

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DAYANIKLI MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Müh. Halil AKÇAKAYA**

**Anabilim Dalı : ELEKTRİK MÜHENDİSLİĞİ**

**Programı : KONTROL VE OTOMASYON**

**HAZİRAN 2006**

**DAYANIKLI MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Müh. Halil AKÇAKAYA  
( 504031109 )**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 8 Mayıs 2006  
Tezin Savunulduğu Tarih : 15 Haziran 2006**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Leyla GÖREN  
Diğer Jüri Üyeleri Doç. Dr. Külmez ÇEVİK  
Yr. Doç. Dr. M. Turan SÖYLEMEZ**

**HAZİRAN 2006**

## ÖNSÖZ

Son yıllarda ileri kontrolör tekniklerinden sıkça kullanılanlardan bir tanesi Model Öngörülü Kontrol tekniğidir. Bir MPC kontrol, sistem modelini kullanarak bir amaç ölçütü içerisinde kontrol işaretini minimum yapacak optimizasyon kuralını içerir. Gerçekte sistemler tam olarak doğrusal bir model ile gösterilemezler. Nominal model ile tanımlanan gerçek bir sistem parametreleri zamanla belli aralıkta değişmektedir. Tasarlanan kontrolör, sistem parametreleri değişse bile sistemi kararlı kılmalıdır. Diğer bir değişle tasarlanan kontrolör dayanıklıdır. Bu kapsamda Sonsuz Ufuklu Model Öngörülü Kontrol'ü tekniği üzerinde, son yıllarda sıkça kullanılan Doğrusal Matris Eşitsizlikleri tanımlanarak Dayanıklı Model Öngörülü Kontrol tekniği oluşturulacaktır. Tasarlanan kontrolör gerçek bir sistem üzerinde denenecektir. Bu çalışmadan sonra çevrimdışı çalışan ve aynı zamanda dayanıklı kararlılığı sağlayan çok basit bir kontrolör tasarlamak zor olmayacaktır.

Kader arkadaşım Murat DEMİRCİ'ye yardımları için teşekkür ederim. Tezin hazırlanmasında, sürekli gelişmesinde, katkılarını ve desteğini hiç eksik etmeyen danışman hocam Sayın Prof. Leyla GÖREN'e sonsuz teşekkür ederim. Beni eğitim hayatım boyunca destekleyen ve sevgilerini hiç esirgemeyen çok sevdiğim aileme de minnettarım.

Mayıs 2006

Halil AKÇAKAYA

## İÇİNDEKİLER

<b>KISALTMALAR</b>	<b>iv</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	<b>v</b>
<b>DAYANIKLI MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL</b>	<b>vii</b>
<b>ROBUST MODEL PREDICTIVE CONTROL</b>	<b>viii</b>
<b>1.GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2. MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL</b>	<b>3</b>
2.1 Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol ( GPC )	3
<b>3. DAYANAKLI MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL</b>	<b>10</b>
3.1 Model Belirsizlikleri	11
3.2 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri(LMI)	14
3.3 Dayanıklı Sonsuz Ufuklu Model Öngörülü Kontrol (IH-MPC)	16
3.4 Dayanıklı Sınırlandırılmış Sonsuz Ufuklu Model Öngörülü Kontrol	25
3.5 Dayanıklı Kararlılık	32
<b>4. GELİŞTİRMELER VE UYGULAMALAR</b>	<b>36</b>
4.1 Giriş Sınırlamalı Dayanıklı MPC İçin Çevrim-İçi ve Çevrim-Dışı Kontrol Akışı	36
4.2 Dayanıklı MPC ile Klasik Açık Kontrol Sistemi	37
4.3 Sabit Set-Noktası İzleme Problemi	43
4.4 Genişletilmiş Durum Uzayı Modeli	44
4.5 Dayanıklı MPC ile Birinci Dereceden Ölü Zaman Gecikmeli Bir Sistemin Kontrolü	45
4.6 Dayanıklı MPC+Entegral Alıcı ile Birinci Dereceden Ölü Zaman Gecikmeli Bir Sistemin Kontrolü	51
<b>5. GERÇEK ZAMANLI DAYANIKLI MPC KONTROLÜ</b>	<b>56</b>
5.1 Kontrol Kuralının Belirlenmesi	56
5.1 Gerçek Zamanda Kontrol Düzenegi	57
5.2 MATLAB XPC-TARGET ile Kontrolör	59
5.3 Gerçek Zamanlı Dayanıklı MPC ile Kontrol Edilen Sistemin Sonuçları	61
<b>6. SONUÇLAR</b>	<b>65</b>
<b>KAYNAKLAR</b>	<b>67</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	<b>70</b>

## **KISALTMALAR**

<b>CARIMA</b>	: Controlled AutoRegresive Integrated Moving Average
<b>CARMA</b>	: Controlled AutoRegresive Moving Average
<b>FIR</b>	: Finite Impulse Response
<b>GPC</b>	: Generalized Predictive Control
<b>IH-MPC</b>	: Infinite Horizon-Model Predictive Control
<b>IMC</b>	: Internal Model Control
<b>LMI</b>	: Linear Matrix Inequality
<b>LTI</b>	: Linear Time Invariant
<b>LTV</b>	: Linear Time Variant
<b>MHC</b>	: Model Horizon Control
<b>min.-maks.</b>	: Maksimumunu minimum yapma
<b>MPC</b>	: Model Predictive Control
<b>RHC</b>	: Receding Horizon Control
<b>SISO</b>	: Single Input – Single Output
<b>sn</b>	: saniye

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No:</u>
<b>Şekil 1.1</b> : Genel Model Öngörülü Kontrol .....	1
<b>Şekil 2.1</b> : Kısıtlamalar olmadığı durumda GPC Benzetimi .....	8
<b>Şekil 2.2</b> : Kısıtlamalar olmadığı durumda GPC kontrol edilen sistemin çıkışı ve kontrol işareti .....	8
<b>Şekil 3.1</b> : Politopik belirsizliğin grafiksel gösterimi .....	12
<b>Şekil 3.2</b> : Yapısal belirsizlik.....	13
<b>Şekil 3.3</b> : İki boyut için değişmez elipsoidin grafiksel gösterimi.....	26
<b>Şekil 4.1</b> : Açısal Pozisyon Sistemi.....	38
<b>Şekil 4.2</b> : Nominal MPC kullanarak $\alpha(k) = 9sn^{-1}$ 'lık sistemin cevabı.....	39
<b>Şekil 4.3</b> : Dayanıklı sınırlandırılmamış LMI temelli MPC kullanarak $\alpha(k) = 9sn^{-1}$ 'lık sistemin cevabı.....	40
<b>Şekil 4.4</b> : Dayanıklı LMI temelli edilen MPC'nin, giriş sınırlı zamanla değişen sistem üzerindeki cevabı .....	41
<b>Şekil 4.5</b> : Dayanıklı LMI temelli MPC ile kontrol edilen giriş sınırlı zamanla değişen sistemin kontrol işareti .....	42
<b>Şekil 4.6</b> : Dayanıklı LMI temelli MPC ile kontrol kuralındaki durum geri besleme matrisi F'in normu .....	43
<b>Şekil 4.7</b> : Dayanıklı MPC ile kontrol edilen, birinci dereceden, ölü zamanı ve kazancı zamanla değişen bir sistemin durum geri besleme ile Kontrolü-MATLAB SIMULINK Modeli.....	48
<b>Şekil 4.8</b> : Dayanıklı MPC ile kontrol edilen, $0.6 \leq K \leq 0.8$ ve $0 \leq dT \leq 0.3$ arasında düzgün dağılımlı rasgele değişen bir sistemin çıkış ve kontrol işareti. ( Set Noktası=5, r=0.1).....	48
<b>Şekil 4.9</b> : Çevrimiçi ve Çevrimdışı Dayanıklı MPC ile kontrol edilen $0.6 \leq K \leq 0.8$ ve $0 \leq dT \leq 0.3$ arasında düzgün dağılımlı rasgele değişen bir sistemin çıkışı. ( Set Noktası=5, r=0.1) .....	49
<b>Şekil 4.10</b> : Dayanıklı MPC ile kontrol edilen, $K=0.8$ ve $0 \leq dT \leq 0.3$ arasında düzgün dağılımlı rasgele değişen bir sistemin çıkış ve kontrol işareti. (Set Noktası=5, r=0.1) .....	50
<b>Şekil 4.11</b> : Dayanıklı MPC+Entegral Alıcı ile kontrol edilen, birinci dereceden, ölü zamanı ve kazancı zamanla değişen bir sistemin durum geri besleme ile Kontrolü-MATLAB SIMULINK Modeli.....	51
<b>Şekil 4.12</b> : Dayanıklı MPC+Entegral Alıcı ile kontrol edilen $0.6 \leq K \leq 0.8$ ve $0 \leq dT \leq 0.4$ arasında düzgün dağılımlı rasgele değişen bir sistemin çıkış ve kontrol işareti. (Set Noktası=5, r=0.1) .....	53
<b>Şekil 4.13</b> : Dayanıklı MPC+Entegral Alıcı ile kontrol edilen, $K=0.8$ ve $0 \leq dT \leq 0.3$ arasında düzgün dağılımlı rasgele değişen bir sistemin çıkış ve kontrol işareti. (Set Noktası=5, r=0.1) .....	54
<b>Şekil 5.1</b> : Gerçek Zamanda Kontrol düzeneği .....	58
<b>Şekil 5.2</b> : Nominal MPC kullanarak $\alpha(k) = 9sn^{-1}$ 'lık sistemin cevabı .....	59

<b>Şekil 5.3</b>	: MATLAB’da XPC-TARGET hedefinin seçilmesi .....	60
<b>Şekil 5.4</b>	: Gerçek Zamanlı Dayanıklı MPC ile kontrol edilen sistemin çıkışı ve kontrol işareti ( $dT \sim 0.25$ sn, $K \sim 0.6$ ) .....	61
<b>Şekil 5.5</b>	: Gerçek Zamanlı Dayanıklı MPC ile kontrol edilen sistemin çıkışı ve kontrol işareti ( $dT \sim 0.4$ sn, $K \sim 0.6$ ) .....	62
<b>Şekil 5.6</b>	: Gerçek Zamanlı Dayanıklı MPC ile kontrol edilen sistemin çıkışı ve kontrol işareti ( $dT = 0.25$ sn, $0.2 < K < 1.5$ ) .....	63
<b>Şekil 5.7</b>	: Set noktası değişimlerine karşı Gerçek Zamanlı Dayanıklı MPC ile kontrol edilen sistemin çıkışı ve kontrol İşareti ( $dT \sim 0.25$ , $K \sim 0.5$ ) ....	64

## DAYANIKLI MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL

### ÖZET

Son yıllarda, Model Öngörülü Kontrol(MPC), endüstride kullanılan çok değişkenli kontrol tekniklerinin en gözdelelerinden biri haline gelmiştir. MPC teknolojisi, kimya, gıda-işleme, otomotiv ve uzay uygulamaları içeren geniş bir uygulama alanında kullanıldığı görülebilir.

MPC, kontrol kuralını hesaplayarak her örnekleme anında optimizasyon problemini çözer. Böylece bir ufuk boyunca açık çevrim kontrol kuralı üzerinde optimizasyon yapılır. Her ne kadar birden fazla kontrol hareketi hesaplansa da kontrolör ilk kontrol hareketini sisteme uygular. Bir sonraki çevrimde, yeni ölçümler yapılarak optimizasyon problemi tekrar çözülür ve kontrol girişi güncellenir.

MPC'nin ana kusurlarından biri model belirsizliklerine karşı baş etme zorluğudur. Gerçek bir sistemin sadece yaklaşık bir modeli elde edilmesinden ötürü, model belirsizliklerine karşı dayanıklı bir MPC beklemek önemlidir.

Bu tezden sonra Doğrusal Matris Eşitsizlikleri kullanarak dayanıklı bir MPC kontrolör tasarımı yapılabilecektir.

Bölüm 2'de, en çok kullanılan MPC tekniklerinden biri olan Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol (GPC) metodu anlatılacaktır. GPC tekniğini daha iyi anlamak için bir örnek de çözülecektir.

Bölüm 3'de, giriş, çıkış sınırlamaları ve parametrik belirsizlikler altında sonsuz ufuklu bir amaç ölçütünün üst sınırını minimum yapan MPC problemi, konveks LMI temelli optimizasyon problemine indirgenecektir.

Bölüm 4'de, LMI temelli dayanıklı MPC algoritması verilerek, benzetim programı MATLAB-SIMULINK üzerinde uygulaması yapılmış iki farklı problem incelenmiştir. Birinci dereceden ölü zamanlı gecikmeli sistemler için, geleneksel dayanıklı MPC problemi; set-noktası izleme, durumları sadece giriş ve çıkışlar ile ifade edilebilen genişletilmiş durum uzayı, kalıcı durum hatasını engelleyen entegral alıcı model metotlarını içererek genişletilmiştir.

Bölüm 5'de, sistemin ölü zaman ve kazancı değiştirilerek, MATLAB-XPCTARGET aracı üzerinde gerçek zamanlı çalışan MPC algoritmasından elde edilen sabit durum geri besleme matrisi ile birinci dereceden ölü zaman gecikmeli sistem kontrol edilmiştir.

Bölüm 6'da ise bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar yorumlanmış ve ileride bu konuda yapılması gereken çalışmalar tartışılmıştır.

## **ROBUST MODEL PREDICTIVE CONTROL**

### **SUMMARY**

During the past few years, Model Predictive Controller (MPC) has appeared as one of the most popular multivariable control techniques used industrial process. MPC technology can now be found in a wide variety of application areas including chemicals, food processing, automotive, and aerospace applications.

MPC solves an on-line optimization problem at each sampling time to compute the control law; therefore, it optimizes an open-loop control profile over the prediction horizon. Although more than one input move is computed, the controller implements only the first one. At the next sampling time, the optimization problem is solved again with new measurements, and the control input is updated.

One of the main drawbacks of MPC is the difficulty to incorporate model uncertainties explicitly. Since models are only approximations of real processes, it is important to look for MPC being robust to model uncertainty.

After this thesis, a robust MPC controller could be designed by using Linear Matrix Inequality.

In Chapter 2, a one of the most used MPC method that is known as Generalized Model Predictive Control. An example will be solved to understand GPC clearly.

In Chapter 3, MPC problem of minimizing an upper bound on the infinite horizon objective function, which is subject to constraint on the input and parameter uncertainty, is reduced to a convex LMI-based optimization problem.

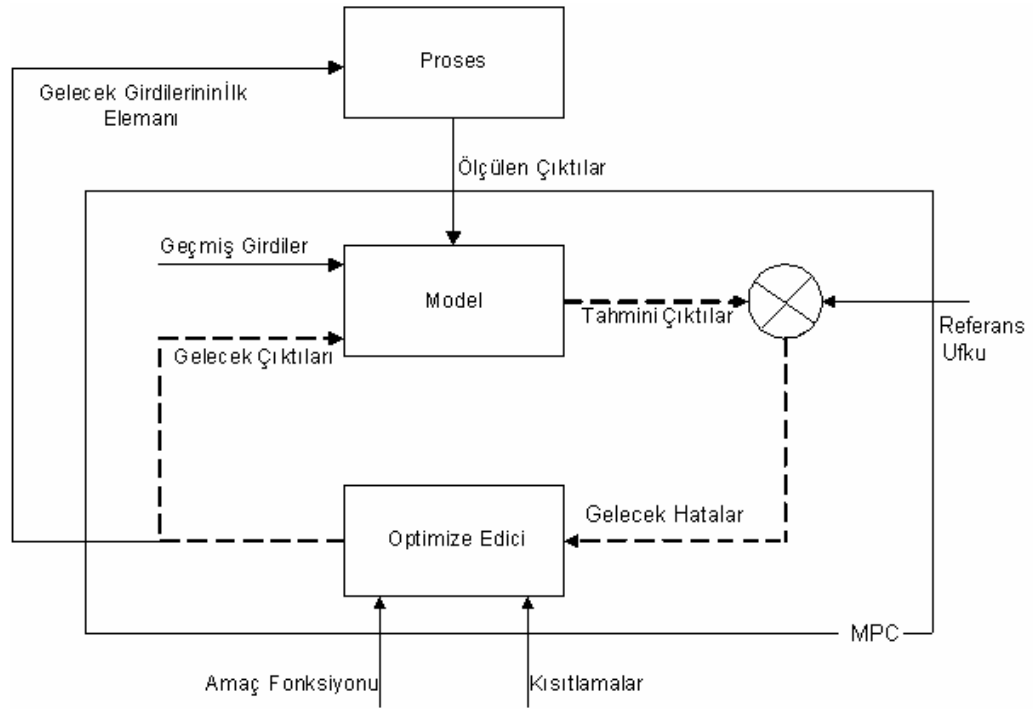
In Chapter 4, by showing algorithm of Robust Model Predictive Control based on LMI, we have examined two different problems which has been implemented on simulation program MATLAB-SIMULINK. For First Order-Dead Time process, Traditional Robust Model Predictive Control problem is extended the method of set-point tracking, extended state-space model whose state vector is shown on only input-output representation, integrator model to prevent steady state error.

In Chapter 5, by changing dead time and gain of process, First Order-Dead Time process is controlled with static state feedback obtained Robust MPC algorithm on MATLAB-XPCTARGET tool working real-time.

Finally in Chapter 6, the results obtained from this thesis and further studies which may be done about this study are discussed.

## 1.GİRİŞ

Günümüzde Model Öngörülü Kontrol (MPC) Kimya ve Petrokimya uygulamalarında sıkça kullanılmakta olan bu teknik, en etkileyici kontrol tekniklerin içinde yer almaktadır. Bir MPC kontrol yapısı, sistem modelini kullanarak bir amaç ölçütü içersinde kontrol işaretini minimum yapacak bir optimizasyon yöntemini içerir. Genel bir MPC kontrolör yapısı Şekil 1.1’de görülmektedir.



Şekil 1.1 : Genel Model Öngörülü Kontrol

Genel bir MPC kontrol: Sistem modeli kullanılarak gelecekteki bir zaman dilimi içersinde sistem yanıtını öngörme; bir amaç ölçütünü minimum yapacak kontrol işaretini üretme; her örnekleme anında ufku geleceğe doğru kaydırılması ve üretilen kontrol işaretinin şu andaki yani ilk elemanının sisteme uygulanması ilkelerini içerir. (Camacho ve Bordons, 2004)

MPC yaklaşımda sistem modeli bilindiğinden ötürü bir ufuk boyunca öngörü yapılabilir. Bu sistem modeli kullanılarak sistemin bir öngörü ufku boyunca çıktıları hesaplanır. ( Örneğin bir ufuk boyunca çıkış ve kontrol sinyali ). O ufukta takip

etmesini istediğimiz referans değerleri ile çıkış değerlerinin farkı alınarak bir ufuk boyunca oluşacak hata sinyalleri hesaplanır. Hesaplanan bu hata sinyalleri ve kontrol işaretlerini optimize edecek, bir ufuk boyunca öngörülen kontrol sinyalleri hesaplanır. Elde ettiğimiz kontrol sinyali dizisinin ilk elemanı ( ufkun ilk elemanı ) gerçek sisteme uygulanır. Ayrıca kontrol dizisi, geçmiş girdiler modele tekrar verilerek bir öngörü işlemi döngü içerisinde gerçekleşir.

Bir MPC kontrolünün

Üstünlükleri

- Kavramlar sezgisel olduğu ve aynı zamanda parametre ayarları diğer yöntemlere göre kolay olduğu için kontrol bilgisi sınırlı olan çalışanlara çekici gelmektedir.
- Çok basit dinamiğe sahip süreçlerden, kararsız, minimum fazlı olmayan ya da çok uzun ölü zamanı bulunan süreçler gibi sistemler kontrol edebilir.
- Çok değişkenli sistemlerin kontrolünde kullanılabilir.
- Sınırlandırmalarla başa çıkabilecek, sınırlandırmaları tasarım sürecine sistematik olarak katabilecek bir optimizasyon yapısı içerir.
- Belirli temel ilkeler üzerine kurulduğu için gelişmelere tamamen açık bir yöntemdir.

Eksikleri

- Kontrol kuralının elde edilmesi PID kontrolörlerden daha zordur. Sınırlandırmalar göz önüne alındığından işlem karmaşıklığı daha da artacaktır. Ayrıca Klasik bir MPC tasarımı ile kontrol edilen sistemin dinamiğinin değiştiği durumlarda her örnekleme anında kontrolör tekrar ayarlanmalıdır. ( Dayanımlı Model Öngörülü Kontrol ile bu sorunun üstesinden gelinmiştir. )

## 2. MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL

Genel bir MPC yapısını anlamak açısından en popüler model öngörülü kontrol yöntemi olan Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol Algoritmasını incelemek doğru olacaktır.

### 2.1 Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol ( GPC )

1987 yılında Clarke tarafından GPC metodu önerilmiş ve o günden bugüne endüstri ve akademik çevrelerde en popüler yöntem haline gelmiştir. Birçok endüstri uygulamalarında GPC yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca performans, kararlılık ölçütleri bakımından birçok farklı problemlerle başa çıkmıştır.

#### 2.1.1 GPC Denklemleri

Tek girişli, tek çıkışlı ve beklenen değeri 0 olan beyaz  $e(t)$  gürültüsü için sistemin diferansiyel eşitliği

$$\begin{aligned} A(z^{-1})y(t) &= z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t) \\ A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{na}z^{-na} \\ B(z^{-1}) &= 1 + b_1z^{-1} + \dots + b_{nb}z^{-nb} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_{nc}z^{-nc} \end{aligned} \quad (2.1)$$

biçiminde ifade edilir. Bu model CARMA ( Controller Auto-Regressive Moving Avarge ) modeli olarak bilinir. Fakat endüstride çoğu süreç durağan olmadığı için, integrali alınmış CARMA modelinin yani CARIMA modelinin sistem için daha uygun olduğu düşünülmüştür. Bir CARIMA modeli (2.2) ile verilir.

$$\begin{aligned} A(z^{-1})y(t) &= z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \\ \Delta &= (1 - z^{-1}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Burada bozucu  $C(z^{-1})=1$  seçilmiştir. Eğer bozucu renkli gürültü ise bu  $C(z^{-1})$  farklı seçilebilir.

GPC kontrol, (2.3) ile verilen amaç ölçütünü minimum yapacak kontrol işaretini hesaplar.

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1|t)]^2 \quad (2.3)$$

Burada,  $\hat{y}(t+j)$ , t anındaki bilinenlerden ve modelden elde edilen j sonraki öngörülen çıkış,  $N_1, N_2$  sırasıyla minimum ve maksimum çıkış öngörü ufku,  $w(t+j)$  j sonraki referans yörüngesi,  $\lambda(j)$  ise öngörülen çıkış hatasına göre kontrol işareti ağırlığıdır. **(Camacho ve Bordons, 2004)**

$\tilde{A}(z^{-1})$ 'i aşağıdaki Diophantine Eşitliği'ni sağlayacak şekilde  $E_j(z^{-1})$  ve  $F_j(z^{-1})$  polinomları tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} 1 &= E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}), \quad \tilde{A}(z^{-1}) = (1 - z^{-1})A(z^{-1}) \\ E_j(z^{-1}) &= e_{j,0} + e_{j,1}z^{-1} + \dots + e_{j,j-1}z^{-j+1} \\ F_j(z^{-1}) &= f_{j,0} + f_{j,1}z^{-1} + \dots + f_{j,na}z^{-na} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$E_j(z^{-1})$  ve  $F_j(z^{-1})$  polinomlarının bulunması son derece kolaydır. 1 değeri  $\tilde{A}(z^{-1})$ 'a;  $z^{-j}F_j(z^{-1})$  kalanı elde edilinceye kadar bölünür. Bölüm ise  $E_j(z^{-1})$ 'dir.

(2.2) denklemi  $\Delta E_j(z^{-1})z^j$  ile sağdan ve soldan çarpılırsa (2.5) ifadesi elde edilir.

$$\tilde{A}(z^{-1})E_j(z^{-1})y(t+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(t+j) \quad (2.5)$$

Burada  $E_j(z^{-1})$  polinomunun derecesi j-1 'dir. Böylece (2.5) eşitliğinin en sağındaki gürültü terimi hep geleceğe ait olacaktır. Bu yüzden öngörüye bir etkisi olmayacaktır. Ayrıca (2.4) eşitliğinin ilk terimi (2.5) eşitliğinin sol tarafında yerine koyulursa (2.6) ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+j|t) &= G_j(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + F_j(z^{-1})y(t) \\ G_j(z^{-1}) &= E_j(z^{-1})B(z^{-1}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2.4) denklemindeki 1 değerinin  $\tilde{A}(z^{-1})$ 'a  $z^{-j+1}F_{j+1}(z^{-1})$  kalanı elde edilinceye kadar bölünmesiyle elde edilen bölüm  $E_{j+1}(z^{-1})$  ile (2.4) denklemin bölüm polinomu  $E_j(z^{-1})$  karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned} E_{j+1}(z^{-1}) &= E_j(z^{-1}) + e_{j+1,j}z^{-j} \\ e_{j+1,j} &= f_{j,0} \end{aligned} \quad (2.7)$$

eşitliği elde edilir. Bu noktada  $\tilde{A}(z^{-1})$ 'in  $(i+1)$ . katsayısı  $\tilde{a}_{i+1}$  olmak üzere kalanlar karşılaştırılırsa

$$f_{j+1,i} = f_{j,j+1} - f_{j,0}\tilde{a}_{i+1}, \quad i = 0..na - 1 \quad (2.8)$$

$G_{j+1}$  polinomu pekala (2.9)'daki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} G_{j+1} &= E_{j+1}B = (E_j + f_{j,0}z^{-j})B \\ G_{j+1} &= G_j + f_{j,0}z^{-j}B \end{aligned} \quad (2.9)$$

$G_{j+1}$  polinomunun ilk j adet katsayıları  $G_j$ 'ninki ile aynıdır. Geriye kalan katsayılar ise (2.10)'daki gibi verilebilir.

$$g_{j+1,j+i} = g_{j,j+i} + f_{j,0}b_i, \quad i = 0..nb \quad (2.10)$$

Amacımız (2.3) ölçütünü minimize edecek  $u(t|t)$ ,  $u(t+1|t)$ , ...,  $u(t+N|t)$  kontrol işaretleri dizisini bulmaktır. Örnekleme periyodu T olmak üzere sistemin ölü zaman gecikmesi  $dT$  olsun. O zaman sistem çıkışı,  $u(t)$  girişinden  $(d + 1)T$  sonra etkilenecektir. Bu nedenle minimum öngörü ufku  $N_1$  'i  $d$ 'den büyük seçmek anlamlı olacaktır. Şu durumda, minimum kontrol ufku  $N_1 = d + 1$ , kontrol ufku  $N_u = N$ , maksimum öngörü ufku  $N_2 = d + N$  seçilebilir.

$N$  ufku boyunca öngörü (2.11) ile verilebilir.

$$\begin{aligned} y(t+d+1|t) &= G_{d+1}\Delta u(t) + F_{d+1}y(t) \\ y(t+d+2|t) &= G_{d+2}\Delta u(t+1) + F_{d+2}y(t) \\ &\vdots \\ y(t+d+N|t) &= G_{d+N}\Delta u(t+N) + F_{d+N}y(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Böylece (2.11) ifadesi şimdiki kontrol işaretleri ve geçmiş işaretleri cinsinden

$$y = Gu + F(z^{-1})y(t) + G'(z^{-1})\Delta u(t-1) \quad (2.12)$$

$$y = \begin{bmatrix} y(t+d+1|t) \\ y(t+d+2|t) \\ \vdots \\ y(t+d+N|t) \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_0 \end{bmatrix}$$

$$G'(z^{-1}) = \begin{bmatrix} (G_{d+1}(z^{-1}) - g_0)z \\ (G_{d+2}(z^{-1}) - g_0 - g_1z^{-1})z^2 \\ \vdots \\ (G_{d+N}(z^{-1}) - g_0 - g_1z^{-1} - \dots - g_{N-1}z^{-(N-1)})z^N \end{bmatrix} \quad F(z^{-1}) = \begin{bmatrix} F_{d+1}(z^{-1}) \\ F_{d+2}(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{d+N}(z^{-1}) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.  $f = F(z^{-1})y(t) + G'(z^{-1})\Delta u(t-1)$  geçmiş değerler olmak üzere çıkış işareti  $y = Gu + f$  şeklinde ifade edilebilir.

(2.3) ifadesi bir ufuk boyunca tekrar yazılarak (2.13) ifadesi elde edilir.

$$J = (Gu + f - w)^T (Gu + f - w) + \lambda u^T u \quad (2.13)$$

Burada  $w = [(w(d+1) \dots w(d+N))]$  öngörü ufku boyunca istenilen set noktası yörüngesidir.

Son ifadenin türevi alınarak amaç ölçütünü minimum yapan kontrol işareti değişimi

$$\begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - f) \quad (2.14)$$

(2.14) eşitliği ile ifade edilir.

Böylece kontrol işareti değişimi dizisinin ilk elemanı  $\Delta u(t)$ 'den sisteme uygulanacak kontrol işareti değişimi bulunur.

### 2.1.2 Örnek bir GPC Tasarımı

$$(1 + az^{-1})y(t) = (b_0 + b_1z^{-1})u(t-1) + \frac{e(t)}{\Delta} \quad (2.15)$$

(2.15)'deki bir sistem için GPC tasarımı yapılsın. Bu örnek için  $d$  ölü zaman gecikmesi 0 olsun. (2.15)'daki bir sistem için  $a = -0.8, b_0 = 0.4, b_1 = 0.6$  olarak seçilsin. (**Camacho ve Bordons, 2004**).

Bir önceki bölümde anlatılanların ışığında, ufuk seçimi  $N_1 = 1, N_2 = 3, N = 3$  olarak alalım. Örnek tasarımız için (2.15) ifadesinin son hali (2.16) olacaktır.

$$(1 - 0.8z^{-1})y(t) = (0.4 + 0.6z^{-1})u(t-1) + \frac{e(t)}{1 - z^{-1}} \quad (2.16)$$

$\tilde{A}(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})$  olarak (2.4) Diophantine eşitliğinin yardımı ile  $E_j, F_j$  katsayıları (2.17)'daki gibi bulunacaktır.

$$\begin{aligned} j=1 &\Rightarrow E_1(z^{-1})=1 && \text{ve} && F_1(z^{-1})=1.8-0.8z^{-1} \\ j=2 &\Rightarrow E_2(z^{-1})=1+1.8z^{-1} && \text{ve} && F_2(z^{-1})=2.44-1.44z^{-1} \\ j=3 &\Rightarrow E_3(z^{-1})=1+1.8z^{-1}+2.44z^{-2} && \text{ve} && F_3(z^{-1})=2.952z^{-1}-1.952z^{-2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.4)'deki  $G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})$  ifadesini kullanarak  $G_j$  katsayılarını ve nihayetinde ufuk boyunca öngörülen  $y = Gu + f$  çıkışını hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} j=1 &\Rightarrow G_1(z^{-1})=0.4+0.6z^{-1} \\ j=2 &\Rightarrow G_2(z^{-1})=0.4+1.32z^{-1}+1.08z^{-2} \\ j=3 &\Rightarrow G_3(z^{-1})=0.4+1.32z^{-1}+2.056z^{-2}+1.464z^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y(t+1|t) \\ y(t+2|t) \\ y(t+3|t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 1.32 & 0.4 & 0 \\ 2.056 & 1.32 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0.6\Delta u(t-1)+1.8y(t)-0.8y(t-1) \\ 1.08\Delta u(t-1)+2.44y(t)-1.44y(t-1) \\ 1.464\Delta u(t-1)+2.952y(t)-1.952y(t-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

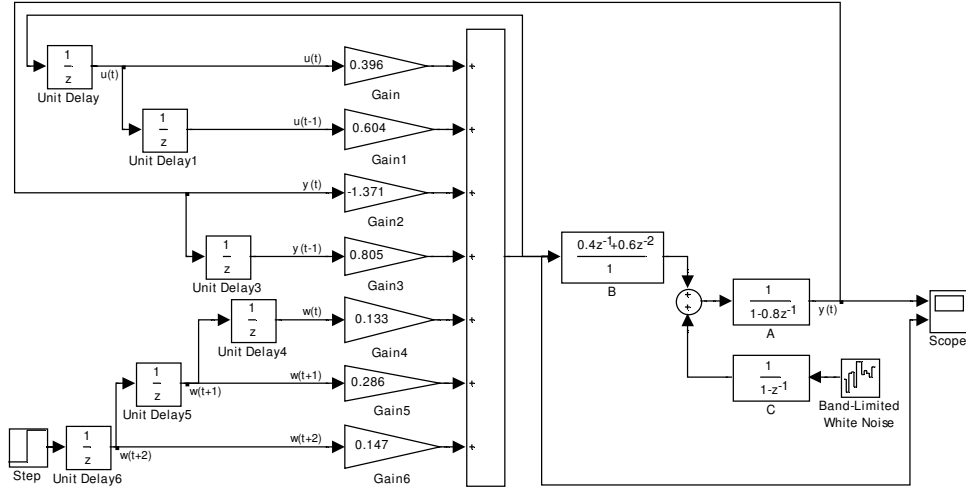
(2.13)'deki  $J = (Gu + f - w)^T (Gu + f - w) + \lambda u^T u$  amaç ölçütünü minimum yapan kontrol işareti değişimini (2.14)'den hesaplanır.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.133 & 0.286 & 0.147 \\ -0.154 & 0.165 & 0.286 \\ -0.029 & -0.154 & 0.1334 \end{bmatrix} \times \\ &\begin{bmatrix} w(t+1) - [0.6\Delta u(t-1) + 1.8y(t) - 0.8y(t-1)] \\ w(t+2) - [1.08\Delta u(t-1) + 2.44y(t) - 1.44y(t-1)] \\ w(t+3) - [1.464\Delta u(t-1) + 2.952y(t) - 1.952y(t-1)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

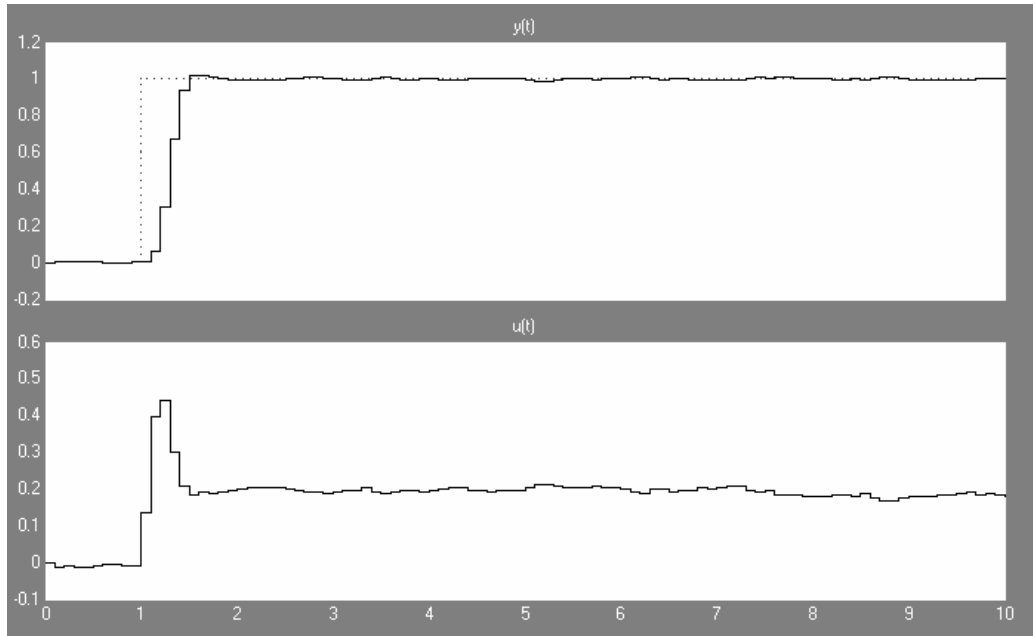
Buradan dizinin ilk elemanı  $\Delta u(t)$  kullanılarak sisteme uygulanacak kontrol işareti (2.20) 'deki gibi bulunacaktır.

$$\begin{aligned} u(t) &= 0.396u(t-1) + 0.604u(t-2) - 1.371y(t) + 0.805y(t-1) + \\ &0.133w(t+1) + 0.286w(t+2) + 0.147w(t+3) \end{aligned} \quad (2.20)$$

MATLAB-SIMULINK ile kısıtlama olmadığı durumda, (2.20)'nin GPC kontrolör tasarımı Şekil 2.1'de verilmiştir. Sistem çıkışı ve kontrol işareti ise Şekil 2.2'de verilmiştir.



Şekil 2.1 : Kısıtlamalar olmadığı durumda GPC Benzetimi



Şekil 2.2 : Kısıtlamalar olmadığı durumda GPC kontrol edilen sistemin çıkışı ve kontrol işareti

**Hatırlatma 1:** Bu problemde kontrol edilen sistem için hiçbir kısıtlamanın söz konusu olmadığı düşünülmüştür. Oysaki en basit bir sisteme dahi uygulayabileceğiniz kontrol işaretinin maksimum değeri sınırlıdır. Bu yüzden amaç ölçütünü minimum yapan J fonksiyonu analitik olarak çözmek zordur. Çünkü kısıtlamalar söz

konusudur. Bu da amaç ölçütünü minimum yapacak optimizasyon probleminin her örnekleme anında tekrar özölmesi ve kontrol kuramının her örnekleme anında tekrar bulunması demektir. Yani işlem kapasitesi hayli yüksek pahalı bir kontrolör tasarlamak gerekecektir.

Hatırlatma 2: Bir benzetim programı ile Şekil 2.1'deki gibi bir kontrolör tasarlanabilir; bu kontrolörün kısıtlamalar ışığı altında fiziksel olarak tasarlanabilirliği araştırılabilir. Fakat böyle bir GPC tasarımı ile kontrol edilen dinamik bir sistemin parametreleri zamanla değiştığı durumda hem kısıtlamalarda hem de kontrolör dayanıklılığında sorunlar karşımıza çıkacaktır.

### 3. DAYANAKLI MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL

Var olan MPC temelli kontrol tekniklerinin en önemli kusurları model belirsizlikleri ile başa çıkabilme yeteneklerinin olmayışıdır. Var olan MPC teknikleri ile tek olarak belirli sisteme ait optimal kontrol işareti hesaplanabilir. Hatta benzetim programları ile mükemmel sonuçlar da elde edilebilir. Optimal performans altında hesaplanan tek bir sisteme özgü kontrolör ile gerçek fiziksel bir sistem kontrol edilirse elde edilen sonuçlar beklenenden çok kötü olabilir. Bunun nedeni ise fiziksel bir sistemin kesin olarak matematiksel bir modelinin çıkarılamamasıdır. (**Zheng ve Morari, 1993**)

Dayanıklı MPC ile ilgili yapılmış çalışmalar aşağıdaki başlıklarda toplanabilir.

- Dayanıklı MPC Analizi: Garcia ve Morari (1982,1985) içsel model kontrol (IMC) ışığı altında Kısıtlamasız Model Öngörülü Kontrol'ün dayanıklılığı konusunda analizler yaptılar. Nihayetinde dayanıklı kararlılığı garanti eden IMC filtresi için ayarlama metodu geliştirdiler. **Zafiriou (1990)** , **Zoafiriou ve Marcahal (1991)** giriş ve çıkış kısıtlamaları ile MPC'nin dayanıklı kararlılığı için gerek ve yeter koşulunu geliştirecek MPC'nin kısalma özelliğini kullandılar. Sonlu darbe cevabı (FIR), tek girişli tek çıkışlı (SISO) sistemin darbe katsayılarında verilen üst ve alt sınırları vasıtasıyla, **Gencelli ve Nikolaou (1993)** kısıtlanmış  $l_1$ -norm MPC algoritmasının dayanıklılık analizi yaptılar. **Polak ve Yang (1993)** durumlardaki kısaltılmış sınırları kullanarak, değişken örnekleme zamanlı, sürekli doğrusal sistemde, kendilerinin model ufuk kontrol (MHC) algoritması üzerinde dayanıklılık analizini gerçekleştirdiler.
- Kesin Belirsizlik Tanımı ile MPC: Kesin Model belirsizliklerine ait temel felsefeler aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Çevrimiçi giriş ve çıkış kısıtlamalı minimum yapma problemi amaç fonksiyonun, en kötü durumunu minimum yapan “min.-maks.” problemleri üzerinde durulmuştur. Burada bahsedilen en kötü durum, belirsiz sistemler kümesinden elde edilir.

**Compo ve Morari (1987)** , **Allwright ve Papavasiliou (1992)**, **Zheng ve Morari (1993)** darbe cevabı katsayılarında verilen belirsizlik sınırları çerçevesinde, tek girişli ve tek çıkışlı (SISO) FIR sistemler için dayanıklı MPC şemaları gerçekleştirdiler. Amaç fonksiyonun kesin seçimi ile, çevrimiçi optimizasyon problemini azaltılabilir bir doğrusal programlamaya dönüştürdüler.

MPC'nin dayanıklılık analizi hakkında bugüne kadar yapılan çalışmalar kısaca verildi. Fakat belirsiz sistemler için dayanıklılık analizi, sonlu darbe cevaplı (FIR) sistemler için verilmiştir. Burada ihtiyaç duyulan şey dayanıklı MPC sentezi için çevrimiçi uygulamaya yatkın, hesaplaması kolay ve model belirsizlikleri kapsamında çok geniş bir alana hitap eden bir yöntemin geliştirilmesidir.

Bu bölümde, model belirsizliklerini karşı **Kothare ve diğ. (1996)**'in ortaya koyduğu bir MPC tekniği ayrıntılı bir şekilde incelenecektir. Son zamanlarda hem teorisi hem de uygulamaları ile kontrol tekniğinde gelişim gösteren Doğrusal Matris Eşitsizlikleri(LMI) kullanılarak optimizasyon problemi çözülecektir. LMI optimizasyonunun kullanılmasının iki ana nedeni vardır. Birincisi, LMI temelli optimizasyon probleminin polinomal zamanlı çözülebilirliğidir. Genellikle çözüm için geçen zaman benzer problemin analitik çözümü için geçen zamanla karşılaştırılabilir. Böylece LMI optimizasyonu çevrimiçi uygulanabilir. İkincisi ise, LMI çatısında var olan dayanıklı kontrol teorilerinin birçoğu tekrar ele alınabilir olmasıdır.

### 3.1 Model Belirsizlikleri

Dayanıklı kontrol tasarımı için, sistem modelleme ve tanıma anlamında farklı iki yaklaşım ele alacağız. Birincisi bir “politopik(çoklu-model)” yaklaşımı, diğeri ise “bir geri besleme belirsizlikleri ile doğrusal sistem” yaklaşımıdır. Bu iki yaklaşımda da doğrusal zamanla değişen sistem (LTV) aşağıdaki gibi ele alınacaktır.

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\y(k) &= Cx(k) \\[A(k), B(k)] &\in \Omega\end{aligned}\tag{3.1}$$

Burada  $u(k) \in \mathbb{P}^{n_u}$  kontrol işareti,  $x(k) \in \mathbb{P}^{n_x}$  sistem durumu,  $y(k) \in \mathbb{P}^{n_y}$  sistem çıkışı,  $\Omega$  ise önceden belirlenmiş bir kümedir.

### 3.1.1 Politopik veya Çok Modelli Model

Politopik<sup>1</sup> bir sistem için Co bir dışbükey tepe belirlemek üzere,  $\Omega$  kümesi bir politoptur.

$$\Omega = \text{Co}\{[A_1 B_1], [A_2 B_2], \dots, [A_L B_L]\} \quad (3.2)$$

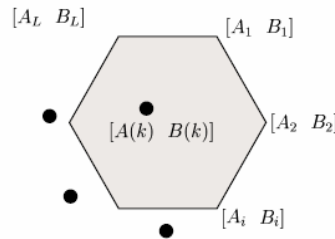
Diğer bir deyişle  $[A, B] \in \Omega$  ise, negatif olmayan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$  toplamı birdir.

$$[A, B] = \sum_{i=1}^L \lambda_i [A_i B_i]. \quad (3.3)$$

Eğer  $L=1$  ise bu sistem doğrusal zamanla değişmeyen (LTI) sisteme karşılık düşer.

Politopik bir sistem modeli elde etmek şöyle olabilir. Uygulanacak sistemden (doğrusal olmayabilir) çeşitli operasyon koşullarında ve zamanlarda giriş çıkış verileri toplanır. Her veri kümesinden doğrusal bir model elde edilir. ( Basitlik için her doğrusal model, aynı durum vektörüne sahip olduğu kabul edilebilir. ) Böylece doğrusal modelin verdiği köşeler ile (3.1) ve (3.2) 'deki politopik sistemler için herhangi bir tasarım ve analiz metodu, sisteme uygulanabilir.

Alternatif olarak,  $x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$  ayrık doğrusal olmayan bir sistemin  $\left[ \frac{df}{dx} \frac{df}{du} \right]$  Jacobian' i politopik kümesi boyunca uzandığı bilinsin. O zaman orijinal doğrusal olmayan sistemin her  $(x, u)$  yörüngesi aynı zamanda (3.1)'deki  $\Omega$  kümesindeki LTV sistemin de yörüngesidir. ( **R.W Lui, 1968** ). Böylece orijinal doğrusal olmayan bir sistem politopik, belirsiz zamanla değişen bir sistem formatına çevrilebilir. Benzer bir şekilde, SISO bir sistemin darbe cevabındaki sınırlar durum uzayı matrisindeki politopik belirsizlik kavramına çevrilebilir. Böylece bu politopik belirsizlik kavramı birçok mühendislik uygulamalarında kullanışlı olacaktır.



**Şekil 3.1** : Politopik belirsizliğin grafiksel gösterimi

<sup>1</sup> Politopik, çok modellen terimi ile Türkçeye çevrilebilir. Fakat bu modeller dışbükey tanımlamalardır.

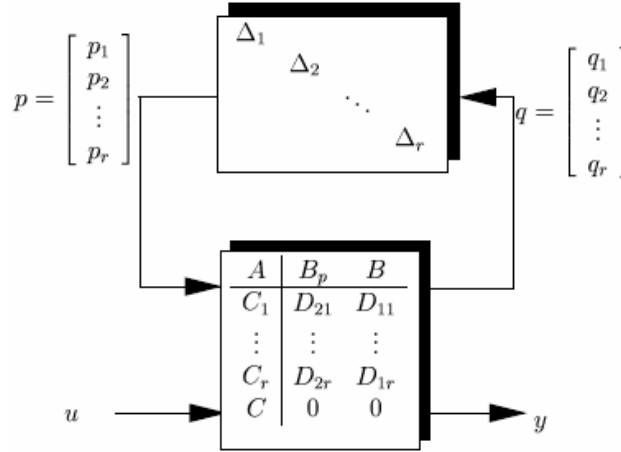
### 3.1.1 Yapısal Geri Besleme Belirsizlikleri

Doğrusal zamanla değişen bir sistemin dayanaklı kontrol çatısı altında bir başka gösterim biçimi, durum vektörü (3.4), (3.5) ve blok gösterimi şekil 3.2 ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_p p(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ q(k) &= C_q x(k) + D_{qu} u(k) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\Delta$  operatörü ise bir blok diyagonal'dir.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & & \\ & \Delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Delta_r \end{bmatrix} \quad (3.5)$$



Şekil 3.2 : Yapısal belirsizlik

$\Delta_i : \mathbb{P}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$  üzere,  $\|\Delta_i(k)\|_2 \equiv \bar{\sigma}(\Delta_i(k)) \leq 1, i = 1, 2, \dots, r, k \geq 0$  özelliğini sağlayan zamanla değişen bir matris veya  $\ell_2$ -normu 1'den küçük hale getirilmiş, indirgenmiş norm operatörlü katlama operatörüdür. Örneğin

$$\sum_{j=0}^k p_i(j)^T p_i(j) \leq \sum_{j=0}^k q_i(j)^T q_i(j), i = 1, \dots, r, \forall k \geq 0. \quad (3.6)$$

Her  $\Delta_i$  bloğu tekrarlayan veya tam blok olarak tanımlanabilir.  $\Delta_i$  doğrusal olmamak, dinamikler, bilinmeyen parametreler, ihmaller gibi faktörlerin birçoğu ile modellenabilir. Birçok belirsiz kontrol sistemi yapısal geri besleme çerçevesinde

incelenebilir. (**Packard ve Doyle, 1993**). Bu tezde **Packard ve Doyle (1993)** referansının kolaylığını kullanarak, sistemler yapısal belirsizlik kavramı için de incelenecektir.

$\Delta_i$  zamanla değişmeyen kararlı bir dinamik sistem (LTI) ise, 3.6'daki ikinci dereceden toplam,  $z$  dönüşümü  $\hat{\Delta}_i(z)$  olmak üzere aşağıdaki frekans tanımı eşitsizliği ile eşdeğerdir.

$$\|\hat{\Delta}_i\|_{H_\infty} \equiv \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} \bar{\sigma}(\hat{\Delta}_i(e^{j\theta})) \leq 1 \quad (3.7)$$

(3.4) denklemini kullanılarak (3.1)'deki LTV sistem için  $\Omega$  kümesi aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\Omega = \{[A + B_p \Delta C_q B + B_p \Delta D_{qu}]: \Delta \text{ (3.5)'i sağlar ve } \bar{\sigma}(\Delta_i) \leq 1\} \quad (3.8)$$

$\Delta \equiv 0, p(k) \equiv 0, k \geq 0$  ise hiç sistem-model eşleşme hatası yoktur.

### 3.2 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri(LMI)

Bu bölümde LMI hakkında kısa bir özet yapılacak ve LMI tabanlı optimizasyon problemlerinin nasıl çözüleceğini gösterilecektir. LMI hakkında ayrıntılar için **Boyd ve diğ. (1994)** kitabı incelenebilir.

Doğrusal bir matris eşitsizliği

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^l x_i F_i > 0, \quad (3.9)$$

yapısı ile gösterilir. Burada  $x_1, x_2, \dots, x_l$  değişkenlerdir. Ayrıca  $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$  olarak verilir.  $F(x) > 0$  'in anlamı  $F(x)$  'in pozitif tanımlı olmasıdır.

Birçok  $F_1(x) > 0, \dots, F_n(x) > 0$  LMI 'leri tek bir LMI şeklinde gösterilebilir.

$$\text{diag}(F_1(x) > 0, \dots, F_n(x) > 0) \quad (3.10)$$

Böylece LMI'lerin kümesi ile sadece bir adet LMI arasında herhangi bir fark yoktur. Örneğin "LMI  $F_1(x) > 0, \dots, F_n(x) > 0$ " demek "LMI  $\text{diag}(F_1(x) > 0, \dots, F_n(x) > 0)$ " demektir.

Konveks ikinci dereceden eşitsizlikler Schur tümleyicisi olarak bilinen yöntem ile LMI formunda gösterilir.  $Q(x) = Q(x)^T, R(x) = R(x)^T, S(x)$   $x$  üzerinde tümüyle affine<sup>2</sup> ise, LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

eşdeğerdir matris eşitsizliği (3.11)

$$R(x) > 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0,$$

$$Q(x) > 0, R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1}S(x) > 0$$

olacaktır.

Örnek olarak aşağıdaki ikinci dereceden konveks optimizasyon problemini inceleyelim.

$$\min. x^T Q x + q^T x + r \quad (3.12)$$

Yukarıdaki optimizasyon problemini pekala (3.13)'deki gibi düzenleyerek tekrar yazmak mümkündür.

$$\min_{\gamma, x} \gamma$$

$$\gamma - (x^T Q x + q^T x + r) > 0 \quad (3.13)$$

(3.11)'de verilen meşhur Schur tümleyeni kullanılarak

$$\min_{\gamma, x} \gamma$$

$$\begin{bmatrix} I & Q^{1/2} x \\ x^T Q & \gamma - r - q^T x \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Böylece (3.12) minimum yapma problemi, (3.14) LMI temelli optimizasyon problemi biçiminde ifade edilmiştir.

Bu tezde LMI sınırları altında bir amaç ölçütünü minimum yapan (3.15) LMI temelli optimizasyon problemi ile ilgilenilecektir.

$$\text{minimum } c^T x'$$

---

<sup>2</sup> Affine: Sonlu değerleri sonlu parçalara ayırmak

$$F(x) > 0 \text{ doğrultusunda} \quad (3.15)$$

Burada, uygun büyüklükteki  $c$  real bir vektör;  $x$  optimizasyon değişkeni üzerinde affine olan  $F(x)$ , simetrik bir matristir. Bu problem düzgün olmayan konveks optimizasyon problemidir.

LMI problemleri polinomal olarak çözülebilir. Yani bu problemin çözümü, pratik açıdan az bir hesaplama yükü getirir. Hali hazırda problemin çözümüne yönelik birçok verimli ve güçlü algoritmalar vardır. Ayrıca global minimum noktası da hızlı bir şekilde bulunabilir. Önemli bir nokta ise çözüm algoritmasını buluşsal olarak durduran bir sınır durdurma koşulunun olmayışıdır. Global minimum noktasını, belirlenen hassasiyet ve kıstas ölçütü altında hesaplayan LMI algoritmaları hali hazırda bulunmaktadır. ( **Boyd ve Ghaoui, 1993**), ( **Yu Nesterov ve Nemirovsky, 1994**), ( **Vandenberghe ve Boyd, 1993** ). Nümerik deneyimler gösteriyor ki bu algoritmalar hakikaten oldukça verimli olarak LMI problemlerini çözebilir.

Bir çevrimiçi MPC problemi için LMI temelli optimizasyon yöntemini kullanmak akıllıca olacaktır.

### 3.3 Dayanıklı Sonsuz Ufuklu Model Öngörülü Kontrol (IH-MPC)

$$J(k) = \sum_{i=0}^p (x(k+i|k))^T Q_1 x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R u(k+i|k) \quad (3.16)$$

(3.16)'daki amaç ölçütü sonlu ufuk için yazılmıştır. Sonlu ufuklu kontrolün aslında zayıf nominal kararlılık özelliğine sahip olduğu bilinir. ( **Bitmead ve diğ. ,1990**), ( **Rawlings ve Muske, 1993** ). Nominal kararlılık, ancak  $m$  kontrol ufku sonra sistem durumu  $x(k+m|k)=0$  olması ve/veya kararlılık için  $Q_1, R, m, p$  'nin ayarlayacak kısılama-eşleme prensibi kullanımı ile mümkündür. ( **Zafiriou, 1990**), ( **Zafiriou ve Marchal, 1991** ).

Sonlu ufuklu kontrol kuralının ise nominal kararlılığı garanti ettiği ispatlanmıştır. ( **Liu, 1968**), ( **Rawlings ve Muske, 1993** ). Kararlılık için yukarıda anlatılan parametrelerin tekrar ayarlanması yerine en azından nominal kararlılığı garanti eden sonsuz ufuklu kontrol yaklaşımını kullanmak tercih nedeni olabilir.

$\Omega$  kümesi ( (3.2) veya (3.8) ) ile ilişkilendirilmiş (3.1)'de tanımlanmış LTV sistemini ele alalım. Her örnekleme  $k$  anında, verilen nominal amaç ölçütünü minimum yapma

problemi  $p \rightarrow \infty$  için (3.16)'da verilebilir. Dayanıklı kontrol konusu için amaç ölçütünü yapma problemi ise aşağıdaki şekilde tekrar ele alınabilir.

$$\min_{u(k+i|k), i=0,1,\dots,m} \max_{[A(k+i), B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_{\infty}(k)$$

$$J_{\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} (x(k+i|k)^T Q_1 x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R u(k+i|k)) \quad (3.17)$$

Bu bir “min.-maks.” problemdir. Maksimum yapma işlemi  $\Omega$  kümesindeki zamanla değişen sistem  $[A(k+i), B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0$ 'den, öngörü için uygun zamanla değişmeyen LTI sisteminin seçimi ile başlar. Seçim  $\Omega$  kümesindeki tüm sistemler arasından  $J_{\infty}(k)$  değerini en büyük yapan ( en kötü yapan ) LTI sistemidir. En kötü değer, şimdiki ve gelecek kontrol hareketleri  $u(k+i|k), i = 0, 1, \dots, m$  ile minimum yapılır.

**Kothare ve diğ. (1996)** yaptıkları çalışmada (3.17)'deki “min.-maks.” optimizasyon probleminin üst sınırı türeterek çözüm yolu aramışlardır. Türetilen üst sınırı minimum yapan sabit durum geri besleme kuralı  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k), i \geq 0$  tanımlayarak kontrol kuralını ortaya koymuşlardır.

#### Üst Sınırın Türetilmesi:

(3.1)'deki LTV sistemin  $x(k|k) = x(k)$  durumu ile  $P > 0$ ,  $V(x) = x^T P x$  olan ikinci dereceden  $V(x)$  fonksiyonu ele alalım.  $V(0) = 0$  olsun. Her örnekleme anında, her  $[A(k+i), B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0$  için ve LTV sistem (3.1)'i sağlayan her  $x(k+i|k), u(k+i|k), i \geq 0$  durumu için  $V(x)$  aşağıdaki eşitsizliği sağladığını farz edelim.

$$\begin{aligned} V(x(k+i+1|k)) - V(x(k+i|k)) \\ \leq -(x(k+i|k))^T Q_1 x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R u(k+i|k) \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.18) eşitsizliğini  $i = 0$ 'dan  $i = \infty$ 'a kadar yazar, alt alta toplarsak, (3.17) amaç ölçütü (3.19) eşitsizliğini sağlar.

$$\begin{aligned}
V(x(k+1|k)) - V(x(k|k)) &\leq -(x(k|k))^T Q_1 x(k|k) + u(k|k)^T R u(k|k) \\
V(x(k+2|k)) - V(x(k+1|k)) &\leq -(x(k+1|k))^T Q_1 x(k+1|k) + u(k+1|k)^T R u(k+1|k) \\
&\vdots \\
V(x(\infty|k)) - V(x(\infty-1|k)) &\leq -(x(\infty-1|k))^T Q_1 x(\infty-1|k) + u(\infty-1|k)^T R u(\infty-1|k) \\
&+ \frac{\dots}{\dots} \\
V(x(\infty|k)) - V(x(k|k)) &\leq -J_\infty(k)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Dayanıklı amaç fonksiyonumuzun sonlu olabilmesi için  $x(\infty|k) = 0$  ( $V(x(\infty|k)) = 0$ ) olmalıdır. Bu özellik kullanılarak ön kötü durumdaki amaç ölçütü (3.20) denklemi ile yazılabilir.

$$\max_{[A(k+i)B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k) \leq V(x(k|k)) \tag{3.20}$$

Son denklem amaç fonksiyonumuzun üst sınırını verir. Artık bu bölümde kullanılacak dayanıklı yeni amaç ölçütü fonksiyonu  $V(x(k|k))$ 'dir. İlerleyen konularda, bu yeni amaç ölçütünü minimum yapan  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k), i \geq 0$  durum geri besleme kuralı elde edilecektir.

Şimdi ispatlanacak teorem, (3.20)'yi sağlayan uygun  $P > 0$ 'ın varlığı ile durum geri besleme matrisi F'in hesaplama yöntemini verecektir.

**Teorem 1:**

$x(k|k) = x(k)$ , (3.1)'deki LTV sistemimizin k anındaki durumu olsun. Bir de sistemin kontrol girişi ve sistem çıkışı üzerinde bir sınırlama olmasın.

**A) Politopik veya Çok Modelli Model için**

(3.2)'i gibi bir politopik belirsiz  $\Omega$  kümesi ele alalım.  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k), i \geq 0$  kontrol kuralı ile her örnekleme anında dayanıklı amaç ölçütü  $V(x(k|k))$ 'i minimum yapan durum geri besleme matrisi F

$$F = YQ^{-1} \tag{3.21}$$

olarak verilir. Eğer çözüm var ise,  $Q = Q^T > 0$  ve Y, aşağıda verilen doğrusal amaç ölçütünün minimum yapılmasından elde edilir. ( Dikkat edilirse bu problem 3.15 formundadır ).

$$\min_{\gamma, Q, Y} \gamma \tag{3.22}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QA_j^T + Y^T B_j^T & QQ_1^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_j Q + B_j Y & Q & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad j=1,2,\dots,L \quad (3.24)$$

**İspat:**

Amacımız  $P > 0$  olmak üzere  $V(x(k|k)) = x(k|k)^T P x(k|k)$  değerini minimum yapmak. Bir başka deyişle aşağıdaki ifadedir.

$$\min_{\gamma, P} \gamma \text{ ve } x(k|k)^T P x(k|k) \leq \gamma \quad (3.25)$$

$Q = \gamma P^{-1} > 0$  alınır ise (3.25) denkleminin yeni hali (3.26) olacaktır.

$$\min_{\gamma, Q} \gamma \text{ ve } x(k|k)^T Q^{-1} x(k|k) \leq 1 \quad (3.26)$$

(3.11)'de verilen Schur tümleyicisi kullanılarak (3.26) denklemini, (3.27) LMI formunda yazılır.

$$\min_{\gamma, Q} \gamma \text{ ve } \begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.27)$$

(3.22) ve (3.23) ifadesini kısmen elde ettik.

(3.1)' de verilen sistem modelimiz kullanılarak  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k), i \geq 0$  durum geri beslemesi uygulanmış sistemin sonraki durumu, önceki durumu cinsinden (3.28)'deki gibi yazılabilir.

$$x(k+i+1) = \{A(k+i) + B(k+i)F\}x(k+i) \quad (3.28)$$

Minimum yapılacak amaç ölçütünün (3.18)'i sağladığını kabul etmiştik.  $V(x(k|k)) = x(k|k)^T P x(k|k)$  ve  $P = \gamma Q^{-1}$  değişimleri yapılarak (3.18) denklemini (3.29)'daki gibi tekrar yazılabilir.

$$\begin{aligned} & x(k+i+1|k)^T \gamma Q^{-1} x(k+i+1|k) - x(k+i|k)^T \gamma Q^{-1} x(k+i|k) \\ & \leq -\{x(k+i|k)^T Q_1 x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R u(k+i|k)\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$u(k+i|k) = Fx(k+i|k)$  durum geri besleme ve (3.28) sonraki durum ifadesi kullanılarak (3.29) ifadesi aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} & x(k+i|k)^T \{(A(k+i) + B(k+i)F)^T \gamma Q^{-1} (A(k+i) + B(k+i)F) \\ & - \gamma Q^{-1} + Q_1 + F^T R F\} x(k+i|k) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

(3.30) denkleminin tüm  $i \geq 0$  için sağlanması için (3.31)'in sağlanması gerekir.

$$(A(k+i) + B(k+i)F)^T \gamma Q^{-1} (A(k+i) + B(k+i)F) - \gamma Q^{-1} + Q_1 + F^T R F \leq 0 \quad (3.31)$$

(3.31) eşitsizliğini sağdan  $Q^T$ ,  $Q$  ile çarpılır,  $FQ$  yerine  $Y$  ifadesi yazılır ( $Y = FQ$ ) ise (3.32) eşitsizliği elde edilir.

$$(A(k+i)Q + B(k+i)Y)^T \gamma Q^{-1} (A(k+i)Q + B(k+i)Y) - \gamma Q^T + Q^T Q_1 Q + Y^T R Y \leq 0 \quad (3.32)$$

(3.11) Schur tümleyeni kullanılarak (3.32) eşitsizliği (3.33)'daki LMI formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} Q^T - \frac{1}{\gamma} (Q^T Q_1 Q + Y^T R Y) & (A(k+i)Q + B(k+i)Y)^T \\ (A(k+i)Q + B(k+i)Y) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.33)$$

Tekrar Schur tümleyenini kullanabilmek için (3.33) ifadesi aşağıdaki şekilde pekala yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} Q^T - \frac{1}{\gamma} Y^T R Y & (A(k+i)Q + B(k+i)Y)^T \\ (A(k+i)Q + B(k+i)Y) & Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q^T Q_1^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^{1/2} Q & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.34)$$

Artık Schur tümleyenini kullanabiliriz.

$$\begin{bmatrix} Q^T - \frac{1}{\gamma} Y^T R Y & (A(k+i)Q + B(k+i)Y)^T & Q^T Q_1^{1/2} \\ (A(k+i)Q + B(k+i)Y) & Q & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.35)$$

Yukarıda yapılan ayırma işlemi (3.35) matrisinin (1,1) elemanındaki  $\frac{1}{\gamma} Y^T R Y$  terimi

içinde uygulanır ise

$$\begin{bmatrix} Q^T & (A(k+i)Q+B(k+i)Y)^T & Q^T Q_1^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ (A(k+i)Q+B(k+i)Y) & Q & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.36)$$

(3.36) ifadesi elde edilir. Burada  $Q = Q^T > 0$  tanımlanmıştır. O zaman (3.36) ifadesinde  $Q = Q^T$  dönüşümü yapılabilir.

Ayrıca (3.36) eşitsizliği,  $[A(k+i)B(k+i)]$ 'de affine'dır. Böylece bu tüm politopik bölge için sağlanmalıdır.

$$[A(k+i)B(k+i)] \in \Omega = \text{Co}\{[A_1 B_1], [A_2 B_2], \dots, [A_L B_L]\} \quad (3.37)$$

$Q > 0$ ,  $Y = FQ$  ve  $\gamma$  değeri aşağıdaki (3.38) eşitsizliği sağlama koşuluyla; (3.36)'daki eşitsizlik, (3.37)'deki politopik bölge içinde de sağlanır.

$$\begin{bmatrix} Q & QA_j^T + Y^T B_j^T & QQ_1^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_j Q + B_j Y & Q & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} > 0 \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (3.38)$$

Burada unutulmaması gereken başka bir nokta ise durum geri besleme matrisi  $F = YQ^{-1}$  alınarak ispata başlanmış olmasıdır. Böylece (3.22), (3.23) ve (3.24) ispatı tamamlanmış olur.

### B) Yapısal Geri Besleme Belirsizlikleri

(3.4) gibi yapısal geri besleme ile belirlenen belirsiz  $\Omega$  kümesini ele alalım.  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k), i \geq 0$  kontrol kuralı ile her örnekleme anında dayanıklı amaç ölçütü  $V(x(k|k))$ 'i minimum yapan durum geri besleme matrisi F

$$F = YQ^{-1} \quad (3.39)$$

olarak verilir. Eğer çözüm var ise,  $Q = Q^T > 0$  ve Y, aşağıda verilen doğrusal amaç ölçütünün minimum yapılmasından elde edilir.

$$\min_{\gamma, Q, Y, \Lambda} \gamma \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.41)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Y^T R^{1/2} & Q Q_1^{1/2} & Q C_q^T + Y^T D_{qu}^T & Q A^T + Y^T B^T \\ R^{1/2} Y & \mathcal{R} & 0 & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 \\ C_q Q + D_{qu} Y & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ A Q + B Y & 0 & 0 & 0 & Q - B_p \Lambda B_p^T \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.42)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r I_r \end{bmatrix} > 0 \quad (3.43)$$

### İspat:

Politopik sistemler için yapılan ispattaki (3.25) ve (3.26) eşitsizlikleri sayesinde (3.27) ispatına ulaşılmıştı. Benzer şekilde (3.40) ve (3.41) ispatları da aynı olacaktır.

Ayrıca bu ispat sırasında  $Q^T = Q$  dolayısıyla  $P^T = P$  olacağı unutulmamalıdır.

(3.4)' de verilen sistem modelimiz kullanılarak,  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k), i \geq 0$  durum geri beslemesi uygulanmış sistemin sonraki durumu önceki durumu cinsinden (3.44)'deki gibi yazılabilir.

$$x(k+i+1) = \{A(k+i) + B(k+i)F\}x(k+i) + B_p p(k+i|k) \quad (3.44)$$

Bir sonraki durum ve  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k)$  kontrol işareti değeri (3.18)'de yerine koyularak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{bmatrix} x(k+i|k) \\ p(k+i|k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A+BF)^T P(A+BF) - P & (A+BF)^T P B_p \\ + F^T R F + Q_1 & \\ B_p^T P(A+BF) & B_p^T P B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+i|k) \\ p(k+i|k) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.45)$$

Ayrıca yapısal geri besleme belirsizliklerinde  $\|\Delta_i(k)\|_2 \equiv \bar{\sigma}(\Delta_i(k)) \leq 1, i=1,2,\dots,r$  olmalıdır. Bu koşuldan daha önceden gösterildiği gibi (3.6) koşulu ortaya çıkmaktadır. (3.4) yapısal geri besleme denklemi ile (3.6) ifadesi birleştirilerek (3.46) ifadesi elde edilir.

$$p_j(k+i|k)^T p_j(k+i|k) \leq x(k+i|k)^T (C_{q,j} + D_{qu,j}F)^T (C_{q,j} + D_{qu,j}F)x(k+i|k) \quad j = 1,2,\dots,r \quad (3.46)$$

Eğer  $\exists \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_r > 0$  ise ve (3.47),(3.48) eşitsizlikleri sağlanıyorsa (3.45) ve (3.46) eşitsizliklerin sağlandığı görülebilir.

$$\begin{bmatrix} (A+BF)^T P(A+BF) - P + F^T R F & (A+BF)^T P B_p \\ + Q_1 + (C_q + D_{qu}F)^T \Lambda' (C_q + D_{qu}F) & \\ B_p^T P(A+BF) & B_p^T P B_p - \Lambda' \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.47)$$

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} \lambda'_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda'_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda'_r I_{n_r} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.48)$$

(3.47) ifadesi Schur tümleyeni kullanılarak normal eşitsizlik (3.49) formunda gösterebilir.

$$\begin{aligned} & (A+BF)^T \{P - P B_p (B_p^T P B_p - \Lambda')^{-1} B_p P\} (A+BF) \\ & - P + F^T R F + Q_1 + (C_q + D_{qu}F)^T \Lambda' (C_q + D_{qu}F) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

### Hatırlatma 3:

Bir  $(A_1 + A_2 A_3 A_4)$  matrisin tersi aşağıdaki (3.50) ile ifade edilebilir.

$$A_1^{-1} - A_1^{-1} A_2 (A_4 A_1^{-1} A_2 + A_3^{-1})^{-1} A_4 A_1^{-1} = (A_1 + A_2 A_3 A_4)^{-1} \quad (3.50)$$

(3.49) ifadesindeki köşeli parantez ile verilen ifadeyi, hatırlatma 3'de verilen yapıda  $A_1 = P^{-1}$ ,  $A_2 = -B_p$ ,  $A_3 = \Lambda'^{-1}$ ,  $A_4 = B_p^T$  olarak tekrar ifade edersek, (3.49) eşitsizliği (3.51) eşitsizliğine dönüşür.

$$\begin{aligned} & (A+BF)^T (P^{-1} + B_p \Lambda'^T B_p^T)^{-1} (A+BF) \\ & - P + F^T R F + Q_1 + (C_q + D_{qu}F)^T \Lambda' (C_q + D_{qu}F) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Elde edilen (3.51) ifadesi ilk olarak  $\gamma^{-1}$  çarpılır, daha sonra sağdan ve soldan  $Q$  ile ayrıca çarpılır ise ve  $P = \gamma Q^{-1}$ ,  $P^{-1} = \gamma^{-1} Q$ ,  $Y = FQ$  eşitlikleri elde edilen (3.51) ifadesinde yerine koyulur ise

$$\begin{aligned}
& Q - (AQ + BY)^T (Q + B_p \gamma \Lambda' B_p^T)^{-1} (AQ + BY) + Y^T R^{1/2} \gamma^{-1} R^{1/2} Y \\
& + Q Q_1^{1/2} \gamma^{-1} Q_1^{1/2} Q - (C_q Q + D_{qu} Y)^T \gamma^{-1} \Lambda' (C_q Q + D_{qu} Y) \geq 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

ifadesi elde edilir. Meşhur Schur tümleyeni işlemini arka arkaya sürdürür isek, (3.52) ifadesi matrisel formda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$Q^T - \begin{bmatrix} R^{1/2} Y \\ Q_1^{1/2} Q \\ (C_q Q + D_{qu} Y) \\ (AQ + BY) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma^{-1} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-1} \Lambda' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (Q - B_p \gamma \Lambda'^{-1} B_p^T)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{1/2} Y \\ Q_1^{1/2} Q \\ (C_q Q + D_{qu} Y) \\ (AQ + BY) \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.53}$$

Yine Schur tümleyeni kullanılarak (3.53) eşitsizliği nihayet (3.54) LMI formunda gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} Q & Y^T R^{1/2} & Q Q_1^{1/2} & Q C_q^T + Y^T D_{qu}^T & Q A^T + Y^T B^T \\ R^{1/2} Y & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ C_q Q + D_{qu} Y & 0 & 0 & \gamma \Lambda'^{-1} & 0 \\ AQ + BY & 0 & 0 & 0 & Q - B_p \gamma \Lambda'^{-1} B_p^T \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.54}$$

Burada  $A = \gamma \Lambda'^{-1} > 0$  ve  $\lambda_i = \gamma \lambda_i'^{-1} > 0, i = 1, 2, \dots, r$  tanımı yapılarak (3.40), (3.41), (3.42), (3.43) ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 1 ile, giriş-çıkış sınırlaması yapılmadığı durumda amaç ölçütünün en kötü durumu minimum yapan sonsuz ufuklu dayanıklı model öngörülü kontrol için gerekli LMI'leri verildi. Hem politopik, hem de yapısal geri beslemeli sistemler için bu LMI'lerin nasıl oluşturulduğu ispatlandı.

Her örnekleme anında bu LMI'leri çözülerek, durum geri besleme  $F_k$  matrisi hesaplanır. Durum geri besleme matrisi F'in kolay gösterim için altsimgе gösterimi yapılmamıştır. Durum geri beslemeli kontrol kuramının kapalı çevrim kararlılığı, bu bölümün ileriki başlıklarında verilecektir.

Nominal durumda (  $L = 1$  veya  $\Delta(k) \equiv 0, p(k) \equiv 0, k \geq 0$  ), bulunan çözüm ayrık zamanlı doğrusal ikinci dereceden regülatör (LQR) probleminin çözümü olacaktır. Standart LQR çözümü için **LKwakernaak ve Sivan (1972)** kaynağı incelenebilir.

Nominal sistem durumu için hesaplanan geri besleme matrisi F sabit ve sistem durumundan bağımsızdır. Sınırlandırmalar olmadığı model belirsizliği durumunda dahi durum geri besleme matrisi F'in sistem durumuna bağlı olduğu gösterilebilir. Bu durumda, kayan ufuklu kontrol (RHC) ve F'in her örnekleme anında yeniden hesaplanması işlemi, sabit durum geri beslemeli kontrol kuramına göre önemli derecede performans artışı sağlayabilir.

Ayrıca, kapalı çevrim cevabının hızı, sistem durumu x'in düşüş oranı  $\rho$  ( $\|x(k)\| \leq c\rho^k \|x(0)\|, 0 < \rho < 1$ ) tanımlanarak yapılabilir.

$$x(k+i+1|k)^T Px(k+i+1|k) \leq \rho^2 x(k+i|k)^T Px(k+i|k), i \geq 0 \quad (3.55)$$

Her  $[A(k+i)B(k+i)] \in \Omega, i = 1, 2, \dots, r$  için (3.55) sağlanır. Bu da (3.56) eşitsizliğini ima etmektedir.

$$\|x(k+i+1|k)\| \leq \left[ \frac{\overline{\sigma}(P)}{\underline{\sigma}(P)} \right]^{1/2} \rho \|x(k+\frac{1}{2}+i|k)\|, i > 0 \quad (3.56)$$

Teorem 1'in ispatlanmasındaki adımlar izlenerek iki belirsizlik tanımı için de (3.55)'in sağlanmasını gerektiren LMI'leri aşağıda gibi verilebilir.

**A) Politopik veya Çok Modelli Model için**

$$\begin{bmatrix} \rho^2 Q & (A_i Q + B_i Y)^T \\ A_i Q + B_i Y & Q \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, L \quad (3.57)$$

**B) Yapısal Geri Besleme Belirsizlikleri**

$$\begin{bmatrix} \rho^2 Q & (C_q Q + D_{qu} Y)^T & (AQ + BY)^T \\ C_q Q + D_{qu} Y & A & 0 \\ AQ + BY & 0 & Q - B_p \frac{AB_p}{p} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.58)$$

$\rho \in (0,1)$  değeri kapalı çevrim cevabının hızını gösteren ekstra bir parametredir. Ayrıca (3.24) ve (3.42) eşitsizliklerini sağlıyor ise  $\rho = 1$  için yukarıdaki iki adet eşitsizlik hayli hayli sağlanır.

### 3.4 Dayanıklı Sınırlandırılmış Sonsuz Ufuklu Model Öngörülü Kontrol

Bir önceki bölümde, giriş-çıkış sınırı olmaksızın dayanıklı amaç ölçütü fonksiyonun üst sınırı ilişkisinden dayanıklı MPC probleminin LMI'leri ile çözümü sunuldu. Bu

bölümde ise giriş ve çıkış sınırlandırmaları için içinde olduğu zaman dayanıklı MPC’de gerekli sınırlamaları içeren ek LMI’leri türetecektir.

**Kuram 1: (Değişmez Elipsoit)**

Belirsiz  $\Omega$  kümesi için (3.1) LTV sistemimizi ele alalım.  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k)$   
 $Q > 0$  ve  $Y = FQ$  olsun.

Eğer

$$x(k|k)^T Q^{-1} x(k|k) \leq 1 \quad (\text{eşdeğer olarak } x(k|k)^T P x(k|k) \leq \gamma, P = \gamma Q^{-1}) \quad (3.59)$$

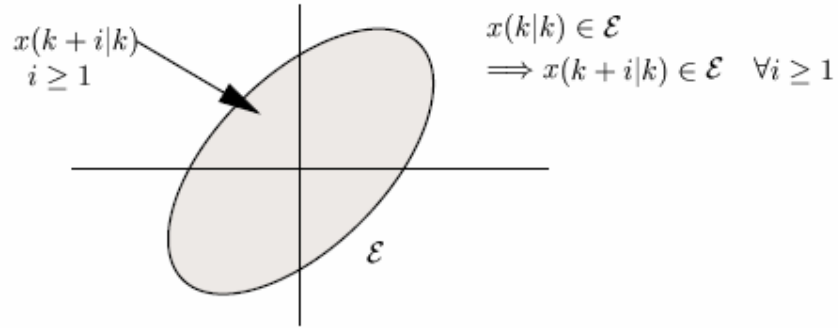
ise

$$\max_{A(k+j)B(k+j) \in \Omega, j \geq 0} x(k+i|k)^T Q^{-1} x(k+i|k) < 1, i \geq 1 \quad (3.60)$$

eşdeğer olarak

$$\max_{[A(k+j)B(k+j)] \in \Omega, j \geq 0} x(k+i|k)^T P x(k+i|k) < \gamma, i \geq 1 \quad (3.61)$$

olacaktır. Böylece belirsiz sistemin öngörülen durumları için  $\mathcal{E} = \{z \mid z^T Q^{-1} z \leq 1\} = \{z \mid z^T P z \leq \gamma\}$  bir değişmez elipsoittir.



**Şekil 3.3 :** İki boyut için değişmez elipsoidin grafiksel gösterimi

(3.60) ve (3.61)’deki maksimum yapma işlemi  $\Omega$  kümesi boyuncadır. Bu işlem  $x(k+i|k)^T Q^{-1} x(k+i|k)$ ’in en kötü durumunu gösterir.

**İspat1: (Değişmez Elipsoit)**

(3.18) eşitsizliğini (3.62) ile tekrar yazarsak eşitsizliğin  $Q_1, R$  'nin bulunduğu tarafı,  $Q_1 > 0, R > 0$  olduğu için her zaman 0'dan küçük olacağı görülecektir.

$$\begin{aligned} & x(k+i+1|k)^T Px(k+i+1|k) - x(k+i|k)^T Px(k+i|k) \\ & \leq -\{x(k+i|k)^T Q_1 x(k+i|k) + u(k+i|k)^T Ru(k+i|k)\} \\ & < 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Böylece (3.63) eşitsizliği yazılır.

$$x(k+i+1|k)^T Px(k+i+1|k) < x(k+i|k)^T Px(k+i|k), \quad i \geq 0 \quad (x(k+i|k) \neq 0) \quad (3.63)$$

Eğer  $x(k|k)^T Px(k|k) \leq \gamma$  ise  $x(k+1|k)^T Px(k+1|k) < \gamma$ 'dir. Bu işlem  $x(k+2|k)$ ,  $x(k+3|k)$ , ... için de yapılarak ispat tamamlanır.

### 3.4.1 Giriş Sınırlaması

Sistemlerin içindeki fiziksel kısıtlamalar nedeniyle kontrol işareti üzerinde keskin sınırlamalar vardır. Yeterli LMI koşulları oluşturularak, kontrol işareti üzerindeki sınırlamalar dayanıklı MPC algoritmasına nasıl ekleneceği bu bölümde gösterilecektir. Ana fikir ise **Boyd ve diğ. (1994)** 'in kitabından alınmıştır.

Bu bölüm boyunca Kuram 1'in sağlandığı farz edilecektir. Bu yüzden belirsiz sistemin öngörülen durumları için  $\varepsilon$ , değişmez elipsoittir.

$\|u(k+i|k)\|_2 \leq u_{\max}, \quad i \geq 0$  Ecludian norm sınırlamasını düşünelim. Her ne kadar ilk kontrol işareti  $u(k|k) = u(k)$  sisteme uygulansa da tüm ufuk boyunca giriş sınırlandırılır. Böylece  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k), F = YQ^{-1}$ 'den yola çıkarak (3.64)'ü elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} \|u(k+i|k)\|_2^2 &= \max_{i \geq 0} \|YQ^{-1}x(k+i|k)\|_2^2 \\ &\leq \max_{z \in \varepsilon} \|YQ^{-1}z\|_2^2 \\ &= \lambda_{\max}(Q^{-\frac{1}{2}}Y^TYQ^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Sonuç olarak, (3.11) Schur tümleyeni kullanarak  $\|u(k+i|k)\|_2 \leq u_{\max}$  ifadesi LMI formunda (3.65)'daki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.65)$$

Ayrıca k anında  $u(k+i|k)$ 'in her bileşeni için tepe noktası sınırlılığı incelenebilir.

$|u_j(k+i|k)| \leq u_{j,\max}, i \geq 0, j = 1, 2, \dots, n_u$  için

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} |u_j(k+i|k)|^2 &= \max_{i \geq 0} |(YQ^{-1}x(k+i|k))_j|^2 \\ &\leq \max_{z \in \mathcal{E}} |(YQ^{-1}z)_j|^2 \\ &\leq \|(YQ^{-1/2})_j\|_2^2 (\text{Cauchy - Schwarz}) \\ &= (YQ^{-1}Y^T)_{jj} \end{aligned} \quad (3.66)$$

(3.66) eşitsizliği elde edilir. Bir X simetrik matrisinin varlığı ile

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \text{ ve } X_{jj} \leq u_{j,\max}^2, j = 1, 2, \dots, n_u \quad (3.67)$$

(3.67) LMI'leri sağlanarak  $|u_j(k+i|k)| \leq u_{j,\max}, i \geq 0, j = 1, 2, \dots, n_u$  eşitsizliğinin sağlanması garanti edilir.

(3.65) ve (3.67) eşitsizlikleri kontrol işareti üzerindeki belirlenmiş sınırları garanti eden yeterli LMI'lerdir.

### 3.4.2 Çıkış Sınırlaması

Performans istekleri doğrultusunda sistem çıkışı  $y(k)$  üzerinde sınırlamalar yapılabilir. Çıkış sınırlaması söz konusu olduğunda, politopik ve yapısal geri besleme belirsizlikleri için yeterli LMI koşulları bu bölümde türetilecektir.

Ecludian norm sınırlaması  $\max_{[A(k+j)B(k+j)] \in \Omega, j \geq 0} \|y(k+i|k)\|_2 \leq y_{\max}, i \geq 1$ 'i düşünelim

#### A) Politopik veya Çok Modelli Model için

(3.2) de LTV için  $\Omega$  kümesi belirlensin.

$$\begin{bmatrix} Q & (A_j Q + B_j Y)^T C^T \\ C(A_j Q + B_j Y) & y_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0, j = 1, 2, \dots, L \quad (3.68)$$

(3.68) eşitsizliği sağlanır ise  $\max_{[A(k+j)B(k+j)] \in \Omega, j \geq 0} \|y(k+i|k)\|_2 \leq y_{\max}, i \geq 1$  eşitsizliği sağlanır.

#### İspat:

Kuram 1'in sağlandığı farz edilirse belirsiz sistemin öngörülen durumları için  $\mathcal{E}$ , değişmez elipsoittir.

$y(k) = Cx(k), u(k+i|k) = Fx(k+i|k)$  dönüşümü ile her  $[A(k+j)B(k+j)] \in \Omega$ ,  $j \geq 0$  için,

$$\begin{aligned}
\max_{i \geq 0} \|y(k+ik)\|_2 &= \max_{i \geq 0} \|C\{A(k+i) + B(k+i)F\}x(k+ik)\|_2 \\
&\leq \max_{z^T Q^{-1} z \leq 1} \|C\{A(k+i) + B(k+i)F\}z\|_2^2, i \geq 0 \\
&= \max_{z^T z \leq 1} \|C\{A(k+i) + B(k+i)F\}Q^{1/2}z\|_2^2, i \geq 0 (z = Q^{1/2}z \text{ donusumu}) \\
&= \bar{\sigma}[C\{A(k+i) + B(k+i)F\}Q^{1/2}], i \geq 0
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Yani

$$\bar{\sigma}[C\{A(k+i) + B(k+i)F\}Q^{1/2}] \leq y_{\max}, i \geq 0, \tag{3.70}$$

(3.70)'in sağlanması yeterlidir. En büyük tekil değer açık olarak (3.71) gibi yazılabilir.

$$Q^{1/2}(A(k+i) + B(k+i)F)^T C^T C(A(k+i) + B(k+i)F)Q^{1/2} \leq y_{\max}^2 I, i \geq 0 \tag{3.71}$$

(3.71) eşitsizliği  $(y_{\max}^2 I)^{-1}$  ile çarpılır, ayrıca sağdan ve soldan  $Q^{1/2}$  ile çarpılır,  $Y = FQ$  eşitliği yerine yazılır ise (3.72) eşitsizliği elde edilir.

$$Q - \{A(k+i)Q + B(k+i)Y\}^T C^T (y_{\max}^2 I)^{-1} C \{A(k+i)Q + B(k+i)Y\} \geq 0 \tag{3.72}$$

(3.11) Schur tümleyeni kullanarak (3.72) eşitsizliği LMI formunda (3.73)'deki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} Q & (A(k+i)Q + B(k+i)Y)^T C^T \\ C(A(k+i)Q + B(k+i)Y) & y_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.73}$$

Son eşitsizlik  $[A(k+i)B(k+i)]$  içinde affine'dır. Eğer sadece ispatlamak istediğimiz (3.68) sağlanır ise bu tüm  $[A(k+i)B(k+i)] \in \Omega = \text{Co}\{[A_1 B_1], [A_2 B_2], \dots, [A_L B_L]\}$  politopik bölge için de sağlanır. Böylece politopik belirsizlik için ispat tamamlanır.

## B) Yapısal Geri Besleme Belirsizlikleri

$\Omega$  kümesi bir yapısal  $\Delta$  bloğunun terimleri ile (3.4) ve (3.5)'de verilen denklemler ile ifade edilir. (3.75) eşitsizliği sağlanır ise  $\max_{[A(k+j)B(k+j)] \in \Omega, j \geq 0} \|y(k+i|k)\|_2 \leq y_{\max}, i \geq 1$  eşitsizliği sağlanır.

$$\begin{bmatrix} y_{\max}^2 Q & (C_q Q + D_{qu} Y)^T & (AQ + BY)^T C^T \\ C_q Q + D_{qu} Y & T^{-1} & 0 \\ C(AQ + BY) & 0 & I - CB_p T^{-1} B_p^T C^T \end{bmatrix} \geq 0$$

$$T = \begin{bmatrix} t_1 I_{n_1} & & & \\ & t_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_r I_{n_r} \end{bmatrix}, t_1, t_1, \dots, t_r, t_r \geq 0 \quad (3.75)$$

**İspat:**

Kuram 1'in sağlandığı farz edilirse belirsiz sistemin öngörülen durumları için  $\varepsilon$ , değişmez elipsoittir.

(3.4)'deki sistemde  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k)$  dönüşümünü de kullanarak, her kabul edilebilir  $\Delta(k+i), i \geq 0$  için

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} \|y(k+ik)\|_2 &= \max_{i \geq 0} \|C\{A+BF\}x(k+ik) + CB_p p(k+ik)\|_2 \\ &\leq \max_{z^T Q^{-1} z \leq 1} \|C\{A+BF\}z + CB_p p(k+ik)\|_2, i \geq 0 \quad (3.75) \\ &= \max_{z^T z \leq 1} [C\{A+BF\}Q^{1/2}z + CB_p p(k+ik)], i \geq 0 (z = Q^{1/2}z \text{ dönüşümü}) \end{aligned}$$

Yani tüm  $p(k+i|k)$  için  $\|C(A+BF)Q^{1/2}z + CB_p p(k+i|k)\|_2 \leq y_{\max}, i \geq 0$  olmasını istenmektedir.

(3.4) denklemini kullanılarak, (3.6) eşitsizliğinin her iki tarafı T gibi bir matris ile çarpılır ise (3.76) ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} p_j(k+ik)^T T p_j(k+ik) &\leq x(k+ik)^T (C_{qj} + D_{quj} F)^T T (C_{qj} + D_{quj} F) x(k+ik) \\ &\leq z^T Q^{1/2} (C_{qj} + D_{quj} F)^T T (C_{qj} + D_{quj} F) Q^{1/2} z \quad (3.76) \end{aligned}$$

$$T = \begin{bmatrix} t_1 I_{n_1} & & & \\ & t_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_r I_{n_r} \end{bmatrix}, t_1, t_1, \dots, t_r, t_r \geq 0$$

$z^T z \leq 1$  olduğuna göre  $z^T (t_{r+1} I) z \leq t_{r+1}$  eşitsizliği pekala yazılabilir. Başka bir deyiş ile  $-z^T (t_{r+1} I) z \geq -t_{r+1}$  'dir. Bu ifade ile (3.76) ifadesi toplanırsa (3.77) elde edilir.

$$p_j(k+ik)^T T p_j(k+ik) - t_{r+1} \leq z^T \{Q^{1/2}(C_{qj} + D_{quj}F)^T T (C_{qj} + D_{quj}F) Q^{1/2} - t_{r+1}\} z \quad (3.77)$$

$\|C(A+BF)Q^{1/2}z + CB_p p(k+ik)\|_2 \leq y_{\max}$  eşitsizliği açılarak (3.78) biçiminde yazılabilir.

$$y_{\max}^2 - (C(A+BF)Q^{1/2}z + CB_p p(k+ik))^T (C(A+BF)Q^{1/2}z + CB_p p(k+ik)) \geq 0 \quad (3.78)$$

Eğer  $t_1, t_2, \dots, t_r, t_{r+1} > 0$  var ise (3.77) ve (3.78) ifadesi (3.79) eşitsizliği ile tekrar ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} z \\ p(k+i) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{1/2}(A+BF)^T C^T C(A+BF)Q^{1/2} & Q^{1/2}(A+BF)^T C^T CB_p \\ + Q^{1/2}(C_q + D_{qu}F)^T T (C_q + D_{qu}F)Q^{1/2} & \\ -t_{r+1}I & \\ B_p^T C^T C(A+BF)Q^{1/2} & B_p^T C^T CB_p - T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ p(k+i) \end{bmatrix} \leq y_{\max}^2 I - t_{r+1}I, i \geq 0 \quad (3.79)$$

Genel yapıyı bozmamak için  $t_{r+1} = y_{\max}^2$  alınabilir. Bu son eşitsizliğin tüm  $z$ ,  $p(k+ik)$  için sağlanması (3.80) eşitsizliğini sağlaması ile olabilir.

$$\begin{bmatrix} Q^{1/2}(A+BF)^T C^T C(A+BF)Q^{1/2} & Q^{1/2}(A+BF)^T C^T CB_p \\ + Q^{1/2}(C_q + D_{qu}F)^T T (C_q + D_{qu}F)Q^{1/2} & \\ -t_{r+1}I & \\ B_p^T C^T C(A+BF)Q^{1/2} & B_p^T C^T CB_p - T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.80)$$

(3.80) eşitsizliğini (3.11) Schur tümleyeni ile normal eşitsizlik şeklinde yazılır ve elde edilen eşitsizlik sağdan ve soldan  $Q^{1/2}$  ile çarpılır,  $Y = FQ$  dönüşümü yapılır ise (3.81) eşitsizliği yazılabilir.

$$y_{\max}^2 - (C_q Q + D_{qu} Y)^T (T^{-1})^{-1} (C_q + D_{qu} Y) - (AQ + BY)C^T \{I - CB_p (B_p^T C^T CB_p - T)^{-1} B_p^T C^T\} C(AQ + BY) \leq 0 \quad (3.81)$$

(3.81) eşitsizliğinin köşeli parantezli kısmı Hatırlatma 3'de tanıtılan  $A_1^{-1} - A_1^{-1} A_2 (A_4 A_1^{-1} A_2 + A_3^{-1})^{-1} A_4 A_1^{-1} = (A_1 + A_2 A_3 A_4)^{-1}$  formuna dönüştürmek

için  $A_1 = I$ ,  $A_2 = CB_p$ ,  $A_3 = T^{-1}$ ,  $A_4 = B_p^T C^T$  alınabilir. Tüm bunların ışığı altında (3.81) eşitsizliği (3.82) ile ifade edilir.

$$y_{\max}^2 - (C_q Q + D_{qu} Y)^T (T^{-1})^{-1} (C_q + D_{qu,j} Y) - (AQ + BY) C^T \{I - CB_p T^{-1} B_p^T C^T\}^{-1} C (AQ + BY) \geq 0 \quad (3.82)$$

(3.82)'i matrisel çarpım formunda (3.83)'deki gibi yazılabilir.

$$y_{\max}^2 - \begin{bmatrix} C_q Q + D_{qu} Y \\ AQ + BY \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (T^{-1})^{-1} & 0 \\ 0 & (I - CB_p T^{-1} B_p^T C^T)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_q Q + D_{qu} Y \\ AQ + BY \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.83)$$

(3.83) eşitsizliği (3.11) Schur tümleyeni kullanılarak LMI formuna çevrilerek (3.75) ifadesi bulunur. Böylece yapısal geri besleme belirsizlikleri için de ispat tamamlanmıştır.

### 3.5 Dayanıklı Kararlılık

Bu bölümde giriş ve çıkış sınırlı dayanıklı MPC sentezi verilecektir. Ayrıca kapalı çevrim için dayanıklı kararlılık tespit edilecektir.

#### **Teorem 2:**

(3.2) veya (3.4) ile tanımlanan  $\Omega$  kümesini ele alalım.  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k)$  kontrol kuralındaki durum geri besleme matrisi F, tüm belirlenmiş giriş ve çıkış sınırları ile birlikte her örnekleme anında dayanıklı amaç ölçütünün üst sınırı  $V(x(k|k))$ 'i minimum yapsın. Minimum yapan durum geri besleme matrisi  $F = YQ^{-1}$  ile verilir. Doğrusal amaç ölçütünü minimum yapma probleminin çözümü var ise durum geri besleme matrisi F, aşağıdaki gibi elde edilir.

Politopik Belirsiz Sistemler için bu problem

$$\min\{ \gamma \mid \gamma, Q, Y \text{ ve giriş, çıkış sınırları için LMI'lerindeki değişkenler } \} \quad (3.24), (3.25), \text{ giriş sınırlama tipine göre (3.65) ve (3.67) LMI'leri, çıkış sınırlaması için (3.68) LMI şartları sağlanmalıdır;}$$

Yapısal Geri Besleme Belirsizlikli Sistemler için bu problem

$$\min\{ \gamma \mid \gamma, Q, Y, \Lambda \text{ ve giriş, çıkış sınırları için LMI'lerindeki değişkenler } \}$$

(3.41), (3.42), (3.43) LMI'leri, giriş sınırlama tipine göre (3.65) ve (3.67) LMI'leri, çıkış sınırlaması için (3.75) LMI şartları sağlanmalıdır;

formunda olacaktır.

**İspat:**

Kuram 1' den bildiğimiz üzere politopik (3.24), (3.25) ve yapısal (3.41), (3.42), (3.43) LMI eşitsizlikleri, belirsiz sistemin öngörülen durumları için  $\varepsilon$ 'yi değişmez bir elipsoit tanımlar. Böylece, giriş ve çıkış sınırlamalarını yeterli LMI sınırlarına dönüştürmek için kullanılan bölüm §3.4.1 ve §3.4.2 içindeki argümanlar doğru tutulurlar. İspatın geri kalanı Teorem 1'in ispatına benzerdir.

Kapalı çevrim kararlılığını ispatlamak için aşağıdaki kurama ihtiyaç duyulacaktır.

**Kuram 2:**

k anında Teorem 2' deki optimizasyon problemin herhangi bir var olan çözümü,  $t > k$  anındaki tüm zamanlar için de uygundur. Böylece eğer k anında Teorem 2' deki optimizasyon probleminin çözümü var ise,  $t > k$  anındaki tüm zamanlar için de vardır.

**İspat:**

Sistemin ölçülen  $x(k|k) = x(k)$  durumuna açıkça bağlı olan tek LMI eşitsizliği aşağıdaki LMI'dir.

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

Böylece bu kuramı ispatlamak için, ileride ölçülecek  $x(k+i|k+i) = x(k+i)$ ,  $i \geq 1$  durumları için probleminin çözümünün varlığını ispatlamak gerekecektir.

$[A(k+i)B(k+i)] \in \Omega$ ,  $i \geq 0$  için Kuram 1'i kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabilir.

$$x(k+i|k)^T Q^{-1} x(k+i|k) < 1, i \geq 1$$

Aslında Kuram 1 ile bize anlatılan, en kötü durumda dahi tahmin edilen sistem durumunun elipsoidin içinde olacağıdır. Böylece  $[A(k)B(k)] \in \Omega$  içinde k+1 anında ölçülen durum  $x(k+1|k+1) = x(k+1)$ ,  $(A(k)+B(k)F)x(k|k)$  değerine eşittir. Bu da aşağıdaki eşitsizliği sağlamak zorunda bırakır.

$$x(k+1|k+1)^T Q^{-1} x(k+1|k+1) < 1$$

Schur tümleyeni kullanılarak matrisel formda ifade edilir ise

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k+1|k+1)^T \\ x(k+1|k+1) & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

Böylece k anında optimizasyon probleminin çözümü var ise, k+1 içinde vardır. Yani optimizasyon problemi k+1 için de çözülebilir. Bu argüman k+2,k+3... için de yapılarak ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 3:**

Teorem 2'den elde edilen durum geri besleme kuralı kapalı çevrim kararlılığını dayanaklı ve asimptotik olarak sağlar.

**İspat:**

Belirsiz  $\Omega$  kümesini ele alalım. Asimptotik kararlılık için k anındaki optimal çözümden elde edilen  $P_k \geq 0$  terimli  $V(x(k|k)) = x^T(k)P_k x(k)$  fonksiyonun kesinlikle azalan Lyapunov fonksiyonu olduğunu göstermemiz gerekecektir.

İlk olarak,  $k = 0$  anında Teorem 2'den elde edilen optimizasyon probleminin çözümü var olsun. O zaman Kuram 2 kullanılarak  $k > 0$  anındaki tüm zamanlar için optimizasyon problemin çözümünün varlığı açıktır. Artık optimizasyon problemi konvektir. Yani bir tek minimum vardır ve bu minimuma ait her  $k > 0$  için o minimuma uygun  $(\gamma, Q, Y)$  optimal çözümü vardır.

İkincil olarak, Kuram 2 kullanılarak k anında optimal çözümden elde edilen  $\gamma$ ,  $Q > 0$ ,  $Y$  ( $\gamma, F = YQ^{-1}$ ,  $P = \gamma Q^{-1} > 0$ ) değerleri; her ne kadar optimal olmasa da, k+1 için  $x^T(k+1)P_k x(k+1) \leq \gamma$  eşitsizliğini sağlar. k ve k+1 anında optimal çözümden elde edilen çözümler  $P_k, P_{k+1}$  olmak üzere

$$x(k+1|k+1)^T P_{k+1} x(k+1|k+1) \leq x(k+1|k+1)^T P_k x(k+1|k+1) \quad (3.84)$$

ifadesi yazılabilir. k+1 sistem durumunda  $P_{k+1}$ ,  $x^T(k+1)P_{k+1} x(k+1) \leq \gamma$  çözümünü sağlayan optimal olmasına rağmen; bu sistem durumunda  $P_k$ , sadece  $x^T(k+1)P_k x(k+1) \leq \gamma$  çözümü sağlar.

i=0 için Kuram 1'deki (3.63) ifadesi ile

$$x(k+1|k)^T P_k x(k+1|k) < x(k|k)^T P_k x(k|k), (x(k|k) \neq 0) \quad (3.85)$$

yazılabilir.

$[A(k)B(k)] \in \Omega$  kümesi boyunca ölçülen durum  $x(k+1|k+1) = x(k+1)$  değeri  $(A(k)+B(k)F_k)x(k|k)$  değerine eşit olması yüzünden, bu (3.85) eşitsizliğini de sağlar. (3.83) eşitsizliği ile birleştirerek

$$x(k+1|k+1)^T P_{k+1} x(k+1|k+1) < x(k|k)^T P_k x(k|k), (x(k|k) \neq 0) \quad (3.86)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada,  $x(k|k)^T P_k x(k|k)$  kapalı çevrim için kesinlikle azalan Lyapunov eşitsizliğidir. Buradan  $k \rightarrow \infty$  iken  $x(k) = 0$ 'a gittiği sonucuna varılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Hatırlatma 4: Kuram 2 ışığı altında  $k=0$  anında bulunan  $P$ ,  $x(k|k)^T P x(k|k) \leq \gamma$  eşitsizliğini sağlar ise  $x(k+1|k+1)^T P x(k+1|k+1) < \gamma$  eşitsizliğini hayli hayli sağlar.  $k+2, k+3, \dots$  için de aynı denklemler yazılabilir. O zaman kapalı çevrim boyunca  $k=0$  için optimal çözüm olarak bulunan  $P$ ,  $k>0$  için de  $x(k|k)^T P x(k|k) < \gamma$  eşitsizliğini sağlar. Böylece  $k=0$  için hesaplan  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k)$  kontrol kuralındaki  $F$  durum geri besleme matrisi,  $k>0$  için de kullanılabilir. Yani sistemi asimptotik olarak kararlı ve dayanıklı kılan statik bir durum geri besleme matrisi vardır. Bu özellik çevrimdışı dayanıklı kontrol uygulamaları için kullanışlıdır.

## 4. GELİŞTİRMELER VE UYGULAMALAR

Bu bölümde, MATLAB aracı kullanarak iki adet sistemin benzetimini yaparak kontrol kuralı oluşturulacaktır. Yeri geldikçe **Kothare, Balakrishan, Morari (1996)**'in dayanıklı MPC çalışmasına geliştirmeler eklenerek yeni kontrol kuralları oluşturulacaktır.

Bu tez çalışması sırasında, LMI'leri çözdürmek için LMILAB(MATLAB), YALMIP ve SCILAB araçları kullanılmıştır. Yapılan uygulamaların hepsi MATLAB'ın LMILAB aracına dönüştürülmesi nedeni ile temel kaynak MATLAB LMILAB aracıdır.

### 4.1 Giriş Sınırlamalı Dayanıklı MPC İçin Çevrim-İçi ve Çevrim-Dışı Kontrol Akışı

Politopik Sistemler için giriş sınırlamalı Model öngörülü kontrolün çevrimiçi ve çevrimdışı kontrolünün akış kuralı aşağıdaki gibi 3 madde ile verilebilir.

- 1) Politopik  $A_i$  ve  $B_i$  matrislerini belirle, performans isteğine göre  $Q_i, R$  matrislerini belirle. (  $Q_i = I$  alınabilir. Çünkü  $R$ ' nin  $Q_i$ 'e olan oranı yani kontrol işaretini sistem durumuna oranı önemlidir. )
- 2) Yeni Sistem durumu  $x(k+i)$ 'i al.  $F$ 'i aşağıdaki algorithmadan hesapla.

```
%Teorem 1' olusturalim
```

```
q>=0
```

```
[1          x(k+ilk+i)']  
[x(k+ilk+i)  q          ] >=0
```

```
for j=1:az
```

```
    [ q          q*aj'+y'*bj    q*Q    y'*R    ]  
    [ aj*q+bj*y    q          0      0      ]  
    [ Q*q          0          gam*I  0      ]  
    [ R*y          0          0      gam*I ] >=0
```

```

end

% giriş sınırlarını ekleyelim
[ z y ]
[ y' q ] >=0

z(j,j)<=umax(j)*umax(j);

% gam'i minimum yapacak LMI'yi çözdürelim.
min(LMI, gam );

% durum geri besleme matrisi F değerini bulalım
F= y* inv(q)

```

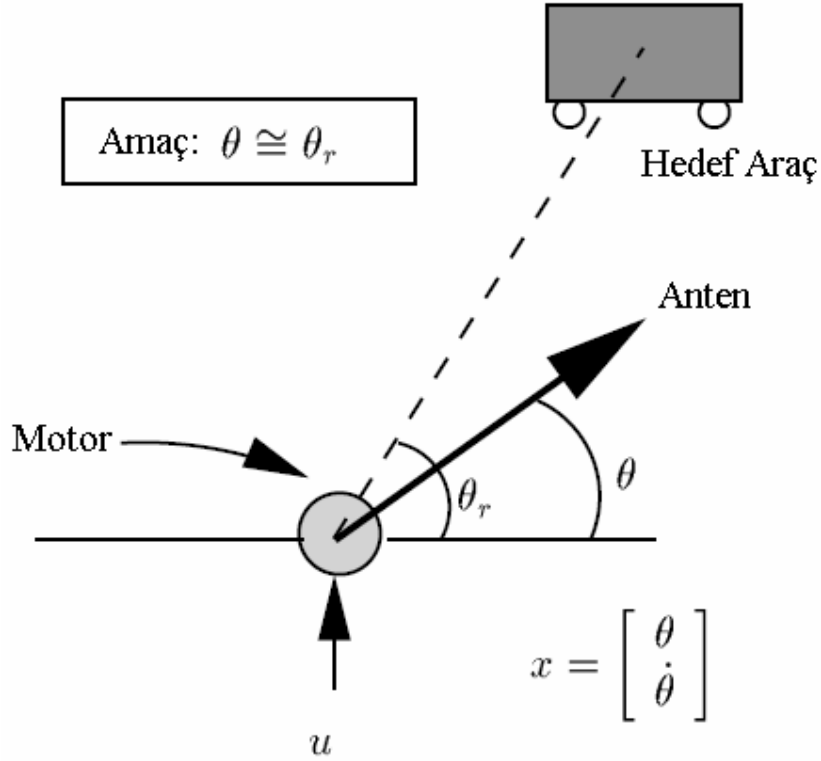
- 3) a) Çevrimiçi Çözüm:  $F$  matrisini her örnekleme anında  $2'$ den hesapla.  $F$  sistem durum geri besleme matrisi ile elde ettiğin  $u = Fx$  kontrol işaretini gerçek sisteme uygula. Bir sonraki örneklemede yeni sistem durumu  $x(k+i)$ 'i ölç ve  $2'$ ye git.
- b) Çevrimdışı Çözüm: İlk anda bulduğun  $F$  matrisi yardımı ile  $u = Fx$  kontrol işaretini her örnekleme anında gerçek sisteme uygula. Bir sonraki örneklemede yeni sistem durumu  $x(k+i)$ 'i ölç ve  $3'$ e git.

## 4.2 Dayanıklı MPC ile Klasik Açık Kontrol Sistemi

Bu bölümde **Kothare ve diğ. (1996)** yayınındaki örnek bir problem incelenecektir. Bu örnek için seçilen sistem, **Kwarnek ve Sivan (1972)**'den alınan klasik bir açık kontrol sistemidir. Şekil 4.1'de görülen sistem, bir elektrik motoru ile sürülen ve uçağın orijini etrafında dönen bir anten içermektedir. Bu çalışmada antenin açılma pozisyonu ( $\theta$ ) ve hızı ( $\theta'$ )'nin ölçülebildiği farz edilmiştir. Antenin hareketi, sürekli sistem karşılığından elde edilen ayrıklaştırma işlemi ile ayrık zamanlı yapıda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} \theta(k+1) \\ \dot{\theta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1-0.1\alpha(k) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1\kappa \end{bmatrix} u(k) \\
 x(k+1) &\stackrel{\Delta}{=} A(k)x(k) + B(k)u(k) \\
 y(k) &= [1 \quad 0]x(k) \stackrel{\Delta}{=} Cx(k)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\kappa = 0.787 \text{ rad}/(\text{volts sn}^2), 0.1 \text{ sn}^{-1} \leq \alpha(k) \leq 10 \text{ sn}^{-1}$$



Şekil 4.1 : Açısal Pozisyon Sistemi

Örnekleme periyodu 0.1 saniye alınmıştır.  $\alpha(k)$  parametresi antenin dönen parçaları arasındaki sürtünme katsayısı oranıdır.  $\alpha(k)$  parametresinin keyfi olarak zamanla belli aralıklar içinde değiştiği farz edilecektir.  $0.1 \leq \alpha(k) \leq 10$  arasında değişmek üzere,  $A(k) \in \Omega = \text{Co}\{A_1, A_2\}$  olmak üzere

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix} \text{ ve } A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Burada  $\Omega$  kümesi belirsiz bir politoptur. Alternatif olarak

$$\delta(k) = \frac{\alpha(k) - 5.05}{4.95}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.495 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \quad C_q = [0 \quad 4.95], \quad D_{qu} = 0 \quad (4.3)$$

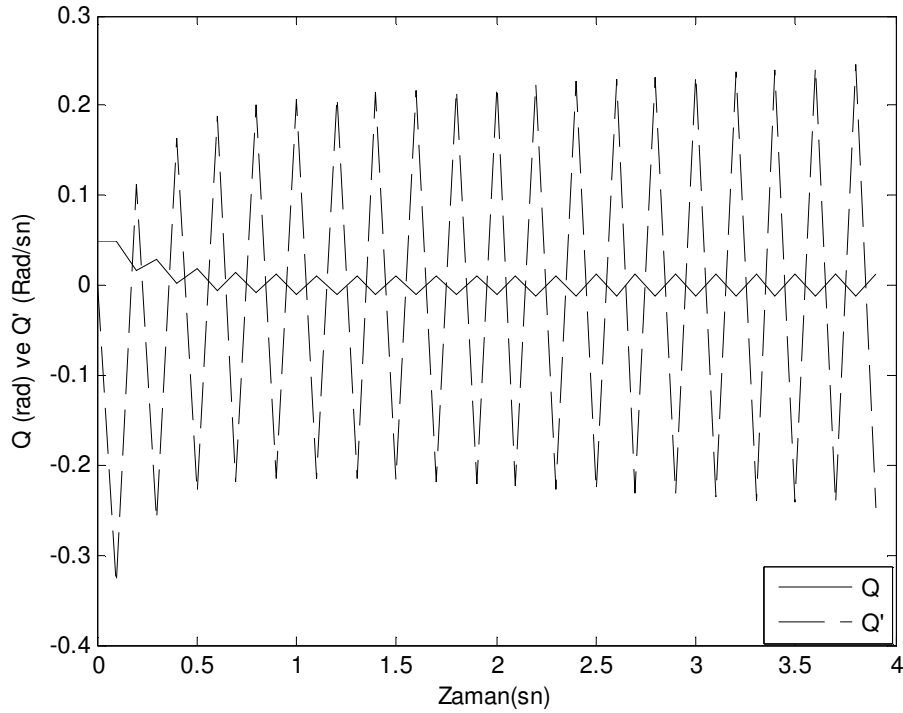
tanımlanabilir. Burada  $\delta(k)$  zamanla değişen ve  $|\delta(k)| \leq 1, k \geq 0$  ile norm sınırlıdır. Belirsizlik ise  $\Omega = \{[A + B_p \delta C_q] : |\delta| \leq 1\}$  kümesi ile belirtilen yapısal geri besleme belirsizliğidir.

Verilen  $x(k)$  başlangıç durumu ile her örnekleme anında çözülecek dayanıklı sonsuz ufuklu model öngörülmesi kontrol problemi (4.4) ile verilmiştir.

$$\min_{u(k+i|k)=F^i x(k+i|k)}, \max_{[A(k+i), B(k+i)] \in \Omega, \geq 0} \{J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} (y(k+i|k)^2 + Ru(k+i|k)^2)\} \quad (4.4)$$

Burada  $R = 0.00002$  alınacak ve  $|u(k+i|k)| \leq 2$  volt sınırı olduğu kabul edilecektir. Dikkat edilecek başka bir husus amaç fonksiyonumuzu önceki bölümde tanıtılan amaç fonksiyonuna benzetmek için  $Q_1$  değerini seçimidir. (4.4) gibi bir amaç fonksiyonu, (3.17)'ye benzetmek için  $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  seçilmelidir.

$x(0) = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \end{bmatrix}$  başlangıç durumu alınarak  $\alpha(k) = 9sn^{-1}$  karşı düşen belirsiz sistemin kapalı çevrim cevabı Şekil 4.2'da verilmiştir. Kontrol kuralı ise,  $\alpha(k) = \alpha_{nom} = 1sn^{-1}$ 'ye karşılık düşen nominal sistem kullanılarak sınırlandırılmamış sonlu ufuklu amaç ölçütünü minimum yapma işleminin sonucunda elde edilmiştir.

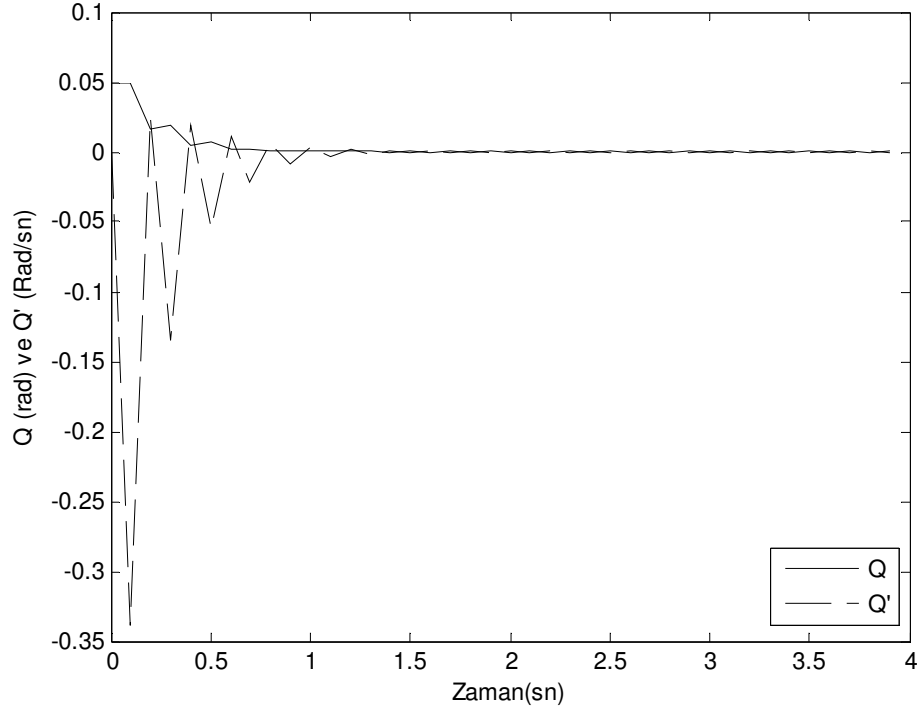


**Şekil 4.2 :** Nominal MPC kullanarak  $\alpha(k) = 9sn^{-1}$ 'lık sistemin cevabı

Her  $k \geq 0$  anında optimizasyon probleminin çözümü olmasına rağmen tasarlanan kontrolör, kararsız cevabı engelleyememektedir. Bu durum kontrolörün  $\alpha(k) = 1sn^{-1}$  nominal sisteme göre tasarlanması sonucu sürpriz bir durum değildir. Oysaki “Her k anında sistem ölçüm formu içindeki geri besleme, model belirsizliklerini ve

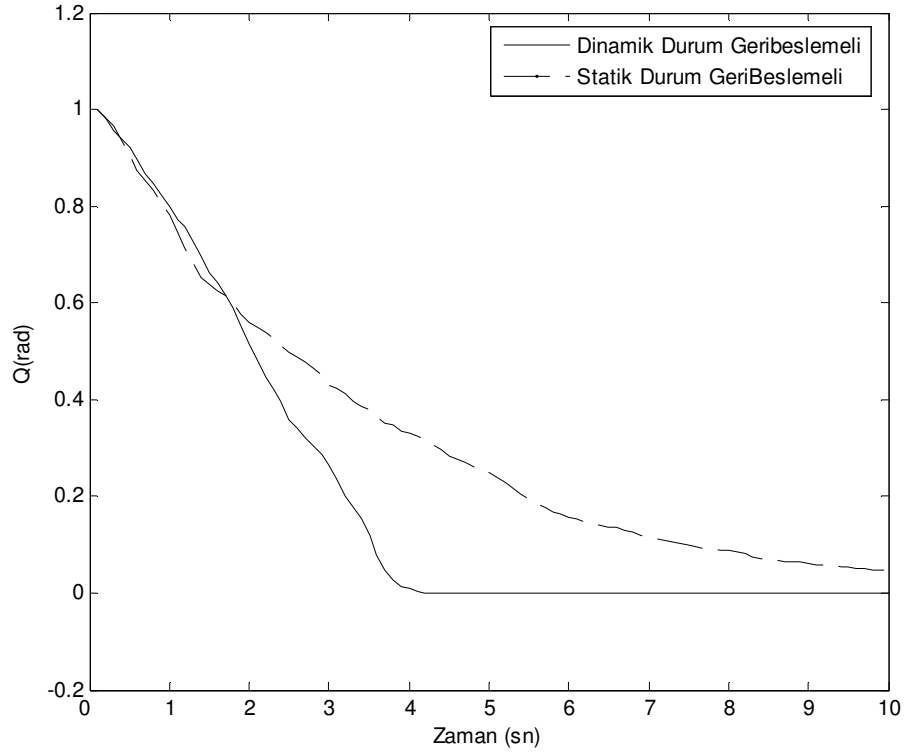
ölçülemeyen gürültüleri telafi etmesi beklenir” yaygın kanısı, dayanıklı kararlılığı garanti etmeksizin model belirsizlikleri için sadece bir amaca yönelik geçici bir düzeltmedir.

Şekil 4.3, Teorem 1’den elde edilen sınırlandırılmamış dayanıklı model öngörülü kontrolörün sistem cevabını vermektedir. Sistem cevabının ne kadar iyi olduğu şekilden açıkça fark edilebilmektedir.



**Şekil 4.3 :** Dayanıklı sınırlandırılmamış LMI temelli MPC kullanarak  $\alpha(k) = 9sn^{-1}$ ’lık sistemin cevabı

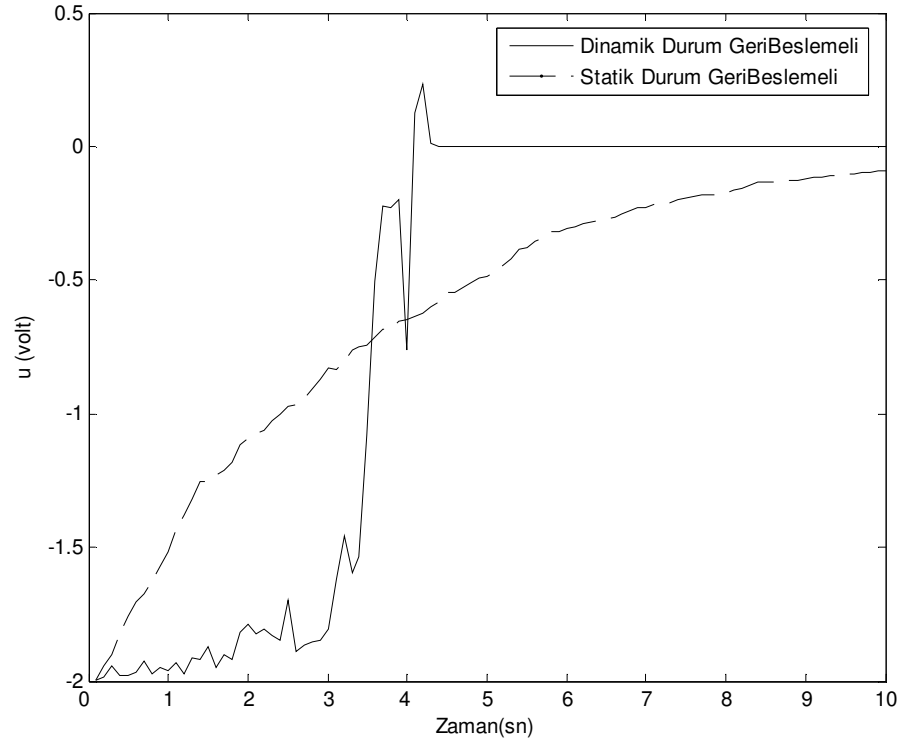
$x(0) = [1 \ 0]^T$  alınarak ve  $\alpha(k)$   $0.1 \leq \alpha(k) \leq 10$  arasında düzgün olarak rasgele değiştirilerek, sistem cevabı hem çevrimiçi hem de çevrimdışı kontrol için Şekil 4.4’de verilmiştir. Bu cevabı oluşturan uygun kontrol cevabı ise Şekil 5.5 ile verilmiştir. Çevrimiçi kontrolde, her örnekleme anında k tekrar hesaplanarak dinamik F durum geri besleme matrisi elde edilir. Çevrimdışı kontrolde ise k=0 için hesaplanan durum geri besleme matrisi F statiktir ve tüm kontrol boyunca sabittir. Her iki şekil için de kontrol işareti  $|u(k)| \leq 2$  ile sınırlandırılmıştır.



**Şekil 4.4 :** Dayanıklı LMI temelli edilen MPC'nin, giriş sınırlı zamanla değişen sistem üzerindeki cevabı

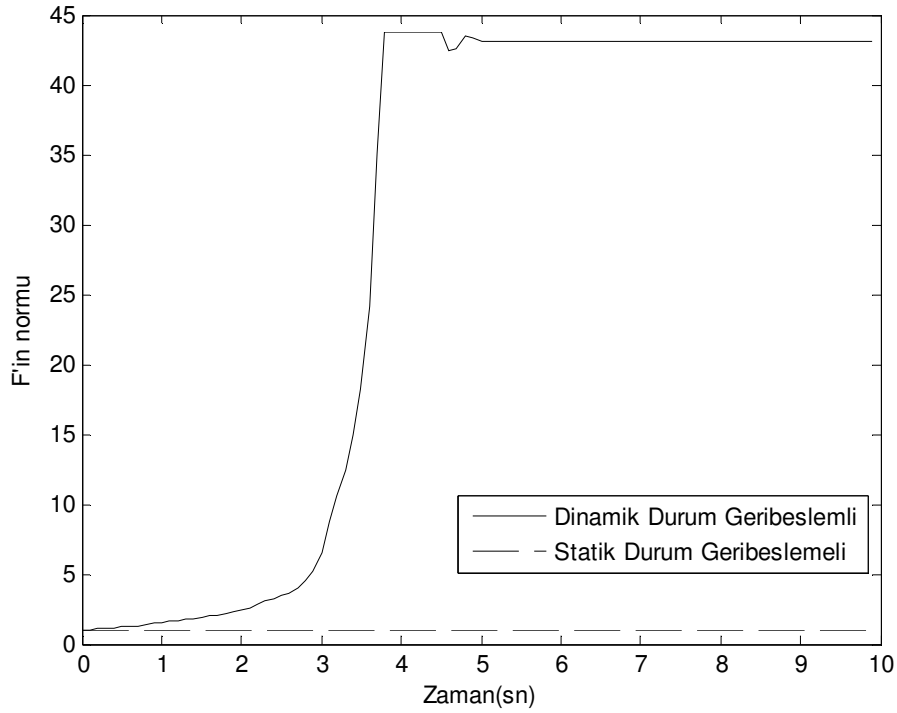
Dinamik geri beslemeli sistemde her örnekleme anında durum geri besleme matrisi F tekrar hesaplanmaktadır. Bu da daha performanslı ve güzel bir sistem çıkış cevabı vermektedir. Bir önceki bölümde Hatırlatma 4'de değinildiği üzere  $k=0$  anında hesaplanan durum geri besleme matrisi F, tüm sistem kontrolü boyunca kullanılabilir ve model belirsizliklerine karşı sistemi kararlı kılar. Şekil 4.4'den görüldüğü üzere sabit(statik) durum geri beslemeli sistem cevabı, her örnekleme anında tekrar hesaplanan duruma göre daha kötüdür. Her örnekleme anında durum geri besleme matrisi F optimaldir.  $k=0$  anında bir kez hesaplanan statik durum geri besleme matrisi F,  $x(k|k)^T Px(k|k) \leq \gamma$  eşitsizliğini sağlar ama optimal olması şart değildir.

Şekil 4.5'de görüldüğü üzere kontrol işareti  $|u(k)| \leq 2$ 'dir. Bu sınırlandırılmış işaret durum geri besleme matrisinin her örnekleme anında tekrar hesaplanması nedeni ile ani değişimler göstermektedir. Şekil 4.4'den de görüldüğü üzere dinamik durum geri beslemeli durum cevabı, statığe göre yaklaşık 4 kat daha hızlı olmuştur.



**Şekil 4.5 :** Dayanıklı LMI temelli MPC ile kontrol edilen giriş sınırlı zamanla değişen sistemin kontrol işareti

Şekil 4.6 ile statik ve dinamik durum geri besleme matrislerinin iki normları karşılaştırılmıştır. Dinamik geri besleme durum için ilk zamanlarda  $|u(k)| = |Fx(k)| \leq 2$  sınırı ile karşılaşılmış ve sistem durumu  $x(k)$  büyük olduğu için durum geri besleme matrisi  $F$  küçük kalmıştır. Dinamik durum geri besleme matrisi sınırlamanın devam ettiği zamanlarda da büyümeğe devam etmiştir. Sistem durumu  $x(k)$  sifıra yaklaştığında sabit değer almıştır. Tüm bu zamanlarda hesaplanan  $F$  matrisi optimaldir. Statik durum geri beslemesi kuralı, her örnekleme anında durum geri besleme matrisi  $F$ 'i tekrar hesaplamaz ve bu yüzden kararlı olsa bile sistem cevabı yavaştır.



**Şekil 4.6 :** Dayanıklı LMI temelli MPC ile kontrol kuralındaki durum geri besleme matrisi  $F$ 'in normu

### 4.3 Sabit Set-Noktası İzleme Problemi

Belirsiz doğrusal zamanla değişmeyen sistem için arzulanan denge durumu, sabit bir durum uzayında sabit bir nokta yani set noktası  $x_s, u_s$  olabilir. Sistem, (4.5)'deki  $x_s, u_s$  set noktalarına taşınarak, sistem çıkışı  $y$  hedef vektörü  $y_t$ 'i izlediğini düşünelim.

$$x_s = Ax_s + Bu_s, y_t = Cx_s \quad (4.5)$$

$x_s, u_s, y_t$  vektörlerinin var olduğunu sınır koşullarını sağladığını düşünelim. (3.17)'deki amaç ölçütünün sabit set noktası izlemesi için yenilenmiş hali (4.6)'da verilmiştir.

$$J_{\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \{ (Cx(k+ilk) - Cx_s)^T Q_1 (Cx(k+ilk) - Cx_s) + (u(k+ilk) - u_s)^T R (u(k+ilk) - u_s) \}, Q_1 > 0, R > 0 \quad (4.6)$$

Kaydırılmış durum  $\tilde{x}(k) = x(k) - x_s$ , kaydırılmış giriş  $\tilde{u}(k) = u(k) - u_s$  şeklinde tanımlanır ise referans izleme problemi, bölüm §3'de verilen standart LMI temelli dayanıklı MPC problem forma dönmüş olur. Artık çıkış  $\tilde{y}(k) = y(k) - y_t$  olacaktır.

Durum geri besleme matrisi ise  $(u(k) - u_s) = F(x(k) - x_s)$  olacaktır. Yani sisteme uygulanacak kontrol işareti  $u(k) = F(x(k) - x_s) + u_s$  olacaktır.

Kontrol işareti  $u$  'nun tepe sınırı,  $\tilde{u}$  üzerindeki sınırlara aşağıdaki gibi çevrilebilir.

$$|u_j| \leq |u_{j,\max}| \Leftrightarrow |\tilde{u}_j + u_{s,j}| \leq |u_{j,\max}| \Leftrightarrow -u_{j,\max} - u_{s,j} \leq \tilde{u}_j \leq u_{j,\max} - u_{s,j} \quad (4.7)$$

Çıkış üzerindeki sınırlamalar da yukarıda yaptığımızı benzer bir şekilde çevrilebilir.

#### 4.4 Genişletilmiş Durum Uzayı Modeli

Birçok sistem ölü zaman gecikmesine sahiptir. Endüstriyel sistemlerin çoğu, birinci dereceden ölü zaman gecikmeli olarak gösterilebilir. Bu sistemlerde en çok parametre değişimi ölü zaman üzerindedir ve bu ölü zaman sistemin önceki durumlarından etkilenebilir. En basit olarak bir sıcaklık kontrolünde eğer rezistanslar daha önceden ısıtılmış ise girişine verdiği tepki çok daha hızlıdır. Bu nedenle ölü zaman gecikmesini doğrusal zamanla değişen sistemin parametreleri içine koyabilmek önemlidir. Bu bölümde bu işlemi gerçekleştirebilecek “Genişletilmiş Durum Modeli” yöntemi kullanılacaktır. (**Grando ve diğ. , 2005**)

Ayrık zamanda  $u(k) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $y(k) \in \mathfrak{R}^q$  olmak üzere belirsiz doğrusal zamanla değişen sistem (4.8)'deki gibi tanıtsın.

$$\alpha(z^{-1})y(k) = \beta(z^{-1})z^{-1}u(k) \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \alpha(z^{-1}) &= I + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_{na} z^{-na} \\ \beta(z^{-1}) &= \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_{nb} z^{-nb} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$\alpha_i, \beta_j$  sırası ile  $qxq$  ve  $qxm$  matrislerdir.

(4.8)'deki sistem aşağıdaki (4.10)'daki diferansiyel eşitlik cinsinden yazılabilir.

$$y(k) + \sum_{i=1}^{na} \alpha_i y(k-i) = \sum_{i=1}^{nb} \beta_i u(k-i) \quad (4.10)$$

Önceki gösterim (4.10) için bir genişletilmiş durum uzayı modeli, sistemin giriş ve çıkışlarının şimdiki ve geçmiş değerlerini durum vektörü gibi alınarak tekrar tanımlanabilir. Durum vektörü (4.11) olmak üzere,

$$\tilde{x}(k) = [ y(k)^T \quad y(k-1)^T \quad \dots \quad y(k-na)^T \quad u(k-1)^T \quad u(k-1)^T \quad u(k-2)^T \quad \dots \quad u(k-nb)^T ] \quad (4.11)$$

eşdeğer durum uzayı gösterimi (4.12) ile verilebilir.

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k) \\ y(k) &= \tilde{C}\tilde{x}(k)\end{aligned}\quad (4.12)$$

Yeni  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  matrisleri ise (4.13)'de gösterilmiştir.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{na-1} & -\alpha_{na} & \beta_1 & \cdots & \beta_{nb-1} & \beta_{nb} \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.13)$$

Her ne kadar genişletilmiş model orijinal modelden daha yüksek mertebeye sahip olsa da genişletilmiş durum vektörü  $\tilde{x}$ 'i gözlenebilir kılacaktır. Böylece bölüm §3'de tanımlanan LMI temelli dayanıklı MPC kontrol kuralı ile birinci dereceden ölü zaman gecikmeli sistemin kontrolü sağlanacaktır.

#### 4.5 Dayanıklı MPC ile Birinci Dereceden Ölü Zaman Gecikmeli Bir Sistemin Kontrolü

Bu benzetimde birinci dereceden ölü zaman gecikmeli bir sistemin parametrelerinin zamanla değişmesi durumunda, dayanıklı MPC kontrol kuralı ile kontrol edilen sistem cevabı incelenecektir.

$$G(s) = \frac{K}{s+1} e^{-s(dT)} \quad (4.14)$$

Birinci dereceden ölü zaman gecikmeli sistemin sürekli haldeki transfer fonksiyonu (4.14) ile verilmiştir. Burada  $\tau$  sistemin zaman sabiti,  $dT$  ölü zaman gecikmesi,  $T$  örnekleme periyodu,  $K$  ise sistem kazancıdır. Bu sistem, sıfırıncı dereceden tutucuyu da ekleyerek ayrık halde (4.15)'deki gibi ifade edilir.

$$G(z) = \frac{K(1-a)}{z-a} z^{-d}, a = e^{-T/\tau} \quad (4.15)$$

İleriki bölümlerde yapılacak gerçek bir sistem deneyi için bu bölümde İ.T.Ü Kontrol Laboratuvarında bulunan birinci dereceden ölü zaman gecikmeli (4.16)'daki nominal sistem modeli kullanılacaktır.

$$G(s) = \frac{0.7}{0.5s + 1} e^{-s0.25} \quad (4.16)$$

(4.16) nominal model ile gösterilen (4.14) sistemin parametrelerinden sistem kazancı  $K$ 'nın ve ölü zaman gecikmesi  $dT$ 'nin değiştiğini farz edelim. ( Gerçek sistemde de kontrol kazancı ve ölü zaman gecikmesi değiştirilebilir. )

Ayrıca  $T$  örnekleme periyodu  $0.1$  alınsın ve sistemimizde  $K_1 = 0.6, K_2 = 0.8$  olmak üzere  $K$  kazancı ve  $dT$  ölü zaman gecikmesi aşağıda verilen aralıklarda zamanla değişsin.

$$\begin{aligned} K_1 &\leq K \leq K_2 \\ 0 &\leq dT \leq 0.3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

(4.15) ayrık zamanlı sistemin bir başka gösterimi (4.18)'de verilmiştir.

$$(1 - az^{-1})y(k) = \{K(1 - a)z^{-d}\}z^{-1}u(k) \quad (4.18)$$

(4.18) ifadesi, (4.8)'deki  $\alpha(z^{-1}), \beta(z^{-1})$  parametreleri cinsinden (4.19)'daki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \alpha(z^{-1}) &= 1 - az^{-1} \\ \beta(z^{-1}) &= K(1 - a)z^{-d} \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.19) ve (4.9) ifadelerinden  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{na}$  ve  $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \dots \beta_{nb}$  parametreleri

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -a \\ \beta_0 &= 0, \beta_1 = 0 \dots \beta_d = K(1 - a) \end{aligned} \quad (4.20)$$

ile ifade edilir.

Bölüm §4.4'deki genişletilmiş durum uzayı modeli yardımı ile model bilinmezlikleri, genişletilmiş durum uzayındaki  $A$  ve  $B$  matrislerinin içine koyulacaktır. Bu problemde sistemimizin ölü zaman gecikmesi değişimi,  $\beta$  katsayılarını değiştirecektir. Ayrıca  $\beta$  katsayısı  $K$  sistem kazancının değişim ile de değişecektir.  $\alpha$  katsayısı ise  $T/\tau$  bağlı olacak ve bu benzetim modeli için hiç değişmeyecektir.

$0 \leq d \leq 3$  arasında değişen (4.15)'deki sistemi ele alalım. Bu sistem üzerindeki  $[A(k), B(k)] \in \Omega = \text{Co}\{(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4)\}$  politopik olmak üzere bu politopik bölgede sistem,  $\alpha(k), \beta(k) \in \Omega = \text{Co}\{(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1), (\tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2), (\tilde{\alpha}_3, \tilde{\beta}_3), (\tilde{\alpha}_4, \tilde{\beta}_4)\}$  ile tekrar tanımlanabilir. O zaman  $\tilde{\alpha}_{1,2,3,4}, \tilde{\beta}_{1,2,3,4}$  parametreleri

$$\tilde{\alpha}_{1,2,3,4}(z^{-1}) = 1 - az^{-1}$$

$$\tilde{\beta}_1(z^{-1}) = K_1(1-a) + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3}, \tilde{\beta}_2(z^{-1}) = K_2(1-a) + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} \quad (4.21)$$

$$\tilde{\beta}_3(z^{-1}) = 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + K_1(1-a)z^{-3}, \tilde{\beta}_4(z^{-1}) = 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + K_2(1-a)z^{-3}$$

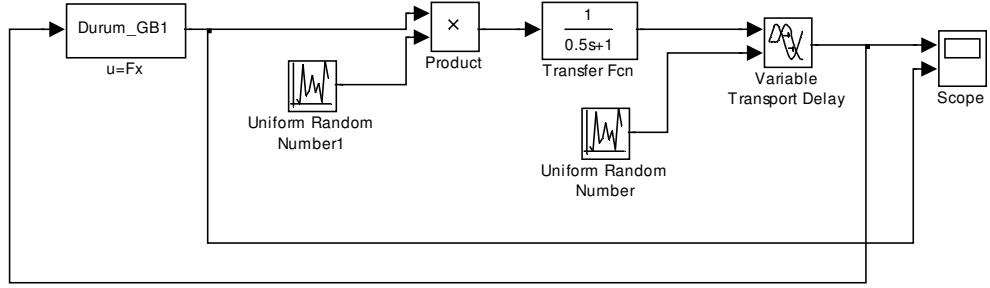
şeklinde ifade edilir.

Son ifade, bölüm §4.4'deki (4.8) ve (4.9) ifadeleri kullanılarak (4.11), (4.12), (4.13) durumu uzayı modeline çevrilebilir. Bu çevirme işlemi sonucu  $[A(k), B(k)] \in \Omega = \text{Co}\{(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4)\}$  politopik kümedeki  $A_j, B_j, j = 1, 2, 3, 4$  matrisleri elde edilir. Böylece bölüm §3'de tanıtılan LMI temelli dayanıklı MPC teorisi ve bölüm §4.1'de verilen dayanıklı model öngörülü algoritması kullanılabilir olacaktır.

Son durumda, (4.6)'daki amaç ölçütünü minimum yapan  $Q_1, R$  matrisleri de değişecektir. Çünkü (4.11)'deki sistem durumu  $\tilde{x}$ 'de, hem giriş hem de çıkış değişkenleri vardır. Çıkış ağırlık çarpanı 1, giriş ağırlık çarpanı  $r$  alınır ise  $Q_1, R$  matrislerini bu problem için (4.22)'deki gibi almak akıllıcadır.

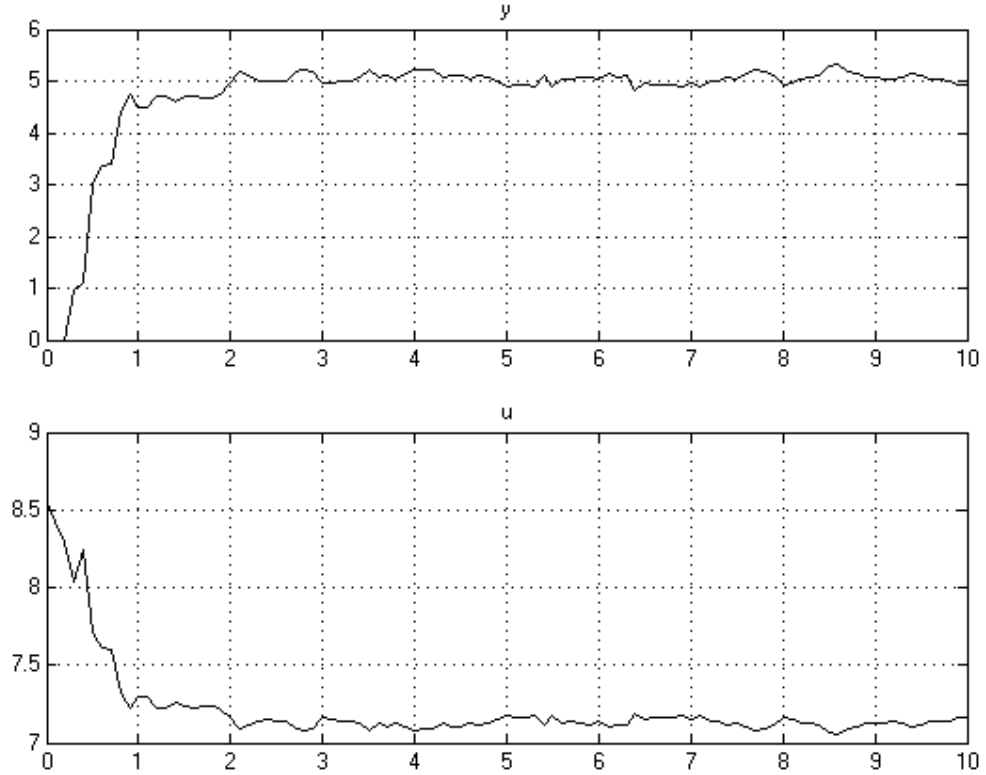
$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad R = r \quad (4.22)$$

Sistem kazancını 0.6 ile 0.8 arasında düzgün dağılımlı rasgele değiştirecek ve aynı zamanda ölü zaman gecikmesini de 0 sn. ile 0.3 sn. arasında düzgün dağılımlı rasgele değiştirecek düzenek, Şekil 4.7'deki benzetim şeması ile verilmiştir.



**Şekil 4.7 :** Dayanıklı MPC ile kontrol edilen, birinci dereceden, ölü zamanı ve kazancı zamanla değişen bir sistemin durum geri besleme ile Kontrolü-MATLAB SIMULINK Modeli

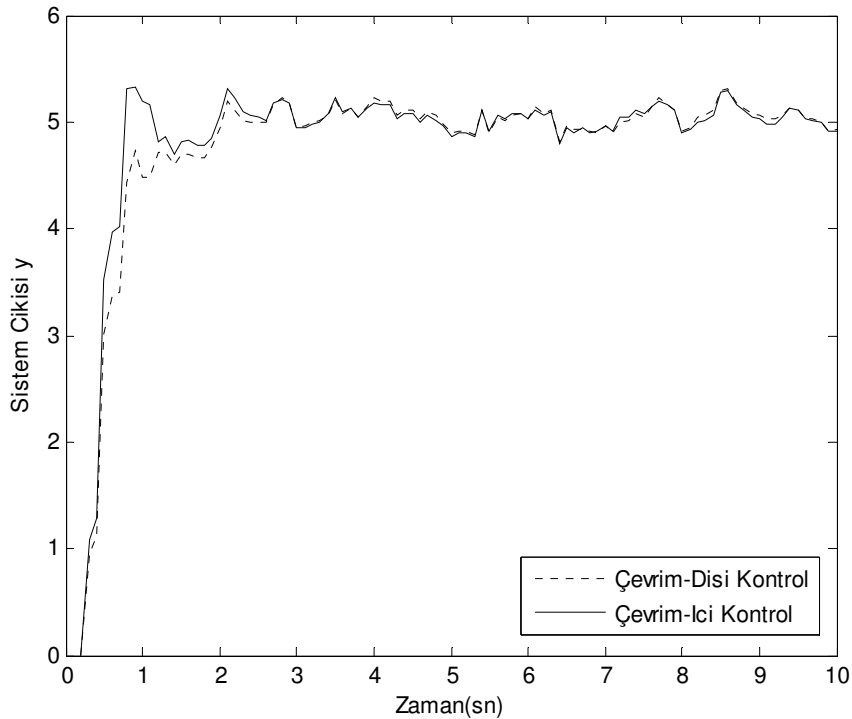
Sistem durum geri besleme matrisi  $F$ ,  $k = 0$  anında hesaplanmıştır.  $k > 0$  anındaki durum geri besleme matrisi  $F$  ile  $k = 0$  anındaki  $F$  aynı alınarak bölüm § 4.1'deki LMI temelli dayanıklı MPC'nin çevrimdışı algoritması çalıştırılmıştır.



**Şekil 4.8 :** Dayanıklı MPC ile kontrol edilen,  $0.6 \leq K \leq 0.8$  ve  $0 \leq dT \leq 0.3$  arasında düzgün dağılımlı rasgele değişen bir sistemin çıkış ve kontrol işareti. (Set Noktası=5,  $r=0.1$ )

Tek bir durum geri besleme matrisi  $F$  ile kontrol edilen birinci dereceden kazancı ve ölü zamanı düzgün dağılımlı rasgele değişen sistemin kontrol işareti ve çıkışı, Şekil 4.8 ile verilmiştir. Elde edilen çıkış ve kontrol işareti kararlı ve oldukça iyidir.

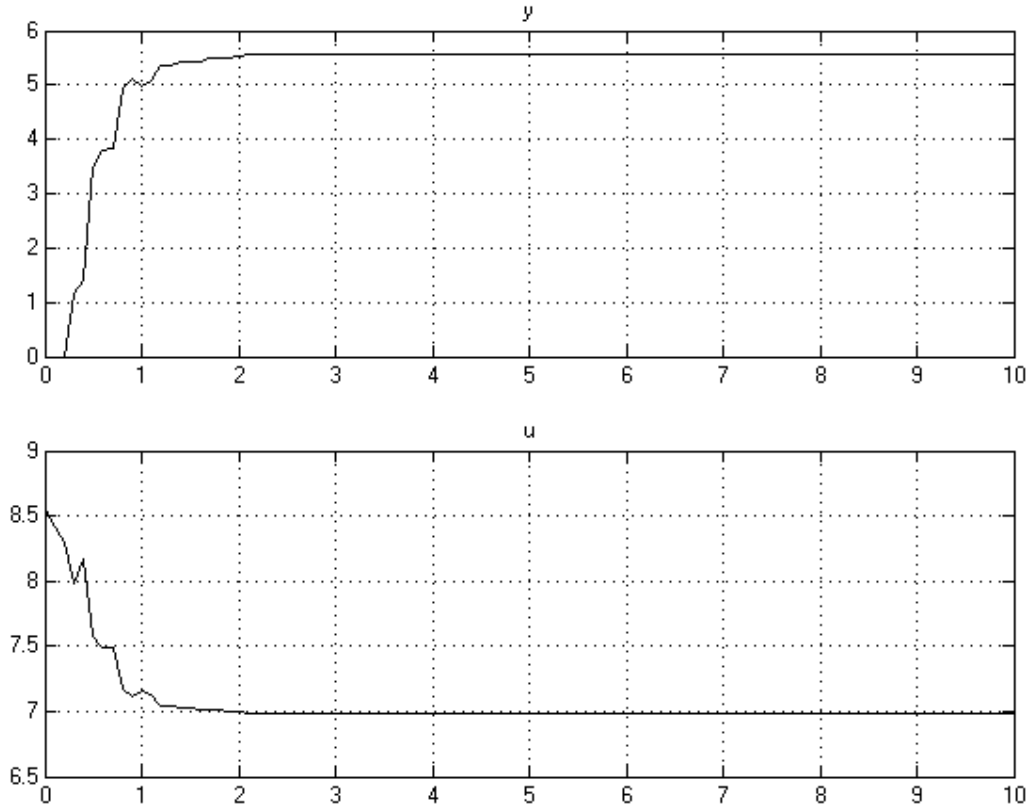
$k = 0$  için hesaplanan ve  $k > 0$  için kullanılacak tek bir  $F$  matrisi dayanıklı kararlığı sağlar ama bu durum geri besleme matrisi  $F$ ,  $k > 0$  için optimal olması şart değildir. Her ne kadar çevrimdışı sistem cevabının çevrimiçi sistem cevabına göre daha kötü olacağı bilinse de, uygulanabilirlik ve hesap yükü bakımından çevrimdışı kontrol hayli avantajlı olacaktır. Hele bir de birinci dereceden bir sistem kontrol ediliyor ve giriş/çıkış sınırlamaları sisteme dahil edilemeyebiliyorsa, çevrimdışı ile çevrimiçi kontrolün sistem cevapları arasında büyük farklar oluşmayacaktır. Çünkü çevrimiçi kontrolde  $k = 0$  ile hesaplanan durum geri besleme matrisi  $F$  ile  $k > 0$  ile hesaplanan  $F$  matrisi arasında çok büyük fark olmayacaktır. Şekil 4.9'da çevrim içi ve çevrimdışı dayanıklı MPC kontrol edilen birinci dereceden değişken kazançlı ve ölü zamanlı sistemin cevapları verilmektedir. Görüldüğü üzere çevrimiçi kontrol cevabı daha güzel olsa da iki cevap birbirine çok benzemektedir.



**Şekil 4.9 :** Çevrimiçi ve Çevrimdışı Dayanıklı MPC ile kontrol edilen  $0.6 \leq K \leq 0.8$  ve  $0 \leq dT \leq 0.3$  arasında düzgün dağılımlı rasgele değişen bir sistemin çıkışı. ( Set Noktası=5,  $r=0.1$ )

Şu ana kadar  $K$  değeri 0.6 ile 0.8 arasında düzgün dağılımlı rasgele değişiyordu. Düzgün dağılım olduğu için bu  $K$  değerinin ortalaması 0.7'dir ve bu değer nominal sistemin kazancıdır. Ayrıca  $K=0.7$  değeri kalıcı durumdaki kazanç olarak düşünülmüş ve tasarım buna göre yapılmıştır. Yani bölüm §4.3'deki referans izleme problemi için set noktası kontrol işareti  $u_s = y_t / K = y_t / 0.7$  alınmıştır.

Şimdi ise  $K=0.8$  değerinde sabit ve  $0 \leq dT \leq 0.3$  arasında düzgün dağılımlı olsun. Kalıcı durumdaki kazanç  $K=0.7$  ve set noktası kontrol işareti  $u_s = y_t / 0.7$  seçilsin. Bu durumdaki sistem cevabı Şekil 4.10'daki gibi olacaktır.

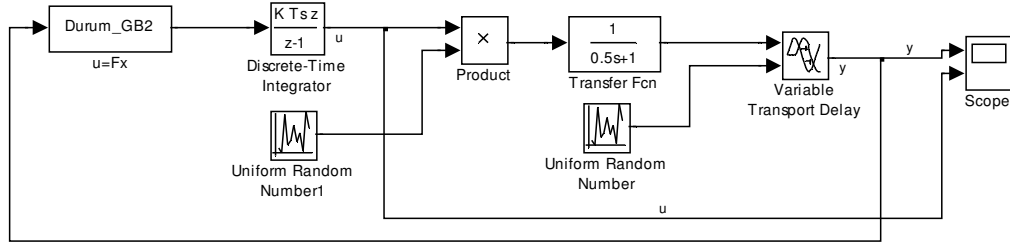


**Şekil 4.10 :** Dayanıklı MPC ile kontrol edilen,  $K=0.8$  ve  $0 \leq dT \leq 0.3$  arasında düzgün dağılımlı rasgele değişen bir sistemin çıkış ve kontrol işareti. (Set Noktası=5,  $r=0.1$ )

Şekil 4.10'dan görüldüğü üzere sistem çıkışı, istediğimiz set noktasına oturamıyor. Yani referansı izleyemiyor. Nedeni ise, kalıcı durumda doğru set noktası kontrol işareti  $u_s$  hesaplanamamasıdır. Bu sorunu çözmek için peki ne yapılabilir? Bir sonraki bölümde dayanıklı MPC kontrol çıkışına entegral alıcı devresi koyarak bu problemi aşmaya çalışacağız.

#### 4.6 Dayanıklı MPC+Entegral Alıcı ile Birinci Dereceden Ölü Zaman Gecikmeli Bir Sistemin Kontrolü

Birinci dereceden ölü zaman gecikmeli bir sistemin kontrolünde, kalıcı durum hatasını ortadan kaldırmak için açık çevrim transfer fonksiyonuna  $1/s$  çarpanı eklemek gerekecektir. Bir önceki bölümde yapılan çalışmaya ek olarak, kontrolör çıkışına bir entegral alıcı koymak ile kalıcı durum hatası pekala yok edilebilir. Gerçek sistem ve benzetim kontrolörü ayrı zamanda gerçekleştirildiğine göre entegral alıcı ayrı zamanda ifade edilecektir. Gerçek sistemde bir entegral alıcı varmış gibi yeni bir sistem modeli tanıtılacak ve bu yeni modele göre bölüm §3'de gösterilen LMI temelli dayanıklı MPC kontrolör tasarlanacaktır. Böylece tasarlanan kontrolör dayanıklı kararlı olacaktır. Şekil 4.11'de bu bölümde kullanılacak sistem ve kontrolör yapısı verilmiştir.



**Şekil 4.11 :** Dayanıklı MPC+Entegral Alıcı ile kontrol edilen, birinci dereceden, ölü zamanı ve kazancı zamanla değişen bir sistemin durum geri besleme ile Kontrolü-MATLAB SIMULINK Modeli

Kullanılacak kontrolör arka arkaya bağlanmış iki ana bloğu içerir. Birincisi, sistemi kontrol eden sistem+entegral alıcıya göre tasarlanmış bir durum geri besleme matrisi bloğudur. İkincisi ise entegral alıcı bloğudur.

Kalıcı durumda entegral alıcı çıkışındaki sisteme uygulanan kontrol işareti değeri 0'dır. Bu durumda bölüm §4.3'deki set noktası izleme problemindeki set noktası kontrol işareti  $u_s = 0$ 'dır. Böylece set noktası kontrol işareti zamanla değişen belirsizlik parametrelerden etkilenmez.

Dayanıklı LMI temelli MPC için yeni ayrık sistem modeli

$$G(z) = \left\{ \frac{K(1-a)}{z-a} z^{-d} \right\} \left\{ \frac{Tz}{z-1} \right\}, a = e^{-T/\tau} \quad (4.23)$$

Bir başka gösterim ile

$$\{1 - (1+a)z^{-1} + az^{-2}\}y(k) = \{K(1-a)Tz^{-(d+1)}\}z^{-1}u(k) \quad (4.24)$$

şeklinde elde edilecektir.

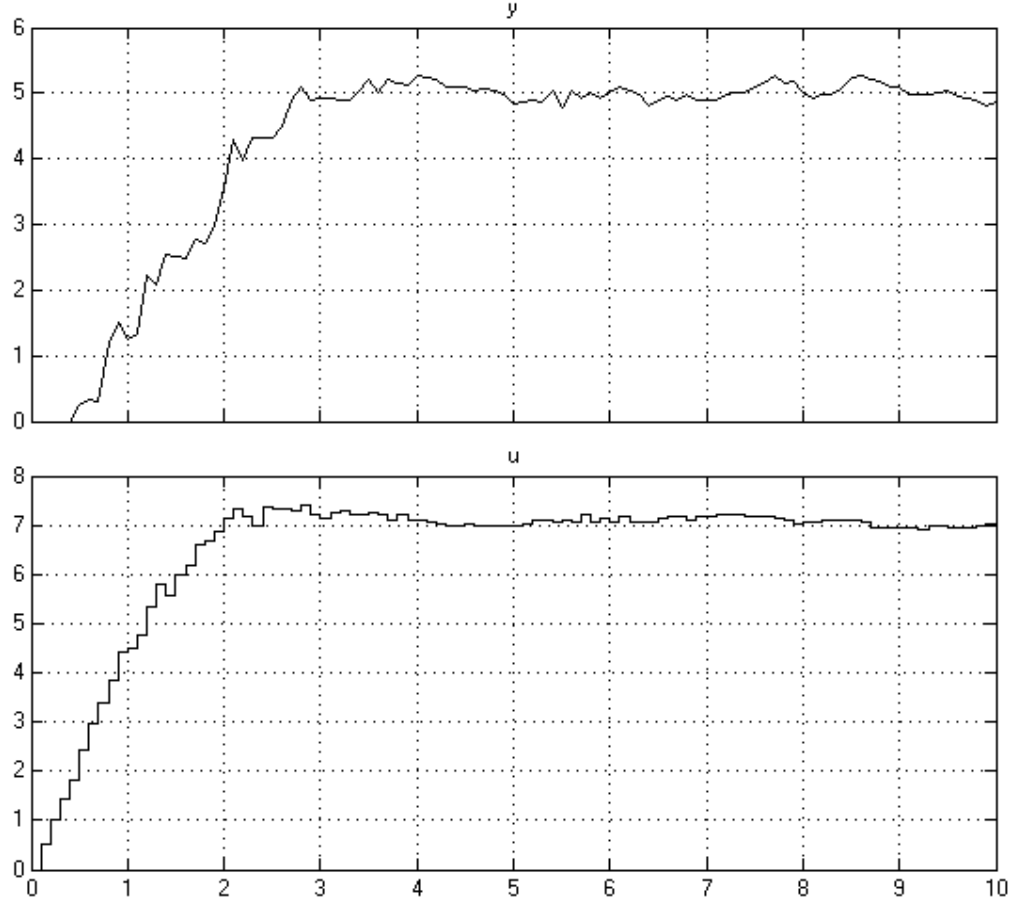
$0 \leq d \leq 4$  arasında değişen (4.23) sistemi için, bölüm §4.4’de ifade edilen genişletilmiş durum uzayı modeli yöntemi ile politopik  $\tilde{\alpha}_{1,2,3,4}, \tilde{\beta}_{1,2,3,4}$  parametreleri (4.25) ile ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{1,2,3,4}(z^{-1}) &= 1 - (1+a)z^{-1} + az^{-2} \\
\tilde{\beta}_1(z^{-1}) &= 0 + K_1(1-a)z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + 0z^{-4} + 0z^{-5} \\
\tilde{\beta}_2(z^{-1}) &= 0 + K_2(1-a)z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + 0z^{-4} + 0z^{-5} \\
\tilde{\beta}_3(z^{-1}) &= 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + 0z^{-4} + K_1(1-a)z^{-5} \\
\tilde{\beta}_4(z^{-1}) &= 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + 0z^{-4} + K_2(1-a)z^{-5}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Son ifade, bölüm §4.4’deki (4.8) ve (4.9) ifadeleri kullanılarak (4.11), (4.12), (4.13) durumu uzayı modeline çevrilebilir. Bu çevirme işlemi sonucu  $[A(k), B(k)] \in \Omega = \text{Co}\{(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4)\}$  politopik kümesindeki  $A_j, B_j, j=1,2,3,4$  matrisleri elde edilecektir. Böylece bölüm §3’de tanımlanan LMI temelli dayanıklı MPC teorisi ve bölüm §4.1’de verilen dayanıklı model öngörülü algoritması kullanılabilir olacaktır.

Bu problem için  $Q_1, R$  matrislerini (4.26)’daki gibi seçmek akıllıcadır.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad R = r \tag{4.26}$$



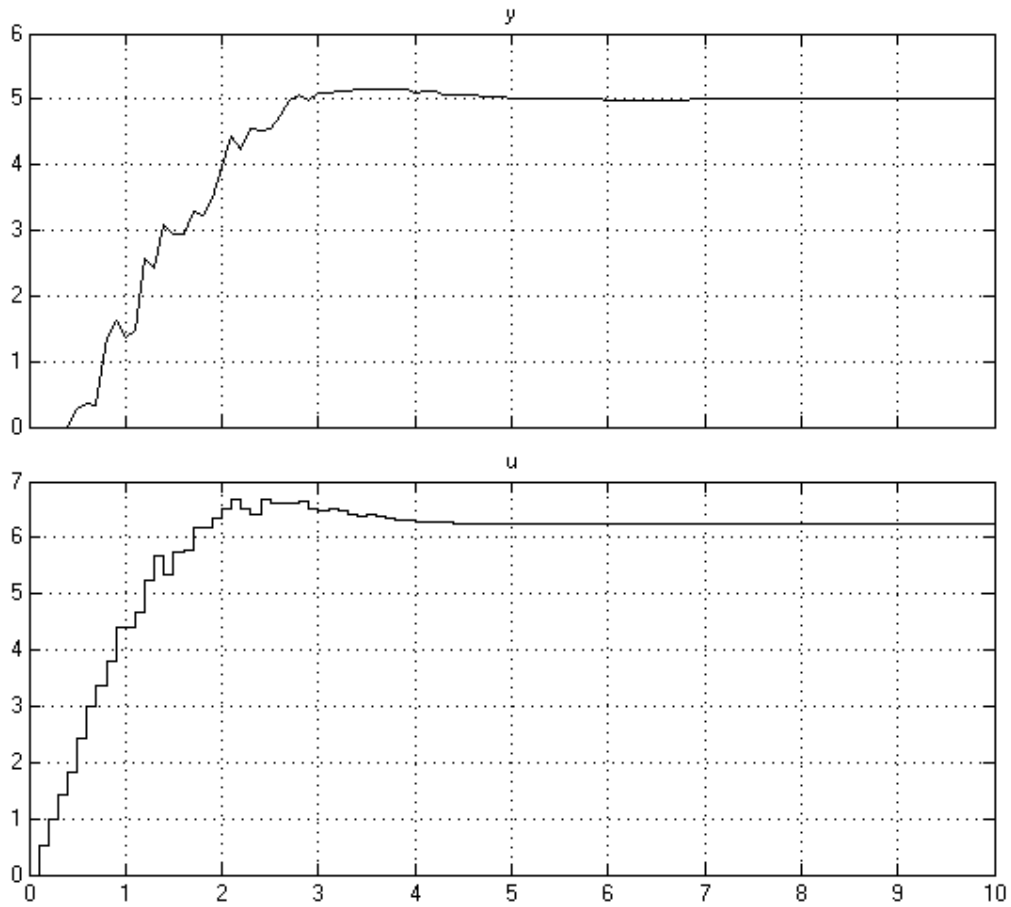
**Şekil 4.12 :** Dayanıklı MPC+Entegral Alıcı ile kontrol edilen  $0.6 \leq K \leq 0.8$  ve  $0 \leq dT \leq 0.4$  arasında düzgün dağılımlı rasgele değişen bir sistemin çıkış ve kontrol işareti. (Set Noktası=5,  $r=0.1$ )

Şekil 4.11'deki benzetimin çıktısı Şekil 4.12'de verilmiştir. Burada sistem kazancı  $K$  ve ölü aman gecikmesi  $dT$  belli aralıklarda düzgün dağılımlı olarak değişmektedir. Yapılan benzetim deneyleri sonucu bu değişim,  $r=0.1$  için kontrol işaretini doyuma götürmektedir. Görüldüğü üzere sistem cevabı kabul edilebilirdir. Şekil 4.12'nin Şekil 4.8'den farkı ise entegral alıcının sistem cevabını yavaşlatması nedeni ile Şekil 4.12'deki sistem cevabının daha yavaş olmasıdır.

Kalıcı durum hatasını engellemek, kontrol işareti sınırlaması problemini ortaya çıkarmaktadır. Artık bölüm §3 Teorem 2 ile tanımlanan giriş sınırlandırılması direkt olarak kullanılamaz. Çünkü kontrol çıkışımız, durum geri besleme çıkışı  $u=Fx$  değil de entegral alıcı çıkışımızdır. Kontrol işaretini doyuma götürmemek için şöyle bir mantıksal yöntem izlenebilir. Seçilen kontrol işareti ağırlık sayısal değeri  $r$  altında, politopik sistemin  $[A(k), B(k)] \in \Omega = \text{Co}\{(A_i, B_i)\}$  her sınırı  $(A_i, B_i)$  ile tanımlanan

sistemlerin seçilen durum geri besleme matrisi ve entegral alıcı ile kontrolü, benzetim programları ile yapılır. Kontrol işareti  $u$  incelenir ve doyumuna gidip gitmediğine bakılır. Kontrol işaretinde doyum oluşmayıncaya kadar kontrol işareti ağırlığı  $r$  değiştirilerek bu işlem tekrarlanmalıdır.

Esas olarak merak edilen şey, set noktası için sistem kazancı  $K$ 'nın nominal değeri yerine sabit başka bir değer aldığıında kontrolörün kalıcı durum hatasına karşı performansdır. Şekil 4.13'de böyle bir sistemin cevabı verilmiştir. Kalıcı durumdaki nominal  $K \neq 0.7$  olduğu halde sistem çıkışı set noktasına oturmaktadır. Sistem cevabı tatmin edicidir.



**Şekil 4.13 :** Dayanıklı MPC+Entegral Alıcı ile kontrol edilen,  $K=0.8$  ve  $0 \leq dT \leq 0.3$  arasında düzgün dağılımlı rasgele değişen bir sistemin çıkış ve kontrol işareti. (Set Noktası=5,  $r=0.1$ )

Genişletilmiş durum uzayı modellenmiş set noktası izleme problemi için set noktaları (4.27)'de verilmiştir.

$$\tilde{x}_{set}(k) = [y_t \quad y_t \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad \tilde{u}_{set}(k) = 0 \quad (4.27)$$

(4.27)'deki  $y_t$ 'nin anlamı sabit olan sistem çıkışı set noktasıdır. (4.27)'den görüldüğü üzere set noktaları değişen hiçbir parametreye bağlı değildir. Yani set noktaları zamanla değişmez ve Şekil 4.13'den de görüldüğü üzere kalıcı durum hatası oluşmaz.

## 5. GERÇEK ZAMANLI DAYANIKLI MPC KONTROLÜ

Bu bölümde, bir önceki bölümde verilen birinci dereceden ölü zaman gecikmeli doğrusal zamanla değişen gerçek bir sistem için gerçek zamanlı çalışan kontrolör tasarlanacaktır. Bu amaçla MATLAB XPC-TARGET aracı kullanan bir bilgisayar, gerçek zamanlı kontrol işlemi yapacaktır.

### 5.1 Kontrol Kuralının Belirlenmesi

Bir önceki bölümde İ.T.Ü Kontrol Laboratuvarında bulunan bir deney sistemin nominal modeli

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-s(dT)} = \frac{0.7}{0.5s + 1} e^{-s0.25} \quad (5.1)$$

şeklinde verilmişti. Bu deney setinde sistem kazancı  $K$  ve ölü zaman gecikmesi  $dT$  değeri değiştirebilmektedir. Sistemin parametreleri  $0.6 \leq K \leq 0.8$ ,  $0 \leq d \leq 4$  arasında değiştiği varsayımı ile entegral alıcı eklenmiş Dayanıklı Model Öngörülü Kontrol kuralı önceki bölümde tasarlanmıştı. Sistem modeli (4.24) ile ifade edilmişti. Bu modeldeki politopik  $\tilde{\alpha}_{1,2,3,4}, \tilde{\beta}_{1,2,3,4}$  parametrelerini (4.25) ile gösterilmişti. Artık bu sistemin Genişletilmiş Durum Uzayı modeli (5.2) ile verilebilir.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k) \\ y(k) &= \tilde{C}\tilde{x}(k) \\ \tilde{x}(k) &= [y(k) \quad y(k-1) \quad u(k-1) \quad u(k-2) \quad u(k-3) \quad u(k-4) \quad u(k-5)]^T \end{aligned} \quad (5.2)$$

$[\tilde{A}(k), B(k)] \in \Omega = \text{Co}\{(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4)\}$  olmak üzere durum uzayındaki politopik  $A_i, B_i, i = 1, 2, 3, 4$  matrisleri ve  $C$  matrisi (5.3) ile verilebilir.

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} -\alpha_{i,1} & -\alpha_{i,2} & \beta_{i,1} & \beta_{i,2} & \beta_{i,3} & \beta_{i,4} & \beta_{i,5} \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} \beta_{i,0} \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.3)$$

Buradaki  $A_i, B_i$  matrisleri her politopik (4.25)'e  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$  polinomlarına karşılık düşen durum uzayı matrisleridir. Bölüm §4.1'de bulunan algoritma ile LMI temelli Dayanıklı MPC problemi çözdürülerek  $k=0$  için durum geri besleme matrisi  $F$  (5.4)'deki gibi bulunur.

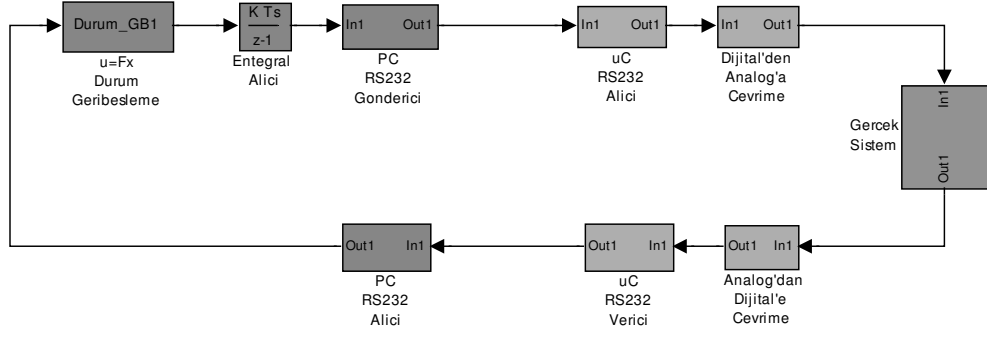
$$F = [-9.8959 \quad 7.9139 \quad -0.1928 \quad -0.1286 \quad -0.1366 \quad 0.3167 \quad -0.0622] \quad (5.4)$$

Gerçek zamanlı bu kontrol tasarımı için durum geri besleme matrisi  $F$  sabit alındı. Bir önceki bölüm §4.5'de yapılan benzetim sonucuna göre kontrol işaretinin doymada çalışmadığı bu gibi problemler için çevrim-İçi ve çevrim-dışı uygulamaların sistem cevapları arasında fark yoktur. Çünkü her örnekleme anında hesaplanan optimal durum geri besleme matrisi  $F$  çok değişmemektedir. Unutulmamalı ki  $k=0$  için bulunan durum geri besleme matrisi  $F$  ile oluşturulan kontrol kuralı dayanıklı kararlıdır.

Son olarak, unutulmaması gereken diğer bir şey ise durum geri besleme çıkışının entegral alıcıdan geçirilen çıkışın sisteme uygulanmasıdır.

### 5.1 Gerçek Zamanda Kontrol Düzenegi

Şekil 5.1'de gerçek zamanlı kontrolü sağlayacak kontrol düzenegi verilmiştir.



**Şekil 5.1 : Gerçek Zamanda Kontrol düzeneği**

MATLAB SIMULINK blokları ile durum geri besleme bloğu ve entegral alıcı bloğu oluşturulmuştur. RS232'den yeni sistem çıkışı alınır. Durum geri besleme bloğunda; sistemin şimdiki ve önceki girişleri, çıkışları kullanılarak genişletilmiş durum uzayı modelindeki (5.2) sistem durumu oluşturulmakta ve bu sistem durumu (5.3)'deki durum geri besleme matrisi  $F$  ile çarparak kontrol işareti artımı belirlenmektedir. Bu kontrol işareti artımı entegral alıcıdan geçirilerek sisteme uygulanacak kontrol işaretinin dijital değeri hesaplanmaktadır. Bu dijital değer RS232 portundan sisteme doğru gönderilmektedir. Tüm bu paragrafta anlatılan işlemler MATLAB XPC-TARGET aracı ile bir PC'nin gerçek zamanlı çalıştırılması ile gerçekleştirilmektedir.

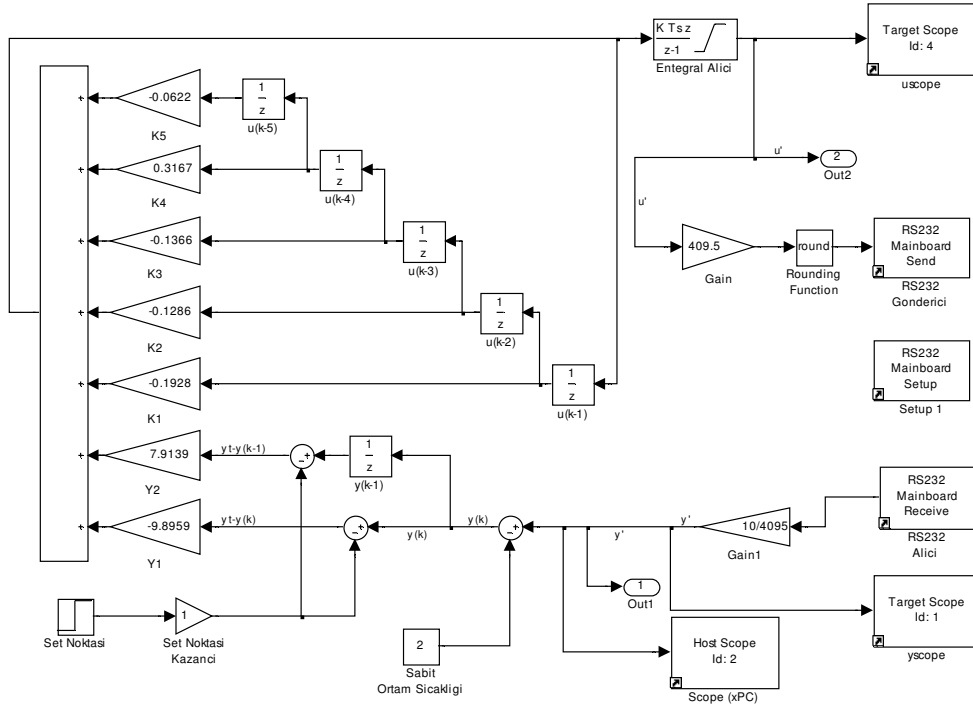
İ.T.Ü Kontrol. Laboratuvarında bulunan birinci dereceden ölü zamanlı sistemin girişi 0-10V, çıkışı ise 0-10V arasındadır. Bir dijital kontrolör ile böyle bir sistemi kontrol etmek ve çıkışını ölçmek için Analog-Dijital Çevirici ve Dijital Analog Çevirici'ye ihtiyacımız olacaktır. ADuC814 mikro denetleyicisinin 12-bit ADC ve 12-bit DAC elemanları kullanılarak bu çevrim işlemleri gerçekleştirilmiştir. ADuC814 giriş ve çıkışındaki verileri kuvvetlendirmek amacı ile bir takım yükselteç devreleri de kullanılmıştır. Böylece PC'den RS232 ile dijital kontrol işareti alınmakta ve 0-10V arasında analog kontrol işaretine çevrilmektedir. Bu analog işaret sisteme uygulanmakta ve sistem çıkışı ölçülmektedir. Her ne kadar örnekleme periyodu 0.1 sn olsa da ölçülen sistem çıkışı 0.01 sn'de bir PC'ye gönderilmektedir. ( Bilgisayar ise 0.1 sn'deki her örneklemede en son gelen veriyi ölçüm değeri olarak alacaktır ).

Sistem kısmı ise bir deney setidir. Bu deney seti 0-10 V kontrol giriş ile bir ısıtıcı hükmeder. Isıtıcı çıkışındaki sıcaklık ölçümü bir sıcaklık algılayıcısı ile yapılarak çıkışa 0-10V arasında verilir.

## 5.2 MATLAB XPC-TARGET ile Kontrolör

XPC-TARGET bir bilgisayarı gerçek zamanlı çalıştırmak için kullanılan bir araçtır. MATLAB SIMULINK benzetim aracı “Harici” moda alınan başka bir bilgisayar yardımıyla, gerçek zamanlı çalışan sistemin parametreleri okunabilir hatta değiştirilebilir.

Gerçek zamanlı bilgisayar tarafında çalışan ve sistemi kontrol eden Dayanıklı MPC kontrolörünün şeması Şekil 5.2’de verilmiştir.



Şekil 5.2 : Gerçek Zamanlı Dayanıklı MPC kontrolörü

MATLAB SIMULINK ortamında, XPC-TARGET aracından iki adet grafik çizer alınmış ve Şekil 5.2’de kontrol işareti ve sistem çıkışına eklenmiştir. Böylece gerçek zamanda çalışan bilgisayarda sistem çıkışı ve kontrol işareti grafiksel olarak izlenecektir. Ayrıca sistem çıkışı ve kontrol işareti sonlandırmalar ekleyerek bu işaretleri kayıt edilmesi sağlanır.

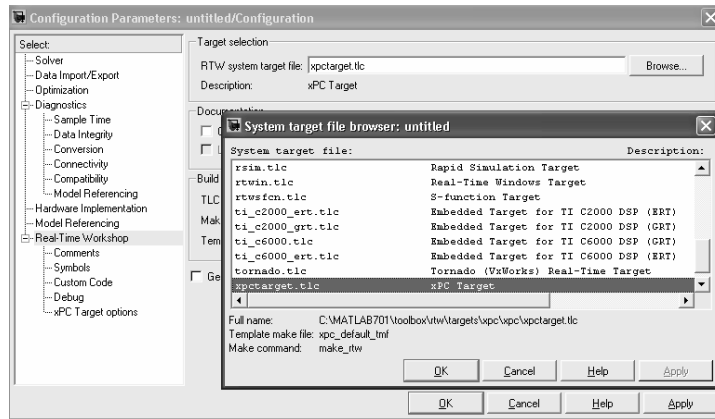
Mikro denetleyici tarafındaki Analog ve Dijital Çeviriciler 12-bit olduğu için 0V-10V arası analog değer sayısal 0-4095 arasına ölçeklendirilmiştir. Yani seri port’tan çıkış ve giriş verisi 0-4095 arasında sayısal bir değerdir.

Ortam sıcaklığında sistem çıkışı ölçüldüğünde 2 Volt olduğu gözlenmiştir. Kontrolör tasarımı ve sitem modellenmesi 0 Volt kontrol işaretinde 0 Volt çıkış üretecek şekilde tasarlandığı için ortam sıcaklığı değeri sabit bir gürültü gibi alınabilir. Bu nedenle sistem çıkışında ölçülen değerden ortam sıcaklığı değeri çıkarılır.

Bölüm §4.3’de tanımlan set noktası izleme problemi ışığı altında sistem durumumuz  $\tilde{x}(k) = x(k) - x_s$  olmalıdır. Durum geri besleme bloğu çıkışı ise  $\tilde{u}(k) = u(k) - u_s$  olmalıdır. Fakat kalıcı durumdaki durum geri besleme bloğu çıkışı 0 olduğu için  $\tilde{u}(k) = u(k)$  alınır.

Durum geri beslemesi çıkışı  $\tilde{u}(k) = F\tilde{x}(k)$  ile tanımlanır. Buradaki durum geri besleme matrisi F, (5.4) ile tanımlanan vektördür. Bu vektör  $k=0$  anındaki  $\tilde{x}(0) = [-5 \ -5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  sistem durumuna göre bölüm §4.1’deki LMI temelli dayanıklı MPC algoritmasından hesaplanan durum vektörüdür. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli husus, Dayanıklı MPC algoritmadan hesaplanan F matrisinin dayanıklı kararlılığı ( $\tilde{x}Px \leq \gamma$ ) sağlanabilmesi için set noktası  $\tilde{x}_s$ ’in iki normunun  $[-5 \ -5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ’in iki normundan daha küçük olmasıdır. Bu şartın sağlandığı her set noktasında durum geri besleme matrisi F dayanıklı kararlılığı sağlar.

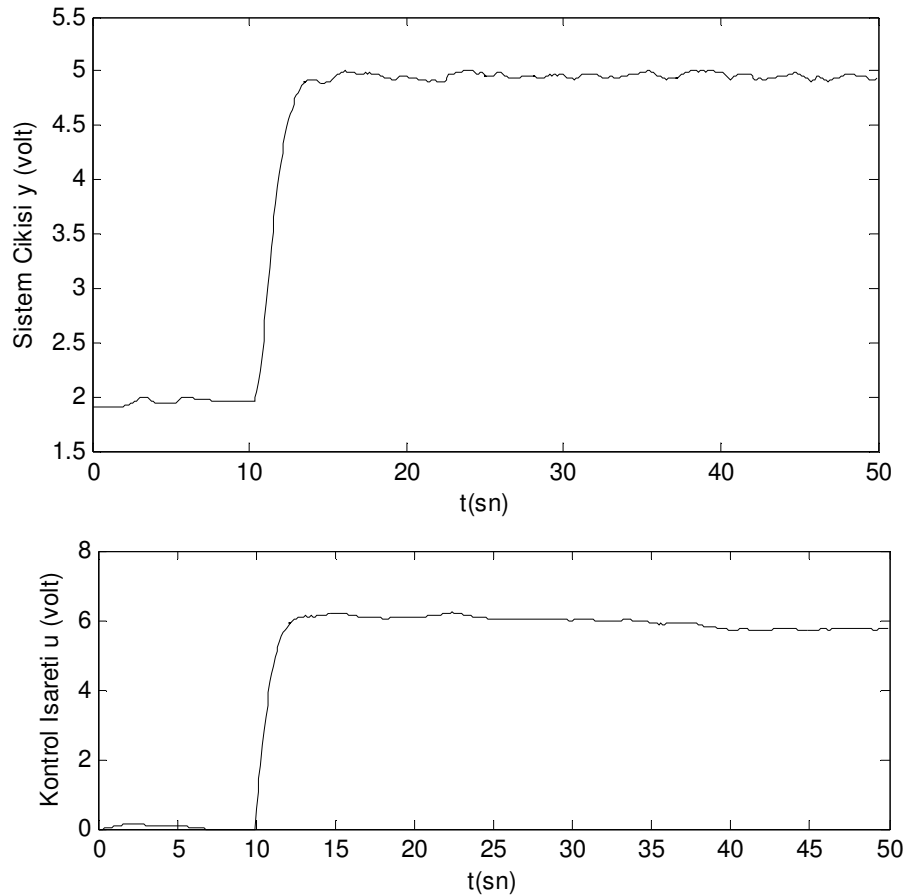
Şekil 5.2’deki MATLAB SIMULINK benzetimi derlenmeden önce “Benzetim” menüsünden “Ayar parametreleri” kısmında, “Sabit-Adım” tipi Runge-Kutta nümerik entegrasyon çözücüsü seçilir ve örnekleme periyodu ise 0.1 saniye değerine ayarlanır.



Şekil 5.3 : MATLAB’da XPC-TARGET hedefinin seçilmesi

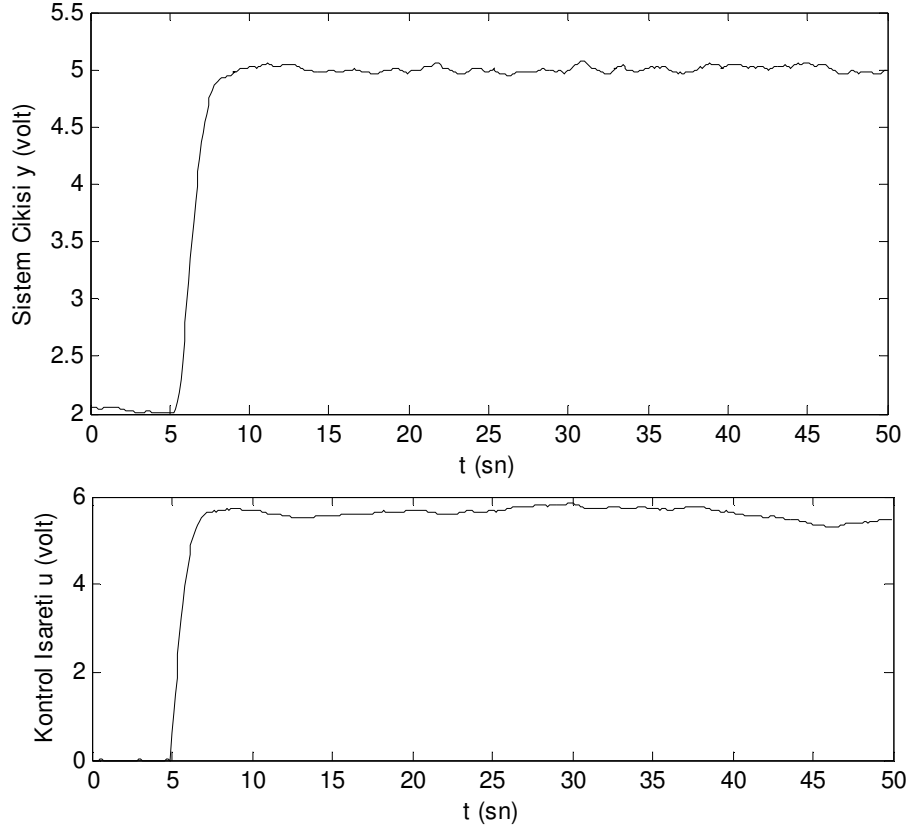
MATLAB’da XPC-TARGET aracının kullanılabilmesi için “Benzetim” menüsünden “Ayar Parametreleri” kısmından “Gerçek Zamanlı Çalışma Alanı” menüsü işaretlenerek Şekil 5.3’deki ayar yapılır. Hedef olarak “xpctarget.tlc” dosyası seçilip “tamam” tuşuna basıldıktan sonra model derlenir. Model derleme sonucu “C-Kodu” üretilir. Üretilen “C-Kodu” tekrar derlenerek hedeflenen gerçek zamanlı bilgisayara ağ veya seri port üzerinden otomatik olarak yüklenecektir. Bu yüzden sistemde bir “C” derleyici kurulmuş ve MATLAB’a da bu derleyicinin yeri gösterilmiş olmalıdır. Artık MATLAB SIMULINK ekranından, kontrolör çalıştırılabilir ve kontrolör parametreleri değiştirilebilir olacaktır. Ayrıca benzetim bloğu üzerindeki istenilen işaretin durumu da gözlenebilir.

### 5.3 Gerçek Zamanlı Dayanıklı MPC ile Kontrol Edilen Sistemin Sonuçları



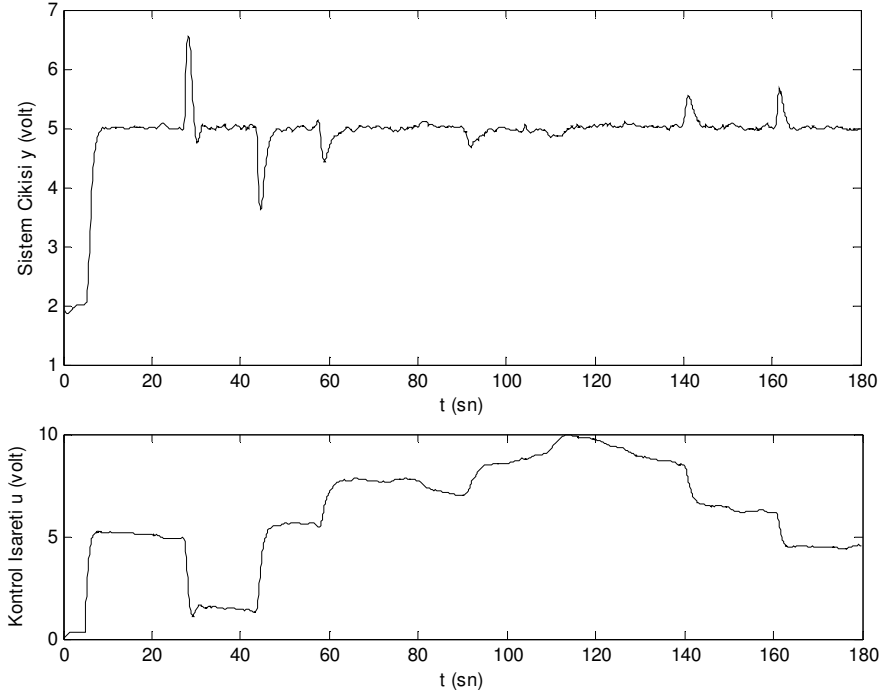
**Şekil 5.4 :** Gerçek Zamanlı Dayanıklı MPC ile kontrol edilen sistemin çıkışı ve kontrol işareti (  $dT \sim 0.25$  sn,  $K \sim 0.6$  )

Şekil 5.4'de gerçek zamanda çalışan ve dayanıklı MPC kontrol edilen sistemin cevabı verilmiştir. Sistemin ölü zaman gecikmesi yaklaşık 0.25 sn'dir. Sistem kazancı K değeri ise 0.6 civarlarında değişmektedir. Set noktası  $t=10$ 'uncu saniyede değişmiş ve sistem çıkışı yaklaşık 3 saniye sonra set noktasına ulaşmıştır. Unutulmaması gereken bir husus da ortam sıcaklığı değeri 2 Volt alınması nedeniyle Şekil 5.2'deki benzetim bloğu için Set Noktası değeri 3 Volt'tur.



**Şekil 5.5 :** Gerçek Zamanlı Dayanıklı MPC ile kontrol edilen sistemin çıkışı ve kontrol işareti (  $dT\sim 0.4$  sn,  $K\sim 0.6$  )

Gerçek zamanda çalışan Dayanıklı MPC kontrol edilen sistemin cevabı Şekil 5.5'de verilmiştir. Sistemin ölü zaman gecikmesi  $dT=0.4$  sn'dir. Sistemin set noktası  $t=5$  sn anında değiştirilmiştir.

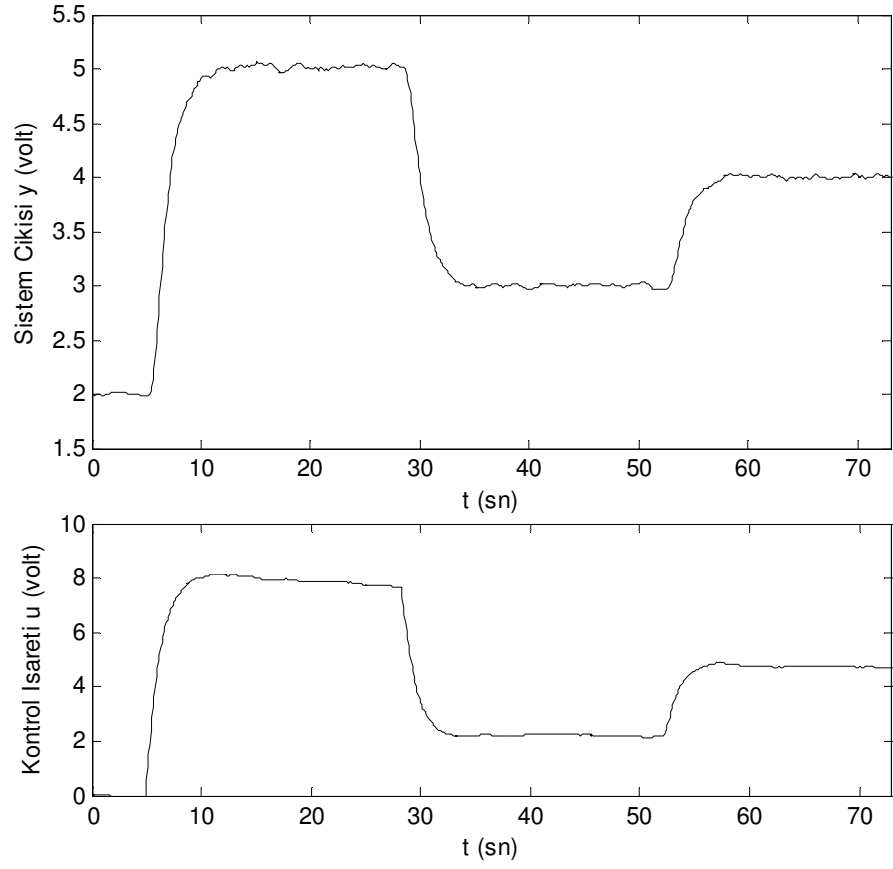


**Şekil 5.6 :** Gerçek Zamanlı Dayanıklı MPC ile kontrol edilen sistemin çıkışı ve kontrol işareti (  $dT=0.25$  sn,  $0.2 < K < 1.5$  )

Şekil 5.6'da ise sistem  $K$  kazancı zamanla değiştirilerek, Dayanıklı MPC ile kontrol edilen sistem cevabı ve kontrol işareti incelenmiştir. Kontrolör tasarımı  $K$ 'nın  $0.6 \leq K \leq 0.8$  arasındaki değişimi için yapılmasına rağmen, sistem kazancının  $0.2 < K < 1.5$  arasında değiştiği durumda dahi kontrolör çok iyi sonuç vermektedir.

Son grafik Şekil 5.7'de, set noktaları çeşitli anlarda değiştirilerek dayanıklı MPC ile kontrol edilen sistemin cevabı ve kontrol işareti verilmiştir. Sistem cevabı gayet tatmin edicidir.

Bu bölümdeki tüm grafiklerden de anlaşılacağı üzere, tasarlanan dayanıklı MPC kontrolör ile kontrol edilen sistem nominal sistem olmasa bile sistemin cevabı ve performansı beklentilerden fazlasını vermektedir.



**Şekil 5.7 :** Set noktası değişimlerine karşı Gerçek Zamanlı Dayanıklı MPC ile kontrol edilen sistemin çıkışı ve kontrol İşareti ( $dT \sim 0.25$ ,  $K \sim 0.5$ )

## 6. SONUÇLAR

Günümüzde, MPC tekniği hızla kullanımı artan yaygın bir kontrol tekniği olarak endüstriyel süreçlerde kullanılmaktadır.

Gerçek bir sistem hiçbir zaman tam olarak modellenemez. Endüstriyel bir süreç durum uzayı modeli ile tanıtılırsa bu durum uzayındaki A,B,C,D matrisleri zamanla belli aralıklarda değişmektedir. Tasarlanan kontrolör bu değişime karşı dayanıklı olmalıdır.

Teorik açıdan, nominal MPC kullanılan sistemlerin kararlığı üzerine araştırmalar günümüze kadar yapılmıştır. Benzer bir şekilde Model Öngörülü Kontrol'ün dayanıklılığı üzerine bir çok çalışma yapılmasına rağmen, dayaklılık üzerine yapılan çalışmaların önemli bir kısmı Sonlu Darbe Cevaplı (FIR) sistemler üzerinedir.

Bu çalışma büyük ölçüde **Kothare ve diğ. (1996)**'nin yaptıkları çalışmasını temel alır. Sonsuz ufuklu MPC amaç ölçütü için konveks bir üst sınır fonksiyonu belirlenerek MPC problemi konveks hale getirildi. Bu konveks üst sınır fonksiyonun maksimum değerinin minimum yapacak Doğrusal Matris Eşitsizlikleri (LMI) tanımlandı. Çok kullanılan iki model belirsizlikleri için tanımlanan LMI'lerinde dayanıklı kararlılığı sağlayan durum geri besleme matrisleri elde edildi. Her örnekleme anında, dayanıklı kararlılığı sağlayacak optimal durum geri besleme matrisi bulundu. Tanımlanan üst sınır fonksiyonu sürekli azalan bir fonksiyon olduğu için, ilk anda hesaplanan durum geri besleme matrisinin tüm kontrol işlemi boyunca kullanabileceği gösterildi. Giriş ve çıkış sınırlamaları ortaya konulduğunda, yine de dayanıklı kararlılığı sağlayacak LMI'leri türetildi. Tüm bu yeterli LMI'lerin elde edilmesi için gerekli ispatlar ayrıntılı olarak verildi.

Teorik altyapı oluşturulduktan sonra birinci dereceden ölü zaman gecikmeli bir sistem kontrolü amaçlandı. Tasarlanan kontrolörün set noktası izleyebilmesi için yeni bir amaç fonksiyonu tanımlandı.

Kontrol işlemi durum geri beslemesi ile yapıldığı için sistem durumlarının bilinmesi gerekiydi. Her ne kadar bu çalışmada yer verilmese de çeşitli durum gözleyicileri tasarlanarak sistem durumu elde edilmek istendi. Ama gözleyici çıkışı sistem

durumlarının gerçek sistem durumlarında göre hatalı elde edilmesi dayanıklı karlılığı bozabilirdi. Bu nedenle giriş-çıkış işaretlerini sistem durumu olarak alan genişletilmiş durum uzayı modeli tanıtıldı. Böylece Dayanıklı MPC problemin teorik alt yapısı aynen kullanılabilir.

Kalıcı durumdaki sistemin kazancı bilenmeyen parametre olduğunda sistem çıkışının set noktasını izleyemediği ve kararlı hal hatası olduğu gözlemlendi. Bu nedenle Dayanıklı MPC kontrolör, sistemde bir entegral alıcı varmış gibi tekrar tasarlandı. Dayanıklı MPC kontrolör çıkışına entegral alıcı devre eklenerek oluşabilecek kararlı hal-hataları önlenmiştir.

Tüm bu anlatılan ışığı altında MATLAB-SIMULINK ve MATLAB-XPCTARGET araçları kullanılarak İ.T.Ü Kontrol Laboratuvarında bulunan PT326 sistemi kontrol edildi. Tasarlanan kontrolör, PT326 deney setinin değişebilen tüm parametrelerinin en uç noktalarında dahi kararlılığı sağladı ve kararlı-hal hatası oluşmadı. Böylece gösterilen emeğin sonucu fazlasıyla alınmış oldu.

Günümüzde LMI problemleri çözümü için çeşitli algoritmalar vardır. Bu algoritmaların optimal çözümü bulması nispeten uzun hesaplama yükü getirir. Çevrimiçi uygulamalarda LMI'leri kullanmak, pahalı kontrolör tasarlamayı gerektirir. Her ne kadar çevrimdışı uygulamalar için dayanıklı kararlılığı sağlayan durum geri besleme matrisi bulunabilse de, iyi bir performans için çevrimiçi ve çevrimdışı kontrol algoritmalarını bir arada kullanan bir yapı geliştirilmelidir. Örneğin durum geri besleme matrisleri bölgesel olarak önceden tanımlanarak, sistem durumuna göre dayanıklı kararlılığı sağlayan ilgili durum geri besleme matrisi seçilebilir ve sistem kontrol edilebilir. Gelecekte, bu karma yapı üzerine çalışmalar, doğrusal olmayan sistemler için MPC tasarımı üzerine çalışmalar, LMI'ni çözme algoritmalarının gömülü sistemler üzerine yerleştirilmesi üzerine çalışmalar yapmak amaçlanmaktadır.

## KAYNAKLAR

- Allwright, J.C and Papavasiliou, G.C.,** 1992. On linear programming and robust model-predictive control using impulse-responses. *Systems & Control Letters*, **18**, 159-164.
- Bitmead, R.R, Gevers, G.C and Wertz, V.,** 1990. *Adaptive Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.,
- Boyd, S. and Ghaoui, L. El,** 1993. Method of centers for minimizing generalized eigenvalues. *Linear Algebra and Applications, special issue on Numerical Linear Algebra Methods in Control, Signals and Systems*, **188**, 63-111, jul 1993.
- Boyd, S., Ghaoui, L. El, Feron, E. and Balakrishnan, V.,** 1994. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, *volume 15 of Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, June 1994.
- Camacho, F.E, and Bordons, C.,** 2004 *Model Predictive Control*. London, New York, Springer
- Campo, P.J., and Morari, M.,** 1987 Robust model predictive control. *In Proceedings of the 1987 American Control Conference*, pages 1021-1026.
- Garcia, C.E, and Morari, M.,** 1982 Internal model control I. A unifying review and some new results. *Ind. Eng. Chem. Process Des. & Dev.*, **21**, 308-332.
- Garcia, C.E, and Morari, M.,** 1985. Internal model control 2. Design procedure for multivariable systems. *Ind. Eng. Chem. Process Des. & Dev.*, **24**, 472-484.
- Garcia, C.E, and Morari, M.,** 1985. Internal model control 3. Multivariable control law computation and tuning guidelines. *Ind. Eng. Chem. Process Des. & Dev.*, **24**, 484-494.

- Genceli, H. and Nikolaou, M.,** 1993 Robust stability analysis of constrained  $l_1$  – norm model predictive control. *AIChE Journal*, **39(12)**, 1954-1965.
- Kothare, M.V., Balakrishnan, V. and Morari, M.,** 1996. Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities, *Automatica*, **32(10)**, 1361-1379.
- Kwakernaak, H. and Sivan, S.,** 1972. Linear Optimal Control Systems. *Wiley-Interscience*, New York.
- Liu, R.W.,** 1968. Convergent systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, **13 (4)**, 384-391 August 1968
- Nesterov, Y. and Nemirovsky, A.,** 1994. Interior- point polynomial methods in convex programming, volume 13 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA.
- Polak, E. and Yang, T.H.,** 1993. Moving horizon control of linear systems with input saturation and plant uncertainty-1: Robustness. *International Journal of Control*, **53 (3)**, 613-638.
- Polak, E. and Yang, T.H.,** 1993. Moving horizon control of linear systems with input saturation and plant uncertainty-2: Disturbance rejection and tracking. *International Journal of Control*, **58(3)**, 639-663.
- Rawlings, J.B and Muske, K.R.,** 1993. The stability of constrained receding horizon control. *IEEE Trans. Auto. Cont.*, **38(10)**, 1512-1516, October 1993.
- Vandenberghe, L. and Boyd, S.,** 1993. Primal-dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities. To be published in *Math. Programming*.
- Zafiriou, E.,** 1990. Robust model predictive control of processes with hard constraints. *Computers chem. Engng*, **14(4/5)**, 359-371.
- Zafiriou, E. and Marchal, A.,** 1991. Stability of SISO Quadratic Dynamic Matrix Control. *AIChE Journal*, **37(10)**, 1550-1560.

**Zheng, Z.Q. and Morari, M.,** (1993) Robust stability of constrained model predictive control. In *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, 379-383, June 1993.

## **ÖZGEÇMİŞ**

Halil AKÇAKAYA 1981 yılında Tavas da doğdu. İlk ve orta öğrenimi Kale ve Denizli'de tamamladı. Denizli Lisesinde lise öğretimini sürdürdü. 1998 yılında Uludağ Üniversitesi Elektronik Mühendisliği Bölümü'nü kazandı. 2003 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik Mühendisliği Anabilim dalı, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen aynı bölümde eğitimine devam etmektedir.