

**T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GALARKİN SONLU ELEMAN
METODUYLA KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ**

SEMİN GÜLEÇ

Haziran 2007

**T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GALARKİN SONLU ELEMAN
METODUYLA KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ**

SEMİN GÜLEÇ

Yüksek Lisans Tezi

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Abdülkadir DOĞAN**

Haziran 2007

Yard. Doç. Dr. Abdulkadir DOĞAN danışmanlığında **Semin GÜLEÇ** tarafından hazırlanan “**Galerkin Sonlu Eleman Metoduyla Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri** ” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yard. Doç. Dr. İ. Hakkı DURU, Yüzüncü Yıl Üniversitesi

(Ünvan, Adı ve Soyadı) (Üniversite)

Üye : Yard. Doç. Dr. Abdulkadir DOĞAN, Niğde Üniversitesi

(Ünvan, Adı ve Soyadı) (Üniversite)

Üye : Yard. Doç. Dr. Hasan KAYA, Erciyes Üniversitesi

(Ünvan, Adı ve Soyadı) (Üniversite)

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/....../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun/....../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../200..

Prof. Dr. Meysun İBRAHİM

Enstitü Müdürü

ÖZET

GALERKİN SONLU ELEMAN METODUYLA KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

GÜLEÇ, Semin

Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Abdülkadir DOĞAN

Haziran 2007, 63 sayfa

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde galerkin sonlu elemanlar metodu hakkında bilgi verildi. Lineer olmayan eşit genişlik dalga (EW) denklemi, Burger denklemi, düzenli uzun dalga denklemi (RLW) hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde, lineer olmayan eşit genişlik denklemi lineer sonlu elemanlar kullanarak Galerkin metoduyla çözüldü.

Üçüncü bölümde, Burger denkleminin sayısal çözümü için bir Galerkin sonlu eleman metodu sunuldu.

Dördüncü bölümde, düzenli uzun dalga denklemi, lineer sonlu yer elemanları kullanılarak Galerkin metodu ile çözüldü.

Beşinci bölümde, sonuç ve tartışma kısmı belirtildi.

Anahtar Kelimeler : RLW denklemi, Sonlu eleman methodları, Galerkin, Burger denklemi, Eşit genişlik denklemi, Undular bore

SUMMARY

NUMERICAL SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS USING GALERKIN FINITE ELEMENT METHODS

GÜLEÇ, Semin

Niğde University

Graduate School of Naturel Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor. Yrd. Doç. Dr. Abdülkadir DOĞAN

June 2007, 63 pages

This master thesis consists of four chapters.

In the first chapter, a short introduction about finite element methods (FEM) was given. By giving the definition and properties of spline functions, some of the previous numerical methods about equal width wave equation, Non-linear Burger equation, the regularised long wave (RLW) equation are mentioned.

In the second chapter, the non-linear equal width equation was solved by Galerkin's method using linear finite elements.

In the third chapter, A Galerkin finite element method was presented for numerical solution of Burgers' equation.

In the fourth chapter, the regularised long wave equation was solved by Galerkin's method using linear space finite elements.

In the fifth chapter, conclusion and discussion were reported.

Keywords: RLW equation, Finite element methods, Galerkin, Burgers' equation, equal width equation, Undular bore

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma esnasında yardımlarını gördüğüm danışman hocam Yrd. Do. Dr. Abdulkadir DOĞAN' a, yazım aşamasında yardımcı olan Ebru ÇELİK'e, manevi desteğini gördüğüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
SUMMARY	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
BÖLÜM I. GİRİŞ	1
1.1. Sonlu Elemanlar Metodu	1
1.2. Eşit Genişlik Dalga Denklemi (EW).....	8
1.3. Burger Denklemi.....	10
1.4 Düzenli Uzun Dalga Denklemi (RLW).....	11
BÖLÜM II. EŞİT GENİŞLİK DALGA DENKLEMİNE GALERKİN METODUNUN UYGULANMASI.....	13
2.1. Sonlu Eleman Çözümü	13
2.2.Solitary Dalganın Hareketi.....	17
2.3.Undular Bore Gelişimi.....	21
BÖLÜM III. BURGER DENKLEMİNE BİR GALERKİN SONLU ELEMAN YAKLAŞIMI.....	25
3.1. Sonlu Eleman Çözümü	25
3.2. Sayısal Deneyler	30
BÖLÜM IV. GALERKİN METODU İÇİNDE LİNEER SONLU ELEMANLARI KULLANARAK DÜZENLİ UZUN DALGA DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ.....	43
4.1. Sonlu Eleman Çözümü.....	43
4.2. Örnek.....	48
BÖLÜM V SONUÇ VE TARTIŞMA	57
KAYNAKLAR	59

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $t = 0$ ve $t = 80$ de solitary dalga grafikleri.....	20
Şekil 2.2. $t = 80$ zamanındaki solitary dalga için hata =kesin- nümerikçözüm.....	20
Şekil 2.3. Şekil undulation $t = 400$ zamanında, $U_0 = 0.1, d = 5$	23
Şekil 3.1. $\Delta t = 0.1, h = 0.02, \Delta t = 0.1$	35
Şekil 3.2. $v = 0.001, h = 0.005, \Delta t = 0.025$	37
Şekil 3.3. $v = 0.01, h = 1/36, \Delta t = 0.05$	40
Şekil 4.1. $t = 0$ ve 20 de solitary dalga grafikleri.....	49
Şekil 4.2. $t = 20$ zamanındaki solitary dalga için hata = tam- nümerik çözüm.....	50
Şekil 4.3. $t = 0$ dan $t = 400$ e kadar olan zamanda solitary dalgaların etkileşim grafikleri.....	56

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Solitary dalga enliği 3.0, $x_0=15.0$, $0 \leq x_0 \leq 80$, $t = 0.0$, $I_1 = 12.0000$, $I_2 = 28.8000$, $I_3 = 57.6000 : t = 40$ zamanında simülasyon sonuçları; çeşitli konum zaman adım birleşimleri.....	18
Çizelge 2.2. Solitary dalga enliği=0,3, $x_0 = 10.0$, $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $0 \leq x \leq 30$	19
Çizelge 2.3. Solitary dalga enliği=0.09, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.05$, $0 \leq x \leq 30$	20
Çizelge 2.4. Solitary dalga enliği=0.03, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.05$, $0 \leq x \leq 30$	21
Çizelge 2.5. Undular bore için sonuçlar $U_o = 0.1$, $d = 5$, $u = 0.1666667$, $-20 \leq x \leq 50$	22
Çizelge 2.6. Undular bore için sonuçlar $U_o = 0.1$, $d = 2$, $u = 0.1666667$, $-20 \leq x \leq 50$	24
Çizelge 3.1. $v = 1$ için analitik ve nümerik sonuçların karşılaştırılması.....	32
Çizelge 3.2. $t = 0.5$ zamanında analitik ve nümerik sonuçların karşılaştırılması.....	33
Çizelge 3.3. $t = 0.5$ zamanında analitik ve nümerik sonuçların karşılaştırılması.....	34
Çizelge 3.4. Hata Normları.....	40
Çizelge 3.5. $t = 0.5$ zamanında analitik ve nümerik sonuçların karşılaştırılması.....	41
Çizelge 4.1. Enlik 0.3, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ ile solitary dalga ($I_1 = 3.9799497$, $I_2 = 0.81046249$ ve $I_3 = 2.579007$).....	49
Çizelge 4.2. $t = 20$ zamanında yükseklik 0.3, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ ile solitary dalga.....	51
Çizelge 4.3. Enlik 0.09, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ ile solitary dalga.....	52

Çizelge 4.4. $t = 20$ zamanında enlik 0.09 , $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ ile solitary dalga.....	52
Çizelge 4.5. $t = 20$ zamanında, 0.09 enliğindeki solitary dalga için Hata normları, $-40 \leq x \leq 60$	53
Çizelge 4.6. $t = 20$ zamanında, 0.09 enliğindeki solitary dalga için hata normları, $-80 \leq x \leq 120$	54
Çizelge 4.7. Solitary dalga için enlik $= 0.03$, $h = 0.25$, $\Delta t = 0.2$, $-80 \leq x \leq 120$	54
Çizelge 4.8. $t = 20$ zamanında, 0.03 enliğindeki solitary dalga için hata normları, $-80 \leq x \leq 120$	54
Çizelge 4.9. Enlikleri 0.3 ve 0.6 olan iki solitary dalganın etkileşimi için sabitler, $h = 0.12$, $\Delta t = 0.1$	55

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Sonlu Eleman Metodları

Sonlu eleman [1,2,3,4,5] terimi ilk olarak 1960 da Clough [6] tarafından kullanılmıştır. Günümüzde matematiğin her alanında ortaya çıkan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerine yaklaşımda kullanılmaktadır [7].

Sonlu eleman metodu roketteki yapısal mühendislik uygulamalarının, denizcilik inşaatçılığının ve nükleer güç endüstrisinin tüm çeşitlerinde yaygın olarak ilk nümerik metodun seçimi olarak kabul edilmektedir. Son zamanlarda akışkanlar mekaniğine uygulamaları, akışkan yapı yanında gelgit hareketi çalışması, ısı ve kimyasal taşınma ve difüzyon için geliştiriliyor.

1960 yılları sırasında sonlu eleman metodu üzerindeki araştırma dünyanın çeşitli kısımlarında yaygın olarak takip edildi. Özellikle, aşağıdaki konular üzerinde araştırmalar yapıldı.

a) Metot, ağırlıklı residual metodunun özel bir durumu olarak yeniden formüle edildi.

b) Elemanların geniş bir çeşitliliğini içeren grafik elemanları olarak geliştirildi.

c) Metot kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için genel metot olarak tanındı. Dinamik problemlere, lineer olmayan problemlere uygulanışı bolca toprak mekaniği, akışkan dinamiği, ısı dinamiği örneği gibi başka alanlar içinde genişletildi. Şimdiye kadar çözümü zor olarak düşünülen mühendislik problemlerine çözümler bulundu [8].

Bir diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımında, denklemdaki türevler bölgenin farklı ağ noktalarında çözümün değerlerini içeren fark oranlarıyla yer değiştirir. Ağ noktalarındaki çözümün değerleri için sınır şartları uygulandıktan sonra, sonuç fark denklemleri çözülür. Kavramda sonlu fark metodu basit olmasına rağmen birkaç dezavantajı vardır. En dikkat çeken, yaklaşım çözümlerinin türevlerinin yanlışlığıdır,

düzgün olmayan sınırlarda sınır şartlarının uygulanmasındaki zorluklar, kompleks bölgelerdeki geometriksel gösterimin doğruluğundaki zorluklar ve düzgün olmayan ve dikdörtgen olmayan ağlara uygulanması konusunda yetersizdir.

Sonlu eleman metodu sonlu fark metodunun zorlandığı bu konuların üstesinden gelir. Çünkü temeli integral formüllerine dayanır. Problemin geometrik bölgesi sonlu elemanların bir toplamı olarak gösterilir ve dikdörtgen olmayan bölgeler de bölünebilir [7].

Modern sonlu eleman integral metotları başlıca iki farklı işlemle bulunur: fark formülleri ve ağırlıklı residual metodu [9].

Fark modelleri genellikle bir fonksiyon olarak bilinen özel integral ilişkisinin maksimum, minimum değerine yol açan nodal parametreleri bulmayı içerir. Sınır koşullarını sağlayan bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerine yol açan çözümü Euler denklemi olarak bilinen birleştirilmiş diferansiyel denklemlerin çözümüne denk olarak iyi bilinir. Fonksiyonel bilinirse Euler denklemini bulmak nispeten kolaydır.

Birçok mühendislik ve fizik problemleri başlangıç olarak bir diferansiyel denkleme bağlı olarak tanımlanır. Verilen Euler denkleminin fonksiyonelinin araştırılması için bir integral formülüne ihtiyaç duyulur. Ne yazık ki bu zordur ve bazen mümkün değildir. Bundan dolayı artan bir orijinal diferansiyel denklemden direkt olarak bir integral formülü meydana getiren çeşitli residual tekniklerin önemi artıyor.

Ağırlıklı residual teknik tarafından sonlu eleman modelinin ortaya çıkması nispeten son gelişmedir. Bununla birlikte bu metot diferansiyel denklemlerin çözümünde çok önem kazanmıştır.

Bazı operatör denklemini sağlayan bilinmeyen u fonksiyonlarının bulunmasıyla başlayalım:

$$Au = f \quad \Omega = (a, b) \quad (1.1)$$

Burada f bir bilinen fonksiyon, Ω ilgili tanım bölgesidir. A derecesi $2m$ olan gerçekte bir diferansiyel operatördür (m pozitiftir). Diferansiyel operatör A , u da lineerdir ve türevleri A da lineer görünür. Tersisi olduğunda A lineer değildir.

Sınır şartları $2m-1$ e kadar türevleri içerebilir ve her bir sınır noktasında m tane sınır şartı vardır. Eğer sınır şartları m den daha küçük derecedeki türevleri ve u yu içerirse o zaman onlara essential adı verilir.

Ağırlıklı residual metodunda u çözümü interpolasyon fonksiyonları ϕ_j ler ile yaklaştırılır:

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j \quad (1.2)$$

şeklinde, burada bilinmeyen c_j parametreleri belirlenecektir.

ϕ_j yaklaşım fonksiyonlarının en iyi seçimi polinomlardır çünkü polinomları hesaplamak kolaydır. Uygun bir polinom ile keyfi kapalı olarak herhangi sürekli fonksiyonu ifade eden polinomlar fikir noktasından çekicidir. ϕ_j yaklaşımının seçiminin aşağıdaki koşulları sağlaması istenir.

(a) Geometrik invaryansının olması

(b) Daha aşağı tüm terimleri kapsayan tüm polinomları içermesi

(c) Çözümü gösterebilmek için parametrelere ve yeterli sürekliliğe sahip olması.

(1.2) yaklaşık çözümünü (1.1) operatör denkleminde yerine koyalım. Bu operatör bir residual R_N yi tanımlar:

$$R_N = Au - f \quad (1.3)$$

burada R_N , ϕ_j fonksiyonlarından seçilen bağımsız bir fonksiyonudur ve c_j ler bilinmeyen parametrelerdir. Ağırlıklı residual metodunu kullanarak bilinmeyen c_j parametrelerini belirlemek için, residual çarpımının ve bazı ψ_j ağırlık fonksiyonlarının Ω üzerinden integrali alınır, sıfır olur:

$$\int_{\Omega} \psi_j R_N dx = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (1.4)$$

burada ağırlık fonksiyonları genelde yaklaşım fonksiyonları ϕ_j ile aynı değildir. (1.4) denklemini

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \psi_j A \phi_j dx \right) c_j = \int_{\Omega} \psi_j f dx$$

veya

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = f_j \quad (1.5)$$

şeklinde basitleştirilebilir. Burada:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A \phi_j dx$$

ve

$$f_i = \int_{\Omega} \psi_i f dx$$

şeklindedir.

Ağırlık fonksiyonlarının farklı seçimleri için (1.4) ağırlıklı residual tekniğinin farklı türlerini buluruz.

$\psi_i = \phi_i$ için ağırlıklı residual metoduna Galerkin metodu denir ve eğer $\psi_i \neq \phi_i$ ise ağırlıklı residual metoduna Petrov-Galerkin metodu adı verilir.

En küçük kareler metodunu bulmak için (1.4) residualın karesinin integralini minimize ederek c_j parametrelerini belirleriz:

$$\frac{\partial}{\partial c_j} \int R_N^2 dx = 0$$

veya

$$\int \frac{\partial R_N}{\partial c_j} R_N dx = 0. \quad (1.6)$$

(1.6) denklemini basitleştirilmiş olarak

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} A\phi_i A\phi_j dx \right) c_j = \int_{\Omega} (A\phi_i) f dx$$

veya

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = f_i \quad (1.7)$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$A_{ij} = \int_{\Omega} (A\phi_i)(A\phi_j) dx$$

ve

$$f_i = \int_{\Omega} (A\phi_i) f dx$$

dır.

Sınır değer probleminin çözümü için başka bir popüler metot collocation metodudur. Bu yaklaşımın arkasındaki fikir Ω bölgesindeki N seçilmiş noktalarda (1.3) residual denklemini sıfır yapmaktır :

$$R_N(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (1.8)$$

veya

$$\sum_{j=1}^N c_j A\phi_j(x_i) = f(x_i) \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.9)$$

(1.9) denklemleri nümerik olarak çözülebilen N bilinmeyen parametreleri c_j deki N denklemlerinin bir sistemini verir.

Her iki dönüşüm ve ağırlıklı residual formülü için sonlu eleman metodunun yakınsaklığını kurmasının ifadesi için:[9]

a) (gerekli şart) eleman interpolasyon fonksiyonları eleman büyüklüğü azalırken integral ifadesini tanımlamadaki mertebesine onun türevleri ya da bağımlı değişkenin herhangi sabit değerinin modeline yeterli olmalıdır.

b) (yeterli şart) eleman biçim fonksiyonları iki yüzey arasındaki ortak yüzeyi bağımlı değişken ve onun türevleri integral ifadesindeki tanımlamadaki bir mertebeye daha az sürekli olabilmesi için seçilmelidir.

Herhangi bir problemin sonlu eleman analizinde kullanılan terimler aşağıda sıralanır[7]:

a) Sonlu eleman discretisationu. İlk olarak, sürekli bölge veya doğru parçalar adı verilen alt bölgelerinin bir n sonlu elemanın bir toplamı olarak gösterilir. Buna parçalarla bölgenin discretisationu denir. Bu parçaların her birine bir eleman adı verilir. Elemanın birden fazla türünde bir ağı içinde alanı discretise edebilmek alanın şekline bağlıdır.

b) Hata tahmini. Sonlu eleman çözümünde üç çeşit hata vardır:

(i) bölgenin yaklaşımından dolayı hatalar

(ii) çözümün yaklaşımından dolayı hatalar

(iii) nümerik hesaptan dolayı hatalar.

c) Nodalların yer ve sayısı. Bir elemandaki nodalların yer ve sayısı

(i) elemanın geometrisine

(ii) yaklaşımın derecesine (örneğin; polinomların derecesi)

(iii) denklemin biçimine bağlıdır.

d) Elemanların toplamı. Elemanların toplamı genel biçimde, sınırda iç elemanlardaki sürekli çözümdeki fikre dayanır.

e) Doğruluk ve yakınsaklık. Sonlu eleman çözümlerinin doğruluğu ve yakınsaklığı kullanılan elemanlarına ve çözülmüş diferansiyel denklemlere bağlıdır. "Doğruluk" kelimesi kesin çözüm ile sonlu eleman çözümü arasındaki farkı anlatır, "yakınsaklık" kelimesi ağdaki elemanların sayısı artarken doğruluğu anlatır.

f) Zamana bağlı problemler. Zamana bağlı problemler için aşağıda izlenecek iki adım vardır:

i) Kısmi diferansiyel denklemler zamanda adi diferansiyel denklemlerin bir kümesini bulmak için sonlu eleman metodu ile yaklaştırılır.

ii) Cebirsel denklemlerin bulunması için sonlu fark metotları ile zamandaki adi diferansiyel denklemler yaklaşık olarak çözülür. Bu sonra nodal değerler içinde çözülür.

Sonlu eleman metodu kullanılarak bir diferansiyel denklemin çözümü için temel adımlar aşağıdaki gibidir [7]:

a) Sonlu elemanlar içinde verilen bölge bölünür. Nodal sayıları ve (alt bölgelerin noktasındaki fonksiyon hesaplanır) elemanlar. Problemler için ihtiyaç duyulan geometrik özellikler oluşturulur (koordinatlar, alan profili ve benzeri).

b) (1.10) denklemini kullanarak verilen diferansiyel denklem inşa edilerek eleman denklemleri hesaplanır.

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \psi_i \quad (1.10)$$

burada ψ_i seçilen interpolasyon fonksiyonlardır. Eğer seçilen ağırlıklı residual formülünde (1.10) denklemini yerine yazılırsa,

$$\{K^e\}\{u^e\} = \{F^e\} \quad (1.11)$$

formülünü buluruz.

c) Tüm problemde denklemin bulunması için eleman yardımları bir araya getirilir.

d) Problemin sınır şartları uygulanır.

e) Tüm denklem sistemi çözülür.

f) Çözüm hesaplanır ve sonuçlar Çizelge veya grafik şeklinde gösterilir.

1.2. Eşit Genişlik Dalga Denklemi (EW)

Lineer olmayan eşit genişlik denklemi (EW), iyon akustik plazmalar, sıg (yüzeysel) su gibi önemli fiziksel olayların içerisinde sıklıkla karşı karşıya kalınan lineer olmayan dağınık dalgaların hareketini gösterir [10]. Bu yüzden literatürde EW denkleminin çözümü için birkaç analitik ve sayısal çalışmalar mevcuttur.

Lineer olmayan EW denklemi aşağıdaki formdadır;

$$U_t + UU_x - \mu U_{xx} = 0 \quad (1.12)$$

Burada alt indisler x ve t alınacak türevleri ve μ 'da pozitif değişkeni ifade eder. Bu denklem Morrison tarafından [11] lineer olmayan dağınık dalgalar için bir model olarak ortaya çıkarıldı. O, iyi bilinen düzenli uzun dalga denklemine (RLW) bir alternatiflik gösterir. Bazı EW denkleminin analitik çözümleri bilinir ki; öyle sayısal metotlar EW denklemi çalışmak için kullanışlı birer araçtır, $x \rightarrow \pm \infty$, $U \rightarrow 0$ sınır koşullarıyla Morrison [11] EW denklemi için tek bir dalga çözümünü aşağıdaki formda sunar;

$$U(x,t) = U(x,t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - vt]) \quad (1.13)$$

Burada,

$$k^2 = \frac{1}{4\mu}, \quad v = c \quad (1.14)$$

dır ve k ise $3c$ enliğine sahip olan dalga nabzının enliğini ölçer.

EW denkleminin benzer olan RLW denkleminin sayısal çözümleri için literatürde bir çok çalışma vardır. Gardner ve Gardner [12] şekil fonksiyonları elemanları gibi kübik spline kullanarak Galerkin metoduna dayanır ve RLW denkleminin sonlu elemanlı çözümünü kurarlar. Gardner [13] üçlü B-spline sonlu elemanlarıyla bir Galerkin metodu kullanarak RLW denklemini çözdü. Diğer Gardner [14] lineer konum-zaman sonlu elemanlarıyla en küçük kareler metodunu kullanarak RLW denklemini çözdü. Onlar bu metodların özelliklerini ve avantajlarını tartıştılar ve bunları ilk çalışmalarla elde edilen sayısal algoritmalarla solitary dalga modelindeki doğruluğuyla karşılaştırdılar. Gardner [15] RLW denklemi için bir Petrov-Galerkin B-splayn sonlu eleman metodunu kurdu. Dağ [16], elemanlar üzeri kullanılan şekil ve ağırlık fonksiyonlarının her ikisi gibi olan üçlü B-splaynlarla Petrov-Galerkin metoduna öncülük eden en küçük kareler sonlu eleman tekniğini uyguladı. Doğan, [17] 2. dereceden B-splayn sonlu elemanları kullanarak Petrov-Galerkin metoduyla RLW denklemini çözdü.

RLW denklemi hakkında yoğun çalışmalar olmasına rağmen, EW denklemi için diğerlerine nispeten daha az çalışma yapıldı. Gardner ve Gardner [18] kübik B-splayn sonlu elemanlar metodu kullanarak Galerkin metoduna temel teşkil eden EW dalga denklemini çözdüler. Onlar gösterdiler ki, B-splayn sonlu elemanlarıyla Galerkin metodu tek bir dalganın genişlik, konum ve hızını sadıkça temsil edebilir. Diğer bir çalışmada Gardner [19] 2. dereceden B-splayn sonlu elemanları kullanarak EW denkleminin bir Petrov-Galerkin çözümü geliştirdiler. Onlar algoritmanın özelliklerine belirlemek için solitary dalganın hareketi üzerine çalıştılar ve undular bore gelişimin

incelediler. Zaki, [20] lineer konum-zaman sonlu elemanlarıyla en küçük kareler tekniğini kullanarak EW denklemini çözdü.

Son makalede Doğan [21], RLW denklemine doğru ve etkili sayısal çözümler bulunan lineer yer sonlu elemanları kullanarak RLW denklemine Galerkin metodunu kurdu. O gösterir ki, lineer konum sonlu elemanlar önemli bir şekilde çözümün doğruluğunu geliştirir. Bundan dolayı bu makalede EW denkleminin çözümü için aynı metodu uygulayacağız ve tek bir dalganın göçünü çalışacağız.

1.3. Burger Denklemi

Burger denkleminin çözümü, hava akımı [22] modelinde ve sıg bir sıvı [23] içinde şok bir dalga yayılımından geçen akışın yaklaşım teorisinde ortaya çıktığından dolayı büyük bir önemi vardır. Burger Denklemi ve Navier – Stokes denklemi, onların lineer olmayan terimlerinin türünde ve küçük katsayılarla yüksek mertebeli türevlerinin olaylarında her ikisinde birden benzerdirler. Burger Denklemi keyfi seçilen başlangıç koşulları [24] için analitik olarak çözülebilir birkaç lineer olmayan (non-linear) diferansiyel denklemden birisidir. Bununla birlikte Burger denkleminin çözümünde, dik dalga cephesine uyan yapışkanlık katsayısının yeni geniş Reynold sayılarının küçük değerleri için, zorluklar görülür. Birçok durumda, sayısal çözümler, eğer elemanların büyüklüğü gerçeğe uymayacak şekilde küçük değilse, fiziksel olmayan geniş salınımlar içeren sonuçları üretmeye benzerler.

Birçok yazar, Burger denklemi için sayısal çözümlerin çeşitli türlerini ileri sürdüler. Varoğlu ve Finn [25] izoparametrik konum-zaman sonlu elemanları kullanarak dahil edilen karakteristiklerin metodu olan avantaj sağlayan bir ağırlık residual formülünü geliştirdiler. Coldwell [26] , önceki adımlardan bilgileri kullanarak her safhada elemanların boyutlarını değiştirerek Burger denklemini çözmek için bir sonlu eleman metodu kullandı. Herbit [27] parçalı lineer deneme fonksiyonu ve parçalı Hermite kübik test fonksiyonu kullanarak bir zamana bağlı ızgara üzerinde bir Petrov-Galerkin metodu kullandı. Christie [28] lineer ve 2. deceden Lagrange elemanlarıyla birlikte lineer olmayan terimleri için bir çarpım yaklaşımı bir Galerkin yaklaşımı kullandı. Coldwell [29] , kübik splayn interpolasyon (ara değer) fonksiyonunu ilk iki türevleri ve değişken değerleri için üç çift denklem sistemini ortaya çıkarmak için kullandı. Evans ve

Abdullah [30] bir grup sonlu fark metodunu kullandılar. Kakuda ve Tosaka [31] , Burger denkleminin sayısal çözümleri için genelleştirilmiş sınır eleman metodu sundular. Onların metodu, denklemin lineerleştirilmiş diferansiyel operatörü için temel çözümü kullanarak her alt alanda elde edilen sınır integral denkleminin bir kümesinde temelini oluşturdu. Mittal ve Singhal [32], Runge-Kutta Chebyshev metoduyla çözülmüş olan katı bayağı diferansiyel denklem sistemini bulmak için sonlu lineer olmayan üretme tekniğini kullandılar. Ali [33], sonlu elemanlar üzerine kübik B-Splaynların birlikteliğini kullanarak sayısal bir şekilde lineer olmayan Burger denklemini çözdü. Nguyen ve Reynon [34] lineer elemanlarla bir en küçük kareler yaklaşımını geliştirdiler.

Doğan [35], son zamanlarda RLW sayısal denkleminin sayısal çözümü için lineer sonlu elemanlarla Galerkin metodunu kullandı ve gösterdi ki bu metot sayısal sonuçların doğruluğunu önemli bir şekilde geliştirdi. Bu nedenle bu çalışmanın başlıca motivasyonu Burger denkleminin sayısal çözümü için aynı metodu uygulamaktır. Sayısal deneyler yerine getirilir ve bulunan sonuçlar daha önceki çalışmalarla mümkün olduğu yerde karşılaştırılır.

1.4.Düzenli Uzun Dalga Denklemi (RLW)

Düzenli uzun dalga denklemi

$$U_t + U_x + UU_x - U_{xxt} = 0$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklem

$$U_t + U_x + UU_x + U_{xxx} = 0$$

biçimindeki daha çok bilinen Korteweg de Vries (KDV) denkleminin lineer olmayan dispersive dalgalar için farklı bir açıklamasıdır. Düzenli uzun dalga denklemi ilk olarak Peregrine [36] tarafından ortaya atılmıştır. Önemli fiziksel doğa olaylarının büyük bir kısmı onun tanımından dolayı lineer olmayan dispersive dalgaların [36,37] çalışılmasında önemli bir rol oynar. Örneğin, sıç su dalgaları ve iyon akustik plazma

dalgaları. Dalga kırılması, su dalgalarıyla gözleendiği için herhangi bir dalganın yüksekliği 0.28'i aşarsa, deneysel kanıt, bu tanımın kırıldığını gösterir [36].

Düzenli uzun dalga denkleminin lineer olmayan doğallığından dolayı, literatürde bir çok kesin çözüm mevcut değildir. Başlıca çalışmalar problemlerin, nümerik çözümlerini göz önünde tutarlar. Eilbeck ve McGuire [37] düzenli uzun dalga denkleminin nümerik çözümleri için bazı metotlar ileri sürmüşlerdir . Bona [38] bir kök alma denkleminin çözümü için nümerik metotların bir sayısını göstermiştir. Jane [39] gelişim denkleminin çözümü için birkaç nümerik metodu göstermiştir. Düzenli uzun dalga denkleminin çözümü için collocation metodu ve kübik spline metodunun her ikisi de uygulanmıştır. Gardner ve Gardner [40], biçim fonksiyon elemanı gibi kübik splineler ile Galerkin metoduna dayandırılan sonlu eleman metodunu kullanarak düzenli uzun dalga denklemini çözmüştür ve solitary dalga problemlerinin etkileşimlerini, yer değiştirmelerini uyguladıktan sonra bu metodun doğru ve yeterli bir metot olduğunu göstermiştir.

Düzenli uzun dalga denklemi, Galerkin metodu [41,42] içinde ikinci dereceden B-spline sonlu elemanlarına dayandırılan sonlu eleman metodu kullanılarak da çözülmüştür [42,43].

Nguyen ve Reynen en küçük kareler tekniğini kullanarak, metotların advection-difüzyon problemlerindeki sahte salınımları yok ettiğini göstermiştir [42,43].Çalışmalarda nümerik çözümü kurmak için lineer sonlu elemanlarla Galerkin metodu kullanılmıştır [42,43]. Düzenli uzun dalga denkleminin bir nümerik çözümünü kurmak için lineer yer zaman sonlu elemanlarını kullanarak en küçük kareler metodu kullanılmıştır [44]. İkinci dereceden B-spline uzaysal sonlu elemanlarını kullanarak eşit genişlikli denklem için bir Petrov-Galerkin çözümü gösterilmiştir [45]. Gardner bu denklemi Petrov-Galerkin B-spline sonlu eleman metodu ile çözmüştür [46]. Yakın bir zaman önce, Doğan [47] ikinci dereceden B-spline sonlu elemanlarını kullanarak Petrov-Galerkin yöntemi ile çözmüştür.

BÖLÜM II

EŞİT GENİŞLİK DALGA DENKLEMİNE GALERKİN METODUNUN UYGULANMASI

2.1.Sonlu Eleman Çözümü

Lineer olmayan EW denklemi aşağıdaki formdadır;

$$U_t + UU_x - \mu U_{xx} = 0 \quad (2.1)$$

Burada alt indisler x ve t alınacak türevleri ve μ 'da pozitif değişkeni ifade eder.

EW denklemini (1) Galerkin metoduna uyguladığımızda fonksiyonu, W_j 'nin nodal değerlere göre ağırlık fonksiyonu olduğu [48]

$$\int_0^L [U_t + UU_x - \mu U_{xx}] W_j dx = 0$$
$$(2.2) 0 \leq \xi \leq 1$$

(2.2)' e minimize ederiz.

Sonlu elemanların değişmeyen uzaysal dizilişi $0 = x_0 < x_1 \dots < x_N = L$ olarak kurulur.

Büyüküğün tipik sonlu bir elemanı $h = (x_{m+1} - x_m)$, ξ yerel koordinatlarıyla dönüşüm yapılır

Burada;

$x = x_m + \xi h$, $0 \leq \xi \leq 1$ İntegral (2.2)'e uygulanır ve

İntegral basitleştirilerek

$$\int_0^1 \left[U_t + \frac{1}{h} \hat{U} U_\xi + \frac{\epsilon}{h} \hat{U} U_\eta - \frac{\mu}{h^2} U_{\xi\xi t} \right] W_j d\xi = 0 \quad (2.3)$$

elde edilir.

Burada \tilde{U} bir eleman üstü sabit olarak alınır.

Bu;

$$\int_0^1 [U_t + vU_\xi - bU_{\xi\xi t}] W_j d\xi = 0 \quad (2.4)$$

ya öncülük eder, burada da;

$$b = \frac{\mu}{h^2}$$

ve

$$v = \frac{\hat{U}}{h}$$

her eleman için yerel bir sabit olarak alınır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında U 'nun değişimi

$$U^e = \sum_{j=1}^2 N_j u_j \quad (2.5)$$

olarak verilir ki burada N_1 ve N_2 lineer uzaysal temel fonksiyonlarıdır ve u_1, u_2 de nodal parametrelerdir. ξ yerel koordinat sistemiyle temel fonksiyonları [48]

$$N_1 = 1 - \xi$$

$$N_2 = \xi$$

ifadesine sahip olurlar.

Galerkin metodu için W_j ağırlık fonksiyonunu N_j temel fonksiyonlarıyla

$$\int_0^1 [U_t + vU_\xi + bU_{\xi\xi t}] N_j d\xi = 0 \quad (2.6)$$

vererek tanımlarız.

Kısmi integralini alırsak bu

$$\int_0^1 [(U_t + vU_\xi) N_j + bU_{\xi t} N_j'] d\xi = 0 \quad (2.7)$$

öncülük eder.

Şimdi (2.5) denklemini kullanarak U 'yu yerine koyarsak elemanın yardımı

$$\sum_{k=1}^2 \int_0^1 \left[\left(N_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + v N_k' u_k \right) N_j + b N_k' N_j' \frac{\partial u_k}{\partial t} \right] d\xi = 0 \quad (2.8)$$

formunda elde edilir.

Burada ilk baştakiler

$$[A^e + bD^e] \frac{\partial u^e}{\partial t} + C^e u^e = 0 \quad (2.9)$$

matris formunda olan ξ 'ye göre türevi ifade eder. Buradaki

$$u^e = (u_1, u_2)^T$$

konuyla ilgili olan nodal parametrelerdir. Element matrisleri;

$$A_{jk}^e = \int_0^1 N_j N_k d\xi = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{jk}^e = v \int_0^1 N_j N_k' d\xi = \frac{1}{6} v \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$D_{jk}^e = \int_0^1 N_j' N_k' d\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir ve v 'de

$$v = \frac{\mu_1}{h}$$

elemanlar üzerindeki sabittir. Bütün elemanları biçimsel olarak bir araya toplamak

$$[A + bD] \frac{\partial u}{\partial t} + [C]u = 0 \quad (2.10)$$

matris denkleminde yol gösterir ve $u = (u_0, u_1, \dots, u_N)^T$ bütün parametreleri içerir.

(2.10)'nin tipik bir üyesi v_m 'nin

$$v_m = \frac{u_m^n}{h}$$

olarak verilen

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{6} - b \right) u_{m-1} + \left(\frac{2}{3} + 2b \right) u_m + \left(\frac{1}{6} - b \right) u_{m+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} v_{m-1} u_{m-1} - \frac{1}{2} (v_{m-1} - v_m) u_m - \frac{1}{2} v_m u_{m+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Bu diferansiyel denklemde sayısal bir çözüm elde etmek için Crank-Nicolson yaklaşımını ve $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ 'yi kullanabiliriz ve

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (u_m^{n+1} - u_m^n) \quad (2.12)$$

$$u_m = \frac{1}{2} (u_m^{n+1} + u_m^n) \quad (2.13)$$

olur. Böylece yinelenen bir ilişki

$$\left(\frac{1}{6} - b - \frac{\Delta t}{4} v_{m-1} \right) u_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{2}{3} + 2b + \frac{\Delta t}{4} [v_{m-1} - v_m] \right) u_m^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - b + \frac{\Delta t}{4} v_m \right) u_{m+1}^{n+1}$$

$$\left(\frac{1}{6}-b-\frac{\Delta t}{4}v_{m-1}\right)u_{m-1}^n+\left(\frac{2}{3}+2b-\frac{\Delta t}{4}[v_{m-1}-v_m]\right)u_m^n+\left(\frac{1}{6}-b-\frac{\Delta t}{4}v_m\right)u_{m+1}^n \quad (2.14)$$

olarak elde edilir.

Sınır durumları $U(0,t)=0$ ve $U(L,t)=0$, $u_0=0$ ve $u_N=0$ olmasını gerektirir.

Yukarıdaki yarı-linear denklem kümesi üçlü köşegen matris formuna sahiptir böylece Thomas algoritması kullanarak elde edilen çözüm doğrudur ve ötelemeye gereksinimi yoktur. Bu metodun bir lineer kararlılık analizi koşulsuz kararlı olduğunu gösterir.

2.2. Solitary Dalganın Hareketi

RLW denklemleri gibi EW denklemi için sadece üç koruma kanunu vardır. [49]

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U dx \quad , \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} [U^2 + \mu(U_x)^2] dx \quad , \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} U^3 dx \quad (2.15)$$

Solitary dalga hareketinin simülasyonunda I_1, I_2, I_3 invariyanları nümerik algoritmanın korunup korunmadığını kontrol etmek için dikkatlice izlenir.

$$\|U^e - U^n\|_2 = \sqrt{h \sum_{i=1}^N |U_i^e - U_i^n|^2} \quad (2.16)$$

$$\|U^e - U^n\|_{\infty} = \max |U_i^e - U_i^n| \quad (2.17)$$

Analitik ve sayısal çözümler arasındaki maksimum ve ortalama farklılıkları ölçen L_2 ve L_{∞} hata normları sayısal metodun simülasyon kazancı gibi solitary dalganın profil ve durumunu nasıl daha iyi tahmin ettiğini göstermek için kaydedilecektir. 3c enliğinde olan ve enliği k 'ya bağlı olarak değişen solitary dalga için hareketin sabitleri

$$I_1 = \frac{6c}{k} \quad , \quad I_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} \quad , \quad I_3 = \frac{144c^3}{5k}$$

vermek için analitik olarak hesaplanabilirler.

İlk olarak solitary dalga hareketini modelleriz ve, $0 \leq x_0 \leq 80$, $x_0=15.0$ sırasıyla ve $c=1.0$ ile

$$U(x,0) = 3c \sec h^2 k(x - x_0) \quad (2.18)$$

başlangıç koşulunu kullanırız, böylece solitary dalga 3.0 enliğine sahip olur. Çizelge 2.1 de çeşitli konum-zaman adım birleşimlerini inceleriz ve Ref.[19] de verilen simülasyon sonuçlarıyla karşılaştırırız ve en doğru simülasyonu 7.5×10^{-3} değere sahip olan L_2 hata normunun olduğu $h = \Delta t = 0.04$ seçimiyle elde ederiz. Simülasyon $t=0$ zamanında ve analitik değerleri simülasyon esnasında kaydedilen $I_1=12.0000$, $I_2= 28.8000$, $I_3= 57.6000$ olarak elde edilebilen üç niceliğe götürülür. Hareketin sabitleri analitik değerlerden biraz değişir: I_1, I_2, I_3 % 0.1 'den daha az değişir. Bulunur ki; $h = \Delta t = 0.04$ için 3.0 enliğindeki solitary dalga hareketi, lineer elemanlarla Galerkin metodu Petrov-Galerkin metodundan daha doğrudur, aynı zamanda bu solitary dalga için ondan daha iyi olan bir koruma Çizelge 2.1 'de gösterilir.

Çizelge 2.1.Solitary dalga enliği 3.0, $x_0=15.0$, $0 \leq x_0 \leq 80$, $t = 0.0$, $I_1 = 12.0000$, $I_2 = 28.8000$, $I_3 = 57.6000$: $t = 40$ zamanında simülasyon sonuçları; çeşitli konum zaman adım birleşimleri

h	Δt	I_1	I_2	I_3	L_2	Yükseklik	Yer
0.2	0.2	12.0474	28.9512	58.0881	0.218173	2.99818	54.8
0.1	0.1	12.0079	28.8247	57.6826	0.068558	3.00.004	55.0
0.05	0.05	11.9977	28.7842	57.5548	0.037365	2.99878	55.0
0.04	0.04	11.9935	28.8177	57.6549	0.007512	3.00091	55.0
			Petrov	Galerkin	Quadratic	[19]	
0.04	0.04	12.0157	28.8660	57.7996	24.6×10^{-3}	3.00325	55.0

Çizelge 2.2, Solitary dalga eniği=0,3, $x_0 = 10.0$, $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $0 \leq x \leq 30$

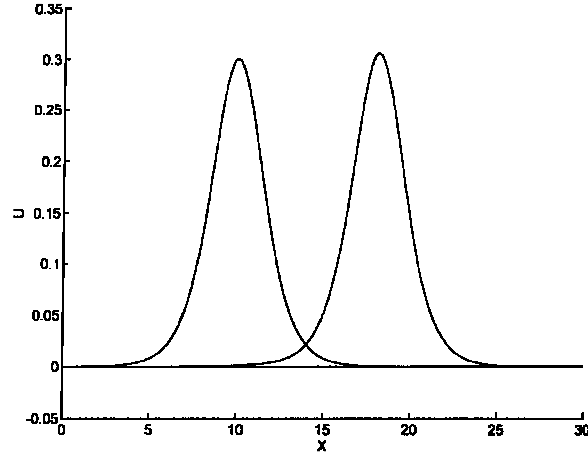
Zaman	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0	1.19995	0.28799	0.05760	0.000010	0.000054
10	1.20446	0.28953	0.05806	0.001647	0.001004
20	1.20890	0.29102	0.05851	0.003556	0.002395
30	1.21325	0.29244	0.05894	0.005813	0.004040
40	1.21737	0.29377	0.05934	0.008496	0.005939
50	1.22173	0.29523	0.05978	0.011760	0.008165
60	1.22581	0.29655	0.06018	0.015532	0.010651
70	1.22988	0.29786	0.06058	0.019843	0.013401
80	1.23387	0.29915	0.6097	0.024697	0.016425

0.3 enliğindeki solitary dalga da modellendi ve simülasyon sonuçları Çizelge 2.2’de verilir. $t=80$ zamanında L_2 ve L_∞ hata normları 25×10^{-3} ’den daha az kalırlar ve hareketin sabitleri I_1 , $I_1=1.2$ analitik değerinden % 3, $I_2, I_2=0.288$ analitik değerinden yaklaşık % 4 ve $I_3, I_3=0.0576$ analitik değerinden %7 daha az değişirler. Şekil 2.1 ‘de $t=0$ ve $t=80$ zamanında bir solitary dalganın grafiği karşılaştırılır ve $t=80$ süresinde grafikteki deki hatanın dağılımı Şekil 2.2’de gösterilir.

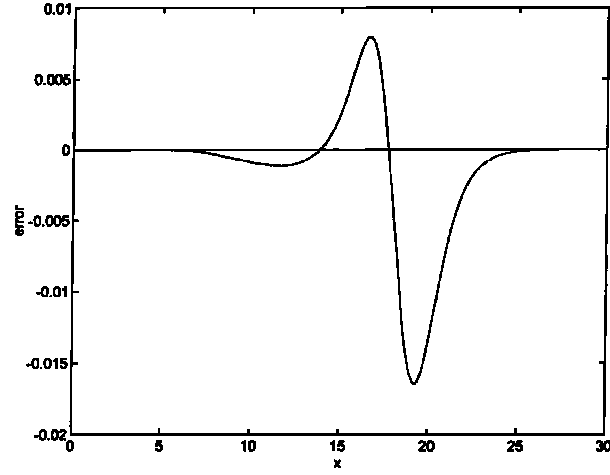
Daha küçük büyüklükteki solitary dalganın bundan başka simülasyonunda denklem (2) $x_0=10.0$, $c=0.03$ ve $c=0.01$ başlangıç koşullarıyla alınır ve böylece solitary dalgalar 0.09 ve 0.03 enliğe sahip olurlar.

Simülasyonlar $t=80$ zamanına kadar çalıştırılır ve I_2 ve L_∞ hata normları ve I_1, I_2, I_3 invariyanları simülasyon boyunca kaydedilir: Çizelge 2.3 ve Çizelge 2.4’ e.bak.

$t=80$ esnasında I_1 ve I_2 invariyanları % 3’den daha az, I_3 invariyanı %6 civarında değişiyorken L_2 ve L_∞ hata normları ise 3×10^{-3} ’den daha az değişirler. $0 \leq x \leq 80$ sırasıyla $h=0.05$ ve $\Delta t=0.05$ ile 0.03 enliğindeki düz daha küçük solitary dalga için mükemmel sonuçlar buluruz. Simülasyon boyunca $t=80$ de I_1 ve I_2 değişkenleri %2’den I_3 ’de yaklaşık % 0.017 den daha az değişirken L_2 ve L_∞ hata normları 4×10^{-4} den daha az değişirler.



Şekil.2 1. $t = 0$ ve 80 de solitary dalga grafikleri



Şekil 2.2. $t = 80$ zamanındaki solitary dalga için hata =kesin- nümerik çözüm

Çizelge 2.3. Solitary dalga enliği=0.09 , $h = 0.05$, $\Delta t = 0.05$, $0 \leq x \leq 30$

Zaman	I_1	I_2	I_3	L_2	I_∞
0	0.35998	0.02592	0.00156	0.000004	0.000016
10	0.36081	0.02600	0.00156	0.000285	0.000152
20	0.36164	0.02608	0.00157	0.000579	0.000329
30	0.36247	0.02616	0.00158	0.000884	0.000529
40	0.36330	0.02625	0.00159	0.001204	0.000750
50	0.36413	0.02633	0.00159	0.001541	0.000993
60	0.36497	0.02641	0.00160	0.001898	0.001255
70	0.36581	0.02649	0.00161	0.002278	0.001536
80	0.36665	0.02658	0.00162	0.002683	0.001836

Çizelge 2.4. Solitary [18] dalga enliği=0.03 , $h = 0.05$, $\Delta t = 0.05$, $0 \leq x \leq 30$

Zaman	I_1	I_2	I_3	L_2	I_∞
0	0.11999	0.00288	0.000058	0.000001	0.000005
10	0.12009	0.00288	0.000058	0.000039	0.000030
20	0.12021	0.00289	0.000058	0.000083	0.000061
30	0.12033	0.00289	0.000058	0.000130	0.000091
40	0.12045	0.00290	0.000058	0.000174	0.000119
50	0.12056	0.00291	0.000058	0.000215	0.000144
60	0.12067	0.00291	0.000058	0.000254	0.000167
70	0.12078	0.00291	0.000058	0.000292	0.000188
80	0.12088	0.00291	0.000059	0.000330	0.000206

2.3. Undular Bore Gelişimi

Undular bore gelişimini çalışmak için Peregrine[10]'yi takip ederiz ve $U(x,0)$ 'ın $t=0.0$ zamanında denge seviyesinin üzerindeki su yüzeyinin yükseltisini gösterdiği

$$U(x,0) = \frac{1}{2}U_0 \left[1 - \tanh\left(\frac{x-x_c}{d}\right) \right] \quad (2.19)$$

başlangıç koşulu olarak kullanırız.

U_0 büyüklüğünün su seviyesindeki değişimi $x = x_c$ de merkeze toplanır ve d değişimin derinliği ölçer. Sınır koşullarının $x \rightarrow \infty$ iken $U \rightarrow 0$ 'a ve $x \rightarrow -\infty$ iken $U \rightarrow U_0$ 'a gereksinimi vardır. I_1, I_2, I_3 nicelikleri daha uzun sabit değerlerdir fakat aşağıdaki M_i oranında simülasyon boyunca lineer bir şekilde artarlar.

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{d}{dt} I_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dx = \frac{1}{2} U_0^2 \\
M_2 &= \frac{d}{dt} I_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} [U^2 + \mu(U_x)^2] dx = \frac{2}{3} U_0^3 \\
M_3 &= \frac{d}{dt} I_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U^3 dx = \frac{3}{4} U_0^4
\end{aligned} \tag{2.20}$$

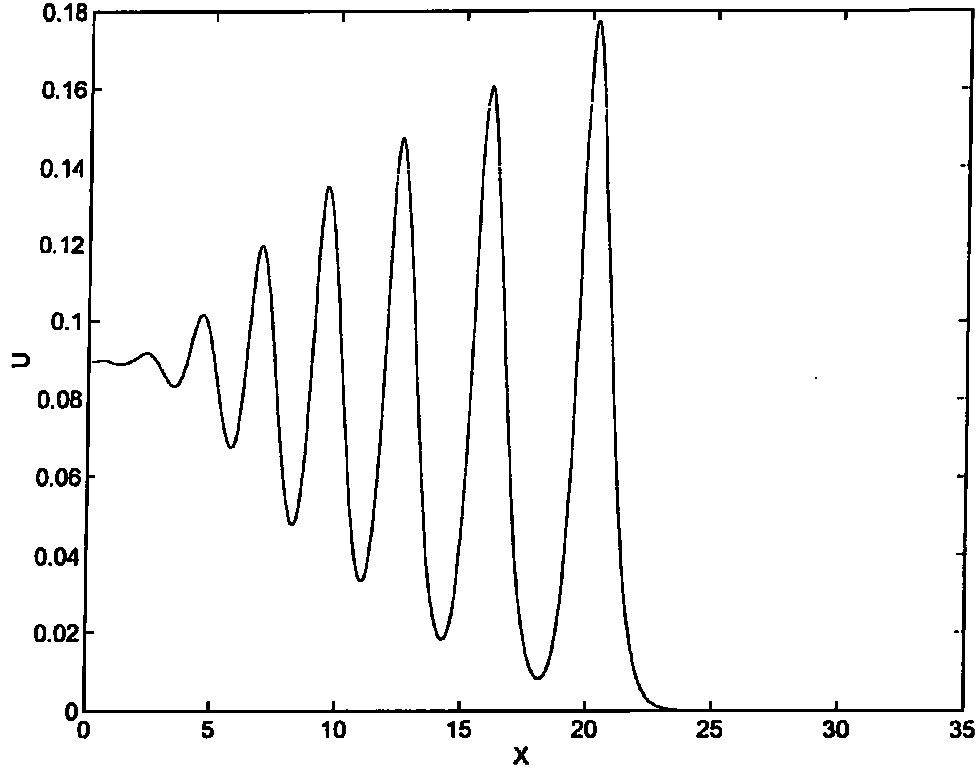
Daha önceki çalışmalarla mümkün olan bir karşılaştırma yapmak için $\mu=0.1666667$ $U_0=0.1$ ve sığ bir başlangıç grafiği için $d=5$ parametrik değerlerini alırız. Simülasyon $t=800$ zamanına kadar çalıştırılır ve I_1, I_2, I_3 niceliklerinin değerleri önde giden salınımın yeri Çizelge 5’de listelenir. $t=400$ ‘de geliştirilen undular bore Şekil 3’de gösterilir. Gözlenir ki; bütün bir EW solitary dalgasıyla tutarlı olan $t=800$ de enliği 0.191 ‘e ve hızı 0.064’e artarken , $t=400$ ’de öncülük eden undular bore 0.01777 yüksekliğinde ve 0.059 hızındadır.

Yukarıdaki (2.20) denkleminde teorik değerleri $M_1= 5 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.66667 \times 10^{-4}$ ve $M_3=7.5 \times 10^{-5}$ olarak verilirler. I_i ’lerin değışikliğı Çizelge 2.5’de verilen sonuçlardan anlaşılabilir.

Çizelge 2.5. Undular bore için [18] sonuçlar

$$U_0 = 0.1, d = 5, u = 0.1666667, -20 \leq x \leq 50$$

Zaman	I_1	I_2	I_3	x	U
0	2.000534	0.175174	0.016257		
50	2.206646	0.199913	0.018755		
100	2.413363	0.224849	0.021286		
150	2.620707	0.250027	0.023864	6.04	0.131806
200	2.826486	0.274955	0.026418	8.75	0.158313
300	3.233685	0.324125	0.031476	14.39	0.172019
400	3.654204	0.375753	0.036914	20.24	0.177460
500	4.087601	0.429754	0.042716	26.23	0.180838
600	4.531558	0.485812	0.048852	32.34	0.185000
700	4.993000	0.545271	0.055520	38.57	0.188194
800	5.466117	0.606864	0.062520	44.89	0.191063



Şekil 2.3. Şekil [18] undulation $t = 400$ zamanında, $U_0 = 0.1$, $d = 5$

Onlar lineer bir şekilde artarlar ve onların gözlenmiş artış oranları $M_1 = 4.4 \times 10^{-3}$, $M_2 = 5.53 \times 10^{-4}$, $M_3 = 6 \times 10^{-5}$ olarak hesaplanırlar. Bu değerler teoriyle daha iyi bir uyum içerisindedir.

Eğer başlangıç koşullarının dik olması $d = 2$ 'ye kadar artarsa I_1, I_2, I_3 nicelikleri Çizelge.2.6'daki gibi lineer olarak değişirler. Gözlenmiş artma oranları $M_1 = 4.76 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.22 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.05 \times 10^{-5}$ olarak hesaplanırlar. Birkez daha teoriyle uyuşması iyidir.

Çizelge 2.6. Undular bore için sonuçlar [18]

$U_o = 0.1$, $d = 2$, $u = 0.1666667$, $-20 \leq x \leq 50$

Zaman	I_1	I_2	I_3	x	U
0	2.000458	0.190324	0.018505		
50	2.197027	0.213073	0.020686	1.06	0.113964
100	2.395144	0.236380	0.022988	3.72	0.155646
150	2.602754	0.261645	0.025599	6.47	0.168866
200	2.815598	0.287930	0.028367	9.33	0.173851
300	3.253788	0.342775	0.034244	15.23	0.179062
400	3.708416	0.400805	0.040625	21.28	0.183436
500	4.176842	0.461494	0.047425	27.48	0.187284
600	4.658042	0.524602	0.054604	33.78	0.189964
700	5.158164	0.591609	0.062437	40.19	0.193963
800	5.669824	0.660997	0.070677	46.73	0.197568

BÖLÜM III

BURGER DENKLEMİNE BİR GALERKİN SONLU ELEMAN YAKLAŞIMI

3.1.Sonlu Eleman Çözümü

Burger Denklemi,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} - v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

içerisindeki $U(x, t)$ 'nin değişken değer ve akışkan mekaniklerin uygulamalarının çoğu için v 'nin küçük bir parametre olduğu lineer gibi görünen (yarı-lineer) parabolik kısmi bir diferansiyel denklemdir. Burada t zaman, x konum (yer) koordinatı, $U(x, t)$ hızdır ve v 'de akışkan yapışkanlığını ölçer. Burger'in denklemi L boyundaki bir kutu içerisindeki hava akımının bozulması için bir model denklem gibi düşünülebilir. Fiziksel sınır koşulları kutunun sonunda U 'ya sıfıra gitmesini gerektirir. Yani $U \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ Galerkin metodunu uyguladığımızda ϕ_i 'nin nodal değerlere göre ağırlık fonksiyonu olduğu;

$$\int_{x_0}^{x_N} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} - v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \phi_i dx = 0 \quad (3.2)$$

fonksiyonunu [48] minimize ederiz.

Kısmi diferansiyel denkleme bir sayısal bir çözüm, $x_0 \leq x \leq x_N$ ve $x = x_0$ 'de açıkça belirtilen sınır koşullarıyla bölgeleri üzerinde araştırılır. $[x_0, x_N]$ bölgesi x_i ile gösterilen düzgün ölçülü aralıklara ayrılır, yani $x_0 \leq x \leq x_N$ olur. $h = (x_{m+1} - x_m)$ boyundaki tipik sonlu eleman, $x = x_m + \eta h$, $0 \leq \eta \leq 1$ olduğu η yerel koordinatlarıyla haritası yapılır ve integral üzerine uygulanırsa;

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\widehat{U}}{h} \frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{v}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) \phi_i dx = 0 \quad (3.3)$$

elde etmeye katkıda bulunur. Burada integrali basitleştirmek için \widehat{U} bir eleman üzerine sabit olarak alınır. Bu;

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t} + v \frac{\partial U}{\partial \eta} - b \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) \phi_i d\eta = 0 \quad (3.4)$$

denkleme götürür ki burada da;

$$b = \frac{v}{h^2}$$

ve

$$v = \frac{\widehat{U}}{h}$$

olur, ve b ile v her eleman üzerinde yerel bir sabit olarak alınırlar. U 'nun $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki değişimi

$$U^e = \sum_{i=1}^2 P_i u_i \quad (3.5)$$

olarak ifade edilir ki burada da P_1 ve P_2 lineer uzay temel fonksiyonudurlar ve u_1 ile u_2 de nodal parametredirler. Yukarıda tanımlanan η yerel koordinat sistemiyle temel fonksiyonlar aşağıdaki ifadelere [48] sahip olurlar.

$$P_1 = 1 - \eta, \quad P_2 = \eta$$

Galerkin metodu için P_i temel fonksiyonlarıyla ϕ_i ağırlık fonksiyonunu

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t} + v \frac{\partial U}{\partial \eta} - b \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) P_i d\eta = 0 \quad (3.6)$$

yı vererek tanımlarız. Kısmi integralini almak bizi

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} + v \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) P_i + b \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial P_i}{\partial \eta} \right] d\eta = 0 \quad (3.7)$$

ye ulaştırır.

(3.5) denklemindeki U 'yu yerine yazarsak bir elemanın katkısı

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^1 \left[P_i P_j \frac{\partial u_j}{\partial t} + v P_i \frac{\partial P_j}{\partial \eta} u_j + b \frac{\partial P_i}{\partial \eta} \frac{\partial P_j}{\partial \eta} u_j \right] d\eta = 0 \quad (3.8)$$

formunda bulunur.

Matris gösteriminde bu denklem

$$A^e \frac{\partial u^e}{\partial t} + [C^e + bD^e] u^e = 0 \quad (3.9)$$

olur ve buradaki $u^e = (u_1, u_2)^T$ 'ler konu üzerindeki nodal parametrelerdir. Eleman matrisleri;

$$A_{ij}^e = \int_0^1 P_i P_j d\eta = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{ij}^e = v \int_0^1 P_i \frac{\partial P_j}{\partial \eta} d\eta = \frac{1}{2} v \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{ij}^e = \int_0^1 \frac{\partial P_i}{\partial \eta} \frac{\partial P_j}{\partial \eta} d\eta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olur ve v 'de elemanlar üzerinde sabit olarak verilir.

$$v = \frac{u_1}{h}$$

Bütün elemanlardan elde edilen katkıları hep birlikte bir araya toplayarak

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + [C + bD]u = 0 \quad (3.10)$$

matris denklemini buluruz ve $u = (u_0, u_1, \dots, u_N)^T = 0$ bütün nodal parametreleri içerir.

(3.10) denkleminin tipik bir üyesi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{6}u_{m-1} - \frac{2}{3}u_m + \frac{1}{6}u_{m+1} \right] = \\ \left(\frac{1}{2}v_{m-1} + b \right) u_{m-1} - \left[\frac{1}{2}(v_{m-1} - v_m) + 2b \right] u_m - \left(\frac{1}{2}v_m - b \right) u_{m+1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

dir.

Burada v_m ,

$$v_m = \frac{u_m^n}{h}$$

olarak verilir. Bu bayağı diferansiyel denklem kümesinde sayısal bir çözüm bulmak için Crank- Nicolson son yaklaşımını kullanabiliriz. Zaman merkezini,

$$t = \left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t$$

olarak,

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (u_m^{n+1} - u_m^n) \quad (3.12)$$

$$u_m = \frac{1}{2}(u_m^{n+1} + u_m^n) \quad (3.13)$$

yazabiliriz. Buradan yinelenen ilişkiyi buluruz.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} - \frac{b\Delta t}{2} - \frac{\Delta t}{4} v_{m-1} \right) u_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{2}{3} + b\Delta t + \frac{\Delta t}{4} [v_{m-1} - v_m] \right) u_m^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - \frac{b\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{4} v_m \right) u_{m+1}^{n+1} = \\ & \left(\frac{1}{6} + \frac{b\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{4} v_{m-1} \right) u_{m-1}^n + \left(\frac{2}{3} - b\Delta t - \frac{\Delta t}{4} [v_{m-1} - v_m] \right) u_m^n + \left(\frac{1}{6} + \frac{b\Delta t}{2} - \frac{\Delta t}{4} v_m \right) u_{m+1}^n \end{aligned} \quad (3.14)$$

$U(x_0, t) = 0$ ve $U(x_N, t) = 0$ ve sınır koşulları $u_0 = 0$ ve $u_N = 0$ 'ı gerektirir.

Yukarıdaki lineer görünümlü denklem kümesinde üçlü köşegen formunda bir matrise sahiptir. Böylece Thomas algoritması uygulayarak bir çözüm olması için, bununla birlikte yarı lineer bir iç öteleme teriminin var olmasından dolayı gerektirilebilir. Lineer kararlılık analizi, tipik $\hat{\epsilon}^n$ genişliğindeki Fourier modunda ϵ_j^n hatasının g yükselme faktörü ile yapılır. k 'nın lineer olmayan terimdeki h niceliği yerel olarak;

$$\hat{\epsilon}_j^n = \hat{\epsilon}^n \exp(ijkh) \quad (3.15)$$

sabittir. Bu koşullar altında ϵ_j^n hatası δ_j^n fonksiyonu gibi aynı sonlu fark metodunu sağlar ve (14) denkleminin tipik bir üyesi,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} - \frac{b\Delta t}{2} \right) \epsilon_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{2}{3} + b\Delta t \right) \epsilon_m^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - \frac{b\Delta t}{2} \right) \epsilon_{m+1}^{n+1} \\ & = \left(\frac{1}{6} - \frac{b\Delta t}{2} \right) \epsilon_{m-1}^n + \left(\frac{2}{3} - b\Delta t \right) \epsilon_m^n + \left(\frac{1}{6} + \frac{b\Delta t}{2} \right) \epsilon_{m+1}^n \end{aligned} \quad (3.16)$$

formunda bulunur.

Burada,

$$b = \frac{v}{h^2}$$

'yi yukarıdaki Fourier modunda yerine yazmak

$$|g| = \frac{P-R}{P+R}$$

verir ki burada da;

$$P = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos^2 \left[\frac{kh}{2} \right] \right)$$

ve

$$R = 2b\Delta t \left(1 - \cos^2 \left[\frac{kh}{2} \right] \right)$$

ve

$$\cos^2 \left[\frac{kh}{2} \right] \leq 1$$

dir ve böylece

$$|g| \leq 1$$

olur ve tasarı şartsız olarak kararlıdır.

3.2 Sayısal Deneyler

Üç test problemi için Burger denkleminin sayısal çözümleri şimdi hesaplanacaktır. Sayısal algoritmanın doğruluğunu hesaplamak için açıkça belirtilen zaman adımlarından sonra her dönüm (uyum) noktasında sayısal ve kesin çözümler arasındaki farkı hesaplarız ve bunları L_2 ve L_∞ hata normlarındaki farkı hesaplamak için kullanırız. Bu hata normları;

$$L_2 = \|U^{exact} - U^n\|_2 = \left[h \sum_{j=1}^N |U_j^{exact} - U_j^n|^2 \right]^{1/2} \quad (3.17)$$

ve

$$L_{\infty} = \|U^{exact} - U^n\|_{\infty} = \max_j |U_j^{exact} - U_j^n| \quad (3.18)$$

olarak verilirler.

(a) İlk olarak başlangıç koşullarını bir sin eğrisi gibi

$$U(x, 0) = \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1 \quad (3.19)$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, t > 0 \quad (3.20)$$

sınır koşullarıyla alırsınız.

Bu problemin analitik çözümü sonsuz seriler [23] gibi ifade edilebilir.

$$U(x, t) = \frac{4\pi\nu \sum_{j=1}^{\infty} j I_j \left(\frac{1}{2\pi\nu} \right) \sin(j\pi x) \exp(-j^2\pi^2\nu t)}{I_0 \left(\frac{1}{2\pi\nu} \right) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} I_j \left(\frac{1}{2\pi\nu} \right) \cos(j\pi x) \exp(-j^2\pi^2\nu t)} \quad (3.21)$$

burada I_j 'ler değiştirilmiş Bessel fonksiyonlarıdır. Küçük ν için bu serinin yakınsaklığı çok yavaştır. t

Problem (a) için Burger denkleminin sayısal çözümleri Ali [33] tarafından kaydedildi ve Çizelge 1' de analitik çözümle karşılaştırılan mevcut Galerkin metoduyla bulundu. Bu sayısal çözümler $\Delta t=0,01$ zaman adımı kullanarak $\nu=1$ durumu içindir. Sayısal çözümleri $h=0,25$, $0,125$ ve $0,0625$ için karşılaştırırız. Görülür ki mevcut sayısal çözüm kesin çözüme çok yakın bir yaklaşımdır. Bizim sayısal sonuçlarımız Ref [33] ' le bulunan sayısal bir çözümle iyi bir uyum içindedir.

Çizelge 2 ' de ki karşılaştırma mevcut Galerkin metodu ve standart Galerkin yaklaşımı (SGA), bir çarpım yaklaşım Galerkin metodu (PAG), bir sık sonlu fark metodu

(CD) [28] ve birlikte olan kübik B-Spline sonlu eleman metodu (CCB) [33] 'nu içeren çeşitli nümerik methodlar arasında verildi.

Çizelge 3.1. $\nu = 1$ için analitik ve nümerik sonuçların karşılaştırılması [26]

x	t	$h = 0.25$		$h = 0.125$		$h = 0.0625$		Kesin
		[33]	Present	[33]	Present	[33]	Present	
0.25	0.00	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071
	0.05	0.4082	0.4159	0.4139	0.4155	0.4132	0.4141	0.4131
	0.10	0.2463	0.2524	0.2540	0.2551	0.2538	0.2546	0.2536
	0.15	0.1463	0.1527	0.1567	0.1570	0.1567	0.1572	0.1566
	0.20	0.0898	0.0918	0.0964	0.0963	0.0965	0.0967	0.0964
	0.25	0.0540	0.0550	0.0592	0.0588	0.0592	0.0593	0.0592
0.50	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.05	0.5979	0.6045	0.6091	0.6098	0.6091	0.6100	0.6091
	0.10	0.3578	0.3649	0.3714	0.3724	0.3716	0.3728	0.3716
	0.15	0.2142	0.2190	0.2267	0.2268	0.2268	0.2276	0.2268
	0.20	0.1283	0.1310	0.1383	0.1379	0.1385	0.1389	0.1385
	0.25	0.0768	0.0781	0.0844	0.0838	0.0845	0.0847	0.0845
0.75	0.00	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071
	0.05	0.4384	0.4477	0.4490	0.4533	0.4500	0.4530	0.4502
	0.10	0.2601	0.2668	0.2719	0.2739	0.2725	0.2743	0.2726
	0.15	0.1542	0.1581	0.1640	0.1646	0.1643	0.1652	0.1644
	0.20	0.0917	0.0938	0.0992	0.0991	0.0994	0.0998	0.0994
	0.25	0.0547	0.0557	0.0602	0.0598	0.0603	0.0605	0.0603

Çizelge 3.2 : $t = 0.5$ zamanında analitik ve nümerik sonuçların karşılaştırılması [26]

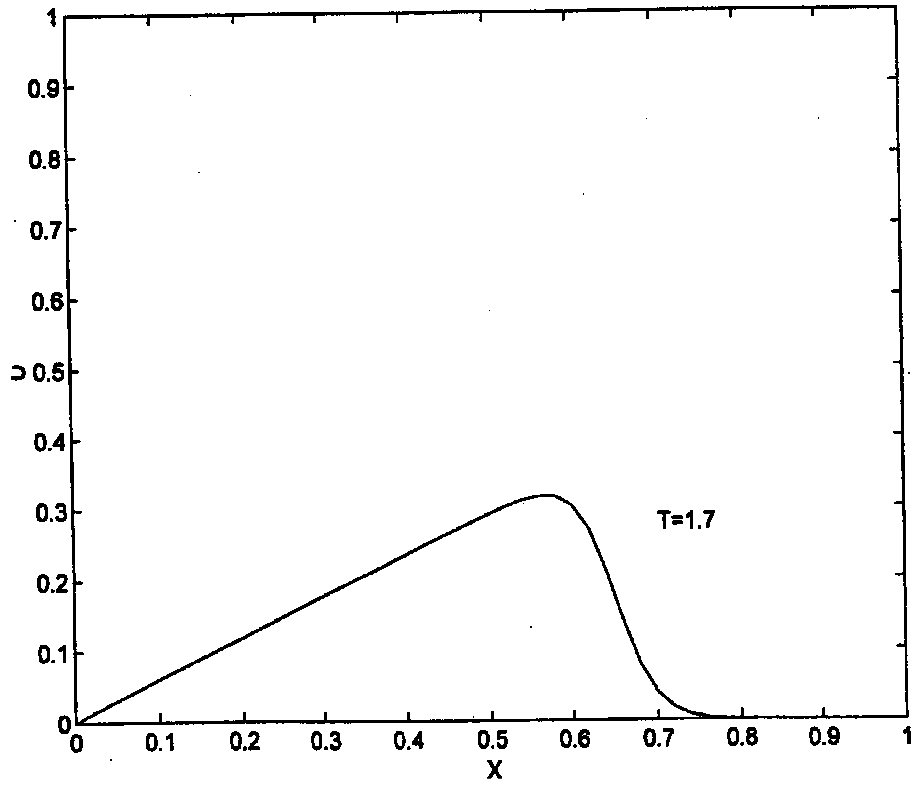
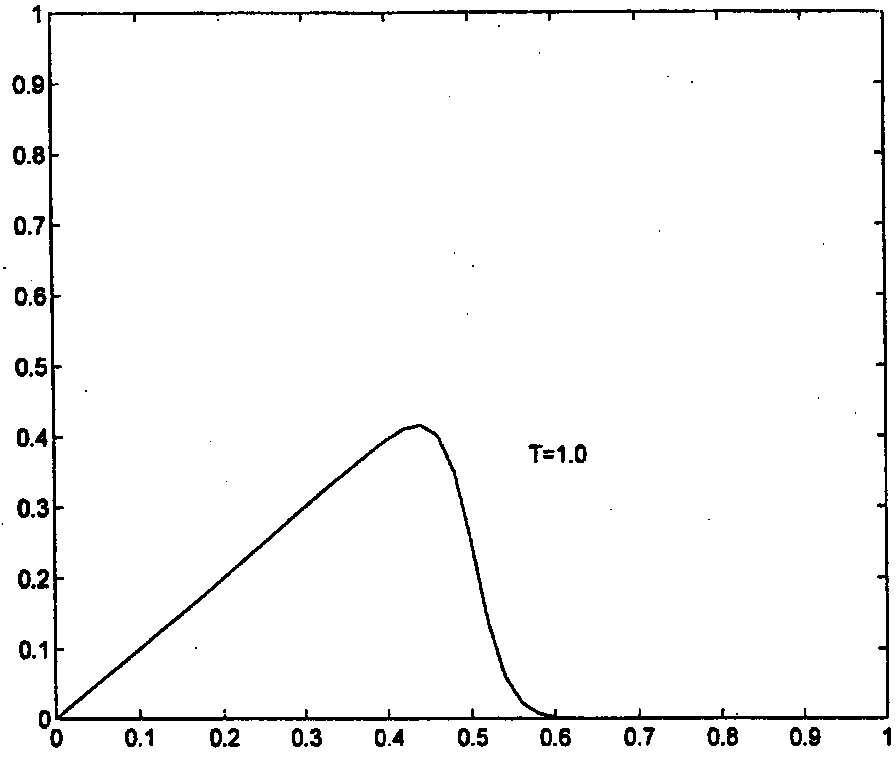
$\nu = 0.01$						
x	$h = 1/18, \Delta t = 0.001$			$h = 1/36, \Delta t = 0.01$		Kesin
	SGA [28]	PAG [28]	CD [28]	CCB [33]	Present	
0.500	0.589	0.589	0.589	0.589	0.598	0.589
0.556	0.649	0.649	0.648	0.649	0.657	0.649
0.611	0.707	0.707	0.709	0.707	0.714	0.707
0.667	0.762	0.762	0.760	0.762	0.768	0.762
0.722	0.813	0.814	0.820	0.814	0.819	0.814
0.778	0.860	0.861	0.852	0.861	0.865	0.861
0.833	0.895	0.907	0.917	0.902	0.905	0.902
0.889	0.911	0.952	0.911	0.934	0.935	0.934
0.944	0.764	0.774	0.964	0.951	0.911	0.937
1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

$\nu=0.01$ için görülebilir ki ; mevcut Galerkin metodu $L_\infty=0,026$ ile , Çizelgede verilen diğer sayısal metodların en iyisine benzer bir kesinliğe sahiptir ; $L_\infty = 0,173$ (SGA) , $L_\infty = 0,163$ (PAG) , $L_\infty = 0,027$ (CD) , $L_\infty = 0,014$ (CCB) , Çizelge 3 ' te $\nu=0,0001$ durumu için görürüz ki mevcut Galerkin metodu $L_\infty = 0,097$ ile diğer sayısal metodlarda ki L_∞ ' larla ; $L_\infty = 0,124$ (SGA) , $L_\infty = 0,105$ (PAG) , $L_\infty = 0,087$ (CD) , $L_\infty = 0,078$ (CCB) daha iyi karşılaştırılır.

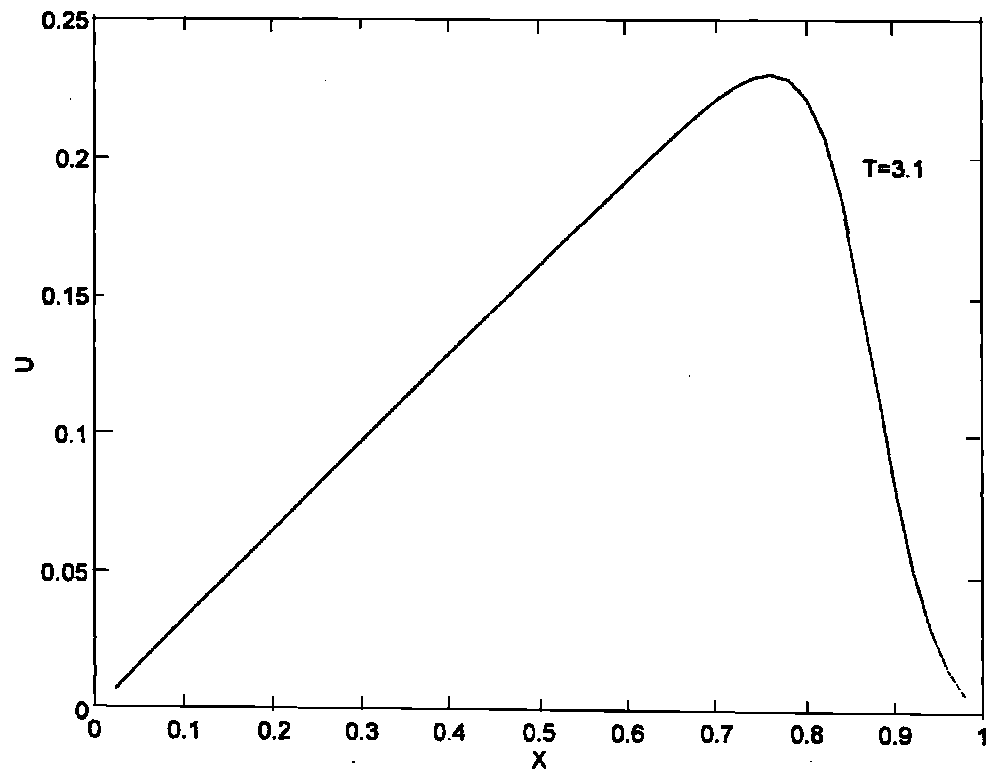
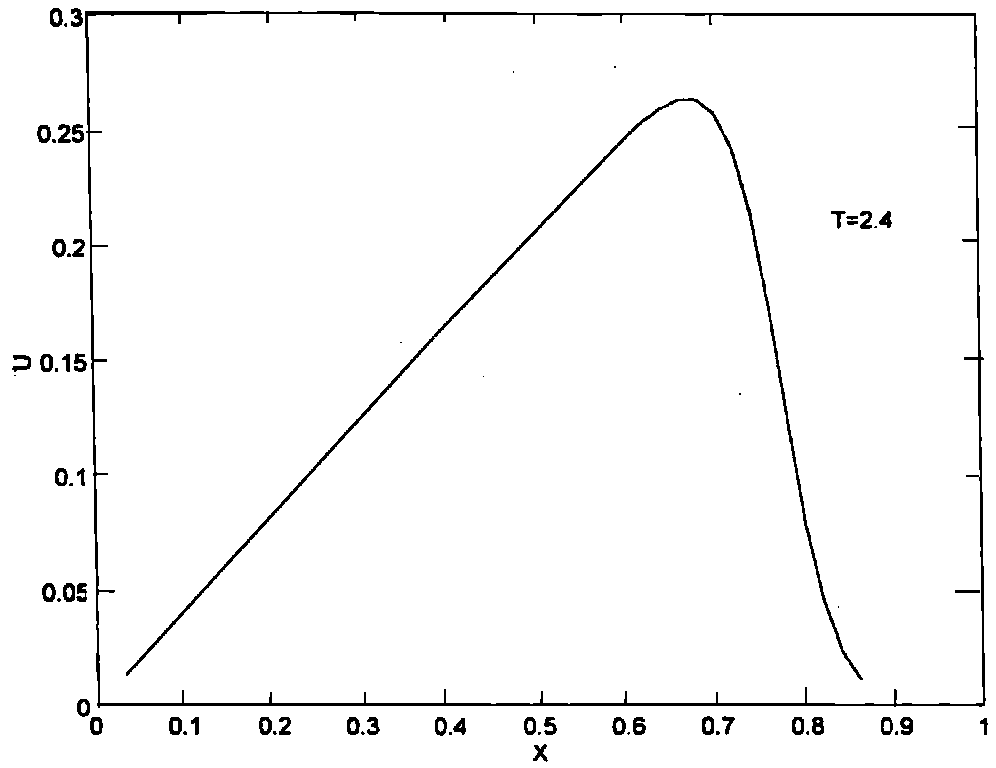
(b)İkinci iyi bilinen Burger denkleminin analitik çözümü [34] , t_0 ' ın

$$t_0 = \exp\left(\frac{1}{8\nu}\right)$$

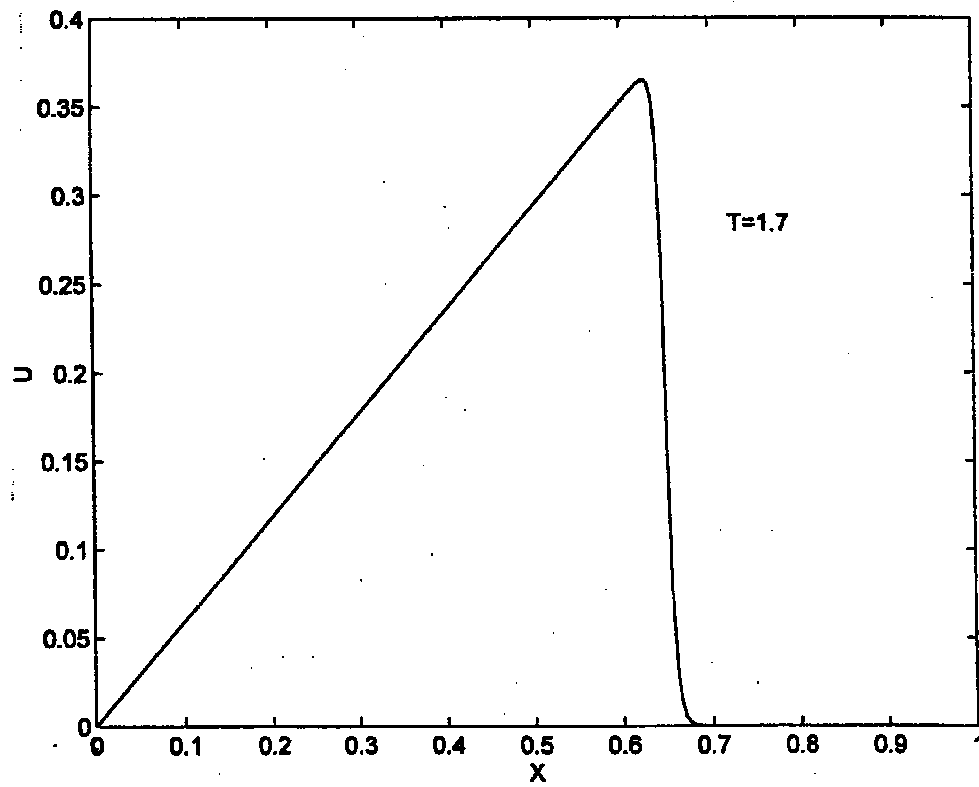
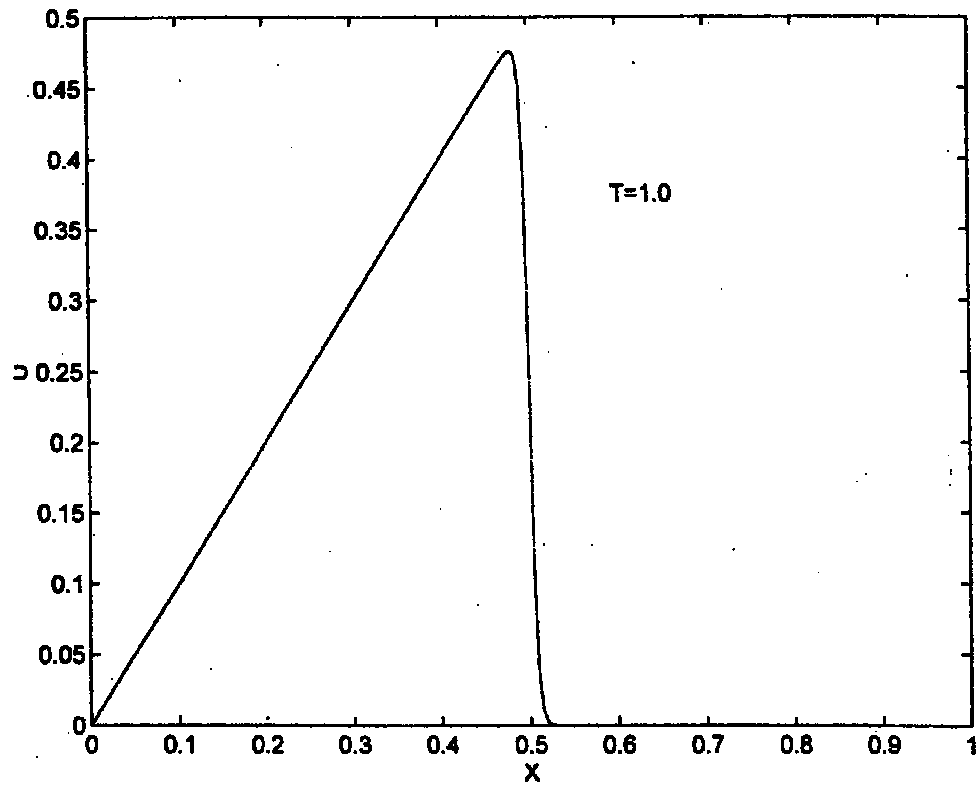
olduğu



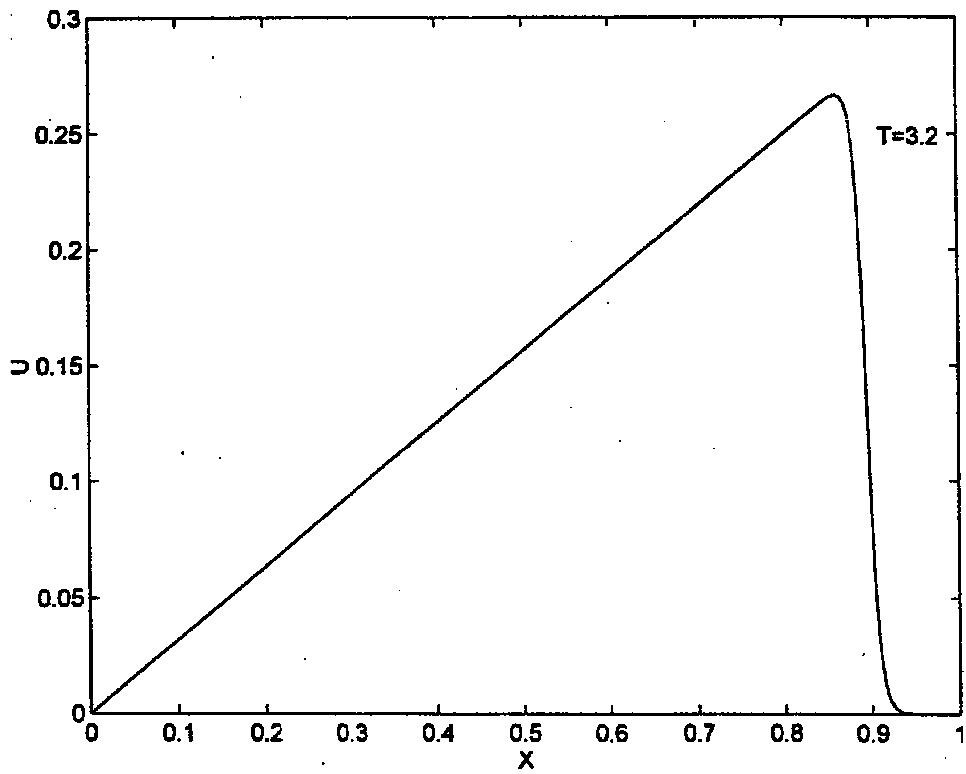
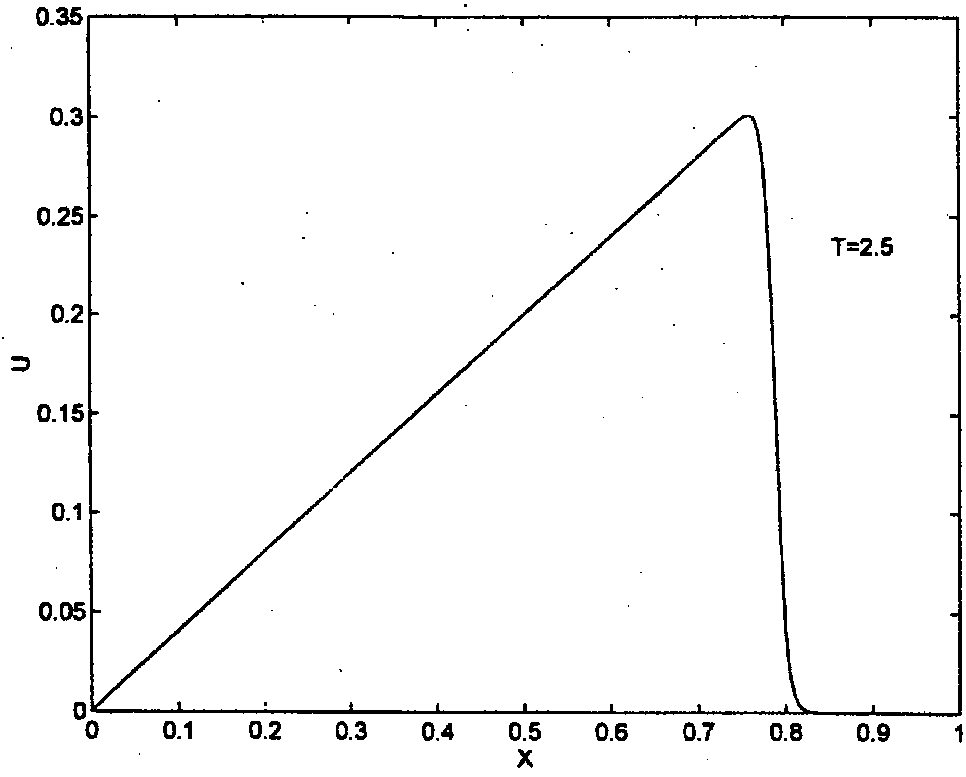
Şekil3.1. $\Delta t = 0.1$, $h = 0.02$, $\Delta t = 0.1$ [26]



Şekil 3.1 [26]



Şekil 3.2. $\nu = 0.001$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.025$ [26]



Şekil 3 2. [26]

İkinci simülasyonumuzdaki gibi başlangıç koşulları alındı ve (3.22) $t=1$ 'de hesaplandı. Sayısal çözümler $t=3$ zamanına kadar belirlenirler. Sınır koşulları $U(x_0, t) = U(x_N, t) = 0$ [33] 'dir ve yapışkanlık $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.001$ değerlerine sahiptir. Hesaplamaların fikir veren ani görüntüleri şekil 3.1 ve şekil 3 2 'de verilirler. Görürüz ki daha küçük, yapışkanlık, daha derin dalga önündedir. Bu grafikte Nguyen ve Reynen [34] tarafından kaydedilenlerle tam bir uyum içerisindedirler. Her iki durumda da, eğer tam çözümler aynı resimde çizilirse, eğriler çok benzerdirler. Bu gözlemi ölçmek için değerleri Çizelge 3 4 'te verilen L_2 ve L_∞ hata normları kullanılır. Görülebilir ki; yapışkan ν 'nin değeri düşerken hatalar artar fakat bununla birlikte hata kabul edilebilirler.

(b) Son olarak Burger denkleminin özel çözümünü [27,28,33] dikkate alalım;

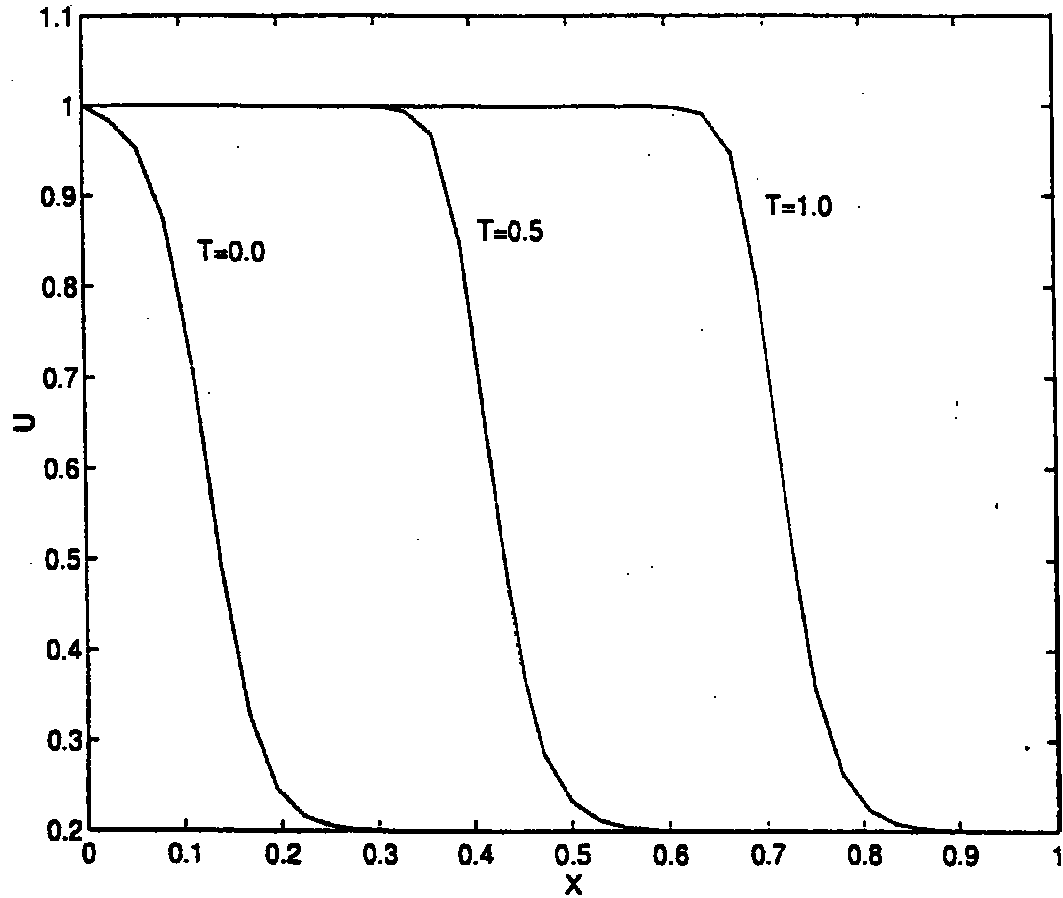
$$U(x, t) = \frac{[\infty + \mu + (\mu - \infty) \exp(\eta)]}{1 + \exp(\eta)}, \quad t \geq 0 \quad (3.23)$$

burada $\eta = \alpha(x - \mu t - \beta)/\nu$ 'dır. [28] 'le karşılaştırma yapmak için (3.23) ' teki sabitler $\alpha = 0,4$; $\beta = 0,125$; $\mu = 0,6$ ve $\nu = 0,01$ değerlerine sahip olarak seçilirler. $t = 0$ anında (3.23) ' ten başlangıç koşulları bulunur. Bu fonksiyon için $x \rightarrow x_0$ ' a $U \rightarrow 1$ ve $x \rightarrow x_N$ 'e $U \rightarrow 0,2$ dır. Sınır koşulları $U(0,1) = 1$ ve $U(1, t) = 0,2$ [33] dır. Gözlemleriz ki; çözüm Şekil 3.3 te görüldüğü gibi μ hızıyla sağa hareket eden başlangıç olarak $x = \beta$ ' da bulunan, yol alan bir dalgayı ifade eder. Mevcut Galerkin metodu için $L_\infty = 0,045$ sayısal sonuçları ile ve [28,33] 'den tekrarlanan sonuçlar ; Standart Galerkin Yaklaşımı (SGA) $L_\infty = 0,096$, çarpım yaklaşımli Galerkin metodu (CD) $L_\infty = 0,151$ ve birlikte olan kübik B-Splaynlar sonlu eleman metodu (CCB) $L_\infty = 0,005$ gibi yaklaşımları içeren çeşitli sayısal tasarımlar için sayısal sonuçlar Çizelge 3.5'teki analitik çözümlüde karşılaştırılır. Mevcut metot bütün alan üzerinde analitik çözümlere daha yakın kararlı bir çözüm üretir. Galerkin metodunda kullanılan zaman adımları [28] de kullanılandan 50 kat daha büyük olmasına rağmen, konum adımları yarıdır, bu yüzden ki mevcut Galerkin metodunun verimi belki daha yüksektir. Görürüz ki; mevcut Galerkin algoritması, birlikte olan kübik B-Splayn

metodundan daha az bir doğruluğu sahiptir, fakat diğer üç metodun hepsinden daha fazla bir doğruluğa sahiptir

Çizelge 3.4. Hata Normları [26]

	$\nu = 0.005$			$\nu = 0.001$		
	$t = 1.7$	$t = 2.4$	$t = 3.1$	$t = 1.7$	$t = 2.5$	$t = 3.2$
$L_2 \times 10^{-3}$	2.107	3.345	4.820	4.123	1.432	5.761
$L_\infty \times 10^{-3}$	8.099	11.651	15.867	36.675	10.812	40.855



Şekil 3.3 $\nu = 0.01$, $h = 1/36$, $\Delta t = 0.05$, [26]

Çizelge 3.5. $t = 0.5$ zamanında analitik ve nümerik sonuçların karşılaştırılması [26]

x	$h = 1/18, \Delta t = 0.001$			$h = 1/36, h = 1/36,$ $\Delta t = 0.025, \Delta t = 0.05$		Analytic [28]
	SAG[28]	PAG[28]	CD[28]	CCB[33]	Present	
0.000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.056	1.0	1.0	1.030	1.0	1.0	1.0
0.111	1.0	1.0	0.990	1.0	1.0	1.0
0.167	1.0	1.0	0.973	1.0	1.0	1.0
0.222	0.998	0.999	1.009	1.0	1.0	1.0
0.278	0.991	0.997	1.004	0.999	0.999	0.998
0.333	0.970	0.982	0.986	0.985	0.994	0.980
0.389	0.862	0.850	0.696	0.847	0.848	0.847
0.444	0.461	0.444	0.360	0.452	0.407	0.452
0.500	0.159	0.171	0.228	0.238	0.232	0.238
0.556	0.300	0.286	0.203	0.204	0.204	0.204
0.611	0.194	0.197	0.2	0.2	0.2	0.2
0.667	0.213	0.211	0.2	0.2	0.2	0.2
0.722	0.211	0.210	0.2	0.2	0.2	0.2
0.778	0.188	0.190	0.2	0.2	0.2	0.2
0.833	0.201	0.207	0.2	0.2	0.2	0.2
0.889	0.191	0.193	0.2	0.2	0.2	0.2
0.944	0.203	0.202	0.2	0.2	0.2	0.2
1.000	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

BÖLÜM IV

GALERKİN METODU İÇİNDE LİNEER SONLU ELEMANLARI KULLANILAN DÜZENLİ UZUN DALGA DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

4.1. Sonlu Eleman Çözümü

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xx} = 0 \quad (4.1)$$

şeklindeki normalleştirilmiş lineer olmayan düzenli uzun dalga denklemini çözeceğiz. Burada ε, μ pozitif parametreler ve alt indisler t ve x türevi ifade eder. Fiziksel sınır şartı $|x| \rightarrow \infty$ iken $U \rightarrow 0$ dır.

Düzenli uzun dalga denklemini model dalgaların oluşturulmasında kullanıldığı zaman bir sığ su kanalında aşağıdaki yolla değişkenler normalleştirilir. $(h/g)^{1/2}$, t zaman sabiti ve h su derinliği için U su enliği ve x uzunluğu ölçülür. Burada yer çekiminden dolayı g ivme olarak alınır.

Galerkin metodu uygulandığında fonksiyonu minimum ederiz. [48]

$$\int_{x_0}^{x_N} [U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xx}] W_j dx = 0, \quad (4.2)$$

burada W_j ağırlık fonksiyonu nodal değerlere bağlıdır.

$[x_0, x_N]$ bölgesi nodal x_m ler tarafından h uzunluğunun düzgün olarak büyüklendirilmesi sonlu elemanlar içinde $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ şeklinde parçalanır. $h = (x_{m+1} - x_m)$ büyüklüğünün tipik sonlu bir elemanı, η yerel koordinatları tarafından dönüştürülür, burada $x = x_m + \eta h$, $0 \leq \eta \leq 1$, (4.2) integralini

$$\int_0^1 \left[U_t + \frac{1}{h} U_\eta + \frac{\varepsilon}{h} \hat{U} U_\eta - \frac{\mu}{h^2} U_{\eta\eta} \right] W_j d\eta = 0 \quad (4.3)$$

şekline getirir, burada \hat{U} , (4.3) integralini basitleştirmek için bir eleman üzerinden sabit olarak alınır. Bundan dolayı (4.3) denklemi

$$\int_0^1 [U_t + v U_\eta - b U_{\eta\eta}] W_j d\eta = 0 \quad (4.4)$$

şekline dönüşür, burada

$$b = \frac{\mu}{h^2}$$

ve

$$v = \frac{1}{h} (1 + \varepsilon \hat{U})$$

dır ve b ve v her bir eleman üzerinden yerel sabit olarak alınır. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinden U değişkeni

$$U^e = \sum_{j=1}^2 L_j u_j \quad (4.5)$$

olarak ifade edilir, burada L_1, L_2 lineer uzaysal temel fonksiyonlardır ve u_1, u_2 nodal parametrelerdir. Temel fonksiyonlar yukarıda tanımlanmış η yerel koordinat sistemi ile aşağıdaki gibi ifade edilir. [48]

$$L_1 = 1 - \eta, \quad L_2 = \eta.$$

Eğer W_j ağırlık fonksiyonları temel fonksiyonlar L_j ile aynı olarak alınırsa

$$\int_0^1 [U_t + v U_\eta - b U_{\eta\eta}] L_j d\eta = 0 \quad (4.6)$$

bulunur. (4.6) denkleminin kısmi integrasyonunun alınması

$$\int_0^1 [(U_t + vU_\eta)L_j + bU_{\eta t}L'_j]d\eta = 0 \quad (4.7)$$

denklemine yol açar. Eğer (4.5) denklemini ile tanımlı U , (4.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=1}^2 \int_0^1 \left[\left(L_k \frac{\partial u_k}{\partial t} + vL'_k u_k \right) L_j + bL'_k L'_j \frac{\partial u_k}{\partial t} \right] d\eta = 0 \quad (4.8)$$

şeklinde bulunur, burada (') ile gösterilen sembol η ya göre türev anlamına gelir. Bu denklem

$$[D^e + bF^e] \frac{\partial u^e}{\partial t} + E^e u^e = 0 \quad (4.9)$$

olarak matris şeklinde yazılabilir, burada

$$u^e = (u_1, u_2)^T$$

dir. Eleman matrisleri,

$$D_{jk}^e = \int_0^1 L_j L_k d\eta$$

$$E_{jk}^e = v \int_0^1 L_j L'_k d\eta$$

$$F_{jk}^e = \int_0^1 L'_j L'_k d\eta$$

integralleri ile verilir.

D^e , E^e ve F^e matrislerinin 2×2 tipinde olması için $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı için j, k yalnız 1 ve 2 değerlerini alır. D^e , E^e ve F^e matrisleri sırasıyla

$$D^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E^e = \frac{1}{2} v \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \frac{1}{h} (1 + \varepsilon u_1)$$

$$F^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinindedir.

Tüm elemanların birleştirilmesiyle aşağıdaki denkleme

$$[D + bF] \frac{\partial u}{\partial t} + [E]u = 0 \quad (4.10)$$

yol gösterir ve $u = (u_0, u_1, \dots, u_N)^T$ tir, bütün nodal değerlerini içerir. Üç matrisin bir araya gelmesi tridiagonaldır.

Her bir matris için genel satır aşağıdaki biçime sahiptir.

$$D : \frac{1}{6}(1, 4, 1)$$

$$F : (-1, 2, -1)$$

$$E : \frac{1}{2}(-v_{m-1}, v_{m-1} - v_m, v_m)$$

(4.10) denkleminin tipik bir üyesi

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{6} - b \right) u_{m-1} + \left(\frac{2}{3} + 2b \right) u_m + \left(\frac{1}{6} - b \right) u_{m+1} \right] \\
& = \frac{1}{2} v_{m-1} u_{m-1} - \frac{1}{2} (v_{m-1} - v_m) u_m - \frac{1}{2} v_m u_{m+1} = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklindedir, burada v_m ,

$$v_m = \frac{1}{h} (1 + \varepsilon u_m^n)$$

olarak verilir.

Adi diferansiyel denklemlerin bu kümesine bir nümerik çözümünü bulmak için Crank-Nicolson yaklaşımını kullanabiliriz. Bir zaman merkezi $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ olarak alınır.

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (u_m^{n+1} - u_m^n) \tag{4.12}$$

$$u_m = \frac{1}{2} (u_m^{n+1} + u_m^n) \tag{4.13}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{6} - b - \frac{\Delta t}{4} v_{m-1} \right) u_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{2}{3} + 2b + \frac{\Delta t}{4} [v_{m-1} - v_m] \right) u_m^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - b + \frac{\Delta t}{4} v_m \right) u_{m+1}^{n+1} \\
& = \left(\frac{1}{6} - b - \frac{\Delta t}{4} v_{m-1} \right) u_{m-1}^n + \left(\frac{2}{3} + 2b - \frac{\Delta t}{4} [v_{m-1} - v_m] \right) u_m^n + \left(\frac{1}{6} - b - \frac{\Delta t}{4} v_m \right) u_{m+1}^n
\end{aligned} \tag{4.14}$$

recurrence bağıntısını buluruz.

Sınır şartları $u_0 = 0$ ve $u_N = 0$ iken $U(x_0, t) = 0$ ve $U(x_N, t) = 0$ olmasını gerektirir.

Yarı lineer denklemlerin yukarıdaki kümesi, Thomas algoritmasını kullanarak bir çözümün direkt ve hiçbir tekrar gerektirmemesi için tridiagonal bir matrise sahiptir.

Crank-Nicolson metodu uzaysal türevde kapalı kullanıldığı için lineer kararlılık analizi algoritmanın koşulsuz kararlı olduğunu gösterir.

4.2. Örnek. Düzenli uzun dalga denklemi

$$U(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - vt]) \quad (4.15)$$

solitary dalga çözümüne sahiptir, [36] burada

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu(1 + \varepsilon c)}}$$

ve dalga hızı

$$v = (1 + \varepsilon c)$$

şeklinindedir. Düzenli uzun dalga denklemi yalnız üç tane hareket sabitine sahiptir. [49]

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} U \, dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [U^2 + \mu(U_x)^2] \, dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} [U^3 + 3U^2] \, dx$$

ve bunlar kütle, momentum ve enerjinin korunmasına tekabül ederler

Simülasyonlarda I_1 , I_2 ve I_3 sabitleri nümerik algoritmanın korunmasını kontrol etmek için gözlenir. Ortalama hata ve maksimum hata L_{rms} ve L_∞ olarak tanımlanır.

$$L_{rms} = \|U^{exact} - U^n\|_2 = \left[h \sum_1^N |U_j^{exact} - U_j^n|^2 \right]^{1/2}$$

ve

$$L_\infty = \|U^{exact} - U^n\|_\infty = \max_j |U_j^{exact} - U_j^n|$$

şeklinde tanımlanır. Bu hatalar nümerik ve analitik çözümler arasındaki farkın ölçülmesinde kullanılır ve nümerik projenin tam çözümünü yeniden nasıl iyi olarak ürettiğini gösterir. L_∞ hata normu kesin ve nümerik çözüm arasındaki maksimum farkı ölçtüğünde L_{rms} hata normu çözümler arasındaki ortalama farkın bir ölçümünü verir.

İlk olarak, solitary dalga hareketini göz önüne alacağız, ikinci olarak iki solitary dalganın birbirini etkileşimini çalışacağız.

(a) Daha önce yapılan çalışmalar ile karşılaştırma yapabilmek için tek bir dalga hareketinin simülasyonlarında $\varepsilon = \mu = 1$ alırız. [39,41,44] (3.14) denklemi solitary dalga enliğinin 0.3 olması için $-40 \leq x \leq 60$ aralığı, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $x_0 = 0$ ve $c = 0.1$ ile başlangıç şartı olarak alınır. Sabitler için analitik değerler (3.15) denkleminde

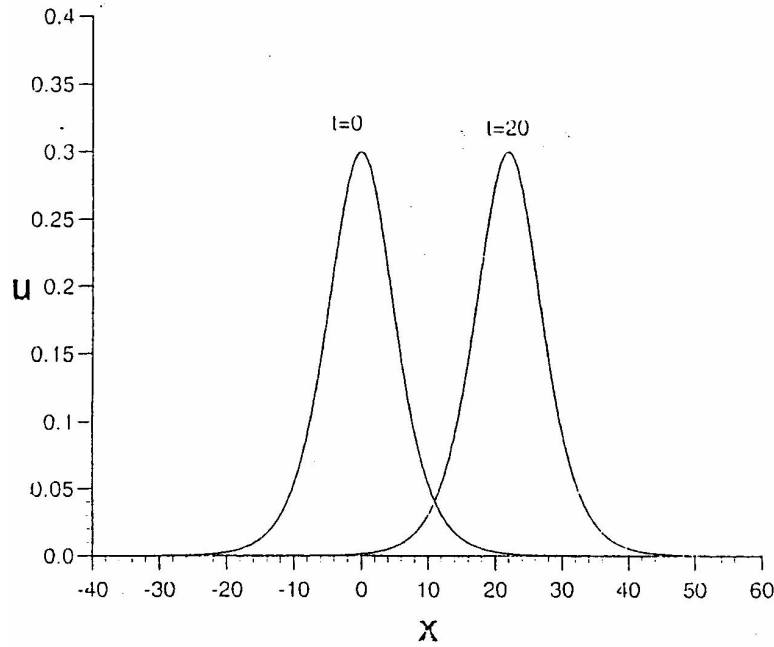
$$I_1 = \frac{6c}{k}, \quad I_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \quad I_3 = \frac{36c^2}{k} \left(1 + \frac{4c}{5}\right)$$

olarak belirlenir.

Simülasyonlar L_{rms} ve L_∞ hata normları $t = 20$ zamanına kadar alındığında çalıştırılır. I_1, I_2 ve I_3 sabitleri Çizelge 4.1 de gösterilir. $t = 20$ ve $t = 0$ zamanlarındaki solitary dalganın grafiği Şekil 4.1 de karşılaştırılır. $t = 20$ zamanında dalga enliğinde çok az bir azalma olduğu açıktır ve gözlenemeyecek kadar küçük bir dalgada fiziksel olmayan salınımlar gelişemez. Şekil 4.2 de çizilen hata dağılımları maksimum dalga yakınında yoğunlaşır ve -2×10^{-4} ve 3×10^{-5} arasında düzgün olarak salınır. Çizelge 4.2 de, standart Galerkin yaklaşımı [41] içinde, uzunluk $h = 0.1$ iken, ikinci dereceden B-spline sonlu elemanların, adım genişliği $h = 0.1$ iken kübik spline interpolasyon fonksiyonlarına [39,41] dayanan bir sonlu farklar metodunun ve lineer elemanlarla en küçük kareler metodunun sonuçları karşılaştırılır [44].

Çizelge 4.1. Enlik 0.3, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ ile solitary dalga
($I_1 = 3.9799497$, $I_2 = 0.81046249$ ve $I_3 = 2.579007$) [35]

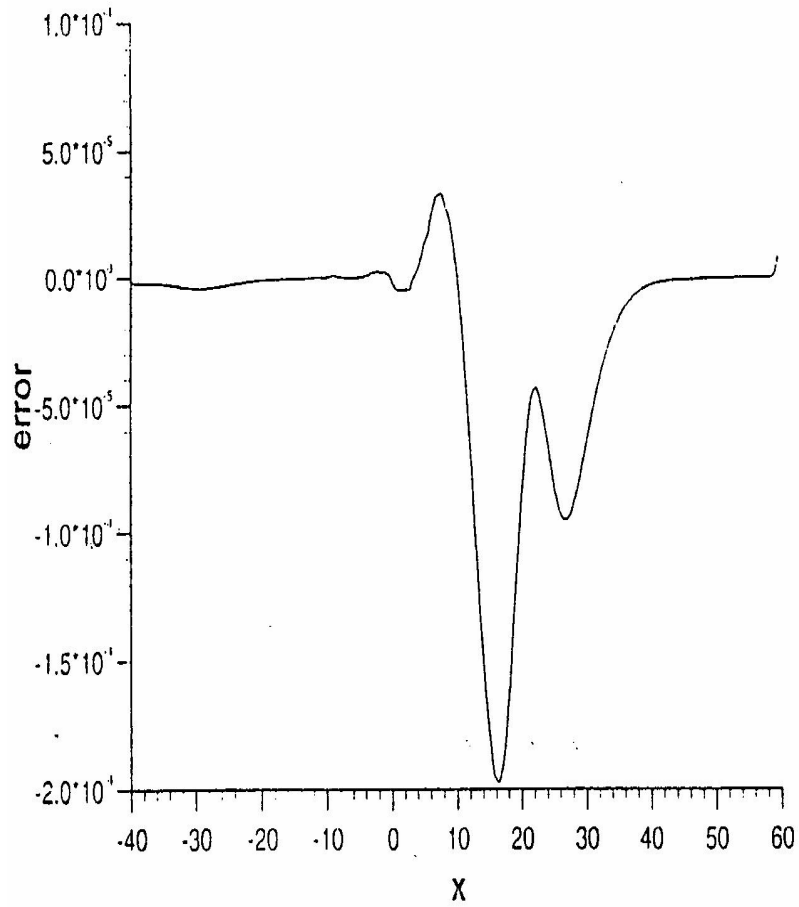
Zaman	L_{rms}	L_∞	I_1	I_2	I_3
0	0.002×10^{-3}	0.007×10^{-3}	3.97993	0.810461	2.57901
4	0.116×10^{-3}	0.054×10^{-3}	3.98039	0.810610	2.57950
8	0.224×10^{-3}	0.100×10^{-3}	3.98083	0.810752	2.57996
12	0.325×10^{-3}	0.139×10^{-3}	3.98125	0.810884	2.58041
16	0.417×10^{-3}	0.171×10^{-3}	3.98165	0.811014	2.58083
20	0.511×10^{-3}	0.198×10^{-3}	3.98206	0.811164	2.58133



Şekil 4.1. $t = 0$ ve 20 de solitary dalga grafikleri [35]

$t = 20$ iken enliği 0.3 olan solitary dalga için L_∞ hata normu 0.198×10^{-3} değerini alır ve I_1 , I_2 ve I_3 hareket sabitleri yüzde 0.1 den daha az değişir. $t = 20$ iken en küçük kareler algoritmasında, I_1 , I_2 ve I_3 hareket sabitleri yüzde 0.25 e kadar değiştiğinde $L_\infty = 1.755 \times 10^{-3}$ olur. Buna tekabül eden simülasyonda ikinci dereceden spline elemanları ile B-spline metodu kullanılarak $t = 20$ zamanında hata normu sadece 0.086×10^{-3} olur ve I_1 , I_2 ve I_3 hareket sabitleri yüzde 8×10^{-4} den daha az değişir. Jain [39] tarafından çalışılmış sonlu fark metodu kübik spline interpolasyon

fonksiyonlarına dayandırılır. Bu algoritmayı tamamlarız [41] ve $t = 20$ zamanında enliği 0.3 olan solitary dalga için $L_{\infty} \cong 68 \times 10^{-3}$ olduğunu ve ayrıca I_1, I_2 ve I_3 hareket sabitlerinin analitik değerlerinin yüzde 10 civarında arttığını buluruz. Şimdiki sonuçlar ayrıca izelge 4.2 de ikinci dereceden Petrov-Galerkin ile bulunan veri ile karşılaştırılır. [47] $t = 20$ zamanında ikinci dereceden Petrov-Galerkin [47] metodu I_1 hareket sabiti 2×10^{-3} den daha az değişirken, I_2 ve I_3 hareket sabitleri 8×10^{-3} civarında değiştiğinde $L_{\infty} = 0.081 \times 10^{-3}$ olduğunu verir.



Şekil 4.2.

$t = 20$ zamanındaki solitary dalga için hata = tam- nümerik özüm [35]

Çizelge 4.2. $t = 20$ zamanında yükseklik 0.3, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ ile solitary dalga [35]

Metot	L_{rms}	L_{∞}	I_1	I_2	I_3
Lineer Galerkin	0.511×10^{-3}	0.198×10^{-3}	3.98206	0.811164	2.58133
İkinci Dereceden Galerkin [41]	0.220×10^{-3}	0.086×10^{-3}	3.97989	0.810467	2.57902
Lineer En Küçük Kareler [44]	4.688×10^{-3}	1.755×10^{-3}	3.98203	0.808650	2.57302
Kübik Sonlu Fark [39,41]	196.1×10^{-3}	67.35×10^{-3}	4.41219	0.897342	2.85361
İkinci Dereceden Petrov-Galerkin [47]	0.227×10^{-3}	0.081×10^{-3}	3.97986	0.810399	2.57880

Bu hatalar şimdiki nümerik metotla bulunanlardan oldukça büyüktür ve korunma buna mukabil zayıftır. 0.3 enliğindeki solitary dalga için lineer elemanlar ile Galerkin metodunun, lineer elemanlarla en küçük kareler yaklaşımından daha doğru fakat ikinci dereceden splineler ile Galerkin ve ikinci dereceden Petrov-Galerkinden daha az doğru olduğunu görürüz. Sonlu farklar metodu hepsinden daha az doğrudur.

İkinci nümerik deneyimde solitary dalganın enliğinin 0.09 olması için $c = 0.03$ tür. Hareket sabitlerinin analitik değerleri $I_1 = 2.109407$, $I_2 = 0.127302$ ve $I_3 = 0.388806$ olarak belirlenir. Bu simülasyonun sonuçları Çizelge 4.3 de gösterilir. Enliği 0.09 olan solitary dalganın bu simülasyonunda, $t = 20$ iken, hareket sabitleri; I_1 yüzde 0.1 den daha az değişirken I_2 ve I_3 yüzde 0.03 den daha az değişir.

Çizelge 4.3. Enlik 0.09, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ ile solitary dalga [35]

Zaman	L_{rms}	L_{∞}	I_1	I_2	I_3
0	0.138×10^{-3}	0.390×10^{-3}	2.10702	0.12730	0.388804
4	0.150×10^{-3}	0.193×10^{-3}	2.10840	0.127303	0.388809
8	0.283×10^{-3}	0.142×10^{-3}	2.10931	0.127303	0.388809
12	0.401×10^{-3}	0.151×10^{-3}	2.10985	0.127304	0.388812
16	0.480×10^{-3}	0.155×10^{-3}	2.10986	0.127305	0.388814
20	0.535×10^{-3}	0.198×10^{-3}	2.10906	0.127305	0.388815

Çizelge 4.4 de simülasyonda ikinci dereceden spline elemanlarla B-spline metodu kullanılarak hareket sabitleri I_1 yüzde 0.12 de yaklaşık olarak değişirken, I_2 ve I_3 yüzde 8×10^{-4} den daha az değişirken L_{∞} hata normunun 0.432×10^{-3} değerine sahip olduğu bulunur [41]. En küçük kareler algoritmasının buna karşılık gelen simülasyonunda $L_{\infty} = 0.24 \times 10^{-3}$ ve I_1, I_2 ve I_3 hareket sabitleri yukarıdaki büyüklüklere benzer olarak değişir [44].

Çizelge 4.4. $t = 20$ zamanında enlik 0.09, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$ ile solitary dalga [35]

Metot	L_{rms}	L_{∞}	I_1	I_2	I_3
Lineer Galerkin	0.535×10^{-3}	0.198×10^{-3}	2.10906	0.127305	0.388815
İkinci Dereceden Galerkin [41]	0.563×10^{-3}	0.432×10^{-3}	2.10460	0.127302	0.388803
Lineer En Küçük Kareler [44]	0.347×10^{-3}	0.239×10^{-3}	2.10769	0.127260	0.388677
Kübik Sonlu Fark [39,41]	14.45×10^{-3}	3.996×10^{-3}	2.333	0.140815	0.430052
İkinci Dereceden Petrov-Galerkin [47]	0.537×10^{-3}	0.316×10^{-3}	2.10908	0.127318	0.388854

Kübik sonlu fark metodu ile $L_\infty = 4 \times 10^{-3}$ olarak bulunur ve deney esnasında I_1 , I_2 ve I_3 hareket sabitlerinin analitik değerleri yüzde 10 kadar artar [40].

İkinci dereceden B-splinelere ile Petrov-Galerkin metodu kullanılarak simülasyonda hareket sabitleri; I_1 yüzde 0.1 den daha az değişirken, I_2 ve I_3 yüzde 0.013 den az değişirken $L_\infty = 0.316 \times 10^{-3}$ değerini aldığı bulunur [47]. Bu hatalar, mevcut nümerik metotla bulunanlardan oldukça büyüktür ve koruma zayıftır. En küçük kareler algoritmasının en yüksek ortalama doğruluğa sahip olduğunu ve ayrıca daha küçük solitary dalga için Çizelge 4.1 de gösterilenden daha iyi bir korumaya sahip olduğunu buluruz [44]. Çizelge 4.5 de çeşitli yer zaman adımları kullanılır ve $h = 0.25$ seçilip $\Delta t = 0.2$ ile birlikte alındığında en iyi doğrulukta simülasyonu buluruz.

Çizelge 4.5. $t = 20$ zamanında, 0.09 enliğindeki solitary dalga için [35]
hata normları, $-40 \leq x \leq 60$

h	Δt	L_{rms}	L_∞
0.025	0.025	35.9×10^{-3}	10.3×10^{-3}
0.05	0.05	3.21×10^{-3}	1.023×10^{-3}
0.125	0.1	0.535×10^{-3}	0.198×10^{-3}
0.25	0.2	0.177×10^{-3}	0.067×10^{-3}
0.5	0.4	0.31×10^{-3}	0.094×10^{-3}
1.0	0.8	1.11×10^{-3}	0.345×10^{-3}
4.0	0.8	6.00×10^{-3}	1.89×10^{-3}

Solitary dalganın enliği azalırken çarpıntı genişler ve doğruluğun sürdürülebilmesi için çözüm bölgesini artırmak gerekli olabilir. Bölgenin $-40 \leq x \leq 60$ aralığından $-80 \leq x \leq 120$ aralığına 2 katının olmasının etkisi Çizelge 4.6 da gösterilir. L_{rms} ve L_∞ hata normları 2.3 kadar bir faktör kadar azaltıldığı zaman, yer adımı 0.25, zaman adımı 0.2 için doğrulukta maksimum gelişme bulunur.

Çizelge 4.6. $t = 20$ zamanında, 0.09 enliğindeki solitary dalga için [35]

hata normları, $-80 \leq x \leq 120$

h	Δt	L_{rms}	L_{∞}
0.05	0.05	3.072×10^{-3}	1.021×10^{-3}
0.125	0.1	0.106×10^{-3}	0.041×10^{-3}
0.25	0.2	0.078×10^{-3}	0.029×10^{-3}
0.5	0.4	0.260×10^{-3}	0.094×10^{-3}

Çizelge 4.7 de daha küçük solitary dalga için dahi, $3c = 0.03$, hata normlarını ve sabitleri veririz. $-80 \leq x \leq 120$ aralığı, $h = 0.25$ ve $\Delta t = 0.2$ ile mükemmel sonuçlar buluruz.

Simülasyon boyunca I_1 hareket sabiti yüzde 0.023 civarında değişirken ve I_2, I_3 hareket sabitleri yüzde 5×10^{-3} den çok az değişirken her iki hata normu 5×10^{-5} den küçük kalır. Yer ve zaman adımlarındaki değişimlerin etkisi Çizelge 4.8 de gözlenir. $h = 0.25$ ve $\Delta t = 0.2$ seçildiğinde en küçük hata normlarını buluruz.

Çizelge 4.7. Solitary dalga [35] için enlik = 0.03, $h = 0.25$, $\Delta t = 0.2$, $-80 \leq x \leq 120$

Zaman	L_{rms}	L_{∞}	I_1	I_2	I_3
0	0.021×10^{-3}	0.042×10^{-3}	1.205551	0.024167	0.072938
4	0.014×10^{-3}	0.028×10^{-3}	1.205685	0.024168	0.072938
8	0.012×10^{-3}	0.019×10^{-3}	1.205766	0.024168	0.072939
12	0.012×10^{-3}	0.013×10^{-3}	1.205811	0.024168	0.072939
16	0.014×10^{-3}	0.008×10^{-3}	1.205832	0.024168	0.072939
20	0.015×10^{-3}	0.006×10^{-3}	1.205834	0.024168	0.072940

Çizelge 4.8. $t = 20$ zamanında, 0.03 enliğindeki solitary dalga için [35]

hata normları, $-80 \leq x \leq 120$

h	Δt	L_{rms}	L_{∞}
0.125	0.1	0.136×10^{-3}	0.035×10^{-3}
0.25	0.2	0.015×10^{-3}	0.006×10^{-3}
0.5	0.4	0.050×10^{-3}	0.015×10^{-3}

(b) Çalışacağımız ikinci problem iki solitary dalganın etkileşimleri olacaktır. Başlangıç şartı olarak

$$U(x,t) = 3c_1 \operatorname{sech}^2(k_1[x - v_1t - x_1]) + 3c_2 \operatorname{sech}^2(k_2[x - v_2t - x_2]) \quad (4.16)$$

denklemini kullanırız, burada aşağıdaki şekildedir

$$k_j = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c_j}{\mu(1 + \varepsilon c_j)}}, \quad v = 1 + \varepsilon c_j$$

$t = 0$ da hesaplanan iki solitary dalgayı üretir. Tekrar bu simülasyonlarda $\varepsilon = \mu = 1$ alırız. $x = x_1$ de $3c_1$ ve $x = x_2$ de $3c_2$ enliğinde olur. Büyük olan küçük olanın soluna yerleştiğinde bir etkileşim oluşur. $-200 \leq x \leq 400$ aralığı, $h = 0.12$ ve $\Delta t = 0.1$ kullanılarak ve 400 zamanı için simülasyon çalıştırılarak $c_1 = 0.2$, $x_1 = -177$, $c_2 = 0.1$ ve $x_2 = -147$ ile bir etkileşim gibi çalışırız. Burada kesin analitik iki dalga çözümü olmadığı için simülasyonların doğruluğu algoritma ile üretilen korumanın derecesi tarafından tahmin edilir.

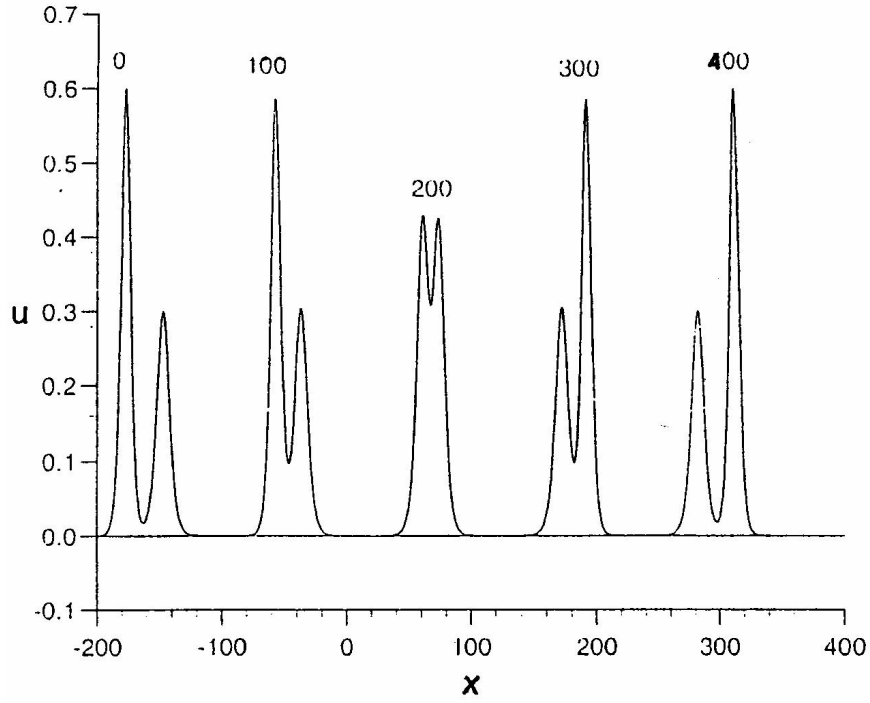
Çizelge 4.9. enlikleri 0.3 ve 0.6 olan iki solitary dalganın etkileşimi için [35]

sabitler, $h = 0.12$, $\Delta t = 0.1$

Zaman	I_1	I_2	I_3
0	9.8586	3.2449	10.7788
40	9.8642	3.2456	10.7809
80	9.8683	3.2475	10.7872
120	9.8719	3.2491	10.7928
160	9.8751	3.2506	10.7979
200	9.8786	3.2523	10.8036
240	9.8825	3.2544	10.8109
280	9.8854	3.2557	10.8156
320	9.8883	3.2569	10.8197
360	9.8907	3.2576	10.8220
400	9.8930	3.2585	10.8251

Yer/zaman adım kombinasyonları 0.12 / 0.1 olduğunda I_1 , I_2 ve I_3 hareket sabitlerinin yer/zaman adım kombinasyonlarının 0.05 / 0.05 seçildiği zamandan daha yüksek derecede koruma gösterdiklerini buluruz.

$h = 0.12$ ve $\Delta t = 0.1$ ile simülasyon sırasında hareket sabitlerinin değişimi Çizelge 4.9 da verilir; zaman 0 dan 400 e kadar 100 er adım ile ilerlerken etkileşim grafikleri Şekil 4.3 de gösterildiğinde her bir değişim yüzde 0.45 den daha az değişir.



Şekil 4.3.

$t = 0$ dan $t = 400$ e kadar olan zamanda solitary dalgaların etkileşim grafikleri [35]

$t = 400$ zamanında küçük dalga $x = 281.68$ değerine ulaşırken büyük olan $x = 311.56$ değerini alarak geçti. 0.63×10^{-4} enliğindeki çok küçük bir dalga $x = 233.8$ arkasında bırakılır. Etkileşimle düzeni bozulmayan daha büyük dalga 303 noktasına ulaşacaktır, küçük dalga $t = 400$ de 293 e ulaşır. Etkileşim büyük olan dalgada $\delta x = 8.56$ nın ileri bir safhasında sebep olmuştur ve küçük dalgada da geciktirme safhası $\delta x = -11.32$ dir. Bu gözlem çok daha büyük enliği olan dalgalardaki daha önceki nümerik değerlerle uyuyor [50]. Bu sonuçların doğruluğu daha büyük yer ve zaman adımları kullanılarak etkileşimi beklenir.

BÖLÜM V

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bölüm II de EW denklemi lineer sonlu elemanlarla Galerkin yaklaşımı kullanarak sayısal olarak çözülür. Sayısal çözüm yayılan bir zaman ölçüsü üzerinde bulunan solitary dalga hareketinin doğru simülasyonu ile şartlara bağlı olmayan sağlam bir algoritmaya öncülük eder.

Bulunur ki; $h = \Delta t = 0.04$ için 3.0 enliğinde olan solitary dalgalarda, lineer elemanlar Galerkin metodu, Petrov-Galerkin metodundan daha doğrudur ve aynı zamanda solitary dalga için referans [19] de verileden daha iyi koruma olduğu bulunur. Ayrıca daha küçük dalga için enliği 0.03 için mükemmel sonuç bulunur.

Undular bore modellendiğinde elde edilir ki I_1, I_2, I_3 niceliklerindeki artan oranları daha iyi teorik değerlerin göstergesi olan simülasyonda hesaplandı.

Bölüm III de lineer sonlu elemanlar kullanarak bir Galerkin metoduna dayanan Burger denkleminin çözümü için sayısal bir algoritma geliştirilir. Lineer sonlu elemanlarla Galerkin yaklaşımı, Burger denklemi için çözümler olarak bilinen çözümlere tam olarak model olan şartsız, kararlı bir algoritma ortaya koyar.

Bu algoritmanın performansı, literatürde uygun olan datalarla iyi bilinen üç probleme, çözümleri ile karşılaştırılarak araştırılır. Yeni metod, yapışkan katsayısının küçük değerler için bile Burger denklemi için daha yüksek derecede tam sayısal çözümler ortaya koyar. Metot diğer metotların çoğundan daha doğru sonuçları üretti.

Bölüm IV de RLW denklemi sonlu elemanlarla Galerkin yaklaşımı kullanılarak nümerik olarak çözülür. Nümerik(sayısal) çözüm, küçük enliktteki bir solitary dalganın enlik, yer ve hız modelleri olan koşulsuz, kararlı bir algoritmaya yol açar.

0.3 enliğindeki solitary dalga, lineer elemanlarla Galerkin metodu en küçük kareler yaklaşımından daha doğrudur, fakat ikinci dereceden splineler Galerkinden daha az doğruluğu var.

Küçük enliği olan her iki solitary dalganın etkileşimlerinin bunun gibi simülasyonları vardır. $t = 400$ zamanında etkileşim hemen hemen mükemmeldir ve pratik olarak dalgalar önceki enlik ve hızları ile meydana gelirler. [50]

KAYNAKLAR

- [1] Burden, R. L. and Faires, J. D., "Numerical Analysis", 3rd ed., Prindle, Weber & Schmidt, (1985).
- [2] Davies, A. J., "The Finite Element Method: A First Approach", Clarendon Press Oxford, (1980).
- [3] Wait, R., and Mitchell, A. R., "Finite Element Analysis and Applications", John Wiley & Sons, (1985).
- [4] Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method", 3rd ed., McGraw-Hill, (1982).
- [5] Zienkiewicz, O. C., and Morgan, K., "Finite Element and Approximation" John Wiley & Sons, (1983).
- [6] Clough, R. W., "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis", J. Struct. Div., ASCE, Proc. 2nd Conf. Electronic Computation, 345-378, (1960).
- [7] Reddy, J. N., "An Introduction to the Finite Element Method", McGraw-Hill, Inc., (1985).
- [8] Dhatt, G., and Touzot, G., "The Finite Element Method Displayed", John Wiley & Sons, (1984).
- [9] Akin, J.E., "Application and Implementation of Finite Element Methods", Academic Press, (1982).
- [10] D.H. Peregrine, , Calculations of the development of an undular bore, J. Fluid Mech., 25, (1996) 321-330
- [11] P.J.Morrison, J.D.Meiss, J.R.Carey, Scattering of RLW solitary waves, Physica 11D (1984) 324-336.

- [12] L.R.T Gardner, Gardner G. A., Solitary wave of regularized long wave equation, J. Comput. Phys. 91, 1990. 441-459.
- [13] L.R.T, Gardner, .G.A., Gardner I.Dağ,.A., B-spline finite element method for the RLW equation, Comm., Num. Meth. Eng., 11.(1995) 59-68.
- [14] L.R.T Gardner,.G.A Gardner, .A., Dogan, A., A least-squares finite element scheme for the RLW equation, Comm. Num. Meth. Eng., 12, (1996) 795-804.
- [15] L.R.T.,Gardner, G.A.Gardner, F.A., Ayoub, N.K., Amein, Modelling an undular bore with B-splines, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 147, (1997) 147-152.
- [16] İ.Dağ, Least squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation, comp. Meth. Appl. Mech. Eng, 182, (2000) 205-215.
- [17] A .Dogan, Numerical solutions of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, Comm. Num., Meth. Eng.,17, (2001) 485-494.
- [18] L.R.T Gardner, G.A.Gardner, Solitary waves of the equal width wave equation, J.Comput.Phys.101 (1992) 218-223.
- [19] L.R.T., Gardner, G.A. Gardner, F.A Ayoub,.N.K. Amein,, Simulations of the EW undular bore, Comm. Num. Meth. Eng. , 13, (1997) 583-592.
- [20] S.I. Zaki,, A least-squares finite element scheme for the EW equation, Comp. Meth.Appl. Mech Eng., 189,(2000) 587-594,
- [21] A. Dogan, , Numerical Solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's Meth., Appl. Math. Model., 26 (2002), 771-783,.
- [22] J.Burgers, A.Mathematical model illustrating the theory of turbulence, in Advanced in Applied Mechanics,Academic Pres,New York, 1948, pp.171-199

- [23] J.D. Cole, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, Quart. J. Appl. Maths 9 (1951) 225-236
- [24] E. Hopf, The Partial Differential Equation $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$, Commun. Pure Appl. Math., 9, (1950) 201-230,.
- [25] E. Varoğlu, W.D.L. Finn, Space-time finite elements incorporating characteristics for the Burgers' equation, Int. Jour. Numer. Meth. Eng. 16, (1980.) 171-184,
- [26] J. Caldwell, P. Wanless, A.E. Cook, A finite element approach to Burger's equation, Appl. Math. Model, 5, (1981.) 189-193,
- [27] B.M. Herbst, S.W. Schoombie, A.R. Mitchell, A Moving Petrov-Galerkin method for transport equations, Int. J. Num. Meth. Eng., 18, (1983) 1321-1336,
- [28] I. Christie, D. F. Griffiths, A.R. Mitchell, J. M. Sanz-Serna, Product approximation for non-linear problems in the finite element method, IMA, J. Numer. Anal. 1, (1981). 253-266,
- [29] J. Caldwell, Application of cubic splines to the nonlinear Burgers' equation in: E. Hinton et al. (Eds.), Numerical Methods for Non-Linear Problems, vol.3, Pineridge, Swansea, 1987, pp.253-261
- [30] D. J. Evans, A. R. Abdullah, The group explicit method for the solution Burgers' equations, computing, 32(1984.), 239-253,
- [31] K. Kakuda, N. Tosaka, The generalized boundary element approach to Burgers' equation, Int. J. Numer. Meth. Eng., 29, (1990.) 245-261,
- [32] R.C. Mittal, P. Singhal, Numerical solution of Burger's equations, Commun. Numer. Meth. Eng. 9 (1993) 97-406

- [33] A.H.A Ali, G.A Gardner, L.R.T., Gardner, A collocation solution for Burger' equation using cubic B-Spline finite elements *Comput., Meth .Appl. Mech. Eng. .100* (1992) 325-337.
- [34] N.Nguyen, J.,Reynen, a aspace time finite element approach to Burgers' Equation, in C.Taylor, E. Hinton, D.R.J.Owen, E. Onate (Eds.). *Numerical methods for Non-linear problems, Vol 2, Pinerigde 1982, pp.718-728,*
- [35] A Dogan, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, *Appl. Math. Modell, 26* (2002.), 771-783,
- [36] D.H. Peregrine, Calculations of the development of undular bore, *J.Fluid. Mech. 25* (1966.), 321-330,
- [37] J.L., Bona, W.G . Pritchard, L.R. Scott, Numerical schemes for a model of nonlinear dispersive waves, *J. Comp. Phys. 60,* (1985) 167-196.
- [38] J.C Eilbeck, ,G.R. McGuire. numerical study of the regularized long-wave equation. I. numerical methods, *J.Comp. Phys., 19,* (1975) 43-62,
- [39] P.C Jain, R. Shankar, T.V., Singh, Numerical solution of regularized long-wave equation, *Comm. Num. Methods Eng., 9,* (1993). 579-586,
- [40] L.R.T Gardner, G. A ., Gardner., Solitary waves of regularized long wave equation, *J. Comp. Phys. 91,* (1990.) 441-459,
- [41] L.R.T., Gardner, G.A Gardner. İ., Dağ, B-spline finite element method for the RLW equation, *Comm., Num.. Meth. Eng., 11,* (1995) 59-68,
- [42] N Nguyen, J. Reynen, A space-time least-square finite element scheme for advection-diffusion equations, *Comp., Meth. Appl. Mech. Eng. 42,* (1984) 331-342.

[43] N.Nguyen, J.Reynen, A space time finite element approach to Burgers' equation. in C.Taylor, E. Hinton, D.R.J.Owen, E. Onate (Eds.).Numerical methods for Non-linear problems, Vol 2, Pineridge 1982, pp.718-728..

[44] L.R.T Gardner. G.A. Gardner, A Dogan, A., least-squares finite element scheme for the RLW equation, Comm. Num. Meth. Eng., 12, (1996). 795-804,

[45] L.R.T Gardner, G.A., Gardner., F.A Ayoub., N.K., Amein, Simulations of the EW undular bore, Comm. Num. Meth. Eng., 13, (1997), 583-592.

[46] L.R.T., Gardner, G.A., Gardner F.A Ayoub.,, N.K Amein., Modelling an undular bore with B-splines, Comp Meth Appl. Mech. Eng., 147, (1997) 147-152.

[47] A Dogan,, Numerical solutions of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, Comm. Num. Meth. Eng,17, (2001), 485-494.

[48] O .C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, third ed., McGraw-Hill.London, 1977

[49] P .J Olver, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 85, (1979) 143-159,

[50] J.L Bona, W.G Pritchard, L.R., Scott, Solitary wave interaction, Phys of Fluids, 23, (1980) , 438-441

