\alpha,1})$  özelliğine sahip metriklenebilir bir yerel kompakt Abel grup olsun. Eğer  $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  ve  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \geq 1$  ise  $L\Lambda_*(\alpha, p'q'; G)$  uzayı ile  $Hom_{L^1(G)}(L(p, q)(G), L\lambda_*(\alpha, \infty; G))$  uzayı cebirsel olarak izomorf, topolojik olarak homeomorftur.

**İspat:** Herhangi bir  $f \in L\Lambda_*(\alpha, p'q'; G)$  alalım. Bu takdirde 4.2.11.Önerme ile her  $g \in L(p, q)(G)$  için  $T_f(g) = f * g$  olacak şekilde  $T_f : L(p, q)(G) \rightarrow L\lambda_*(\alpha, \infty; G)$  dönüşümü vardır. Yine herhangi bir  $g \in L(p, q)(G)$  verildiğinde  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  için  $C$  sabit bir sayı olmak üzere

$$\|f * g\|_{\infty} \leq C \|f\|_{p'q'} \|g\|_{pq} \leq C \|f\|_{(\alpha, p'q')} \|g\|_{pq}$$

$$\frac{\|\tau(y, f * g)\|_{\infty}}{|y|^{\alpha}} = \frac{\|\tau(y, f) * g\|_{\infty}}{|y|^{\alpha}} \leq \frac{C \|\tau(y, f)\|_{p'q'} \|g\|_{pq}}{|y|^{\alpha}} \leq C \|f\|_{(\alpha, p'q')} \|g\|_{pq}$$

olur. Böylece her  $g \in L(p, q)(G)$  için

$$\|T_f(g)\|_{(\alpha, \infty)} = \|f * g\|_{(\alpha, \infty)} \leq C \|f\|_{(\alpha, p'q')} \|g\|_{pq}$$

elde edilir. Sonuç olarak  $\|T_f\| \leq C \|f\|_{(\alpha, p'q')}$  ve  $T_f \in Hom_{L^1(G)}(L(p, q)(G), L\lambda_*(\alpha, \infty; G))$

olur. Tersine  $T \in Hom_{L^1(G)}(L(p, q)(G), L\lambda_*(\alpha, \infty; G))$  alalım. O zaman 4.2.8.Önerme

ile her  $g \in L(p, q)(G)$  için  $T(g) = f * g$  olacak şekilde  $f \in L\Lambda_*(\alpha, p'q'; G) \subset L(p', q')(G)$  vardır. 4.2.8.Önermenin ispatındaki işlemleri tekrarlayacak olursak

$K > 0$  bir sabit sayı olmak üzere  $\|f\|_{(\alpha, p'q')} \leq K \|T\|$  bulunabilir. Bu takdirde

$L\Lambda_*(\alpha, p'q'; G)$  uzayı ile  $Hom_{L^1(G)}(L(p, q)(G), L\lambda_*(\alpha, \infty; G))$  uzayı cebirsel olarak izomorf, topolojik olarak homeomorftur.

**4.2.13.Önerme:**  $G, (E_{\alpha,1})$  özelliğine sahip metriklenebilir bir yerel kompakt Abel grup olsun. O zaman  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  olmak üzere

$$L^1(G) * L\Lambda_*(\alpha, pq; G) \subset L\lambda_*(\alpha, pq; G)$$

kapsaması vardır.

**İspat:** Herhangi  $f \in L^1(G)$  ve  $g \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  verilsin. O zaman  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\frac{\|\tau(y, f * g * e_n)\|_{pq}}{|y|^\alpha} = \frac{\|\tau(y, e_n) * (f * g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \leq \frac{\|\tau(y, e_n)\|_1}{|y|^\alpha} \|f * g\|_{pq} \quad (4.2.13.1)$$

bulunur. O zaman  $G$  grubunun  $(E_{\alpha,1})$  özelliğini sağlaması ve (4.2.13.1) eşitsizliğiyle  $f * g * e_n \in L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  olur. Ayrıca  $y \neq 0, y \in G$  ve  $n \rightarrow \infty$  olduğunda

$$\begin{aligned} \frac{\|\tau(y, f * g * e_n - f * g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} &= \frac{\|\tau(y, g) * (f * e_n - f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\ &\leq \frac{\|\tau(y, g)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \|f * e_n - f\|_1 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.2.13.2)$$

yazılır. Böylece  $L(p, q)(G)$  uzayında  $f * g * e_n \rightarrow f * g$  olduğundan  $L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  uzayında da  $f * g * e_n \rightarrow f * g$  olur ve  $L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  uzayı bir Banach uzayı olduğundan  $f * g \in L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  elde edilir.

**4.2.14.Önerme:**  $G, (E_{\alpha,1})$  özelliğine sahip metriklenebilir bir yerel kompakt Abel grup ve  $1 < p, q < \infty$  olsun. Bu takdirde  $(L^1(G), L\lambda_*(\alpha, pq; G))$  uzayı ile  $L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  uzayı izometrik izomorftur. Ayrıca  $p = q = 1$  ise  $(L^1(G), L\lambda_*(\alpha, 1; G)) \subset L^1(G)$  olur.

**İspat:** Herhangi bir  $f \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  verilsin. O zaman 4.2.13.Önermeye göre her  $g \in L^1(G)$  için  $T_f(g) = f * g$  olacak şekilde  $T_f : L^1(G) \rightarrow L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  dönüşümü tanımlanır. Yine  $\|T_f\| \leq \|f\|_{(\alpha, pq)}$  ve  $T_f \in (L^1(G), L\lambda_*(\alpha, pq; G))$  olduğu kolaylıkla görülür.

Tersine  $T \in (L^1(G), L\lambda_*(\alpha, pq; G))$  verilsin. O zaman [5, 3.4.Teorem] ile her  $g \in L^1(G)$  için  $T(g) = f * g$  olacak şekilde bir  $f \in L(p, q)(G)$  vardır. Ayrıca  $T$  sınırlı olduğundan  $y \neq 0$  olmak üzere her  $y \in G$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned}
\frac{\|\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} &\leq \frac{\|\tau(y, f) - \tau(y, T(e_n))\|_{pq}}{|y|^\alpha} + \frac{\|\tau(y, T(e_n))\|_{pq}}{|y|^\alpha} \\
&= \frac{\|\tau(y, f) - \tau(y, f * e_n)\|_{pq}}{|y|^\alpha} + \|T(e_n)\|_{(\alpha, pq)} \\
&\leq \frac{\|\tau(y, f) - \tau(y, f) * e_n\|_{pq}}{|y|^\alpha} + \|T\| \|e_n\|_1
\end{aligned}$$

bulunur. Yine  $n \rightarrow \infty$  olduğunda her  $y \in G$  için  $\|\tau(y, f) - \tau(y, f) * e_n\|_{pq} \rightarrow 0$  olduğundan

$$\sup_{y \neq 0} \frac{\|\tau(y, f)\|_{pq}}{|y|^\alpha} \leq \|T\|$$

elde edilir. Bu ise  $f \in L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  olduğunu gösterir. 4.2.9.Önermenin ispatındaki metotlar aynen kullanılarak  $\|f\|_{pq} \leq \|T\|$  ve  $\|f\|_{(\alpha, pq)} \leq \|T\|$  eşitsizlikleri bulunur. Sonuç olarak  $(L^1(G), L\lambda_*(\alpha, pq; G))$  uzayı ile  $L\Lambda_*(\alpha, pq; G)$  uzayı izometrik izomorftur. Özel olarak  $p = q = 1$  alınırsa sonuç [30] çalışmasında görülür.

### 4.3. $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$ Uzayı ve Bazı Özellikleri

$G$  bir yerel kompakt Abel grup,  $\mu$  onun üzerinde bir Haar ölçümü ve aynı zamanda  $K = \mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$  olsun.  $w_1(x), w_2(x)$  fonksiyonları  $G$  üzerinde ağırlık fonksiyonları olduğunda  $1 \leq r \leq \infty$  için  $L_{w_1}^r(G)$  ağırlıklı Lebesgue uzayları ve  $0 \leq p, q \leq \infty$  için  $L(p, q, w_2 d\mu)(G)$  ağırlıklı Lorentz uzaylarının,  $K$  cismi üzerinde birer vektör uzayı olduğu bilinmektedir [8, 17, 31]. Bu nedenle  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G) = L_{w_1}^r(G) \cap L(p, q, w_2 d\mu)(G)$  şeklinde tanımlanan  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayı da bir vektör uzayı olur. Yine  $(L_{w_1}^r(G), \|\cdot\|_{r,w_1})$  ile  $(L(p, q, w_2 d\mu)(G), \|\cdot\|_{p,q,w_2})$  birer normlu uzaylar olduğundan herhangi bir  $f \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  için

$$\|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} = \|f\|_{r,w_1} + \|f\|_{p,q,w_2}$$

ile tanımlı  $\|\cdot\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} : B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  bir fonksiyon olur ve bu fonksiyon iki normun toplamı olarak tanımlandığından  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  üzerinde bir normdur.

**4.3.1. Önerme:**  $1 \leq r \leq \infty$  ve  $p = q = 1$ ,  $p = q = \infty$  veya  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  olmak üzere  $(B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_{r,p,q}^{w_1,w_2})$  normlu uzayları birer Banach uzayıdır.

**İspat:**  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  normlu uzayından herhangi bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy dizisi alalım. Cauchy dizisinin tanımı gereğince herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $m, n \geq n_0$  için

$$\|f_n - f_m\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} = \|f_n - f_m\|_{r,w_1} + \|f_n - f_m\|_{p,q,w_2} < \varepsilon \quad (4.3.1.1)$$

olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır ve (4.3.1.1) ifadesine göre her  $m, n \geq n_0$  için

$$\|f_n - f_m\|_{r,w_1} < \varepsilon \quad \text{ve} \quad \|f_n - f_m\|_{p,q,w_2} < \varepsilon$$

yazılır. Bu ise  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L_{w_1}^r(G)$  ve  $L(p, q, w_2 d\mu)(G)$  uzaylarında Cauchy dizisi olduğunu gösterir.  $L_{w_1}^r(G)$  ve  $L(p, q, w_2 d\mu)(G)$  uzayları Banach uzayları olduğundan  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi,  $L_{w_1}^r(G)$  uzayında bir  $f$  fonksiyonuna ve  $L(p, q, w_2 d\mu)(G)$

uzayında da bir  $g$  fonksiyonuna yakınsar. Eğer  $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_{r,w_1}$  eşitsizliği kullanılırsa aynı  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n \geq n_1$  olduğunda

$$\|f_n - f\|_r \leq \|f_n - f\|_{r,w_1} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3.1.2)$$

olacak şekilde  $n_1 \in \mathbb{N}$  vardır. Yine  $\|\cdot\|_{p,q} \leq \|\cdot\|_{p,q,w_2}$  eşitsizliği kullanılırsa aynı  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n \geq n_2$  olduğunda

$$\|f_n - g\|_{p,q} \leq \|f_n - g\|_{p,q,w_2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3.1.3)$$

olacak şekilde  $n_2 \in \mathbb{N}$  vardır. Böylece  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L(G)$  uzayında  $f$  fonksiyonuna yakınsadığından,  $f$  fonksiyonuna (h.h.h.) yakınsayan bir  $\{f_{n_k}\}$  alt dizisi vardır. Yine  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L(p,q)(G)$  uzayında Cauchy dizisi olma özelliği kullanılırsa bu  $\varepsilon > 0$  sayısı için her  $n, n_k \geq n_3$  olduğunda

$$\|f_n - f_{n_k}\|_{p,q} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3.1.4)$$

olacak şekilde  $n_3 \in \mathbb{N}$  vardır. Eğer  $n_4 = \max\{n_2, n_3\}$  denirse (4.3.1.3) ve (4.3.1.4) ile verilen bu  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n, n_k \geq n_4$  olduğunda

$$\|f_{n_k} - g\|_{p,q} \leq \|f_n - f_{n_k}\|_{p,q} + \|f_n - g\|_{p,q} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Yani  $\{f_{n_k}\}$  alt dizisi  $L(p,q)(G)$  uzayında  $g$  fonksiyonuna yakınsar. O halde  $\{f_{n_k}\}$  dizisinin  $g$  fonksiyonuna (h.h.h.) yakınsayan bir  $\{f_{n_{k_i}}\}$  alt dizisi vardır. Şimdi de  $f = g$  (h.h.h.) olduğunu gösterelim. Eğer  $\{f_{n_k}\}$  dizisinin  $f$  fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesini  $A$  ile gösterirsek  $\mu(A) = 0$  yazılır ve herhangi bir  $x \in G - A$  için her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n_k \geq m_1$  olduğunda

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (4.3.1.5)$$

olacak şekilde bir  $m_1 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Şimdi  $\{f_{n_{k_i}}\}$  dizisinin  $g$  fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesini  $B$  ile gösterirsek  $\mu(B) = 0$  yazılır ve herhangi bir  $x \in G - B$  ve  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n_{k_i} \geq m_2$  olduğunda

$$|f_{n_{k_i}}(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir  $m_2 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Eğer  $k_0 = \max\{m_1, m_2\}$  dersek her  $x \in A \cup B$  için  $x \in A$  ve  $x \in B$  olduğundan her  $n_{k_i} \geq k_0$  için

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_{n_{k_i}}(x)| + |f_{n_{k_i}}(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazılır. Böylece  $f = g$  (h.h.h.) elde edilir. Yine  $L(p, q)(G)$  uzayının elemanları denk sınıflar olduğundan  $f = g$  çıkar. Bundan dolayı  $f \in B_{r, p, q}^{w_1, w_2}(G)$  bulunur. Yine  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  denirse her  $n \geq n_0$  için

$$\|f_n - f\|_{r, p, q}^{w_1, w_2} = \|f_n - f\|_{r, w_1} + \|f_n - f\|_{p, q, w_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Buna göre istenen elde edilir.

**4.3.2.Önerme:**  $1 \leq r < \infty, 1 \leq p, q \leq \infty$  olmak üzere

- (i)  $B_{r, p, q}^{w_1, w_2}(G)$  uzayı kuvvetli karakter değişmezdir,
- (ii)  $B_{r, p, q}^{w_1, w_2}(G)$  uzayından  $B_{r, p, q}^{w_1, w_2}(G)$  uzayına tanımlanan  $f \rightarrow M_t f$  fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur.

**İspat:** (i) Herhangi bir  $f \in B_{r, p, q}^{w_1, w_2}(G)$  ve  $t \in \hat{G}$  alalım. O zaman her  $y > 0$  için

$$\begin{aligned} \lambda_{M_t f, w_2}(y) &= w_2 \{x \in G : |M_t f(x)| > y\} = w_2 \{x \in G : |\langle x, t \rangle f(x)| > y\} \\ &= w_2 \{x \in G : |\langle x, t \rangle| |f(x)| > y\} \\ &= w_2 \{x \in G : |f(x)| > y\} = \lambda_{f, w_2}(y) \end{aligned}$$

olur. Bunun sonucu olarak  $(M_t f)_{w_2}^* = f_{w_2}^*$ ,  $(M_t f)_{w_2}^{**} = f_{w_2}^{**}$  eşitlikleri ve dolayısıyla

$$\|M_t f\|_{p, q, w_2} = \|f\|_{p, q, w_2} \text{ bulunur. Yine [11] çalışmasına göre } \|M_t f\|_{r, w_1} = \|f\|_{r, w_1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\|M_t f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} &= \|M_t f\|_{r,w_1} + \|M_t f\|_{p,q,w_2} \\ &= \|f\|_{r,w_1} + \|f\|_{p,q,w_2} = \|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2}\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Şimdi de  $M_t$  fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayından alınan herhangi bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $\|\cdot\|_{r,p,q}^{w_1,w_2}$  normuna göre bir  $f \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  fonksiyonuna yakınsarken  $\{M_t f_n\}$  dizisi de  $M_t f \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  fonksiyonuna  $\|\cdot\|_{r,p,q}^{w_1,w_2}$  normuna göre yakınsamalıdır.  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $f$  fonksiyonuna yakınsadığından verilen herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı için her  $n \geq n_0$  olduğunda

$$\|f_n - f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} = \|f_n - f\|_{r,w_1} + \|f_n - f\|_{p,q,w_2} < \varepsilon$$

olacak şekilde  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır. Yine aynı  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık aynı  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı alınırsa her  $n \geq n_0$  olduğunda

$$\begin{aligned}\|M_t f_n - M_t f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} &= \|M_t f_n - M_t f\|_{r,w_1} + \|M_t f_n - M_t f\|_{p,q,w_2} \\ &= \|f_n - f\|_{r,w_1} + \|f_n - f\|_{p,q,w_2} < \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

**4.3.3.Önerme:**  $1 \leq r < \infty$ ,  $0 < p, q < \infty$  veya  $0 < p < q = \infty$  olmak üzere aşağıdaki özellikler doğrudur:

- (i)  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayı ötelemeler altında değişmezdir,
- (ii) Herhangi bir  $x \in G$  için  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayından  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayına tanımlanan  $f \rightarrow L_x f$  fonksiyonu süreklidir.

**İspat:** (i) Herhangi  $f \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  ve  $u \in G$  alalım. O zaman her  $y \geq 0$  için

$$\lambda_{L_u f, w_2}(y) = w_2 \{x \in G : |L_u f(x)| > y\} = w_2 \{x \in G : |f(x-u)| > y\}$$

bulunur. Bu durumda  $x-u = m$  değişken değiştirmesi yapılırsa, ağırlık fonksiyonun ikinci özelliğine göre

$$\begin{aligned}
\lambda_{L_u f, w_2}(y) &= w_2 \{m+u \in G : |f(m)| > y\} = w_2 \{ \{m \in G : |f(m)| > y\} + u \} \\
&\leq \int_{\{m \in G : |f(m)| > y\} + u} w_2(t) d\mu(t) = \int_{\{m \in G : |f(m)| > y\}} w_2(t+u) d\mu(t) \\
&\leq w_2(u) \int_{\{m \in G : |f(m)| > y\}} w_2(t) d\mu(t) \\
&= w_2(u) w_2 \{m \in G : |f(m)| > y\} = w_2(u) \lambda_{f, w_2}(y)
\end{aligned}$$

olur. Yine [8, 2.1.Önerme] ile  $\|L_u f\|_{p,q,w_2} \leq (w_2(u))^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,q,w_2}$  yazılır ve aynı zamanda  $\|L_u f\|_{r,w_1} \leq w_1(u) \|f\|_{r,w_1}$  eşitsizliği kolayca görülür. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\|L_u f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} &= \|L_u f\|_{r,w_1} + \|L_u f\|_{p,q,w_2} \\
&\leq w_1(u) \|f\|_{r,w_1} + (w_2(u))^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,q,w_2} \\
&\leq \max \{ w_1(u), (w_2(u))^{\frac{1}{p}} \} \|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Her  $u \in G$  için  $L_u(\cdot) : B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G) \rightarrow B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  fonksiyonu doğrusal ve (i) şikkına göre sınırlıda olduğundan süreklidir.

**4.3.4.Önerme:**  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  ve  $1 \leq r < \infty$  olmak üzere herhangi bir  $f \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  fonksiyonuna karşılık  $G$  kümesinden  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayına tanımlanan  $x \rightarrow L_x f$  fonksiyonu süreklidir.

**İspat:**  $G$  kümesinden  $L_{w_1}^r(G)$  uzayına tanımlanan  $x \rightarrow L_x f$  fonksiyonunun sürekliliği [13] çalışmasından biliniyor. Bu nedenle verilen herhangi bir  $x_0 \in G$  ve  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $x \in U_1$  için

$$\|L_x f - L_{x_0} f\|_{r,w_1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde  $x_0$  noktasının bir  $U_1$  komşuluğu vardır. Yine  $G$  kümesinden  $L(p,q,w_2 d\mu)(G)$  uzayına tanımlanan  $x \rightarrow L_x f$  fonksiyonunun sürekliliği [8] çalışmasından biliniyor. O zaman  $\varepsilon > 0$  için her  $x \in U_2$  olduğunda

$$\|L_x f - L_{x_0} f\|_{p,q,w_2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde  $x_0$  noktasının bir  $U_2$  komşuluğu vardır. Böylece  $V = U_1 \cap U_2$  kümesi de  $x_0$  noktasının bir komşuluğu olup, aynı  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $x \in V$  için

$$\|L_x f - L_{x_0} f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} = \|L_x f - L_{x_0} f\|_{r,w_1} + \|L_x f - L_{x_0} f\|_{p,q,w_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu istenen sonucu verir.

**4.3.5.Önerme:**  $w_1$  ve  $w_2$  ağırlık fonksiyonları birer sabit fonksiyon olsunlar. O zaman

$1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  ve  $1 \leq r < \infty$  olmak üzere  $(B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_{r,p,q}^{w_1,w_2})$  uzayı bir homojen Banach uzayıdır.

**İspat:** Her  $x \in G$  için  $w_1(x) = K$  ve  $w_2(x) = L$  olduğunu kabul edelim. Yine herhangi bir  $f \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  ve  $u \in G$  alalım.  $\mu$  bir Haar ölçümü olduğundan her  $y \geq 0$  için

$$\begin{aligned} \lambda_{L_u f, w_2}(y) &= w_2 \{x \in G : |L_u f(x)| > y\} = w_2 \{x \in G : |f(x-u)| > y\} \\ &= w_2 \left\{ \int_{\{m \in G : |f(m)| > y\} + u} w_2(x) d\mu(x) \right\} \\ &= L \int_{\{m \in G : |f(m)| > y\} + u} d\mu(x) = L\mu(\{m \in G : |f(m)| > y\} + u) \\ &= L\mu\{m \in G : |f(m)| > y\} = \int_{\{m \in G : |f(m)| > y\}} w_2(x) d\mu(x) \\ &= \lambda_{f, w_2}(y) \end{aligned}$$

bulunur. Bunun sonucu olarak  $(L_u f)_{w_2}^* = f_{w_2}^*$  ve  $(L_u f)_{w_2}^{**} = f_{w_2}^{**}$  eşitlikleri elde edilir.

Buradan da  $\|L_u f\|_{p,q,w_2} = \|f\|_{p,q,w_2}$  bulunur. Yine

$$\begin{aligned} \|L_u f\|_{r,w_1}^r &= \int_G |L_u f(x)|^r w_1^r(x) d\mu(x) = \int_G |f(x-u)|^r w_1^r(x) d\mu(x) \\ &= K^r \int_G |f(t)|^r d\mu(t) = \int_G |f(t)|^r w_1^r(t) d\mu(t) \\ &= \|f\|_{r,w_1}^r \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\|L_u f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} &= \|L_u f\|_{r,w_1} + \|L_u f\|_{p,q,w_2} \\ &= \|f\|_{r,w_1} + \|f\|_{p,q,w_2} = \|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2}\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre  $(B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_{r,p,q}^{w_1,w_2})$  bir yarı homojen Banach uzayıdır ve 4.3.4.Önerme gereğince de bir homojen Banach uzayı olur.

**4.3.6.Sonuç:**  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  ve  $1 \leq r < \infty$  olmak üzere herhangi bir  $f \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  için  $G$  kümesinden  $\mathbb{R}$  uzayına tanımlanan  $x \rightarrow \|L_x f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2}$  fonksiyonu süreklidir.

**İspat:** Herhangi bir  $x_0 \in G$  ve  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin. 4.3.4.Önermeden dolayı her  $x \in V$  için  $\|L_x f - L_{x_0} f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} < \varepsilon$  olacak şekilde  $x_0$  noktasının bir  $V$  komşuluğu vardır. Yine aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve  $V$  komşuluğu için

$$\left| \|L_x f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} - \|L_{x_0} f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} \right| \leq \|L_x f - L_{x_0} f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} < \varepsilon$$

yazılır. Bu istenen sonucu verir.

**4.3.7.Önerme:**  $1 \leq r < \infty$ ,  $1 < p < \infty$  ve  $q \neq \infty$  olsun. Bu takdirde eğer  $w_0 \succ w_1$  ve  $w_0 \succ w_2$  ise  $(B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_{r,p,q}^{w_1,w_2})$  uzayı bir Banach  $L_{w_0}^1(G)$ -modüldür.

**İspat:**  $1 < p < \infty$ ,  $q \neq \infty$  olmak üzere  $L(p,q,w_2 d\mu)(G)$  uzayının bir Banach  $L_{w_2}^1(G)$ -modül olduğu [8, 3.3.Önerme] çalışmasından bilinmektedir. Yine  $1 \leq r < \infty$  olmak üzere  $L_{w_1}^r(G)$  uzayının bir Banach  $L_{w_1}^1(G)$ -modül olduğu [13] çalışmasından biliniyor. Ayrıca  $w_0 \succ w_1$  ve  $w_0 \succ w_2$  ise  $L_{w_0}^1(G) \subset L_{w_1}^1(G)$  ve  $L_{w_0}^1(G) \subset L_{w_2}^1(G)$  kapsamaları vardır. Bundan dolayı alınan herhangi bir  $f \in L_{w_0}^1(G)$  için

$$\|f\|_{1,w_1} \leq C_1 \|f\|_{1,w_0} \quad \text{ve} \quad \|f\|_{1,w_2} \leq C_2 \|f\|_{1,w_0}$$

olacak şekilde  $C_1, C_2 > 0$  sabit sayıları vardır. Bu takdirde herhangi bir  $f \in L_{w_0}^1(G)$  ve  $g \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  için

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} &= \|f * g\|_{r,w_1} + \|f * g\|_{p,q,w_2} \\
&\leq \|f\|_{1,w_1} \|g\|_{r,w_1} + \|f\|_{1,w_2} \|g\|_{p,q,w_2} \\
&\leq C_1 \|f\|_{1,w_0} \|g\|_{r,w_1} + C_2 \|f\|_{1,w_0} \|g\|_{p,q,w_2} \\
&\leq \max\{C_1, C_2\} \|f\|_{1,w_0} (\|g\|_{r,w_1} + \|g\|_{p,q,w_2}) \\
&\leq \max\{C_1, C_2\} \|f\|_{1,w_0} \|g\|_{r,p,q}^{w_1,w_2}
\end{aligned} \tag{4.3.7.1}$$

bulunur. Şimdi  $L_{w_0}^1(G)$  üzerinde bir  $\|\cdot\|$  fonksiyonunu

$$\|f\| = \max\{C_1, C_2\} \|f\|_{1,w_0}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu takdirde  $\|\cdot\|_{1,w_0}$  bir norm olduğundan  $\|\cdot\|$  fonksiyonu da bir normdur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
i: (L_{w_0}^1(G), \|\cdot\|_{1,w_0}) &\rightarrow (L_{w_0}^1(G), \|\cdot\|) \\
f &\rightarrow i(f) = f
\end{aligned}$$

fonksiyonunun bir homeomorfizma olduğu kolayca görülür. O zaman Banach teoremine göre bu normlar denk olur. Öte yandan (4.3.7.1) eşitsizliğinden dolayı

$$\|f * g\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} \leq \|f\| \|g\|_{r,p,q}^{w_1,w_2}$$

olur. Banach modül olmanın diğer özelliklerini göstermek kolaydır. Böylece  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayı  $(L_{w_0}^1(G), \|\cdot\|)$  uzayı üzerinde, dolayısıyla  $(L_{w_0}^1(G), \|\cdot\|_{1,w_0})$  uzayı üzerinde Banach modül olur.

**4.3.8.Yardımcı Önerme:**  $1 < p < \infty$ ,  $q \neq \infty$  olsun. Eğer  $w_1 > w_2$  ise her  $f \in L_{w_1}^1(G)$  için  $\|f\|_{1,w_2} \leq C \|f\|_{1,w_1}$  olacak şekilde bulunan  $C > 0$  sayısını kullanarak  $B_{1,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  üzerine  $\|\cdot\|_B = \max\{C, 1\} \|\cdot\|_{1,p,q}^{w_1,w_2}$  normunu koyalım. O zaman  $(B_{1,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_B)$  bir Banach uzayıdır.

**İspat:** Kabul edelim ki  $w_1 \succ w_2$  olsun. O zaman  $L_{w_1}^1(G) \subset L_{w_2}^1(G)$  ve her  $f \in L_{w_1}^1(G)$  için  $\|f\|_{1,w_2} \leq C \|f\|_{1,w_1}$  olacak şekilde  $C > 0$  sayısı vardır. Bu takdirde  $\|\cdot\|_{1,p,q}^{w_1,w_2}$  bir norm olduğundan  $\|\cdot\|_B$  fonksiyonu da bir norm olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} (B_{1,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_{1,p,q}^{w_1,w_2}) &\xrightarrow{i} (B_{1,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_B) \\ f &\longrightarrow i(f) = f \end{aligned}$$

birim fonksiyonunun bir homeomorfizma olduğu kolayca görülür. Bunun sonucu olarak bu normlar denktir ve Banach teoreminden dolayı  $(B_{1,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_B)$  uzayı bir Banach uzayı olur.

Benzer şekilde  $w_2 \succ w_1$  olduğunda da kurulacak yeni norma göre  $B_{1,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayı bir Banach uzayı olur.

**4.3.9.Önerme:**  $1 < p < \infty$ ,  $q \neq \infty$  olsun. Bu takdirde eğer  $w_1 \succ w_2$  veya  $w_2 \succ w_1$  ise  $(B_{1,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_B)$  uzayı Banach cebiridir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $w_1 \succ w_2$  olsun. O zaman 4.3.8.Yardımcı Önermeye göre  $(B_{1,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_B)$  uzayı bir Banach uzayıdır. Yine [8, 3.1.Önerme] çalışmasından  $L(p,q,w_2d\mu)(G)$  uzayının bir Banach  $L_{w_2}^1(G)$ -modül olduğu biliniyor. Şimdi herhangi  $f, g \in B_{1,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \|f * g\|_B &= \max\{C, 1\} \|f * g\|_{1,p,q}^{w_1,w_2} \\ &= \max\{C, 1\} (\|f * g\|_{1,w_1} + \|f * g\|_{p,q,w_2}) \\ &\leq \max\{C, 1\} (\|f\|_{1,w_1} \|g\|_{1,w_1} + \|f\|_{1,w_2} \|g\|_{p,q,w_2}) \\ &\leq \max\{C, 1\} (\|f\|_{1,w_1} \|g\|_{1,w_1} + C \|f\|_{1,w_1} \|g\|_{p,q,w_2}) \\ &\leq \max\{C, 1\} (\max\{C, 1\} \|f\|_{1,w_1} (\|g\|_{1,w_1} + \|g\|_{p,q,w_2})) \\ &\leq \max\{C, 1\} \|f\|_{1,w_1} \max\{C, 1\} \|g\|_{1,p,q}^{w_1,w_2} \\ &\leq \|f\|_B \|g\|_B \end{aligned}$$

bulunur. Banach cebiri olmanın diğere özelliklerini göstermek kolaydır. Benzer şekilde  $w_2 \succ w_1$  ise benzer işlemler tekrarlanarak istenen elde edilir.

**4.3.10.Önerme:**  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  ve  $1 \leq r < \infty$  olmak üzere  $(B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_{r,p,q}^{w_1,w_2})$  uzayının kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan sınırlı bir yaklaşık birimi vardır.

**İspat:**  $G$  grubunun birimi olan  $e$  nin bir  $K$  kompakt komşuluğunu alalım. Beurling ağırlık fonksiyonları  $w_1(x)$  ve  $w_2(x)$  yerel sınırlı olduğundan her  $y \in K$  için  $w_1(y) \leq A_1$  ve  $w_2(y) \leq A_2$  olacak şekilde  $A_1, A_2 > 0$  sayıları vardır. Şimdi  $\mathcal{V}(e)$ ,  $e \in G$  birim elemanının komşuluklarının ailesi olmak üzere bir  $F$  kümesini

$$F = \{ E \subset K : E \in \mathcal{V}(e) \}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu  $F$  kümesi üzerinde bir  $\succ$  bağıntısı  $E_1 \subset E_2 \Leftrightarrow E_1 \succ E_2$  şeklinde tanımlansın. Bu takdirde  $(F, \succ)$  bir yönlendirilmiş küme elde edilir. Her  $E_i \in F$  için  $G$  üzerinde tanımlı, negatif olmayan, desteği  $E_i$  tarafından kapsanan ve  $\int e_{\alpha_i} d\mu = 1$  koşulunu sağlayan  $\{e_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$  sürekli fonksiyonları vardır. Bu takdirde  $j = 1, 2$  iken  $L_{w_j}^1(G)$  uzaylarında birimin komşuluklarından elde edilen bu  $\{e_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$  ağı sınırlı yaklaşık birimdir [34, 37].  $L_{w_1}^1(G)$  uzayı için elde edilen bu yaklaşık birimin  $L_{w_1}^r(G)$  uzayı içinde bir yaklaşık birim olduğu [26] çalışmasında gösterilmiştir. Böylece her  $f \in L_{w_1}^r(G)$  verildiğinde, her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $\alpha \succ \alpha_1$  için

$$\|f * e_{\alpha} - f\|_{r,w_1} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3.10.1)$$

olacak şekilde  $\alpha_1 \in I$  vardır. Yine [8, 3.2.Önerme] çalışmasında  $L_{w_2}^1(G)$  uzayının  $\{e_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$  sınırlı yaklaşık biriminin  $L(p, q, w_2 d\mu)(G)$  uzayı için bir yaklaşık birim olduğu gösterildi. Bu takdirde aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı alındığında her  $f \in L(p, q, w_2 d\mu)(G)$  ve her  $\alpha \succ \alpha_2$  için

$$\|f * e_{\alpha} - f\|_{p,q,w_2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3.10.2)$$

olacak şekilde  $\alpha_2 \in I$  vardır. Eğer  $\alpha_0 \succ \alpha_1$  ve  $\alpha_0 \succ \alpha_2$  ise aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı alındığında her  $f \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  ve her  $\alpha \succ \alpha_0$  için (4.3.10.1) ve (4.3.10.2) ifadelerinden

$$\|f * e_\alpha - f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} = \|f * e_\alpha - f\|_{r,w_1} + \|f * e_\alpha - f\|_{p,q,w_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Böylece  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  için  $(B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G), \|\cdot\|_{r,p,q}^{w_1,w_2})$  uzayının kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan sınırlı bir yaklaşık birimi vardır.

**4.3.11.Önerme:**  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  ve  $1 \leq r < \infty$  olsun. Eğer  $w_0 \succ w_1$  ve  $w_0 \succ w_2$  ise  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayı bir esas Banach  $L_{w_0}^1(G)$ -modüldür.

**İspat:**  $(L_{w_0}^1(G), \|\cdot\|_{1,w_0})$  uzayının bir Banach cebiri olduğu biliniyor [31]. Yine 4.3.7.Önermede  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayının Banach  $L_{w_0}^1(G)$ -modül olduğu gösterildi. Yine  $L_{w_0}^1(G)$  Banach cebirinin her  $f \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  için

$$\lim_{\alpha} \|f * e_\alpha - f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} = 0$$

olacak şekilde bir  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  sınırlı yaklaşık birimine sahip olduğu 4.3.10.Önermeden biliniyor. O halde [7] çalışmasındaki Module Factorization teoreminden dolayı  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayı  $L_{w_0}^1(G)$  uzayı üzerinde esas modüldür.

**4.3.12.Önerme:**  $w_1, w_2, w_3$  ile  $w_4$  fonksiyonları  $G$  üzerinde ağırlık fonksiyonları ve  $1 \leq r \leq \infty, 0 < p, q < \infty$  olsun.

**i.**  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G) = B_1(G)$  ve  $B_{r,p,q}^{w_3,w_4}(G) = B_2(G)$  diyelim. Bu takdirde

$$B_1(G) \subset B_2(G)$$

olması için gerekli ve yeterli koşul her  $f \in B_1(G)$  için

$$\|f\|_{B_2} \leq C \|f\|_{B_1}$$

olacak şekilde bir  $C > 0$  sayısının bulunmasıdır.

**ii.** Eğer  $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$  ve  $w_1 \succ w_3$  ise

$$B_{r,p,q_1}^{w_1,w_2}(G) \subset B_{r,p,q_2}^{w_3,w_4}(G)$$

kapsaması vardır.

**İspat:** (i)  $B_1(G) \subset B_2(G)$  olsun.  $B_1(G)$  uzayı üzerindeki bir  $\|\cdot\|$  fonksiyonunu  $f \in B_1(G)$  olmak üzere

$$\|f\| = \|f\|_{B_1} + \|f\|_{B_2}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu fonksiyon iki normun toplamı olduğu için  $B_1(G)$  uzayı üzerinde bir norm olur. Şimdi  $(B_1(G), \|\cdot\|)$  uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için  $(B_1(G), \|\cdot\|)$  uzayından bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy dizisi alalım. Cauchy dizisi tanımı gereğince herhangi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde her  $m, n \geq n_0$  için

$$\|f_n - f_m\| = \|f_n - f_m\|_{B_1} + \|f_n - f_m\|_{B_2} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Buradan her  $m, n \geq n_0$  için

$$\|f_n - f_m\|_{B_1} < \varepsilon \quad \text{ve} \quad \|f_n - f_m\|_{B_2} < \varepsilon$$

yazılır. Bu ise  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $B_1(G)$  ve  $B_2(G)$  uzaylarında birer Cauchy dizisi olduğunu gösterir.  $B_1(G)$  ve  $B_2(G)$  uzayları birer Banach uzayı olduğundan  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $B_1(G)$  uzayında bir  $f$  fonksiyonuna ve  $B_2(G)$  uzayında da bir  $g$  fonksiyonuna yakınsar. Dolayısıyla  $\|\cdot\|_{p,q} \leq \|\cdot\|_{p,q,w}$  olduğundan verilen bu  $\varepsilon > 0$  sayısı için her  $n \geq n_1$  olduğunda

$$\|f_n - f\|_{p,q} \leq \|f_n - f\|_{p,q,w_2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3.12.1)$$

olacak şekilde bir  $n_1 \in \mathbb{N}$  sayısı ve her  $n \geq n_2$  olduğunda

$$\|f_n - g\|_{p,q} \leq \|f_n - g\|_{p,q,w_4} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3.12.2)$$

olacak şekilde bir  $n_2 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Bu takdirde  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L(p,q)(G)$  ve  $L(p,q,w_2 d\mu)(G)$  uzaylarında  $f$  fonksiyonuna yakınsadığından  $\mu$  ve  $w_2 d\mu$  ölçümleri için ölçüm içinde de yakınsar [40]. O halde  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin her iki ölçüme göre (h.h.h.)  $f$  fonksiyonuna yakınsayan bir  $\{f_{n_k}\}$  alt dizisi vardır [40]. Bu  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

dizisinin  $L(p, q, w_4 d\mu)(G)$  uzayında Cauchy dizisi olması kullanılırsa, bu  $\varepsilon > 0$  sayısı için her  $n, n_k \geq n_3$  olduğunda

$$\|f_n - f_{n_k}\|_{p,q} \leq \|f_n - f_{n_k}\|_{p,q,w_4} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3.12.3)$$

olacak şekilde bir  $n_3 \in \mathbb{N}$  vardır. Eğer  $n_4 = \max\{n_2, n_3\}$  olarak seçilirse (4.3.12.2) ve (4.3.12.3) eşitsizliklerinden dolayı verilen bu  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n_k \geq n_4$  olduğunda

$$\|f_{n_k} - g\|_{p,q} \leq \|f_{n_k} - f_n\|_{p,q} + \|f_n - g\|_{p,q} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece  $\{f_{n_k}\}$  dizisi  $L(p, q)(G)$  uzayında  $g$  fonksiyonuna yakınsar. Böylece  $\{f_{n_k}\}$  dizisi ölçüm içinde de  $g$  fonksiyonuna yakınsar [40]. O halde  $\{f_{n_k}\}$  dizisinin  $g$  fonksiyonuna (h.h.h.) yakınsayan bir  $\{f_{n_{k_m}}\}$  alt dizisi vardır. Eğer  $\{f_{n_k}\}$  dizisinin  $f$  fonksiyonuna noktasal yakınsamadığı noktaların kümesini  $A$  ile gösterirsek,  $\mu(A) = 0$  ( $\Rightarrow w_j(A) = 0$ ) olur. Böylece her  $x \in G - A$  için verilen  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n_k \geq m_1$  olduğunda

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir  $m_1 \in \mathbb{N}$  vardır. Bunun sonucu olarak her  $x \in G - A$  için verilen  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n_{k_m} \geq m_1$  olduğunda

$$|f_{n_{k_m}}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3.12.4)$$

yazılır. Yine  $\{f_{n_{k_m}}\}$  dizisinin  $g$  fonksiyonuna noktasal yakınsamadığı noktaların kümesini  $B$  ile gösterirsek,  $\mu(B) = 0$  ( $\Rightarrow w_j(B) = 0$ ) olur. Böylece her  $x \in G - B$  için verilen  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık her  $n_{k_m} \geq m_2$  olduğunda

$$|f_{n_{k_m}}(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3.12.5)$$

olacak şekilde bir  $m_2 \in \mathbb{N}$  vardır. Eğer  $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$  olarak seçilirse  $n_{k_m} \geq m_0$  olduğunda her  $x \notin A \cup B$  için (4.3.12.4) ve (4.3.12.5) ifadelerinden

$$|g(x) - f(x)| = |g(x) - f_{n_{k_m}}(x)| + |f_{n_{k_m}}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Sonuç olarak  $\mu(A \cup B) = 0 \Rightarrow w_j(A \cup B) = 0$  olduğundan  $f = g$  (h.h.h.) ( $\Rightarrow f = g$  (w<sub>j</sub>-h.h.h.)) elde edilir. Eğer  $N = \max\{n_1, n_2\}$  seçilirse, her  $n \geq N$  için

$$\|f_n - f\| = \|f_n - f\|_{B_1} + \|f_n - f\|_{B_2} < \varepsilon$$

çıkar. O halde  $(B_1(G), \|\cdot\|)$  uzayı bir Banach uzayıdır. Şimdi ispatı tamamlamak için Banach teoremini kullanacağız. Önce

$$\begin{aligned} (B_1(G), \|\cdot\|) &\xrightarrow{i} (B_1(G), \|\cdot\|_{B_1}) \\ f &\longrightarrow i(f) = f \end{aligned}$$

birim fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun doğrusal, birebir ve örten olduğu açıktır. Ayrıca  $\|i(f)\|_{B_1} = \|f\|_{B_1} \leq \|f\|$  eşitsizliğinden dolayı  $i(\cdot)$  fonksiyonu süreklidir.

O halde Banach teoremine göre  $i(\cdot)$  fonksiyonu bir homeomorfizmadır. Bunun sonucu  $\|\cdot\|$  ve  $\|\cdot\|_{B_1}$  normları denktir. Böylece her  $f \in B_1(G)$  için

$$\|f\| \leq C \|f\|_{B_1}$$

olacak şekilde  $C > 0$  sayısı vardır. Buradan her  $f \in B_1(G)$  için

$$\|f\|_{B_2} \leq \|f\| \leq C \|f\|_{B_1}$$

yazılır. Bu ise istenendir.

Gerektirmenin diğer yanının ispatı kolaydır.

(ii)  $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$  ve  $dm$  herhangi bir ölçüm olmak üzere her  $f \in L(p, q_1, dm)(G)$  için  $\|f\|_{p, q_2}^* \leq \|f\|_{p, q_1}^*$  eşitsizliği, dolayısıyla  $L(p, q_1, dm)(G) \subset L(p, q_2, dm)(G)$  kapsaması [17] çalışmasından biliniyor. Eğer buradaki herhangi ölçüm yerine  $w_2 d\mu$  ölçümü alırsa her  $f \in L(p, q_1, w_2 d\mu)(G)$  için  $\|f\|_{p, q_2, w_2}^* \leq \|f\|_{p, q_1, w_2}^*$  eşitsizliği, dolayısıyla

$$L(p, q_1, w_2 d\mu)(G) \subset L(p, q_2, w_2 d\mu)(G) \quad (4.3.12.6)$$

elde edilir [8, 2.5(ii).Önerme]. Yine  $w_1 \succ w_3$  ise  $L_{w_1}^r(G) \subset L_{w_3}^r(G)$  olduğu [13, 1.5.Önerme] çalışmasından biliniyor. O halde (4.3.12.6) ifadesinden

$$B_{r,p,q_1}^{w_1,w_2}(G) \subset B_{r,p,q_2}^{w_3,w_4}(G)$$

kapsaması bulunur.

Şimdi  $w_1, w_2, w_3$  ve  $w_4$  ağırlık fonksiyonlarını kullanarak

$$w'(x) = w_1(x) + w_2(x) \text{ ve } w''(x) = w_3(x) + w_4(x)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu takdirde  $w'(x)$  ve  $w''(x)$  fonksiyonlarının birer ağırlık fonksiyonları olduğu kolayca görülebilir.

**4.3.13.Önerme:**  $p = 1$ ,  $0 < q \leq 1$  ve  $1 \leq r < \infty$  olmak üzere her  $f \in B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(G)$  için

$$K^{-1}(f)w'(x) \leq \|L_x f\|_{r,1,q}^{w_1,w_2} \leq K(f)w'(x)$$

olacak şekilde  $K(f) > 0$  sayısı vardır.

**İspat:** Herhangi bir  $f \in B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(G)$  alalım.  $1 \leq r < \infty$  olduğunda her  $f \in L_{w_1}^r(G)$  için  $G$  grubundan  $\mathbb{R}$  kümesine tanımlı  $x \rightarrow \|L_x f\|_{r,w_1}$  fonksiyonunun  $w_1(x)$  fonksiyonuna denk olduğu bilindiğinden her  $x \in G$  için

$$c(f)^{-1}w_1(x) \leq \|L_x f\|_{r,w_1} \leq c(f)w_1(x) \quad (4.3.13.1)$$

olacak şekilde bir  $c(f) > 0$  sayısı vardır [11, 13]. Yine [8, 2.6.Önerme] ile her  $x \in G$  için

$$c_1(f)w_2(x) \leq \|L_x f\|_{1,q,w_2} \leq c_2(f)w_2(x) \quad (4.3.13.2)$$

olacak şekilde  $c_1(f), c_2(f) > 0$  sayıları vardır. O zaman (4.3.13.1) ve (4.3.13.2) eşitsizlikleri kullanıldığında

$$c(f)^{-1}w_1(x) + c_1(f)w_2(x) \leq \|L_x f\|_{r,w_1} + \|L_x f\|_{1,q,w_2} \leq c(f)w_1(x) + c_2(f)w_2(x)$$

olur ve buna göre

$$K(f)^{-1}w'(x) \leq \|L_x f\|_{r,1,q}^{w_1,w_2} \leq K(f)w'(x)$$

olacak şekilde  $K(f) > 0$  sayısı vardır.

**4.3.14.Önerme:**  $p=1$ ,  $0 < q \leq 1$  ve  $1 \leq r < \infty$  olmak üzere  $B_{r,1,q}^{w_1, w_2}(G) \subset B_{r,1,q}^{w_3, w_4}(G)$  ise  $w' \succ w''$  olur. Yine eğer  $w_1 \succ w_3$  ve  $w_2 \succ w_4$  ise  $B_{r,1,q}^{w_1, w_2}(G) \subset B_{r,1,q}^{w_3, w_4}(G)$  kapsamı vardır.

**İspat:** Önce  $B_{r,1,q}^{w_1, w_2}(G) \subset B_{r,1,q}^{w_3, w_4}(G)$  olduğunu kabul edelim. Herhangi bir  $h \in B_{r,1,q}^{w_1, w_2}(G)$  için  $h \in B_{r,1,q}^{w_3, w_4}(G)$  olduğundan, 4.3.13.Önermeden dolayı  $x \rightarrow \|L_x h\|_{r,1,q}^{w_1, w_2}$  fonksiyonu  $w'(x)$  ağırlık fonksiyonuna,  $x \rightarrow \|L_x h\|_{r,1,q}^{w_3, w_4}$  fonksiyonu da  $w''(x)$  ağırlık fonksiyonuna denktir. Böylece her  $x \in G$  için

$$k^{-1}w'(x) \leq \|L_x h\|_{r,1,q}^{w_1, w_2} \leq kw'(x) \quad (4.3.14.1)$$

olacak şekilde  $k > 0$  sayısı ve

$$l^{-1}w''(x) \leq \|L_x h\|_{r,1,q}^{w_3, w_4} \leq lw''(x) \quad (4.3.14.2)$$

olacak şekilde  $l > 0$  sayısı vardır. Ayrıca  $B_{r,1,q}^{w_1, w_2}(G) \subset B_{r,1,q}^{w_3, w_4}(G)$  olduğundan 4.3.12.Önerme kullanılırsa

$$\|L_x h\|_{r,1,q}^{w_3, w_4} \leq C \|L_x h\|_{r,1,q}^{w_1, w_2} \quad (4.3.14.3)$$

olacak şekilde  $C > 0$  sayısı bulunur. O halde (4.3.14.1), (4.3.14.2) ve (4.3.14.3) eşitsizlikleri kullanılırsa her  $x \in G$  için

$$l^{-1}w''(x) \leq \|L_x h\|_{r,1,q}^{w_3, w_4} \leq C \|L_x h\|_{r,1,q}^{w_1, w_2} \leq Ckw'(x)$$

olur. Buradan her  $x \in G$  için

$$w''(x) \leq Cklw'(x)$$

bulunur ve  $M = Ckl$  denilirse  $w''(x) \leq Mw'(x)$ . Bu ise  $w' \succ w''$  olduğunu gösterir.

Şimdi  $w_1 \succ w_3$  ve  $w_2 \succ w_4$  olduğunu kabul edelim. Bu takdirde  $w_1 \succ w_3$  olduğundan

$$L_{w_1}^r(G) \subset L_{w_3}^r(G) \quad (4.3.14.4)$$

ve yine [8] çalışması ile  $w_2 \succ w_4$  olduğunda

$$L(1, q, w_2 d\mu)(G) \subset L(1, q, w_4 d\mu)(G) \quad (4.3.14.5)$$

olduğu biliniyor. Bu takdirde (4.3.14.4) ve (4.3.14.5) kapsamalarından istenen elde edilir.

**4.3.15.Önerme:**  $0 < p, q < \infty$  olmak üzere

$$B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(G) \subset B_{r,p,q}^{w_3, w_4^p}(G)$$

olması için gerekli ve yeterli koşul her  $f \in B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(G)$  için

$$\|f\|_{r,p,q}^{w_3, w_4^p} \leq K \|f\|_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}$$

olacak şekilde bir  $K$  sayısının bulunmasıdır.

**İspat:** 4.3.12.Önermede  $w_2$  yerine  $w_2^p$  ve  $w_4$  yerine de  $w_4^p$  alınırsa istenen elde edilir.

**4.3.16.Önerme:**  $1 \leq r < \infty$  ve  $1 \leq q \leq p < \infty$  olmak üzere her  $f \in B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(G)$  için

$$s(f) w'(x) \leq \|L_x f\|_{r,p,q}^{w_1, w_2^p} \leq w'(x) \|f\|_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}$$

olacak şekilde  $s(f) > 0$  sayısı vardır.

**İspat:** Herhangi bir  $f \in B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(G)$  alalım. O zaman  $f \in L_{w_1}^r(G)$  ve

$f \in L(p, q, w_2^p d\mu)(G)$  olur. Bu takdirde [13] çalışmasına göre  $x \rightarrow \|L_x f\|_{r, w_1}$

fonksiyonu  $w_1(x)$  ağırlık fonksiyonuna denk olduğundan her  $x \in G$  için

$$k^{-1}(f) w_1(x) \leq \|L_x f\|_{r, w_1} \leq k(f) w_1(x) \quad (4.3.16.1)$$

olacak şekilde  $k(f) > 0$  sayısı bulunur. Ayrıca  $q \leq p$  olduğundan [8] çalışmasındaki

2.9.Önermeden dolayı

$$c^{-1}(f) w_2(x) \leq \|L_x f\|_{p, w_2} \leq \|L_x f\|_{p, q, w_2^p} \leq w_2(x) \|f\|_{p, q, w_2^p} \quad (4.3.16.2)$$

yazılır. Eğer  $s(f) = \min\{c^{-1}, k^{-1}\}$  denirse (4.3.16.1) ve (4.3.16.2) eşitsizliklerine göre

$$s(f)(w_1(x) + w_2(x)) \leq \|L_x f\|_{r, w_1} + \|L_x f\|_{p, q, w_2^p} \leq \max\{w_1(x), w_2(x)\} \|f\|_{r, p, q}^{w_1, w_2^p}$$

olur ve buradan

$$s(f) w'(x) \leq \|L_x f\|_{r, p, q}^{w_1, w_2^p} \leq w'(x) \|f\|_{r, p, q}^{w_1, w_2^p}$$

elde edilir.

**4.3.17.Önerme:**  $1 \leq r < \infty$  ve  $1 \leq q \leq p < \infty$  olmak üzere  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(G) \subset B_{r,p,q}^{w_3, w_4^p}(G)$  ise  $w' \succ w''$  olur. Yine  $w_1 \succ w_3$  ve  $w_2 \succ w_4$  ise  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(G) \subset B_{r,p,q}^{w_3, w_4^p}(G)$  olur.

**İspat:** Önce  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(G) \subset B_{r,p,q}^{w_3, w_4^p}(G)$  olduğunu kabul edelim. O zaman 4.3.16.Önermeye göre  $h \in B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(G)$  olmak üzere  $x \rightarrow \|L_x h\|_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}$  fonksiyonu  $w'$  ağırlık fonksiyonuna,  $h \in B_{r,p,q}^{w_3, w_4^p}(G)$  olmak üzere  $x \rightarrow \|L_x h\|_{r,p,q}^{w_3, w_4^p}$  fonksiyonu da  $w''$  ağırlık fonksiyonuna denktir. Böylece  $f \in B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(G)$  olmak üzere her  $x \in G$  için

$$s^{-1}w'(x) \leq \|L_x f\|_{r,p,q}^{w_1, w_2^p} \leq sw'(x) \quad (4.3.17.1)$$

olacak şekilde  $s > 0$  sayısı ve

$$m^{-1}w''(x) \leq \|L_x f\|_{r,p,q}^{w_3, w_4^p} \leq mw''(x) \quad (4.3.17.2)$$

olacak şekilde  $m > 0$  sayısı vardır. Ayrıca 4.3.15.Önermeden dolayı her  $x \in G$  için

$$\|L_x f\|_{r,p,q}^{w_3, w_4^p} \leq K \|L_x f\|_{r,p,q}^{w_1, w_2^p} \quad (4.3.17.3)$$

olacak şekilde  $K > 0$  sayısı vardır. O halde (4.3.17.1), (4.3.17.2) ve (4.3.17.3) eşitsizlikleri ile

$$m^{-1}w''(x) \leq \|L_x f\|_{r,p,q}^{w_3, w_4^p} \leq K \|L_x f\|_{r,p,q}^{w_1, w_2^p} \leq Ksw'(x)$$

olur. Buradan her  $x \in G$  için

$$w''(x) \leq Ksmw'(x)$$

bulunur ve  $N = Ksm$  denirse her  $x \in G$  için  $w''(x) \leq Nw'(x)$  yazılır. Bu ise  $w' \succ w''$  olduğunu gösterir.

Tersine  $w_1 \succ w_3$  ve  $w_2 \succ w_4$  olsun. Bu takdirde  $w_1 \succ w_3$  olduğundan

$$L_{w_1}^r(G) \subset L_{w_3}^r(G) \quad (4.3.17.4)$$

olur. Yine  $w_2 \succ w_4$  olduğundan [8] çalışmasına göre

$$L(p, q, w_2^p d\mu)(G) \subset L(p, q, w_4^p d\mu)(G) \quad (4.3.17.5)$$

yazılır. Bu takdirde (4.3.17.4) ve (4.3.17.5) kapsamalarından istenen elde edilir.

#### 4.4. $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$ Uzaylarında Kompakt Gömülmeler

Bu bölümde üzerindeki  $dx$  Lebesgue ölçümü ile  $\mathbb{R}^d$  uzayı üzerinde çalışılacaktır.  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve kompakt destekli sürekli fonksiyonların uzayı  $C_c(\mathbb{R}^d)$  ile gösterilecektir. Gürkanlı [14] çalışmasındaki yöntemler izlenecek ve 4.3.kesimdeki kapsamalarla ilgili önermelerden yararlanılacaktır.

**4.4.1.Önerme:**  $1 \leq r < \infty$ ,  $0 < p, q < \infty$  olsun. Eğer bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sıfıra yakınsıyorsa, bu dizi belirsiz (vague) topolojiye göre de sıfıra yakınsar. Yani her  $k \in C_c(\mathbb{R}^d)$  için  $n \rightarrow \infty$  olduğunda

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \rightarrow 0$$

olur.

**İspat:**  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sıfıra yakınsayan bir dizi olsun. Herhangi bir

$k \in C_c(\mathbb{R}^d)$  için Hölder eşitsizliği kullanılırsa  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$  olmak üzere

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \right| \leq \|k\|_{r'} \|f_n\|_r \leq \|k\|_{r'} \|f_n\|_{r,w_1} \leq \|k\|_{r'} \|f_n\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} \quad (4.4.1.1)$$

eşitsizliği yazılır. O halde (4.4.1.1) ifadesi gereğince  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi belirsiz topolojiye göre de sıfıra yakınsar.

**4.4.2.Önerme:**  $1 \leq r < \infty$ ,  $w_1, w_2$  ve  $\nu$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı Beurling

ağırlık fonksiyonları olmak üzere  $w_2 \prec w_1$  ve  $\nu \prec w_1$  olsun. Eğer  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{\nu(x)}{w_1(x)}$

oranı  $\mathbb{R}^d$  uzayında sıfıra yakınsamıyorsa  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L'_\nu(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülme kompakt değildir.

**İspat:** İlk olarak  $x \rightarrow \infty$  için  $w_1(x) \rightarrow \infty$  olduğunu kabul edelim.  $\nu \prec w_1$  olduğundan her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $\nu(x) \leq Cw_1(x)$  olacak şekilde  $C > 0$  sayısı vardır. Böylece

$B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d) \subset L_{w_1}^r(\mathbb{R}^d) \subset L_v^r(\mathbb{R}^d)$  kapsamaları gerçekleşir. Şimdi  $\mathbb{R}^d$  uzayından bir  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini  $n \rightarrow \infty$  olduğunda  $t_n \rightarrow \infty$  olacak şekilde seçelim. Hipotez gereğince  $x \rightarrow \infty$  olduğunda  $\frac{v(x)}{w_1(x)}$  oranı sifira yakınsamıyorsa  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{v(x)}{w_1(x)} \geq \delta$  olacak şekilde en az bir  $\delta > 0$  sayısı vardır.  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L_v^r(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülmenin kompakt olmadığını göstermek için herhangi bir  $f \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$ ,  $f \neq 0$  fonksiyonunu alalım ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f_n = w_1^{-1}(t_n)L_{t_n}f$  olmak üzere bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi oluşturalım. Bu takdirde

$$\|f_n\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} = \|w_1^{-1}(t_n)L_{t_n}f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} = w_1^{-1}(t_n)\|L_{t_n}f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2}$$

olur. Yine  $w_2 < w_1$  olduğundan her  $x \in G$  için  $w_2(x) \leq C'w_1(x)$  olacak şekilde bir  $C' > 0$  sayısı ve  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayı ötelemeler altında değişmez olduğundan 4.3.3.Önermeye göre her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} &= \|w_1^{-1}(t_n)L_{t_n}f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} = w_1^{-1}(t_n)\|L_{t_n}f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} \\ &\leq w_1^{-1}(t_n)\max\{w_1(t_n), w_2^{1/p}(t_n)\}\|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} \\ &\leq w_1^{-1}(t_n)\max\{w_1(t_n), w_2(t_n)\}\|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} \quad (4.4.2.1) \\ &\leq w_1^{-1}(t_n)\max\{w_1(t_n), C'w_1(t_n)\}\|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} \\ &= \max\{1, C'\}\|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} \end{aligned}$$

olacak şekilde sayısı vardır. Buna göre  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlıdır. Şimdi de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L_v^r(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olamayacağını gösterelim. Her  $k \in C_c(\mathbb{R}^d)$  için

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} w_1^{-1}(t_n)L_{t_n}f(x)k(x)dx \right| = \frac{1}{w_1(t_n)} \left| \int_{\mathbb{R}^d} L_{t_n}f(x)k(x)dx \right| \\ &\leq \frac{1}{w_1(t_n)} \|k\|_{r'} \|L_{t_n}f\|_r = \frac{1}{w_1(t_n)} \|k\|_{r'} \|f\|_r \leq \frac{1}{w_1(t_n)} \|k\|_{r'} \|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} \quad (4.4.2.2) \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki (4.4.2.2) ifadesinde  $n \rightarrow \infty$  için sağ taraf sifira yakınsadığından

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \rightarrow 0$$

olur. Bu durumda

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \right| \leq \|k\|_{r'} \|f_n\|_r \leq \|k\|_{r'} \|f_n\|_{r,v} \leq \|k\|_{r'} \|f_n\|_{r,w_1} \leq \|k\|_{r'} \|f_n\|_{r,p,q}^{w_1,w_2} \quad (4.4.2.3)$$

eşitsizliğine göre  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L'_v(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise limiti sıfır olmalıdır.

Yine her  $f \in L'_v(\mathbb{R}^d)$  ve her  $x \in \mathbb{R}^d$  için

$$c_1(f)v(x) \leq \|L_x f\|_{r,v} \leq c_2(f)v(x) \quad (4.4.2.4)$$

olacak şekilde  $c_1(f), c_2(f) > 0$  sayılarının varlığı biliniyor [11]. O zaman (4.4.2.4)

ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{r,v} &= \|w_1^{-1}(t_n)L_{t_n}f\|_{r,v} = w_1^{-1}(t_n)\|L_{t_n}f\|_{r,v} \\ &\geq c_1w_1^{-1}(t_n)v(x) \end{aligned} \quad (4.4.2.5)$$

bulunur. Yine  $n \rightarrow \infty$  için  $t_n \rightarrow \infty$  olduğundan  $\frac{v(t_n)}{w_1(t_n)} \geq \delta > 0$  olacağından (4.4.2.5)

ifadesine göre  $n \rightarrow \infty$  olduğunda

$$\|f_n\|_{r,v} \geq c_1w_1^{-1}(t_n)v(x) \geq c_1\delta \quad (4.4.2.6)$$

elde edilir. Bu ise  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L'_v(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmayacağını gösterir. O halde  $i: B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L'_v(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi kompakt değildir.

Şimdi de  $w_1(x)$  fonksiyonunun sabit veya sınırlı olduğunu kabul edelim. O zaman  $v \prec w_1$  ve  $w_2 \prec w_1$  olduğundan  $C_c(G) \subset B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  ve  $x \rightarrow \infty$  olduğunda

$\frac{v(x)}{w_1(x)}$  oranı sıfıra yakınsak olmaz. Herhangi bir  $f \in C_c(G) \subset B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonu

alalım ve  $f_n = w_1^{-1}(t_n)L_{t_n}f$  dizisini oluşturalım. Bu dizi (4.4.2.1) ifadesiyle  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$

uzayında sınırlı olur ve (4.4.2.2) eşitsizliğiyle  $n \rightarrow \infty$  için belirsiz topolojiye göre sıfıra

yakınsar. Yine (4.4.2.3) ifadesiyle  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L'_v(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise limiti

sıfır olmalıdır. Bu takdirde  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L'_v(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt

dizisinin olamayacağı (4.4.2.5) ve (4.4.2.6) ifadelerinden görülür ve böylece  $i: B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_v^r(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi kompakt değildir.

Yine  $0 < p < 1$  için  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $f_n = w_1^{-1/p}(t_n)L_{t_n}f$  şeklinde oluşturulursa, benzer yöntemlerle sonuç görülür.

**4.4.3.Önerme:**  $w_1, w_2, w_3$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı Beurling ağırlık fonksiyonları  $1 \leq r < \infty$  ve  $1 \leq q \leq p < \infty$  olsun. Eğer

- i.  $w_3 \prec w_2 \prec w_1$  olduğunda  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_1(x)}$  oranı sifıra yakınsamıyorsa veya
- ii.  $w_1 \prec w_2, w_3 \prec w_2$  olduğunda  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_2(x)}$  oranı sifıra yakınsamıyorsa,

$B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülme kompakt değildir.

**İspat: (i)** Kabul edelim ki  $x \rightarrow \infty$  için  $w_1(x) \rightarrow \infty$  olsun.  $w_3 \prec w_2 \prec w_1$  olduğundan her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $w_2(x) \leq C_1 w_1(x)$  ve  $w_3(x) \leq C_2 w_2(x)$  olacak şekilde  $C_1, C_2 > 0$  sayıları vardır. Böylece

$$B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d) \subset L(p, q, w_2^p dx)(\mathbb{R}^d) \subset L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$$

olur. Şimdi  $n \rightarrow \infty$  olduğunda  $t_n \rightarrow \infty$  olacak şekilde  $\mathbb{R}^d$  uzayından bir  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini

seçelim. Yine  $x \rightarrow \infty$  iken  $\frac{w_3(x)}{w_1(x)}$  oranı sifıra yakınsamadığından  $x \rightarrow \infty$  iken

$\frac{w_3(x)}{w_1(x)} \geq \delta$  olacak şekilde en az bir  $\delta > 0$  sayısı vardır. Herhangi bir  $f \in B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$ ,

$f \neq 0$  fonksiyonu alalım ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f_n = w_1^{-1}(t_n)L_{t_n}f$  olmak üzere bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

dizisi oluşturalım. O zaman  $w_2 \prec w_1$  ve  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayı ötelemeler altında değişmez olduğu kullanılırsa 4.3.3.Önermeye göre her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} &= \|w_1^{-1}(t_n)L_n f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} = w_1^{-1}(t_n)\|L_n f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} \\
&\leq w_1^{-1}(t_n)\max\{w_1(t_n), w_2(t_n)\}\|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} \\
&\leq w_1^{-1}(t_n)\max\{w_1(t_n), C_1 w_1(t_n)\}\|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} \\
&\leq \max\{1, C_1\}\|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}
\end{aligned} \tag{4.4.3.1}$$

olur. Böylece  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlı olur. Şimdi de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmayacağını gösterelim. Her  $k \in C_c(\mathbb{R}^d)$  için

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} w_1^{-1}(t_n)L_n f(x)k(x)dx \right| = \frac{1}{w_1(t_n)} \left| \int_{\mathbb{R}^d} L_n f(x)k(x)dx \right| \\
&\leq \frac{1}{w_1(t_n)} \|k\|_{r'} \|L_n f\|_r = \frac{1}{w_1(t_n)} \|k\|_{r'} \|f\|_r \\
&\leq \frac{1}{w_1(t_n)} \|k\|_{r'} \|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}
\end{aligned} \tag{4.4.3.2}$$

elde edilir. Yukarıdaki (4.4.3.2) ifadesinde  $n \rightarrow \infty$  için sağ taraf sıfıra yakınsadığından,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \rightarrow 0$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \right| &\leq \|k\|_{p'} \|f_n\|_p \leq \|k\|_{p'} \|f_n\|_{p,q,w_3^p} \\
&\leq \|k\|_{p'} \|f_n\|_{p,q,w_2^p} \leq \|k\|_{p'} \|f_n\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}
\end{aligned} \tag{4.4.3.3}$$

eşitsizliğiyle  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise limiti sıfır olmalıdır. Yine her  $f \in L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  için

$$c_1 w_3(x) \leq \|L_x f\|_{p,q,w_3^p} \leq c_2 w_3(x) \tag{4.4.3.4}$$

olacak şekilde  $c_1, c_2 > 0$  sayıları vardır [8]. O zaman (4.4.3.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{p,q,w_3^p} &= \|w_1^{-1}(t_n)L_n f\|_{p,q,w_3^p} = w_1^{-1}(t_n)\|L_n f\|_{p,q,w_3^p} \\
&\geq c_1 w_1^{-1}(t_n) w_3(t_n)
\end{aligned} \tag{4.4.3.5}$$

bulunur. Ayrıca  $n \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(t_n)}{w_1(t_n)} \geq \delta > 0$  olduğundan, (4.4.3.5) ifadesine göre yeterince büyük  $n \in \mathbb{N}$  sayıları için

$$\|f_n\|_{p,q,w_3^p} \geq c_1 w_1^{-1}(t_n) w_3(t_n) \geq c_1 \delta$$

elde edilir. Bu ise  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmayacağı gösterir. O halde  $i: B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi kompakt değildir.

Şimdi de  $x \rightarrow \infty$  için  $w_1(x)$  fonksiyonunun sabit veya sınırlı olduğunu kabul edelim. O zaman  $w_3 \prec w_2 \prec w_1$  olduğundan  $C_c(G) \subset B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  ve  $x \rightarrow \infty$  olduğunda  $\frac{w_3(x)}{w_1(x)}$  oranı sıfıra yakınsak olmaz. Herhangi bir  $f \in C_c(G) \subset B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonu alalım ve  $f_n = w_1^{-1}(t_n) L_{t_n} f$  dizisini oluşturalım. Bu dizi (4.4.3.1) ifadesiyle  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlı olur ve (4.4.3.2) eşitsizliğiyle  $n \rightarrow \infty$  için belirsiz topolojiye göre sıfıra yakınsar. Yine (4.4.3.3) ifadesiyle  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L(p, q, w_3^p d\mu)(G)$  uzayında yakınsak ise limiti sıfır olmalıdır. Bu takdirde  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L(p, q, w_3^p d\mu)(G)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmayacağı (4.4.3.4) ve (4.4.3.5) ifadelerinden görülür ve böylece  $i: B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi kompakt değildir.

(ii) Kabul edelim ki  $x \rightarrow \infty$  için  $w_2(x) \rightarrow \infty$  olsun.  $w_1 \prec w_2$ ,  $w_3 \prec w_2$  olduğundan her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $w_1(x) \leq C_1 w_2(x)$  ve  $w_3(x) \leq C_2 w_2(x)$  olacak şekilde  $C_1, C_2 > 0$  sayıları vardır. Böylece [8] çalışmasına göre

$$B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d) \subset L(p, q, w_2^p dx)(\mathbb{R}^d) \subset L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$$

olur. Şimdi  $\mathbb{R}^d$  uzayından  $n \rightarrow \infty$  olduğunda  $t_n \rightarrow \infty$  olacak şekilde bir  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisini

alalım. Hipoteze göre  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_2(x)}$  oranı sıfıra yakınsamıyorsa  $x \rightarrow \infty$  için

$\frac{w_3(x)}{w_2(x)} \geq \delta$  olacak şekilde en az bir  $\delta > 0$  sayısı vardır. Herhangi bir  $f \in B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$ ,

$f \neq 0$  fonksiyonunu alalım ve  $f_n = w_2^{-1}(t_n)L_{t_n}f$  olmak üzere bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi oluşturalım. O zaman  $w_1 \prec w_2$  ve  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayı ötelemeler altında değişmez olduğundan 4.3.3.Önermeye göre her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} &= \|w_2^{-1}(t_n)L_{t_n}f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} = w_2^{-1}(t_n)\|L_{t_n}f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} \\ &\leq w_2^{-1}(t_n)\max\{w_1(t_n), w_2(t_n)\}\|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} \\ &\leq w_2^{-1}(t_n)\max\{C_1w_2(t_n), w_2(t_n)\}\|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} \\ &\leq \max\{1, C_1\}\|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} \end{aligned} \quad (4.4.3.6)$$

bulunur. Böylece  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlı olur. Şimdi de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olamayacağını gösterelim. Eğer  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$  ise her  $k \in C_c(\mathbb{R}^d)$  için

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} w_2^{-1}(t_n)L_{t_n}f(x)k(x)dx \right| = \frac{1}{w_2(t_n)} \left| \int_{\mathbb{R}^d} L_{t_n}f(x)k(x)dx \right| \\ &\leq \frac{1}{w_2(t_n)} \|k\|_{r'} \|L_{t_n}f\|_r = \frac{1}{w_2(t_n)} \|k\|_{r'} \|f\|_r \\ &\leq \frac{1}{w_2(t_n)} \|k\|_{r'} \|f\|_{r,p,q}^{w_1,w_2^p} \end{aligned} \quad (4.4.3.7)$$

elde edilir. Yukarıdaki (4.4.3.7) ifadesinde  $n \rightarrow \infty$  iken sağ taraf sıfıra yakınsadığından,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \rightarrow 0$$

çıkar. Sonuç olarak (4.4.3.3) ifadesine göre  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise limiti sıfır olmalıdır. Yine her  $f \in L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  için

$$c_1(f)w_3(x) \leq \|L_x f\|_{p,q,w_3^p} \leq c_2(f)w_3(x) \quad (4.4.3.8)$$

olacak şekilde  $c_1, c_2 > 0$  sayıları vardır [8]. O zaman (4.4.3.8) eşitsizliğiyle

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{p,q,w_3^p} &= \|w_2^{-1}(t_n)L_{t_n}f\|_{p,q,w_3^p} = w_2^{-1}(t_n)\|L_{t_n}f\|_{p,q,w_3^p} \\ &\geq c_1w_2^{-1}(t_n)w_3(t_n) \end{aligned} \quad (4.4.3.9)$$

bulunur. Ayrıca  $n \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(t_n)}{w_2(t_n)} \geq \delta > 0$  olduğundan, (4.4.3.9) ifadesine göre yeterince büyük  $n \in \mathbb{N}$  sayıları için

$$\|f_n\|_{p,q,w_3^p} \geq c_1 w_2^{-1}(t_n) w_3(t_n) \geq c_1 \delta \quad (4.4.3.10)$$

elde edilir. Bu ise  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmayacağını gösterir. O halde  $i: B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi kompakt değildir.

Şimdi de  $x \rightarrow \infty$  için  $w_2(x)$  fonksiyonunun sabit veya sınırlı olduğunu kabul edelim. O zaman  $w_1 \prec w_2$  ve  $w_3 \prec w_2$  olduğundan  $C_c(G) \subset B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  ve  $x \rightarrow \infty$  olduğunda  $\frac{w_3(x)}{w_2(x)}$  oranı sifira yakınsamaz. Herhangi bir  $f \in C_c(G) \subset B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonu alalım ve  $f_n = w_1^{-1}(t_n) L_{t_n} f$  dizisini oluşturalım. Bu dizi (4.4.3.6) ifadesiyle  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlı olur ve (4.4.3.7) eşitsizliğiyle  $n \rightarrow \infty$  için belirsiz topolojiye göre sifira yakınsar. Yine (4.4.3.3) ifadesiyle  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L(p, q, w_3^p d\mu)(G)$  uzayında yakınsak ise limiti sifir olmalıdır. Bu takdirde  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L(p, q, w_3^p d\mu)(G)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmayacağı (4.4.3.9) ve (4.4.3.10) ifadelerinden görülür ve böylece  $i: B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi kompakt değildir.

**4.4.4.Önerme:**  $w_1, w_2, w_3, w_4$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  uzayı üzerinde tanımlı Beurling ağırlık fonksiyonları,  $1 \leq q \leq p < \infty$  ve  $1 \leq r < \infty$  olsun. Eğer

- i.  $w_4 \prec w_2 \prec w_1$ ,  $w_3 \prec w_1$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_1(x)}$  oranı sifira yakınsamıyorsa,
- ii.  $w_3 \prec w_1 \prec w_2$ ,  $w_4 \prec w_2$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_2(x)}$  oranı sifira yakınsamıyorsa,
- iii.  $w_3 \prec w_1 \prec w_2$ ,  $w_4 \prec w_2$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_4(x)}{w_2(x)}$  oranı sifira yakınsamıyorsa,

**iv.**  $w_4 \prec w_2 \prec w_1$ ,  $w_3 \prec w_1$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_4(x)}{w_1(x)}$  oranı sifira yakınsamıyorsa,

$B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $B_{r,p,q}^{w_3,w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülme kompakt değildir.

**İspat:** (i)  $w_4 \prec w_2 \prec w_1$  ve  $w_3 \prec w_1$  olduğundan her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $w_4(x) \leq C'w_2(x)$  ve  $w_3(x) \leq C''w_1(x)$  olacak şekilde  $C', C'' > 0$  sayıları vardır. Böylece 4.3.17.Önermeden

dolayı  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d) \subset B_{r,p,q}^{w_3,w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  olur ve  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $B_{r,p,q}^{w_3,w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayına

olan birim dönüşüm süreklidir. Şimdi  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_1(x)}$  oranının sifira

yakınsamadığını kabul edelim ve  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayından herhangi bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sınırlı

dizisini alalım. Eğer bu  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin bir alt dizisi  $B_{r,p,q}^{w_3,w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak

olsaydı  $L_{w_3}^r(\mathbb{R}^d)$  uzayında da yakınsak olurdu. Halbuki 4.4.2.Önermeye göre  $w_2 \prec w_1$ ,

$w_3 \prec w_1$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_1(x)}$  oranı  $\mathbb{R}^d$  uzayında sifira yakınsamıyorsa  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$

uzayından  $L_{w_3}^r(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülme kompakt değildir. Bu ise çelişki yaratır.

Bundan dolayı  $i: B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d) \rightarrow B_{r,p,q}^{w_3,w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi kompakt olamaz.

(ii) Yukarıdaki (i) şikkına benzer yöntemle  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(G)$  uzayından  $B_{r,p,q}^{w_3,w_4^p}(G)$  uzayına olan gömülmenin kompakt olmadığı söylenir.

(iii) Kabul edelim ki  $w_3 \prec w_1 \prec w_2$ ,  $w_4 \prec w_2$  olsun ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_4(x)}{w_2(x)}$  oranı sifira

yakınsamasın. Bu takdirde  $w_4(x) \leq C'w_2(x)$  ve  $w_3(x) \leq C''w_1(x)$  olacak şekilde

$C', C'' > 0$  sayıları vardır. Böylece 4.3.17.Önermeden dolayı  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d) \subset B_{r,p,q}^{w_3,w_4^p}(\mathbb{R}^d)$

kapsaması gerçekleşir ve  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $B_{r,p,q}^{w_3,w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan birim

dönüşüm süreklidir. Şimdi  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayından sınırlı bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi alalım. Eğer

bu  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin bir alt dizisi  $B_{r,p,q}^{w_3,w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise  $L(p, q, w_4^p dx)(\mathbb{R}^d)$

uzayında da yakınsaktır. Bu ise 4.4.3.Önermeye göre bir çelişki yaratır. Bundan dolayı  $i: B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d) \rightarrow B_{r,p,q}^{w_3,w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi kompakt değildir.

(iv) Yukarıdaki (iii) şikkına benzer yöntemle  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $B_{r,p,q}^{w_3,w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülmenin kompakt olmadığı söylenir.

**4.4.5.Önerme:**  $w_1, w_2, w_3$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı Beurling ağırlık fonksiyonları olmak üzere  $w_3 \prec w_2 \prec w_1$  ve  $0 < q \leq 1, 1 \leq r < \infty$  olsun. Eğer  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_1(x)}$  oranı sifıra yakınsamıyorsa  $B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L(1,q,w_3dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülme kompakt değildir.

**İspat:** İlk olarak kabul edelim ki  $x \rightarrow \infty$  için  $w_1(x) \rightarrow \infty$  olsun.  $w_3 \prec w_2 \prec w_1$  olduğundan her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $w_2(x) \leq C_1 w_1(x)$  ve  $w_3(x) \leq C_2 w_2(x)$  olacak şekilde  $C_1, C_2 > 0$  sayıları vardır. Böylece [8] çalışmasına göre

$$B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d) \subset L(1,q,w_2dx)(\mathbb{R}^d) \subset L(1,q,w_3dx)(\mathbb{R}^d)$$

yazılır. Şimdi  $\mathbb{R}^d$  uzayından  $n \rightarrow \infty$  olduğunda  $t_n \rightarrow \infty$  olacak şekilde bir  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

dizisini seçelim. Yine  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_1(x)}$  oranı sifıra yakınsamıyorsa  $x \rightarrow \infty$  için

$\frac{w_3(x)}{w_1(x)} \geq \delta$  olacak şekilde en az bir  $\delta > 0$  sayısı vardır.  $B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından

$L(1,q,w_3dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülmenin kompakt olmadığını göstermek için

herhangi bir  $0 \neq f \in B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(G)$  fonksiyonunu alalım ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f_n = w_1^{-1}(t_n)L_{t_n}f$

olacak şekilde bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi oluşturalım. Yine  $w_2 \prec w_1$  ve  $B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayı

ötelemeler altında değişmez olduğundan 4.3.3.Önermeye göre her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{r,1,q}^{w_1,w_2} &= \|w_1^{-1}(t_n)L_n f\|_{r,1,q}^{w_1,w_2} = w_1^{-1}(t_n)\|L_n f\|_{r,1,q}^{w_1,w_2} \\
&\leq w_1^{-1}(t_n)\max\{w_1(t_n), w_2(t_n)\}\|f\|_{r,1,q}^{w_1,w_2} \\
&\leq w_1^{-1}(t_n)\max\{w_1(t_n), C_1 w_1(t_n)\}\|f\|_{r,1,q}^{w_1,w_2} \\
&\leq \max\{1, C_1\}\|f\|_{r,1,q}^{w_1,w_2}
\end{aligned} \tag{4.4.5.1}$$

bulunur. Böylece  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlı olur. Şimdi de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L(1, q, w_3 dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olmayacağını gösterelim. Her  $k \in C_c(\mathbb{R}^d)$  için

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} w_1^{-1}(t_n)L_n f(x)k(x)dx \right| = \frac{1}{w_1(t_n)} \left| \int_{\mathbb{R}^d} L_n f(x)k(x)dx \right| \\
&\leq \frac{1}{w_1(t_n)} \|k\|_{r'} \|L_n f\|_r = \frac{1}{w_1(t_n)} \|k\|_{r'} \|f\|_r \\
&\leq \frac{1}{w_1(t_n)} \|k\|_{r'} \|f\|_{r,1,q}^{w_1,w_2}
\end{aligned} \tag{4.4.5.2}$$

elde edilir. Yukarıdaki (4.4.5.2) ifadesinde  $n \rightarrow \infty$  için sağ taraf sıfıra yakınsadığından,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \rightarrow 0$$

çıkar. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)k(x)dx \right| &\leq \|k\|_{\infty} \|f_n\|_1 \leq \|k\|_{\infty} \|f_n\|_{1,w_3} \leq \|k\|_{\infty} \|f_n\|_{1,q,w_3} \\
&\leq \|k\|_{\infty} \|f_n\|_{1,q,w_2} \leq \|k\|_{\infty} \|f_n\|_{r,1,q}^{w_1,w_2}
\end{aligned} \tag{4.4.5.3}$$

ifadesine göre  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L(1, q, w_3 dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise, limiti sıfır olmalıdır. Yine her  $f \in L(1, q, w_3 dx)(\mathbb{R}^d)$  için

$$c_1 w_3(x) \leq \|L_x f\|_{1,q,w_3} \leq c_2 w_3(x) \tag{4.4.5.4}$$

olacak şekilde  $c_1, c_2 > 0$  sayıları vardır [8]. O zaman (4.4.5.4) ifadesine göre

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{1,q,w_3} &= \|w_1^{-1}(t_n)L_n f\|_{1,q,w_3} = w_1^{-1}(t_n)\|L_n f\|_{1,q,w_3} \\
&\geq c_1 w_1^{-1}(t_n) w_3(t_n)
\end{aligned} \tag{4.4.5.5}$$

bulunur. Yine her  $n \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(t_n)}{w_1(t_n)} \geq \delta > 0$  olduğundan (4.4.5.5) ifadesinden

$$\|f_n\|_{1,q,w_3} \geq c_1 w_1^{-1}(t_n) w_3(t_n) \geq c_1 \delta \quad (4.4.5.6)$$

elde edilir. Bu ise  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L(1, q, w_3 dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olamayacağını gösterir. Böylece  $B_{r,1,q}^{w_1, w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L(1, q, w_3 dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülme kompakt değildir.

Şimdi de  $x \rightarrow \infty$  için  $w_1(x)$  fonksiyonunun sabit veya sınırlı olduğunu kabul edelim. O zaman  $w_3 \prec w_2 \prec w_1$  olduğundan  $C_c(G) \subset B_{r,1,q}^{w_1, w_2}(\mathbb{R}^d)$  ve  $x \rightarrow \infty$  olduğunda  $\frac{w_3(x)}{w_1(x)}$  oranı sifıra yakınsamaz. Herhangi bir  $f \in C_c(G) \subset B_{r,1,q}^{w_1, w_2}(\mathbb{R}^d)$  fonksiyonu alalım ve  $f_n = w_1^{-1}(t_n) L_{t_n} f$  dizisini oluşturalım. Bu dizi (4.4.5.1) ifadesiyle  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayında sınırlı olur ve (4.4.5.2) eşitsizliğiyle  $n \rightarrow \infty$  için belirsiz topolojiye göre sifıra yakınsar. Yine (4.4.5.3) ifadesiyle  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $L(p, q, w_3^p d\mu)(G)$  uzayında yakınsak ise limiti sıfır olmalıdır. Bu takdirde  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $L(p, q, w_3^p d\mu)(G)$  uzayında yakınsak bir alt dizisinin olamayacağı (4.4.5.5) ve (4.4.5.6) ifadelerinden görülür ve böylece  $i: B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L(p, q, w_3^p dx)(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi kompakt değildir.

Benzer yöntemle eğer  $w_1 \prec w_2$ ,  $w_3 \prec w_2$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_2(x)}$  oranı sifıra yakınsamıyorsa  $B_{r,1,q}^{w_1, w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $L(1, q, w_3 dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülmenin kompakt olmadığı kolayca görülür.

**4.4.6.Önerme:**  $w_1, w_2, w_3, w_4$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı Beurling ağırlık fonksiyonları,  $0 < q \leq 1$  ve  $1 \leq r < \infty$  olsun. Eğer

- i.  $w_4 \prec w_2 \prec w_1$ ,  $w_3 \prec w_1$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_1(x)}$  oranı sifıra yakınsamıyorsa,
- ii.  $w_3 \prec w_1 \prec w_2$ ,  $w_4 \prec w_2$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_3(x)}{w_2(x)}$  oranı sifıra yakınsamıyorsa,
- iii.  $w_3 \prec w_1 \prec w_2$ ,  $w_4 \prec w_2$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_4(x)}{w_2(x)}$  oranı sifıra yakınsamıyorsa,

**iv.**  $w_4 \prec w_2 \prec w_1$ ,  $w_3 \prec w_1$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_4(x)}{w_1(x)}$  oranı sifira yakınsamıyorsa,

$B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $B_{r,1,q}^{w_3,w_4}(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülme kompakt değildir.

**İspat:** (i) Kabul edelim ki  $w_4 \prec w_2 \prec w_1$  ve  $w_3 \prec w_1$  olsun. Bu takdirde  $w_4(x) \leq C'w_2(x)$  ve  $w_3(x) \leq C''w_1(x)$  olacak şekilde  $C', C'' > 0$  sayıları vardır.

Böylece 4.3.14.Önermesinden dolayı  $B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d) \subset B_{r,1,q}^{w_3,w_4}(\mathbb{R}^d)$  kapsamı vardır ve

$B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $B_{r,1,q}^{w_3,w_4}(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan birim dönüşüm süreklidir. Şimdi

$x \rightarrow \infty$  olduğunda  $\frac{w_3(x)}{w_1(x)}$  oranının sifira yakınsamadığını kabul edelim ve  $B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$

uzayından herhangi bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sınırlı dizisini alalım. Eğer bu  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin bir alt

dizisi  $B_{r,1,q}^{w_3,w_4}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise  $L_{w_3}^r(\mathbb{R}^d)$  uzayında da yakınsaktır. Bu ise

4.4.2.Önermeye göre bir çelişkidir. Bundan dolayı  $i: B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow B_{r,1,q}^{w_3,w_4}(\mathbb{R}^d)$

gömülmesi kompakt değildir.

(ii) Yukarıdaki (i) şıkkına benzer yöntemle  $B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $B_{r,1,q}^{w_3,w_4}(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülmenin kompakt olmadığı söylenir.

(iii) Kabul edelim ki  $w_3 \prec w_1 \prec w_2$ ,  $w_4 \prec w_2$  ve  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{w_4(x)}{w_2(x)}$  oranı sifira

yakınsamasın. Bu takdirde  $w_4(x) \leq C'w_2(x)$  ve  $w_3(x) \leq C''w_1(x)$  olacak şekilde  $C', C'' > 0$  sayıları vardır. Böylece 4.3.14.Önermesinden dolayı

$B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d) \subset B_{r,1,q}^{w_3,w_4}(\mathbb{R}^d)$  kapsamı vardır ve  $B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $B_{r,1,q}^{w_3,w_4}(\mathbb{R}^d)$

uzayına olan birim dönüşüm süreklidir. Şimdi  $x \rightarrow \infty$  olduğunda  $\frac{w_4(x)}{w_2(x)}$  oranının sifira

yakınsamadığını kabul edelim ve  $B_{r,1,q}^{w_1,w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından herhangi bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sınırlı

dizisini alalım. Eğer bu  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin bir alt dizisi  $B_{r,1,q}^{w_3,w_4}(\mathbb{R}^d)$  uzayında yakınsak ise

$L(1, q, w_4 dx)(\mathbb{R}^d)$  uzayında da yakınsaktır. Bu ise 4.4.5.Önermeye göre bir çelişkidir.

Bundan dolayı  $i: B_{r,1,q}^{w_1, w_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow B_{r,1,q}^{w_3, w_4}(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi kompakt değildir.

(iv) Yukarıdaki (iii) şıkkına benzer yöntemle  $B_{r,1,q}^{w_1, w_2}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $B_{r,1,q}^{w_3, w_4}(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülmenin kompakt olmadığı söylenir.

**4.4.7.Önerme:**  $w_1, w_2, w_3, w_4$  fonksiyonları  $\mathbb{R}^d$  üzerinde tanımlı Beurling ağırlık fonksiyonları ve  $w_1 \approx w_2$  olsun. Eğer  $1 \leq q \leq p < \infty$  ve  $1 \leq r < \infty$  ise  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayından  $B_{r,p,q}^{w_3, w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  uzayına olan gömülmenin sürekli olması için gerek ve yeter koşul  $w_3 \prec w_1$  ve  $w_4 \prec w_2$  olmasıdır.

**İspat:** Kabul edelim ki  $w_3 \prec w_1$  ve  $w_4 \prec w_2$  olsun. O zaman  $L_{w_1}^r(\mathbb{R}^d) \subset L_{w_3}^r(\mathbb{R}^d)$  ve  $L(p, q, w_2^p dx)(\mathbb{R}^d) \subset L(p, q, w_4^p dx)(\mathbb{R}^d)$  olur ve buna göre  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d) \subset B_{r,p,q}^{w_3, w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  yazılır. Yine 4.3.15.Önermeye göre her  $f \in B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  için

$$\|f\|_{r,p,q}^{w_3, w_4^p} \leq C \|f\|_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}$$

olacak şekilde bir  $C > 0$  vardır. Bundan dolayı  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d) \subset B_{r,p,q}^{w_3, w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi sürekli olur.

Tersine, kabul edelim ki  $B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d) \subset B_{r,p,q}^{w_3, w_4^p}(\mathbb{R}^d)$  gömülmesi sürekli olsun. O zaman her  $f \in B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  için  $\|f\|_{r,p,q}^{w_3, w_4^p} \leq C \|f\|_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}$  olacak şekilde  $C > 0$  sayısı vardır.

Yine her  $x \in \mathbb{R}^d$  için  $f \in B_{r,p,q}^{w_1, w_2^p}(\mathbb{R}^d)$  olduğunda

$$\begin{aligned} c_1^{-1} w_3(x) &\leq \|L_x f\|_{r, w_3} \leq c_1 w_3(x) \\ c_2^{-1} w_4(x) &\leq \|L_x f\|_{p, q, w_4^p} \leq c_2 w_4(x) \end{aligned} \tag{4.4.7.1}$$

olacak şekilde  $c_1, c_2 > 0$  sayıları vardır [8, 11]. Ayrıca 4.3.16.Önermeye göre

$\|L_x f\|_{r,p,q}^{w_1, w_2^p} \leq K w'(x)$  olacak şekilde  $K > 0$  sayısı vardır. Yine  $w_1 \approx w_2$  olduğundan her

$x \in \mathbb{R}^d$  için  $Nw_1(x) \leq w_2(x) \leq Mw_1(x)$  olacak şekilde  $M, N > 0$  sayıları vardır. Bu takdirde (4.4.7.1) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} c_1^{-1}w_3(x) &\leq \|L_x f\|_{r, w_3} \leq \|L_x f\|_{r, p, q}^{w_3, w_4^p} \\ &\leq C \|L_x f\|_{r, p, q}^{w_1, w_2^p} \leq CKw'(x) \leq CK(1+M)w_1(x) \end{aligned}$$

olur ve buna göre  $w_3(x) \leq c_1 CK(1+M)w_1(x)$  olduğundan  $w_3 \prec w_1$  olur. Yine  $w_1 \approx w_2$  olduğundan (4.4.7.1) ifadesine göre

$$\begin{aligned} c_2^{-1}w_4(x) &\leq \|L_x f\|_{p, q, w_4^p} \leq \|L_x f\|_{r, p, q}^{w_3, w_4^p} \\ &\leq C \|L_x f\|_{r, p, q}^{w_1, w_2^p} \leq CKw'(x) \leq CK(N+1)w_2(x) \end{aligned}$$

ve buradan da  $w_4(x) \leq c_2 CK(N+1)w_2(x)$  olduğundan  $w_4 \prec w_2$  elde edilir.

#### 4.5. $B_{1,p,q}(G)$ Uzaylarının Çarpanlar Uzayı

Bu bölümde  $G$  bir yerel kompakt Abel grup olmak üzere, daha önce tanıtilan  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayının özel bir hali olan  $L^1(G) \cap L(p,q)(G)$  uzayları ve bu uzaylar üzerindeki çarpanlar uzayı incelenecektir.

$1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  olmak üzere  $B_{1,p,q}(G) = L^1(G) \cap L(p,q)(G)$  uzaylarının üzerindeki  $\|\cdot\|_B = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_{p,q}$  normuyla birlikte bir Segal cebiri olduğu [40] çalışmasında gösterilmiştir. Buna göre

- i.  $(B_{1,p,q}(G), \|\cdot\|_B)$  uzayı bir homojen Banach uzayı,
- ii.  $(B_{1,p,q}(G), \|\cdot\|_B)$  uzayı  $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_1$  normuna göre bir Banach cebiri,
- iii.  $(B_{1,p,q}(G), \|\cdot\|_B)$  uzayı  $L^1(G)$  uzayında  $\|\cdot\|_1$  normuna göre yoğun bir alt uzay,

özellikleri vardır. Şimdi  $B_{1,p,q}(G)$  uzayının diğer özelliklerini inceleyelim.

**4.5.1.Önerme:** Herhangi  $f \in B_{1,p,q}(G)$ ,  $t \in \widehat{G}$  için  $M_t f(x) = \langle x, t \rangle f(x)$  olsun. O zaman  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  için

- i.  $B_{1,p,q}(G)$  uzayı kuvvetli karakter değişmezdir. Yani her  $f \in B_{1,p,q}(G)$  ve  $t \in \widehat{G}$  için  $\|M_t f\|_B = \|f\|_B$  olur.
- ii. Her  $f \in B_{1,p,q}(G)$  ve  $t \in \widehat{G}$  için  $B_{1,p,q}(G)$  uzayından  $B_{1,p,q}(G)$  uzayına tanımlı  $f \rightarrow M_t f$  fonksiyonu süreklidir.
- iii.  $\widehat{G}$  karakter grubundan  $B_{1,p,q}(G)$  uzayına olan  $t \rightarrow M_t f$  fonksiyonu süreklidir.

**İspat:**

- i. 4.3.2(i).Önermede  $r=1$  ve  $w_1 = w_2 = 1$  alınırsa istenen elde edilir.
- ii. 4.3.2(ii).Önermede  $r=1$  ve  $w_1 = w_2 = 1$  alınırsa istenen elde edilir.
- iii. Herhangi bir  $f \in L^1(G)$  için  $\widehat{G}$  karakter grubundan  $L^1(G)$  uzayına olan  $t \rightarrow M_t f$  fonksiyonunun sürekli olduğu biliniyor [31]. Yine herhangi bir  $f \in L(p,q)(G)$  için  $\widehat{G}$  karakter grubundan  $L(p,q)(G)$  uzayına olan  $t \rightarrow M_t f$

fonksiyonunun sürekli olduğu biliniyor [5]. Bunlar kullanılırsa istenen kolayca görülür.

**4.5.2.Önerme:**  $0 \leq q_1 \leq p \leq q_2 \leq \infty$  için  $B_{1,p,q_1}(G) \subseteq B_{1,p,p}(G) = B_{1,p}(G) \subseteq B_{1,p,q_2}(G) \subseteq B_{1,p,\infty}(G)$  kapsamaları vardır.

**İspat:** 4.3.13(ii).Önermede  $r = 1$  ve  $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 1$  alınırsa istenen elde edilir.

**4.5.3.Önerme:**  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  olmak üzere  $(B_{1,p,q}(G), \|\cdot\|_B)$  uzayı bir yaklaşık birime sahiptir.

**İspat:**  $L^1(G)$  uzayının her  $\alpha \in I$  için  $\|e_\alpha\|_1 = 1$  koşulunu sağlayan bir  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  yaklaşık biriminin varlığı [36] çalışmasından ve bu yaklaşık birimin her  $f \in L(p,q)(G)$  için  $\|f - e_\alpha * f\|_{p,q} \rightarrow 0$  olduğu [5] çalışmasından biliniyor. O zaman  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  ağının  $(B_{1,p,q}(G), \|\cdot\|_B)$  uzayı içinde bir yaklaşık birim olduğu kolayca görülür.

**4.5.4.Önerme:**  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  olmak üzere  $(B_{1,p,q}(G), \|\cdot\|_B)$  uzayı bir esas Banach  $L^1(G)$ -modüldür.

**İspat:**  $L(p,q)(G)$  uzayının bir Banach  $L^1(G)$ -modül olduğu [2] çalışmasından biliniyor. Bu takdirde herhangi  $f \in L^1(G)$  ve  $g \in B_{1,p,q}(G)$  için

$$\begin{aligned} \|f * g\|_B &= \|f * g\|_1 + \|f * g\|_{p,q} \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_1 + \|f\|_1 \|g\|_{p,q} = \|f\|_1 \|g\|_B \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca 4.5.3.Önermeye göre herhangi bir  $f \in B_{1,p,q}(G)$  için  $\|f - e_\alpha * f\|_B \rightarrow 0$  olacak şekilde  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  yaklaşık birim var olduğundan Module Factorization teoremine göre  $(B_{1,p,q}(G), \|\cdot\|_B)$  uzayı bir esas Banach  $L^1(G)$ -modül olur.

$B_{1,p,q}(G)$  uzayı üzerinde tanımlı tüm sınırlı, doğrusal operatörler uzayını  $M_{pq}$  ile gösterelim.  $M_{pq}$  uzayının üzerindeki operatör normu ve bileşke işlemine göre bir

Banach cebiri olduğunu göstermek kolaydır. Yine  $Hom_{L^1(G)}(B_{1,p,q}(G), B_{1,p,q}(G)) = Hom_{L^1(G)}(B_{1,p,q}(G))$  ile  $B_{1,p,q}(G)$  uzayı üzerindeki tüm  $L^1(G)$ -modül homomorfizmalarının, yani her  $f \in L^1(G)$  ve  $g \in B_{1,p,q}(G)$  için  $T(f * g) = f * T(g)$  eşitliğini sağlayan  $T \in M_{pq}$  operatörlerinin uzayını gösterelim. Bu uzay her  $f \in L^1(G)$  ve  $g \in B_{1,p,q}(G)$  için  $(f \circ T)(g) = f * T(g)$  şeklinde tanımlanan  $\circ$  işlemine göre bir Banach  $L^1(G)$ -modüldür.

Şimdi herhangi bir  $f \in L^1(G)$  fonksiyonuna karşılık bir  $W_f : B_{1,p,q}(G) \rightarrow B_{1,p,q}(G)$  operatörünü  $W_f(h) = f * h$  biçiminde tanımlayalım. O zaman 4.5.4.Önermeye göre

$$\|W_f\| = \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|W_f(h)\|_B = \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|f * h\|_B \leq \|f\|_1 \quad (*)$$

olur ve her  $f, g \in L^1(G)$ ,  $h \in B_{1,p,q}(G)$  için

$$(W_f - W_g)(h) = W_{f-g}(h) \text{ ve } (W_f \circ W_g)(h) = W_{f * g}(h) \quad (**)$$

olur.

**4.5.5.Önerme:**  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  için  $\Lambda := \overline{\text{span}\{W_f : f \in L^1(G)\}} = \overline{\{W_f : f \in L^1(G)\}}$  şeklinde tanımlanan  $\Lambda$  kümesi bileşke işlemine göre  $M_{pq}$  uzayının bir tam alt cebiridir ve minimal yaklaşık birime sahiptir.

**İspat:**  $\Lambda$  kümesinin bir tam uzay ve bileşke işlemine göre  $M_{pq}$  uzayının bir alt cebiri olduğu kolayca görülür. Her  $f \in L^1(G)$  ve  $h \in B_{1,p,q}(G)$  için  $W_f(h) = f * h$  idi. Şimdi herhangi bir  $W \in \Lambda$  alalım. Bu takdirde her  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde  $\|W - W_f\| < \frac{\varepsilon}{3}$  olacak şekilde en az bir  $f \in L^1(G)$  vardır. Yine  $L^1(G)$  uzayının [36] çalışmasındaki gibi bir  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  yaklaşık birimini alalım. O zaman her  $\alpha \in I$  için  $W_f, W_{e_\alpha} \in \Lambda$  olduğundan (\*) ve (\*\*) ifadeleri kullanılırsa

$$\lim_{\alpha} \|W_{e_\alpha} \circ W_f - W_f\| = \lim_{\alpha} \|W_{e_\alpha * f} - W_f\| = \lim_{\alpha} \|W_{e_\alpha * f - f}\| \leq \lim_{\alpha} \|e_\alpha * f - f\|_1 = 0$$

elde edilir. Buna göre aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı ve her  $\alpha \succ \alpha_0$  için  $\|W_{e_\alpha} \circ W_f - W_f\| < \frac{\varepsilon}{3}$  olacak şekilde bir  $\alpha_0 \in I$  vardır. Bundan dolayı aynı  $\varepsilon > 0$  ve aynı  $\alpha_0 \in I$  alındığında her  $\alpha \succ \alpha_0$  için

$$\begin{aligned} \|W_{e_\alpha} \circ W - W\| &= \|W_{e_\alpha} \circ W_f - W_{e_\alpha} \circ W_f + W_{e_\alpha} \circ W - W_f + W_f - W\| \\ &\leq \|W_{e_\alpha} \circ W_f - W_f\| + \|W_f - W\| + \|W_{e_\alpha} \circ W - W_{e_\alpha} \circ W_f\| \\ &\leq \|W_{e_\alpha} \circ W_f - W_f\| + \|W_f - W\| + \|W - W_f\| \|W_{e_\alpha}\| \\ &\leq \|W_{e_\alpha} \circ W_f - W_f\| + \|W_f - W\| + \|W - W_f\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece her  $W \in \Lambda$  için  $\lim_{\alpha} \|W_{e_\alpha} \circ W - W\| = 0$  bulunur. Yine  $\|W_{e_\alpha}\| \leq \|e_\alpha\|_1 = 1$  olduğundan  $\{W_{e_\alpha}\}_{\alpha \in I}$  ağıının minimal yaklaşık birim olduğu söylenir. Bu ise istenendir.

**4.5.6.Önerme:**  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  için  $\Lambda$  uzayı  $Hom_{L^1(G)}(B_{1,p,q}(G))$  uzayının bir tam alt cebiridir.

**İspat:** Herhangi bir  $W \in \Lambda$  için  $W = \lim_n W_{f_n}$  olacak şekilde  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(G)$  vardır ve bundan dolayı  $W \in M_{pq}$  olur. Ayrıca 4.5.4.Önermeye göre  $B_{1,p,q}(G)$  uzayı bir esas Banach  $L^1(G)$ -modül olduğundan, her  $g \in L^1(G)$  ve  $h \in B_{1,p,q}(G)$  için

$$\begin{aligned} W(g * h) &= \lim_n W_{f_n}(g * h) = \lim_n f_n * g * h \\ &= \lim_n f_n * g * h = \lim_n g * W_{f_n}(h) = g * W(h) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $W \in Hom_{L^1(G)}(B_{1,p,q}(G))$  olur. Yine  $Hom_{L^1(G)}(B_{1,p,q}(G))$  uzayı bir Banach uzayı olduğundan, 4.5.5.Önermeye göre  $\Lambda$  uzayı da onun bir tam alt cebir olur.

**4.5.7.Önerme:**  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  için  $\Lambda$  uzayı bir esas Banach  $L^1(G)$ -modüldür.

**İspat:** Herhangi bir  $g \in L^1(G)$  ve  $W_f \in \Lambda$  için bir  $g \circ W_f : B_{1,p,q}(G) \rightarrow B_{1,p,q}(G)$  dönüşümü  $(g \circ W_f)(h) = W_f(h * g) = W_f(g * h)$  şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\|g \circ W_f\| &= \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|(g \circ W_f)(h)\|_B = \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|W_f(g * h)\|_B \\ &\leq \|W_f\| \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|g * h\|_B \leq \|W_f\| \|g\|_1\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Banach modül olmanın diğer özelliklerini göstermek kolaydır. Buna göre  $\Lambda$  uzayı bir Banach  $L^1(G)$ -modül olur. Bunun yanı sıra  $L^1(G)$  uzayının yaklaşık birimi olan  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  ağının  $B_{1,p,q}(G)$  uzayı içinde bir yaklaşık birim olduğu

4.5.3.Önermeden biliniyor. O zaman herhangi bir  $f \in L^1(G)$  için

$$\begin{aligned}\|e_\alpha \circ W_f - W_f\| &= \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|(e_\alpha \circ W_f - W_f)(h)\|_B = \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|f * e_\alpha * h - f * h\|_B \\ &\leq \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|f * e_\alpha - f\|_1 \|h\|_B = \|f * e_\alpha - f\|_1 \rightarrow 0\end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $\Lambda$  uzayı bir esas Banach  $L^1(G)$ -modüldür.

Ayrıca herhangi bir  $f \in L^1(G)$  için

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha} \|f - f \circ W_{e_\alpha}\| &= \lim_{\alpha} \left( \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|(f - f \circ W_{e_\alpha})(h)\|_B \right) = \lim_{\alpha} \left( \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|f * h - f * e_\alpha * h\|_B \right) \\ &\leq \lim_{\alpha} \left( \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|f - f * e_\alpha\|_1 \|h\|_B \right) \leq \lim_{\alpha} \|f - f * e_\alpha\|_1 = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $f \in \overline{L^1(G) \circ \Lambda}$  ve dolayısıyla  $f \in \Lambda$  olur. Buna göre  $L^1(G) \subset \Lambda$  yazılır.

**4.5.8.Tanım:** Bir  $\Gamma$  kümesini

$$\Gamma = \left\{ T \in \text{Hom}_{L^1(G)}(B_{1,p,q}(G)) : \text{her } W \in \Lambda \text{ için } T \circ W \in \Lambda \right\}$$

biçiminde tanımlayalım.  $\Gamma$  kümesinin bir vektör uzayı olduğu kolayca görülebilir.

**4.5.9.Önerme:**  $\text{Hom}_{L^1(G)}(B_{1,p,q}(G)) = \Gamma$ .

**İspat:**  $B_{1,p,q}(G) \subset L^1(G)$  olduğundan  $\overline{\text{span}\{W_g : g \in B_{1,p,q}(G)\}} \subset \Lambda$  olur. Şimdi

herhangi bir  $W \in \Lambda$  alalım. O zaman her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\|W - W_f\| < \frac{\varepsilon}{2}$  olacak şekilde

en az bir  $f \in L^1(G)$  vardır. Yine  $\overline{B_{1,p,q}(G)} = L^1(G)$  olduğundan aynı  $\varepsilon > 0$  için

$\|g - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$  olacak şekilde en az bir  $g \in B_{1,p,q}(G)$  vardır. Bu takdirde aynı  $\varepsilon > 0$  sayısı

için (\*) ve (\*\*) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \|W - W_g\| &\leq \|W - W_f\| + \|W_f - W_g\| \\ &\leq \|W - W_f\| + \|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise  $W \in \overline{\text{span}\{W_g : g \in B_{1,p,q}(G)\}}$  olduğunu gösterir. Buna göre

$\overline{\text{span}\{W_g : g \in B_{1,p,q}(G)\}} = \Lambda$  olur. Yine herhangi bir  $T \in \text{Hom}_{L^1(G)}(B_{1,p,q}(G))$  ve

$g \in B_{1,p,q}(G)$  olmak üzere  $W_g \in \Lambda$  için

$$(T \circ W_g)(h) = T(g * h) = T(g) * h = W_{T(g)}(h) \quad (4.5.9.1)$$

olup,  $T(g) \in B_{1,p,q}(G)$  olduğundan  $T \in \Gamma$  bulunur.

Şimdi herhangi bir  $T \in \Gamma$  alalım. Yine herhangi bir  $W \in \Lambda$  verildiğinde her

$\varepsilon > 0$  sayısı için  $\|W - W_g\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|}$  olacak şekilde en az bir  $g \in B_{1,p,q}(G)$  vardır.  $T$

operatörü  $B_{1,p,q}(G)$  uzayı üzerinde sınırlı ve (4.5.9.1) ifadesine göre  $T \circ W_g \in \Lambda$  olduğundan

$$\begin{aligned} \|T \circ W - T \circ W_g\| &= \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|(T \circ W - T \circ W_g)(h)\|_B \\ &= \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|T(W(h)) - T(g * h)\|_B \\ &\leq \|T\| \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|W(h) - g * h\|_B = \|T\| \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|W(h) - W_g(h)\|_B \\ &\leq \|T\| \|W - W_g\| < \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Bu takdirde her  $W \in \Lambda$  için  $T \circ W \in \overline{\text{span}\{W_g : g \in B_{1,p,q}(G)\}} = \Lambda$  elde edilir. Bu da isteneni verir.

**4.5.10.Önerme:**  $G$  bir yerel kompakt Abel grup olsun. Bu takdirde Banach cebiri olan  $\Lambda$  uzayı üzerindeki  $M(\Lambda)$  çarpanlar uzayı,  $\Gamma$  uzayına izometrik izomorftur.

**İspat:** Her  $T \in \Gamma$  için  $\Psi(T) = \rho_T$  ve her  $S \in \Lambda$  için  $\rho_T(S) = T \circ S$  olmak üzere  $\rho_T$  dönüşümü herhangi  $S_1, S_2 \in \Lambda$  için

$$\rho_T(S_1 \circ S_2) = T \circ S_1 \circ S_2 = \rho_T(S_1) \circ S_2$$

özelliğini sağladığından  $\rho_T \in M(\Lambda)$  olur, böylece bir  $\Psi: \Gamma \rightarrow M(\Lambda)$  dönüşümü tanımlanır. Ayrıca herhangi  $T_1, T_2 \in \Gamma$  için

$$\Psi(T_1 + T_2) = \rho_{T_1 + T_2} = \rho_{T_1} + \rho_{T_2} = \Psi(T_1) + \Psi(T_2)$$

olduğundan  $\Psi$  doğrusaldır. Şimdi  $T_1, T_2 \in \Gamma$  ve  $\Psi(T_1) = \Psi(T_2)$  olduğunu kabul edelim. O zaman her  $S \in \Lambda$  için  $\rho_{T_1}(S) = \rho_{T_2}(S)$ , yani  $T_1 \circ S = T_2 \circ S$  olur. Bu takdirde her  $h \in B_{1,p,q}(G)$  için  $T_1 \circ S(h) = T_2 \circ S(h)$  yazılır. Böylece

$$\{S(h) : S \in \Lambda, h \in B_{1,p,q}(G)\} \quad (4.5.10.1)$$

kümesi üzerinde  $T_1 = T_2$  olur. (4.5.10.1) ifadesindeki küme  $B_{1,p,q}(G)$  uzayında yoğun olduğundan her  $f \in B_{1,p,q}(G)$  için  $T_1(f) = T_2(f)$  ve  $T_1 = T_2$  elde edilir. Böylece  $\Psi$  birebirdir. Herhangi  $T \in \Gamma$  ve  $S \in \Lambda$  için

$$\begin{aligned} \|T \circ S\| &= \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|(T \circ S)(h)\|_B = \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|T(S(h))\|_B \\ &\leq \|T\| \sup_{\|h\|_B \leq 1} \|S(h)\|_B \leq \|T\| \|S\| \end{aligned}$$

ve buradan

$$\|\rho_T\| = \sup_{0 \neq S \in \Lambda} \frac{\|\rho_T(S)\|}{\|S\|} = \sup_{0 \neq S \in \Lambda} \frac{\|T \circ S\|}{\|S\|} \leq \|T\|$$

elde edilir. Öte yandan  $\{W_{e_\alpha}\}_{\alpha \in I}$  ağı  $\Lambda$  uzayı için bir minimal yaklaşık birim olduğundan

$$\|\rho_T\| = \sup_{0 \neq S \in \Lambda} \frac{\|\rho_T(S)\|}{\|S\|} \geq \sup_{\alpha} \frac{\|T \circ W_{e_\alpha}\|}{\|W_{e_\alpha}\|} \geq \sup_{\alpha} \|T \circ W_{e_\alpha}\| \geq \lim_{\alpha} \|T \circ W_{e_\alpha}\| = \|T\|$$

bulunur. Böylece  $\|\Psi(T)\| = \|\rho_T\| = \|T\|$  elde edilir. Son olarak  $\Psi$  dönüşümünün örten olduğunu gösterelim. Herhangi bir  $\rho \in M(\Lambda)$  ve  $L^1(G)$  uzayının  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  yaklaşık birimini alalım.  $L^1(G) \subset \Lambda \subset \text{Hom}_{L^1(G)}(B_{1,p,q}(G))$  olduğundan her  $\alpha \in I$  için  $\rho(e_\alpha) \in \Lambda$  olur. Böylece her  $f \in L^1(G)$  ve  $g \in B_{1,p,q}(G)$  için

$$(\rho(e_\alpha))(f * g) = f * (\rho(e_\alpha))(g) = (f \circ (\rho(e_\alpha)))(g) \quad (4.5.10.2)$$

bulunur. Herhangi  $T \in M(\Lambda)$  alalım. O zaman her  $W_1, W_2 \in \Lambda$  için

$$T(W_1 \circ W_2) = W_1 \circ T(W_2) = T(W_1) \circ W_2$$

yazılır. Yine  $L^1(G) \subset \Lambda$  olduğundan her  $f \in L^1(G)$  için  $T(f \circ W_2) = f \circ T(W_2)$  eşitliğiyle  $T \in Hom_{L^1(G)}(\Lambda)$  elde edilir. Buna göre  $M(\Lambda) \subset Hom_{L^1(G)}(\Lambda)$  olduğundan

$$\rho(f * e_\alpha)(g) = (f \circ (\rho(e_\alpha)))(g) \quad (4.5.10.3)$$

elde edilir. Yukarıdaki (4.5.10.2) ve (4.5.10.3) ifadelerinden

$$(\rho(e_\alpha))(f * g) = (f \circ (\rho(e_\alpha)))(g) = (\rho(f * e_\alpha))(g)$$

bulunur. Bu takdirde her  $f \in L^1(G)$  ve  $g \in B_{1,p,q}(G)$  için

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha} \|(\rho(f))(g) - (\rho(f * e_\alpha))(g)\|_B &= \lim_{\alpha} \|(\rho(f) - \rho(f * e_\alpha))(g)\|_B \\ &= \lim_{\alpha} \|\rho(f - f * e_\alpha)(g)\|_B \\ &\leq \lim_{\alpha} \|\rho(f - f * e_\alpha)\| \|g\|_B \\ &\leq \|\rho\| \lim_{\alpha} \|f - f * e_\alpha\| \|g\|_B = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da her  $f \in L^1(G)$  ve  $g \in B_{1,p,q}(G)$  için

$$\lim_{\alpha} (\rho(e_\alpha))(f * g) = \lim_{\alpha} (f \circ \rho(e_\alpha))(g) = \lim_{\alpha} (\rho(f * e_\alpha))(g) = (\rho(f))(g)$$

bulunur. Ayrıca  $B_{1,p,q}(G)$  uzayı bir esas Banach  $L^1(G)$ -modül ve her  $\alpha \in I$  için

$(\rho(e_\alpha)) \in \Lambda \subset Hom_{L^1(G)}(B_{1,p,q}(G))$  olduğundan  $(\rho(e_\alpha))(f * g) = (f \circ (\rho(e_\alpha)))(g)$  ağı

bir limite sahip ve bu limit  $T \in Hom_{L^1(G)}(B(G)) = \Gamma$  olmak üzere

$(f \circ T)(g) \in B_{1,p,q}(G)$  şeklindedir. Bu takdirde  $\lim_{\alpha} (f \circ (\rho(e_\alpha)))(g) = (\rho(f))(g)$

olduğundan her  $f \in L^1(G)$  için  $f \circ T = \rho(f)$  yazılabilir. O zaman

$\rho \in M(\Lambda)$  olduğundan her  $W \in \Lambda$  için

$$e_\alpha \circ T \circ W = (\rho(e_\alpha)) \circ W = \rho(e_\alpha \circ W)$$

bulunur. Ayrıca  $\Lambda$  uzayı bir esas Banach  $L^1(G)$ -modül olduğundan  $e_\alpha \circ T \circ W \rightarrow T \circ W$  elde edilir. Yine her  $W \in \Lambda$  için  $\|\rho(e_\alpha \circ W) - \rho(W)\| \leq \|\rho\| \|e_\alpha \circ W - W\|$  olduğundan  $\rho(e_\alpha \circ W) \rightarrow \rho(W)$  olur ve limitin tekliğinden  $T \circ W = \rho(W)$  veya  $\rho_T(W) = \rho(W)$  yazılır. Bundan dolayı  $\rho_T = \rho$  elde edilir. Böylece  $\Psi$  dönüşümü örten olup,  $M(\Lambda) \cong \Gamma$  bulunur.

**4.5.11.Sonuç:**  $M(\Lambda)$  uzayı ile  $Hom_{L^1(G)}(B_{1,p,q}(G))$  uzayı izometrik izomorftur.

#### 4.6. Ölçülü Lorentz Uzayları ve Bazı Özellikleri

$G$  bir yerel kompakt Abel grup,  $\lambda$  ise onun üzerinde bir Haar ölçümü olsun.  $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$  olmak üzere  $\mathcal{B}$  ve  $\mathcal{M}$  simgeleri sırasıyla

$$\mathcal{B} = \{ T \mid T : L(p, q)(G) \rightarrow L(p, q)(G), T \text{ sınırlı ve doğrusal} \}$$

ve

$$\mathcal{M} = \{ T \in \mathcal{B} : T(L_x) = L_x(T), \forall x \in G \}$$

uzaylarını gösterebiliriz.  $\mathcal{B}$  uzayı operatör normu altında bir Banach cebiri ve  $\mathcal{M}$  uzayının  $\mathcal{B}$  uzayının bir tam alt uzayı olduğunu görmek kolaydır.  $\mathcal{M}$  uzayının her bir elemanına  $(p, q)$  tipinde çarpan adı verilecektir. Yine bu kısım boyunca  $L(p, q)(G)$  uzayından  $L(p, q)(G)$  uzayına tanımlanan tüm  $L^1(G)$ -modül homomorfizmalarının, yani her  $f \in L^1(G)$  ve  $g \in L(p, q)(G)$  için  $T(f * g) = f * T(g)$  eşitliğini sağlayan  $T : L(p, q)(G) \rightarrow L(p, q)(G)$  operatörlerinin uzayını  $Hom_{L^1(G)}(L(p, q)(G)) = Hom_{L^1(G)}(L(p, q)(G), L(p, q)(G))$  ile göstereceğiz. Çarpanlar uzayı olarak da bilinen  $Hom_{L^1(G)}(L(p, q)(G))$  uzayı herhangi  $f \in L^1(G)$  ve herhangi  $g \in L(p, q)(G)$  ve  $T \in Hom_{L^1(G)}(L(p, q)(G))$  için  $(f \circ T)(g) = f * T(g)$  şeklinde tanımlanan işleme göre bir Banach  $L^1(G)$ -modüldür.

**4.6.1.Tanım:** Herhangi bir  $f \in L(p, q)(G)$  fonksiyonu verildiğinde her  $h \in L(p, q)(G)$  ve (h.h.h.) her  $x \in G$  için  $(h * f)(x) = \int_G h(t)f(t^{-1}x)d\lambda(t)$  girişim işlemi tanımlı olsun. Bu takdirde her  $h \in L(p, q)(G)$  için  $h * f \in L(p, q)(G)$  ve

$$\sup \{ \|h * f\|_{p, q} : h \in L(p, q)(G), \|h\|_{p, q} \leq 1 \} < \infty \quad (4.6.1.1)$$

$$\sup \{ \|h * f\|_{p, q} : h \in C_c(G), \|h\|_{p, q} \leq 1 \} < \infty \quad (4.6.1.2)$$

koşulları sağlandığında bu  $f$  fonksiyonuna  $pq$ -ölçülü ( $pq$ -temperate) denir ve bu fonksiyonların kümesi  $L^1(p,q)(G)$  ile gösterilir.  $L^1(p,q)(G)$  uzayları grup  $L(p,q)(G)$ -cebirleri olarak da adlandırılır. Ayrıca  $p=q=1$  olması durumunda  $L^1_c(G) = L^1(G)$  olduğu gözlemlenir [21]. Her  $f \in L^1(p,q)(G)$  fonksiyonu için (4.6.1.1) veya (4.6.1.2) ile verilen sayılar  $\|f\|_{p,q}^r$  ile gösterilir. Yine herhangi bir  $f \in C_c(G)$  verildiğinde  $C_c(G) \subset L^1(G)$  ve  $L(p,q)(G)$  uzayı bir Banach  $L^1(G)$ -modül olduğundan  $\|h\|_{p,q} \leq 1$  olan her  $h \in L(p,q)(G)$  için  $h * f \in L(p,q)(G)$  ve  $\|h * f\|_{p,q} \leq \|h\|_{p,q} \|f\|_1 \leq \|f\|_1$  olur. Buna göre  $\|f\|_{p,q}^r < \infty$  ve dolayısıyla  $C_c(G) \subset L^1(p,q)(G)$  elde edilir. Benzer şekilde  $L^1(G) \cap L(p,q)(G)$  uzayı da  $L^1(p,q)(G)$  uzayının bir alt uzayıdır.

**4.6.2.Önerme:** Herhangi bir  $f \in L^1(p,q)(G)$  için

$$\|f\|_{p,q}^r = \sup\{\|h * f\|_{p,q} : h \in L(p,q)(G), \|h\|_{p,q} \leq 1\} = \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|h * f\|_{p,q}$$

veya (4.6.1.2) ile tanımlı  $\|\cdot\|_{p,q}^r$  fonksiyonu  $L^1(p,q)(G)$  uzayı üzerinde bir normdur.

**İspat:**  $L^1(p,q)(G)$  uzayının tanımı ile her  $f \in L^1(p,q)(G)$  için  $\|f\|_{p,q}^r \geq 0$  olur. Yine herhangi bir  $c \in \mathbb{C}$  için

$$\begin{aligned} \|cf\|_{p,q}^r &= \sup\{\|h * cf\|_{p,q} : h \in L(p,q)(G), \|h\|_{p,q} \leq 1\} \\ &= \sup\{|c| \|h * f\|_{p,q} : h \in L(p,q)(G), \|h\|_{p,q} \leq 1\} \\ &= |c| \sup\{\|h * f\|_{p,q} : h \in L(p,q)(G), \|h\|_{p,q} \leq 1\} \\ &= |c| \|f\|_{p,q}^r \end{aligned}$$

olur, ayrıca her  $f, g \in L^1(p,q)(G)$  için

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{p,q}^r &= \sup \left\{ \|h * (f + g)\|_{p,q} : h \in L(p,q)(G), \|h\|_{p,q} \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \|(h * f) + (h * g)\|_{p,q} : h \in L(p,q)(G), \|h\|_{p,q} \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \|h * f\|_{p,q} + \|h * g\|_{p,q} : h \in L(p,q)(G), \|h\|_{p,q} \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \|h * f\|_{p,q} : h \in L(p,q)(G), \|h\|_{p,q} \leq 1 \right\} \\
&\quad + \sup \left\{ \|h * g\|_{p,q} : h \in L(p,q)(G), \|h\|_{p,q} \leq 1 \right\} \\
&= \|f\|_{p,q}^r + \|g\|_{p,q}^r
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca  $f = 0$  ise her  $h \in L(p,q)(G)$  için  $h * f = 0$  olur. Buna göre her  $h \in L(p,q)(G)$  için  $\|h * f\|_{p,q} = 0$  ve dolayısıyla  $\|f\|_{p,q}^r = 0$  olur. Tersine  $\|f\|_{p,q}^r = 0$  ise supremum tanımı gereği her  $h \in C_c(G)$  için  $\|h * f\|_{p,q} = 0$  olur. Böylece  $L(p,q)(G)$  uzayının tanımına göre her  $h \in C_c(G)$  için  $h * f = 0$  (h.h.h.) olur. Buradan [12] çalışmasına göre

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,q} &\leq p' \|f\|_{p,q}^* \leq p' C \sup \left\{ \left| \int_G f(x) g(-x) d\mu(x) \right| : g \in C_c(G), \|g\|_{p',q'}^* \leq 1 \right\} \\
&= p' C \sup \left\{ |(f * g)(0)| : g \in C_c(G), \|g\|_{p',q'}^* \leq 1 \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece  $f = 0$  (h.h.h.) çıkar ve  $(L^r(p,q)(G), \|\cdot\|_{p,q}^r)$  bir normlu uzay olur.

**4.6.3.Önerme:**  $L^r(p,q)(G)$  uzayı  $L(p,q)(G)$  uzayının her yerde yoğun bir alt uzayıdır.

**İspat:**  $C_c(G) \subset L^r(p,q)(G) \subset L(p,q)(G)$  ve [39] çalışmasına göre  $\overline{C_c(G)} = L(p,q)(G)$  olması kullanılırsa  $\overline{L^r(p,q)(G)} = L(p,q)(G)$  elde edilir.

**4.6.4.Önerme:** Herhangi bir  $f \in L^r(p,q)(G)$  fonksiyonuna karşılık her  $g \in L(p,q)(G)$  için  $W_f(g) = g * f$  ise  $W_f \in \mathcal{B}$  olur.

**İspat:**  $L(p, q)(G)$  uzayının tanımına göre herhangi bir  $f \in L(p, q)(G)$  verildiğinde her  $g \in L(p, q)(G)$  için  $f * g \in L(p, q)(G)$  olduğundan  $W_f : L(p, q)(G) \rightarrow L(p, q)(G)$  bir fonksiyondur. Ayrıca

$$\|W_f\| = \sup_{\|g\|_{p,q} \leq 1} \|W_f(g)\|_{p,q} = \sup_{\|g\|_{p,q} \leq 1} \|g * f\|_{p,q} = \|f\|_{p,q}^f \quad (4.6.4.1)$$

eşitliğine göre  $W_f$  operatörü sınırlı olur. Böylece  $W_f \in \mathcal{B}$  elde edilir.

Bunun yanı sıra her  $f, g \in L(p, q)(G)$  ve her  $h \in L(p, q)(G)$  için

$$W_{f*g}(h) = h * f * g = W_g(h * f) = (W_g \circ W_f)(h)$$

yazılır ve buna göre

$$W_{f*g} = W_g \circ W_f = W_{g*f} = W_f \circ W_g \quad (4.6.4.2)$$

olur.

**4.6.5.Önerme:**  $(L(p, q)(G), \|\cdot\|_{p,q}^f)$  uzayı bir normlu cebirdir.

**İspat:** Herhangi  $f, g, h \in L(p, q)(G)$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  verilsin.

- i.  $f * (g * h) = (f * g) * h$
- ii.  $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- iii.  $(\alpha f) * (\beta g) = \alpha \beta (f * g)$

koşulları sağlandığından  $(L(p, q)(G), \|\cdot\|_{p,q}^f)$  uzayı bir karmaşık cebirdir. Yine

4.6.4.Önermeye göre  $f \in L(p, q)(G)$  verildiğinde her  $u \in L(p, q)(G)$  için  $W_f(u) = u * f$  olacak şekilde  $W_f \in \mathcal{B}$  olduğu bilindiğinden (4.6.4.1) ifadesi gereğince

$\|u\|_{p,q} \leq 1$  olmak üzere her  $u \in L(p, q)(G)$  için

$$\begin{aligned} \|u * f * g\|_{p,q} &= \|W_g(u * f)\|_{p,q} \leq \|W_g\| \|u * f\|_{p,q} = \|W_g\| \|W_f(u)\|_{p,q} \\ &\leq \|W_g\| \|W_f\| \|u\|_{p,q} \leq \|f\|_{p,q}^f \|g\|_{p,q}^f \end{aligned}$$

olur, buradan  $\|f * g\|_{p,q}^f \leq \|f\|_{p,q}^f \|g\|_{p,q}^f$  bulunur.

**4.6.6.Önerme:**  $L^1(p, q)(G)$  uzayı girişim işlemi altında  $L^1(G)$ -modüldür.

**İspat:**  $*$  :  $L^1(G) \times L^1(p, q)(G) \rightarrow L^1(p, q)(G)$  olmak üzere  $*(f, g) = f * g$  şeklindeki girişim işlemini ele alalım. Eğer  $L(p, q)(G)$  uzayının  $L^1(G)$ -modül olduğu kullanılırsa her  $f, g \in L^1(G)$  ve  $h, k \in L^1(p, q)(G)$  için

$$\begin{aligned} \|f * h\|_{p, q}^f &= \sup \left\{ \|u * (f * h)\|_{p, q} : u \in L(p, q)(G), \|u\|_{p, q} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \|f * (u * h)\|_{p, q} : u \in L(p, q)(G), \|u\|_{p, q} \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \|f\|_1 \|u * h\|_{p, q} : u \in L(p, q)(G), \|u\|_{p, q} \leq 1 \right\} \\ &= \|f\|_1 \sup \left\{ \|u * h\|_{p, q} : u \in L(p, q)(G), \|u\|_{p, q} \leq 1 \right\} = \|f\|_1 \|h\|_{p, q}^f \end{aligned}$$

olduğundan bu işlem iyi tanımlıdır. Yine modül olmanın diğer koşullarını göstermek kolaydır. Böylece  $L^1(p, q)(G)$  uzayı  $L^1(G)$  cebiri üzerinde bir modüldür.

**4.6.7.Önerme:**  $0 < p, q < \infty$  veya  $0 < p < q = \infty$  için  $(L^1(p, q)(G), \|\cdot\|_{p, q}^f)$  uzayı ötelemeler altında kuvvetli değişmezdir.

**İspat:** Herhangi bir  $f \in L^1(p, q)(G)$  ve  $y \in G$  alalım. Bu durumda her  $g \in L(p, q)(G)$  için  $L_y f * g = f * L_y g = L_y(f * g)$  [31] olması kullanılırsa  $\|g\|_{p, q} \leq 1$  olmak üzere

$$\|L_y f * g\|_{p, q} = \|f * L_y g\|_{p, q} = \|L_y(f * g)\|_{p, q} = \|f * g\|_{p, q} \leq \|f\|_{p, q}^f$$

olur. Bundan dolayı  $L_y f \in L^1(p, q)(G)$  elde edilir. Ayrıca  $L(p, q)(G)$  uzayının ötelemeler altında kuvvetli değişmez olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|L_y f\|_{p, q}^f &= \sup \left\{ \|h * L_y f\|_{p, q} : \|h\|_{p, q} \leq 1, h \in L(p, q)(G) \right\} \\ &= \sup \left\{ \|L_y(h * f)\|_{p, q} : \|h\|_{p, q} \leq 1, h \in L(p, q)(G) \right\} \\ &= \sup \left\{ \|h * f\|_{p, q} : \|h\|_{p, q} \leq 1, h \in L(p, q)(G) \right\} = \|f\|_{p, q}^f \end{aligned}$$

bulunur. Bu da isteneni verir.

**4.6.8.Önerme:**  $p = q = 1$ ,  $p = q = \infty$  veya  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  olmak üzere  $L^1(p, q)(G)$  uzayı  $\|\cdot\|_{p, q}^t = \|\cdot\|_{p, q} + \|\cdot\|_{p, q}^t$  normuna göre bir Banach cebiridir.

**İspat:**  $(L^1(p, q)(G), \|\cdot\|_{p, q}^t)$  uzayından herhangi bir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy dizisi alalım. Bu takdirde verilen her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $\forall m, n \geq n_0$  olduğunda  $\|f_n - f_m\|_{p, q}^t < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Yine  $\|\cdot\|_{p, q}^t \geq \|\cdot\|_{p, q}$  olduğuna göre  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $(L^1(p, q)(G), \|\cdot\|_{p, q})$  uzayında da bir Cauchy dizisi olur.  $(L^1(p, q)(G), \|\cdot\|_{p, q})$  uzayı bir Banach uzayı olduğundan bu uzayda  $f_n \rightarrow f$  olacak şekilde bir  $f \in L^1(p, q)(G)$  vardır. Yine 4.6.4.Önerme kullanılırsa  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin her bir elemanına karşılık gelen  $\{W_{f_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  operatörler dizisi  $\mathcal{B}$  uzayında bir Cauchy dizisi olup,  $\lim_n \|f_n - f\|_{p, q} = 0 = \lim_n \|W_{f_n} - W\|$  eşitliğini sağlayan  $W \in \mathcal{B}$  operatörü vardır. Şimdi herhangi bir  $g \in C_c(G)$ ,  $\|g\|_{p, q} \leq 1$  alalım. Bu takdirde  $L^1(p, q)(G)$  uzayında  $f_n \rightarrow f$  ve  $L^1(p, q)(G)$  uzayının  $L^1(G)$ -modül olması kullanılırsa  $f_n * g \rightarrow f * g$  olur. Buradan

$$\|g * f\|_{p, q} = \lim_n \|g * f_n\|_{p, q} \leq \lim_n \|f_n\|_{p, q}^t = \lim_n \|W_{f_n}\| = \|W\|$$

çıkar. Böylece  $\|f\|_{p, q}^t = \sup\{\|g * f\|_{p, q} : g \in C_c(G), \|g\|_{p, q} \leq 1\} \leq \|W\|$  ve dolayısıyla  $f \in L^1(p, q)(G)$  elde edilir. Yine herhangi bir  $h \in C_c(G)$  için

$$W(h) = \lim_n W_{f_n}(h) = \lim_n (h * f_n) = h * f = W_f(h)$$

elde edilir.  $C_c(G)$  uzayı  $L^1(p, q)(G)$  uzayında her yerde yoğun olduğundan  $W = W_f$  olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \lim_n \|f_n - f\|_{p, q}^t &= \lim_n (\|f_n - f\|_{p, q} + \|f_n - f\|_{p, q}^t) \\ &\leq \lim_n (\|f_n - f\|_{p, q} + \|W_{f_n} - W_f\|) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre  $(L^1(p, q)(G), \|\cdot\|_{p, q}^1)$  uzayı bir Banach uzayıdır. Ayrıca

4.6.5. Önermeye göre herhangi  $f, g \in L^1(p, q)(G)$  için

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{p, q}^1 &= \|f * g\|_{p, q} + \|f * g\|_{p, q}^1 \leq \|W_f(g)\|_{p, q} + \|f\|_{p, q}^1 \|g\|_{p, q}^1 \\ &\leq \|W_f\| \|g\|_{p, q} + \|f\|_{p, q}^1 \|g\|_{p, q}^1 = \|f\|_{p, q}^1 \|g\|_{p, q} + \|f\|_{p, q}^1 \|g\|_{p, q}^1 \\ &= \|f\|_{p, q}^1 \|g\|_{p, q}^1 \leq \|f\|_{p, q}^1 \|g\|_{p, q}^1 \end{aligned}$$

eşitsizliği var olduğundan bu uzay bir Banach cebiri olur.

**4.6.9. Önerme:**  $A_{p, q} = \overline{\text{span}\{W_{f * g} \mid f \in L^1(p, q)(G), g \in C_c(G)\}}$  uzayı  $\mathcal{B}$  uzayının minimal yaklaşık birime sahip bir tam alt cebiridir.

**İspat:**  $A_{p, q}$  uzayının tanımı gereği  $\mathcal{B}$  uzayının bileşke işlemine göre bir tam alt cebiri olduğu kolayca görülür. Öte yandan  $e$ ,  $G$  grubunun birimi olmak üzere  $e$  nin her  $E$  kompakt komşuluğuna karşılık negatif olmayan, desteği  $E$  tarafından kapsanan ve  $\int f_E d\lambda = 1$  koşulunu sağlayan  $f_E \in C_c(G)$  fonksiyonlarının varlığı biliniyor [22, 36]. Yine bu kompakt komşuluklar üzerinde bir  $\succ$  bağıntısını  $E_1 \subset E_2 \Leftrightarrow E_1 \succ E_2$  şeklinde tanımlayalım. Bu bağıntıya göre kompakt komşuluklardan oluşan bir yönlendirilmiş küme elde edilir. Bu takdirde birimin  $E_i$  kompakt komşuluklarından oluşan ve  $L^1(G)$  uzayının yaklaşık birimi olan  $\{f_{E_i}\}$  ağı oluşturulmuş olur. Eğer  $\{f_{E_i}\}$  ağının kendisi ile çarpım ağına  $\{h_\gamma\}$  denilirse, bu  $\{h_\gamma\}$  ağı  $L^1(G)$  uzayının bir minimal yaklaşık birimi olur. Yani her  $\gamma$  için  $\|h_\gamma\|_1 = \|f_{E_i} * f_{E_j}\|_1 \leq \|f_{E_i}\|_1 \|f_{E_j}\|_1 = 1$  ve her  $f \in L^1(G)$  için  $f * f_{E_i} \in L^1(G)$  olduğundan

$$\begin{aligned} \lim_\gamma \|f - f * h_\gamma\|_1 &= \lim_{i, j} \|f - f * (f_{E_i} * f_{E_j})\|_1 \\ &\leq \lim_i \|f - f * f_{E_i}\|_1 + \lim_j \|(f * f_{E_i}) - (f * f_{E_i}) * f_{E_j}\|_1 \\ &\leq \lim_i \|f - f * f_{E_i}\|_1 + \lim_j \|f - (f * f_{E_j})\|_1 \|f_{E_i}\|_1 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca [5] çalışmasına göre  $\{h_\gamma\}$  ağı  $1 < p < \infty$  ve  $1 \leq q < \infty$  olmak üzere  $L(p, q)(G)$  uzayları içinde bir minimal yaklaşık birim olur. Yine  $C_c(G) \subset L^1(p, q)(G)$  olması kullanılırsa herhangi  $f \in C_c(G)$  ve  $g, u \in L^1(p, q)(G)$  için

$$\|W_f\| = \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|W_f(h)\|_{p,q} = \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|h * f\|_{p,q} \leq \|f\|_1 \quad (4.6.9.1)$$

$$(W_u - W_g)(h) = h * u - h * g = h * (u - g) = W_{u-g}(h) \quad (4.6.9.2)$$

bulunur ve  $\{W_{h_\gamma}\}$  ağı  $A_{p,q}$  uzayında olur. O zaman (4.6.4.2), (4.6.9.1) ve (4.6.9.2) ifadelerine göre  $f \in L^1(p, q)(G)$ ,  $g \in C_c(G)$  ise

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_\gamma \|W_{h_\gamma} \circ W_{f * g} - W_{f * g}\| &= \overline{\lim}_\gamma \|W_{f * g * h_\gamma} - W_{f * g}\| = \overline{\lim}_\gamma \|W_{g * h_\gamma} \circ W_f - W_g \circ W_f\| \\ &= \overline{\lim}_\gamma \|(W_{g * h_\gamma} - W_g) \circ W_f\| \leq \overline{\lim}_\gamma \|W_{g * h_\gamma} - W_g\| \|W_f\| \\ &= \overline{\lim}_\gamma \|W_{g * h_\gamma - g}\| \|W_f\| \leq \overline{\lim}_\gamma \|g * h_\gamma - g\|_1 \|W_f\| = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu takdirde  $\{W_{h_\gamma}\}$  ağı  $A_{p,q}$  uzayı için  $\|W_{h_\gamma}\| \leq \|h_\gamma\|_1 \leq 1$  olduğundan bir minimal yaklaşık birim olur.

**4.6.10.Önerme:**  $A_{p,q}$  uzayı  $Hom_{L^1(G)}(L(p, q)(G))$  uzayının bileşke işlemine göre bir tam alt cebiridir.

**İspat:** Herhangi  $W \in A_{p,q}$  alalım. Bu takdirde  $A_{p,q}$  uzayının tanımına göre bu uzayda  $W_{f_n} \rightarrow W$  olacak şekilde her  $n \in \mathbb{N}$  için  $W_{f_n} \in span\{W_{f * g} \mid f \in L^1(p, q)(G), g \in C_c(G)\}$  olmak üzere bir  $\{W_{f_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi vardır. O zaman her  $g \in L^1(G)$  ve her  $h \in L(p, q)(G)$  için

$$W(g * h) = \lim_n W_{f_n}(g * h) = \lim_n g * h * f_n = \lim_n g * W_{f_n}(h) = g * W(h) \quad (4.6.10.1)$$

olur. Bu takdirde (4.6.10.1) ifadesi ve  $W$  operatörünün sınırlı olması kullanılırsa  $W \in \text{Hom}_{L^1(G)}(L(p,q)(G))$  elde edilir. Yine  $\text{Hom}_{L^1(G)}(L(p,q)(G))$  uzayı operatör normuna göre bir Banach cebiri olduğundan  $A_{p,q}$  uzayı  $\text{Hom}_{L^1(G)}(L(p,q)(G))$  uzayının bir tam alt uzayıdır. Bu durumda (4.6.4.2) ifadesine göre  $A_{p,q}$  uzayı  $\text{Hom}_{L^1(G)}(L(p,q)(G))$  uzayının bir tam alt cebiri olur.

**4.6.11.Önerme:**  $A_{p,q}$  uzayı bir esas Banach  $L^1(G)$ -modüldür.

**İspat:** Herhangi bir  $W_f \in A_{p,q}$  operatörü ve  $g \in L^1(G)$  fonksiyonu için bir  $g \circ W_f : L(p,q)(G) \rightarrow L(p,q)(G)$  dönüşümü  $(g \circ W_f)(h) = W_f(g * h) = g * h * f$  şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \|g \circ W_f\| &= \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|(g \circ W_f)(h)\|_{p,q} = \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|W_f(g * h)\|_{p,q} \\ &\leq \|W_f\| \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|g * h\|_{p,q} \leq \|W_f\| \|g\|_1 \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman  $A_{p,q}$  uzayı bir Banach  $L^1(G)$ -modüldür. Yine  $L^1(G)$  uzayının kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  yaklaşık birimi alındığında  $f \in L^1(p,q)(G)$ ,  $g \in C_c(G)$  olmak üzere  $W_{f * g} \in A_{p,q}$  için

$$\begin{aligned} \|e_\alpha \circ W_{f * g} - W_{f * g}\| &= \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|(e_\alpha \circ W_{f * g} - W_{f * g})(h)\|_{p,q} = \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|W_{f * g}(h * e_\alpha) - W_{f * g}(h)\|_{p,q} \\ &= \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|h * e_\alpha * f * g - h * f * g\|_{p,q} = \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|W_f(h * e_\alpha * g - h * g)\|_{p,q} \\ &\leq \|W_f\| \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|h\|_{p,q} \|e_\alpha * g - g\|_1 = \|f\|_{p,q}^r \|e_\alpha * g - g\|_1 \end{aligned}$$

yazılır. Bu takdirde  $A_{p,q}$  uzayının bir esas Banach  $L^1(G)$ -modül olduğunu söylenir.

Ayrıca  $f \in L^1(G)$  ve  $W_{h_y} \in A_{p,q}$  için

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma} \|f - f \circ W_{h_{\gamma}}\| &= \lim_{\gamma} \left( \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|(f - f \circ W_{h_{\gamma}})(h)\|_{p,q} \right) = \lim_{\gamma} \left( \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|f * h - W_{h_{\gamma}}(f * h)\|_{p,q} \right) \\
&= \lim_{\gamma} \left( \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|f * h - (h_{\gamma} * f) * h\|_{p,q} \right) \leq \lim_{\gamma} \left( \sup_{\|h\|_{p,q} \leq 1} \|f - h_{\gamma} * f\|_1 \|h\|_{p,q} \right) \\
&\leq \lim_{\gamma} \|f - h_{\gamma} * f\|_1 = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu takdirde  $f \in \overline{L^1(G) \circ A_{p,q}} = A_{p,q}$  elde edilir. Bir başka deyişle  $L^1(G) \subset A_{p,q}$  olur.

**4.6.12.Önerme:** Herhangi  $f, g \in L(p, q)(G)$  ve  $T \in \text{Hom}_{L^1(G)}(L(p, q)(G))$  verilsin.

Bu takdirde

- i. Eğer  $f \in L^l(p, q)(G)$  ise  $T(f) \in L^l(p, q)(G)$  olur.
- ii. Eğer  $g \in L^l(p, q)(G)$  ise  $T(f * g) = f * T(g)$  olur.

**İspat:** (i) Herhangi bir  $f \in L^l(p, q)(G)$  ve  $T \in \text{Hom}_{L^1(G)}(L(p, q)(G))$  alalım. O zaman

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{p,q}^l &= \sup \left\{ \|h * T(f)\|_{p,q} : h \in C_c(G), \|h\|_{p,q} \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \|T(h * f)\|_{p,q} : h \in C_c(G), \|h\|_{p,q} \leq 1 \right\} \\
&\leq \|T\| \sup \left\{ \|h * f\|_{p,q} : h \in C_c(G), \|h\|_{p,q} \leq 1 \right\} \\
&\leq \|T\| \|f\|_{p,q}^l < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan  $T(f) \in L^l(p, q)(G)$  olur.

(ii) Herhangi bir  $g \in L^l(p, q)(G)$  alalım.  $C_c(G)$  uzayı  $L(p, q)(G)$  uzayında yoğun bir alt uzay olduğundan her  $f \in L(p, q)(G)$  fonksiyonu için  $\lim_n \|f_n - f\|_{p,q} = 0$  olacak şekilde  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(G)$  dizisi vardır. Ayrıca 4.6.10.Önermeye göre  $W_g \in \text{Hom}_{L^1(G)}(L(p, q)(G))$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\lim_n \|f_n * g - f * g\|_{p,q} &= \lim_n \|W_g(f_n) - W_g(f)\|_{p,q} \\
&= \lim_n \|W_g(f_n - f)\|_{p,q} \leq \|W_g\| \lim_n \|f_n - f\|_{p,q} = 0
\end{aligned}$$

olur. Yine (i) seçeneği ile herhangi bir  $T \in Hom_{L(G)}(L(p,q)(G))$  için  $T(g) \in L(p,q)(G)$  olduğundan  $W_{T(g)} \in Hom_{L(G)}(L(p,q)(G))$  olur ve bundan dolayı

$$\lim_n \|f_n * T(g) - f * T(g)\|_{p,q} = 0$$

elde edilir. Bu takdirde  $T \in Hom_{L(G)}(L(p,q)(G))$  dönüşümü sürekli olduğundan

$$f * T(g) = \lim_n f_n * T(g) = \lim_n T(f_n * g) = T(f * g)$$

olur.

**4.6.13.Tanım:**  $A_{p,q}$  uzayı için bir  $(A_{p,q})$  kümesini

$$(A_{p,q}) = \left\{ T \in Hom_{L(G)}(L(p,q)(G)) : \text{her } W \in A_{p,q} \text{ için } T \circ W \in A_{p,q} \right\}$$

biçiminde tanımlayalım.

**4.6.14.Önerme:**  $(A_{p,q}) = Hom_{L(G)}(L(p,q)(G))$  olur.

**İspat:** Herhangi bir  $T \in Hom_{L(G)}(L(p,q)(G))$  alalım.  $f \in L(p,q)(G)$ ,  $g \in C_c(G)$  olmak üzere herhangi bir  $W_{f*g} \in A_{p,q}$  alalım. O zaman 4.6.12.Önermeye göre  $f \in L(p,q)(G)$  ise  $T(f) \in L(p,q)(G)$  olduğundan her  $h \in L(p,q)(G)$  için

$$\begin{aligned} (T \circ W_{f*g})(h) &= T(W_{f*g}(h)) = T(h * f * g) = h * T(f * g) = W_{T(f*g)}(h) \\ &= W_{g*T(f)}(h) \end{aligned}$$

olur. Böylece  $T \in (A_{p,q})$  yazılır. Tersine  $(A_{p,q}) \subset Hom_{L(G)}(L(p,q)(G))$  olduğu açıktır.

**4.6.15.Önerme:**  $G$  bir yerel kompakt Abel grup,  $1 < p < \infty$  ve  $1 \leq q \leq \infty$  olsun. Bu takdirde  $M(A_{p,q})$  uzayı ile  $(A_{p,q})$  uzayı izometrik izomorftur.

**İspat:** Bir  $F : (A_{p,q}) \rightarrow M(A_{p,q})$  dönüşümünü herhangi bir  $S \in A_{p,q}$  için  $\rho_T(S) = T \circ S$  olmak üzere  $F(T) = \rho_T$  olarak tanımlayalım. Yine herhangi  $S, K \in A_{p,q}$  için

$\rho_T(S \circ K) = T \circ S \circ K = \rho_T(S) \circ K$  olduğu için  $\rho_T \in M(A_{p,q})$  olup,  $F$  dönüşümü iyi tanımlıdır.  $\rho_T$  dönüşümünün tanımına göre herhangi  $T_1, T_2 \in (A_{p,q})$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  için

$$\begin{aligned} F(\alpha T_1 + \beta T_2)(S) &= \rho_{\alpha T_1 + \beta T_2}(S) = (\alpha T_1 + \beta T_2) \circ S \\ &= (\alpha T_1 + \beta T_2) \circ S = \alpha(T_1 \circ S) + \beta(T_2 \circ S) \\ &= \alpha \rho_{T_1}(S) + \beta \rho_{T_2}(S) = \alpha F(T_1)(S) + \beta F(T_2)(S) \end{aligned}$$

olduğundan  $F$  dönüşümü doğrusaldır. Ayrıca herhangi  $T_1, T_2 \in (A_{p,q})$  için  $F(T_1) = F(T_2)$  ise her  $S \in A_{p,q}$  için  $\rho_{T_1}(S) = \rho_{T_2}(S) \Rightarrow T_1 \circ S = T_2 \circ S$  olur. Buna göre her  $f \in L(p,q)(G)$  için  $T_1(S(f)) = T_2(S(f))$  yazılır. Yine

$$\{S(f) : S \in A_{p,q}, f \in L(p,q)(G)\}$$

kümesinin  $L(p,q)(G)$  uzayında yoğun olduğu kolayca görülür. Böylece her  $u \in L(p,q)(G)$  için  $T_1(u) = T_2(u)$  olup  $F$  dönüşümü birebirdir. Bununla birlikte her  $T \in (A_{p,q}) = Hom_{L^1(G)}(A_{p,q})$  ve her  $S \in A_{p,q}$  için

$$\begin{aligned} \|\rho_T(S)\| &= \|T \circ S\| = \sup_{\|g\|_{p,q} \leq 1} \|(T \circ S)(g)\|_{p,q} = \sup_{\|g\|_{p,q} \leq 1} \|T(S(g))\|_{p,q} \\ &\leq \|T\| \sup_{\|g\|_{p,q} \leq 1} \|S(g)\|_{p,q} = \|T\| \|S\| \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan da  $\|\rho_T\| \leq \|T\|$  elde edilir. Öte yandan  $\{W_{h_\gamma}\}$  ağı  $A_{p,q}$  uzayı için bir minimal yaklaşık birim olduğundan

$$\|\rho_T\| = \sup_{0 \neq S \in A_{p,q}} \frac{\|T \circ S\|}{\|S\|} \geq \sup_{\gamma} \frac{\|T \circ W_{h_\gamma}\|}{\|W_{h_\gamma}\|} \geq \sup_{\gamma} \|T \circ W_{h_\gamma}\| \geq \lim_{\gamma} \|T \circ W_{h_\gamma}\| = \|T\| \quad (4.6.15.1)$$

bulunur. O zaman (4.6.15.1) eşitsizliğiyle  $\|\rho_T\| = \|T\|$  olur. Bu  $F$  dönüşümünün bir izometri olduğunu gösterir. Son olarak  $F$  dönüşümünün örtenliğini gösterelim. Herhangi bir  $\rho \in M(A_{p,q})$  ve  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset L^1(G)$  yaklaşık birimini alalım. Bu takdirde  $L^1(G) \subset A_{p,q} \subset Hom_{L^1(G)}(L(p,q)(G))$  ve her  $\alpha \in I$  için  $(\rho(e_\alpha)) \in A_{p,q}$  olduğundan herhangi  $f \in L^1(G)$  ve  $g \in L(p,q)(G)$  için

$$(\rho(e_\alpha))(f * g) = f * ((\rho e_\alpha)(g)) = (f \circ (\rho e_\alpha))(g) \quad (4.6.15.2)$$

eşitliği elde edilir.  $M(A_{p,q}) \subset Hom_{L(G)}(A_{p,q})$  olduğundan,

$$\begin{aligned} (\rho(f \circ e_\alpha))(g) &= (\rho(f))(e_\alpha * g) = \rho(f * e_\alpha * g) \\ &= (\rho(f * e_\alpha))(g) = (f \circ (\rho(e_\alpha)))(g) \end{aligned} \quad (4.6.15.3)$$

eşitliği yazılır. Bu (4.6.15.2) ve (4.6.15.3) eşitliklerine göre de

$$(\rho(e_\alpha))(f * g) = (f \circ (\rho(e_\alpha)))(g) = (\rho(f * e_\alpha))(g) \quad (4.6.15.4)$$

elde edilir. Bu takdirde her  $f \in L^1(G)$  ve  $g \in L(p,q)(G)$  için

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha} \left\| (\rho(f * e_\alpha))(g) - (\rho(f))(g) \right\|_{p,q} &= \lim_{\alpha} \left\| (\rho(f * e_\alpha) - \rho f)(g) \right\|_{p,q} \\ &= \lim_{\alpha} \left\| (\rho(f * e_\alpha - f))(g) \right\|_{p,q} \\ &\leq \lim_{\alpha} \left\| \rho(f * e_\alpha - f) \right\| \left\| g \right\|_{p,q} \\ &\leq \lim_{\alpha} \left\| \rho \right\| \left\| f * e_\alpha - f \right\| \left\| g \right\|_{p,q} \\ &\leq \lim_{\alpha} \left\| \rho \right\| \left\| f * e_\alpha - f \right\|_1 \left\| g \right\|_{p,q} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{\alpha} (\rho(e_\alpha))(f * g) = \lim_{\alpha} (f \circ (\rho(e_\alpha)))(g) = \lim_{\alpha} (\rho(f * e_\alpha))(g) = (\rho(f))(g)$$

olur. Yine  $L(p,q)(G)$  uzayı bir esas Banach  $L^1(G)$ -modül ve her  $\alpha \in I$  için

$\rho(e_\alpha) \in A_{p,q} \subset Hom_{L(G)}(L(p,q)(G))$  olduğundan

$$(\rho(e_\alpha))(f * g) = (f \circ (\rho(e_\alpha)))(g) = f * ((\rho(e_\alpha))(g))$$

ifadesi bir limite sahiptir ve bu limit  $T \in Hom_{L(G)}(L(p,q)(G)) = (A_{p,q})$  olmak üzere

$(f \circ T)(g) \in L(p,q)(G)$  şeklindedir. O zaman

$$\lim_{\alpha} (\rho(e_\alpha))(f * g) = \lim_{\alpha} (f \circ (\rho(e_\alpha)))(g) = (\rho(f))(g)$$

olduğundan her  $f \in L^1(G)$  için  $f \circ T = \rho(f)$  yazılır. Böylece herhangi  $W \in A_{p,q}$  için

$$e_\alpha \circ T \circ W = (\rho(e_\alpha)) \circ W = \rho(e_\alpha \circ W)$$

elde edilir.  $A_{p,q}$  uzayı bir esas Banach  $L^1(G)$ -modül olduğundan  $e_\alpha \circ T \circ W \rightarrow T \circ W$  olur. Yine her  $W \in A_{p,q}$  için  $\|\rho(e_\alpha \circ W) - \rho(W)\| \leq \|\rho\| \|e_\alpha \circ W - W\|$  olduğundan  $\rho(e_\alpha \circ W) \rightarrow \rho(W)$  olur. Böylece limitin tekliğinden  $\rho(W) = T \circ W = \rho_T(W)$  bulunur. Bu takdirde  $\rho = \rho_T$  elde edilir.

**4.6.16.Sonuç:**  $M(A_{p,q})$  ve  $Hom_{L^1(G)}(L(p,q)(G))$  uzayları izometrik izomorfturlar.

**İspat:** 4.6.14.Önermeye göre  $(A_{p,q}) = Hom_{L^1(G)}(L(p,q)(G))$  olduğu biliniyor. Yine 4.6.15.Önermeye göre  $M(A_{p,q}) \cong (A_{p,q})$  olduğundan  $M(A_{p,q})$  uzayı ve  $Hom_{L^1(G)}(L(p,q)(G))$  uzayları izometrik izomorfturlar.

$T$  sınırlı, doğrusal dönüşümü herhangi  $f, g \in L^1(p,q)(G)$  için  $T(f * g) = f * T(g)$  koşulunu sağlıyorsa  $T$  dönüşümüne  $L^1(p,q)(G)$  uzayı üzerindeki bir çarpan (multiplier) adı verilir. Bu dönüşümlerin uzayı  $m_{p,q}$  ile gösterilir ve bu uzayın operatör normu altında bir Banach cebiri olduğu kolayca görülür.

**4.6.17. Yardımcı Önerme:**  $f \neq 0$  olmak üzere herhangi bir  $f \in L(p,q)(G)$  için  $f * g \neq 0$  olacak şekilde en az bir  $g \in C_c(G)$  vardır.

**İspat:** Kabul edelim ki herhangi bir  $0 \neq f \in L(p,q)(G)$  fonksiyonu ve her  $g \in C_c(G)$  için  $f * g = 0$  olsun. Bu takdirde [12] çalışmasına göre

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,q} &\leq p' \|f\|_{p,q}^* \leq p' C \sup \left\{ \left| \int_G f(x) g(-x) d\mu(x) \right| : g \in C_c(G), \|g\|_{p',q}^* \leq 1 \right\} \\ &= p' C \sup \left\{ |(f * g)(0)| : g \in C_c(G), \|g\|_{p',q}^* \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

yazılan bu eşitsizliğe göre  $\|f\|_{p,q} = 0$  olur. Bu ise  $f = 0$  (h.h.h.) olup bir çelişkidir.

**4.6.18.Yardımcı Önerme:** Herhangi  $T \in m_{p,q}$  ve her  $V \in A_{p,q}$  için

$$\sup \left\{ \|T \circ V(h)\|_{p,q} : h \in L^1(p,q)(G), \|h\|_{p,q} \leq 1 \right\} \leq \|T\| \|V\|$$

olur.

**İspat:** Bir  $D$  kümesini  $D = \{W_f : f \in L^1(p,q)(G), W_f \in A_{p,q}\}$  biçiminde tanımlayalım

ve herhangi bir  $W \in A_{p,q}$  alalım. O zaman her  $\varepsilon > 0$  sayısı verildiğinde  $\|W - W_{f*g}\| < \varepsilon$

olacak şekilde  $W_{f*g} \in \text{span}\{W_{f*g} : f \in L^1(p,q)(G), g \in C_c(G)\}$  elemanı vardır. Yine

$f \in L^1(p,q)(G), g \in C_c(G)$  olduğunda  $f * g \in L^1(p,q)(G)$  olduğundan  $W_{f*g} \in D$

olur. Bu takdirde  $\bar{D} = A_{p,q}$  yazılır. Bir  $\varphi' : D \rightarrow \mathcal{B}$  dönüşümü  $T \in m_{p,q}$  olmak üzere

$\varphi'(W_f) = W_{T(f)}$  şeklinde tanımlansın.  $\varphi'$  dönüşümü sınırlı bir dönüşüm olduğundan

$\|\varphi'\| = \|\varphi\|$  olacak şekilde bir tek  $\varphi : A_{p,q} \rightarrow \mathcal{B}$  sürekli genişlemesi vardır. Her  $V \in A_{p,q}$

için  $\varphi(V)$  ile  $(T \circ V)$  operatörlerinin  $L^1(p,q)(G)$  üzerinde çakıştığını gösterelim.

Herhangi bir  $h \in L^1(p,q)(G), \|h\|_{p,q} \leq 1$  ve  $V \in A_{p,q}$  alalım.  $\bar{D} = A_{p,q}$  olduğundan

$$\lim_n \|W_{f_n} - V\| = 0 \quad (4.6.18.1)$$

olacak şekilde  $\{W_{f_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$  ve  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(p,q)(G)$  dizisi vardır. Ayrıca her

$f \in L^1(p,q)(G)$  ve herhangi bir  $W_g \in A_{p,q}$  için

$$W_g(L_x f) = g * L_x f = L_x(f * g) = L_x W_g(f)$$

oldüğundan  $A_{p,q} \subset \mathcal{M}$  ve dolayısıyla  $V \in \mathcal{M}$  olur. 4.6.12.Önerme ile her

$g \in L^1(p,q)(G)$  için

$$(V \circ W_h)(g) = V(W_h(g)) = V(g * h) = g * V(h) = W_{V(h)}(g)$$

olup  $V \circ W_h = W_{V(h)}$  elde edilir. Yine  $W_{W_{f_n}(h)} = W_{f_n} \circ W_h$  olduğundan her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned}\|W_{f_n}(h) - V(h)\|_{p,q}^f &= \|W_{W_{f_n}(h)} - W_{V(h)}\| = \|W_{f_n} \circ W_h - V \circ W_h\| \\ &= \|(W_{f_n} - V) \circ W_h\|\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\overline{\lim}_n \|W_{f_n}(h) - V(h)\|_{p,q}^f = \overline{\lim}_n \|(W_{f_n} - V) \circ W_h\| \leq \overline{\lim}_n \|W_{f_n} - V\| \|W_h\| = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak  $T \in m_{p,q}$  için

$$\lim_n \|T(W_{f_n}(h)) - T(V(h))\|_{p,q}^f = 0 \quad (4.6.18.2)$$

bulunur. Her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $\forall g \in L^t(p,q)(G)$  için

$$W_{T(f_n)}(g) = g * T(f_n) = T(g * f_n) = T(W_{f_n}(g)) = (T \circ W_{f_n})(g)$$

olduğundan  $W_{T(f_n)} = T \circ W_{f_n}$  bulunur. Bu takdirde  $\varphi(W_{f_n}) = \varphi'(W_{f_n}) = W_{T(f_n)} = T \circ W_{f_n}$

yazılır. Sonuç olarak (4.6.18.1) ile

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_n \|T \circ W_{f_n} - \varphi(V)\| &= \lim_n \|\varphi(W_{f_n}) - \varphi(V)\| \\ &\leq \|\varphi\| \lim_n \|W_{f_n} - V\| = 0\end{aligned}$$

bulunur. Bu takdirde  $\lim_n \|(T \circ W_{f_n})(h) - \varphi(V)(h)\|_{p,q} = 0$  olduğundan her  $g \in C_c(G)$

için  $\overline{\lim}_n \|g * ((T \circ W_{f_n})(h)) - g * (\varphi(V)(h))\|_{p,q} = 0$  elde edilir. Buradan (4.6.18.2) ile

beraber her  $g \in C_c(G)$  için  $g * \varphi(V)(h) = g * T(V(h))$  yazılır. Yine 4.6.17.Yardımcı

Önerme ile  $\varphi(V)(h) = (T \circ V)(h)$  olur.  $L^t(p,q)(G)$  bir normlu cebir olduğundan

$$\begin{aligned}\|(T \circ V)(h)\|_{p,q} &= \|\varphi(V)(h)\|_{p,q} = \lim_n \|\varphi(W_{f_n})(h)\|_{p,q} = \lim_n \|W_{T(f_n)}(h)\|_{p,q} \\ &\leq \lim_n \|W_{T(f_n)}\| \|h\|_{p,q} = \|h\|_{p,q} \lim_n \|T(f_n)\|_{p,q}^f\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $\|W_f\| = \|f\|_{p,q}^f$  olduğundan yine (4.6.18.1) ile  $\|h\|_{p,q} \leq 1$  olduğundan

$$\|(T \circ V)(h)\|_{p,q} \leq \|T\| \lim_n \|f_n\|_{p,q}^f = \|T\| \lim_n \|W_{f_n}\| \leq \|T\| \|V\|$$

yazılır. Bu ise istenendir.

**4.6.19.Önerme:** Her  $T \in m_{p,q}$ , her  $V \in A_{p,q}$  ve her  $f \in L^1(p,q)(G)$  için

$$\|(T \circ V)(f)\|_{p,q} \leq \|T\| \|V(f)\|_{p,q}.$$

**İspat:** Herhangi  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin.  $A_{p,q}$  uzayı yaklaşık birime sahip bir Banach cebiri olduğundan Cohen Factorization Teoremiyle herhangi  $V \in A_{p,q}$  için  $\|P\|=1$ ,  $\|S-V\| < \varepsilon$  ve  $V = P \circ S$  olacak şekilde  $P, S \in A_{p,q}$  vardır [16]. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \|S(f)\|_{p,q} &= \|(S-V+V)(f)\|_{p,q} \leq \|(S-V)(f)\|_{p,q} + \|V(f)\|_{p,q} \\ &\leq \varepsilon \|f\|_{p,q} + \|V(f)\|_{p,q} \end{aligned}$$

olup 4.6.18.Yardımcı Önerme ile

$$\begin{aligned} \|(T \circ V)(f)\|_{p,q} &= \|(T \circ (P \circ S))(f)\|_{p,q} = \|T(P(S(f)))\|_{p,q} \\ &\leq \|T\| \|P\| \|S(f)\|_{p,q} \leq \|T\| (\varepsilon \|f\|_{p,q} + \|V(f)\|_{p,q}) \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman  $\varepsilon$  keyfi sayısı için  $\|(T \circ V)(f)\|_{p,q} \leq \|T\| \|V(f)\|_{p,q}$  bulunur.

**4.6.20.Yardımcı Önerme:**  $\wp = \{V(f) : f \in L^1(p,q)(G), V \in A_{p,q}\}$  kümesi  $L(p,q)(G)$  uzayında yoğundur.

**İspat:** Herhangi  $\varepsilon > 0$  ve  $g \in L(p,q)(G)$  alalım. [39] çalışmasına göre

$\overline{C_c(G)} = L(p,q)(G)$  olduğundan dolayı  $\|g-f\|_{p,q} < \frac{\varepsilon}{2}$  olacak şekilde en az bir

$f \in C_c(G)$  vardır.  $A_{p,q}$  uzayının yaklaşık birimi  $\{W_{h_\gamma}\}$  ağı olduğunda her  $\gamma$  için

4.6.12.Önermeyle  $W_{h_\gamma}(f) \in L^1(p,q)(G)$  olur. Ayrıca  $\{h_\gamma\}$  ağı  $L(p,q)(G)$  uzayı

içinde bir yaklaşık birim olduğundan  $\lim_{\gamma} \|W_{h_\gamma}(f) - f\|_{p,q} = \lim_{\gamma} \|h_\gamma * f - f\|_{p,q} = 0$  olur.

Bu takdirde  $\{W_{h_\gamma}(f)\} \subset \wp$  olup  $\|W_{h_\gamma}(f) - g\|_{p,q} \leq \|W_{h_\gamma}(f) - f\|_{p,q} + \|f - g\|_{p,q} < \varepsilon$

bulunur.

**4.6.21.Yardımcı Önerme:**  $V \in \mathcal{B}$  ve  $\mathfrak{S}$  ise  $L(p, q)(G)$  uzayının yoğun bir alt uzayı olsun. Eğer her  $h \in C_c(G)$  ve her  $f \in \mathfrak{S}$  için  $V(h * f) = h * V(f)$  ise  $V \in \mathcal{M}$  olur.

**İspat:** Herhangi  $x \in G$  alalım. O zaman her  $h \in \mathfrak{S}$  için  $\lim_{\alpha} \|L_x h - u_{\alpha} * h\|_{p, q} = 0$  olacak şekilde  $C_c(G)$  uzayında bir  $\{u_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$  ağı vardır [15]. Yine  $V \in \mathcal{B}$  dönüşümü sınırlı olduğundan  $\lim_{\alpha} \|V(L_x h) - V(u_{\alpha} * h)\|_{p, q} = 0$  olur. Hipotez gereği her  $h \in C_c(G)$  için  $V(h * f) = h * V(f)$  olduğundan  $V(h) \in L(p, q)(G)$  için

$$\lim_{\alpha} \|L_x V(h) - u_{\alpha} * V(h)\|_{p, q} = 0$$

bulunur. Bu takdirde her  $h \in \mathfrak{S}$  için

$$\begin{aligned} \|V(L_x h) - L_x V(h)\|_{p, q} &= \|V(L_x h) - V(u_{\alpha} * h) + V(u_{\alpha} * h) - L_x V(h)\|_{p, q} \\ &\leq \|V(L_x h) - V(u_{\alpha} * h)\|_{p, q} + \|V(u_{\alpha} * h) - L_x V(h)\|_{p, q} \\ &\leq \|V(L_x h) - V(u_{\alpha} * h)\|_{p, q} + \|u_{\alpha} * V(h) - L_x V(h)\|_{p, q} \end{aligned}$$

olduğundan  $V(L_x h) = L_x V(h)$  bulunur. O zaman  $\overline{\mathfrak{S}} = L(p, q)(G)$  olduğundan  $V \in \mathcal{M}$  bulunur.

**4.6.22.Yardımcı Önerme:** Herhangi  $f, g \in L(p, q)(G)$  ve  $T \in \mathcal{M}$  verilsin. Bu takdirde

- i. eğer  $f \in L^1(G)$  ise  $T(f * g) = f * T(g)$  olur.
- ii. eğer  $f \in L^1(p, q)(G)$  ise  $T(f) \in L^1(p, q)(G)$  olur.
- iii. eğer  $g \in L^1(p, q)(G)$  ise  $T(f * g) = f * T(g)$  olur.

**İspat:** (i)  $f \in L^1(G)$ ,  $g \in L(p, q)(G)$  için  $T(f * g) = f * T(g)$  olduğu [9, Lemma2.1] çalışmasında gösterildi.

(ii) Herhangi bir  $f \in L^1(p, q)(G)$  ve  $T \in \mathcal{M}$  alalım. O zaman (i) seçeneğiyle

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{p,q}^t &= \sup\{\|h * T(f)\|_{p,q} : h \in C_c(G), \|h\|_{p,q} \leq 1\} \\
&= \sup\{\|T(h * f)\|_{p,q} : h \in C_c(G), \|h\|_{p,q} \leq 1\} \\
&\leq \|T\| \sup\{\|h * f\|_{p,q} : h \in C_c(G), \|h\|_{p,q} \leq 1\} \\
&\leq \|T\| \|f\|_{p,q}^t < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan  $T(f) \in L^t(p, q)(G)$  olur.

(iii) Herhangi bir  $g \in L^t(p, q)(G)$  alalım.  $C_c(G)$  uzayı  $L(p, q)(G)$  uzayında yoğun bir alt uzay olduğundan her  $f \in L(p, q)(G)$  fonksiyonu için  $\lim_n \|f_n - f\|_{p,q} = 0$  olacak şekilde  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(G)$  dizisi vardır. Ayrıca 4.6.10.Önermeye göre  $W_g \in \text{Hom}_{L^t(G)}(L(p, q)(G))$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\lim_n \|f_n * g - f * g\|_{p,q} &= \lim_n \|W_g(f_n) - W_g(f)\|_{p,q} \\
&= \lim_n \|W_g(f_n - f)\|_{p,q} \leq \|W_g\| \lim_n \|f_n - f\|_{p,q} = 0
\end{aligned}$$

olur. Yine (ii) seçeneği ile herhangi bir  $T \in \mathcal{M}$  için  $T(g) \in L^t(p, q)(G)$  olduğundan

$$\lim_n \|f_n * T(g) - f * T(g)\|_{p,q} = 0$$

elde edilir. Bu takdirde  $T \in \mathcal{M}$  dönüşümü sürekli olduğundan (i) seçeneğiyle

$$f * T(g) = \lim_n f_n * T(g) = \lim_n T(f_n * g) = T(f * g)$$

olur. Bu ise istenendir.

**4.6.23.Önerme:** Bir  $\omega: \mathcal{M} \rightarrow m_{p,q}$  dönüşümü her  $f \in L^t(p, q)(G)$  için  $\omega(T)(f) = \omega_T(f) = T(f)$  olmak üzere  $\omega(T) = \omega_T$  biçiminde tanımlansın. Bu takdirde  $\omega$  dönüşümü  $\mathcal{M}$  uzayından  $m_{p,q}$  uzayına bir izometrik izomorfizmadır.

Ayrıca  $T \in m_{p,q}$  için herhangi  $V \in A_{p,q}$  ve  $f \in L^t(p, q)(G)$  alındığında  $\omega_S(V(f)) = (T \circ V)(f)$  olacak şekilde en az bir  $S \in \mathcal{M}$  vardır.

**İspat:** Herhangi  $T \in \mathcal{M}$  ve  $f \in L^1(p, q)(G)$  için  $T(f) \in L^1(p, q)(G)$  olduğu 4.6.22.Önermede gösterildi. Yine  $A_{p, q} \subset \mathcal{M}$  olduğundan her  $f, g \in L^1(p, q)(G)$  ve her  $T \in \mathcal{M}$  için 4.6.22.yardımcı Önermeye göre

$$\begin{aligned}\omega(T)(f * g) &= \omega_T(f * g) = T(f * g) = T(W_f(g)) = W_f(T(g)) \\ &= f * T(g) = f * \omega_T(g)\end{aligned}$$

olup  $\omega(T) \in m_{p, q}$  elde edilir. Böylece  $\omega$  iyi tanımlıdır. Öte yandan herhangi  $f \in L^1(p, q)(G)$  ve  $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$  için

$$\begin{aligned}\omega(\alpha T_1 + \beta T_2)(f) &= \omega_{\alpha T_1 + \beta T_2}(f) = (\alpha T_1 + \beta T_2)(f) = \alpha T_1(f) + \beta T_2(f) \\ &= \alpha \omega_{T_1}(f) + \beta \omega_{T_2}(f) = \alpha \omega(T_1)(f) + \beta \omega(T_2)(f)\end{aligned}$$

ile  $\omega$  dönüşümünün doğrusal olduğu görülür. Yine herhangi  $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$  için  $\omega(T_1) = \omega(T_2)$  ise  $\omega_{T_1} = \omega_{T_2}$  olup her  $f \in L^1(p, q)(G)$  için  $T_1(f) = T_2(f)$  olur. Bu eşitlik her  $f \in L^1(p, q)(G)$  için gerçekleştiğinden ve  $\overline{L^1(p, q)(G)} = L(p, q)(G)$  olduğundan  $T_1 = T_2$  ve  $\omega$  dönüşümünün birebir olduğu bulunur. Ayrıca herhangi  $T \in \mathcal{M}$  için  $\omega_T \in m_{p, q}$  ve  $\overline{L^1(p, q)(G)} = L(p, q)(G)$  olduğundan

$$\|\omega_T\| = \sup \frac{\|\omega_T(f)\|_{p, q}^t}{\|f\|_{p, q}^t} = \sup \frac{\|T(f)\|_{p, q}^t}{\|f\|_{p, q}^t} = \|T\|_{p, q}^t = \|\tilde{T}\|_{p, q}$$

elde edilir. Bu takdirde  $\|\omega\| = 1$  bulunur ve böylece  $\omega$  süreklidir. Herhangi bir  $T \in m_{p, q}$  alalım. 4.6.19.Önerme ve 4.6.20.Yardımcı Önerme ile herhangi  $V \in A_{p, q}$  ve  $f \in L^1(p, q)(G)$  için  $S(V(f)) = T(V(f))$  koşulunu sağlayan bir tek  $S \in \mathcal{B}$  vardır. Bu takdirde herhangi  $h \in C_c(G)$ ,  $V \in A_{p, q}$  ve  $f \in L^1(p, q)(G)$  için 4.6.12.Önerme ve 4.6.22.Yardımcı Önerme ile

$$\begin{aligned}S(h * V(f)) &= S(V(h * f)) = T(V(h * f)) = T(h * V(f)) \\ &= h * T(V(f)) = h * S(V(f))\end{aligned}$$

olup 4.6.20 ve 4.6.21.Yardımcı Önermeleriyle  $S \in \mathcal{M}$  olur. Sonuç olarak her  $h \in L(p, q)(G)$  ve her  $V \in A_{p, q}$  için  $S \in \mathcal{M}$  olduğundan

$$\omega(S)(V(h)) = \omega_S(V(h)) = S(V(h)) = T(V(h)) \quad (4.6.23.1)$$

bulunur. Şimdide kabul edelim ki bir  $h \in L(p, q)(G)$  için  $\omega_S(h) \neq T(h)$  olsun. Bu takdirde  $\omega_S(h) - T(h) \neq 0$  olup 4.6.17.Yardımcı Önerme ile en az bir  $g \in C_c(G)$  için  $g * (\omega_S(h) - T(h)) \neq 0$  elde edilir. Yine  $h \in L(p, q)(G) \subset L(p, q)(G)$  olduğundan  $\lim_n \|h_n - h\|_{p, q} = 0$  olacak şekilde  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(G)$  vardır. O zaman

$$\begin{aligned} \|g * (\omega_S(h) - T(h))\|_{p, q} &= \|g * (\omega_S - T)(h)\|_{p, q} = \|(\omega_S - T)(g * h)\|_{p, q} \\ &= \|h * (\omega_S - T)(g)\|_{p, q} = \lim_n \|h_n * (\omega_S - T)(g)\|_{p, q} \\ &= \lim_n \|(\omega_S - T)(h_n * g)\|_{p, q} = \lim_n \|(\omega_S - T)(W_{h_n}(g))\|_{p, q} \end{aligned}$$

bulunur.  $W_{h_n}(g) \in \wp$  ve  $\overline{\wp} = L(p, q)(G)$  olduğundan (4.6.22.1) eşitliğiyle  $\|g * (\omega_S(h) - T(h))\|_{p, q} = 0$  olur. Bu çelişki ile her  $h \in L(p, q)(G)$  için  $\omega(S) = \omega_S = T$  olup  $\omega$  örtendir. Şimdi de  $\omega$  dönüşümü için izometri özelliğini gösterelim. Herhangi  $T \in \mathcal{M}$  ve  $f \in L(p, q)(G)$  için supremum tanımına göre her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $\|\omega_T(f)\|_{p, q}^t < \|g * \omega_T(f)\|_{p, q} + \varepsilon$  olacak şekilde  $\|g\|_{p, q} \leq 1$  olan en az bir  $g \in L(p, q)(G)$  vardır. 4.6.22.Yardımcı Önerme ile

$$g * \omega_T(f) = g * T(f) = T(g * f) = T(W_f(g)) = (T \circ W_f)(g)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \|\omega_T(f)\|_{p, q}^t &< \|g * \omega_T(f)\|_{p, q} + \varepsilon \\ &\leq \|T\| \|W_f\| \|g\|_{p, q} + \varepsilon \\ &\leq \|T\| \|f\|_{p, q}^t + \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece  $\|\omega(T)\| = \|\omega_T\| \leq \|T\|$  bulunur. Tersine 4.6.19.Önerme ve 4.6.20.Yardımcı Önerme ile  $T \in \mathcal{M}$  için

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup \left\{ \|T(V(h))\|_{p,q} : V(h) \in \mathcal{D}, \|V(h)\|_{p,q} \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \|\omega_T(V(h))\|_{p,q} : V(h) \in \mathcal{D}, \|V(h)\|_{p,q} \leq 1 \right\} \\
&\leq \|\omega_T\|
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak  $\|\omega(T)\| = \|T\|$  ve  $\mathcal{M} \cong m_{p,q}$  bulunur.

## 5. TARTIŞMA

Bu çalışmanın birinci bölümünde Quek ve Yap [29] çalışmasında verilen süreklilik modülünün tanımı yardımıyla tanımlanan  $Lip(\alpha, p)$ ,  $lip(\alpha, p)$  Lipschitz uzaylarının Lipschitz-Lorentz uzaylarına genelleştirilmesidir. Ayrıca bu uzaylarında çarpanlarına ayırma, maksimal homojen Banach uzayı ve relatif tamlama kavramları da incelenmiştir. Yine Quek ve Yap [30] çalışmasında genel öteleme operatörü kavramıyla tanımlanan  $LA_*(\alpha, p; G)$ ,  $L\lambda_*(\alpha, p; G)$  Lipschitz-Zygmund sınıfları, bu çalışmada Lorentz uzaylarına genelleştirilmiş ve bu sınıflar üzerinde tanımlı çarpanlar uzayları incelenmiştir. Tanımlanan bu sınıflarda  $p = q$  alındığında [30] çalışmasıyla çakıştığından dolayı çalışmanın ikinci bölümü bir genelleştirmedir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde incelenen  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayları daha önce birçok defa incelenen  $L_{w_1}^r(G)$  ve  $L(p, q, w_2 d\mu)(G)$  uzaylarının kesişimi ile elde edilmiştir. Daha önce literatürde bahsedilmeyen bu kesişim uzaylarının temel özellikleri incelenmiştir. Yine bu uzaylardaki kompakt gömülme kavramı, Gürkanlı [14] çalışmasındaki metotlar ve tekniklerle dördüncü bölümde incelenmiştir.

İlk defa Mckennon ve Griffin tarafından tanımlanan  $L_p(G)$  grup cebirleri, bu çalışmanın son bölümünde Lorentz uzaylarına genelleştirilmiştir. Özel olarak bir Segal cebiri olan  $L^1(G) \cap L(p, q)(G)$  uzayları ve üzerindeki çarpanlar uzayı [21, 22, 23, 28] çalışmalarındaki özel bir metotla beşinci bölümde incelenmiştir. Daha öncede çarpanlar uzayı incelenen bu Segal cebirinin üzerindeki çarpanlar uzayı farklı bir metotla ilk kez bu çalışmada incelenmiştir. Yine son bölümde Lorentz uzaylarında yoğun ve Banach cebiri olan  $L(p, q)(G)$  grup cebirleri üzerindeki çarpanlar uzayı ile Lorentz uzayları üzerindeki öteleme operatörleriyle değişmeli operatörler uzayı arasındaki ilişki [21, 22, 23] çalışmalarındaki tekniklerle genelleştirilmiştir.

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın ilk iki bölümünde tanımlanan  $lip(\alpha, pq), Lip(\alpha, pq)$  Lipschitz-Lorentz uzayları ve  $L\Lambda_*(\alpha, pq; G), L\lambda_*(\alpha, pq; G)$  Lipschitz-Lorentz-Zygmund sınıfları ağırlıklı Lorentz uzayları içinde tanımlanıp, ağırlıklı Lipschitz-Lorentz uzayları ve ağırlıklı Lipschitz-Lorentz-Zygmund sınıfları ve bu uzayların temel özellikleri ve çarpanlar uzayları incelenebilir. Yine bu incelemeler sırasında bazı özelliklerin sağlanmasında ağırlık fonksiyonu  $w$  fonksiyonuna ek koşullar konması gerekli olabilir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde incelenen,  $B_{r,p,q}^{w_1,w_2}(G)$  uzayı, bu uzayların temel özellikleri ve bu uzaylardaki kompakt gömülme kavramı ağırlıklı Lebesgue uzayı yerine ağırlıklı Lorentz uzayı alınarak genelleştirilebilir. Yani  $L_{w_1}^r(G)$  yerine  $L(r, s, w_1 d\mu)(G)$  uzayı alınarak  $B_{p,q,w_2}^{r,s,w_1}(G)$  uzayları incelenebilir.

Son iki bölümde yapılan incelemeler ağırlıklı Lorentz uzayları içinde düşünülebilir. Ağırlık fonksiyonuna ek koşullar eklenerek aranacak izomorfizmalar cebirsel olarak izomorfizma, topolojik olarak homeomorfizma olarak bulunabilir. Yine beşinci bölümde incelenen  $L^1(G) \cap L(p, q)(G)$  uzayının bir genelleştirilmesi ve bir  $S_w$  uzayı olan  $L_w^1(G) \cap L(p, q)(G)$  uzayları içinde çarpanlar uzayı incelenebilir.

## 7. KAYNAKLAR

1. **Bloom, W.R. 1953.** *A Characterization of Lipschitz class on  $O$ -dimensional groups*, Proc. Amer. Math. Soc., V.53, 149-154.
2. **Blozinski, A.P. 1972a.** *On a convolution theorem for  $L(p,q)$  spaces*, Transection of the American Mathematical Society, V.164, 225-265.
3. **Blozinski, A.P. 1972b.** *Convolution of  $L(p,q)$  functions*, Proceeding of the Amererican Mathematical Society, V.32(1), 237-240.
4. **Cartan, H. 1967.** *Differential Calculus*, Hermann, France, s. 398.
5. **Chen, Y.K. , Lai, H.C. 1975.** *Multipliers of Lorentz spaces*, Hakkaido Mathematical Journal, V.4, 267-270.
6. **Dieudonne, J. 1976.** *Treatise on Analysis*, Vol.2, Academic Press, New York.
7. **Doran, R.S. ,Wichmann, J. 1979.** *Approximate Identities and Factorization in Banach Modules* , Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag,s.305.
8. **Duyar, C. ,Gürkanlı, A.T. 2003.** *Multipliers and Relative completion in weighted Lorentz spaces*,Acta Mathematica Scientia,V4, 467-476.
9. **Feichtinger, H.G. 1976.** *Multipliers of Banach spaces of Functions on Groups*, Mathematische Zeitschrift, V152, 47–58.
10. **Feichtinger, H.G. 1979.** *Konvolutoren von  $L^1(G)$  nach Lipschitz-Räumen*, Anz. d.österr.Akad.Wiss., V6, 148–153.
11. **Feichtinger, H.G. ,Gürkanlı, A.T. 1990.** *On a family of weighted convolution algebras*, IJMS, V.13(3), 517-525.
12. **Ferreya, E.V. 1990.** *Weighted Lorentz norm inequalities for integral operators*, Studia Mathematica, V.96, 125-134.
13. **Fischer,R.H., Gürkanlı,A.T., Liu,T.S.1996.** *On a family of weighted spaces*, Mathematica Slovaca, V.46(1), 71-82.
14. **Gürkanlı, A.T.** *Compact embeddings of the spaces  $A_{w,\omega}^p(\mathbb{R}^d)$* , Taiwanese Journal of Mathematics, Yayına kabul edildi.
15. **Hewitt, E. , Ross, K.A. 1963.** *Abstract Harmonic Analysis*,Vol.1, Springer Verlag, Berlin, s.650.
16. **Hewitt, E. , Ross, K.A. 1970.** *Abstract Harmonic Analysis*,Vol.2, Springer Verlag, Berlin, s.570.

17. **Hunt, R.A. 1966.** *On  $L(p,q)$  spaces*, Extrait de L'enseignement mathematique,T.XII, fasc.4, 249-275.
18. **Katznelson, Y., 1968.** *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover Pub. INC New York, s.264.
19. **Larsen, R., 1971.***An introduction to theory of multipliers*, Springer-Verlag New York, s.282.
20. **Larsen, R., 1973.** *Banach Algebras An introduction*, Marcel Dekker,INC. New York, s.345.
21. **McKennon, K., 1972.** *Multipliers of type  $(p,p)$* , PJM, V.43, 429-436.
22. **McKennon, K., 1973.** *Multipliers of type  $(p,p)$  and multipliers of group  $L^p$  – algebras*, Pacific Journal of Mathematics, V.45, 297-302.
23. **McKennon, K., Griffin, J. 1973.** *Multipliers and group  $L^p$  – algebras*, Pacific Journal of Mathematics, V.49, 365-370.
24. **McKennon, K., 1975.** *Corrections to [1],[2] and [3]*, PJM, V.61, 603-606.
25. **Moritoh, S., Niwa, M., Sobukawa, T., 2006.** *Interpolation theorem on Lorentz spaces over weighted Measure spaces*, Proceeding of the American Mathematical Society, V.134(8), 2329-2334.
26. **Murthy, G.N.K., Unni, K.R., 1973.** *Multipliers on weighted spaces*, Func. Analysis and its app.,Lecture notes in Math., Springer-Verlag, 273-291.
27. **O'Neil, R., 1963.** *Convolution operators and  $L(p,q)$  spaces*, DMJ,V.30, 129-142.
28. **Öztop, S. 2003.** *A note on multipliers of  $L^p(G,A)$* , Journal of Aust. Math. Soc., Vol.74, 25-34.
29. **Quek,T.S.,Yap,L.Y.H. 1979.** *Multipliers from  $L^1(G)$  to a Lipschitz space*, J.Math.Anal.Appl.,V.69,531-539.
30. **Quek,T.S.,Yap,L.Y.H. 1981.** *Multipliers from  $L^1(G)$  to a Lipschitz-Zygmund class*,J.Math.Anal.Appl.,V.81, 278-289.
31. **Reiter, H., 1968.** *Classical Harmonic Analysis and Locally compact groups*, Claderon Press,Oxford, s.200.
32. **Rieffel, M., 1967.** *Induced Banach representations of Banach Algebras and locally compact groups*,JFA,V.1, 443-491.

33. **Rudin, W., 1962.** *Fourier Analysis on groups*, Interscience pub. New York, s.285.
34. **Rudin, W., 1966.** *Real and Complex Analysis*, Mc Graw Hill, New York, s.452.
35. **Saeki, S., Thome, E.L., 1994.** *Lorentz spaces as  $L^1$ -modules and multipliers*, Hakkaido Mathematical Journal, V.23, 55-92.
36. **Wang, H.C., 1977.** *Homogeneous Banach Algebras*, Marcel Dekker INC. New York, s.204.
37. **Warner, C.R., 1966.** *Closed ideals in the group Algebra  $L^1(G) \cap L^2(G)$* , Transection of the American Mathematical Society, V.121, 408-423.
38. **Yap, L.Y.H., 1967.** *Convolution of Lebesgue classes on locally compact groups*, Ph.D.Thesis, University of Washington, Seattle, USA 83.
39. **Yap, L.Y.H., 1969.** *Some remarks on Convolution operators and  $L(p,q)$  spaces*, DMJ, V.36, 647-658.
40. **Yap, L.Y.H., 1972.** *On two classes of subalgebras of  $L^1(G)$* , Proc. Japan Acad. V.48, 315-319.
41. **Zygmund, A. 1968.** *Trigonometric series*, Vol.I, Cambridge Univ. Press

## 8. ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara ve Amasya'da tamamladı. 1996 yılında Ortadoğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünde yüksek öğrenimine başladı ve 1999 yılında Ortadoğu Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Çift Anadal Programına katıldı. 2001 yılında her iki fakülteden de mezun oldu. 2001–2002 Eğitim-Öğretim yılında Merzifon Anadolu Lisesinde Matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2002 yılı yaz döneminde Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek lisans öğrenimine başladı. 2003 yılı yaz döneminde Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 2004 yılında yüksek lisansını bitirip, aynı yıl doktora öğrenimine başladı. Halen aynı üniversitede Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.