

**OTOREGRESİF KESİRLİ BÜTÜNLEŞİK  
HAREKETLİ ORTALAMALAR  
MODELLERİNDE BAYESCİ YAKLAŞIMLAR**

**BAYESIAN APPROACHES IN  
AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY  
INTEGRATED MOVING AVERAGE MODELS**

**EROL EĞRİOĞLU**

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İSTATİSTİK Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2006

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Erdinç TELATAR

Üye (Danışman) : Prof. Dr. Süleyman GÜNAY

Üye : Prof. Dr. Reşat KASAP

Üye : Doç. Dr. Turhan MENTEŞ

Üye : Doç. Dr. Cem KADILAR

ONAY

Bu tez ...../...../2006 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

...../...../2006

Prof. Dr. Ahmet R. ÖZDURAL  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

# OTOREGRESİF KESİRLİ BÜTÜNLEŞİK HAREKETLİ ORTALAMALAR MODELLERİNDE BAYESCİ YAKLAŞIMLAR

Erol Eğrioğlu

## ÖZ

Otoregresif kesirli bütünleşik hareketli ortalamalar modellerinde model seçimi için Akaike bilgi ölçütü benzeri model seçim ölçütleri kullanılmaktadır. Ancak bu ölçütlerle model seçimi yapmak için tüm aday modeller üzerinden parametre tahmini yapmak gerekmektedir. Bu nedenle otoregresif kesirli bütünleşik hareketli ortalamalar modellerinde model seçimi ile parametre tahmininin aynı anda yapıldığı yöntemlerin kullanılmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu çalışmada otoregresif kesirli bütünleşik hareketli ortalamalar modellerinde tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo yöntemi kullanılarak parametre tahmininin ve model seçiminin aynı anda yapıldığı iki yeni yaklaşım önerildi. Önerilen yaklaşımlar bir benzetim çalışması ile incelenerek, klasik yöntemlere göre üstün olduğu durumlar ortaya çıkarıldı. Her iki yaklaşımın klasik yöntemlerden çoğu durumda daha iyi sonuçlar verdiği görüldü.

**ANAHTAR SÖZCÜKLER:** Bayesci model seçimi, Tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo, Kesirli bütünleşik otoregresif hareketli ortalamalar modelleri, Uzun dönem bağımlı süreçler

Danışman: Prof. Dr. Süleyman GÜNAY, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü,  
Uygulamalı İstatistik Anabilim Dalı

# **BAYESIAN APPROACHES IN AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY INTEGRATED MOVING AVERAGE MODELS**

**Erol Eğrioğlu**

## **ABSTRACT**

Various model selection criteria such as Akaike information criterion are used for model specification in autoregressive fractional integrated moving average models. Classical model selection criteria require to estimate model parameters for all of the model. Therefore, this kind of approach needs much time. However, in the literature, there are several methods which calculate model parameters and order at the same time such as reversible jump Markov chain Monte Carlo method.

In this thesis, I propose two new methods which are used with reversible jump Markov chain Monte Carlo method. The proposed methods are compared with classical methods by a simulation study and I see that my methods outperform than classical methods in most cases.

**Keywords:** Bayesian Model Selection, Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo, Autoregressive Fractional Integrated Moving Average Models, Long memory processes.

Advisor: Prof. Dr. Süleyman GÜNAY, Hacettepe University, Department of Statistics, Applied Statistics Section

## TEŞEKKÜR

Tez çalışması süresince her zaman destek olan kıymetli Prof. Dr. Süleyman Günay'a, tezin her aşamasında bilgisini paylaşan sevgili Doç Dr. Cem Kadılar'a, kıymetli katkıları nedeniyle Doç. Dr. Turhan Menteş'e, güler yüzlerini hiç bir zaman esirgemeyen Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü akademik ve idari personeline, manevi desteğini ve dostluğunu her zaman yanımda hissettiğim Arş. Gör. Hakan Aladağ'a ve sevgili eşime, oğluma, aileme sonsuz teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

|                                                                     | <b><u>Sayfa</u></b> |
|---------------------------------------------------------------------|---------------------|
| ÖZ .....                                                            | i                   |
| ABSTRACT .....                                                      | ii                  |
| TEŞEKKÜR.....                                                       | iii                 |
| İÇİNDEKİLER DİZİNİ .....                                            | iv                  |
| ÇİZELGELER DİZİNİ.....                                              | v                   |
| SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                                   | vi                  |
| <br>                                                                |                     |
| 1. GİRİŞ .....                                                      | 1                   |
| 2. ARFIMA MODELLERİ .....                                           | 4                   |
| 2.1. ARFIMA Modellerinde Otokovaryans Hesaplama Yöntemleri .....    | 6                   |
| 2.2. ARFIMA Modellerinde Öngörülerin Hesaplanması .....             | 7                   |
| 2.3. ARFIMA Modellerinde Benzetim .....                             | 9                   |
| 3. ARFIMA MODELLERİNDE PARAMETRE TAHMİNİ.....                       | 11                  |
| 3.1. Yinelenmiş Ölçekli Düzeltilmiş Aralık İstatistiği Yöntemi..... | 12                  |
| 3.2. Logaritmik Periodogram Regresyonu .....                        | 14                  |
| 3.3. Whittle Yakalaşık En Çok Olabilirlik Yöntemi.....              | 15                  |
| 3.4. Otokorelasyon Regresyonu Yöntemi.....                          | 16                  |
| 3.5. Tam En Çok Olabilirlik Yöntemi.....                            | 17                  |
| 3.6. Hosking'in İki Aşamalı Tahmin Yöntemi .....                    | 18                  |
| 3.7. Sowell'ın En Çok Olabilirlik Yöntemi.....                      | 18                  |
| 3.8. Koşullu Kareler Toplamı Yöntemi .....                          | 20                  |
| 3.9. Haslett Ve Raftery Yöntemi .....                               | 20                  |
| 3.10. ARFIMA Modelleri İçin Bayesci Tahmin Yöntemleri .....         | 21                  |
| 4. MCMC YÖNTEMLERİ, BAYESÇİ MODEL SEÇİMİ VE KLASİK MODEL            |                     |

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| SEÇİM ÖLÇÜTLERİ .....                                    | 22 |
| 4.1. Gibbs Örneklemesi.....                              | 22 |
| 4.2. Metropolis-Hastings Algoritması.....                | 23 |
| 4.3. Bayesci Model Seçimi .....                          | 23 |
| 4.3.1. Carlin ve Chip Yöntemi.....                       | 24 |
| 4.3.2. Metropolisleştirilmiş Carlin ve Chip Yöntemi..... | 25 |
| 4.3.3. RJMCMC Yöntemi.....                               | 26 |
| 4.4. MCMC Yöntemlerinde Yakınsama .....                  | 27 |
| 4.5. Klasik Model Seçim Ölçütleri .....                  | 28 |
| 5. İKİ AŞAMALI BAYESCİ TAHMİN YÖNTEMİ .....              | 29 |
| 6. TEK AŞAMALI BAYESCİ TAHMİN YÖNTEMİ .....              | 37 |
| 7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA .....                            | 43 |
| 8. KAYNAKLAR DİZİNİ .....                                | 45 |
| 9. ÖZGEÇMİŞ .....                                        | 50 |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

|                                                                               | <b><u>Sayfa</u></b> |
|-------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| Çizelge 5.1. ARFIMA(1, $d$ , 0) Modeli için Bir Benzetim Çalışması Yardımıyla |                     |
| Algoritma 3'ün, HR ve CSS Yöntemi ile Karşılaştırılması .....                 | 35                  |
| Çizelge 5.2. ARFIMA(0, $d$ , 1) Modeli için Bir Benzetim Çalışması Yardımıyla |                     |
| Algoritma 3'ün, HR ve CSS Yöntemi ile Karşılaştırılması .....                 | 36                  |
| Çizelge 6.1. ARFIMA(1, $d$ , 0) Modeli için Bir Benzetim Çalışması Yardımıyla |                     |
| Algoritma 4'ün, HR ve CSS Yöntemi ile Karşılaştırılması .....                 | 40                  |
| Çizelge 6.2. ARFIMA(0, $d$ , 1) Modeli için Bir Benzetim Çalışması yardımıyla |                     |
| Algoritma 4'ün, HR ve CSS Yöntemi ile Karşılaştırılması .....                 | 41                  |

## SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

|         |                                                                                                              |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| RMSE:   | Hata Kareler Ortalaması Karekökü / Root of Mean Square Error                                                 |
| MCMC:   | Markov Zinciri Monte Carlo / Markov Chain Monte Carlo                                                        |
| RJMCMC: | Tersinir Sıçramalı Markov Zinciri Monte Carlo / Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo                     |
| CSS:    | Koşullu Kareler Toplamı / Conditional Sum of Squares                                                         |
| AIC:    | Akaike Bilgi Ölçütü / Akaike Information Criterion                                                           |
| BIC:    | Bayesci Bilgi Ölçütü / Bayesian Information Criterion                                                        |
| HQC:    | Hannan Quinn Ölçütü / Hannan Quinn Criterion                                                                 |
| DMSY:   | Doğru Model Seçim Yüzdesi                                                                                    |
| R/S:    | Yinelenmiş Ölçekli Düzeltilmiş Aralık İstatistiği / Adjusted Rescaled Range Statistics                       |
| ARMA:   | Otoregresif Hareketli Ortalamalar / Autoregressive Moving Average                                            |
| ARFIMA: | Otoregresif Kesirli Bütünleşik Hareketli Ortalamalar / Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average |
| HR:     | Haslett-Raftery Yöntemi / Haslett-Raftery Method                                                             |
| MH:     | Metropolis Hastings Yöntemi / Metropolis Hastings Method                                                     |
| LRD:    | Uzun Dönem Bağımlı / Long Range Dependent                                                                    |

## 1. GİRİŞ

Zaman serisi modellerinde parametre tahminleri eğrisel optimizasyon teknikleri ile elde edilir. Gözlemlenemeyen değerler nedeni ile olabilirlik fonksiyonu da standart doğrusal modellerden farklı olarak hesaplanır. Bu durum zaman serisi modelleri için Bayesci tekniklerin kullanımını desteklemektedir. Çünkü eşlenik dağılımlar olmasa bile Bayesci hesaplamalarda eğrisel optimizasyon teknikleri kadar hesaplama gerekmektedir. Üstelik Bayes analizi parametrelerin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının elde edilmesi, öngörü dağılımı, gözlemlenemeyen değişkenlerin analize dahil edilmesi ve kayıp gözlemlerin tahmin edilmesi gibi bir çok avantajı da beraberinde getirmektedir. Bayesci teknikler, özellikle Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC, Markov Chain Monte Carlo) yöntemlerinin geliştirilmesi ile daha sık kullanılmaya başlanmıştır. Zaman serileri alanında Zelner (1971), Box ve Jenkins (1976) ve Monahan (1983) gibi Bayesci çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmalarda zor ve karmaşık integrallerin çözülmesi gerektiğinden ve geliştirilen sayısal integrasyon yöntemlerinin zor olmasından dolayı bu Bayesci yöntemler çok sınırlı sayıda uygulanmıştır. MCMC yöntemlerinden sonra ise zaman serilerinin Bayesci çözülmesi daha yaygın uygulama alanı bulmuştur. Çünkü bu yöntemler sonsal dağılımlardan nümerik integrasyona ihtiyaç duymaksızın çıkarım yapmaya olanak sağlamaktadır.

Son yıllarda Bayesci çalışmalar uzun dönem bağımlı zaman serilerinde de yapılmaktadır. Uzun dönem bağımlılık durumu ile Ekonomi, Hidroloji, Jeofizik gibi bir çok bilim dalındaki zaman serilerinde karşılaşılmaktadır. Uzun dönem bağımlılığın varlığı ilk olarak Hurst (1951) tarafından Nil nehrinin minimum düzeyinin saptanması sırasında ortaya çıkartılmıştır. Bu nedenle uzun dönem bağımlılığa literatürde Hurst etkisi de denmektedir. Beran (1994)'de uzun dönem bağımlı veri kümesi için şu özelliklerin bulunduğunu belirtilmiştir:

- a) Uzun periyotlar boyunca gözlemler yüksek düzeylerde kalır. Diğer yandan düşük düzeyli uzun periyotlar da vardır.
- b) Kısa zaman periyotları incelendiğinde yerel trendler ve devirsel hareketler görünür. Buna karşın tüm seriye bakıldığında açık bir trende ya da devirsel harekete rastlanmaz.
- c) Tüm seri göz önüne alındığında, seri durağan gibi gözüktür.

Beran (1994)'de aşığıdaki sayısal özelliklerinde uzun dönem bağımlı süreçlerde görülebileceğı belirtilmiştir.

- 1) Örneklem ortalamasının varyansı ,  $n^{-\alpha}$  ,  $0 < \alpha < 1$  ile orantılı olarak sıfıra yaklaşır.
- 2) Örnek otokorelasyonları  $k^{-\alpha}$  ,  $0 < \alpha < 1$  ile orantılı olarak sıfıra yaklaşır.
- 3)  $I(\lambda)$  periodogramının logaritmasına karşı frekansların logaritmasının grafiğı çizildiğinde negatif eğimli düz bir çizgi yöresinde rasgele bir salınım görülür.

Bu özelliklere bağılı olarak uzun dönem bağımlılık şöyle tanımlanabilir.  $\alpha \in (0,1)$  gerçel sayı ve  $c_\rho > 0$  sabit olmak üzere  $X_t$  durağan süreci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(k) / [c_\rho k^{-\alpha}] = 1 \quad (1.1)$$

koşulunu sağlar ise uzun dönem bağımlı (LRD, Long range dependent) süreç adını alır.

Otoregresif kesirli bütünleşik hareketli ortalamalar modelleri (ARFIMA, autoregressive fractionally integrated moving average models) uzun dönem bağımlı zaman serilerini modelleyebilmektedir. Bu modeller ilk kez Granger ve Joyeux (1980) de ortaya atılmıştır. ARFIMA modelleri, otoregresif hareketli ortalamalar (ARMA, autoregressive moving average models) modelinin daha genel bir halidir. ARFIMA modellerinin özellikleri Granger ve Joyeux (1980), Hosking (1981,1984), Brockwel ve Davis(1991) ve Beran (1994) de ayrıntılı biçimde verilmiştir.

ARFIMA modellerinde uzun dönem bağımlılığın etkisi nedeniyle belirleme problemini ARMA modellerindeki gibi otokorelasyonlar ile çözmek zordur. Bu nedenle ARFIMA modellerinde belirleme problemini çözmek için klasik model seçim ölçütleri kullanılmaktadır. Klasik model seçimleri ile belirleme işleminde aday tüm modellerin parametre tahminleri elde edilmelidir. Bu durum zaman kaybına ve işlem fazlalığına neden olmaktadır. ARFIMA modellerinde parametre tahmini ile belirleme işleminin eş zamanlı yapıldığı bir yöntem ihtiyacı duyulmaktadır. Green (1995), parametre tahmini ve model seçimini aynı anda

gerçekleştiren tersinir sıçramalı MCMC (RJMCMC, Reversible jump Markoc Chain Monte Carlo) yöntemini önermiştir. RJMCMC yönteminin ARFIMA modellerine uygulandığı bir çalışma henüz literatürde yoktur.

Bu tezde ARFIMA modellerine RJMCMC yöntemini kullanılarak parametre tahmini ve model seçimini aynı anda yapan iki yeni yaklaşım önerildi. Önerilen yaklaşımlar benzetim çalışması ile incelenerek, klasik yöntemlere göre üstün oldukları durumlar ortaya çıkarıldı.

Çalışmanın ikinci bölümünde ARFIMA modellerinde temel özellikler, otokovaryans hesaplama yöntemleri, öngörü hesaplama teknikleri ve benzetim teknikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde ARFIMA modellerinde parametre tahmini ve bir çok parametre tahmin yöntemi ayrıntılı olarak verilmiştir. Çalışmanın dördüncü bölümünde temel MCMC yöntemleri, RJMCMC yöntemi ve klasik model seçim ölçütleri hakkında bilgi verilmiştir. Beşinci bölümde bu tezde önerilen iki aşamalı tahmin yöntemi tanıtılmış ve bu yöntemin başarısını değerlendirmek için yapılan benzetim çalışması sonuçları verilmiştir. Altıncı bölümde yine bu çalışmada önerilen tek aşamalı tahmin yöntemi tanıtılmış ve bu yöntem için yapılan benzetim çalışması sonuçları verilmiştir. Yedinci bölümde ise sonuçlar özetlenerek önerilen yöntemler tartışılmıştır.

## 2. ARFIMA MODELLERİ

ARFIMA modelleri hakkında genel bilgi Beran (1994) ve Baillie (1996) çalışmalarında ayrıntılı olarak verilmiştir. Bu bölümde bu iki kaynak ve diğer çalışmalardan ARFIMA modelleri hakkında elde edilen genel bilgi özetlenmiştir. Box ve Jenkins (1976)'da (p,d,q). dereceden otoregresif bütünleşik hareketli ortalama modeli

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)e_t \quad (2.1)$$

eşitliği ile verilmiştir. Burada,

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$$

$$\theta(B) = (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q)$$

olmaktadır.  $e_t$ 'ler tüm  $t$ 'ler için  $N(0, \sigma_e^2)$  dağılımlı ve bağımsızdırlar. (2.1) eşitliğindeki  $(1-B)^d$  ifadesini

$$(1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} B^k (-1)^k \quad (2.2)$$

şeklinde vermek mümkündür. Burada bilindiği gibi  $d$ 'nin  $k$ 'lı kombinasyonu,

$$\binom{d}{k} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)}$$

formülü ile hesaplanır. Gamma fonksiyonu sürekli değerler için tanımlı olduğundan  $d$ 'nin sürekli değerler alması mümkündür.

$X_t$  zaman serisi,

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)e_t \quad -1/2 < d < 1/2 \quad (2.3)$$

model denklemi ile ifade edilirse  $X_t$ 'ye (p,d,q). dereceden kesirli bütünleşik otoregresif hareketli ortalamalar ( ARFIMA(p,d,q) ) süreci denir. Bu tanım Granger ve Joyeux (1980) ve Hosking (1981,1984)'de verilmiştir.

(2.3) eşitliği birkaç farklı şekilde yorumlanabilir. Örneğin  $(1-B)^d X_t = \tilde{X}_t$  alınırsa  $\tilde{X}_t$  bilinen (p,q). dereceden otoregresif hareketli ortalama (ARMA(p,q)) süreci olur.  $X_t^* = \theta^{-1}(B)\phi(B)X_t$  ise  $X_t^*$  bir ARFIMA (0,d,0) süreci olur ve  $X_t^* = (1-B)^{-d} e_t$  şeklinde yazılır.  $\tilde{X}_t$  ARMA(p,q) süreci olduğundan spektral yoğunluk fonksiyonu şöyle yazılabilir:

$$f_{\tilde{X}_t}(\lambda) = \frac{\sigma_e^2 |\theta(e^{i\lambda})|^2}{2\pi |\phi(e^{i\lambda})|^2}$$

$X_t$  ,  $\sum a(s)Y_{t-s}$  doğrusal süzgecini uygulamakla elde ediliyorsa  $X_t$  'nin spektral yoğunluğu  $|A(\lambda)|^2 f_Y(\lambda)$  'ya eşittir. Burada  $A(\lambda) = \sum a(s)e^{i\lambda s}$  'dir. Bu tanımlara dayalı olarak  $X_t$  'nin spektral yoğunluğu

$$f(\lambda) = |1 - e^{i\lambda}|^{-2d} f_{\tilde{X}_t}(\lambda) = |1 - e^{i\lambda}|^{-2d} \frac{\sigma_e^2 |\theta(e^{i\lambda})|^2}{2\pi |\phi(e^{i\lambda})|^2} \quad (2.4)$$

olur.  $0 < d < 1/2$  için  $k \rightarrow \infty$  iken,

$$\gamma(k) \sim c_\gamma(d, \phi, \theta) |k|^{2d-1}$$

$$c_\gamma(d, \phi, \psi) = \frac{\sigma_e^2 |\theta(1)|^2}{2\pi |\phi(1)|^2} \Gamma(1-2d) \sin \pi d$$

$$\rho(k) \sim c_\rho(d, \phi, \theta) |k|^{2d-1}$$

$$c_\rho(d, \phi, \theta) = \frac{c_\gamma(d, \phi, \theta)}{\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda}$$

Bu formüllerden tüm kovaryanslar için açık formlar elde etmek zordur. Fakat ARFIMA (0,d,0) süreci için bu mümkündür.

$$\gamma(k) = \sigma_e^2 \frac{(-1)^k \Gamma(1-2d)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(1-k-d)} \quad (2.5)$$

$$\rho(k) = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1-d)} \quad (2.6)$$

$k$  'nın büyük değerleri için  $\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} \rightarrow k^{a-b}$  olduğundan ,

$$\rho(k) \rightarrow \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} |k|^{2d-1} \quad (|k| \rightarrow \infty) \quad (2.7)$$

olur.  $X_t$  , ARFIMA (0,d,0) süreci olsun. Bu durumda  $X_t$  'nin sonsuz otoregresif yapısı Beran (1994), Baillie (1996) ve Hosking(1981,1984) tarafından

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k} = e_t \quad (2.8)$$

$$\pi_k = \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)} \quad \text{ve} \quad k \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad \pi_k \sim \frac{k^{-d-1}}{\Gamma(-d)}$$

formülleri ile verilmiştir. Aynı kaynaklarda  $X_t$  'nin sonsuz hareketli ortalamalar yapısı ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k e_{t-k} = X_t \quad (2.9)$$

$$\psi_k = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d)} \quad \text{ve} \quad k \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad \psi_k \sim \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)} \quad \text{dir.}$$

şeklinde dir. (2.8) ve (2.9) sonuçları ARFIMA(0,d,0) modelinde öngörülerinin elde edilmesi için yararlıdır.

## 2.1. ARFIMA Modellerinde Otokovaryans Hesaplama Yöntemleri

ARFIMA modellerinde otokovaryans ve otokorelasyonların hesaplanması üzerine bir çok çalışma literatürde yer almaktadır. Bu çalışmaların başlıcaları Hosking (1981), Sowell (1992), Chung (1994) ve Bertelli ve Caporin (2002) olarak verilebilir. Sowell (1992) ve Chung (1994)'deki yöntemler tam otokovaryansların hesaplanmasını sağlamaktadır. Ancak bu yöntemler fazla hesaplama gerektirmektedir. Bertelli ve Caporin (2002)'da önerilen yöntem daha az hesaplama ile otokovaryansların doğru bulunmasını sağlamaktadır. Hosking (1981)'de önerilen yönteme göre otokovaryanslar aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$X_t$  ,  $\beta(B)$  doğrusal süzgecinden,  $X_t^*$  ( ARFIMA(0,d,0) ) sürecinin geçişiyle elde edilir.

$$\beta(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j B^j = \phi(B)\theta^{-1}(B)$$

$X_t^*$  sürecinin kovaryansları  $\gamma^*(k)$  ile gösterilsin.  $\beta_j$  katsayıları  $\beta(B)$  ve  $\phi(B)\theta^{-1}(B)$ 'nin eşlenmesi ile hesaplanır. Örneğin  $\phi(B)=1$ ,  $\theta(B)=1+\theta B$  ise  $\beta_j = (-1)^j \theta^j$  olarak elde edilir.  $X_t$  sürecinin otokovaryansları  $\gamma(k)$ 'lar,  $\beta(B)$  ve  $\gamma^*(k)$  faydalananarak aşağıda verilen formül ile hesaplanabilir.

$$\gamma(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_j \beta_l \gamma^*(k+j-l) \quad (2.10)$$

Bertelli ve Caporin (2002) daha az hesaplama ile otokovaryansların doğru bir şekilde hesaplayan ayırma yöntemi (splitting method) önermiştir. Bu yöntemde otokovaryanslar aşağıdaki formül yardımıyla hesaplanmaktadır.

$$\gamma(k) = \sum_{h=-m}^m \tilde{\gamma}(h) \gamma^*(k-h) \quad (2.11)$$

Burada  $\tilde{\gamma}(\cdot)$  ile ARMA modelinin otokovaryansları ve  $\gamma^*(\cdot)$  ile (2.5) de verilen ARFIMA(0,d,0)'ın otokovaryansları gösterilmektedir. Buradaki  $m$  kesim parametresi olarak bilinmektedir.  $m$ 'nin değeri otokorelasyon katsayılarındaki değişime göre belirlenebilir. Örneğin otoregresif terimlerin bulunmadığı bir modelde  $m$ 'nin değerinin hareketli ortalama terimlerinin sayısı kadar alınması yeterlidir.

## 2.2. ARFIMA Modellerinde Öngörülerin Hesaplanması

Granger ve Joyeux (1980) ve Geweke ve Porter-Hudak (1983) ARFIMA modellerinde sonsuz otoregresif sunuma dayalı öngörü yöntemleri önermişlerdir. Reinsen ve Lopes (1999)'da ARFIMA modellerinden öngörü elde etme yöntemi aşağıdaki gibi verilmiştir.

Zaman serisinin  $X_1, \dots, X_n$  gözlemlerine dayalı olarak  $X_{n+k}$ 'yi tahmin etmek istiyoruz. Bu tahmin  $\hat{X}_n(k)$  ile gösterilsin.

$$\hat{X}_n(k) = E(X_{n+k} / X_n, X_{n-1}, \dots) \quad (2.12)$$

$\hat{X}_n(k)$ ,  $E(X_{n+k} - \hat{X}_n(k))^2$  ifadesini minimize ettiği gösterilebilir. Öngörü hatası  $e_n(k)$  şöyle verilebilir.

$$e_n(k) = X_{n+k} - \hat{X}_n(k) \quad (2.13)$$

$t+k$  zamanı için sonsuz AR ve MA yapıları,

$$X_{t+k} = -\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t+k-j} + e_{t+k}$$

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t+k-j}$$

şeklinde gösterilir. Burada  $\psi_k$  ve  $\pi_k$ ,  $\beta^k$ 'nin aşağıdaki ifadelerdeki katsayılarıdır.

$$\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} (1-B)^{-d}$$

$$\pi(B) = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} (1-B)^d$$

Otoregresif yapıya göre,

$$\hat{X}_n(k) = E(X_{n+k} / X_n, X_{n-1}, \dots) = -\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \hat{X}_n(k-j), \quad k \geq 1$$

yazılabilir. Bu eşitlikte

$$\hat{e}_n(j) = E(e_{n+j} / X_n, X_{n-1}, \dots) = 0$$

ve

$$\hat{X}_n(j) = E(X_{n+j} / X_n, X_{n-1}, \dots), \quad j \geq 1$$

$$\hat{X}_{n+j} = X_n, \quad j \leq 0$$

şeklindedir. Öngörü hatası  $e_n(k)$  da sonsuz MA yapısını kullanılarak elde edilebilir.

$$\hat{X}_{n+j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{n+k-j}$$

Burada  $\hat{e}_n(j) = 0, j \geq 1$  ve  $\hat{e}_n(j) = e_{n+j}, j \leq 0$  olmaktadır. Öngörü hatası

$$e_n(k) = X_{n+k} - \hat{X}_n(k) = \sum_{j=0}^{\infty} e_{n+k-j}$$

şeklindedir ve  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ 'dur. Bu nedenle,

$$V(e_n(k)) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j^2$$

olmaktadır ve bu ifade de sonludur.

### 2.3. ARFIMA Modellerinde Benzetim

ARFIMA(p,d,q) modelinin benzetimi Beran (1994)'de verilmiştir. Beran (1994)'de ARFIMA(0,d,0) modelinin benzetim için önerilen algoritma şu şekildedir.  $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_n)^T$ , standart normal dağılımlı rasgele değerler üretilsin. Daha sonra elemanları (2.5) formülünden hesaplanan

$$\Sigma_n = [\gamma(i-j)], \quad i, j = 1, \dots, n$$

matrisi elde edilsin. Kovaryans matrisi, L alt üçgen olmak üzere  $\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$  şeklinde ayrıştırılsın. Bu ayrıştırmaya Cholesky ayrıştırması denir. Pozitif tanımlı ve simetrik matrislerin Cholesky ayrıştırmasını elde etmek mümkündür.  $\Sigma_n$  matrisi pozitif tanımlı ve simetriktir.

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T = \mathbf{L}\mathbf{Z}$$

formülünden  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  serisi elde edilsin. Burada elde edilen  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  serisi ARFIMA(0,d,0) modeline sahiptir. Yukarıdaki verilen yöntem ile elde edilecek ARFIMA(0,d,0) serisi kullanılarak ARFIMA(p,d,q) sürecinin benzetimi yapılabilir.  $X_1^*, \dots, X_n^*$  serisi yukarıda verilen yöntemle ARFIMA(0,d,0) modeli için elde edilmiş dizi olsun. Bu dizi hata terimi olarak kullanılarak ARMA(p,q) modeli için  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  benzetim ile elde edilsin. Buradan elde edilen  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  dizisi de ARFIMA(p,d,q) modeline sahiptir.

ARFIMA(p,d,q) modelinin benzetiminde kullanılabilecek bir başka yöntem ise şu şekildedir. (2.1) alt bölümde verilen ayırma yöntemi ile ARFIMA(p,d,q)

otokovaryansları hesaplanır. Elemanlarını bu otokovaryanslar olacak şekilde  $\Sigma_n$  matrisi oluşturulur. Kovaryans matrisi,  $\mathbf{L}$  alt üçgen olmak üzere  $\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$  şeklinde ayrıştırılır.

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T = \mathbf{L}\mathbf{Z}$$

formülü ile  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  serisi elde edilir. Yine bu seri ARFIMA( $p, d, p$ ) modeline sahip olacaktır.

### 3. ARFIMA MODELLERİNDE PARAMETRE TAHMİNİ

ARFIMA modellerinde parametre tahmini üzerine 1951 yılından başlayarak günümüze kadar bir çok çalışma yapılmıştır. Literatürde ilk olarak ARFIMA(0, $d$ ,0) modelinde parametre tahmini üzerinde yoğunlaşmıştır. Hurst(1951)'de uzun dönem bağımlı zaman serilerinin tahmini için önerilen R/S istatistiği yöntemi ARFIMA(0, $d$ ,0) modelinde  $e_t$ 'nin dağılımının bilindiği durumlarda kesirli fark parametresinin ( $d$ ) tahmini için kullanılabilmektedir. Bu istatistik daha sonra Lo (1991)'de geliştirilmiştir. ARFIMA(0, $d$ ,0) modelinin tahmininde Geweke ve Porter-Hudak (1983)'de logaritmik periodograma dayalı bir yöntem önermiştir. Robinson (1994)'de yine periodograma dayalı bir yöntem önermiştir. Son yıllarda yine ARFIMA(0, $d$ ,0)'ın tahmininde periodograma dayalı tahmin yöntemleri geliştirilmeye devam etmektedir. Periodograma dayalı tahmin yöntemlerinde ARFIMA(0, $d$ ,0)'ın spektral yoğunluk fonksiyonundan hareket edilmektedir. Spektral yoğunlukla aynı bilgiyi taşıyan otokorelasyonlara dayalı tahmin yöntemi Robinson (1990) ve Tieslau vd. (1996)'da önerilmiştir. Önerilen bu yöntemlerde otokorelasyonlara dayalı tahminlerin çok güvenilir olmadığı sonucuna varılmıştır. Baillie (1996)'da otokorelasyonlara dayalı tahmin yöntemlerinin geliştirilmesi ile güvenilir tahmin sonuçlarının elde edilebileceğini vurgulamıştır. Eğrioğlu ve Günay (2005)'de önerilen otokorelasyon regresyonu yönteminin çoğu durumda logaritmik periodogram regresyonundan daha üstün olduğu gösterilmiştir. ARFIMA(0, $d$ ,0) modelinde tam en çok olabilirlik yöntemi ile de parametrelerin tahmin edilmesi mümkündür. Buraya kadar söz edilen parametre tahmin yöntemleri yarı parametrik tahmin yöntemleridir ve sadece  $e_t$ 'nin dağılımının bilindiği durumlarda kesirli fark parametresinin ( $d$ ) tahmini için kullanılabilmektedir. Hosking (1981)'de ARFIMA( $p,d,q$ ) modelinin tahmin için yukarıda söz edilen yöntemlere ve Box-Jenkins yaklaşımına dayalı iki aşamalı bir tahmin yöntemi önermiştir. Bu yöntem daha sonra Smith vd. (1997)'de en çok olabilirlik yöntemleri ile karşılaştırılmış ve bilinen model seçim ölçütlerine göre yanlış model seçimi ve yanlış parametre tahmin sonuçlarına neden olduğu ileri sürülmüştür. Reinsen vd. (2001) yine Hosking(1981)'de önerilen iki aşamalı tahmin yöntemi üzerinde bir benzetim

çalışması yapmışlardır. Reinsen vd. (2001)'de iki aşamalı tahmin yönteminin pratik amaçlar için kullanılabileceği ve yeterli sonuçlar elde edilebileceği sonucuna varılmıştır. Literatürde ARFIMA( $p, d, q$ ) modelinin tahmin için bir çok parametrik yöntem önerilmiştir. Ancak Beran (1994)'de belirtildiği gibi ARFIMA( $p, d, q$ ) modelinin tam olabilirlik fonksiyonunun hesaplanması çok sayıda hesaplama gerektirdiğinden yaklaşık olabilirlik hesaplamaları üzerinde yoğunlaşmıştır. Hasslet ve Raftery (1989), Hosking (1984), Li ve McLeod (1986), Beran (1994)'de yaklaşık olabilirlik tahmin edicileri önerilmiştir. Sowell (1992)'de ise otokovaryansların tam hesaplanmasına dayalı tam olabilirlik tahmin edicisi önerilmiştir. Ancak bu yöntem bazı kısıtlamaları içermektedir. Chung ve Baillie (1993)'de koşullu en küçük kareler (CSS, Conditional Sum of Squares) yöntemini önermiştir. Chung ve Baillie (1993) de CSS yönteminin Sowell'ın tam olabilirlik yöntemi kadar iyi sonuçlar verdiğini vurgulamıştır. Söz edilen yöntemlerin bazıları kısaca aşağıda tanıtılmıştır.

### 3.1. Yinelenmiş Ölçekli Düzeltilmiş Aralık İstatistiği Yöntemi

Uzun dönem bağımlı zaman serilerinde parametre tahmini için önerilen ilk yöntem Hurst(1951)'de önerilen yinelenmiş ölçekli düzeltilmiş aralık ( $R/S$ , adjusted rescaled range statistics) istatistiği yöntemidir. Hurst (1951) çalışmasında Nil nehrinin akışının nasıl düzenleneceğini araştırmıştır. Çalışmasında ;

$X_i$  :  $i$  zamanındaki içeriye akış

$Y_j$  :  $j$  zamanına kadar içeriye toplam akış

$$Y_j = \sum_{i=1}^j X_i$$

İdeal kapasite ise,

$$R(t, k) = \max_{0 \leq i \leq k} \left[ Y_{t+i} - Y_t - \frac{i}{k} (Y_{t+k} - Y_t) \right] - \min_{0 \leq i \leq k} \left[ Y_{t+i} - Y_t - \frac{i}{k} (Y_{t+k} - Y_t) \right]$$

olmaktadır.  $R(t, k)$  'ya düzeltilmiş aralık (adjusted range) denir.  $R(t, k)$  aşağıdaki gibi standartlaştırılmıştır:

$$S(t, k) = \sqrt{k^{-1} \sum_{i=t+1}^{t+k} (X_i - \bar{X}_{t,k})^2}$$

Burada  $\bar{X}_{t,k} = k^{-1} \sum_{i=t+1}^{t+k} X_i$  dir. Son olarak  $R/S$  istatistiği,

$$R/S = \frac{R(t, k)}{S(t, k)} \quad (3.1)$$

şeklinde dir.  $R/S$  oranına yinelenmiş ölçekli düzeltilmiş aralık adı verilir. Hurst  $k$ 'nın birkaç değerine karşı  $R/S$ 'nin logaritmasının grafiğini çizmiştir. Bu grafikten  $k$ 'nın büyük değerleri için  $\log(R/S)$ 'nin  $1/2$ 'yi aşmış değerli bir eğim ile düz bir çizgi yöresinde yayıldığını fark etmiştir. Olasılık kuramında bunun anlamı yeterince büyük  $k$ 'lar için,

$$\log E[R/S] \approx a + H \log k, \quad H > 1/2 \quad (3.2)$$

olmasıdır. Kısa dönem bağımlı herhangi bir durağan süreç için  $R/S$  istatistiği asimtotik olarak  $k^{1/2}$  çarpanı ile bir sabite yaklaşır. Hurst, Nil Nehri verilerinde  $R/S$  istatistiği bazı  $H > 1/2$ 'ler için  $k^H$  çarpanı ile bir sabite yaklaştığını fark etmiştir. Bu literatürde Hurst etkisi olarak bilinir. Hurst (1951) ve Mandelbrot (1972) çalışmaları Hurst etkisinin kesirli normal akgürültü ile  $H \in (1/2, 1)$  olmak üzere modellenebileceğini göstermiştir.  $R/S$  istatistiği Lo (1991) tarafından geliştirilerek daha etkin bir hale getirilmiştir.

$R/S$  istatistiğine gösterim kolaylığı için  $Q$  denilsin. Uzun dönem bağımlı bir süreç için  $k$ 'nın değerine karşı  $\log Q$ 'nun grafiği  $H > 1/2$  eğimi ile bir düz çizgi etrafında rasgele olarak saçılmıştır.

Bu bilgi ışığında  $R/S$  yöntemi şöyle özetlenebilir:

- a) Mümkün tüm  $t$  ve  $k$  değerleri için  $Q$ 'lar hesaplanır.
- b)  $Y = a + b \log k$  modelinden  $b$  tahmin edilir.  $\hat{H} = \hat{b}$  'dır.

$d = H - \frac{1}{2}$  eşitliğinden  $d$  parametresinin tahmini  $H$  tahmininden elde edilir.

### 3.2. Logaritmik Periodogram Regresyonu Yöntemi

Uzun dönem bağımlılık parametresinin tahmini için farklı bir yöntem de Geweke ve Porter-Hudak (1983) tarafından geliştirilmiştir. Bu çalışmada sıfır yöresinde spektral yoğunluk fonksiyonu incelenmiştir. Sıfıra yakın frekanslar kullanılarak, frekansların logaritması üzerine logaritmik periodogramın regresyonu yapılmış ve eğimin tahmini uzun dönem bağımlılık parametresinin tahmini olarak alınmıştır. Geweke ve Porter-Hudak (1983) çalışmasından bazı önemli noktalar aşağıdaki gibi verilebilir.

$\{X_t\}$ 'nin  $T$  büyüklüğünde bir örnekleminin verildiğini varsayalım. Buna göre  $\lambda_{j,T} = \frac{2\pi j}{T}$  ,  $j = 0, \dots, T-1$

yazılabilir. Burada  $\lambda_{j,T}$  harmonik ordinatları ve  $I(\lambda_{j,T})$  bu ordinatlardaki periodogramı gösterebilir. Buna göre,

$$\ln\{I(\lambda_{j,T})\} = \ln\{\sigma^2 f_\varepsilon(0)/2\pi\} - d \ln\{4 \sin^2(\lambda_{j,T}/2)\} + \ln\{f_\varepsilon(\lambda_{j,T})/f_\varepsilon(0)\} + \ln\{I(\lambda_{j,T})/f(\lambda_{j,T})\}$$

olur. Logaritmik periodogramın yukarıda verilen eşitliğine doğrusal regresyon denklemi gözüyle bakılarak  $d$ 'nin tahmini elde edilebilir. Burada  $\ln\{I(\lambda_{j,T})\}$  bağımlı değişken ,  $\ln\{4 \sin^2(\lambda_{j,T})\}$  bağımsız değişken,  $-d$  eğim parametresidir. Öte yandan  $\ln\{f_\varepsilon(\lambda_{j,T})/f_\varepsilon(0)\}$  terimi harmonik frekanslar sıfıra yakın olduğundan ihmal edilebilir ve  $\ln\{\sigma^2 f_\varepsilon(0)/2\pi\}$  ve  $\ln\{I(\lambda_{j,T})/f(\lambda_{j,T})\}$ 'nin ortalamasına sabit terim gözüyle bakılabilir.

**Teorem.**  $\{X_t\}$  ,  $d < 0$  uzun dönem bağımlı süreç ve  $I(\lambda_{j,T})$  ,  $\lambda_{j,T} = \pi j/T$  harmonik frekanslarda  $\{X_t\}$ 'nin periodogramını gösterebilir.  $b_{1,T}$  ve  $\hat{V}ar(b_1)$  , (3.3) regresyon denkleminde  $\beta_1$ 'in ve  $\text{var}(b_1)$  en küçük kareler tahmini olsun.  $\lim_{T \rightarrow \infty} g(T) = \infty$  ve  $\lim_{T \rightarrow \infty} [g(T)/T] = 0$  özelliğine sahip bir  $g(T)$  fonksiyonu için,  $n = g(T)$  ,  $p \lim b_1 = -d$  ve  $\lim_{T \rightarrow \infty} (\ln T)^2 / g(T) = 0$  ise  $(b_1 + d)/(\hat{V}ar(b_1))^{1/2} \xrightarrow{D} N(0,1)$  olur.

$$\ln\{I(\lambda_{j,T})\} = \beta_0 + \beta_1 \ln\{4 \sin^2(\lambda_{j,T}/2)\} + \varepsilon_{j,T} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

Değiştirilmiş logaritmik priodogram regresyonu tahmin edicisi Künsch (1987)'de önerilmiştir. Bu tahmin edici daha sonra Robinson (1995)'de araştırılmış ve geliştirilmiştir. Literatürde Robinson tahmin edicisi olarak bilinen yöntem logaritmik periodogram regresyonu yönteminin değiştirilmiş halidir.

### 3.3. Whittle Yaklaşık En Çok Olabilirlik Yöntemi

Whittle(1951) de önerilen yaklaşık olabilirlik yöntemi Beran (1994)'de ARFIMA modelleri için uyarlanmıştır. Bu yöntem aşağıda özetlenmiştir.

$X_t$  durağan normal uzun dönem bağımlı akgürültü süreci olsun.  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  'lerin ortak yoğunluk fonksiyonu,

$$p(\mathbf{X}, \Psi) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma(\Psi)|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{X}^T (\Sigma^{-1}(\Psi)) \mathbf{X} \right\}$$

ve buna bağlı olarak tam logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$L_n(\mathbf{X}, \Psi) = \log p(\mathbf{X}, \Psi) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\Sigma(\Psi)| - \frac{1}{2} \mathbf{X}^T (\Sigma^{-1}(\Psi)) \mathbf{X} \quad (3.4)$$

şeklindedir. (3.4) olabilirlik fonksiyonunda  $\Psi$ 'ye bağlı iki terim vardır. Bunlar  $\log |\Sigma(\Psi)|$  ve  $\mathbf{X}^T (\Sigma^{-1}(\Psi)) \mathbf{X}$  ifadeleridir. Bu ifadelerin yerine aşağıda verilen yaklaşık ifadeler kullanarak Whittle'nin yaklaşık olabilirlik fonksiyonu elde edilir. Grenander ve Szegö (1958) de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\Sigma(\Psi)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda, \Psi) d\lambda \quad (3.5)$$

olduğunu göstermiştir.  $\mathbf{X}^T (\Sigma^{-1}(\Psi)) \mathbf{X}$  ifadesinde  $\Sigma^{-1}(\Psi)$ 'nin elemanları aşağıda verilen hesaplanması kolay matrisin elemanları ile yer değiştirebilir.

$$A(\Psi) = [\alpha(j-l)] \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.6)$$

Burada,

$$\alpha(j-l) = (2\pi)^{-2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda; \Psi)} e^{i(j-l)\lambda} d\lambda$$

olmaktadır.  $A(\Psi)$  matrisi asimtotik olarak  $\Sigma^{-1}(\Psi)$  matrisine denktir. (3.5) ve (3.6) 'yı (3.4) de yerine yazarak ve  $\Psi$ 'ye bağılı olmayan terimler ihmal edilerek Whittle'nin yaklaşık olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$L_W(\Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \log f(\lambda; \Psi) d\lambda + \frac{\mathbf{X}' A(\Psi) \mathbf{X}}{n} \quad (3.7)$$

### 3.4. Otokorelasyon Regresyonu Yöntemi

Bu yöntem Eğrioğlu ve Günay (2005)'de önerilmiştir. Yöntemde otokorelasyon fonksiyonunun mutlak değerinin logaritmasının gecikmelerin logaritması üzerine basit doğrusal regresyonunu gerçekleştirerek uzun dönem bağımlılık parametresi tahmin edilmektedir. Otokorelasyon regresyonunun logaritmik periodogram regresyonundan daha üstün olduğu durumlar Eğrioğlu ve Günay (2005) de belirtilmiştir. Otokorelasyon regresyonu logaritmik periodogram'ın zaman tanım aralığındaki bir seçeneği olarak düşünülebilir. Uzun dönem bağımlı ve normal dağılıma sahip akgürültü sürecinin kuramsal otokorelasyonu:

$$\rho(k) \approx \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} |k|^{2d-1}, \quad (k \rightarrow \infty)$$

şeklindedir. Bu yaklaşım yardımı ile

$$\log|\rho_k| \approx c(d) + (2d-1)\log|k|$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte  $\log|\rho_k| = y$ ,  $c(d) = \beta_0$ ,  $2d-1 = \beta_1$  ve  $\log|k| = x$  alınırsa aşağıdaki basit doğrusal regresyon denklemi elde edilir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Bu regresyonda elde edilen eğim parametresinin tahmininin aşağıdaki doğrusal kombinasyonu, uzun dönem bağımlılık parametresinin tahminini verecektir :

$$\hat{d} = \frac{\hat{\beta}_1 + 1}{2}$$

Burada problem, basit doğrusal regresyon yöntemi kullanılırken örneklem büyüklüğünün ne olacağıdır. Örneklem büyüklüğünün değişimine göre uzun dönem bağımlılık parametresinin tahmini de değişecektir. Ancak yapılabilecek

mümkün regresyonlardan durağanlık sınırlarına yakın bölgede elde edilen tahminlerin maksimumu, durağanlık sınırlarına uzak bölgede ise elde edilen tahminlerin minimumu ile yakın sonuçlar elde edilebilmektedir.

### 3.5 Tam En Çok Olabilirlik Yöntemi

ARFIMA(0,d,0) süreci için kuramsal otokovaryans ve otokorelasyon katsayısı formülleri (2.5) ve (2.6)'da verilmektedir.  $X_t$  zaman serisinin n birimlik gözlemi  $X_1, \dots, X_n$  olsun. (2.3)'de  $p=0, q=0, 0 < d < 1/2$  ve  $e_t \sim N(0,1)$  olduğu varsayalım.  $\Omega$ ,  $X_1, \dots, X_n$  lerin otokorelasyon matrisini gösterebilir. Buna göre  $X_1, \dots, X_n$  lerin olabilirlik fonksiyonu

$$L(d) = (2\pi)^{-n/2} |\Omega|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{X}' \Omega^{-1} \mathbf{X}\right\} \quad (3.8)$$

eşitliği ile verilir. Olabilirlik fonksiyonunun hesaplanmasında  $\Omega$  matrisinin Cholesky ayrıştırması kullanılır. Cholesky ayrıştırması  $\Omega$  matrisinin alt ve üst üçgen matrislerin çarpımı şeklinde yazılmasıdır. Bu ayrıştırma ile  $n \times n$  boyutlu  $\Omega$  matrisinin tersini hesaplamak yerine alt ya da üst üçgen matrislerin tersi hesaplanmaktadır. Bu durumda hesaplamalarda büyük kolaylık ve zaman tasarrufu sağlanır.

$$\Omega = \mathbf{L}\mathbf{L}'$$

(3.8) olabilirlik fonksiyonunda,

$$\mathbf{W} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{X}' \Omega^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{X}' (\mathbf{L}\mathbf{L}')^{-1} \mathbf{X} = (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{X})' (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{X}) = \mathbf{W}' \mathbf{W}$$

$$|\Omega|^{-1/2} = |\mathbf{L}\mathbf{L}'|^{-1/2} = |\mathbf{L}|^{-1}$$

eşitliklerini yerine yazarak aşağıdaki kolay hesaplanabilir olabilirlik fonksiyonu elde edilebilir.

$$P(d / \mathbf{X}) = \exp(2\pi)^{-n/2} |\mathbf{L}|^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{W}' \mathbf{W}\right\} \quad (3.9)$$

(3.9) olabilirlik fonksiyonu kesirli fark parametresine göre herhangi bir optimizasyon algoritması kullanılarak maksimize edilir.

### 3.6. Hosking'in İki Aşamalı Tahmin Yöntemi

Hosking (1981,1984) ARFIMA modelleri üzerine yapılan ilk ve önemli çalışmalardır. Hosking (1981)'de ARFIMA(0,d,0), ARFIMA(1,d,0) ve ARFIMA(0,d,1) sürecinin özellikleri ayrıntılı olarak verilmiştir. Ayrıca ARFIMA(p,d,q) için aşağıdaki yarı parametrik tahmin yöntemi verilmiştir.

$$\phi(B)\nabla^d X_t = \theta(B)e_t$$

$$u_t = \nabla^d X_t$$

Buradaki  $u_t$  bir ARMA(p,q) sürecidir.  $Y_t = \{\theta(B)\}^{-1}\phi(B)X_t$  olmak üzere  $Y_t$  bir ARFIMA(0,d,0) sürecidir. ARFIMA(p,d,q)'nun tahmini için şu adımlar uygulanır.

Adım 1.  $\nabla^d X_t = e_t$  modelinde d tahmin edilir .

Adım 2.  $u_t = \nabla^d X_t$  serisi elde edilir.

Adım 3. Box-Jenkins algoritması ile  $\phi$  ve  $\theta$  parametreleri tahmin edilir.

Adım 4.  $Y_t = \{\theta(B)\}^{-1}\phi(B)X_t$  serisi oluşturulur.

Adım 5.  $\nabla^d Y_t = e_t$  modelinde d tahmin edilir. Bu tahmin d'nin yeni tahmin değeridir.

Adım 6.  $d, \phi$  ve  $\theta$  parametrelerinin değerlerindeki yakınsama denetlenir. Yakınsama sağlandıysa durulur, sağlanmadıysa Adım 2 ye geri dönlür.

### 3.7. Sowell'in En Çok Olabilirlik Yöntemi

Sowell (1992), (3.4)'de verilen tam olabilirlik fonksiyonunun optimize edildiği bir en çok olabilirlik yöntemi önermiştir. (3.4) de verilen tam olabilirlik fonksiyonunun hesaplanabilmesi için  $\Sigma$  otokovaryans matrisinin tersinin ve determinantının hesaplanması gerekmektedir. Sowell (1992) otokovaryansların hesaplanması için  $Z_t$ 'nin spektral yoğunluğunun ters Fourier dönüşümünden yararlanılmasını önermiştir.

$$\gamma(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_z(\lambda) e^{i\lambda s} d\lambda \quad (3.10)$$

Sowell (1992), (3.10)'dan otokovaryansların hesaplanması için aşağıda verilen fomüller ve algoritmanın kullanılabileceğini göstermiştir.

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^p (1 - \rho_j x) \quad (3.11)$$

$$\xi_j = \left[ \rho_j \prod_{j=1}^p (1 - \rho_i \rho_j) \prod_{m \neq j} (\rho_j - \rho_m) \right]^{-1} \quad (3.12)$$

$$\psi(l) = \sum_{s=\max[0,l]}^{\min[q,q-l]} \theta_s \theta_{s-l} \quad (3.13)$$

$$\gamma(s) = \sigma^2 \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \psi(l) \xi_j C(d, p+l-s, \rho_j) \quad (3.14)$$

$$C(d, h, p) = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(d+h)}{\Gamma(1-d+h)\Gamma(1-d)\Gamma(d)} \left[ \rho^{2p} F(d+h, 1; 1-d+h, \rho) + F(d-h, 1; 1-d-h, \rho) - 1 \right] \quad (3.15)$$

Burada  $F(a, b; c; x)$  bir hipergeometrik fonksiyondur ve bu fonksiyon bilgisayarda kolay ve doğru biçimde hesaplanabilmektedir.

$$F(a, b; c; x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)} x^n \quad (3.16)$$

Logaritmik olabilirlik fonksiyonunun değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

- a)** (3.11)'den otoregresif polinom çarpanları belirlenir.
- b)** (3.12)'den  $\xi_j$  'ler hesaplanır.
- c)** (3.15)'den farklı  $C(d, h, p)$  değerleri hesaplanır.
- d)** (3.14)'den kovaryans matrisinin elemanları hesaplanır.
- e)** Kovaryans matrisi oluşturulur. Kovaryans matrisinin tersinin determinantı ve Cholesky ayrıştırması hesaplanır.
- f)** Logaritmik olabilirlik fonksiyonunun değeri hesaplanır.

Sowell (1992) logaritmik olabilirlik fonksiyonunun global konkav olmadığını bu nedenle maksimizasyonun başlangıç değerlerine bağlı olacağını belirtmiştir. Başlangıç değerleri önceki tahmin teknikleri ile elde edilebilir.

### 3.8. Koşullu Kareler Toplamı Yöntemi

Chung ve Baillie (1993) aşağıda verilen koşullu kareler toplamının minimizasyonuna dayalı tahmin yöntemi önermiştir.

$$S = (1/2) \log(\sigma_e^2) + (1/2\sigma_e^2) \sum_{t=1}^n \left\{ \phi(B) \theta^{-1}(B) (1-B)^d (X_t - \mu) \right\}^2 \quad (3.17)$$

Bu yöntem koşullu kareler toplamı (Conditional sum of squares, CSS) yöntemi olarak bilinmektedir. Chung ve Baillie (1993)'de CSS yönteminin Sowell'ın yöntemi (Sowell, 1992) ile benzer sonuçlar verdiği belirtilmiştir. Zaman serisinin ortalamasının bilindiği durumda ise tahmin edicilerin daha az yanlı olduğu vurgulanmıştır. CSS yöntemi otokovaryansların hesaplanmasını gerektirmediğinden, Sowell'ın yöntemine göre daha kolay uygulanır. CSS yönteminde ilk olarak  $(X_t - \mu)$  zaman serisine kesirli fark alma işlemi uygulanır. Bu durum CSS tahmin edicisi yönteminin Hosking (1981)'de önerilen iki aşamalı yöntemle benzer olduğunu göstermektedir. Beran (1994)'de önerilen sonsuz otoregresif yapıya dayalı tahmin yöntemi de CSS yöntemine benzer bir yöntemdir.

### 3.9. Haslett ve Raftery Yöntemi

Haslett ve Raftery (1989)'da önerilen Haslett-Raftery (HR) yöntemi çok değişkenli ve tek değişkenli ARFIMA modelinde yaklaşık olabilirliğe dayalı tahmin edicilerin elde edilmesini sağlamaktadır. Yöntemin tek değişkenli durum için nasıl uygulandığı aşağıda özetlenmiştir. Yöntemde  $ARFIMA(p, d, q)$  modelinde  $0 < d < 1/2$  durumu incelenmektedir.  $\phi_{ij}$   $ARFIMA(0, d, 0)$  modelindeki kısmi doğrusal regresyon katsayıları olsun.

$$u_t = \phi(B) \theta^{-1}(B) \sum_{j=1}^{t-1} \phi_{ij} X_{t-j}$$

$$w_t = 1 - \phi(1) \theta^{-1}(1) \sum_{j=1}^{t-1} \phi_{ij}$$

$$v_t = \sigma_e^2 \prod_{j=1}^{t-1} (1 - \phi_{jj}^2)$$

Bu eşitlikler yardımıyla,  $\mu$  ve  $\sigma_e^2$  'nin tahmin edicileri aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^N w_t (X_t - u_t) v_t^{-1/2}}{\sum_{t=1}^N w_t^2}$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - u_t - w_t \hat{\mu})^2 v_t^{-1}$$

$\hat{\mu}$  ve  $\hat{\sigma}_e^2$  tahmin edicileri logaritmik olabilirlik fonksiyonunda yerine konulursa

$$l(d, \phi, \theta) = \text{Sabit} - \frac{1}{2} N \log \hat{\sigma}_e^2 - \frac{1}{2} N \quad (3.18)$$

elde edilir. Bu eşitlik optimize edilerek parametre tahminleri elde edilir.

### 3.10. ARFIMA Modelleri İçin Bayesci Tahmin Yöntemleri

ARFIMA modellerinin Bayes analizi konusunda Koop (1991) ve Carlin vd. (1985), Koop vd. (1997), Jeffrey ve Nalini (1996,1998) ve Hsu ve Jay (2003) çalışmaları yapılmıştır. Koop (1991) ve Carlin vd. (1985)'de çok basit modeller kullanılmıştır. İkinci makalede koşullu Bayes analizi üzerinde durulmuştur. Koop vd. (1997)'de ARFIMA modellerinin Bayes analizi verilmiştir. Alternatif ARMA modellerine karşı ARFIMA'yı test etmek için Bayes yöntemlerinin nasıl kullanılacağı gösterilmiştir. Jeffreys ve Nalini (1996,1998)'de ARFIMA süreci için MCMC yöntemleri kullanılarak Bayes çıkarımı formüle edilmiştir. Çalışmada kullanılan değiştirilmiş Gibbs örnekleme algoritmasında hesaplama kolaylıkları sağlayacak, parametrelerin ortak sonsal dağılımının bir formu türetilmiştir. Jeffreys ve Nalini (1996,1998)'de örneklem temelli yöntemler kullanarak Bayes analizini uygulamıştır. Analizde gözlemlenemeyen değişkenler parametre olarak alınmış ve tahmin edilmiştir. Hsu ve Jay (2003)'de Jeffreys ve Nalini (1996,1998)'de verilen yöntemin zor ve çok sayıda hesaplama gerektirdiğini savunmuştur. Çalışmalarında ARFIMA süreçlerini ARMA modelleri ile yaklaştırarak hesaplamaları kolaylaştırmıştır.

#### 4. MCMC YÖNTEMLERİ, BAYESÇİ MODEL SEÇİMİ VE KLASİK MODEL SEÇİM ÖLÇÜTLERİ

MCMC yöntemlerinin geliştirilmesi ile birlikte literatürde Bayesci çalışmalarda daha sık yer almaktadır. MCMC yöntemleri karmaşık integrasyon teknikleri yerine koşullu dağılımlardan örneklem çekerek parametre tahminlerini elde etmektedir. Aşağıda en çok kullanılan MCMC yöntemlerinden olan Gibbs örnekleme ve Metropolis-Hastings algoritması hakkında kısa bilgi verilmiştir. Son yıllarda çok yoğun biçimde kullanılmaya başlayan bir Bayesci model seçim yöntemi olan RJMCMC yöntemi tanıtılmıştır. Son olarak klasik model seçim ölçütlerinden söz edilmiştir.

##### 4.1. Gibbs Örnekleme

MCMC yöntemlerinden bir tanesi Gibbs örneklemesidir. Yöntemin dayanak noktası bir Markov zinciri oluşturmaktır. Gibbs örnekleme normalleştirilememiş ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarından örneklem elde etmek için kullanılan bir araçtır (Gelfand, 2000). Gibbs örnekleme ilk olarak resimlerin restorasyonu için bir araç olarak Geman ve Geman (1984) tarafından önerilmiştir. Daha sonra Gelfand ve Smith (1990) da Gibbs örnekleme istatistiksel modeller üzerinde uygulanması verilmiştir. Gelfand (2000)'de Gibbs örnekleme mantığını aşağıdaki gibi vermiştir.

$\theta$  ,  $r$  bloktan ibarettir ve  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  dır.  $\theta$ 'nin mevcut durumu  $\theta^{(t)} = (\theta_1^{(t)}, \dots, \theta_r^{(t)})$  ise  $\theta^{(t+1)}$ 'e geçiş için şu yol izlenir:

$h(\theta_1 / \theta_2^{(t)}, \dots, \theta_r^{(t)})$  'den  $\theta_1^{(t+1)}$  örnekleme çekilir,

$h(\theta_2 / \theta_1^{(t+1)}, \theta_3^{(t)}, \dots, \theta_r^{(t)})$  'den  $\theta_2^{(t+1)}$  örnekleme çekilir,...

$h(\theta_r / \theta_1^{(t+1)}, \theta_2^{(t+1)}, \dots, \theta_{r-1}^{(t+1)})$  'den  $\theta_r^{(t+1)}$  örnekleme çekilir.

Görüldüğü gibi Gibbs örnekleme kullanabilmek için yukarıda verilen tüm koşullu dağılımlar bilinmelidir. Koşullu dağılımların bilinmediği durumlarda kullanılabilecek seçenек bir yöntem Metropolis-Hastings algoritmasıdır.

## 4.2. Metropolis-Hastings Algoritması

Metropolis vd. (1953)'de önerilen algoritma Hastings (1970)'de genelleştirilerek öneri dağılımlarına dayalı bir Markov zincirinin oluşturulduğu yeni bir algoritmadır. Literatürde bu algoritma Metropolis-Hastings (MH) algoritması olarak bilinmektedir. Bu algoritmayı aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür.

$\theta$ , parametre vektörünü ve  $p(\theta)$  parametrenin koşullu marjinal yoğunluk fonksiyonunu gösterebilir.  $\theta(0)$ ,  $\theta$  parametre vektörü için başlangıç değeri olsun. MH algoritmasında (n). adımdan (n+1). adıma geçişte uygun bir öneri dağılımından örnekleme yapılmaktadır. Bu öneri dağılımı  $q(\theta'(n+1)/\theta(n))$  şeklinde gösterilsin. MH algoritmasında öneri dağılımından elde edilen her örneklem için bir kabul-red olasılığı hesaplanmaktadır. (n). adımdan (n+1). adıma geçişte kabul olasılığı aşağıdaki formül ile hesaplanmaktadır.

$$\alpha(\theta(n) \rightarrow \theta(n+1)) = \min\left(1, \frac{P(\theta'(n+1))}{P(\theta(n))} \frac{q(\theta(n)/\theta'(n+1))}{q(\theta'(n+1)/\theta(n))}\right)$$

Markov zinciri  $\alpha(\theta(n) \rightarrow \theta(n+1))$  olasılık ile önerilen durumu kabul etmektedir. Böylece  $\theta(n+1) = \theta'(n+1)$  olmaktadır. Diğer durumda ise  $\theta(n+1) = \theta(n)$  olarak alınmaktadır.

MH algoritmasında öneri dağılımının belirlenmesi önemlidir. Öneri dağılımı yukarıda belirtilenden farklı olarak  $q(\theta(n)/\theta'(n+1)) = q(\theta(n))$  formunda da alınabilir. Bu durum Tierney (1994)'de tartışılmıştır. Öneri dağılımını bu şekilde seçildiği MH algoritmasına bağımsız zincir MH algoritması denmektedir. Uygun bir öneri dağılımının bulunmasının zor olduğu durumlarda sonsal dağılımın olabilirlik fonksiyonuna yaklaşık olarak eşit olduğu düşünülerek öneri dağılımı  $N(\hat{\theta}_{ML}, \text{var}(\hat{\theta}_{ML}))$  şeklinde seçilebilir (Koop, 2003).

## 4.3. Bayesci Model Seçimi

Bayesci model seçimi yöntemleri son yıllarda yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Bayesci model seçimi sonsal model olasılıklarının hesaplanmasına dayanmaktadır. Bayesci model seçimi için aşağıdaki tanımlamalar kullanılmaktadır.  $y$  gözlemlenmiş verisi  $j \in M$  modelinden gelmiş

olsun. Burada  $M$  modellerin kümesidir.  $j$  modeline karşılık bilinmeyen parametre vektörü  $\theta_j$  dir ve boyutu  $n_j$  dir. Önsel model olasılığı ise  $\pi_j = p(M = j)$  dir ve  $\sum_{j \in M} \pi_j = 1$  olmaktadır.  $\Theta_j$  ,  $\theta_j$  için tüm değerlerin kümesi olsun.  $\theta_j \in \Theta_j \subset R^{n_j}$  ve  $\theta$  tüm modele özel  $\theta_j$ 'lerin kümesi olsun. Burada ilgilenilen, değişik modeller için sonsal olasılıkları elde etmektir. Bu olasılık  $p(M = j / \mathbf{y})$  dir. İki model arasındaki seçim Bayes faktörüne dayalıdır.

$$B_{21} = \frac{p(M = 2 / \mathbf{y}) / p(M = 1 / \mathbf{y})}{p(M = 2) / p(M = 1)} = \frac{p(M = 2 / \mathbf{y})}{p(M = 1 / \mathbf{y})}$$

Bu oran model 2'nin tercihi için sonsal orandır. Bayes faktörü model 2'nin seçilmesi için bir ağırlık olarak görülebilir.

Marjinal olabilirlik  $\hat{p}(\mathbf{y} / M = j)$  yi her bir modelde tahmin etmek için birkaç yöntem önerilmiştir. Bu yöntemler olağan Monte Carlo yöntemlerine dayalıdır. Daha farklı bir yaklaşım ise bir parametre olarak model göstergesi  $M$ 'i örneklem sırasına dahil etmektir. Bu şekilde çalışan yöntemler Carlin ve Chip (1995), Dellasportas vd. (2002) ve Green (1995)'de önerilmiştir.

#### 4.3.1. Carlin ve Chip Yöntemi

Carlin ve Chip (1995) tüm alt modellerden örnekleme yaparak çalışan bir MCMC yöntemi önermişlerdir. Yöntem tüm modellerden hesaplama gerektirdiğinden, özellikle aday model sayısı çok olduğunda kullanışlı değildir.

Carlin ve Chib (1995) yönteminde  $j$  modeline karşılık gelen olabilirlik fonksiyonu  $f(\mathbf{y} / \theta_j, M = j)$  ve önsel dağılımı  $P(\theta_j / M = j)$  dir. Örnekleme  $M \times \prod_{j \in M} \Theta_j$  çarpım uzayı üzerinden yapılır. Koşullu bağımsızlık varsayımı altında,

$$P(\mathbf{y} / M = j) = \int f(\mathbf{y} / \theta, M = j) p(\theta / M = j) d\theta = \int f(\mathbf{y} / \theta_j, M = j) p(\theta_j / M = j) d\theta_j$$

Gibbs örnekleme çarpım uzayı üzerinden tam koşullu dağılımlar ile tanımlanmıştır.

$$p(\boldsymbol{\theta}_j / \boldsymbol{\theta}_{j' \neq j}, M, \mathbf{y}) \propto \begin{cases} f(\mathbf{y} / \boldsymbol{\theta}_j, M = j) p(\boldsymbol{\theta}_j / M = j) & , M = j \\ p(\boldsymbol{\theta}_j / M \neq j) & , M \neq j \end{cases}$$

ve

$$p(M = j / \boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y} / \boldsymbol{\theta}_j, M = j) \prod_{j' \in M} p(\boldsymbol{\theta}_{j'} / M = j) \pi_j}{\sum_{k \in M} (f(\mathbf{y} / \boldsymbol{\theta}_k, M = k) \prod_{j' \in M} p(\boldsymbol{\theta}_{j'} / M = k) \pi_k)}$$

M kesiklidir ve mümkün sonlu değerleri alır. Düzenli koşullar altında Gibbs örnekleme algoritması doğru ortak sonsal dağılımdan örneklemeler üretecektir.  $j$  modelinin sonsal dağılımı aşağıdaki eşitlikle tahmin edilir:

$$\hat{p}(M = j / \mathbf{y}) = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G I(M^{(g)} = j)$$

Bu olasılık dağılımı Bayes faktörünü hesaplamak için kullanılabilir:

$$B_{jj'} = \frac{\hat{P}(M = j / \mathbf{y}) / \hat{P}(M = j' / \mathbf{y})}{P(M = j) / P(M = j')}.$$

#### 4.3.2. Metropolisleştirilmiş Carlin ve Chip Yöntemi

Carlin ve Chip'in yöntemi Dellasportas vd. (2002) tarafından geliştirilerek Metropolisleştirilmiş Carlin ve Chip yöntemi önerilmiştir. Bu yöntemde model seçim adımı  $j$  modelinden  $j'$  modeline hareket için bir öneriye dayanır. Yöntem aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Geçerli durum  $(j, \boldsymbol{\theta}_j)$  olsun. Burada  $\boldsymbol{\theta}_j$ ,  $n_j$  boyutludur.
2.  $h(j, j')$  olasılığı ile yeni bir  $j'$  modeli önerilir.
3.  $p(\boldsymbol{\theta}'_j / M \neq j')$  sahte önsel dağılımından  $\boldsymbol{\theta}'_j$  üretilir.
4. Aşağıda verilen olasılıkla hareketi kabul veya red edilir.

$$\alpha_{j \rightarrow j'} = \min \left\{ 1, \frac{f(\mathbf{y} / \boldsymbol{\theta}'_j, M = j') p(\boldsymbol{\theta}'_j / M = j') p(\boldsymbol{\theta}_j / M = j') \pi_{j'} h(j', j)}{f(\mathbf{y} / \boldsymbol{\theta}_j, M = j) p(\boldsymbol{\theta}_j / M = j) p(\boldsymbol{\theta}'_j / M = j) \pi_j h(j, j')} \right\}$$

Sonuç olarak Metropolisleştirilmiş Carlin ve Chip yönteminin  $j'$  öneri modeli için sahte önsel dağılımdan elde edilen örnekleme ihtiyacı vardır. Burada

$j' = j$  olduğunda hareket Gibbs algoritmasıdır. Sonsal dağılımdan elde edilen olasılıklar ve Bayes faktörleri Carlin ve Chip yöntemindeki gibi hesaplanır.

#### 4.3.3. RJMCMC Yöntemi

Modeller arasında geçiş yapabilen bir MCMC yöntemi Green (1995) tarafından önerilmiştir. Bu yöntem RJMCMC yöntemi olarak isimlendirilmiştir. RJMCMC yöntemi üzerine yapılan teorik gelişmeler ile ilgili temel literatür Godsill (2001), Fahinah vd. (2004), Brooks vd. (2003) ve Andrieu vd. (2001) şeklinde verilebilir.

Bugüne kadar ARFIMA modellerine RJMCMC yönteminin uygulandığı bir çalışma mevcut değildir. Ancak son yıllarda otoregresif hareketli ortalamalar (ARMA) modelleri için RJMCMC yönteminin uygulandığı çalışmalar vardır. Troughton ve Godsill (1997), Troughton (1999), Brooks ve Ehlers (2002), Vermaak vd. (2004) çalışmaları otoregresif modellere RJMCMC yöntemlerinin uygulandığı çalışmalardır. Barbieri ve O'Hagan (1996), Ehlers ve Brooks (2004) çalışmaları ise ARMA modellerinde RJMCMC yönteminin uygulandığı çalışmalardır.

RJMCMC yöntemi MH algoritmasının daha genel biçimidir. RJMCMC algoritmasında farklı parametre uzayları arasında geçiş yapabilen bir Markov zinciri oluşturulmaktadır. Bu nedenle algoritmada, MH algoritmasından farklı olarak model seçimi de yapılmaktadır.

Karşılaştırılacak modeller  $M = \{M_1, M_2, \dots\}$  model kümesi ile gösterilsin.  $M_k$  modeli için sonsal dağılım aşağıdaki gibi gösterilir.

$$p(\boldsymbol{\theta}_k / \mathbf{y}, k) \propto p(\mathbf{y} / \boldsymbol{\theta}_k, k) p(\boldsymbol{\theta}_k / k) \quad (4.1)$$

Burada  $p(\mathbf{y} / \boldsymbol{\theta}_k, k)$  ve  $p(\boldsymbol{\theta}_k / k)$  sırasıyla  $M_k$  modeli için olabilirlik fonksiyonunu ve önsel dağılımı göstermektedir. Ayrıca,

$$p(\boldsymbol{\theta}_k, k / \mathbf{y}) \propto p(k) p(\boldsymbol{\theta}_k / k, \mathbf{y}) \quad (4.2)$$

bileşik sonsal dağılım olmaktadır. RJMCMC algoritması sistematik bir formda aşağıdaki gibi verilebilir. Markov zincirinin geçerli durumu  $(k, \theta_k)$  olsun.

### Algoritma 1. Genel RJMCMC Algoritması

Adım 1.  $J(k \rightarrow k')$  olasılığı ile  $M'_k$  modeline geçişi önerilir.

Adım 2.  $q(\mathbf{u}/\boldsymbol{\theta}_k, k, k')$  öneri yoğunluğundan  $u$  örnekleme çekilir.

Adım 3.  $(\boldsymbol{\theta}'_k, \mathbf{u}') = g_{k,k'}(\boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{u})$  yapılır. Burada  $g_{k,k'}(\boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{u})$  fonksiyonu  $(\boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{u})$  ve  $(\boldsymbol{\theta}'_k, \mathbf{u}')$  arasındaki boyut eşleme (bijection) fonksiyonudur.

Adım 4. Önerilen modelin kabul olasılığı,

$$\alpha_{k \rightarrow k'} = \min \left\{ 1, \frac{P(\mathbf{y}/k', \boldsymbol{\theta}'_k) P(\boldsymbol{\theta}'_k) P(k') J(k' \rightarrow k) q(\mathbf{u}'/\boldsymbol{\theta}'_k, k', k)}{P(\mathbf{y}/k, \boldsymbol{\theta}_k) P(\boldsymbol{\theta}_k) P(k) J(k \rightarrow k') q(\mathbf{u}/\boldsymbol{\theta}_k, k, k')} \times \left| \frac{\partial g_{k,k'}(\boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{u})}{\partial(\boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{u})} \right| \right\} \quad (4.3)$$

formülü ile hesaplanır.

Adım 5. 1-4 adımlarını model göstergesi için  $\{k_l, l = 1, 2, \dots, L\}$  örneklemini elde edene kadar tekrarlanır.

Bu algoritmada  $J(k \rightarrow k')$  model öneri dağılımı ve  $q(\mathbf{u}/\boldsymbol{\theta}_k, k, k')$  öneri dağılımları dikkatli seçilmelidir. Algoritma sonucunda sonsal model olasılıkları aşağıdaki eşitlik ile elde edilir.

$$\hat{P}(k/y) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L 1_k(k_l) \quad (4.4)$$

Burada,  $k = k_l$  ise  $1_k(k_l) = 1$  dir. Diğer durumlarda ise  $1_k(k_l) = 0$  olacaktır.

### 4.4. MCMC Yöntemlerinde Yakınsama

Markov Zinciri Monte Carlo yöntemlerinde zincirin yakınsamaması önemli bir problemdir. Kuramsal olarak koşullu dağılımlardan çekimlerin sayısı sonsuza gittiğinde zincir yakınsayacaktır. Pratikte ise oluşturulan Markov zincirlerinin yakınsaması bazı istatistikler ve hipotez testleri ile denetlenir. Zincirin otokorelasyonları yakınsama teşhisinde kullanılan en bilinen istatistiklerden biridir. Yakınsama problemi bulunmayan zincirler için otokorelasyon katsayılarının küçük olması beklenir. Raftery ve Lewis (1992)'de önerilen ölçütler ve Geweke (1992)'de

önerilen yakınsama testleri en bilinen yakınsama denetim araçlarıdır. Geweke (1992) örneklemin baştan %10 ile sondan %50'sinin ortalamasının karşılaştırılmasını önermiştir. Eğer ortalamalar eşit ise örnekleme yakınsamama sorunu olmadığı kabul edilir.

#### 4.5. Klasik Model Seçim Ölçütleri

Zaman serileri analizinde belirleme sorunu genellikle klasik model seçim ölçütlerinden yararlanılarak çözümlenmektedir. Literatürde değişik model seçim ölçütleri önerilmiştir. Bu ölçütlerden en bilinenleri Akaike bilgi ölçütü (Akaike information criterion, AIC), Bayesci bilgi ölçütü (Bayesian information criterion, BIC) ve Hannan-Quinn (HQC) ölçütüdür.

AIC ölçütü Akaike (1973) tarafından önerilmiştir.  $p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})$  olabilirlik fonksiyonunu,  $k$  ise parametre sayısını gösterebilir. Bu durumda AIC ölçütü

$$AIC = 2\ln(p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})) - 2k \quad (4.5)$$

formülü ile hesaplanır. BIC ölçütü Akaike (1979) da önerilmiştir ve  $N$  veri sayısını göstermek üzere,

$$BIC = 2\ln(p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})) - p \ln(N) \quad (4.6)$$

formülü ile hesaplanır. HQC ölçütü ise Hannan ve Quinn (1979) ve Hannan (1980) tarafından önerilmiştir. Bu ölçüt  $c \geq 2$  koşulu ile bir sabit olmak üzere aşağıdaki formül ile hesaplanmaktadır.

$$HQC = 2\ln(p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})) - pc \ln(\ln(N)) \quad (4.7)$$

Klasik model seçim ölçütleri ARFIMA modellerinde de belirleme için kullanılmaktadır. Ancak bu ölçütler ile model seçimi yapmak için tüm aday modellerin parametreleri tahmin edilmelidir. Bu nedenle aday model sayısının çok olduğu durumlarda klasik model seçim ölçütlerinin kullanılması zordur. ARFIMA modellerinde klasik model seçim ölçütlerinin performansı Smith vd. (1997) çalışmasında ayrıntılı bir benzetim çalışması ile incelenmiştir.

## 5. İKİ AŞAMALI BAYESÇİ TAHMİN YÖNTEMİ

Bu bölümde ARFIMA( $p, d, q$ ) modelinde parametre tahmini ve model seçimi için yeni bir Bayesci tahmin yöntemi önerildi. Yöntemde Hosking (1981)'in yaklaşımının üçüncü adımında standart Box-Jenkins (Box ve Jenkins, 1976) yaklaşımı yerine Troughton (1999)'da otoregresif süreçler için önerilen yöntemin ARMA modellerine genelleştirilmesi ile oluşturulan RJMCMC yöntemi kullanılmaktadır. Önerilen yöntemin birinci adımında ise ARFIMA(0,d,0) modelinde kesirli fark parametresinin tahmin edilmesine imkan veren yöntemler kullanılabilir. Burada Bölüm 3.5'de verilen tam en çok olabilirlik tahmini kullanılmıştır.

Troughton (1999)'da önerilen RJMCMC yönteminin ARMA modellerine nasıl genelleştirildiği aşağıda verilmiştir. Otoregresif modeller için Bölüm 4'de genel olarak algoritması verilen RJMCMC yöntemi ile çözümleme yapabilen üç algoritma Troughton (1999) tarafından önerilmiştir. Bu algoritmalarından birincisi doğum ve ölüm hareketine, ikincisi parametrelerin tam koşullu dağılımlarına ve üçüncüsü otoregresif modellerin iç-içe model yapısını göz ardı eden tam parametre vektörü dağılımlarına dayalıdır. Üçüncü yaklaşım iç-içe model yapısını göz ardı ettiğinden ilk iki yaklaşıma göre bir üstünlüğü yoktur. Ancak ilk iki yaklaşım iç-içe modeller için kullanılabileceğinden ARMA modellerine uyarlanmasında zorluklar ortaya çıkar. Bu nedenle ARMA modellerinde RJMCMC ile model derecesi ve parametre tahminlerini elde etmeye olanak tanıyan bir yöntem tam parametre vektörü dağılımlarına dayalı olarak işleyen Troughton'un üçüncü algoritmasının genelleştirilmesi ile elde edilebilir. Aşağıda Troughton (1999)'da otoregresif modeller için önerilen yaklaşımın beş ARMA modeli için nasıl uygulanacağı verilmiştir.

ARMA modellerinin özel durumları olan ARMA(1,0), ARMA(2,0), ARMA(0,1), ARMA(0,2) ve ARMA(1,1) modelleri gözönüne alınsın. Aşağıda verilen algorithmada bu beş model için RJMCMC algoritması uygulanmaktadır. İncelenecek model sayısı istenilen sayıda artırılabilir. ARMA modelinin bu özel durumları için parametre vektörü  $\Psi = (\phi_1, \theta_1, \phi_2, \theta_2)$  şeklindedir. Modeller aşağıdaki indisler ile gösterilmektedir.

$k = 1$  ise model ARMA(1,0) modelidir ve kısmi parametre vektörü  $\Psi^{(1)} = (\phi_1)$  dir.

$k = 2$  ise model ARMA(2,0) modelidir ve kısmi parametre vektörü  $\Psi^{(2)} = (\phi_1, \phi_2)$  dir.

$k = 3$  ise model ARMA(0,1) modelidir ve kısmi parametre vektörü  $\Psi^{(3)} = (\theta_1)$  dir.

$k = 4$  ise model ARMA(0,2) modelidir ve kısmi parametre vektörü  $\Psi^{(4)} = (\theta_1, \theta_2)$  dir.

$k = 5$  ise model ARMA(1,1) modelidir ve kısmi parametre vektörü  $\Psi^{(5)} = (\phi_1, \theta_1)$  dir.

Model derecesi için önsel dağılım olarak Troughton(1999)'daki gibi kesikli Uniform dağılım alınmıştır.  $\Psi$  parametresinin önsel dağılımı normal dağılım alınır.  $\sigma_e^2$  için ters Gamma dağılımı önsel dağılım olarak seçilir. Sonuç olarak önsel dağılımlar aşağıdaki gibidir.

$$p(k) = \begin{cases} \frac{1}{5} & , k = 1,2,3,4,5 \\ 0 & , d.d. \end{cases}$$

$$p(\Psi^{(k)} / \sigma_a^2) = N(\mu_{pa^{(k)}}, \mathbf{C}_{pa^{(k)}})$$

$$p(\sigma_e^2) = IG(\alpha_e, \beta_e)$$

Burada,  $\mu_{pa^{(k)}} = 0$  ve  $\mathbf{C}_{pa^{(k)}} = \sigma_a^2 I_k$  olarak alınmıştır. Olabilirlik fonksiyonu olarak aşağıda verilen yaklaşık olabilirlik fonksiyonu kullanılır.

$$p(\mathbf{X} / k, \sigma_e^2, \sigma_a^2, \Psi^{(k)}) = (2\pi\sigma_e^2)^{-(n-p-q-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{t=p+q+1}^n e_t^2\right)$$

Troughton (1999)'da önerilen üçüncü yaklaşım için, (4.3)'de verilen kabul olasılığı aşağıdaki gibi ARMA modeline uyarlanır.

$$\alpha(k \rightarrow k' / \mathbf{X}, \sigma_a^2, \sigma_e^2) = \min \left( 1, \frac{\sqrt{\frac{|\mathbf{C}_{ca^{(k')}}| |\mathbf{C}_{pa^{(k)}}|}{|\mathbf{C}_{ca^{(k)}}| |\mathbf{C}_{pa^{(k')}}|}} \exp\left\{\frac{1}{2} \mu_{ca^{(k')}}^T \mathbf{C}_{ca^{(k')}}^{-1} \mu_{ca^{(k')}}\right\}}{\sqrt{\frac{|\mathbf{C}_{ca^{(k)}}| |\mathbf{C}_{pa^{(k')}}|}{|\mathbf{C}_{ca^{(k')}}| |\mathbf{C}_{pa^{(k)}}|}} \exp\left\{\frac{1}{2} \mu_{ca^{(k)}}^T \mathbf{C}_{ca^{(k)}}^{-1} \mu_{ca^{(k)}}\right\}}} \right) \quad (5.1)$$

Burada ,

$$\mathbf{C}_{ca^{(k)}} = \left( \frac{1}{\sigma_e^2} \mathbf{X}^{(k)T} \mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{C}_{pa^{(k)}}^{-1} \right)^{-1}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{ca^{(k)}} = \frac{1}{\sigma_e^2} \mathbf{C}_{ca^{(k)}} \mathbf{X}^{(k)T} \mathbf{X}_{(1)}$$

şeklindedir.  $\mathbf{X}^{(k)}$  ise modelin derecesine göre oluşturulan veri matrisidir. Örneğin ARMA(2,2) modeli için veri matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{X}^{(5)} = \begin{bmatrix} X_2 & X_1 & e_2 & e_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n-1} & X_{n-2} & e_{n-1} & e_{n-2} \end{bmatrix}$$

(5.1)'de verilen kabul olasılığına göre modeller arası geçiş yapılır. Modellerin önerilmesi için kullanılan öneri dağılımı Troughton (1999)'da kesikli Laplace dağılımıdır. Bu dağılım modeller arası büyük sıçramaları engellemek içindir. Troughton (1999)'da aday model sayısı çok sayıda olduğundan böyle bir öneri dağılımına ihtiyaç duyulmaktadır. Burada ise model sayısı az olduğundan kesikli Uniform dağılımdan öneri yapılmaktadır. Ancak her iki dağılım da simetrik olduğundan Troughton (1999)'daki formülasyon aynen geçerlidir.  $\boldsymbol{\Psi}^{(k)}$  ve  $\sigma_e^2$  parametreleri için ise aşağıdaki dağılımlardan yararlanarak örneklem çekilir. Bu dağılımlar Troughton (1999) tarafından belirlenmiştir.

$$\boldsymbol{\Psi}^{(k)} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{ca^{(k)}}, \mathbf{C}_{ca^{(k)}}) \quad (5.2)$$

$$\sigma_e^2 \sim IG(\alpha_{se}, \beta_{se}), \alpha_{se} = \alpha_e + \frac{1}{2}n_k, \beta_{se} = \beta_e + \frac{1}{2}e^T e \quad (5.3)$$

Buradaki  $n_k$   $k=2,4$  ve 5 modelinde  $n-2$ ,  $k=1$  ve 3 modellerinde ise  $n-1$  dir. Bu durumda ARMA modelleri için önerilen yeni algoritma aşağıdaki gibi özetlenebilir. Bu algoritmaya benzer bir algoritma Ehlers ve Brooks (2004) de önerilmiştir. Ehlers ve Brooks (2004)'de modeller arası geçişler için çeşitli kısıtlamalar vardır.

### *Algoritma 2. RJMCMC'nin ARMA modellerine uygulaması*

Adım 1. Parametreler için başlangıç değerleri belirlenir.

Adım 2. Öneri dağılımından (Uniform dağılım) modeller arası hareket için bir  $k'$  değeri üretilir.

Adım 3.  $U(0,1)$  standart Uniform dağılımından bir  $\alpha_0$  değeri üretilir.

Adım 4. (5.1) de verilen eşitlikten  $\alpha(k \rightarrow k' / \mathbf{X}, \sigma_e^2)$  kabul olasılığı hesaplanır.

Adım 5. Eğer  $\alpha_0 < \alpha(k \rightarrow k' / \mathbf{X}, \sigma_e^2)$  ise  $k = k'$  olarak yeni modele hareket edilir.  
 $\alpha_0 > \alpha(k \rightarrow k' / \mathbf{X}, \sigma_e^2)$  ise yeni modele hareket edilmez.

Adım 6. (5.2) ve (5.3) dağılımlarından parametreler için örneklem çekilir.

Adım 7. Adım 2-6'yı belli bir yineleme sayısı (örneğin 1000 yineleme ) için tekrar edilir.

Bu algoritma Hosking'in yaklaşımının 3. adımında kullanılarak oluşturulan aşağıdaki yeni algoritma ARFIMA( $p, d, q$ ) modelinde parametre tahmini ve model seçimi için kullanılabilir. Reinsen vd. (2001)'de Hosking'in iki aşamalı yaklaşımının ilk üç adımında yeterli sonuçlara ulaşılabildiğini belirtmiştir. Bu gerçeğe dayanarak Hoskingin iki aşamalı yaklaşımının ilk üç adımı değiştirilerek yeni bir algoritma aşağıdaki gibi elde edilmiştir.  $X_t$  ,  $0 < d < 0.5$  olmak üzere ARFIMA( $p, d, q$ ) modeline sahip olsun.

Algoritma 3. ARFIMA( $p, d, q$ ) modelinde parametre tahmini ve model seçimi yöntemi ( İki Aşamalı Tahmin Yöntemi )

Adım 1. Zaman serisinin ARFIMA( $0, d, 0$ ) modeline sahip olduğu düşünülerek, bu modelden kesirli fark parametresi tahmin edilir.

Adım 2.  $X_t$  zaman serisine  $\hat{d}$ 'ya göre kesirli fark alınarak  $\hat{\mathbf{w}}$  serisi elde edilir.

Adım 3.  $\hat{\mathbf{w}}$  serisine Algoritma 2 uygulanır.

Adım 1 de  $d$ 'nin tahmin edilmesi için Bölüm 3.5'de verilen tam en çok olabilirlik yöntemi kullanılmaktadır.

Algoritma 3'ün parametre tahmini performansı bir benzetim çalışması yardımıyla HR yöntemi ve CSS yöntemi ile hata kareler ortalamasının karekök (RMSE, root of mean square error) değerlerine göre karşılaştırıldı. Algoritma 3'ün model seçim performansı AIC, BIC ve HQC model seçim ölçütleri ile doğru model seçim yüzdesine (DMSY) göre bir benzetim çalışması yardımıyla karşılaştırıldı. Sonuçlar Çizelge 5.1 ve 5.2 de verilmiştir. Benzetimde Hsu ve Jay (2003) çalışmasındakine benzer  $d, \phi$  ve  $\theta$ 'nin değerleri kullanıldı. Ayrıca Hsu ve Jay (2003)'deki gibi 100 örneklem büyüklüğünde 100 tekrar ile herbir durum incelendi. Benzer bir çalışma Smith vd. (1997) de yapılmış ve model seçim ölçütleri karşılaştırılmıştır. Ölçütlerin genelde düşük bir olasılıkla doğru modeli seçtiği sonucuna ulaşılmıştır. Smith vd. (1997) sadece ARFIMA(1,  $d$ , 0) ve ARFIMA(0,  $d$ , 1) modelleri incelemiştir. Burada da benzer şekilde ARFIMA(1,  $d$ , 0) ve ARFIMA(0,  $d$ , 1) modelleri üzerinde çalışılmıştır. Hsu ve Jay (2003)'deki gibi 500 örneklem çekilmiş ve ilk 100 tanesi atılmıştır. Bu durumda oluşturulan örneklemelerde yakınsama problemleri olabilir. Ancak Hsu ve Jay (2003)'deki gibi burada da benzetim çalışmasını uygun bir zamanda sonuçlandırabilmek için bu sorunlar göz ardı edilecektir. Çizelge 5.1-5.2 de DMSY ARFIMA modelinin derecesinin doğru seçilmesinin yüzdesini göstermektedir. RMSE ise hata kareler ortalaması karekök değerlerini göstermektedir.

$d$  gerçek parametre değerini ve  $\hat{d}_i$   $i$ . zaman serisi için parametre tahminini göstermek üzere RMSE aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$RMSE = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{100} (d - \hat{d}_i)^2\right) / 100} \quad (5.4)$$

Çizelge 5.1'de, önerilen iki aşamalı yöntemin, incelenen altı durumun tümünde HR yönteminden hesaplanan AIC, BIC ve HQC ölçütüne göre daha yüksek DMSY'lerine sahip olduğu görülmektedir. Çizelge 5.1'de önerilen iki aşamalı tahmin yönteminde kesirli fark parametresinin RMSE değerleri HR yöntemine göre  $d = 0, \phi = 0.8$  durumu dışında daha düşüktür.  $\phi$  parametresinin tahmininde ise iki yöntemin birbirine üstünlüğü yoktur. Çizelge 5.1'de, önerilen iki

aşamalı yöntemin CSS yöntemine göre hesaplanan AIC, BIC ve HQC ölçütüne göre beş durumda daha yüksek DMSY'lere sahip olduğu görülmektedir.  $d = 0.4$  ,  $\phi = -0.2$  olduğu durumda ise iki aşamalı tahmin yönteminin DMSY'sinin daha düşük olduğu görülmektedir. Çizelge 5.1'den kesirli fark parametresinin tahmininde iki aşamalı yaklaşımın daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Benzer şekilde  $\phi$  parametresinin tahmininde de iki aşamalı yöntem üstündür. Çizelge 5.1'de iki aşamalı tahmin yönteminin en kötü performansı sergilediği durumun  $d = 0.1$  ,  $\phi = 0.8$  olduğu durumdur.

Çizelge 5.2'de iki aşamalı tahmin yönteminin, incelenen dört durumda HR yöntemine göre hesaplanan BIC ölçütüne göre daha yüksek DMSY'lerine sahip olduğu görülmektedir. İki aşamalı tahmin yönteminde kesirli fark parametresinin ve  $\theta$  parametresinin tahmininde ise HR yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Çizelge 5.2'de önerilen iki aşamalı yöntem, incelenen altı durumun hepsinde HR yöntemine göre hesaplanan AIC, BIC ve HQC ölçütüne göre daha yüksek DMSY'lerine sahip olduğu görülmektedir. Ancak kesirli fark parametresinin ve  $\theta$  parametresinin tahmininde ise CSS yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

**Çizelge 5.1. ARFIMA(1,d,0) Modeli için Algoritma 3'ün Benzetim Çalışması ile HR ve CSS Yöntemi ile Karşılaştırılması**

| Gerçek Parametre Değerleri |        |                        | İki Aşamalı Tahmin Yöntemi |              |      | HR Yöntemi |      |          |     |     | CSS Yöntemi |      |          |     |     |
|----------------------------|--------|------------------------|----------------------------|--------------|------|------------|------|----------|-----|-----|-------------|------|----------|-----|-----|
| $d$                        | $\phi$ | $\sigma_\varepsilon^2$ | RMSE                       | RMSE         | DMSY | RMSE       | RMSE | DMSY (%) |     |     | RMSE        | RMSE | DMSY (%) |     |     |
|                            |        |                        | $\hat{d}$                  | $\hat{\phi}$ | (%)  |            |      | AIC      | BIC | HQC |             |      | AIC      | BIC | HQC |
| 0                          | -0.7   | 2                      | 0.01                       | 0.07         | 100  | 0.03       | 0.06 | 75       | 94  | 83  | 0.05        | 0.07 | 53       | 73  | 62  |
| 0                          | 0.8    | 2                      | 0.27                       | 0.31         | 93   | 0.12       | 0.17 | 66       | 82  | 74  | 0.25        | 0.30 | 45       | 66  | 55  |
| 0.3                        | -0.2   | 1.519                  | 0.14                       | 0.15         | 77   | 0.15       | 0.16 | 41       | 60  | 51  | 0.13        | 0.16 | 41       | 67  | 55  |
| 0.3                        | 0.8    | 1.519                  | 0.03                       | 0.08         | 99   | 0.14       | 0.06 | 59       | 81  | 73  | 0.16        | 0.14 | 58       | 79  | 67  |
| 0.4                        | -0.2   | 0.966                  | 0.12                       | 0.17         | 72   | 0.19       | 0.19 | 30       | 63  | 48  | 0.13        | 0.18 | 64       | 82  | 71  |
| 0.4                        | 0.3    | 0.966                  | 0.07                       | 0.14         | 85   | 0.33       | 0.32 | 60       | 73  | 67  | 0.19        | 0.24 | 58       | 78  | 69  |

**Çizelge 5.2. ARFIMA(0,d,1) Modeli için Algoritma 3'ün Benzetim Çalışması yardımıyla HR ve CSS Yöntemi ile Karşılaştırılması**

| Gerçek Parametre Değerleri |          |                        | İki Aşamalı Tahmin Yöntemi |                |         | HR Yöntemi |                |         |     |     | CSS Yöntemi |                |         |     |     |
|----------------------------|----------|------------------------|----------------------------|----------------|---------|------------|----------------|---------|-----|-----|-------------|----------------|---------|-----|-----|
| $d$                        | $\theta$ | $\sigma_\varepsilon^2$ | RMSE                       | RMSE           | DMSY(%) | RMSE       | RMSE           | DMSY(%) |     |     | RMSE        | RMSE           | DMSY(%) |     |     |
|                            |          |                        | $\hat{d}$                  | $\hat{\theta}$ |         | $\hat{d}$  | $\hat{\theta}$ | AIC     | BIC | HQC | $\hat{d}$   | $\hat{\theta}$ | AIC     | BIC | HQC |
| 0                          | -0.3     | 2                      | 0.05                       | 0.11           | 31      | 0.05       | 0.12           | 43      | 61  | 52  | 0.19        | 0.25           | 15      | 29  | 21  |
| 0                          | 0.7      | 2                      | 0.04                       | 0.19           | 97      | 0.03       | 0.09           | 60      | 84  | 72  | 0.09        | 0.13           | 35      | 48  | 40  |
| 0.3                        | -0.3     | 1.519                  | 0.19                       | 0.29           | 30      | 0.20       | 0.22           | 24      | 36  | 30  | 0.18        | 0.23           | 12      | 21  | 17  |
| 0.3                        | 0.7      | 1.519                  | 0.16                       | 0.11           | 95      | 0.10       | 0.08           | 49      | 68  | 53  | 0.12        | 0.13           | 23      | 38  | 27  |
| 0.4                        | -0.3     | 0.966                  | 0.18                       | 0.24           | 29      | 0.21       | 0.20           | 20      | 28  | 26  | 0.12        | 0.18           | 18      | 25  | 21  |
| 0.4                        | 0.7      | 0.966                  | 0.20                       | 0.11           | 80      | 0.09       | 0.07           | 48      | 73  | 60  | 0.09        | 0.20           | 33      | 47  | 38  |

## 6. TEK AŞAMALI BAYESCİ TAHMİN YÖNTEMİ

Bölüm 5 de önerilen yöntem iki aşamalıdır. ARFIMA (p,d,q) modelinde kesirli fark parametresi, ARMA parametreleri ve model derecesinin aynı zamanda tahmin edildiği bir RJMCMC algoritması geliştirmek mümkündür. Bu algoritma da algoritma 3 den farklı olarak kesirli fark parametresi ve ARMA parametrelerinin koşullu dağılımlarının elde edilmesi gerekmektedir. Kesirli fark parametresinin koşullu dağılımının analitik olarak elde edilmesi zordur. Bu nedenle kesirli fark parametresi için bir öneri dağılımı belirlenir. Uygun öneri dağılımının belirlenmesi zor olduğundan Koop (2003) de söz edildiği gibi bir öneri dağılımı  $(N(\hat{d}_{ML}, \hat{s}_{ML}(d)))$  kullanılabilir.

$$d \sim N(\hat{d}_{ML}, \hat{s}_{ML}(d)) \quad (6.1)$$

Kesirli fark parametresi tahmin edildikten sonra  $X_t$  zaman serisine  $d^{(i)}$ 'ye göre kesirli fark alınarak  $\hat{\mathbf{w}}_t$  serisi elde edilir. ARMA parametreleri için örneklem çekimi algoritma 3'deki duruma benzer şekilde yapılır. Ancak burada  $X_t$  zaman serisi yerine  $\hat{\mathbf{w}}_t$  serisi kullanılır. Önsel dağılımlar algoritma 3'dekine benzer şekilde aşağıdaki gibidir. Kesirli fark parametresinin önsel dağılımı olarak sürekli Uniform dağılım alınır.

$$p(k) = \begin{cases} \frac{1}{5} & , k = 1,2,3,4,5 \\ 0 & , d.d. \end{cases}$$

$$p(\Psi^{(k)} / \sigma_a^2) = N(\boldsymbol{\mu}_{pa^{(k)}}, \mathbf{C}_{pa^{(k)}})$$

$$p(\sigma_e^2) = IG(\alpha_e, \beta_e)$$

$$p(d) \sim U(0,1/2)$$

Burada,  $\boldsymbol{\mu}_{pa^{(k)}} = 0$  ve  $\mathbf{C}_{pa^{(k)}} = \sigma_a^2 I_k$  olarak alınmıştır. Olabilirlik fonksiyonu olarak aşağıda verilen yaklaşık olabilirlik fonksiyonu kullanılır.

$$p(\hat{\mathbf{w}} / d, k, \sigma_e^2, \sigma_a^2, \Psi^{(k)}) = (2\pi\sigma_e^2)^{-(n-p-q-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{t=p+q+1}^n e_t^2\right)$$

Bu durumda ARMA parametreleri ve  $\sigma_e^2$  için koşullu dağılımlar aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\Psi^{(k)} \sim N(\mu_{ca^{(k)}}, \mathbf{C}_{ca^{(k)}}) \quad (6.2)$$

$$\sigma_e^2 \sim IG(\alpha_{se}, \beta_{se}), \alpha_{se} = \alpha_e + \frac{1}{2}n_k, \beta_{se} = \beta_e + \frac{1}{2}e^T e \quad (6.3)$$

Burada,

$$\mathbf{C}_{ca^{(k)}} = \left( \frac{1}{\sigma_e^2} \hat{\mathbf{W}}^{(k)T} \hat{\mathbf{W}}^{(k)} + \mathbf{C}_{pa^{(k)}}^{-1} \right)^{-1}$$

$$\mu_{ca^{(k)}} = \frac{1}{\sigma_e^2} \mathbf{C}_{ca^{(k)}} \hat{\mathbf{W}}^{(k)T} \hat{\mathbf{W}}_{(1)}$$

dir. Bu eşitliklerde  $\hat{\mathbf{W}}_t^{(k)}$  ise önceki bölümdeki gibi oluşturulan veri matrisidir. Ayrıca algoritma 3'deki gibi  $\mu_{pa^{(k)}} = 0$  ve  $\mathbf{C}_{pa^{(k)}} = \sigma_a^2 I_k$  şeklindedir. Modeller arası geçiş için kabul olasılığı ise aşağıdaki eşitlikle elde edilir.

$$\alpha(k \rightarrow k' / d, \hat{\mathbf{W}}, \sigma_a^2, \sigma_e^2) = \min \left( 1, \sqrt{\frac{|\mathbf{C}_{ca^{(k')}}| |\mathbf{C}_{pa^{(k)}}|}{|\mathbf{C}_{ca^{(k)}}| |\mathbf{C}_{pa^{(k')}}|}} \frac{\exp\left\{\frac{1}{2} \mu_{ca^{(k')}}^T \mathbf{C}_{ca^{(k')}}^{-1} \mu_{ca^{(k')}}\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{2} \mu_{ca^{(k)}}^T \mathbf{C}_{ca^{(k)}}^{-1} \mu_{ca^{(k)}}\right\}} \right) \quad (6.4)$$

Verilen koşullu dağılımlar ve kabul olasılığına göre ARFIMA (p,d,q) modelinde tek aşamalı bir Bayesci yöntem aşağıdaki algorithmada özetlenmiştir.

Algoritma 4. ARFIMA modeli için RJMCMC algoritması (Tek Aşamalı Tahmin Yöntemi)

Adım 1. Parametreler için başlangıç değerleri belirlenir.

Adım 2. Öneri dağılımından (Uniform dağılım) modeller arası hareket için bir  $k'$  değeri üretilir.

Adım 3.  $U(0,1)$  standart Uniform dağılımından bir  $\alpha_0$  değeri üretilir.

Adım 4. (6.4) de verilen eşitlikten  $\alpha(k \rightarrow k' / \hat{\mathbf{w}}, \sigma_e^2)$  kabul olasılığı hesaplanır.

Adım 5. Eğer  $\alpha_0 < \alpha(k \rightarrow k' / \hat{\mathbf{w}}, \sigma_e^2)$  ise  $k = k'$  olarak yeni modele hareket edilir.  
 $\alpha_0 > \alpha(k \rightarrow k' / \hat{\mathbf{w}}, \sigma_e^2)$  ise yeni modele hareket edilmez.

Adım 6. (6.1) dağılımından kesirli fark parametresinin değeri tahmin edilir.

Adım 7. (6.2) ve (6.3) dağılımlarından parametreler için örneklem çekilir.

Adım 8. Adım 2-7 belli bir yineleme sayısı için tekrar edilir.

Algoritma 4'ün model seçimi ve parametre tahmini açısından performansı Algoritma 3 için yapılan benzetim çalışmasında kullanılan aynı zaman serileri için incelendi. Algoritma 4 için yapılan benzetim çalışmasının sonuçları Çizelge 6.1 ve 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.1'de önerilen tek aşamalı yöntemin, incelenen altı durumun hepsinde HR yönteminden hesaplanan AIC, BIC ve HQ ölçütüne göre daha yüksek DMSY'lerine sahip olduğu görülmektedir. Çizelge 6.1'de önerilen iki aşamalı tahmin yönteminde kesirli fark parametresinin RMSE değerleri HR yöntemine göre  $d = 0, \phi = 0.8$  durumu dışında daha düşüktür.  $\phi$  parametresinin tahmininde ise HR yöntemin daha düşük RMSE değerleri verdiği görülmektedir. Çizelge 6.1'de önerilen tek aşamalı yöntemin, CSS yönteminden hesaplanan AIC, BIC ve HQ ölçütüne göre dört durumda daha yüksek DMSY'lerine sahip olduğu görülmektedir.  $d = 0.3, \phi = -0.2$  ve  $d = 0.4, \phi = -0.2$  olduğu durumlarda ise CSS yönteminden BIC ölçütüne göre hesaplanan DMSY'den (%67, %82) daha düşük doğru model seçim yüzdesi (%64,%69) verdiği görülmektedir. Çizelge 6.1'den kesirli fark parametresinin tahmininde her iki yöntemin birbirine üstünlüğü olmadığı görülmektedir.  $\phi$  parametresinin tahmininde ise CSS yöntemi daha düşük RMSE değerleri vermiştir.

**Çizelge 6.1. ARFIMA(1,d,0) Modeli için Algoritma 4'ün Benzetim Çalışması ile HR ve CSS Yöntemi ile Karşılaştırılması**

| Gerçek Parametre Değerleri |        |                        | Tek Aşamalı Tahmin Yöntemi |              |      | HR Yöntemi |      |          |     |     | CSS Yöntemi |      |          |     |     |
|----------------------------|--------|------------------------|----------------------------|--------------|------|------------|------|----------|-----|-----|-------------|------|----------|-----|-----|
| $d$                        | $\phi$ | $\sigma_\varepsilon^2$ | RMSE                       | RMSE         | DMSY | RMSE       | RMSE | DMSY (%) |     |     | RMSE        | RMSE | DMSY (%) |     |     |
|                            |        |                        | $\hat{d}$                  | $\hat{\phi}$ | (%)  |            |      | AIC      | BIC | HQC |             |      | AIC      | BIC | HQC |
| 0                          | -0.7   | 2                      | 0.01                       | 0.07         | 99   | 0.03       | 0.06 | 75       | 94  | 83  | 0.05        | 0.07 | 53       | 73  | 62  |
| 0                          | 0.8    | 2                      | 0.27                       | 0.31         | 95   | 0.12       | 0.17 | 66       | 82  | 74  | 0.25        | 0.30 | 45       | 66  | 55  |
| 0.3                        | -0.2   | 1.519                  | 0.14                       | 0.16         | 64   | 0.15       | 0.16 | 41       | 60  | 51  | 0.13        | 0.16 | 41       | 67  | 55  |
| 0.3                        | 0.8    | 1.519                  | 0.03                       | 0.09         | 99   | 0.14       | 0.06 | 59       | 81  | 73  | 0.16        | 0.14 | 58       | 79  | 67  |
| 0.4                        | -0.2   | 0.966                  | 0.18                       | 0.24         | 69   | 0.19       | 0.19 | 30       | 63  | 48  | 0.13        | 0.18 | 64       | 82  | 71  |
| 0.4                        | 0.3    | 0.966                  | 0.14                       | 0.24         | 86   | 0.33       | 0.32 | 60       | 73  | 67  | 0.19        | 0.24 | 58       | 78  | 69  |

**Çizelge 6.2. ARFIMA(0,d,1) Modeli için Algoritma 4'ün Benzetim Çalışması ile HR ve CSS Yöntemi ile Karşılaştırılması**

| Gerçek Parametre Değerleri |          |                          | Tek Aşamalı Tahmin Yöntemi |                |         | HR Yöntemi |                |         |     |     | CSS Yöntemi |                |         |     |     |
|----------------------------|----------|--------------------------|----------------------------|----------------|---------|------------|----------------|---------|-----|-----|-------------|----------------|---------|-----|-----|
| $d$                        | $\theta$ | $\sigma_{\varepsilon}^2$ | RMSE                       | RMSE           | DMSY(%) | RMSE       | RMSE           | DMSY(%) |     |     | RMSE        | RMSE           | DMSY(%) |     |     |
|                            |          |                          | $\hat{d}$                  | $\hat{\theta}$ |         | $\hat{d}$  | $\hat{\theta}$ | AIC     | BIC | HQC | $\hat{d}$   | $\hat{\theta}$ | AIC     | BIC | HQC |
| 0                          | -0.3     | 2                        | 0.01                       | 0.10           | 46      | 0.05       | 0.12           | 43      | 61  | 52  | 0.19        | 0.25           | 15      | 29  | 21  |
| 0                          | 0.7      | 2                        | 0.14                       | 0.21           | 92      | 0.03       | 0.09           | 60      | 84  | 72  | 0.09        | 0.13           | 35      | 48  | 40  |
| 0.3                        | -0.3     | 1.519                    | 0.20                       | 0.25           | 37      | 0.20       | 0.22           | 24      | 36  | 30  | 0.18        | 0.23           | 12      | 21  | 17  |
| 0.3                        | 0.7      | 1.519                    | 0.08                       | 0.11           | 40      | 0.10       | 0.08           | 49      | 68  | 53  | 0.12        | 0.13           | 23      | 38  | 27  |
| 0.4                        | -0.3     | 0.966                    | 0.14                       | 0.21           | 42      | 0.21       | 0.20           | 20      | 28  | 26  | 0.12        | 0.18           | 18      | 25  | 21  |
| 0.4                        | 0.7      | 0.966                    | 0.09                       | 0.07           | 42      | 0.09       | 0.07           | 48      | 73  | 60  | 0.09        | 0.20           | 33      | 47  | 38  |

Çizelge 6.2’de önerilen tek aşamalı yöntem ile HR yönteminden hesaplanan BIC ve HQ ölçütlerinin DMSY’ne göre birbirine üstünlüğü yoktur. Çizelge 6.2’den kesirli fark parametresinin tahmininde ise bu çalışmada önerilen tek aşamalı yaklaşımın daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.  $\theta$  parametresinin tahmininde ise HR yöntemi daha düşük RMSE değerlerine sahiptir. Çizelge 6.2’de önerilen tek aşamalı yöntemin CSS yönteminden hesaplanan AIC, BIC ve HQ ölçütüne tüm durumlarda daha yüksek DMSY’lerine sahip olduğu görülmektedir. Çizelge 6.2’den kesirli fark parametresinin ve  $\theta$  parametresinin tahmininde de her iki yöntemin birbirine üstünlüğü olmadığı görülmektedir.

## 7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Uzun dönem bağımlı zaman serileri, zaman serileri alanında önemli bir yere sahiptir. Literatürde uzun dönem bağımlı zaman serilerinin modellenmesi için bir çok çalışma yapılmıştır. ARFIMA modelleri uzun dönem bağımlı zaman serilerinin modellenmesinde kullanılmaktadır. ARFIMA modellerinde parametre tahminlerinin hesaplanması için literatürde yoğun çalışmalar yapılmıştır. ARFIMA modelleri için önemli bir sorun model belirlemedir. ARFIMA modellerinde, uzun dönem bağımlılık nedeniyle otokorelasyonlardan model belirlemek zordur. Bu nedenle genellikle ARFIMA modellerinde belirleme klasik model seçim ölçütleri ile gerçekleştirilmektedir. Klasik model seçim ölçütleri ile model belirlemek için ise tüm aday modellerden parametre tahminleri elde edilmelidir.

Son yıllarda MCMC yöntemlerinin önerilmesi, zaman serilerinde de Bayesci çalışmaların artmasını sağlamıştır. ARFIMA modelleri içinde literatürde yer alan bir kaç Bayesci çalışma vardır. Bu çalışmalar öneri dağılımlarının karmaşıklığı yüzünden uygulama alanı bulamamıştır. Literatürde yaygın kullanılan MCMC yöntemleri Gibbs örnekleme ve MH algoritmasıdır. Bu yöntemler ile zaman serisi modellerinde parametre tahmini yapılmaktadır. Ancak klasik MCMC yöntemleri ile model seçimi yapmak mümkün değildir. Green (1995)'de önerilen RJMCMC yaklaşımı ise parametre tahmini ve model seçimini eşzamanlı yapmaya yarayan etkili bir yöntemdir. RJMCMC yönteminin zaman serilerine uygulanması üzerine literatür kısıtlıdır. RJMCMC yönteminin ARFIMA modellerine uygulandığı bir çalışma henüz literatürde yoktur.

Bu çalışmada ARFIMA modelleri için iki aşamalı ve tek aşamalı iki yeni yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntemler RJMCMC yöntemine dayalı olduğundan parametre tahminini ve model seçimini aynı anda yapmaktadır. Önerilen iki yeni yöntem benzetim çalışması ile incelenmiştir.

İki aşamalı tahmin yöntemi Hosking'in algoritmasına dayanmaktadır. Hosking yönteminde ilk olarak kesirli fark parametresi tahmin edilmektedir. İkinci aşamada ise standart Box-Jenkins yaklaşımı ile ARMA parametreleri tahmin edilmektedir. Önerdiğimiz iki aşamalı tahmin yöntemi Hosking yönteminin ikinci aşamasının değiştirilmesi ile oluşmaktadır. İki aşamalı tahmin yönteminde standart Box-Jenkins yaklaşımı yerine bir RJMCMC yaklaşımı kullanılmaktadır. Bu

RJMCMC yaklaşımı Troughton (1999)'da otoregresif modeller için önerilen yaklaşımın ARMA'ya uyarlamasıdır. Çizelge 5.1'de önerilen iki aşamalı yaklaşımın ARFIMA(1, $d$ ,0) modelleri için klasik parametre tahmini ve klasik model seçim ölçütlerine göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Çizelge 5.2'de, önerilen iki aşamalı yaklaşımın ARFIMA(0, $d$ ,1) modelleri için klasik model seçim ölçütlerinden daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Ancak parametre tahmininde; klasik parametre tahmin yöntemleri ile önerilen iki aşamalı tahmin yönteminin birbirlerine üstünlükleri olmadığını görmekteyiz. Önerilen iki aşamalı yaklaşımın otoregresif model için hareketli ortalama modelinde olduğundan daha iyi sonuçlar elde edilmektedir. Bu durum, Ehlers ve Brooks (2004)'de ARMA modelleri için önerilen RJMCMC algoritmasında da benzer şekildedir.

Önerilen tek aşamalı yaklaşım ise kesirli fark parametresi için uygun bir öneri dağılımının bulunması ile gerçekleştirilmiştir. Literatürde ARFIMA modelleri için yapılan Bayesci çalışmalarda kesirli fark parametresi için verilen öneri dağılımları karmaşık ve zor hesaplanabilir. Kesirli fark parametresi için uygun öneri dağılımı belirlemek zordur. Bu nedenle tek aşamalı tahmin yönteminde Koop (2003) de belirtildiği gibi öneri dağılımı en çok olabilirlik tahminlerine dayalı olarak seçilmiştir. Önerilen tek aşamalı yöntem için elde edilen benzetim çalışması sonuçları Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2'de verilmiştir. Tek aşamalı yöntemin benzetim çalışması sonuçları iki aşamalı yöntemle benzerdir. Ancak önerilen iki aşamalı yaklaşımın, tek aşamalı yaklaşıma göre daha başarılı olduğu görülmektedir. Tek aşamalı tahmin yönteminin performansı kesirli fark parametresi için düşünülen öneri dağılımının parametrelerinin seçimine bağlıdır. Eğer öneri dağılımının parametreleri gerçek değerlerine yakın alınırsa tek aşamalı tahmin yönteminin parametre tahmini ve doğru modeli seçim başarısı artacaktır.

Sonuç olarak önerilen tek aşamalı ve iki aşamalı tahmin yöntemi için benzetim çalışmasının sonuçlarına göre ARFIMA modellerinin parametre tahmini ve model seçimi için başarılı sonuçlar verdiği söylenebilir. Önerilen yöntemler parametrelerin durağanlık sınırları içinde tahminlerinin elde edilmesini garanti edememektedir. Daha sonraki çalışmalarda parametrelerin yeniden uygun parametreleme ile durağanlık sınırları içinde tahminlerini elde edebilecek şekilde her iki yöntemin de geliştirilmesi üzerinde durulacaktır.

## 8. KAYNAKLAR

- Akaike, H., 1973, Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. 2<sup>nd</sup> International Symposium on Information theory. Petrov, B.N. and Csaki, F. (eds.), Akademiai Kiado., Budapest, pp. 267-281.
- Akaike, H., 1979, A Bayesian extensions of the minimum AIC procedure, *Biometrika*. 66, pp. 237-242.
- Andrieu, C., Djuric, P.M., Doucet, A., 2001, Model selection by MCMC computation, *Signal Processing*. 81, pp. 9-37.
- Baillie, R.T., 1996, Long memory processes and fractional integration in econometrics, *Journal of Econometrics*. 73, pp. 5-59.
- Barbieri, M. M., O'Hagan, A., 1996. A Reversible Jump MCMC sampler for Bayesian Analysis of ARMA Time Series, Technical Reports, Department of Mathematics , University of Nottingham, 45p.
- Beran, J., 1994, *Statistics for Long-Memory Processes* , Chapman&Hall/Crc, 315p.
- Bertelli, S., Caporin, M., 2002, A note on calculating autocovariances of long memory processes, *Journal of Time Series Analysis*. 23, pp. 503-508.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., 1976, *Time series analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, revised edition, San Francisco, 575p.
- Brockwell, P. J., Davis, R. A., 1991, *Time Series: Theory and Methods*, Springer Verlag, 577p.
- Brooks, S.P., Ehlers, R.S., 2002. Efficient construction of reversible jump MCMC proposals for autoregressive time series models, Technical report, University of Cambridge, 45p.
- Brooks, S.P., Giudici, P., Roberts G.O., 2003, Efficient constructions of reversible jump Markov chain Monte Carlo proposal distributions, *J.R. Statistical Society B*. 65, Part 1, pp. 3-55.
- Carlin, J.B., Dempster, A.P., Jonas, A.B., 1985, On models and methods for Bayesian time series analysis, *Journal of Econometrics*. 30, pp. 67-90.
- Carlin, B.P., Chip, S., 1995, Bayesian model choice via Markov Chain Monte Carlo methods, *Journal of Royal Statistical Society B*. 157, pp. 473-484.
- Chung, C.F., Baillie, R.T., 1993, Small sample bias in conditional sum of squares estimators of fractionally integrated ARMA models, *Empirical Economics*. 18, pp. 791-806.
- Chung, C.F., 1994, A Note on Calculating the Autocovariances of Fractionally Integrated ARMA models, *Economic Letters*. 45, pp 293-297.

- Dellaportas, P., Forster, J.J., Ntzoufras, I., 2002, On Bayesian model and variable selection using MCMC, *Statistics and Computing*. 12, pp. 27-36.
- Ehlers R.S., Brooks S.P., 2004, Bayesian Analysis of Order Uncertainty in ARIMA Models, Technical Report, University of Cambridge, 15p.
- Eğrioğlu, E., Günay, S., 2005, Uzun Dönem Bağımlı Normal Akgürültü Sürecinde Otokorelasyon Regresyonu İle Parametre Tahmini, *Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*. 6-1:61-66.
- Fahimah, A., Merrilee, H., Christopher J., 2004, Improving the acceptance rate of reversible jump MCMC proposals, *Statistics & Probability Letters*. 69, pp. 189-198.
- Geman, S., Geman, D., 1984, Stochastic Relaxation, Gibbs Distribution and Bayesian Restoration of Images, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 6, pp. 721-741.
- Genfald, E.A., 2000, Gibbs Sampling, *Journal of the American Statistical Association*. 95, pp. 452.
- Genfald, E.A., Smith, A.F.M., 1990, Sampling Based Approaches to Calculating Marginal Densities, *Journal of the American Statistical Association*. 85, pp. 398-409.
- Geweke, J., Porter-Hudak, S., 1983, The Estimation and Application of Long-Memory Time Series Models, *Journal of Time Series Analysis*. 4, pp. 221-237.
- Geweke, J., 1992, Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, *Bayesian Statistics 4*, Bernardo J., Berger J., David A. And Smith A. (eds.), Calderon Press. Oxford, pp. 641-649.
- Godsill, S. J., 2001, On Relationship Between Markov Chain Monte Carlo Monte Carlo Methods for Model Uncertainty, *Journal of Computational and Graphical Statistics*. 10-2, pp. 1-19.
- Granger, C.W.J., Joyeux, R., 1980, An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractionally Differencing, *Journal of Time Series Analysis*. 1, pp. 15-29.
- Green, P. J., 1995, Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Computation and Bayesian Model Determination, *Biometrika*. 82, pp. 711-732.
- Grenander, U., Szegö, G., 1958, *Toeplitz Forms and their Application*. Univ. of California Press, Berkeley, 250p.
- Hannan, E.J., Quinn, B.G., The Determination of the order of an Autoregression. *Journal of Royal Statistical Society*. B41, pp. 190-195.
- Hannan, E.J., 1980, The estimation of the order of an ARMA processes, *American Statistician*. 8, pp. 1071-1081.

- Haslett, J., Raftery A.E., 1989, Space-time Modeling with Long-memory Dependence: Assessing Ireland's Wind Power Resources, *Appl. Statist.* . 38, pp. 1-50.
- Hosking, J.R.M., 1981, Fractionally Differencing, *Biometrika*. 68, pp. 165-176.
- Hosking, J.R.M., 1984, Modeling Persistence in Hydrological Time Series Using Fractionally Differencing, *Water Resources Research*. 20-12, pp. 1898-1908.
- Hastings, W.K., 1970, Monte Carlo Sampling methods using Markov chains and their applications, *Biometrika*. 57, pp. 97-109.
- Hsu N.J., Jay, B.J., 2003, Bayesian Analysis of Fractionally Integrated ARMA with Additive Noise, *Journal of Forecasting*. 22, pp. 491-514.
- Hurst, H.E., 1951, Long-term storage capacity of reservoirs, *Trans. Am. Soc. Civil Engineers*. 116, pp. 770-799.
- Jeffreys, S. P. Nalini, R., 1996, Bayesian Modeling of ARFIMA by Markov Chain Monte Carlo methods, *Journal of Forecasting*. 15, pp. 63-82.
- Jeffreys, S. P., Nalini R. ,1998, Bayesian Analysis of Autoregressive Fractionally Integrated Moving-Average Processes, *Journal of Time Series Analysis*. 19, pp. 99-112.
- Koop, G.,1991, International Properties of Real Output: Bayesian Analysis, *J. Bus. Econ. Stat.* 20 -12, pp. 1898-1908.
- Koop, G., Ley, E., Osiewalski, J., Steel, M.F.J. ,1997, Bayesian Analysis of Long Memory and Persistence Using ARFIMA Models, *Journal of Econometrics*. 76, pp. 149-169.
- Koop, G., 2003, *Bayesian Econometrics*, John Wiley & Sons Inc, USA, 359p.
- Künsch H.R. ,1987, Statistical Aspects of Self-Similar Processes. In Prohorov Y., Sazanov V.V. (eds.). *Proceedings of The First World Congress*. Vol. 1. VNU Science Press. Utrecht, pp. 67-74.
- Li, W.K., Mcleod, A.I., 1986, Fractional Time Series Modeling, *Biometrika*. 73, pp. 217-221.
- Lo, A. W., 1991, Long Memory in Stock Market Prices, *Econometrica*. 59, pp. 1279-1313.
- Mandelbrot B.B., 1972, Statistical Methodology for Non Periodic Cycles: From the Covariance to R/S analysis, *Annals of Economic and Social Measurement*. 1, pp. 259-290.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H. and Teller, E. ,1953, Equations of state calculations by fast computing machine, *Journal of Chemical Physics*. 21, pp. 1087-91.

- Chen, M.H., Shao, Q.M., Ibrahim, J.G., 2002, Monte Carlo Methods in Bayesian Computation, Springer-Verlag, 389p.
- Monahan, J.F., 1983, Fully Bayesian Analysis of ARMA Time Series Models, *Journal of Econometrics*. 21, pp. 307-331.
- Raftery, A., Lewis, S., 1992, How many iterations in the Gibbs sampler? *Bayesian Statistics 4*, Bernardo J., Berger J., David A. And Smith A. (eds.). Calderon Press, Oxford, pp. 763-773.
- Reinsen, V., Lopes, S., 1999, Some Simulations and Applications of Forecasting Long-Memory Time Series Models, *Journal of Statistical Planning and Inference*. 80, pp. 269-287.
- Reisen, V., Abraham, B., Lopes, S., 2001, Estimation of parameters in ARFIMA Processes: A simulation study, *Commun. Statist. Simula.* 30(4), pp. 787-803.
- Robinson, P.M., 1990, Time Series with strong dependence, *Advances in econometrics*, 6<sup>th</sup> world congress, Cambridge University Press, Cambridge, 20p.
- Robinson, P.M., 1994, Efficient test of nonstationary hypotheses, *Journal of American Statistical Association*. 89, pp. 1420-1437.
- Robinson, P.M., 1995, Gaussian Semiparametric Estimation of Long Range Dependence, *The Annals of Statistics*. 23 (5), pp. 1630-1661.
- Smith, J., Nick, T., Yadav, S., 1997, Comparing the bias and misspecification in ARFIMA models, *Journal of Time Series Analysis*. 18, pp. 507-527.
- Sowell F., 1992, Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models, *Journal of Econometrics*. 53, pp. 165-188.
- Tieslau, M.A., Schmidt, P., Baillie, R.T., 1996, A minimum distance estimator for long memory processes, *Journal of Econometrics*. 29, pp. 277-302.
- Tierney, L., 1994, Markov chains for exploring posterior distributions (with discussion), *Annals of Statistics*. 22, pp. 1701-62.
- Troughton, P.T., Godsill, S.J., 1997, A Reversible Jump Sampler for Autoregressive Time Series, Employing Full Conditionals to Achieve Efficient Model Spaces Moves, Technical Report, University of Cambridge, 13p.
- Troughton, P.T., 1999, Simulation Methods for Linear and Nonlinear Time Series Models with Application to Distorted Audio Signals, Unpublished phd thesis, University of Cambridge, 177p.
- Vermaak, J., Andrieu C., Doucet, A., Godsill, J., 2004, Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Strategies for Bayesian Model Selection in

Autoregressive Processes, Journal of Time Series Analysis. 25, pp. 785-809.

Whittle P., 1951, Hypothesis testing in time series analysis. Almquist and Wiksells, Uppsala.

Zelner, A., 1971, An introduction to Bayesian inference in econometrics, John-Wiley & Sons, Inc, 431p.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erol EĞRİOĞLU

Doğum Yeri : Trabzon

Doğum Yılı : 07/11/1977

Medeni Hali : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise 1991-1994 : Büyükçekmece Lisesi

Lisans 1994-1998 : Ondokuz Mayıs Üniversitesi İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans 1998-2002 : Ondokuz Mayıs Üniversitesi İstatistik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi :

1998-2002 : Ondokuz Mayıs Üniversitesi İstatistik Bölümü

2002- : Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü