

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBEDEN NEUTRAL FONKSİYONEL DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN SALINIMI

Bahri BOYBAY

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Tuncay CANDAN

Ağustos 2007

ÖZET

İKİNCİ MERTEBEDEN NEUTRAL FONKSİYONEL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMI

BOYBAY, Bahri
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Tuncay CANDAN

Ağustos 2007, 26 sayfa

Bu tezde aşağıdaki sabit ve periyodik katsayılı ikinci mertebeden neutral fonksiyonel diferensiyel denklemlerin salınımını inceledik.

$$[x(t) + \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \sigma)]'' = q \int_c^d x(t - \xi) d\xi + p \int_c^d x(t + \xi) d\xi$$

ve

$$[x(t) + \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \tau)]'' + \delta \left(\int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi \right) = 0 .$$

Anahtar Sözcük: Salınım, Fonksiyonel Diferensiyel Denklem.

SUMMARY

OSCILLATION FOR SECOND ORDER NEUTRAL FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

BOYBAY, Bahri
Nigde University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assistant Professor Dr. Tuncay CANDAN

August 2007, 26 pages

In this thesis, we consider the oscillation of the constant and periodic coefficients of the second order neutral functional differential equations of the form

$$[x(t) + \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \sigma)]'' = q \int_c^d x(t - \xi) d\xi + p \int_c^d x(t + \xi) d\xi$$

and

$$[x(t) + \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \tau)]'' + \delta \left(\int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi \right) = 0.$$

Key Word: Oscillation, Functional Differential Equation.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada Salınım kavramı ve İkinci Mertebeden Neutral Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler incelenmiştir. Buradaki esas amaç ikinci mertebeden neutral fonksiyonel diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı olmaları için yeterli şartları bulmaktır. Yeterli şartlar araştırılırken verilen denklemlerdeki katsayılar irdelenmiştir.

Salınım problemi ve İkinci Mertebeden Neutral Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler hem teorik hem de pratik boyutludur. Özellikle ikinci mertebeden neutral fonksiyonel diferensiyel denklemlere mühendislikte elastik çubuğa eklenen titreşen kütlelerle çalışırken, teorikte ise bazı değişik problemlerdeki Euler denklemlerinde rastlanır.

Son yıllarda neutral fonksiyonel diferensiyel denklemler ve salınım konusunda Grace ve Lalli [1],[2] ile özellikle yüksek mertebeden denklemleri inceleyen Candan [3] ve Dahiya [4] bizlere yol gösterici çalışmalar yapmışlardır.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında hiçbir katkısını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Tuncay CANDAN’a teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca Matematik Bölümü öğretim elemanlarına ve bölüm personeline de manevi katkılarından dolayı teşekkür ederim. Yine bana bütün bu imkânları sağlayan ve her an yanımda olan aileme de saygılar sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
SUMMARY	iv
ÖNSÖZ	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
BÖLÜM I. GİRİŞ	1
1.1 Temel Kavramlar	1
1.1.1 Fonksiyonel diferensiyel denklemler	1
1.1.2 Gecikmeli (Delay, Retarded) fonksiyonel diferensiyel denklemler	1
1.1.3 İleri (Advanced) fonksiyonel diferensiyel denklemler	2
1.1.4 Karma (Mixed) fonksiyonel diferensiyel denklemler	2
1.1.5 Neutral fonksiyonel diferensiyel denklemler	2
1.2 Salınım (Oscillation)	3
BÖLÜM II.	4
Sabit Katsayılı Denklemlerle İlgili Teoremler	4
BÖLÜM III.	13
Periyodik Katsayılı Denklemlerle İlgili Teoremler	13
BÖLÜM IV. SONUÇLAR	25
KAYNAKLAR	26

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu çalışmanın ilk bölümünde fonksiyonel diferensiyel denklemler tanımlanış ve bunların çeşitleri birer örnekle verilmiştir. Sonrasında Salınım (Oscillation) tanımlanmıştır.

Bölüm II’de

$$[x(t) + \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \sigma)]'' = q \int_c^d x(t - \xi) d\xi + p \int_c^d x(t + \xi) d\xi$$

şeklindeki sabit katsayılı, Bölüm III’te ise

$$[x(t) + \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \tau)]'' + \delta \left(\int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi \right) = 0$$

şeklindeki periyodik katsayılı ikinci mertebeden neutral fonksiyonel diferensiyel denklemlerle ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

1.1 Temel Kavramlar

1.1.1 Fonksiyonel diferensiyel denklemler

Adi diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri sadece t anında hesaplanır. Gerçek hayatta bazı olaylar sadece şuan ki zamana değil geçmiş ve gelecek zamana da bağlı olabilir. Bu tür diferensiyel denklemlerde sadece t değil de bilinmeyen fonksiyon ve türevleri $t - \tau$ veya $t + \tau$, $\tau > 0$ anında hesaplanır. Bu tür diferensiyel denklemlere fonksiyonel diferensiyel denklemler denir.

1.1.2 Gecikmeli (Delay, Retarded) fonksiyonel diferensiyel denklemler

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \quad \tau(t) \geq 0$$

şeklindeki diferensiyel denklemlerdir. Burada en yüksek dereceden türev t anında, diğerleri ise t veya t ’den daha önceki zamanlarda hesaplanır.

Örnek 1.1.1 $x'(t) = x(t-1) + 2t x\left(\frac{t}{2}\right) + 1$ denklemi delay fonksiyonel diferensiyel denklemlere bir örnektir.

1.1.3 İleri (Advanced) fonksiyonel diferensiyel denklemler

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t + \tau(t))), \quad \tau(t) \geq 0$$

şeklindeki diferensiyel denklemlerdir. Burada en yüksek dereceden türev t anında, diğerleri t veya t 'den daha ileriki zamanlarda hesaplanır.

Örnek 1.1.2 $x'(t) = -x(t+1) + x(t + \sqrt{t}) - t + 1$ denklemi advanced fonksiyonel diferensiyel denklemlere bir örnektir.

1.1.4 Karma (Mixed) fonksiyonel diferensiyel denklemler

Mixed fonksiyonel diferensiyel denklemler hem delay hem de advanced terimlerin bulunduğu denklemlerdir.

Örnek 1.1.3 $x'(t) = 2x(t-1) - 3x(t+1) + 1$ ve $x'(t) = -x(t-1)x(t) - tx(t+1)$ denklemleri mixed fonksiyonel diferensiyel denklemlere birer örnektir.

1.1.5 Neutral fonksiyonel diferensiyel denklemler

Burada en yüksek dereceden türev sadece t 'ye bağlı değil de hem delay hem de advanced terimlere bağlı olabilir.

Örnek 1.1.4 $x'(t) = -\frac{t}{t+1} x'(t-1) + x(t-2) + 3 \sin t$ denklemi de neutral tipli fonksiyonel diferensiyel denklemlere bir örnek teşkil eder.

Örnek 1.1.5 $y'(t) = -a(t)y(t) + b(t)y(t - \tau(t))e^{-\beta(t)y(t - \tau(t))}$ denklemi Nicholson'un kelebek üreme modelini gösteren bir fonksiyonel diferensiyel denklemdir.

1.2 Salınım (Oscillation)

Tanım 1.2.1 $x(t)$ aşıkâr olmayan bir çözüm olsun. Eğer $t > t_0$ için $x(t)$ çözümünün keyfi büyüklükte sıfırı varsa $x(t)$ salınımlıdır denir. Yani bir $\{t_n\}$ dizisi vardır öyle ki $x(t_n) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ salınımlı olmayan çözüm için bir t_1 sayısı vardır öyle ki $t \geq t_1$ olduğunda $x(t) \neq 0$.

Tanım 1.2.2 $x(t)$, keyfi $T > 0$ için (T, ∞) aralığında işaret değiştiriyorsa $x(t)$ aşıkâr olmayan çözüme salınımlıdır denir.

Aslında salınımlı olma ve salınımlı olmama kavramları delay (veya advenced) denklemlerde karşımıza çıkar.

Örneğin $x(t) = 1 - \sin t$ fonksiyonu Tanım 1.2.1 için salınımlı iken, Tanım 1.2.2 için salınımlı değildir.

Bazen salınımlı olma ve salınımlı olmama kavramları delay (veya advenced) denklemlerde karşımıza çıkar.

Örneğin $x'(t) + x(t) = 0$ ve $x''(t) - x(t) = 0$ denklemlerinin salınımlı çözümleri olmamasına rağmen $x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ ve $x''(t) - x(t - \pi) = 0$ denklemlerinin çözümleri salınımlıdır.

Gerçekten yukarıdaki ilk iki denklemin çözümleri sırasıyla $x(t) = e^{-t}$ ve $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$, ikinci denklem çiftinin çözümleri ise sırasıyla $x(t) = \sin t$ ve $x(t) = \cos t$.

BÖLÜM II

SABİT KATSAYILI DENKLEMLERLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde

$$[x(t) + \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \sigma)]'' = q \int_c^d x(t - \xi) d\xi + p \int_c^d x(t + \xi) d\xi$$

tipindeki ikinci mertebeden neutral fonksiyonel diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı olmaları için gerekli şartlar verilmiştir.

Burada $\lambda, \tau, \mu, \sigma$ negatif olmayan sabitler, q ve p pozitif sabitler, $[c, d]$ pozitif aralıktır.

Aşağıdaki lemma teoremlerin ispatlarında kullanılacaktır.

Lemma 2.1.1 a ve h pozitif sabitler,

$$a^{1/n} \left(\frac{h}{n} \right) e > 1$$

olsun. O zaman,

(i)
$$x^{(n)}(t) - a x(t - h) \geq 0$$

eşitsizliğinin n çift sayısı ve $t \geq t_0$ için sınırlı $x(t) > 0$ çözümü yoktur.

(ii)
$$x^{(n)}(t) - a x(t + h) \geq 0$$

eşitsizliğinin n çift sayısı ve $t \geq t_0$ için sınırsız $x(t) > 0$ çözümü yoktur. Yani yukarıdaki eşitsizlikten $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ve yeterince büyük t sayıları için $x^{(i)}(t) > 0$ şartını sağlayan $x(t)$ çözümü yoktur [5].

$$[x(t) + \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \sigma)]'' = q \int_c^d x(t - \xi) d\xi + p \int_c^d x(t + \xi) d\xi \quad (2.1)$$

Burada $\lambda, \tau, \mu, \sigma$ negatif olmayan sabitler, q ve p pozitif sabitler, $[c, d]$ pozitif aralıktır.

Teorem 2.1.1 Eğer $1 + \lambda \geq \mu > 0$, $c > \tau$,

$$\left(\frac{p(d-c)}{1+\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{c}{2}\right)e > 1 \quad (2.2)$$

ve

$$\left(\frac{q(d-c)}{1+\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{c-\tau}{2}\right)e > 1 \quad (2.3)$$

ise, o zaman (2.1) denkleminin salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (2.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. $t_0 \geq 0$ olmak üzere $t \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olduğu kabul edilsin.

$$z(t) = x(t) + \lambda x(t-\tau) - \mu x(t+\sigma)$$

olarak alınırsa (2.1) denkleminde $t_1 \geq t_0$ olmak üzere $t \geq t_1$ için

$$z''(t) = q \int_c^d x(t-\xi) d\xi + p \int_c^d x(t+\xi) d\xi \quad (2.4)$$

bulunur. (2.4) denkleminde $z''(t) > 0$ olduğunu görülür. O zaman $z^{(i)}(t)$ ($i = 0, 1, 2$), $[t_1, \infty)$ aralığında sabit işaretlidir. Burada dikkate alınması gereken iki durum vardır. (a) $t \geq t_1$ için $z(t) < 0$, (b) $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$.

(a) $t \geq t_1$ için $z(t) < 0$ durumu. $v(t) = -z(t)$ şeklinde tanımlanıp (2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$v''(t) + q \int_c^d x(t-\xi) d\xi + p \int_c^d x(t+\xi) d\xi = 0 \quad (2.5)$$

bulunur. Diğer yandan $t \geq t_1$ için

$$0 < v(t) = -z(t) = -x(t) - \lambda x(t-\tau) + \mu x(t+\sigma) \leq \mu x(t+\sigma)$$

ve buradan

$$0 < v(t) \leq \mu x(t+\sigma).$$

Böylece bir $T \geq t_1$ olmak üzere $t \geq T$ için

$$\frac{1}{\mu} v(t-\sigma) \leq x(t) \quad (2.6)$$

bulunur. Diğer taraftan (2.5) denkleminde

$$v''(t) + q \int_c^d x(t-\xi) d\xi \leq v''(t) + q \int_c^d x(t-\xi) d\xi + p \int_c^d x(t+\xi) d\xi = 0,$$

yani

$$v''(t) + q \int_c^d x(t-\xi) d\xi \leq 0 \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.6) eşitsizliği (2.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $t \geq T_1 \geq T$ için

$$v''(t) + \frac{q}{\mu} \int_c^d v(t - \sigma - \xi) d\xi \leq 0$$

eşitsizliği bulunur.

$z^{(i)}(t)$ ($i = 0, 1, 2$), $[t_1, \infty)$ aralığında sabit işaretli olduğu için $v^{(i)}(t)$ de $[t_1, \infty)$ aralığında sabit işaretlidir. Bu yüzden $v'(t)$, ya pozitif ya da negatiftir.

Eğer $v'(t) > 0$, $t \geq T_1 \geq t_1$ ise

$$v''(t) + \frac{q(d-c)}{\mu} v(t - (\sigma + d)) \leq 0,$$

eğer $v'(t) < 0$, $t \geq T_1 \geq t_1$ ise

$$v''(t) + \frac{q(d-c)}{\mu} v(t - (\sigma + c)) \leq 0.$$

Foster ve Grimmer'e [6] göre $t \geq T_1$ için

$$v''(t) + \frac{q(d-c)}{\mu} v(t - (\sigma + d)) = 0 \quad (2.8)$$

ve

$$v''(t) + \frac{q(d-c)}{\mu} v(t - (\sigma + c)) = 0 \quad (2.9)$$

eşitlikleri pozitif çözüme sahiptir. Ancak (2.8) ve (2.9) eşitlikleri, Teorem 2'ye [7] göre salınımlıdır. Bu da bir çelişkidir.

(b) $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$ durumu.

$$w(t) = z(t) + \lambda z(t - \tau) - \mu z(t + \sigma)$$

olsun. Eğer $w(t) < 0$ ise, (a) durumunda izlenen yol burada da izlenirse yine aynı sonuç elde edilir. Şimdi $t \geq t_1$ için $w(t) > 0$ olduğu kabul edilirse (2.1) ve (2.4) kullanılarak aşağıdaki denklemler kolayca bulunabilir.

$$w''(t) = q \int_c^d z(t - \xi) d\xi + p \int_c^d z(t + \xi) d\xi \quad (2.10)$$

ve

$$[w(t) + \lambda w(t - \tau) - \mu w(t + \sigma)]'' = q \int_c^d w(t - \xi) d\xi + p \int_c^d w(t + \xi) d\xi. \quad (2.11)$$

Yine iki durum vardır. Bunlar: (i) $t \geq t_1$ için $z'(t) > 0$, (ii) $t \geq t_1$ için $z'(t) < 0$.

(i) $t \geq t_1$ için $z'(t) > 0$ durumu. $z(t) > 0$ olduğundan $w''(t) > 0$ olur. (2.10) eşitliğinin her iki tarafında bir kez türev alınırsa $w'''(t) > 0$ olur. Yani $t \geq t_2 \geq t_1$ için $w''(t) > 0$ ve $w'''(t) > 0$ olur. O halde $w''(t)$ artandır. Bu sonuçlar (2.11) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} w''(t) + \lambda w''(t - \tau) &\geq w''(t) + \lambda w''(t - \tau) - \mu w''(t + \sigma) \\ &= q \int_c^d w(t - \xi) d\xi + p \int_c^d w(t + \xi) d\xi \\ &\geq p \int_c^d w(t + \xi) d\xi \end{aligned}$$

yani

$$(1 + \lambda)w''(t) \geq p \int_c^d w(t + \xi) d\xi$$

veya

$$w''(t) \geq \frac{p}{1 + \lambda} \int_c^d w(t + \xi) d\xi.$$

eşitsizliği elde edilir. $w'''(t) > 0$, $w''(t) > 0$ ve $w(t) > 0$ olduğundan $t \geq t_2$ için $w'(t) > 0$ olur. O halde

$$w''(t) \geq \frac{p(d - c)}{1 + \lambda} w(t + c). \quad (2.12)$$

Ancak Lemma 2.1.1 (ii) durumu ve (2.2) koşulundan dolayı (2.12) eşitsizliğinin pozitif çözümü yoktur. Bu yüzden bu bir çelişkidir.

(ii) $t \geq t_1$ için $z'(t) < 0$ durumu. O zaman (2.4) eşitliği ve Kiguradze lemmasından [8] $t \geq t_1$ ve $i = 0, 1, 2$ için $(-1)^i z^{(i)}(t) > 0$. Şimdi $t \geq t_2^* \geq t_1$ için $w'(t) < 0$ olduğunu göstermek için bunun aksi, yani $t \geq t_2^*$ için $w'(t) > 0$ olduğu kabul edilirse

$$0 < w'(t) = z'(t) + \lambda z'(t - \tau) - \mu z'(t + \sigma).$$

$z'(t)$, $[t_2^*, \infty)$ aralığında artan olduğundan

$$0 < w'(t) \leq (1 + \lambda - \mu)z'(t + \sigma) \leq 0$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden $t \geq t_2^*$ için $w'(t) < 0$. $w''(t) > 0$, $w'(t) < 0$ ve $w(t) > 0$ olduğundan da $t \geq t_2^*$ ve $i = 0, 1, 2, 3$ için

$$(-1)^i w^{(i)}(t) > 0. \quad (2.13)$$

Son eşitsizliklerden $w'''(t) < 0$. Buradan $[t_2^*, \infty)$ aralığında $w''(t)$ azalandır. $w''(t)$ fonksiyonunun azalan olduğu (2.11) denkleminde kullanılırsa

$$w''(t) + \lambda w''(t - \tau) \geq w''(t) + \lambda w''(t - \tau) - \mu w''(t + \sigma)$$

$$\begin{aligned}
&= q \int_c^d w(t-\xi) d\xi + p \int_c^d w(t+\xi) d\xi \\
&\geq q \int_c^d w(t-\xi) d\xi
\end{aligned}$$

yani

$$(1+\lambda)w''(t-\tau) \geq q \int_c^d w(t-\xi) d\xi$$

eşitsizliği bulunur. $w(t)$ azalan olduğu için de

$$w''(t) \geq \frac{q(d-c)}{1+\lambda} w(t-(c-\tau)) \quad (2.14)$$

eşitsizliği elde edilir. Fakat Lemma 2.1.1 (i) durumu ve (2.3) koşulundan dolayı (2.14) eşitsizliğinin (2.13) eşitsizliklerini sağlayan çözümü yoktur. Bu da çelişkiye neden olur ve ispat tamamlanır.

Örnek 2.1.1 Aşağıdaki ikinci mertebeden neutral fonksiyonel diferensiyel denklem ele alınsın.

$$\begin{aligned}
&\left[x(t) + \frac{15}{2} e^{\pi/2} x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{17}{2} e^{-2\pi} x(t+2\pi) \right]'' = \\
&30 \frac{e^{\pi}}{(e^{-\pi} + e^{-2\pi})} \int_{\pi}^{2\pi} x(t-\xi) d\xi + 30 e^{-\pi} \int_{\pi}^{2\pi} x(t+\xi) d\xi
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemde $\lambda = \frac{15}{2} e^{\pi/2}$, $\mu = \frac{17}{2} e^{-2\pi}$, $c = \pi$, $d = 2\pi$, $q = 30 \frac{e^{\pi}}{(e^{-\pi} + e^{-2\pi})}$,

$p = 30 e^{-\pi}$, $\tau = \frac{\pi}{2}$ ve $\sigma = 2\pi$ olarak verilen katsayıların Teorem 2.1.1 şartlarını

sağladığı görülmektedir. Bu problemin çözümünün $x(t) = e^t \cos t$ olduğu kolayca gösterilebilir.

$$[x(t) + \lambda x(t+\tau) - \mu x(t+\sigma)]'' = q \int_c^d x(t-\xi) d\xi + p \int_c^d x(t+\xi) d\xi \quad (2.15)$$

Burada $\lambda, \tau, \mu, \sigma$ negatif olmayan sabitler, q ve p pozitif sabitler, $[c, d]$ pozitif aralıktır.

Teorem 2.1.2 Eğer $1 + \lambda \geq \mu > 0$, $c > \tau$, $\sigma > \tau$,

$$\left(\frac{p(d-c)}{1+\lambda} \right)^{1/2} \left(\frac{c-\tau}{2} \right) e > 1 \quad (2.16)$$

ve

$$\left(\frac{q(d-c)}{1+\lambda} \right)^{1/2} \left(\frac{c}{2} \right) e > 1 \quad (2.17)$$

ise, o zaman (2.15) denklemi salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (2.15) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. $t \geq t_0 \geq 0$ için $x(t) > 0$ olduğu varsayalım.

$$z(t) = x(t) + \lambda x(t + \tau) - \mu x(t + \sigma)$$

olsun. Teorem 2.1.1 ispatında olduğu gibi $z^{(i)}(t)$ fonksiyonu $t \geq t_1 \geq t_0$ ve $i = 0, 1, 2$ için sabit işaretlidir. Bundan dolayı $z(t)$ için iki durum söz konusudur. Bunlar: (a) $t \geq t_1$ için $z(t) < 0$, (b) $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$. (a) durumu için yapılacak ispat, Teorem 2.1.1 (a) durumu ile aynı olduğundan ihmal edilmiştir.

(b) $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$ durumu.

$$w(t) = z(t) + \lambda z(t + \tau) - \mu z(t + \sigma)$$

olsun. Burada eğer $w(t) < 0$ ise, bu durum Teorem 2.1.1 (a) durumu için uygulanan yöntem kullanılarak aynı sonuç elde edilir. Şimdi $t \geq t_1$ için $w(t) > 0$ olduğunu kabul edilsin. Diğer taraftan

$$w''(t) = q \int_c^d z(t - \xi) d\xi + p \int_c^d z(t + \xi) d\xi. \quad (2.18)$$

$w''(t)$ eşitliği ve (2.15) denklemi kullanılarak ta

$$[w(t) + \lambda w(t + \tau) - \mu w(t + \sigma)]'' = q \int_c^d w(t - \xi) d\xi + p \int_c^d w(t + \xi) d\xi. \quad (2.19)$$

denklemini bulunur. Yine iki durum söz konusudur. (i) $t \geq t_1$ için $z'(t) > 0$ durumu, (ii) $t \geq t_1$ için $z'(t) < 0$ durumu.

(i) Eğer $t \geq t_1$ için $z'(t) > 0$ ise. O zaman $t \geq t_2 \geq t_1$ için $w''(t) > 0$ ve $w'''(t) > 0$. Böylece $w''(t)$ fonksiyonunun artan olduğu (2.19) denkleminde göz önüne alınırsa

$$(1 + \lambda)w''(t + \tau) \geq p \int_c^d w(t + \xi) d\xi$$

eşitsizliği elde edilir. $t \geq t_2$ için $w'(t) > 0$ olduğundan

$$w''(t) \geq \frac{p(d-c)}{1+\lambda} w(t+(c-\tau)) \quad (2.20)$$

eşitsizliği yazılabilir. Ancak Lemma 2.1.1 (ii) durumu ve (2.16) koşulundan (2.20) eşitsizliğinin pozitif çözümü yoktur. Bu yüzden bu bir çelişkidir.

(ii) Eğer $t \geq t_1$ için $z'(t) < 0$ ise. O zaman Kiguradze lemmasından [8] $t \geq t_1$ ve $i = 0, 1, 2$ için $(-1)^i z^{(i)}(t) > 0$. Şimdi $t \geq t_1$ için $w'(t) < 0$ olduğunu göstermek için bunun aksi, yani $t \geq t_1$ için $w'(t) > 0$ olduğu farz edilsin. $z'(t)$ artan olduğundan

$$0 < w'(t) = z'(t) + \lambda z'(t+\tau) - \mu z'(t+\sigma) \leq (1+\lambda-\mu)z'(t+\sigma) \leq 0.$$

Bu bir çelişkidir. O halde $t \geq t_1$ için $w'(t) < 0$ olur. $t \geq t_1$ için $w(t) > 0$, $w'(t) < 0$ ve $w''(t) > 0$ olduğundan $t \geq t_1$ ve $i = 0, 1, 2, 3$ için

$$(-1)^i w^{(i)}(t) > 0. \quad (2.21)$$

Buradan $w''(t)$ fonksiyonu azalandır. Bu (2.19) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$(1+\lambda)w''(t) \geq q \int_c^d w(t-\xi) d\xi$$

eşitsizliği bulunur. $w(t)$ azalan olduğu için son eşitsizlikten

$$w''(t) \geq \frac{q(d-c)}{1+\lambda} w(t-c) \quad (2.22)$$

bulunur. Fakat Lemma 2.1.1 (i) durumu ve (2.17) koşulundan dolayı (2.22) eşitsizliğinin (2.21) eşitsizliklerini sağlayan çözümü yoktur. Bu da çelişkiye neden olur ve ispat tamamlanır.

$$[x(t) + \lambda x(t-\tau) + \mu x(t+\sigma)]'' = q \int_c^d x(t-\xi) d\xi + p \int_c^d x(t+\xi) d\xi \quad (2.23)$$

Burada $\lambda, \tau, \mu, \sigma$ negatif olmayan sabitler, q ve p pozitif sabitler, $[c, d]$ pozitif aralıktır.

Teorem 2.1.3 Eğer $c > \tau$, $c > \sigma$,

$$\left(\frac{p(d-c)}{1+\lambda+\mu} \right)^{1/2} \left(\frac{c-\sigma}{2} \right) e > 1 \quad (2.24)$$

ve

$$\left(\frac{q(d-c)}{1+\lambda+\mu}\right)^{1/2} \left(\frac{c-\tau}{2}\right) e > 1 \quad (2.25)$$

ise, o zaman (2.23) denklemi salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (2.23) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Yani bir $t_0 \geq 0$ olmak üzere $t \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olduğu kabul edilsin.

$$z(t) = x(t) + \lambda x(t - \tau) + \mu x(t + \sigma)$$

olsun. Açıkça $t_1 \geq t_0$ olmak üzere $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$. Bu yüzden (2.23) denklemi kullanılarak $t_2 \geq t_1$ olmak üzere $t \geq t_2$ için

$$z''(t) = q \int_c^d x(t - \xi) d\xi + p \int_c^d x(t + \xi) d\xi > 0.$$

Böylece $[t_2, \infty)$ aralığında $i = 0, 1, 2$ için $z^{(i)}(t)$ sabit işaretlidir. Bir $w(t)$ fonksiyonunu

$$w(t) = z(t) + \lambda z(t - \tau) + \mu z(t + \sigma) \quad (2.26)$$

şekilde tanımlansın. O zaman

$$w''(t) = q \int_c^d z(t - \xi) d\xi + p \int_c^d z(t + \xi) d\xi \quad (2.27)$$

ve

$$[w(t) + \lambda w(t - \tau) + \mu w(t + \sigma)]'' = q \int_c^d w(t - \xi) d\xi + p \int_c^d w(t + \xi) d\xi. \quad (2.28)$$

eşitliklerinin doğruluğu gösterilebilir. Burada yine iki ihtimal vardır. (i) $t \geq t_2$ için $z'(t) > 0$, (ii) $t \geq t_2$ için $z'(t) < 0$.

(i) $t \geq t_2$ için $z'(t) > 0$ durumu. (2.26) ve (2.27) eşitliklerinden $t \geq t_3 \geq t_2$ için $w'(t) > 0$ ve $w'''(t) > 0$. Diğer taraftan $z(t)$ pozitif olduğu için $w''(t)$ de pozitifdir ve sonuç olarak $t \geq t_3$ ve $i = 0, 1, 2, 3$ için

$$w^{(i)}(t) > 0. \quad (2.29)$$

(2.28) eşitliği ve (2.29) eşitsizliklerinin sonucu olarak ta $t \geq t_3$ için

$$w''(t) \geq \frac{p(d-c)}{1+\lambda+\mu} w(t + (c - \sigma)) \quad (2.30)$$

eşitsizliği elde edilir. Fakat Lemma 2.1.1 (ii) durumu ve (2.24) koşulundan dolayı (2.30) eşitsizliğinin (2.29) eşitsizliklerini sağlayan çözümü yoktur. Bu bir çelişkidir.

(ii) $t \geq t_2$ için $z'(t) < 0$ durumu. Buradan $t \geq t_3 \geq t_2$ için $w'(t) < 0$, $w''(t) > 0$ ve $w'''(t) < 0$ olur. $w''(t)$ fonksiyonunun $[t_3, \infty)$ aralığında azalan olduğu (2.28) eşitliğinde kullanırsa

$$w''(t) \geq \frac{q(d-c)}{1+\lambda+\mu} w(t-(c-\tau)) \quad (2.31)$$

eşitsizliği bulunur. Bu sonuç Lemma 2.1.1 (i) durumu ve (2.25) koşuluyla çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

BÖLÜM III

PERİYODİK KATSAYILI DENKLEMLERLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde

$$[x(t) + \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \tau)]'' + \delta \left(\int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi \right) = 0$$

tipindeki ikinci mertebeden neutral fonksiyonel diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı olmaları için gerekli şartlar verilmiştir.

Burada $\delta = \pm 1$, λ ve μ negatif olmayan reel sayılar, τ pozitif reel sayı, $p, q \in C([t_0, \infty) \times [c, d], [0, \infty))$ $t \geq t_0$, t için τ periyotlu iki değişkenli fonksiyonlardır.

Yani $p(t \pm \tau, \xi) = p(t, \xi)$ ve $q(t \pm \tau, \xi) = q(t, \xi)$.

$P(t) = \int_c^d p(t, \xi) d\xi$, $Q(t) = \int_c^d q(t, \xi) d\xi$ şeklinde tanımlanır.

Bölüm III'te incelenen denklemlerin Bölüm II'de incelenen denklemlerden farkı yukarıda da görüleceği gibi q ve p sabitlerinin bu bölümde $p(t \pm \tau, \xi) = p(t, \xi)$ ve $q(t \pm \tau, \xi) = q(t, \xi)$ şeklindeki t için τ periyotlu iki değişkenli fonksiyonlar olmasıdır.

Aşağıdaki lemma teoremlerin ispatlarında kullanılacaktır.

Lemma 3.1.1 $q : [t_0, \infty) \rightarrow R$ sürekli ve $t \geq t_0$ için negatif olmayan bir fonksiyon, σ ise pozitif bir reel sayı olsun.

(i) Eğer $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\sigma} \frac{(s-t)^i (t-s+\sigma)^{n-i-1}}{i!(n-i-1)!} q(s) ds > 1$$

ise,

$$y^{(n)}(t) \geq q(t) y(t + \sigma)$$

eşitsizliğinin $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ve $t \geq t_0$ için $y^{(j)}(t) > 0$ şartını sağlayan $y(t) > 0$ ($t \geq t_0$) çözümü yoktur.

(ii) Eğer $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\sigma}^t \frac{(t-s)^i (s-t+\sigma)^{n-i-1}}{i!(n-i-1)!} q(s) ds > 1$$

ise, o zaman

$$(-1)^n z^{(n)}(t) \geq q(t) z(t-\sigma)$$

eşitsizliğinin $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ve $t \geq t_0$ için $(-1)^j z^{(j)}(t) > 0$ şartını sağlayan $z(t) > 0$ ($t \geq t_0$) çözümü yoktur [9].

$$[x(t) + \lambda x(t-\tau) - \mu x(t+\tau)]'' + \delta \left(\int_c^d q(t, \xi) x(t-\xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t+\xi) d\xi \right) = 0 \quad (3.1)$$

Burada $\delta = \pm 1$, λ ve μ negatif olmayan reel sayılar, τ pozitif reel sayı, $p, q \in C([t_0, \infty) \times [c, d], [0, \infty))$ $t \geq t_0$, t için τ periyotlu iki değişkenli fonksiyonlardır. Yani $p(t \pm \tau, \xi) = p(t, \xi)$ ve $q(t \pm \tau, \xi) = q(t, \xi)$.

Teorem 3.1.1 Eğer $c > \tau$, $\delta = -1$, $i = 0, 1$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+c} \frac{(s-t)^i (t-s+c)^{1-i}}{i!(1-i)!} P(s) ds > 1 + \lambda \quad (3.2)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-(c-\tau)}^t \frac{(t-s)^i (s-t+c-\tau)^{1-i}}{i!(1-i)!} Q(s) ds > 1 + \lambda \quad (3.3)$$

ise, o zaman (3.1) denklemini salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Genelliği bozmadan $t_0 \geq 0$ olmak üzere $t \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olsun.

$$z(t) = x(t) + \lambda x(t-\tau) - \mu x(t+\tau)$$

olarak alınsın. (3.1) denkleminde $t_1 \geq t_0$ olmak üzere $t \geq t_1$ için

$$z''(t) = \int_c^d q(t, \xi) x(t-\xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t+\xi) d\xi \geq 0. \quad (3.4)$$

bulunur. Böylece $z^{(i)}(t)$ ($i = 0, 1, 2$), $[t_1, \infty)$ aralığında sabit işaretlidir. Burada dikkate alınması gereken iki durum vardır. (a) $t \geq t_1$ için $z(t) < 0$, (b) $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$.

(a) $t \geq t_1$ için $z(t) < 0$ durumu. $v(t) = -z(t)$ olsun. Buradan

$$0 < v(t) = -z(t) = -x(t) - \lambda x(t - \tau) + \mu x(t + \tau) \leq \mu x(t + \tau)$$

yazılabilir. O zaman son eşitsizlikten $t \geq t_2 \geq t_1$ için

$$\frac{1}{\mu} v(t - \tau) \leq x(t). \quad (3.5)$$

Böylece (3.4) ve (3.5) eşitsizlikleri yardımıyla $t \geq t_3 \geq t_2$ için

$$v''(t) + \frac{1}{\mu} \int_c^d q(t, \xi) v(t - (\tau + \xi)) d\xi \leq 0 \quad (3.6)$$

bulunur. Son eşitsizlik ve Kiguradze lemmasından [8] $t \geq t_4 \geq t_3$ için $v'(t) > 0$.

Eğer $t \geq t_4 \geq t_3$ için $v'(t) > 0$ ise, o zaman öyle pozitif bir k sabiti ve bir $T \geq t_4$ sayısı bulunabilir ki $t \geq T$ için

$$v(t - (\tau + d)) \geq k.$$

Bu son eşitsizlik (3.6) eşitsizliğinde kullanılarak integral alınırsa

$$0 < v'(t) \leq v'(T) - \frac{k}{\mu} \int_T^t \int_c^d q(s, \xi) d\xi ds$$

ve $t \rightarrow \infty$ için

$$0 < v'(t) \leq v'(T) - \frac{k}{\mu} \int_T^t Q(s) ds \rightarrow -\infty.$$

Bu da bir çelişkidir.

(b) $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$ durumu.

$$w(t) = z(t) + \lambda z(t - \tau) - \mu z(t + \tau) \quad (3.7)$$

olsun. Diğer taraftan

$$w''(t) = \int_c^d q(t, \xi) z(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) z(t + \xi) d\xi \quad (3.8)$$

ve

$$[w(t) + \lambda w(t - \tau) - \mu w(t + \tau)]'' = \int_c^d q(t, \xi) w(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) w(t + \xi) d\xi \quad (3.9)$$

olduğu gösterilebilir. Eğer $t \geq t_1$ için $w(t) < 0$ ise, (a) durumunda izlenen yol burada da uygulanırsa yine aynı sonuç elde edilir. O halde $t \geq t_1$ için $w(t) > 0$. Burada da iki durum vardır. (i) $t \geq t_1$ için $z'(t) > 0$, (ii) $t \geq t_1$ için $z'(t) < 0$.

(i) $t \geq t_1$ için $z'(t) > 0$ durumu. O zaman öyle iki pozitif k_1, k_2 sabitleri ve bir $T \geq t_1$ sayısı bulunabilir ki $t \geq T$ için

$$z(t-d) \geq k_1 \text{ ve } z(t+c) \geq k_2.$$

Son iki eşitsizlik (3.8) denkleminde kullanılırsa $t \geq T$ için

$$\begin{aligned} w''(t) &\geq k_1 \int_c^d q(t, \xi) d\xi + k_2 \int_c^d p(t, \xi) d\xi \\ &= k_1 Q(t) + k_2 P(t) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $t \rightarrow \infty$ için $w'(t) \rightarrow \infty$ ve $w(t) \rightarrow \infty$. O halde $i = 0, 1, 2$ ve $t \geq t_1$ için

$$w^{(i)}(t) > 0. \quad (3.10)$$

z artan, $p(t, \xi)$ ve $q(t, \xi)$ t için periyodik fonksiyonlar olduğundan (3.8) denkleminde $t \geq T_1 \geq T$ için

$$\begin{aligned} w''(t-\tau) &= \int_c^d q(t, \xi) z(t-\tau-\xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) z(t-\tau+\xi) d\xi \\ &\leq \int_c^d q(t, \xi) z(t-\xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) z(t+\xi) d\xi \\ &= w''(t) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $w''(t)$ fonksiyonu $t \geq T_1$ için artandır. (3.9) denkleminde

$$(1+\lambda)w''(t) \geq Q(t)w(t-d) + P(t)w(t+c)$$

ve

$$w''(t) \geq \frac{1}{1+\lambda} P(t)w(t+c) \quad (3.11)$$

eşitsizliği bulunur. Fakat Lemma 3.1.1 (i) durumu ve (3.2) koşulundan dolayı (3.11) eşitsizliğinin (3.10) eşitsizliklerini sağlayan çözümü yoktur. Bu da bir çelişkidir.

(ii) $t \geq t_1$ için $z'(t) < 0$ durumu. $t \rightarrow \infty$ için $z(t) \rightarrow 0$ olduğunu göstermek için tersi kabul edilirse $k > 0$ sayısı vardır öyle ki $t \rightarrow \infty$ için $z(t) \rightarrow k > 0$. O zaman $t \geq T^* \geq t_1$ için

$$z(t-c) \geq \frac{k}{2} \text{ ve } z(t+d) \geq \frac{k}{2}$$

bulunur. Son iki eşitsizlik (3.8) denkleminde kullanılırsa

$$w''(t) \geq \frac{k}{2} [Q(t) + P(t)]$$

bulunur. Böylece $t \rightarrow \infty$ için $w^{(i)}(t) \rightarrow \infty$, $i = 0, 1$. Diğer yandan (3.7) denkleminde $t \geq T^*$ için $w(t) < \infty$. Bu bir çelişkidir. O halde $t \rightarrow \infty$ için $z(t) \rightarrow 0$ ve $w^{(i)}(t) \rightarrow 0$, $i = 0, 1, 2$. Buradan $t \geq T_1^* \geq T^*$ ve $i = 0, 1$ için

$$(-1)^i w^{(i)}(t) > 0. \quad (3.12)$$

z azalan, $p(t, \xi)$ ve $q(t, \xi)$ t için periyodik fonksiyonlar olduğundan (3.8)

denkleminde $t \geq T_2^* \geq T_1^*$ için

$$\begin{aligned} w''(t - \tau) &= \int_c^d q(t, \xi) z(t - \tau - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) z(t - \tau + \xi) d\xi \\ &\geq \int_c^d q(t, \xi) z(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) z(t + \xi) d\xi \\ &= w''(t) \end{aligned}$$

bulunur. Yani $w''(t)$ fonksiyonu azalandır. Bu $t \geq T_3^* \geq T_2^*$ için (3.9) denkleminde kullanılırsa

$$(1 + \lambda)w''(t - \tau) \geq Q(t)w(t - c)$$

veya

$$w''(t) \geq \frac{1}{1 + \lambda} Q(t)w(t - (c - \tau)) \quad (3.13)$$

bulunur. Ancak Lemma 3.1.1 (ii) durumu ve (3.3) koşulundan dolayı (3.13) eşitsizliğinin (3.12) eşitsizliklerini sağlayan çözümü yoktur. Bu da bir çelişkidir ve ispat tamamlanır.

$$[x(t) + \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \tau)]'' + \delta \left(\int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi \right) = 0 \quad (3.14)$$

Burada $\delta = \pm 1$, λ ve μ negatif olmayan reel sayılar, τ pozitif reel sayı, $p, q \in C([t_0, \infty) \times [c, d], [0, \infty))$ $t \geq t_0$, t için τ periyotlu iki değişkenli fonksiyonlardır. Yani $p(t \pm \tau, \xi) = p(t, \xi)$ ve $q(t \pm \tau, \xi) = q(t, \xi)$.

Teorem 3.1.2 Eğer $c > \tau$, $\delta = 1$, $i = 0, 1$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+(c-\tau)} \frac{(s-t)^i (t-s+c-\tau)^{1-i}}{i!(1-i)!} P(s) ds > \mu \quad (3.15)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-(c+\tau)}^t \frac{(t-s)^i (s-t+c+\tau)^{1-i}}{i!(1-i)!} Q(s) ds > \mu \quad (3.16)$$

ise, o zaman (3.14) denkleminin salınımlıdır.

İspat. Bu ispat Teorem 3.1.1 (3.6) eşitsizliğine kadar olan kısım ile benzer şekildedir. Burada

$$z''(t) = -\int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi - \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi \leq 0 \quad (3.17)$$

ve $t \geq t_3 \geq t_2$ için

$$v''(t) \geq \frac{1}{\mu} \int_c^d q(t, \xi) v(t - (\tau + \xi)) d\xi + \frac{1}{\mu} \int_c^d p(t, \xi) v(t - \tau + \xi) d\xi. \quad (3.18)$$

O zaman $t \geq t_3 \geq t_2$ için

$$v''(t) \geq \frac{1}{\mu} \int_c^d p(t, \xi) v(t + (\xi - \tau)) d\xi \quad (3.19)$$

ve

$$v''(t) \geq \frac{1}{\mu} \int_c^d q(t, \xi) v(t - (\tau + \xi)) d\xi \quad (3.20)$$

eşitsizlikleri bulunur.

(i) $t \geq t_4 \geq t_3$ için $v'(t) > 0$ olsun. O zaman (3.19) eşitsizliğinden

$$v''(t) \geq \frac{1}{\mu} P(t) v(t + (c - \tau)). \quad (3.21)$$

Diğer yandan $i = 0, 1$ için

$$v^{(i)}(t) > 0 \quad (3.22)$$

olduğu gösterilebilir. Fakat Lemma 3.1.1 (i) durumu ve (3.15) koşulundan dolayı (3.21) eşitsizliğinin (3.22) eşitsizlikleri sağlayan pozitif çözümü yoktur. Bu bir çelişkidir.

(ii) Eğer $t \geq t_4 \geq t_3$ için $v'(t) < 0$ ise. O zaman $i = 0, 1$ ve $t \geq t_4 \geq t_3$ için

$$(-1)^i v^{(i)}(t) > 0. \quad (3.23)$$

$t \geq t_4$ için $v'(t) < 0$ olduğundan (3.20) eşitsizliğinden

$$v''(t) \geq \frac{1}{\mu} Q(t) v(t - (\tau + c)). \quad (3.24)$$

Ancak Lemma 3.1.1 (ii) durumu ve (3.16) koşulundan dolayı (3.24) eşitsizliğinin (3.23) eşitsizlikleri sağlayan pozitif çözümü yoktur. Bu da bir çelişkidir.

(b) $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$ durumu.

$$w(t) = z(t) + \lambda z(t - \tau) - \mu z(t + \tau) \quad (3.25)$$

olsun. Diğer taraftan

$$w''(t) + \int_c^d q(t, \xi) z(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) z(t + \xi) d\xi = 0 \quad (3.26)$$

ve

$$\left[w(t) + \lambda w(t - \tau) - \mu w(t + \tau) \right]'' + \int_c^d q(t, \xi) w(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) w(t + \xi) d\xi = 0 \quad (3.27)$$

olduğu görülür. Eğer $t \geq t_1$ için $w(t) < 0$ ise, (a) durumunda izlenen yol burada da izlenirse yine aynı sonuç elde edilir. O halde $t \geq t_1$ için $w(t) > 0$ olduğu görülür. Böylece Kiguradze lemmasına [8] göre $t \geq t_1$ için $z'(t) > 0$. O zaman öyle iki pozitif k_1, k_2 sabitleri ve bir $T \geq t_1$ sayısı bulunabilir ki $t \geq T$ için

$$z(t - d) \geq k_1 \text{ ve } z(t + c) \geq k_2.$$

Son iki eşitsizlik (3.26) denkleminde dikkate alınırsa $t \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned} 0 < w'(t) &\leq w'(T) - k_1 \int_T^t \int_c^d q(s, \xi) d\xi ds - k_2 \int_T^t \int_c^d p(s, \xi) d\xi ds \\ &\leq w'(T) - k_1 \int_T^t Q(s) ds - k_2 \int_T^t P(s) ds \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Bu da bir çelişkidir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$$\left[x(t) + \lambda x(t - \tau) + \mu x(t + \tau) \right]'' + \delta \left(\int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi \right) = 0 \quad (3.28)$$

Burada $\delta = \pm 1$, λ ve μ negatif olmayan reel sayılar, τ pozitif reel sayı, $p, q \in C([t_0, \infty) \times [c, d], [0, \infty))$ $t \geq t_0$, t için τ periyotlu iki değişkenli fonksiyonlardır. Yani $p(t \pm \tau, \xi) = p(t, \xi)$ ve $q(t \pm \tau, \xi) = q(t, \xi)$.

Teorem 3.1.3 Eğer $c > \tau$, $\delta = -1$, $i = 0, 1$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+(c-\tau)} \frac{(s-t)^i (t-s+c-\tau)^{1-i}}{i!(1-i)!} P(s) ds > 1 + \lambda + \mu \quad (3.29)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-(c-\tau)}^t \frac{(t-s)^i (s-t+c-\tau)^{1-i}}{i!(1-i)!} Q(s) ds > 1 + \lambda + \mu \quad (3.30)$$

ise, o zaman (3.28) denklemini salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (3.28) denkleminin $t \geq t_0 \geq 0$ için $x(t) > 0$ şartını sağlayan bir çözümü olsun.

$$z(t) = x(t) + \lambda x(t - \tau) + \mu x(t + \tau)$$

şeklinde alınsın. Buradan $t \geq t_1 \geq t_0$ için $z(t) > 0$ olur. (3.28) denkleminde $t \geq t_2 \geq t_1$ için

$$z''(t) = \int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi \geq 0. \quad (3.31)$$

Şimdi

$$w(t) = z(t) + \lambda z(t - \tau) + \mu z(t + \tau) \quad (3.32)$$

olsun. O halde

$$w''(t) = \int_c^d q(t, \xi) z(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) z(t + \xi) d\xi \quad (3.33)$$

ve

$$[w(t) + \lambda w(t - \tau) + \mu w(t + \tau)]'' = \int_c^d q(t, \xi) w(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) w(t + \xi) d\xi \quad (3.34)$$

olduğu görülür. Burada iki durum söz konusudur. a) $t \geq t_3$ için $z'(t) > 0$, b) $t \geq t_3$ için $z'(t) < 0$.

(a) $t \geq t_3 \geq t_2$ için $z'(t) > 0$ ise o zaman $t \geq T \geq t_3$ için

$$w'(t) > 0 \quad (3.35)$$

ve $t \geq T$ için

$$w''(t - \tau) \leq w''(t).$$

Diğer taraftan $t \geq T$ için $w''(t)$ fonksiyonunun azalmayan durumu (3.34) denkleminde göz önüne alınırsa

$$(1 + \lambda + \mu)w''(t + \tau) \geq Q(t)w(t - d) + P(t)w(t + c)$$

eşitsizliği bulunur. Buradan

$$w''(t) \geq \frac{1}{1 + \lambda + \mu} P(t)w(t + c - \tau) \quad (3.36)$$

bulunur. Ancak Lemma 3.1.1 (i) durumu ve (3.29) koşulundan dolayı (3.36) eşitsizliğinin (3.35) eşitsizliğini sağlayan çözümü yoktur. Bu bir çelişkidir.

(b) $t \geq t_3$ için $z'(t) < 0$ olsun. O zaman $t \geq T \geq t_3$ ve $i = 0, 1$ için

$$(-1)^i w^{(i)}(t) > 0. \quad (3.37)$$

z azalan, $p(t, \xi)$ ve $q(t, \xi)$ t için periyodik fonksiyonlar olduğundan (3.33) denkleminde $t \geq T_1 \geq t_3$ için

$$w''(t - \tau) \geq w''(t)$$

bulunur. Son eşitsizlik (3.34) denkleminde göz önüne alınırsa $t \geq T_2 \geq T_1$ için

$$(1 + \lambda + \mu)w''(t - \tau) \geq Q(t)w(t - c)$$

veya

$$w''(t) \geq \frac{1}{1 + \lambda + \mu} Q(t)w(t - (c - \tau)). \quad (3.38)$$

Fakat Lemma 3.1.1 (ii) durumu ve (3.30) koşulundan dolayı (3.38) eşitsizliğinin (3.37) eşitsizliğini sağlayan çözümü yoktur. Bu da bir çelişkidir ve ispat tamamlanmış olur.

$$[x(t) - \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \tau)]'' + \delta \left(\int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi \right) = 0 \quad (3.39)$$

Burada $\delta = \pm 1$, λ ve μ negatif olmayan reel sayılar, τ pozitif reel sayı, $p, q \in C([t_0, \infty) \times [c, d], [0, \infty))$ $t \geq t_0$, t için τ periyotlu iki değişkenli fonksiyonlardır. Yani $p(t \pm \tau, \xi) = p(t, \xi)$ ve $q(t \pm \tau, \xi) = q(t, \xi)$.

Teorem 3.1.4 Eğer $c > \tau$, $\lambda + \mu > 0$, $\delta = -1$, $i = 0, 1$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+c} \frac{(s-t)^i (t-s+c)^{1-i}}{i!(1-i)!} P(s) ds > 1 \quad (3.40)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-c}^t \frac{(t-s)^i (s-t+c)^{1-i}}{i!(1-i)!} Q(s) ds > 1 \quad (3.41)$$

ise, o zaman (3.39) denklemleri salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (3.39) denkleminin $t \geq t_0 \geq 0$ için $x(t) > 0$ şartını sağlayan bir çözümü olsun.

$$z(t) = x(t) - \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \tau) \quad (3.42)$$

alınırsa (3.39) denkleminde $t \geq t_1 \geq t_0$ için

$$z''(t) = \int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi \geq 0. \quad (3.43)$$

Böylece $z^{(i)}(t)$ ($i = 0, 1, 2$), $[t_1, \infty)$ aralığında sabit işaretlidir. Burada dikkate alınması gereken iki durum vardır. (a) $t \geq t_1$ için $z(t) < 0$, (b) $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$.

(a) $t \geq t_1$ için $z(t) < 0$ durumu.

$$0 < v(t) = -z(t) = -x(t) + \lambda x(t - \tau) + \mu x(t + \tau)$$

alınırsa

$$v''(t) + \int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi = 0$$

denklemini bulunur. Şimdi

$$w(t) = -v(t) + \lambda v(t - \tau) + \mu v(t + \tau)$$

alınırsa

$$w''(t) + \int_c^d q(t, \xi) v(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) v(t + \xi) d\xi = 0 \quad (3.44)$$

ve

$$[-w(t) + \lambda w(t - \tau) + \mu w(t + \tau)]'' + \int_c^d q(t, \xi) w(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) w(t + \xi) d\xi = 0 \quad (3.45)$$

bulunur. $t \geq t_2 \geq t_1$ için $w(t) > 0$ olduğu görülür aksi takdirde (b) durumu ile aynıdır.

Şimdi Kiguradze lemmasına [8] göre $t \geq t_3 \geq t_2$ için $v'(t) > 0$ olmalıdır. Bu durum da Teorem 3.1.2 (b) durumunda olduğu gibidir. Onun için bunlar ispatlanmayacaktır.

(b) $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$ durumu. (3.42) eşitliğinden $t \geq T \geq t_1$ için

$$z(t) \leq x(t).$$

O zaman (3.43) eşitliğinden

$$z''(t) \geq \int_c^d p(t, \xi) z(t + \xi) d\xi$$

ve

$$z''(t) \geq \int_c^d q(t, \xi) z(t - \xi) d\xi.$$

eşitsizlikleri bulunur. Buradan sonrası ise Teorem 3.1.2 (i) ve (ii) durumlarıyla aynı olduğu için atlanır. Böylece ispat tamamlanır.

$$[x(t) - \lambda x(t - \tau) - \mu x(t + \tau)]'' + \delta \left(\int_c^d q(t, \xi) x(t - \xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t + \xi) d\xi \right) = 0 \quad (3.46)$$

Burada $\delta = \pm 1$, λ ve μ negatif olmayan reel sayılar, τ pozitif reel sayı, $p, q \in C([t_0, \infty) \times [c, d], [0, \infty))$ $t \geq t_0$, t için τ periyotlu iki değişkenli fonksiyonlardır. Yani $p(t \pm \tau, \xi) = p(t, \xi)$ ve $q(t \pm \tau, \xi) = q(t, \xi)$.

Teorem 3.1.5 Eğer $c > \tau$, $\lambda + \mu > 0$, $\delta = 1$, $i = 0, 1$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+(c-\tau)} \frac{(s-t)^i (t-s+c-\tau)^{1-i}}{i!(1-i)!} P(s) ds > \lambda + \mu \quad (3.47)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-(c-\tau)}^t \frac{(t-s)^i (s-t+c-\tau)^{1-i}}{i!(1-i)!} Q(s) ds > \lambda + \mu \quad (3.48)$$

ise, o zaman (3.46) denklemi salınımlıdır.

İspat. Bu ispat Teorem 3.1.4 (a) durumundaki (3.43) eşitsizliğine kadar aynıdır. Yalnız burada $t \geq t_1 \geq t_0$ için

$$z''(t) = -\int_c^d q(t, \xi) x(t-\xi) d\xi - \int_c^d p(t, \xi) x(t+\xi) d\xi. \quad (3.49)$$

(a) $t \geq t_1$ için $z(t) < 0$ durumu.

$$0 < v(t) = -z(t) = -x(t) + \lambda x(t-\tau) + \mu x(t+\tau)$$

alınırsa

$$v''(t) = \int_c^d q(t, \xi) x(t-\xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) x(t+\xi) d\xi$$

bulunur. Burada iki durum söz konusudur. (i) $t \geq t_1$ için $v'(t) > 0$, (ii) $t \geq t_1$ için $v'(t) < 0$.

(i) $t \geq t_1$ için $v'(t) > 0$ durumu.

$$w(t) = -v(t) + \lambda v(t-\tau) + \mu v(t+\tau)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$w''(t) = \int_c^d q(t, \xi) v(t-\xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) v(t+\xi) d\xi$$

ve

$$[-w(t) + \lambda w(t-\tau) + \mu w(t+\tau)]'' = \int_c^d q(t, \xi) w(t-\xi) d\xi + \int_c^d p(t, \xi) w(t+\xi) d\xi$$

bulunur. Buradan $t \geq t_2 \geq t_1$ için $w(t) > 0$ olduğu görülür. O halde $t \geq T \geq t_2$ ve $i = 0, 1$ için

$$w''(t-\tau) \leq w''(t)$$

ve

$$w^{(i)}(t) > 0.$$

Bunlar kullanılarak

$$(\lambda + \mu)w''(t+\tau) \geq P(t)w(t+c).$$

eşitsizliği elde edilir. İspatın bu aşamadan sonrası Teorem 3.1.1 (b) (i) durumunda olduğu gibidir. Bundan dolayı bu kısım atlanır.

(ii) $t \geq t_1$ için $v'(t) < 0$ durumu. Bu durum ise Teorem 3.1.1 (b) (ii) durumunun benzeri olduğu için bu da geçilmiştir.

(b) $t \geq t_1$ için $z(t) > 0$ durumu. Teorem 3.1.4 (3.42) eşitliğinden $t \geq T \geq t_1$ için

$$z(t) \leq x(t).$$

O zaman yukarıdaki (3.49) eşitliğinden

$$z''(t) + \int_c^d q(t, \xi) z(t - \xi) d\xi \leq 0$$

bulunur. Buradan sonrası Teorem 3.1.2 (b) durumunun benzeri olduğu için ispata gerek duyulmamıştır. Böylece teorem ispatlanır.

BÖLÜM IV

SONUÇLAR

1. Teorem 2.1.1 koşulları σ sabitine bağlı değildir.
2. Eğer Teorem 2.1.3'te $\lambda = 0$ veya $\mu = 0$ ya da $\lambda = \mu = 0$ ise (2.23) denklemi için yine Teorem 2.1.3 uygulanabilir.
3. Eğer Teorem 2.1.1 (2.3) koşulu, Teorem 2.1.2 (2.16) koşulu ve Teorem 2.1.3 (2.24) koşulu sağlanmazsa bu teoremlerin sonuçları sırasıyla şu şekilde değiştirilir. (2.1), (2.15) ve (2.23) denklemlerinin her x çözümü ya salınımlıdır ya da $t \rightarrow \infty$ ve $j = 0,1$ için $x^{(j)}(t) \rightarrow \infty$.
4. Teorem 3.1.1 koşulları μ katsayısına, Teorem 3.1.2 koşulları ise λ katsayısına bağlı değildir.
5. Eğer Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.3'te $\lambda = 0$ veya $\mu = 0$ ya da $\lambda = \mu = 0$ ise (3.1) ve (3.28) denklemleri için sırasıyla yine Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.3 uygulanabilir.
6. Eğer Teorem 3.1.4 ve Teorem 3.1.5'te λ veya μ katsayılarından yalnız biri sıfıra eşit ise (3.39) ve (3.46) denklemleri için sırasıyla yine Teorem 3.1.4 ve Teorem 3.1.5 uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Grace, S. R. and Lalli, B. S., Oscillation for Second Order Neutral Functional Differential Equations, Appl. Math. Computation, 51, 119–133, 1992.
- [2] Grace, S. R. and Lalli, B. S., On the Oscillation of Certain Neutral Functional Differential Equations, Funkcialaj Ekvacioj, 36, 303–310, 1993.
- [3] Candan, T., Even Order Neutral Functional Differential Equations, Appl. Math. And Mechanics (Eng. Edition), 27, 2, 112–121, 2006.
- [4] Candan, T. and Dahiya, R. S., Oscillations theorems for n-th order neutral functional differential equations, Math. Computer Modelling, 43, 357–367, 2006.
- [5] Kusano, T., On even order functional differential equations with advanced argumants, J. Differential Equations, 45, 75–84, 1982.
- [6] Foster, K. E. and Grimmer, R. C., Nonoscillatory solutions of higher order delay equations, J. Anal. Appl., 77, 150-164, 1980.
- [7] Grace, S. R. and Lalli, B. S., Oscillations theorems for n-th order nonlinear differential equations with deviating arguments, Proc. Amer. Math. Soc., 90, 65–70, 1984.
- [8] Kiguradze, I. T., On the oscillation of solutions of the equation $d^m u/dt^m + a(t)|u|^m \operatorname{sign} u = 0$ [J], Mat. Sb., 65, 107, 172-187, 1964.
- [9] Kitamura, Y., Oscillation of functional differential equations with generaldeviating arguments, Hiroshima Math. J., 15, 445-491, 1985.