

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından tarihinde yapılan sınav ile
Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan:.....

Üye:.....

Üye:.....

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

...../...../2005

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

KONOİDAL REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

ÖZET

Bu çalışma beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde konunun ele alınma nedeni tartışıldı. İkinci bölümde konuya temel teşkil eden çalışmalara, üçüncü bölümde ise E^n de $k+1$ boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyleri, çeşitli hareketlere iştirak eden genelleştirilmiş regle yüzey çiftleri, k . mertebeden helisel hareketlere iştirak eden aksoid yüzey çiftleri, homotetik hareketlere iştirak eden genelleştirilmiş regle yüzey çiftleri, k . mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden aksoid yüzey çiftleri ve simetrik homotetik hareketlere iştirak eden regle yüzey çiftleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca k . mertebeden simetrik helisel hareketlerin ve simetrik homotetik hareketlerin regle yüzey çiftlerinin integral invariantları gösterilmiştir. Dördüncü bölümde E^n de k . mertebeden homotetik ve helisel hareketlere iştirak eden konoidal regle yüzey çiftleri incelendi

Beşinci bölüm yüksek lisans çalışmamızın orijinal kısmını meydana getirmektedir. Bu bölümün ilk kesiminde simetrik helisel hareketlere iştirak eden konoidal regle yüzey çiftleri verilmiştir. Altıncı bölümün ikinci kesiminde ise simetrik homotetik hareketlere iştirak eden konoidal regle yüzey çiftleri verilmiştir.

ON THE KONOIDAL RULED SURFACES**ABSTRACT**

This study consists of five fundamental chapters. In the first chapter, it is discussed why this study is taken into consideration. In the second chapter, studies which is main into subject has been presented. In the third chapter, $(k+1)$ -dimensional generalized ruled surfaces in E^n , konoidal ruled surfaces, generalized pair of ruled surfaces under the various motions, the pair of axoids under the helical motions of order k , generalized pair of ruled surfaces under homothetic motions pair of axoid surfaces under symmetric helical motions of order k and pair of ruled surfaces under symmetric homothetic motions are highlighted. Also, it was shown that the integral invariants of pair of ruled surfaces under symmetric homothetic motions and symmetric helical motions of order k . In the fourth chapter, konoidal pair of ruled surfaces under helical motions of order k in E^n and homothetic motions are given.

The fifth chapter is the original part of this study. In the first section of this chapter, pair of konoidal ruled surfaces under symmetric helical motions are given. In the second section of the chapter, pair of konoidal ruled surfaces under symmetric homothetic motions are given.

TEŐEKKÜR

Çalışmalarım boyunca danışmanlığımı yapan ve bana her türlü yardımda bulunup yol gösteren Saygıdeğer Hocam Sayın **Prof.Dr.Mustafa ÇALIŞKAN**' a saygılarımla sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarımda desteğini gördüğüm, Amasya Eđitim Fakóltesi öğretim üyesi Sayın **Y.Doç.Dr. Kezban ORBAY**' a içten teőekkürlerimi sunarım.

Vildan EKİZ (DEMİRTOP)

İÇİNDEKİLER

1.Giriş.....	1
2.Literatür Özeti.....	2
3.Genel Bilgiler.....	3
3.1 E^3 de Regle Yüzeyler Üzerine.....	3
3.2 E^n de $(k+1)$ – Boyutlu Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler.....	10
3.3 Konoidal Regle Yüzeyler.....	19
3.4 Çeşitli Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri.....	27
3.4.1 k-Mertebeden Helisel Hareketlere İştirak Eden Aksoid YüzeyÇiftleri.....	27
3.4.2 Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri.....	37
3.4.3 E^n de k. Mertebeden Simetrik Helisel Hareketlere İştirak Eden Aksoid Yüzey Çiftleri.....	46
3.4.4 k. Mertebeden Simetrik Helisel Hareketler Altında Aksoid Çiftlerinin Dağılma Parametreleri,Açılım Uzunlukları Ve Açılım Açıları.....	55
3.4.5 E^n de k. Mertebeden Simetrik Homotetik Hareketlere İştirak Eden Regle Yüzey Çiftleri.....	60
3.4.6 k. Mertebeden Simetrik Homotetik Hareketler Altında Regle Yüzeylerin Dağılma Parametreleri,Açılım Uzunlukları Ve Açılım Açıları.....	71
4. Materyal Ve Metot.....	75
E^n de k. Mertebeden Homotetik Ve Helisel Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri.....	75
4.1.Konoidal Aksoid Yüzey Çiftleri.....	75
4.2.Homotetik Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri.....	77
5.Bulgular.....	79
E^n de k. Mertebeden Simetrik Homotetik Ve Simetrik Helisel Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri.....	79
5.1 Simetrik Helisel Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri.....	79
5.2 Simetrik Homotetik Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri.....	81
6.Tartışma.....	83
7.Sonuç ve Öneriler.....	84

8.Kaynaklar.....	85
9.Özgeçmiş.....	88

3.GENEL BİLGİLER

3.1 E^3 de Regle Yüzeyler Üzerine

Bu bölümde önce E^3 de 2 – boyutlu regle yüzeyler ve bunların integral invaryantları tanıtılacaktır.

Tanım 3.1.1. (Regle Yüzey)

$M \subset E^3$ yüzeyi verilsin, $\forall P \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir **regle yüzey** ve M de kalan bu doğruya da regle yüzeyin **doğrultmanı** denir,[8].

Regle yüzeyi kısaca bir doğrunun bir eğriye dayanarak hareket etmesiyle oluşturduğu yüzey olarak ta tanımlayabiliriz.

Regle yüzeylerin parametrik denklemini elde etmek için doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferensiyellenebilir bir

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow E^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

eğrisi seçilir ve bu eğriye regle yüzeyin **dayanak eğrisi** adı verilir. M regle yüzeyinin α dayanak eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultmanı üzerinde değişken bir nokta β ise

$$\begin{aligned} \beta : IR &\rightarrow M \\ v &\rightarrow \beta(v) = \alpha(t) + va(t) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

şeklindedir. Burada $a(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ birim doğrultman vektörünü göstermektedir.

Böylece regle yüzey

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\rightarrow E^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + va(t) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

dönüşümü ile belirtilmiş olur.

Tanım 3.1.2.

Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye **açılabilir** denir,[8].

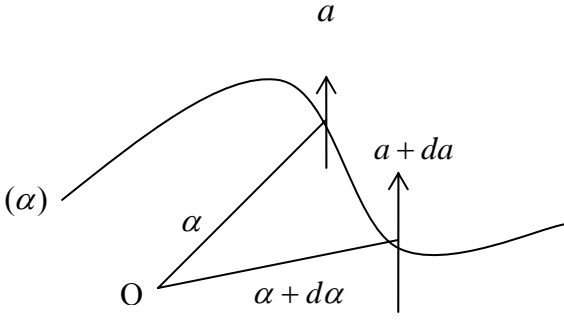
Tanım 3.1.3.

Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi** (**drali**) denir,[8].Ana

doğruların birim doğrultman vektörü a olan bir regle yüzeyin dralini P_a ile gösterelim. Komşu ana doğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör

$$(3.1.3) \quad \frac{a \wedge a'}{\|a \wedge a'\|} = \frac{a \wedge a'}{\|a\| \|a'\| |\sin \theta|} = \frac{a \wedge a'}{\|a'\|}$$

dir.



Şekil 3.1.1

Dayanak eğrisinin komşu iki noktası $\alpha(s)$ ve $\alpha(s) + d\alpha(s)$ olmak üzere bu noktalaradaki ana doğrular arasındaki en kısa uzaklık, $d\alpha(s)$ vektörünün $\frac{a \wedge a'}{\|a'\|}$ vektörü üzerindeki izdüşümü olduğundan

$$z = \left\langle d\alpha, \frac{a \wedge a'}{\|a'\|} \right\rangle,$$

$$z = \frac{1}{\|a'\|} \langle d\alpha, a \wedge a' \rangle,$$

$$(3.1.4) \quad z = \frac{\det[d\alpha, a, a']}{\|a'\|}$$

dır. Eğer ana doğruların küresel göstergelerini göz önüne alırsak bu göstergelerin yay elementi olan

$$(3.1.5) \quad d\Psi = \left\| \frac{da}{ds} \right\| ds$$

ifadesi komşu iki doğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için

$$P_a = z : d\Psi,$$

$$P_a = \frac{\det[d\alpha, a, a']}{\|a'\|} : \|a'\| ds,$$

$$(3.1.6) \quad P_a = \frac{\det \left[\frac{d\alpha}{ds}, a, a' \right]}{\|a'\|^2}$$

eşitliği bulunur.

Regle yüzeyler için dral, koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invaryanttır.

Teorem 3.1.1.

Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır,[8].

Tanım 3.1.4.

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\rightarrow E^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + va(t) \end{aligned}$$

regle yüzeyi $\forall t \in I$ için $\varphi(t + 2\pi, v) = \varphi(t, v)$ olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye **kapalıdır** denir,[8].

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve ana doğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir. Bir diğer ifade ile bir peryod sonra her ana doğru kendisi üzerine gelir.

Tanım 3.1.5.

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin ana doğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin **ortogonal yörüngesi** denir,[8].

$$\langle a, d\varphi \rangle = 0$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.1.6.

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin komşu iki doğrultmanının ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına **boğaz (merkez veya striksiyon) noktası** adı verilir,[8].

Tanım 3.1.7.

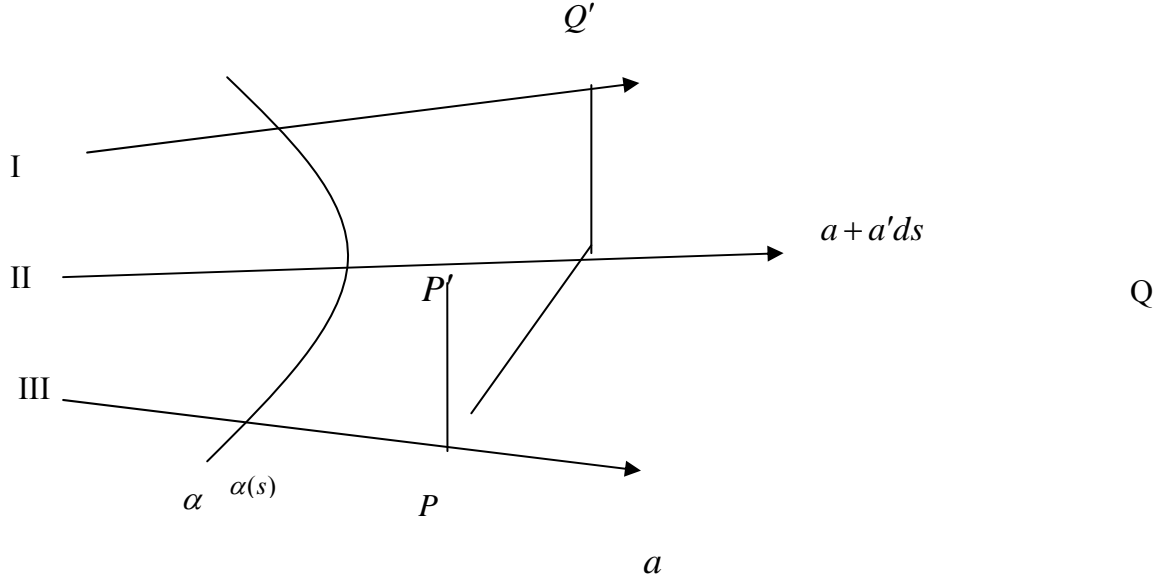
Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin ana doğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin **boğaz (striksiyon) eğrisi (çizgisi)** adı verilir,[8].

Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının η yer vektörü; dayanak eğrisinin $\alpha(s)$ yer vektörü, $a(s)$ doğrultman vektörü ve yer vektörünün dayanak eğrisine olan v uzaklığı cinsinden

$$(3.1.7) \quad \eta(s,v) = \alpha(s) + v a(s)$$

şeklinde ifade edilebilir. v parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultmanı cinsinden bulunur.

Regle yüzeyin ilk ikisi $a(s)$ ve $a(s)+da(s)$ olan komşu üç doğrusu verilsin.



Şekil 3.1.2

P , P' ve Q', Q komşu ana doğrularının üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu ana doğrunun ortak dikmesi

$$a(s) \wedge [a(s) + a'(s)ds] = a(s) \wedge a'(s)ds$$

bağıntısından dolayı $a \wedge a'$ vektörüne paraleldir. Limit halinde PQ vektörü PP' vektörü ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \langle a, PQ \rangle &= 0 \\ \langle a + a'ds, PQ \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olacağından

$$(3.1.8) \quad \langle a', PQ \rangle = 0$$

elde edilir.

Ayrıca $\eta(s, v) = \alpha(s) + va(s)$ den dayanak eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınır

$$\frac{d\eta}{ds} = T + \frac{dv}{ds}a + v\frac{da}{ds}$$

olur. (3.1.7) de yerine yazılırsa $\langle \frac{da}{ds}, \frac{d\eta}{ds} \rangle = 0$ olacağından

$$\langle \frac{da}{ds}, T + \frac{dv}{ds}a + v\frac{da}{ds} \rangle = 0,$$

$$\langle a', T \rangle + v\|a'\|^2 = 0,$$

$$(3.1.9) \quad v = -\frac{\langle a', T \rangle}{\|a'\|^2}$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü için (3.1.7) den

$$(3.1.10) \quad \eta(s, v) = \alpha(s) - \frac{\langle a', T \rangle}{\|a'\|^2} a(s)$$

elde edilir. Eğer $\|a'\| = 0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzey için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (I.1.10) da

$$(3.1.11) \quad v=0 \quad \text{veya} \quad \langle a', T \rangle = 0$$

alınması yeterlidir.

Tanım 3.1.8

Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyin bir ana doğrusunu kapsayan ve yüzey normaline dik olan düzleme **teğet düzlem** denir,[8].

Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + va(s)$$

denkleminde s ve v ye göre türev alındığında

$$\varphi_s = T + va'$$

$$\varphi_v = a$$

elde edilir. Buradan

$$(3.1.12) \quad \begin{aligned} \varphi_s \wedge \varphi_v &= (T + va') \wedge a \\ \varphi_s \wedge \varphi_v &= T \wedge a + va' \wedge a \end{aligned}$$

olur. Ayrıca yüzey normali

$$(3.1.13) \quad N = \frac{\varphi_s \Lambda \varphi_v}{\|\varphi_s \Lambda \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_s \Lambda \varphi_v\|} (T\Lambda a + a'\Lambda a)$$

olduğundan ve μ sabit olmak üzere teğet düzlemin bir noktasındaki vektörel denklemi

$$\langle \mu a, N \rangle = 0$$

veya (3.1.13) den

$$(3.1.14) \quad \det[\mu a, T + va', a] = 0$$

olarak bulunur.

Bir $\varphi(s, v) = \alpha(s) + va(s)$ regle yüzeyinin ana doğrularının dik yörüngeleri teşkil ettirilir ve burada $d\varphi$ nin tam diferensiyeli göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle a, d\varphi \rangle &= 0, \\ \langle a, d\alpha + dva + vda \rangle &= 0, \\ \langle a, d\alpha \rangle + dv\|a\|^2 &= 0, \end{aligned}$$

$$(3.1.15) \quad -dv = \langle a, d\alpha \rangle$$

bulunur. Bu ifadenin kapalı regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integralini alırsak

$$(3.1.16) \quad L_a = \oint_{(\alpha)} \langle d\alpha, a \rangle = - \oint_{(\alpha)} dv$$

elde edilir.

Tanım3.1.9.

$$(3.1.17) \quad \begin{aligned} L_a : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow L_a(v) = - \oint_{(\alpha)} dv \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmış olan L_a fonksiyonuna regle yüzeyin **açılım uzunluğu (adımı)** denir,[8].

Açılım uzunluğu regle yüzeyin integral invaryantıdır. Eğer kapalı regle yüzeyin ortogonal yörüngelerinin bir tam devri gözönüne alınırsa, adım hiçbir zaman regle yüzeyin striksiyon eğrisinin uzunluğunu aşamaz, fakat eşitlik hali mümkündür. Açılabilir kapalı regle yüzeyin adımı sıfır ise striksiyon eğrisi bir nokta ve dolayısıyla regle yüzey bir koni olur.

Tanım3.1.10.

Ana doğrusunun birim doğrultman vektörü a olan bir $\varphi(s, v) = \alpha(s) + va(s)$ regle yüzeyinin ana doğrularına dik bir doğrultunun bir periyot sonra ilk konumu ile yaptığı açıya

regle yüzeyin **açılım açısı** denir,[8].Açılım açısının λ_a değeri

$$(3.1.18) \quad \lambda_a = - \oint_{\alpha(s)} d\theta$$

veya

$$(3.1.19) \quad \lambda_a = - \oint_{\alpha(s)} d\theta = \oint_{\alpha(s)} \langle da_2, a_3 \rangle = - \oint_{\alpha(s)} \langle da_3, a_2 \rangle$$

olarak bulunur.

3.2 E^n de (k+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler

E^n de diferensiyellenebilir bir

$$\begin{aligned} \alpha: I &\rightarrow E^n \\ t &\rightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

eğrisi verilmiş olsun. Her $\alpha(t)$ noktasında tanımlanmış ortonormal vektör alan sistemi $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ olmak üzere bu sistem $T_{\alpha(t)}(E^n)$ uzayının k- boyutlu bir altuzayını gerer, bu uzayı $E_k(t)$ ile gösterirsek

$$(3.2.1) \quad E_k(t) = Sp\{e_1(t), \dots, e_k(t)\} \subset T_{\alpha(t)}(E^n)$$

olur.

Tanım 3.2.1.

$E_k(t)$ altuzayı α eğrisi boyunca hareket ederken E^n de bir k+1 boyutlu yüzey meydana getirir. Bu yüzeye E^n de (k+1)-boyutlu **genelleştirilmiş regle yüzey** denir. E^n de (k+1)- boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyi Φ ile gösterelim.

Tanım 3.2.2.

$E_k(t)$ altuzayına Φ nin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman uzayı, α eğrisine de Φ nin dayanak eğrisi adı verilir. Φ için bir parametrisasyon

$$(3.2.2) \quad \Phi(t, u_1, u_2, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

dir. Φ nin t ye ve u_i ye göre türevleri alınır

$$\begin{aligned} \Phi_t &= \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i(t) , \\ \Phi_{u_i} &= e_i(t) , \quad 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.2.3.

$$(3.2.3) \quad Sp\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k, \dot{e}_1(t), \dots, \dot{e}_k(t)\}$$

altuzayına Φ nin $E_k(t)$ ye göre **asimptotik demeti** denir ve $A(t)$ ile gösterilir,[4].

$0 \leq k \leq m$ olmak üzere $\text{boy}A(t)=k+m$ olduğu açıktır. $E_k(t)$ yi ihtiva eden $A(t)$ asimptotik demetinin

$$(3.2.4) \quad \{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$$

şeklinde bir ortanormal bazı bulunabilir.

Teorem 3.2.1.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey Φ olsun. $\forall t \in I$ için $E_k(t)$ uzayının öyle bir $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ bazı bulunabilir ki, bu baz için,

$$(3.2.5) \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \kappa_i > 0 \quad (\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_m > 0)$$

$$(3.2.6) \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j \quad m < i \leq k$$

dir. Burada $\{e_1, \dots, e_k\}$ bazı Φ nin $A(t)$ asimptotik demetinin 3.2.4 bazını tek olarak belirler.

Tanım 3.2.4.

Yukarıdaki gibi tanımlanan $\{e_1, \dots, e_k\}$ bazına $E_k(t)$ nin **tabii taşıyıcı bazı** veya Φ nin **asli çatısı** denir,[7].

Φ sabit bir noktası P olsun. $P = \Phi(t, u_1, u_2, \dots, u_k)$ ise P noktasındaki teğet uzayın bir bazı

$$(3.2.7) \quad \{\dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i(t), e_1, \dots, e_k\}$$

olur.

Tanım 3.2.5.

$$(3.2.8) \quad Sp\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dot{e}_1, \dots, \dot{e}_k, \dot{\alpha}\} \subset \bigcup_{p \in \Phi} T_p(\phi)$$

altuzayına Φ nin $E_k(t)$ ye göre **teğetsel demeti** denir ve $T(t)$ ile gösterilir,[4].

$$\text{boy}A(t)=k+m, \quad 0 \leq k \leq m$$

olduğundan

$$(3.2.9) \quad k+m \leq \text{boy}T(t) \leq k+m+1$$

dir.

$T(t)$ nin boyutu için iki ihtimali ayrı ayrı inceleyelim. Kabul edelim ki $\forall t \in I$ için $\text{boy}T(t)=k+m$ olsun. Bu durumda Φ nin α dayanak eğrisinin hız vektörü $A(t)$ uzayının içindedir ve

$$(3.2.10) \quad \dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \sum_{j=1}^m \eta_j a_{k+j} \quad , \quad \xi_j, \eta_j \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. Herhangi $P(t)$ dayanak eğrisi için

$$(3.2.11) \quad P(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i(t) e_i(t)$$

yazılabilir. Burada türev alarak

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^k (\dot{u}_i e_i + u_i \dot{e}_i), \\ \dot{P}(t) &= \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \sum_{j=1}^m \eta_j a_{k+j} + \sum_{i=1}^k (\dot{u}_i e_i + u_i \dot{e}_i) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlik ve Teo.3.2.1. den

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \sum_{i=1}^k (\xi_i + \dot{u}_i) e_i + \sum_{j=1}^m \eta_j a_{k+j} + \sum_{i=1}^m u_i \dot{e}_i + \sum_{i=m+1}^k u_i \dot{e}_i, \\ \dot{P}(t) &= \sum_{i=1}^k (\xi_i + \dot{u}_i) e_i + \sum_{j=1}^m \eta_j a_{k+j} + \sum_{i=1}^m u_i \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \right) + \sum_{i=m+1}^k u_i \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j \right), \\ \dot{P}(t) &= \sum_{j=1}^k (\xi_j + \dot{u}_j + \sum_{i=1}^m u_i \alpha_{ij} + \sum_{i=m+1}^k u_i \alpha_{ij}) e_j + \sum_{s=1}^m \eta_s a_{k+s} + \sum_{s=1}^m u_s \kappa_s a_{k+s} \quad , \\ (3.2.12) \quad \dot{P}(t) &= \sum_{j=1}^k (\xi_j + \dot{u}_j + \sum_{i=1}^m u_i \alpha_{ij}) e_j + \sum_{s=1}^m (\eta_s + \kappa_s u_s) a_{k+s} \end{aligned}$$

bulunur.

$$(3.2.13) \quad \kappa_s u_s + \eta_s = 0 \quad , \quad 1 \leq s \leq m$$

biçimindeki $P(t)$ noktaları için $\dot{P}(t)$ vektörleri $E_k(t)$ içindedir. κ_s , $1 \leq s \leq m$, değerleri sıfırdan farklı olduklarından (3.2.13) sisteminin çözümü tektir, yani u_s , $1 \leq s \leq m$, skalarleri tek olarak hesaplanabilir.

Tanım 3.2.6.

(3.2.11) de görüldüğü gibi $P(t)$ noktasını u_s , $1 \leq s \leq m$, ler temsil etmektedir. Burada bu bileşenlerden $(k-m)$ -tanesi keyfi seçilebilir. Belli bir t için (3.2.11) ve (3.2.13) eşitliklerini

sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi $E_k(t)$ içinde $(k-m)$ boyutlu bir uzayı doldururlar. Bu uzaya Φ nin $E_k(t)$ içindeki **sırt (edge) uzayı** denir ve $K_{k-m}(t)$ ile gösterilir,[4].

Tanım II.1.7.

$K_{k-m}(t)$ sırt uzayı, doğrultman uzayı olarak α eğrisi boyunca Φ tarafından ihtiva edilen bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye Φ nin $(k-m+1)$ -boyutlu **sırt regle yüzeyi** denir,[7].

Şimdi $\forall t \in I$ için $\text{boy}T(t)=k+m+1$ olsun. Bu durumda

$$\dot{\alpha} \notin Sp\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$$

dir . Bu halde $T(t)$ nin

$$(3.2.14) \quad \{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

şeklinde bir ortonormal baz bulunabilir. $\eta_{m+1} \neq 0$ olmak üzere,

$$(3.2.15) \quad \dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \sum_{j=1}^m \eta_j a_{k+j} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

yazılabilir.

Herhangi bir $P(t)$ dayanak eğrisinin (3.2.11) deki ifadesinde t ye göre türev alınıp, türev denkleminde (3.2.15) ifadesi yerine konulduktan sonra Teo.3.2.1. uygulanarak $\dot{P}(t)$ türev vektörü için

$$\dot{P}(t) = \sum_{i=1}^k (\xi_j + \dot{u}_i + \sum_{j=1}^m u_j \alpha_{ij}) e_i + \sum_{s=1}^m (\eta_s + \kappa_s u_s) a_{k+s} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

bulunur.

$\kappa_s u_s + \eta_s = 0$, $1 \leq s \leq m$, olacak biçimdeki $P(t)$ noktaları için $\dot{P}(t)$ vektörleri $Sp\{e_1, \dots, e_k, \dot{\alpha}\}$ da yatarlar.

Tanım 3.2.8

$1 \leq s \leq m$ için elde edilen m -tane $\kappa_s u_s + \eta_s = 0$ lineer denklemi ile tanımlanan $P(t)$ noktalarının doldurduğu $(k-m)$ -boyutlu uzaya Φ nin $Z_{k-m}(t)$ içindeki **merkez uzayı** denir ve $Z_{k-m}(t)$ ile gösterilir,[4].

Tanım 3.2.9

$Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı doğrultman uzayı olarak α eğrisi boyunca hareket ederken Φ

tarafından ihtiva edilen bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye Φ nin $(k-m+1)$ -boyutlu **merkez regle yüzeyi** denir ve Ω ile gösterilir,[7].

Tanım 3.2.10

Φ $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyine ait $(k-m+1)$ -boyutlu Ω merkez regle yüzeyinin bir ortagonal yörüngesi r olmak üzere, Ω doğrultman uzayına total olarak dik olan bir doğrultman uzayı, r yi dayanak eğrisi olarak kabul ederek bir regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye Φ nin $(m+1)$ -boyutlu **asli regle yüzeyi** denir ve Λ ile gösterilir,[4]. Λ nin doğrultman uzayı $F_m(t)$ ile gösterilirse

$$(3.2.16) \quad \text{boy } F_m(t) + \text{boy } Z_{k-m}(t) = \text{boy } E_k(t)$$

bulunur ve ayrıca

$$(3.2.17) \quad \begin{aligned} F_m(t) &= Sp\{e_1, \dots, e_m\} \\ Z_{k-m}(t) &= Sp\{e_{m+1}, \dots, e_k\} \\ E_k(t) &= Sp\{e_1, \dots, e_k\} \end{aligned}$$

olduğu açıktır.

$(k+1)$ - boyutlu Φ genelleştirilmiş regle yüzeyine ait α dayanak eğrisi için

$$(3.2.18) \quad \dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

olduğundan aşağıdaki iki önerme doğrudur.

i. Φ nin bir $Z_{k-m}(t_0)$ merkez uzayının olması için gerek ve yeter şart $\eta_{m+1}(t_0) \neq 0$ olmasıdır.

ii. Φ nin bir $K_{k-m}(t_0)$ sırt uzayının olması için gerek ve yeter şart $\eta_{m+1}(t_0) = 0$ olmasıdır.

O halde sırt veya merkez uzayından hangisi varsa ona ait regle yüzey için bir parametrizasyon

$$(3.2.19) \quad \Phi(t, u_{m+1}, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k-m} u_{m+i} e_{m+i}(t)$$

olacaktır.

$m=k$ ise $\text{boy } K_{k-m}(t) = \text{boy } Z_{k-m}(t_0) = 0$ dır. Bu durumda sırt regle yüzeyi Φ nin sırt eğrisine dejenere olur, merkez regle yüzeyi ise Φ nin striksiyon çizgisine dejenere olur. Böylece şunu söyleyebiliriz:

Sırt regle yüzeyli genelleştirilmiş regle yüzeyler E^3 ün tanjant yüzeylerine (striksiyon çizgisiz yüzey) genelleşir, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş regle yüzeyler ise E^3 ün striksiyon çizgili regle yüzeylerine genelleşir.

Tanım 3.2.11.

Sırt regle yüzeyli Φ genelleştirilmiş regle yüzeyine ait bir $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$ ortanormal bazını IR^n nin bir $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ ortanormal bazına tamamlayalım. Burada a_{k+m+1}, \dots, a_n vektörlerinin meydana getirdiği $\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ bazına **tamamlayıcı baz** denir,[7]. Eğer Φ merkez regle yüzeyli ise tamamlayıcı ortanormal bazı $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ dir.

$$(3.2.20) \begin{cases} \dot{a}_{k+i} = -\kappa_i e_i + \sum_{j=1}^m \tau_{ij} a_{k+j} + \omega_i a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda} & , 1 \leq i \leq m \\ \dot{a}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \omega_j a_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda} \\ \dot{a}_{k+m+s} = \sum_{j=1}^m \omega_{sj} a_{k+j} + \beta_s a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_{s\lambda} a_{k+m+\lambda} & , 2 \leq s \leq n-k-m \end{cases}$$

dir.

Tanım 3.2.12.

Φ , E^n de merkez regle yüzeyli bir genelleştirilmiş regle yüzey olsun.

$$(3.2.21) \quad \Phi_i(t, u) = \alpha(t) + u e_i(t) \quad , \quad (t, u) \in I \times IR \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

parametrik ifadesi ile tanımlanan Φ_i regle yüzeylerine Φ nin **2-boyutlu asli regle yüzeyleri** denir,[5].

Tanım 3.2.13.

E^n de (k+1) -boyutlu Φ regle yüzeyi

$$\Phi(t, u_1, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

parametrizasyonu verilmiş olsun. Eğer bir p pozitif tam sayısı için

$$(3.2.22) \quad \Phi(t + p, u_1, \dots, u_k) = \Phi(t, u_1, \dots, u_k)$$

ise Φ ye **kapalıdır** denir. Burada p en küçük periyodu gösterir. Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri de kapalıdır,[5].

Tanım 3.2.14.

($k+1$)-boyutlu Φ regle yüzey için

1- $\text{boy}A(t)=k+m=\text{sabit}$, $\forall t \in I$,

2- Bir $J = \{t \mid 0 \leq t \leq p\} \subset I$ kapalı aralığı üzerinde Φ nin p periyotlu asli çatısı mevcut ise Φ regle yüzeyine **basit kapalıdır** denir,[5].

Basit kapalı bir Φ regle yüzeyinin h_i doğrultmanlarının α kapalı dayanak eğrisi boyunca oluşturduğu 2- boyutlu Φ_i , $1 \leq i \leq m$, asli regle yüzeyleri de kapalı olur.

Tanım 3.2.15.

$m=k$ için $\text{boy} K_{k-m}(t)=\text{boy} Z_{k-m}(t)=0$ olduğundan bu durumda Φ nin merkez regle yüzeyi striksiyon çizgisine dönüşür. Bu striksiyon çizgisi α olmak üzere Φ , ($k+1$) – boyutlu basit kapalı genelleştirilmiş regle yüzeyine ait, Φ_i , $1 \leq i \leq k$, 2-boyutlu asli regle yüzeyinin ortogonal yörüngesinin bir periyot sonra ilk ve son noktaları arasındaki uzaklığa Φ nin **i-yinci açılım uzunluğu** denir. Φ nin i-yinci açılım uzunluğu L_i ile gösterilirse

$$(3.2.23) \quad L_i = -\int_0^p \xi_i(t) dt \quad \text{veya} \quad L_i = -\int_0^p \langle d\alpha, e_i \rangle$$

dir,[5].

Tanım 3.2.16.

E^n de ($k+1$)- boyutlu genelleştirilmiş basit kapalı regle yüzey Φ olsun. Φ nin $T(t)$ teğetsel demetinin boyutu $k+m+1$ ise Φ nin, Φ_i 2 – boyutlu asli regle yüzeyleri Φ nin m tane λ_i **açılım açısını** tanımlar ve

$$(3.2.24) \quad \lambda_i = \int_0^p \omega_i(t) dt \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

ile ifade edilir,[5]. $n=k+m+1$ için (3.2.20) denkleminde

$$\omega_i = -\langle a_{k+m+1}, a_{k+i} \rangle$$

bulunur.

Tanım II.1.17.

Φ , $(k+1)$ -boyutlu regle yüzeyinin α dayanak eğrisi için

$$\alpha = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

olmak üzere $\eta_{m+1} \neq 0$ ise

$$(3.2.25) \quad P_i = \frac{\eta_{m+1}}{\kappa_i}, \quad 1 \leq i \leq m$$

ifadesine Φ nin **i-yinci asli dağılma parametresi** denir,[7].

Tanım 3.2.18.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu Φ regle yüzeyinin **total dağılma parametresi**

$$(3.2.26) \quad D = \prod_{j=1}^m P_j$$

ile tanımlanır. Burada P_i ler i -yinci asli dağılma parametreleridir,[11].

Tanım 3.2.19.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu Φ regle yüzeyinin i -yinci açılım uzunluğu L_i , $1 \leq i \leq m$, olsun.

Bu durumda Φ nin **açılım uzunluğu**

$$(3.2.27) \quad L = \sqrt[m]{|L_1 \dots L_m|}$$

olarak tanımlanır,[7].

Tanım 3.2.20.

E^n de $(k+1)$ – boyutlu Φ regle yüzeyinin i -yinci açılım açısı λ_i , $1 \leq i \leq m$, olsun. Bu durumda Φ nin **açılım açısı**

$$(3.2.28) \quad \lambda = \sqrt[m]{|\lambda_1 \dots \lambda_m|}$$

olarak tanımlanır,[11].

Tanım 3.2.21.

E^n de $(k+1)$ – boyutlu Φ regle yüzeyinin asli dağılma parametreleri $P_1 \dots P_m$ olsun. Bu durumda Φ nin dağılma parametresi

$$(3.2.29) \quad P = \sqrt[m]{|P_1 \dots P_m|}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.1.2.

Regüler bir $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ nin bir $E_k(t)$, $t \in I$, doğrultman uzayı içindeki asimptotik ve teğetsel demetleri çakışmıyorlarsa o zaman Φ nin dayanak eğrilerinin hız vektörleri $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+m+1}\}$ uzayında bulunur ve Φ nin bir $Z_{k-m}(t)$ ($m > 0$) merkez uzayına sahiptir. Merkez uzayının noktalarında Φ nin tanjant uzayları $A(t)$ asimptotik demetine diktirler. Φ nin $E_k(t)$ doğrultman uzayı, her P noktasındaki tanjant uzayında bulunur, [4].

3.3 Konoidal Regle Yüzeyler

Bu bölümde konoidal , ortakonoidal ve kuvvetli konoidal regle yüzeyleri tanıtacağız.

Tanım 3.3.1.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey Φ olsun. Φ nin her $E_k(t)$ doğrultman uzayının paralel olduğu sabit bir $E^q \subset E^n$, $q \geq k$, alt uzayı mevcut ise Φ ye **q-konoidal regle yüzey** denir. E^q altuzayına da Φ nin **doğrultu uzayı** denir,[6].

Eğer bir E^n de $(k+1)$ - boyutlu Φ regle yüzeyi $(n-1)$ konoidal ise Φ ye kısaca **konoidaldir** denir. Onun doğrultu uzayı sabit bir **doğrultu hiperdüzlem (Richthyperebone)** dir.

Örnek 3.3.1.

E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında dik silindir yüzeyi bir konoidal regle yüzeydir.

Tanım 3.3.2.

Ω merkez regle yüzeyli ve doğrultu uzayı E^q olan q- konoidal $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ nin merkez noktalarındaki tanjant uzayları E^q doğrultu uzayına ortogonal ise Φ ye **q-ortakonoidaldir** denir. Ya da $q=n-1$ ise Φ ye kısaca **ortakonoidaldir** denir.

Teorem 3.3.1.

E^n de q-konoidal $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey Φ ve Φ nin $A(t)$ asimptotik demetinin boyutu olan $(k+m)$ sabit olsun. Bu durumda E^q doğrultu uzayının boyutu olan q sayısı için

$$(3.3.1) \quad k+m \leq q \leq n-1$$

eşitsizliği geçerlidir ve Φ nin asimptotik demeti E^q doğrultu uzayına paraleldir,[6].

İspat:

Teoremin ispatı için $k+m \leq q$ olduğunu göstermeliyiz. E^q doğrultu uzayının ortogonal tümleyeni olan alt vektör uzayı $(E^q)^\perp$ in ortonormal bazı $\{b_{q+1}, \dots, b_n\}$ olsun. E^q sabit

olduğundan $(E^q)^\perp$ de sabittir. Bu durumda Φ nin $E_k(t)$, $t \in I$, doğrultman uzayının $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ doğal taşıyıcı bazı için ,

$$(3.3.2) \quad \langle b_{q+s}, e_i(t) \rangle = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad , \quad 1 \leq s \leq n - q$$

dir. Buradan t ye göre türev alırsak

$$(3.3.3) \quad \langle b_{q+s}, \dot{e}_i(t) \rangle = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad , \quad 1 \leq s \leq n - q$$

bulunur. Son eşitlikte (3.2.5) ve (3.2.6) türev denklemleri kullanılırsa

$$(3.3.4) \quad \kappa_i \langle b_{q+s}, a_{k+i} \rangle = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad \kappa_i > 0 \quad ,$$

$$(3.3.5) \quad \langle b_{q+s}, a_{k+i} \rangle = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 1 \leq s \leq n - q$$

elde edilir. (3.3.2) ve (3.3.5) ifadelerinde Φ nin $A(t)$ asimptotik demeti $(E^q)^\perp$ e ortogonal , dolayısıyla E^q ya paraleldir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.3.3.

Silindirik olmayan ($m > 0$), q-konoidal ($k+1$)-boyutlu regle yüzey Φ ve Φ nin $A(t)$ asimptotik demetinin boyutu olan ($k+m$) sabit olsun. Eğer $q = k+m$ ise Φ ye **kuvvetli konoidal (strongkonoidal)** denir,[6].

Teorem 3.3.2.

Silindirik olmayan ($m > 0$),q-konoidal ($k+1$)-boyutlu regle yüzeyi Φ , $k+m$ sabit boyutlu $A(t)$ asimptotik demetine ve $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ asli çatısına sahip olsun. Bu durumda Φ kuvvetli konoidaldir ancak ve ancak (3.2.20) ifadesinde

$$\omega_i = 0 \quad , \quad \gamma_{i\lambda} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

dir,[6].

İspat:

Teo.3.3.1 e göre $A(t)$ asimptotik demeti E^q ya paralel olduğundan her $t \in I$ için (3.3.5) den

$$\langle b_{q+s}, a_{k+i}(t) \rangle = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 1 \leq s \leq n - q$$

yazılır ve t ye göre türev alınırsa

$$\langle b_{q+s}, \dot{a}_{k+i}(t) \rangle = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 1 \leq s \leq n - q$$

elde edilir. $\dot{a}_{k+i}(t)$ nin (3.2.20) türev denklemlerindeki değerini burada yerine yazar ve (3.3.2) ve (3.3.5) ifadelerini dikkate alırsak

$$\omega_i(t)\langle b_{q+s}, a_{k+m+1}(t) \rangle + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} \langle b_{q+s}, a_{k+m+\lambda}(t) \rangle = 0$$

elde ederiz. Bu eşitliği açarsak

$$\omega_i \langle b_{q+1}, a_{k+m+1} \rangle + \gamma_{i2} \langle b_{q+1}, a_{k+m+2} \rangle + \dots + \gamma_{i(n-k-m)} \langle b_{q+1}, a_n \rangle = 0$$

$$\omega_i \langle b_{q+2}, a_{k+m+1} \rangle + \gamma_{i2} \langle b_{q+2}, a_{k+m+2} \rangle + \dots + \gamma_{i(n-k-m)} \langle b_{q+2}, a_n \rangle = 0$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\omega_i \langle b_n, a_{k+m+1} \rangle + \gamma_{i2} \langle b_n, a_{k+m+2} \rangle + \dots + \gamma_{i(n-k-m)} \langle b_n, a_n \rangle = 0$$

veya matris formunda yazarsak,

$$(3.3.6) \quad \begin{bmatrix} \langle b_{q+1}, a_{k+m+1} \rangle & \langle b_{q+1}, a_{k+m+2} \rangle & \dots & \langle b_{q+1}, a_n \rangle \\ \langle b_{q+2}, a_{k+m+1} \rangle & \langle b_{q+2}, a_{k+m+2} \rangle & \dots & \langle b_{q+2}, a_n \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle b_n, a_{k+m+1} \rangle & \langle b_n, a_{k+m+2} \rangle & \dots & \langle b_n, a_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \gamma_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{i(n-k-m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

(\Rightarrow): Φ kuvvetli konoidal olsun, yani $q=k+m$ olsun. Bu taktirde Φ nin E^q doğrultu uzayı, $A(t)$ asimptotik demetinin $e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}$ baz vektörleri tarafından gerilir. O halde E^q doğrultu uzayının ortogonal tümleyeni $(E^q)^\perp$ olmak üzere $(E^q)^\perp = Sp\{b_{q+1}, \dots, b_n\}$ ile $Sp\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ aynı uzayı gösterirler. $q=k+m$ olduğundan b_{q+1}, \dots, b_n vektörleri b_{k+m+1}, \dots, b_n halini alırlar. $\{b_{k+m+1}, \dots, b_n\}$ sistemiyle $\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ sistemi aynı uzayın bazları olduklarından birbirlerine karşılık gelirler ve katsayı matrisi, I_{n-q} birim matrisi haline gelir. $\det I_{n-q} \neq 0$ olduğundan çözüm tektir. Buna göre lineer denklem sistemi homojen olduğundan çözüm sadece aşikar çözümdür. Dolayısıyla

$$\omega_i = 0 \quad , \quad \gamma_{i\lambda} = 0 \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir.

(\Leftarrow):

$$\omega_i = 0 \quad , \quad \gamma_{i\lambda} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

olsun. Bu durumda (3.3.6) sağlanır ve dolayısıyla $q=k+m$ olduğu ve $k+m$ nin sabit olduğu görülür. O halde Φ kuvvetli konoidaldir,[6].

Teorem 3.3.3.

E^n de kuvvetli konoidal $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ, Ω merkez regle yüzeyli ise, o zaman Φ $(k+m)$ -ortakonoidaldir.

İspat:

Teorem 3.3.1 e göre Φ nin $A(t)$ asimptotik demeti Φ nin E^{k+m} doğrultu uzayına paraleldir. Ayrıca Teo. 3.1.2 ye göre Φ nin merkez noktalarındaki tanjant uzayları $A(t)$ asimptotik demetine diktirler. O halde ortokonoidallik tanımı gereği Φ $(k+m)$ -ortokonoidaldir.

Bir Φ $(k+1)$ -boyutlu regle yüzeyi p -konoidal ve q -konoidal gibi değişik mertebelerden konoidal olabilir. Eğer $E^q \subset E^p$ olacak şekilde E^q ve E^p doğrultu uzayları mevcut ise Φ aynı anda **q-konoidal ve p-konoidaldir** denir.

Teorem 3.3.4.

$\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ asli çatısına sahip olan, Ω merkez regle yüzeyli, silindirik olmayan $(m>0)$ kuvvetli konoidal $(k+1)$ - boyutlu regle yüzeyi Φ olsun. Eğer Φ ortakonoidal ise (3.2.20) türev denklemlerinde

$$\beta_\lambda = 0, \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

dir. Bu durumda Φ bir n ($=k+m+1$)-boyutlu Öklid uzayında bulunur,[6].

İspat:

Bir Φ $(k+1)$ -boyutlu regle yüzeyi kuvvetli konoidal ise $q=k+m$ dir. Ayrıca Φ merkez regle yüzeyli olduğundan $a_{k+m+1}(t), t \in I$, merkez tanjant vektörü vardır.

Φ $(k+1)$ -boyutlu regle yüzeyi ortokonoidal olsun. Bu durumda $q=n-1$ olup Φ nin doğrultu uzayı bir hiperdüzlemdir. O halde $(E^q)^\perp = Sp\{b\}$, yani (E^q) nun ortogonal tümleyeni 1-boyutlu bir alt uzaydır. Teo. 3.3.3 e göre $a_{k+m+1}(t), t \in I$, merkez tanjant vektörü $Sp\{b\}$ uzayında bulunur. Buna göre

$$\langle b, a_{k+m+1}(t) \rangle = \lambda \quad (\lambda = \text{sabit})$$

yazılabilir. t ye göre türev alınırsa

$$\langle b, \dot{a}_{k+m+1}(t) \rangle = 0$$

olur. $\dot{a}_{k+m+1}(t)$ nin (3.2.20) türev denklemlerindeki değeri yerine yazılır ve (Teorem 3.3.2) gözönüne alınır

$$-\sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_{\lambda} \langle b, a_{k+m+\lambda} \rangle = 0$$

veya

$$\beta_{\lambda} = 0$$

elde edilir. Ayrıca $q=k+m$ ve $q=n-1$ olduğundan $n=k+m+1$ elde edilir ki bu da Φ nin $(k+m+1)$ -boyutlu Öklid uzayında olması demektir.

Teorem 3.3.5.

$\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ asli çatısına sahip olan, Ω merkez regle yüzeyli, silindirik olmayan $(m>0)$ $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ için (3.2.20) türev denklemlerindeki katsayılar için,

$$\omega_i = 0, \beta_{\lambda} = 0, 1 \leq i \leq m, 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

ise Φ ortokonoidaldir,[6].

Teorem III.1.6.

$\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ asli çatısına sahip olan, Ω merkez regle yüzeyli, silindirik olmayan $(m>0)$ $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ , q -ortokonoidal ise (3.2.20) deki katsayılar için,

$$\omega_i = 0, 1 \leq i \leq m$$

dir,[6].

İspat:

Bir Φ $(k+1)$ -boyutlu regle yüzeyi Ω merkez regle yüzeyli ise a_{k+m+1} merkez tanjant vektörü vardır. Φ q -ortokonoidal olduğundan a_{k+m+1} vektörü Φ nin E^q doğrultu uzayına diktir, yani a_{k+m+1} vektörü E^q ya ortonormal vektör uzayında bulunur. E^q sabit olduğundan

$(E^q)^\perp$ de sabittir. O halde a_{k+m+1} merkez tanjant vektörü Φ nin parametrizasyonundaki I parametre aralığının $t_o \in I$ değeri için sabit olarak bulunur. Buna göre

$$\langle a_{k+m+1}(t_o), a_{k+i}(t) \rangle = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

eşitliğinde t ye göre türev alırsak

$$\langle a_{k+m+1}(t_o), \dot{a}_{k+i}(t) \rangle = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir ve $\dot{a}_{k+i}(t)$ nin (3.2.20) deki değeri yerine yazılırsa

$$w_i = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

bulunur.

Tanım 3.3.4.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey Φ ve Φ nin bir $E_k(t_o)$ doğrultman uzayı t_o in bir \mathcal{E} komşuluğunda ($\forall t \in I$ için $|t - t_o| < \varepsilon$) bir Ω merkez regle yüzeyine sahip olsun. Eğer $E_k(t_o)$ nin merkez noktalarındaki tanjant uzayları Φ nin E^q doğrultu uzayına ortogonal iseler $E_k(t_o)$ doğrultman uzayına **q-ortohoid** denir,[6].

Φ nin $(n-1)$ -ortohoid doğrultman uzayına kısaca **orthoid** denir. Bu tanım E^3 teki ortokonoidal ışın yüzeylerinin orthoidal doğrultman uzayı kavramının direkt bir genelleştirilmesidir. E^3 ün sadece dönele (helezoni) yüzeyleri orthoid doğrultman uzayına sahiptir.

Örnek 3.3.2.

E^3 de $E_k(t) = Sp\{X = (0,0,x_3) : x_3 \in IR\}$ altuzayının doğrultman uzayı olarak

$$\begin{aligned} \alpha : I = (0,2\pi) &\rightarrow E^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0) \end{aligned}$$

eğrisi boyunca oluşturduğu yüzeyin denklemi

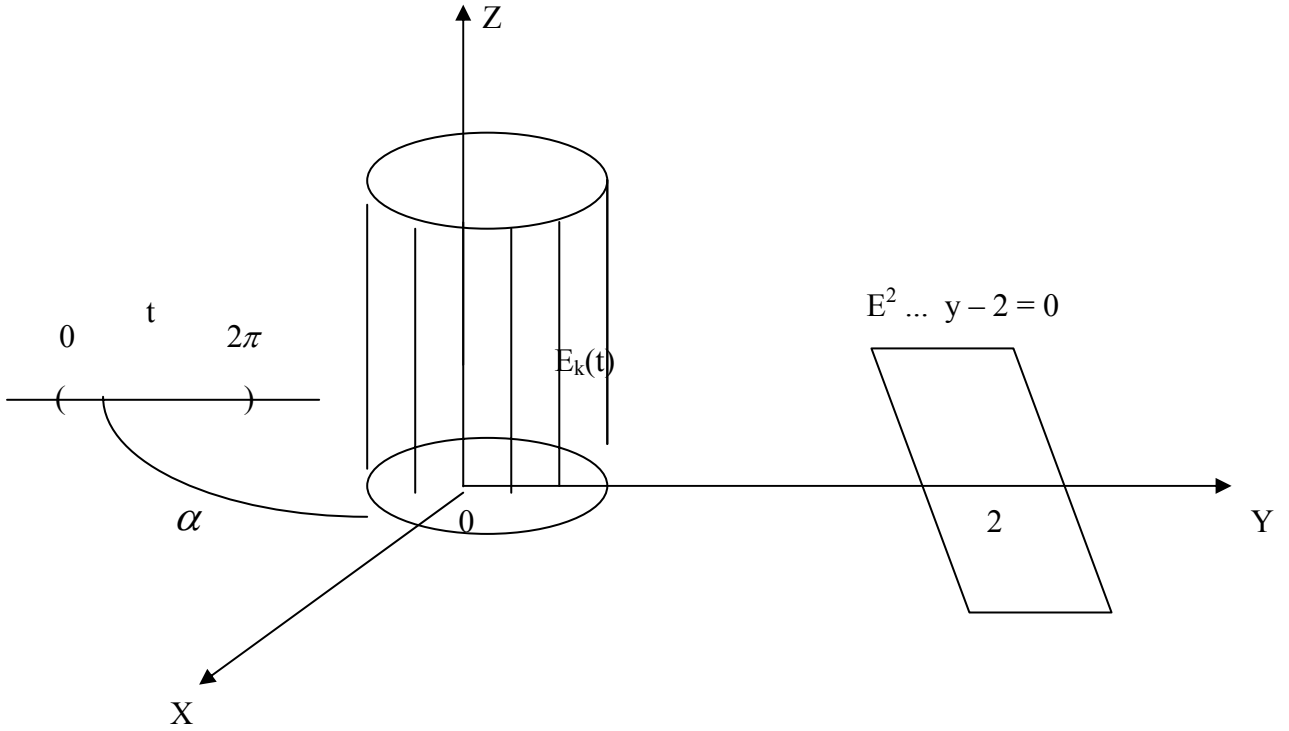
$$\begin{aligned} \Phi(t, \lambda) &= \alpha(t) + \lambda e_3 \\ &= (\cos t, \sin t, 0) + \lambda(0,0,1) \\ &= (\cos t, \sin t, \lambda) \end{aligned}$$

olup Φ dönüşümü E^3 de bir 2-regle yüzey (ışın yüzeyi) gösterir.

$\forall t \in I$ için $E_k(t)$ doğrultman uzayı $E^2 \dots y - 2 = 0$, düzlemine paralel olduğundan Φ ışın yüzeyi E^3 de konoidaldir. Ayrıca $\alpha(t)$ dayanak eğrisi Φ nin merkez regle yüzeyi olup $\alpha(t)$ noktasındaki

$$-\dot{\alpha}(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$$

merkez tanjant uzayı (vektörü) $t = \pi$ için E^2 doğrultu uzayına ortogonaldir. O halde $E_k(\pi)$ doğrultman uzayı Φ nin bir orthoid doğrultman uzayıdır.



Şekil III.1.1

Tanım 3.3.5.

E^n de q-konoidal bir $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey Φ ve Φ nin bir doğrultman uzayı E_k olsun. Eğer E_k nin noktalarında Φ nin tanjant uzayları E^q doğrultu uzayına paralel ise E_k doğrultman uzayına **q-tangoiddir** denir,[6].

Φ nin $(n-1)$ -tangoid doğrultman uzayına kısaca **tangoid doğrultman uzayı** denir.

Örnek 3.3.3 .

(Örnek3.3.2.) de $t = \pi/2$ ve $3\pi/2$ değerlerine karşılık gelen E_k doğrultman uzaylarının noktalarında Φ nin tanjant uzayları E^2 doğrultu uzayına paraleldir. O halde

$E_k(\pi/2)$ ve $E_k(3\pi/2)$ doğrultman uzayları Φ nin tangoid doğrultman uzaylarıdır.

Teorem 3.3.7.

E^n de $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ doğal taşıyıcı baza sahip olan, konoidal basit kapalı $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ , E^n in bir hiperdüzleminde bulunuyorsa Φ en az iki tane tangoid doğrultman uzayına sahiptir, [6].

İspat:

Kapalı bir I aralığında $t_i \in I$, $1 \leq i \leq 2$, için $a_{k+m+1}(t_i)$ merkez tanjant vektörünün E^q doğrultu uzayına paralel olduğunu göstermeliyiz. Hipoteze göre Φ konoidal ve E^n in bir hiperdüzleminde bulunduğundan $q=n-1$ dir. O halde E^q doğrultu uzayının ortogonal tümleyeni sabit bir b vektörünün germiş olduğu altuzaydır. a_{k+m+1} vektörünün E^q ya paralel olduğunu göstermek için b vektörüne dik olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\Phi(t, u_1, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

ifadesinde Φ nin kapalı $\alpha(t)$ dayanak eğrisi için

$$\dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

dir. Buna göre

$$\langle \dot{\alpha}(t), b \rangle = \eta_{m+1}(t) \langle a_{k+m+1}(t), b \rangle$$

olur. Burada Φ nin kapalı bir yörüngesi üzerinde integral alırsak

$$\oint_{\Phi} \eta_{m+1}(t) \langle a_{k+m+1}(t), b \rangle = \oint_{\Phi} \langle \dot{\alpha}(t), b \rangle = 0$$

bulunur. Bu nedenle en az iki $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$, değeri için

$$(3.3.7) \quad \eta_{m+1}(t_i) \langle a_{k+m+1}(t_i), b \rangle = 0$$

dir. Gerçekten,

$$\eta_{m+1}(t_i) \langle a_{k+m+1}(t_i), b \rangle = \eta_{m+1}(t_i) \|a_{k+m+1}(t_i)\| \cdot \|b\| \cdot \cos t_i$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ aralığında $t = \pi/2$ ve $t = 3\pi/2$ değerleri için $\cos t = 0$ olduğundan (3.3.7) ifadesi doğrudur. O halde Φ nin en az iki $t \in I$ değerleri için tangoid doğrultman uzayı vardır.

3.4 Çeşitli Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri

3.4.1 k-Mertebeden Helisel Hareketlere İştirak Eden Aksoid Yüzey Çiftleri

E^n nin $X = A\bar{X} + C$ bir parametrelili hareketi için

$$(3.4.1.1) \quad \dot{X} = B(X - C) + \dot{C}, \quad B = \dot{A}A^{-1}, \quad \dot{X} = 0$$

bulunur. B anti-simetrik matrisinin determinantı, n tek ise sıfırdır, hatta n nin çift olduğu bazı hallerde de sıfırdır. $\forall t \in I$ için $\det B_t \neq 0$ ise

$$(3.4.1.2) \quad B_t(P(t) - C(t)) + \dot{C}(t) = 0$$

denklemin bir tek çözümü vardır. Bu P(t) çözüm noktası hareketin t-anındaki ani dönme merkezi veya pol'üdür. Hareket boyunca P(t) noktaları E de sabit pol eğrisini, \bar{E} de hareketli pol eğrisini oluştururlar. Bu durumda E^n nin 1-parametrelili hareketini, birbirleri üzerinde yuvarlanan pol eğrileri belirler, [14].

Şimdi $\forall t$ ve $\forall n$ için B_t nin determinantının sıfır olduğunu kabul edelim.

Tanım 3.4.1.1.

$\forall t$ ve $\forall n$ için $\det B_t = 0$ olmak üzere rank $B_t = n - k$ olsun. $e(t)$, B_t nin çekirdeğinde bir birim vektör ise

$$(3.4.1.3) \quad B_t(P - C) + \dot{C} = \lambda(t)e(t), \quad \lambda(t) \in \mathbb{R}$$

denkleminin çözümleri k-boyutlu bir uzayı doldururlar, yani denklemin sistemini sağlayan P noktaları \mathbb{R}^n nin k-boyutlu bir alt uzayını doldururlar. Bu uzaya hareketin t-anındaki **Ani Eksen Uzayı** denir ve $E_k(t)$ ile gösterilir ($\lambda(t) \neq 0$ ise **Ani Screw Eksen Uzayı**, $\lambda(t) = 0$ ise **Ani Dönme Uzayı** adını alır), [7].

Tanım 3.4.1.2.

$\bar{\alpha} \subset \bar{E}$ eğrisini dayanak eğrisi kabul ederek, $E_k(t)$ ekseni, hareket boyunca \bar{E} hareketli uzayında bir (k+1)-boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey oluşturur. Bu yüzeye hareketin **Hareketli Aksoid Yüzeyi** denir. $\bar{\Phi}$ ile gösterilir.

Tanım 3.4.1.3.

$E_k(t)$ eksen uzayı,hareket boyunca E sabit uzayında $\alpha = A\bar{\alpha} + C \subset E$ eğrisini dayanak eğrisi kabul ederek bir (k+1)-boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye de hareketin **sabit aksoid yüzeyi** denir. Φ ile gösterilir.

$\bar{\Phi}$ ve Φ nin doğrultman uzayları olan $E_k(t)$ ve $\bar{E}_k(t)$ karşılıklı olarak birbirlerine tekabül eder,[5]. Buna göre E^n deki bu hareketin $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeyleri, $\forall t$ için bu hareket altında ortak bir $E_k(t) \subset \Phi$ ve $\bar{E}_k(t) \subset \bar{\Phi}$ doğrultman uzayı çifti boyunca, yuvarlanarak ve kayarak birbirlerine dokunurlar diyebiliriz,[15].

Tanım 3.4.1.4.

Yukarıdaki özellikleri sağlayan bir harekete E^n nin bir **k. mertebeden (ani) helisel hareketi** denir,[7].

Burada eğrilerin birbirleri üzerinde yuvarlanmasında kayma yoktur,ancak hareketin kendisinde kayma vardır. Eğriler birbirleri üzerinde kaymaksızın yuvarlandığından $\lambda = 0$ alabiliriz.

k-mertebeden bir helisel hareket $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanmasından meydana gelir.

Tanım 3.4.1.5.

Φ (k+1)-boyutlu aksoid yüzeyinin α dayanak eğrisi için

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

olmak üzere, $\eta_{m+1} \neq 0$ ise

$$P_i = \frac{\eta_{m+1}}{\kappa_i}, \quad 1 \leq i \leq m$$

ifadesine Φ nin **i-yinci asli dağılma parametresi** denir,[7].

m=0 için $\kappa_i, 1 \leq i \leq m$,ler tanımsızdır. Bu durumda Ω ile Φ birleşir ve (k+1)- boyutlu silindir meydana gelir. Gerçekten E^3 te silindir için P_a dağılma parametresi belirsizdir.

O halde Φ nin dejenere olmamış bir (k-m+1)-boyutlu merkez (veya sırt) regle yüzeyinin olması için

(3.4.1.4) $0 < m < k$
olmalıdır.

Teorem 3.4.1.1.

E^n nin k-mertebeden bir helisel hareketi $X = A\bar{X} + C$ ile verilsin.

i. Bu hareket altında meydana gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin asli çatılarını oluşturan vektörler

$$(3.4.1.5) \quad A\bar{e}_i = e_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

eşitliği ile birbirlerine karşılık gelirler.

ii. Bu vektörlerin türevleri arasında şu bağıntı vardır:

$$(3.4.1.6) \quad A\dot{\bar{e}}_i = \dot{e}_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

iii. $\bar{\Phi}$ ve Φ nin, sırası ile, P_i ($1 \leq i \leq m$) asli dağılma parametreleri için

$$(3.4.1.7) \quad |P_i| = |\bar{P}_i|$$

dir.

İspat :

i. $\bar{\Phi}$ nin ve Φ nin asli çatıları, sırası ile, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k\}$ olsun.

$$f: E^n \rightarrow E^n$$

$$\bar{X} \rightarrow f(\bar{X}) = X = A\bar{X} + C$$

$$f_x: T_x(E^n) \rightarrow T_x(E^n)$$

$$\dot{\bar{X}} \rightarrow f_x(\dot{\bar{X}}) = \dot{X}$$

ve $f_x = A$ olduğundan

$$e_i = A\bar{e}_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

bulunur. Hatta

$$(3.4.1.8) \quad a_{k+i} = A\bar{a}_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq k$$

$$(3.4.1.9) \quad a_{k+m+j} = A\bar{a}_{k+m+j}, \quad 1 \leq j \leq n - k - m$$

olmalıdır,[5].

ii. $\{e_1, \dots, e_k\}$ sistemini B nin çekirdeğini gerekçe şekilde seçelim. Yani

$$(3.4.1.10) \quad B e_i = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

olsun . (3.4.1.5) dan t ye göre türev alırsak

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \dot{A} \bar{e}_i + A \dot{\bar{e}}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad , \\ \dot{e}_i &= \dot{A} A^{-1} e_i + A \dot{\bar{e}}_i \quad \left(\bar{e}_i = A^{-1} e_i \right) \quad , \\ \dot{e}_i &= B e_i + A \dot{\bar{e}}_i \end{aligned}$$

bulunur ve buradan da (3.4.1.10) ifadesi dikkate alınır (3.4.1.6) bağıntısı bulunmuş olur.

iii. $\bar{\Phi}$ için bir parametrizasyon

$$\bar{\Phi}(t, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k) = \bar{\alpha} + \sum_{j=1}^k \bar{u}_j \bar{e}_j(t)$$

dir. $\bar{\Phi}$ nin asli çatısındaki vektörler için

$$\dot{\bar{e}}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i} \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad \bar{\kappa}_i > 0$$

olmak üzere, son eşitliğin her iki tarafına hareketin Jakobian dönüşümü olan A yı uygulayalım:

$$\begin{aligned} A \dot{\bar{e}}_i &= A \left(\sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i} \right) \quad , \\ A \dot{\bar{e}}_i &= \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} A \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i A \bar{a}_{k+i} \quad . \end{aligned}$$

Burada (3.4.1.5), (3.4.1.6) ve (3.4.1.8) kullanılarak

$$(3.4.1.11) \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} e_j + \bar{\kappa}_i a_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad \bar{\kappa}_i > 0$$

bulunur. Öte yandan Φ nin $\{e_1, \dots, e_k\}$ asli çatısı için

$$(3.4.1.12) \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_{ij} a_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad \kappa_i > 0$$

olduğundan bu son ifade ile (3.4.1.12) birleştirilirse

$$\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} \quad , \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i > 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

$\bar{\Phi}$ nin $\bar{\alpha}$ dayanak eğrisi için

$$\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1}$$

olacağından bu eşitliğin her iki tarafına A'yı uygularsak ;

$$A\dot{\bar{\alpha}} = A\left(\sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} A\bar{a}_{k+m+1}\right) ,$$

$$A\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i A\bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} A\bar{a}_{k+m+1} ,$$

$$(3.4.1.13) \quad A\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i e_i + \bar{\eta}_{m+1} a_{k+m+1}$$

ifadesi elde edilir.

$$\alpha = A\bar{\alpha} + C \quad (\bar{\alpha} = A^{-1}(\alpha - C)) ,$$

$$\dot{\alpha} = \dot{A}\bar{\alpha} + A\dot{\bar{\alpha}} + \dot{C} ,$$

$$\dot{\alpha} = \dot{A}A^{-1}(\alpha - C) + A\dot{\bar{\alpha}} + \dot{C} ,$$

$$\dot{\alpha} = B(\alpha - C) + \dot{C} + A\dot{\bar{\alpha}} , \quad B(\alpha - C) + \dot{C} = \lambda e ,$$

$$\dot{\alpha} = \lambda e + A\dot{\bar{\alpha}}$$

$$A\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha} - \lambda e \quad , \quad \lambda e = 0 ,$$

$$(3.4.1.14) \quad A\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha} .$$

(3.4.1.13) ile (3.4.1.14) i birleştirirsek

$$(3.4.1.15) \quad \dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i e_i + \bar{\eta}_{m+1} a_{k+m+1}$$

bulunur. Öte yandan α dayanak eğrisi için

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

olduğundan bu son ifade ile (3.4.1.16) ifadesi karşılaştırılırsa

$$(3.4.1.16) \quad \bar{\xi}_i = \xi_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

ve

$$(3.4.1.17) \quad |\bar{\eta}_{m+1}| = |\eta_{m+1}|$$

bulunur.

$$\bar{P}_i = \frac{\bar{\eta}_{m+1}}{\bar{K}_i} ,$$

$$|\bar{P}_i| = \frac{|\bar{\eta}_{m+1}|}{\bar{\kappa}_i}$$

ifadesinde (3.4.1.17) i yerine koyarsak

$$|\bar{P}_i| = |P_i| \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

bulunur.

Tanım 3.4.1.6.

Bir Φ genelleştirilmiş regle yüzeyinin asli dağılma parametreleri P_1, \dots, P_m olmak üzere

$$P = \sqrt[m]{|P_1 \dots P_m|}$$

ifadesine Φ nin **dağılma parametresi** denir,[7].

Teorem 3.4.1.2

E^n nin bir k-mertebeden helisel hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ hareketli ve sabit aksoid yüzeylerinin dağılma parametreleri aynıdır.

Tanım 3.4.1.7.

$m < i \leq k$ için verilen

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j$$

ifadesindeki katsayılar için

$$\alpha_{ij} = 0$$

ise Φ nin Ω merkez (veya sırt) regle yüzeyi **silindiriktir** denir.

Teorem 3.4.1.3.

E^n nin bir k-mertebeden helisel hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ hareketli ve sabit aksoid yüzeylerinin merkez (veya sırt) regle yüzeyleri $\bar{\Omega}$ ve Ω olmak üzere, $\bar{\Omega}$ silindiriktir ancak Ω silindiriktir.

İspat:

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j \quad , \quad m < i \leq k$$

ifadesinden yararlanarak

$$\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} \quad ; \quad 1 \leq j \leq k \quad , \quad m < i \leq k$$

bulunur ve buradan da ispat tamamlanabilir.

k-mertebeden kapalı helisel hareketlere iştirak eden aksoid yüzey çiftlerinin açılım uzunluğu ve açılım açısı için (3.4.1.1) ile verilen k-mertebeden helisel hareketi göz önüne alalım. Bu hareket için

$$(3.4.1.18) \quad A(t+p) = A(t) \quad , \quad C(t+p) = C(t)$$

ise harekete kapalıdır denir. Hareketin kapalı olması herhangi bir $\bar{\alpha}$ kapalı eğrisi için $\alpha = A\bar{\alpha} + C$ resim eğrisinin kapalı olması demektir. Dolayısıyla bu durumda, bu eğrileri dayanak eğrisi kabul eden hareketli ve sabit aksoid yüzeyleri kapalı olurlar. Şimdi bu yüzey çiftleri için i-yinci açılım uzunlukları ile şu teoremi verelim.

Teorem 3.4.1.4

$X = A\bar{X} + C$ ile verilen k-mertebeden helisel hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ hareketli ve sabit aksoid yüzeylerinin i-yinci açılım uzunlukları aynıdır.

İspat:

$\bar{\Phi}$ hareketli aksoid yüzeyinin $\bar{\alpha}$ dayanak eğrisi için

$$\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1}$$

olmak üzere $\bar{\Phi}$ nin i-yinci açılım uzunluğu

$$\bar{L}_i = -\int_0^p \bar{\xi}_i(t) dt \quad , \quad 1 \leq i \leq m = k \quad (p, \text{periyot})$$

dir. Benzer düşünce ile Φ sabit aksoid yüzeyinin i-yinci açılım uzunluğu

$$L_i = -\int_0^p \xi_i(t) dt \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

olacaktır. Teo.3.4.1.1 nin ispatını yaparken

$$\bar{\xi}_i = \xi_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

bulmuştuk. Buradan

$$(3.4.1.19) \quad \bar{L}_i = L_i, \quad 1 \leq i \leq m = k$$

yazılır.

$\bar{\Phi} \subset E^n$ kapalı hareketli yüzeyine ait $\bar{T}(t)$ teğetsel demetinin boyutu $k+m+1$ olmak üzere $n=k+m+1$ olsun. Bu durumda (II.1.20) ifadesi

$$(3.4.1.20) \quad \dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -\sum_{i=1}^m \bar{w}_i \bar{a}_{k+i}$$

olacaktır.

Teorem 3.4.1.5

k -mertebeden kapalı helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ , hareketli ve sabit aksoid yüzeylerinin i -yinci açılım açıları $\bar{\lambda}_i$ ve λ_i olmak üzere bu açılar arasındaki bağıntı

$$(3.4.1.21) \quad \lambda_i = \bar{\lambda}_i + \int_0^p \langle A\bar{a}_{k+i}, \dot{A}\bar{a}_{k+m+1} \rangle, \quad 1 \leq i \leq m$$

dir.

İspat:

$$a_{k+m+1} = A\bar{a}_{k+m+1}$$

$$\dot{a}_{k+m+1} = \dot{A}\bar{a}_{k+m+1} + A\dot{\bar{a}}_{k+m+1}$$

$\bar{\Phi}$ ye ait (3.4.1.20) ifadesini ve Φ ye ait benzer ifadeyi kullanarak ;

$$-\sum_{i=1}^m w_i a_{k+i} = \dot{A}\bar{a}_{k+m+1} + A\left(-\sum_{i=1}^m \bar{w}_i \bar{a}_{k+i}\right),$$

$$-\sum_{i=1}^m w_i a_{k+i} = \dot{A}\bar{a}_{k+m+1} - \sum_{i=1}^m \bar{w}_i A\bar{a}_{k+i},$$

$$-\sum_{i=1}^m w_i a_{k+i} = \dot{A}\bar{a}_{k+m+1} - \sum_{i=1}^m \bar{w}_i a_{k+i}$$

bulunur. Son eşitliğin her iki yanını a_{k+i} ile çarpalım:

$$-w_i = -\bar{w}_i + \langle a_{k+i}, \dot{A}\bar{a}_{k+m+1} \rangle, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$(3.4.1.22) \quad -w_i = -\bar{w}_i + \langle A\bar{a}_{k+i}, \dot{A}\bar{a}_{k+m+1} \rangle, \quad 1 \leq i \leq m$$

(3.4.1.22) de her iki tarafın 0 dan p ye kadar integralini alırsak (3.4.1.21) ün ispatı tamamlanmış olur.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \\ a_{k+m+1} &= \left(\frac{1}{\eta_{m+1}} \right) \left[\dot{\alpha} - \sum_{i=1}^k \xi_i e_i \right], \\ Ba_{k+m+1} &= \left(\frac{1}{\eta_{m+1}} \right) \left[B\dot{\alpha} - \sum_{i=1}^k \xi_i Be_i \right], \\ \langle a_{k+i}, Ba_{k+m+1} \rangle &= \left(\frac{1}{\eta_{m+1}} \right) \left[\langle B\dot{\alpha}, a_{k+i} \rangle - \sum_{i=1}^k \xi_i \left\langle \underbrace{Be_i}_0, a_{k+i} \right\rangle \right], \\ \langle a_{k+i}, Ba_{k+m+1} \rangle &= \left(\frac{1}{\eta_{m+1}} \right) \langle B\dot{\alpha}, a_{k+i} \rangle, \\ \langle a_{k+i}, Ba_{k+m+1} \rangle &= \left(\frac{1}{\eta_{m+1}} \right) \langle \dot{A}A^{-1}A\dot{\alpha}, \bar{a}_{k+i} \rangle, \quad A\dot{\alpha} = \dot{\alpha}, \\ \langle a_{k+i}, Ba_{k+m+1} \rangle &= \left(\frac{1}{\eta_{m+1}} \right) \langle \dot{A}\dot{\alpha}, A\bar{a}_{k+i} \rangle, \end{aligned}$$

$$(3.4.1.23) \quad \int_0^p \langle a_{k+i}, Ba_{k+m+1} \rangle = \int_0^p \left(\frac{1}{\eta_{m+1}} \right) \langle A^{-1}\dot{A}\dot{\alpha}, \bar{a}_{k+i} \rangle.$$

Eğer $\eta_{m+1} = c$ (sabit) ise (3.4.1.23) eşitliğinin sağ tarafı, \bar{a}_{k+i} vektörünün, türevi $A^{-1}\dot{A}\dot{\alpha}$ olan bir eğri boyunca çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğunun c^{-1} katıdır. Sol taraf ise (3.4.1.21) ifadesinin sağ yanındaki terime eşittir. Böylece $\bar{\Phi}$ ve Φ nin i-yinci açılım açılımları arasında değişik bir ifade elde edilir.

Tanım 3.4.1.8.

Φ ye ait 2-boyutlu Φ_i , $1 \leq i \leq m = k$, asli regle yüzeylerinin açılım uzunlukları L_i olmak üzere

$$L = \sqrt[m]{|L_1 \dots L_m|}$$

ifadesine Φ nin açılım uzunluğu denir.

Sonuç 3.4.1.1.

$\bar{\Phi}$ ve Φ , hareketli ve sabit aksoid yüzeylerinin açılım uzunlukları eşittir.

Tanım 3.4.1.9.

Φ ye ait 2-boyutlu Φ_i , $1 \leq i \leq m = k$, asli regle yüzeylerinin açılım açıları λ_i olmak üzere

$$\lambda = \sqrt[m]{|\lambda_1 \dots \lambda_m|}$$

ifadesine Φ nin açılım açısı denir.

3.4.2 Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri

E^n de bir homotetik hareket

$$X = F(X) = hA\bar{X} + C, \quad h = hI_n, \quad A \in SO(n), \quad C \in IR_1^n$$

olmak üzere $hA=S$ için

$$X = S\bar{X} + C, \quad ,$$

$$\dot{X} = \dot{S}\bar{X} + S\dot{\bar{X}} + \dot{C}, \quad \dot{\bar{X}} = 0, \quad \bar{X} = S^{-1}(X - C)$$

ve $\dot{S}S^{-1} = H$ alırsak

$$\dot{X} = H(X - C) + \dot{C}, \quad H = H(t) = H_t$$

bulunur.

Her $t \in I$ için $\det H_t \neq 0$ olduğundan daima bir tek pol noktası vardır. Bu nokta \bar{E} hareketli uzayında \bar{Q} ve E sabit uzayında Q ile gösterilirse, \bar{Q} ve Q sırası ile hareketli ve sabit uzaylarda $\bar{\alpha}$ ve α hareketli ve sabit pol eğrilerini çizerler. O halde $\forall t \in I$ için böyle pol eğrileri daima vardır. Bu eğriler pol noktaları üzerinde kayarak yuvarlanırlar,[13].

Pol noktalarında bu eğrilerin hızları sıfır olacağından

$$\dot{S}\bar{X} + \dot{C} = 0$$

$$(3.4.2.1) \quad \bar{\alpha} = -\dot{S}^{-1}\dot{C}$$

$$(3.4.2.2) \quad \alpha = S\bar{\alpha} + C$$

olur. (3.4.2.1) ifadesi hareketli pol eğrisinin, (3.4.2.2) ifadesi de sabit pol eğrisinin ifadeleridir.

Şimdi her $\bar{\alpha}(t)$ noktasına bağlanmış $\{\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_k(t)\}$ ortonormal vektör alan sistemini göz önüne alalım.

Tanım 3.4.2.1

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketi esnasında oluşan $\bar{\alpha}$ eğrisi boyunca $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ sistemi \bar{E} hareketli uzayında bir $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey

meydana getirir. Bu yüzeye hareketin (k+1)-boyutlu **hareketli genelleştirilmiş regle yüzeyi** denir,[1].Bu yüzeyi $\bar{\Phi}$ ile gösterirsek $\bar{\Phi}$ için bir parametrizasyon

$$(3.4.2.3) \quad \bar{\Phi}(t, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k) = \bar{\alpha} + \sum_{i=1}^k \bar{u}_i \bar{e}_i(t)$$

olur.

$$(3.4.2.4) \quad S \bar{e}_i(t) = \varepsilon_i(t) \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

diyerek

$$(3.4.2.5) \quad \{\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_k(t)\}$$

ortogonal sistemini α pol eğrisinin $\alpha(t) = S\bar{\alpha}(t) + C(t)$ noktasına bağlayalım.

Tanım 3.4.2.2

Bu homotetik hareket altında, $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ sistemi, α resim eğrisini dayanak eğrisi kabul ederek E sabit uzayında bir yüzey meydana getirir. Bu regle yüzeye hareketin (k+1)-boyutlu **Sabit Genelleştirilmiş Regle Yüzeyi** denir,[1].

Teorem 3.4.2.1

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketi boyunca oluşan $\bar{\Phi}$ ve Φ hareketli ve sabit genelleştirilmiş regle yüzeyleri, dayanak eğrileri boyunca birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanır.

İspat:

$\bar{\Phi}$ ve Φ nin dayanak eğrileri arasındaki (3.4.2.2) bağıntısını kullanarak

$$(3.4.2.6) \quad \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{S}\bar{\alpha} + \dot{C} + S\dot{\alpha} \quad , \\ \dot{\alpha} &= S\dot{\bar{\alpha}} \quad (\text{pol noktalarında } \dot{S}\bar{\alpha} + \dot{C} = 0) \quad , \end{aligned}$$

$$d\alpha = Sd\bar{\alpha} \quad ,$$

$$\|d\alpha\| = \|Sd\bar{\alpha}\| \quad ,$$

$$\|d\alpha\| = |h| \|Ad\bar{\alpha}\| \quad ,$$

$$(3.4.2.7) \quad \int_{\alpha} \|d\alpha\| = \int_{\bar{\alpha}} |h| \|d\bar{\alpha}\|$$

bulunur. Bu da $\bar{\Phi}$ ve Φ nin hareket boyunca birbirleri üzerinde kayarak yuvarlandığını gösterir.

Tanım 3.4.2.3

$\bar{\Phi}$ ve Φ genelleştirilmiş regle yüzeylerin birbirleri üzerinde kaymalı yuvarlanmasını sağlayan $X = S\bar{X} + C$ hareketine E^n nin **k. mertebeden homotetik hareketi** denir.

$$\begin{aligned} F : E^n &\rightarrow E^n \\ \bar{X} &\rightarrow F(\bar{X}) = S\bar{X} + C \quad , \\ F_x : T_{\bar{x}}(E^n) &\rightarrow T_x(E^n) \\ \bar{e}_i &\rightarrow F_x(\bar{e}_i) = Se_i = \varepsilon_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad . \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$(3.4.2.8) \quad \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = h^2 \delta_{ij} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq k$$

olur. O halde $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ ortogonal sistemini

$$(3.4.2.9) \quad e_i = \frac{\varepsilon_i}{h} \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

olarak ortonormalleştirilebiliriz. Yani Φ ye ait $E_k(t)$ doğrultman uzayının bir tabii taşıyıcı bazı olarak $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortonormal sistemini alabiliriz. Dolayısıyla Φ için bir parametrizasyon

$$(3.4.2.10) \quad \Phi(t, u_1, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

olur. Burada $\{e_1, \dots, e_k\}, E_k(t)$ nin tabii taşıyıcı bazıdır.

$\bar{\Phi}$ nin asimptotik demetinin $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}\}$ ortonormal bazı ve Φ nin $A(t)$ asimptotik demetine ait ortonormal baz $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$ olarak alınırsa

$$(3.4.2.11) \quad S\bar{a}_{k+i} = ha_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir,[1].

$\bar{\Phi}$ nin $\bar{T}(t)$ teğetsel demetinin boyutunun $(k+m+1)$ olması halinde $\bar{T}(t)$ nin bir ortonormal $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m+1}\}$ bazı için Φ nin $T(t)$ teğetsel demetine ait bir

ortonormal baz $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m+1}\}$ olsun. Burada

$$(3.4.2.12) \quad S\bar{a}_{k+m+1} = ha_{k+m+1}$$

bağıntısı geçerlidir,[1].

$\bar{\Phi}$ ve Φ merkez regle yüzeyle ise bunların $\{\bar{a}_{k+m+2}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ tamamlayıcı ortonormal bazları arasında

$$S\bar{a}_{k+m+\lambda} = ha_{k+m+\lambda}$$

bağıntısı vardır.

Teorem 3.4.2.2

E^n nin bir k.mertebeden homotetik hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ genelleştirilmiş regle yüzeylerine ait asli çatıları oluşturan vektörleri arasındaki bağıntı

$$A\bar{e}_i = e_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

dır,[1].

Teorem 3.4.2.3

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ genelleştirilmiş regle yüzeyleri verilsin. $\bar{\Phi}$ ve Φ nin asli çatılarını oluşturan vektörlerin türevlerine ait

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &= \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i}, \\ \dot{e}_i &= \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \end{aligned}$$

eşitliklerindeki katsayılar arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$(3.4.2.13) \quad \left. \begin{aligned} \dot{S}S^{-1} + \bar{\alpha}_{ii} &= \begin{pmatrix} \dot{h} \\ h \end{pmatrix} + \alpha_{ii}, \quad i = j \\ \bar{\alpha}_{ij} &= \alpha_{ij}, \quad 1 \leq j \leq k, \quad i \neq j \end{aligned} \right\} 1 \leq i \leq m$$

$$(3.4.2.14) \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

İspat

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= h e_i \quad , \\ \dot{\varepsilon}_i &= \dot{h} e_i + h \dot{e}_i \quad , \\ \dot{\varepsilon}_i &= \left(\frac{\dot{h}}{h} \right) \varepsilon_i + h \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \right) \quad , \\ \dot{\varepsilon}_i &= \left(\frac{\dot{h}}{h} \right) \varepsilon_i + \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} h e_j + \kappa_i h a_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3.4.2.15.) \quad \dot{\varepsilon}_i &= \left[\left(\frac{\dot{h}}{h} \right) + \alpha_{ii} \right] \varepsilon_i + \sum_{i \neq j}^k \alpha_{ij} \varepsilon_j + \kappa_i A_{k+i} \quad , \\ \varepsilon_i &= S \bar{e}_i \quad , \\ \dot{\varepsilon}_i &= \dot{S} \bar{e}_i + S \dot{\bar{e}}_i \quad , \\ \dot{\varepsilon}_i &= \dot{S} S^{-1} \varepsilon_i + S \left(\sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i} \right) \quad , \quad \dot{\bar{e}}_i = S^{-1} \dot{\varepsilon}_i \quad , \\ \dot{\varepsilon}_i &= \dot{S} S^{-1} \varepsilon_i + \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} S \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i S \bar{a}_{k+i} \quad , \\ \dot{\varepsilon}_i &= \dot{S} S^{-1} \varepsilon_i + \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \varepsilon_j + \bar{\kappa}_i \mathcal{A}_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \\ (3.4.2.16) \quad \dot{\varepsilon}_i &= (\dot{S} S^{-1} + \bar{\alpha}_{ii}) \varepsilon_i + \sum_{j \neq i}^k \bar{\alpha}_{ij} \varepsilon_j + \bar{\kappa}_i \mathcal{A}_{k+i} \quad .\end{aligned}$$

(3.4.2.15) ve (3.4.2.16) ifadeleri karşılaştırılırsa (3.4.2.13) ve (3.4.2.14) eşitliklerinin varlığı görülür.

Teorem 3.4.2.4

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ genelleştirilmiş regle yüzeylerinin dayanak eğrileri $\bar{\alpha}$ ve α olmak üzere

$$\begin{aligned}\bar{\dot{\alpha}} &= \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1} \quad , \\ \dot{\alpha} &= \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}\end{aligned}$$

ifadelerindeki katsayılar arasında şu bağıntılar vardır:

$$(3.4.2.17) \quad h\bar{\xi}_i = \xi \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

$$(3.4.2.18) \quad |h\bar{\eta}_{m+1}| = |\eta_{m+1}|$$

İspat:

$$\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1} \quad ,$$

$$S\dot{\bar{\alpha}} = S\left(\sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1}\right) \quad ,$$

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i S\bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} S\bar{a}_{k+m+1} \quad (S\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha}) \quad ,$$

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i \varepsilon_i + \bar{\eta}_{m+1} \mathcal{A}_{k+m+1} \quad (\varepsilon_i = S\bar{e}_i \quad , \quad \mathcal{A}_{k+m+1} = S\bar{a}_{k+m+1}) \quad ,$$

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i h e_i + \bar{\eta}_{m+1} h a_{k+m+1} \quad ,$$

$$(3.4.2.19) \quad \dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k h \bar{\xi}_i e_i + h \bar{\eta}_{m+1} a_{k+m+1} \quad .$$

Öte yandan $\dot{\alpha}$ nın hipotezdeki değeri dikkate alınır (3.4.2.17) ve (3.4.2.18) bağıntıları elde edilir.

Teorem 3.4.2.5

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ genelleştirilmiş regle yüzeylerinin i-yinci asli dağılma parametreleri arasında

$$(3.4.2.20) \quad |P_i| = |h| |\bar{P}_i| \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

bağıntısı vardır.

İspat:

Φ nin i-yinci dağılma parametresi $P_i = \left(\frac{\eta_{m+1}}{K_i}\right)$ olduğundan her iki tarafın

mutlak değeri alınıp (3.4.2.14) ve (3.4.2.18) ifadeleri dikkate alınır (3.4.2.20) eşitliği ispat edilmiş olur.

Teorem 3.4.2.6

$\bar{\Phi}$ ve Φ nin dağılma parametreleri arasında

$$(3.4.2.21) \quad P = |h|\bar{P}$$

bağıntısı vardır.

İspat:

Φ nin dağılma parametresi $P = \sqrt[m]{|P_1 \dots P_m|}$ şeklinde tanımlı olduğundan

(3.4.2.20) eşitliği dikkate alınarak (3.4.2.21) bağıntısı ispat edilir .

Teorem 3.4.2.7

Teorem.3.4.2.3 de verilen (3.4.2.13) bağıntıları $1 \leq i \leq m$, $m < i \leq k$, için de doğrudur.

İspat:

$m < i \leq k$ için verilen

$$\dot{\bar{e}}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j$$

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j$$

bağıntıları kullanılarak Teorem 3.4.2.6 nın ispat metodu ile ispat tamamlanır. O halde

$$(3.4.2.22) \quad \left. \begin{aligned} \dot{S}S^{-1} + \bar{\alpha}_{ii} &= \begin{pmatrix} \dot{h} \\ h \end{pmatrix} + \alpha_{ii} \quad , \quad i = j \\ \bar{\alpha}_{ij} &= \alpha_{ij} \quad 1 \leq j \leq k \quad , \quad i \neq j \end{aligned} \right\} \quad m < i \leq k$$

olacağından $\forall i, j$ ($m < i \leq k$, $1 \leq j \leq k$) için $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij}$ dir diyemeyiz. Dolayısıyla $\bar{\Phi}$ ve Φ nin merkez (veya sırt)regle yüzeyleri ortak silindirik özelliklere sahip olamazlar. Yani birisi silindirik ise diğeri silindirik olmayabilir.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketinin kapalı olması, $\bar{\alpha}$ ve α hareketli ve sabit pol eğrilerinin kapalı olması demektir. Dolayısıyla bu durumda $\bar{\Phi}$ ve Φ genelleştirilmiş regle yüzeyleri kapalı olurlar. Şimdi $\bar{\Phi}$ ve Φ nin basit kapalı olmaları ve $m=k$ olması halinde tanımlı olan i -yinci açılım uzunlukları arasındaki bağıntıyı bir teoremle verelim.

Teorem 3.4.2.8

$X = S\bar{X} + C$ kapalı homotetik hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ hareketli ve sabit genelleştirilmiş regle yüzeylerine ait i-yinci açılım uzunlukları

$$(3.4.2.23) \quad \bar{L}_i = -\int_0^p \bar{\xi}_i(t) dt \quad , \quad L_i = -\int_0^p \xi_i(t) dt \quad , \quad 1 \leq i \leq m = k$$

olmak üzere

$$dL_i = h d\bar{L}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m = k .$$

İspat:

(3.4.2.23) eşitliklerinde diferansiyel alınarak

$$dL_i = -\bar{\xi}_i dt \quad , \quad dL_i = -\xi_i dt$$

bulunur. Bu eşitliklerle (3.4.2.17) bağıntısı birleştirilirse

$$dL_i = -h \bar{\xi}_i dt \quad ,$$

$$dL_i = h(-\bar{\xi}_i dt) \quad ,$$

$$(3.4.2.24) \quad dL_i = h d\bar{L}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m = k$$

bulunur.

Teorem 3.4.2.9

k-mertebeden kapalı helisel harekete iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ hareketli ve sabit genelleştirilmiş regle yüzeylerinin i-yinci açılım açıları $\bar{\lambda}_i$ ve λ_i olmak üzere bu açılar arasındaki bağıntı

$$(3.4.2.25) \quad \lambda_i = \bar{\lambda}_i + \int_0^p \langle A\bar{a}_{k+i}, \dot{A}\bar{a}_{k+m+1} \rangle \quad , \quad 1 \leq i \leq m .$$

İspat:

$$A_{k+m+1} = S\bar{a}_{k+m+1} \quad \text{ve} \quad A_{k+m+1} = h a_{k+m+1} \quad \text{olduğundan}$$

$$a_{k+m+1} = A\bar{a}_{k+m+1}$$

bulunur. Buradan t ye göre türev alarak $\bar{\Phi}$ ye ait (3.4.1.22) ifadesini ve Φ ye ait benzer ifadeyi kullanarak

$$-w_i = -\bar{w}_i + \langle A\bar{a}_{k+i}, \dot{A}\bar{a}_{k+m+1} \rangle \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir ve buradan da 0 dan p ye kadar integral alınarak (3.4.2.25) bağıntısı ispat edilir.

3.4.3 E^n de k . Mertebeden Simetrik Helisel Hareketlere İştirak Eden Aksoid Yüzey Çiftleri

Bu bölümde E^n deki k .mertebeden helisel hareketlerden yararlanarak k . mertebeden simetrik helisel hareketler tanımlanacaktır.

Tanım 3.4.3.1.

E^n de k .mertebeden helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen hareketli ve sabit aksoidler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. $\bar{\Phi}$ ve Φ nin doğrultman uzayları sırasıyla $\bar{E}_k(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $E_k(t) = Sp\{e_1, \dots, e_k\}$ olmak üzere, bu ortonormal sistemler, helisel hareketler altında birbirlerine

$$(3.4.3.1) \quad A\bar{e}_i = -e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

ifadesi ile karşılık geliyorsa bu helisel harekete E^n de **k .mertebeden simetrik helisel hareket** adı verilir.

Teorem 3.4.3.1.

k .mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeyleri, dayanak eğrileri boyunca birbirleri üzerinde kaymaksızın yuvarlanırlar.

İspat:

$\bar{\Phi}$ ve Φ nin dayanak eğrileri pol eğrileri olarak seçilirse, bu eğriler hareket altında birbirlerine $\alpha = A\bar{\alpha} + C$ şeklinde karşılık gelirler. Burada eğrilerin parametrelerine göre türev alınırsa

$$\dot{\alpha} = A\dot{\bar{\alpha}} + \dot{A}\bar{\alpha} + \dot{C}$$

bulunur. Pol noktalarında $\dot{A}\bar{\alpha} + \dot{C} = 0$ olduğundan

$$(3.4.3.2) \quad \dot{\alpha} = A\dot{\bar{\alpha}}$$

elde edilir. α ve $\bar{\alpha}$ nin yay uzunlukları, sırasıyla, S ve \bar{S} ile gösterilirse

$$S = \int \|\dot{\alpha}\| dt ,$$

$$S = \int \|A\dot{\bar{\alpha}}\| dt ,$$

$$S = \int \|\dot{\bar{\alpha}}\| dt \quad (A \in O(n))$$

$$S = \bar{S}$$

dir.

Teorem 3.4.3.2.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin doğrultman uzayları $\bar{E}_k(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $E_k(t) = Sp\{e_1, \dots, e_k\}$ olmak üzere

$$(3.4.3.3) \quad A\dot{\bar{e}}_i = -\dot{e}_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

dir.

İspat:

$\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ sistemini B nin çekirdeğini gerecek şekilde seçmiştik. (3.4.3.1)

bağıntısından türev alırsak

$$\begin{aligned} \dot{A}\bar{e}_i + A\dot{\bar{e}}_i &= -\dot{e}_i & (\dot{\bar{e}} &= -A^{-1}\dot{e}_i), \\ -\dot{A}^{-1}Ae_i + A\dot{\bar{e}}_i &= -\dot{e}_i & (B &= \dot{A}A^{-1}), \\ -Be_i + A\dot{\bar{e}}_i &= -\dot{e}_i & (Be_i &= 0), \\ A\dot{\bar{e}}_i &= -\dot{e}_i, & & 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 3.4.3.1.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin doğrultman uzayları olan $\bar{E}_k(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $E_k(t) = Sp\{e_1, \dots, e_k\}$ ye göre asimptotik demetleri sırasıyla, $\bar{A}(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_1, \dots, \dot{\bar{e}}_k\}$ ve $A(t) = Sp\{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_1, \dots, \dot{e}_k\}$ olmak üzere, bu uzayların vektörleri birbirlerine

$$A\bar{e}_i = -e_i, \quad A\dot{\bar{e}}_i = -\dot{e}_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

bağıntıları ile karşılık gelirler.

$\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin boyutunun $k+m$, $0 \leq m \leq k$, olmasından dolayı bu demetlerde $\dot{\bar{e}}_1, \dots, \dot{\bar{e}}_k$ ve $\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_k$ vektörlerinin lineer bağımsız olan m -tanesi alınırsa $\bar{A}(t)$ asimptotik demetinin bir bazı

$$(3.4.3.4) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}\}, \quad 0 \leq m \leq k$$

olur. Benzer düşünce ile $A(t)$ asimptotik demetinin bir bazı da

$$(3.4.3.5) \quad \{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_{k+1}, \dots, \dot{e}_{k+m}\}, \quad 0 \leq m \leq k$$

şeklindedir.

$\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_{k+1}, \dots, \dot{e}_{k+m}\}$ bazlarında ilk k tane vektörden oluşan $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k\}$ sistemleri ortogonal olduğundan $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ nin ortogonal bazları, sırasıyla,

$$(3.4.3.6) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_{k+m}\}$$

ve

$$(3.4.3.7) \quad \{e_1, \dots, e_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}\}$$

olarak alınabilir. Bu ortogonal bazların simetrik helisel hareketler altında birbirlerine nasıl karşılık geldiğini aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.4.3.3.

k .mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin doğrultman uzayları olan $\bar{E}_k(t)$ ve $E_k(t)$ ye göre asimptotik demetlerinin ortogonal bazları sırasıyla, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_{k+m}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}\}$ olmak üzere

$$(3.4.3.8) \quad A\bar{y}_{k+j} = -y_{k+j}, \quad 1 \leq j \leq m$$

dir.

İspat:

$\bar{\Phi}$ nin asimptotik demeti olan $A(t)$ nin (III.3.5) ile verilen bazına ortogonalleştirme metodu uygulanarak elde edilen $\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}\}$ sisteminin vektörleri

$$\begin{aligned}
y_1 &= e_1 , \\
y_2 &= -\frac{\langle y_1, e_2 \rangle}{\|y_1\|} y_1 + e_2 , \\
y_3 &= -\frac{\langle y_1, e_3 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{\langle y_2, e_3 \rangle}{\|y_2\|^2} y_2 + e_3 , \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_k &= -\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle y_j, e_k \rangle}{\|y_j\|^2} y_j + e_k , \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_{k+1} &= -\sum_{j=1}^k \frac{\langle y_j, \dot{e}_{k+1} \rangle}{\|y_j\|^2} y_j + \dot{e}_{k+1} , \\
&\cdot \\
y_{k+2} &= -\sum_{j=1}^{k+1} \frac{\langle y_j, \dot{e}_{k+2} \rangle}{\|y_j\|^2} y_j + \dot{e}_{k+2} , \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_{k+m} &= -\sum_{j=1}^{k+m-1} \frac{\langle y_j, \dot{e}_{k+m} \rangle}{\|y_j\|^2} y_j + \dot{e}_{k+m}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Simetrik helisel hareketlerde, tanım gereğince, $A\bar{e}_i = -e_i$, $1 \leq i \leq k$, olduğundan $i \neq j$ için $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ dır. Ayrıca Teo.3.4.3.2. den $A\dot{e}_i = -\dot{e}_i$, $1 \leq i \leq k$, dır. Bu neticeler yukarıdaki formüllerde kullanılırsa

$$y_i = e_i , \quad 1 \leq i \leq k$$

bulunur ve buradan da

$$y_{k+1} = -\sum_{j=1}^k \frac{\langle e_j, \dot{e}_{k+1} \rangle}{\|e_j\|^2} e_j + \dot{e}_{k+1} ,$$

$$y_{k+1} = (-A) \left(-\sum_{j=1}^k \frac{\langle \bar{e}_j, \dot{\bar{e}}_{k+1} \rangle}{\|\bar{e}_j\|^2} \bar{e}_j + \dot{\bar{e}}_{k+1} \right)$$

bağıntısı bulunur. Burada parantez içindeki ifade $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}\}$ bazının ortogonalleştirilmesi esnasında elde edilen \bar{y}_{k+1} vektörüdür. O halde y_{k+1} vektörleri arasında

$$A \bar{y}_{k+1} = -y_{k+1}$$

bağıntısı vardır. Buna göre y_{k+2}, \dots, y_{k+m} vektörleri içinde benzer uygulamayla

$$A \bar{y}_{k+2} = -y_{k+2}$$

.

.

.

$$A \bar{y}_{k+m} = -y_{k+m}$$

bağıntıları bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.4.3.2.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin ortogonal bazları birbirlerine

$$A \bar{e}_i = -e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

ve

$$A \bar{y}_{k+j} = -y_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m$$

bağıntıları ile karşılık gelirler.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin ortogonal bazları, sırasıyla, (IV.3.6) ve (IV.3.7) bağıntıları ile verilmiş olsun. Bu bazları ortonormalleştirebiliriz. $\{e_1, \dots, e_k\}$ sistemi ortonormal olduğundan

$$(3.4.3.9) \quad a_{k+j} = \frac{y_{k+j}}{\|y_{k+j}\|} \quad , \quad \bar{a}_{k+j} = \frac{\bar{y}_{k+j}}{\|\bar{y}_{k+j}\|} \quad , \quad 1 \leq j \leq m$$

alınırsa $\bar{\Phi}$ nin $\bar{A}(t)$ asimptotik demeti için

$$(3.4.3.10) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}\}$$

ortonormal bazı ve Φ nin $A(t)$ asimptotik demeti içinde

$$(3.4.3.11) \quad \{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$$

ortonormal bazı bulunur.

Teorem 3.4.3.4.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin ortonormal bazları, sırasıyla, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$ olmak üzere bazlar birbirlerine

$$A\bar{e}_i = -e_i \quad 1 \leq i \leq k$$

$$(3.4.3.12) \quad A\bar{a}_{k+j} = -a_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m$$

şeklinde karşılık gelirler.

İspat:

(3.4.3.1) bağıntısından dolayı $A\bar{e}_i = -e_i$, $1 \leq i \leq k$ dir. Diğer taraftan (3.4.3.9) bağıntısındaki

$$a_{k+j} = \frac{y_{k+j}}{\|y_{k+j}\|}$$

ifadeleriyle Sonuç 3.4.3.2. gözönüne alınır

$$a_{k+j} = \frac{-Ay_{k+j}}{\|-Ay_{k+j}\|} \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

bulunur. Ayrıca (3.4.3.9) bağıntısındaki \bar{a}_{k+j} nin değeri dikkate alınır

$$a_{k+j} = \frac{-Ay_{k+j}}{\|-Ay_{k+j}\|} \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$a_{k+j} = -A\bar{a}_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad ,$$

buradan da

$$A\bar{a}_{k+j} = -a_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m$$

bulunur.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetleri sırasıyla, $\bar{T}(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_1, \dots, \dot{\bar{e}}_m, \dot{\bar{\alpha}}\}$ ve $T(t) = Sp\{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_1, \dots, \dot{e}_k, \dot{\alpha}\}$ dir. Burada boy $\bar{T}(t)$ ($= boy T(t)$) $= k+m$ ise $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin bazları $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_{k+1}, \dots, \dot{e}_{k+m}\}$ olur. Bunlar aynı zamanda $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$

asimptotik demetlerinin bazıları olduklarından $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ nin, sırasıyla, (3.4.3.10) ve (3.4.3.11) ortonormal bazıları $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ için de bir ortonormal bazlardır.

Kabul edelim ki boy $\bar{T}(t)(= \text{boy}T(t)) = k + m + 1$ olsun. O zaman $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin

$$(3.4.3.13) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_{k+m}, \bar{y}_{k+m+1}\}$$

ve

$$(3.4.3.14) \quad \{e_1, \dots, e_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}, y_{k+m+1}\}$$

şeklinde ortogonal bazıları elde edilir.

Teorem 3.4.3.5.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetleri için, $\text{boy}\bar{T}(t)(= \text{boy}T(t)) = k + m + 1$ ise $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin ortogonal bazıları birbirlerine

$$A\bar{e}_i = -e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$A\bar{y}_{k+j} = -y_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad ,$$

$$(3.4.3.15) \quad A\bar{y}_{k+m+1} = y_{k+m+1}$$

şeklinde karşılık gelirler.

İspat:

$\bar{\Phi}$ nin $T(t)$ teğetsel demetinin $\{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_1, \dots, \dot{e}_k, \dot{\alpha}\}$ bazının ortogonalleştirilmiş şekli $\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}, y_{k+m+1}\}$ olsun. Bu taktirde $i \neq j$ için $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ olduğundan ortogonalleştirme metodundan

$$y_i = e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

elde edilir ve böylece $T(t)$ nin ortogonal bazı $\{e_1, \dots, e_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}, y_{k+m+1}\}$ olur. Ayrıca yine ortogonalleştirme metodu ile

$$y_{k+m+1} = -\sum_{i=1}^k \frac{\langle y_i, \dot{\alpha} \rangle}{\|y_i\|^2} y_i - \sum_{j=1}^m \frac{\langle y_{k+j}, \dot{\alpha} \rangle}{\|y_{k+j}\|^2} y_{k+j} + \dot{\alpha}$$

dır. Burada (3.4.3.1) , (3.4.3.8) ve Sonuç 3.4.3.2. kullanılacak olursa

$$y_{k+m+1} = A \left(-\sum_{i=1}^k \frac{\langle \bar{e}_i, \dot{\bar{\alpha}} \rangle}{\|\bar{e}_i\|^2} e_i - \sum_{j=1}^m \frac{\langle \bar{y}_{k+j}, \dot{\bar{\alpha}} \rangle}{\|\bar{y}_{k+j}\|^2} \bar{y}_{k+j} + \dot{\bar{\alpha}} \right)$$

bulunur. Burada

$$\bar{y}_{k+m+1} = -\sum_{i=1}^k \frac{\langle \bar{y}_i, \dot{\bar{\alpha}} \rangle}{\|\bar{y}_i\|^2} \bar{y}_i - \sum_{j=1}^m \frac{\langle \bar{y}_{k+j}, \dot{\bar{\alpha}} \rangle}{\|\bar{y}_{k+j}\|^2} \bar{y}_{k+j} + \dot{\bar{\alpha}}$$

olduğundan

$$A\bar{y}_{k+m+1} = y_{k+m+1}$$

bulunur. O halde $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin ortogonal baz vektörleri birbirlerine

$$A\bar{e}_i = -e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$A\bar{y}_{k+j} = -y_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad ,$$

$$A\bar{y}_{k+m+1} = y_{k+m+1}$$

şeklinde dönüşürler. $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin sırasıyla $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}\}$

ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$ ortonormal bazları elde edilir.

Teorem 3.4.3.6.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin ortonormal bazları, sırasıyla $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$ olmak üzere bu ortonormal baz vektörleri birbirlerine

$$A\bar{e}_i = -e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$A\bar{a}_{k+j} = -a_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad ,$$

$$A\bar{a}_{k+m+1} = a_{k+m+1}$$

bağıntıları ile karşılık gelirler.

İspat:

$\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$ sistemleri, sırasıyla, $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ nin ortonormal bazları olduklarından Teo.3.4.3.4 gereğince

$$A\bar{e}_i = -e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k ,$$

$$A\bar{a}_{k+j} = -a_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m$$

ve

$$a_{k+m+1} = \frac{y_{k+m+1}}{\|y_{k+m+1}\|}$$

formülünde (3.4.3.15) eşitliği kullanılarak

$$a_{k+m+1} = A \left(\frac{\bar{y}_{k+m+1}}{\|\bar{y}_{k+m+1}\|} \right)$$

elde edilir. Burada parantez içindeki ifade \bar{a}_{k+m+1} vektörüdür. O halde

$$A\bar{a}_{k+m+1} = a_{k+m+1}$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerine ait bazlar kullanılarak E^n de $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ ortonormal bazları bulunur ve bu şekilde elde edilen $\{\bar{a}_{k+m+1}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ ortonormal bazlarına $\bar{\Phi}$ ve Φ nin, sırasıyla, **tamamlayıcı bazları** denir. Eğer $\bar{\Phi}$ ve Φ merkez regle yüzeyli iseler tamamlayıcı bazlar $\{\bar{a}_{k+m+2}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ şeklinde olur.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin tamamlayıcı bazlarının birbirlerine nasıl karşılık geldiğini gösterebiliriz.

Kabul edelim ki $\bar{\Phi}$ ve Φ merkez regle yüzeyli olsunlar. O zaman tamamlayıcı ortonormal bazlar $\{\bar{a}_{k+m+2}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ dır. Bu baz vektörlerine simetrik helisel hareketler altında karşılık gelen vektörler $y_{k+m+\lambda}$, $2 \leq \lambda \leq n-k-m$, ile gösterilirse

$$(3.4.3.16) \quad A\bar{a}_{k+m+\lambda} = y_{k+m+\lambda} \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

yazılabilir ve $\{y_{k+m+2}, \dots, y_n\}$ sistemi $\bar{\Phi}$ ye karşılık gelen Φ aksoid yüzeyi için tamamlayıcı ortogonal bir bazdır. Bu baz ortonormalleştirilirse

$$a_{k+m+\lambda} = \frac{y_{k+m+\lambda}}{\|y_{k+m+\lambda}\|}$$

olmak üzere Φ için $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ tamamlayıcı ortonormal baz elde edilir. (3.4.3.16)

bağıntısından, $A\bar{a}_{k+m+\lambda} = y_{k+m+\lambda}$ konumu yapılırsa

$$a_{k+m+\lambda} = A\left(\frac{\bar{a}_{k+m+\lambda}}{\|\bar{a}_{k+m+\lambda}\|}\right)$$

bulunur. $\|\bar{a}_{k+m+\lambda}\|=1$ olduğundan $A\bar{a}_{k+m+\lambda} = a_{k+m+\lambda}$, $2 \leq \lambda \leq n-k-m$ elde edilir.

Sonuç 3.4.3.3.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeyleri merkez regle yüzeyli olsun. $\bar{\Phi}$ ve Φ nin tamamlayıcı ortonormal bazları $\{\bar{a}_{k+m+2}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ olmak üzere buradaki baz vektörleri arasında

$$A\bar{a}_{k+m+\lambda} = a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 3.4.3.4.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin ortonormal bazları, sırasıyla, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, a_n\}$ olmak üzere bu ortonormal baz vektörleri birbirlerine

$$A\bar{e}_i = -e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$A\bar{a}_{k+j} = -a_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad ,$$

$$A\bar{a}_{k+m+\lambda} = a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq \lambda \leq n-k-m$$

bağıntıları ile dönüştüğünden k.mertebeden simetrik helisel hareket E^n de (n-k-m)-boyutlu $Sp\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ alt uzayına göre bir yansımadır.

3.4.4 k. Mertebeden Simetrik Helisel Hareketler Altında Aksoid Çiftlerinin Dağılma Parametreleri, Açılım Uzunlukları Ve Açılım Açılı

Teorem 3.4.4.1.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden aksoid yüzeyleri

$\bar{\Phi}$ ve Φ , bunların dayanak eğrileri $\bar{\alpha}$ ve α olmak üzere

$$\dot{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1} \quad , \quad \dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

ifadelerindeki katsayılar arasında

$$(3.4.4.1) \quad \bar{\xi}_i = -\xi_i \quad , \quad \bar{\eta}_{m+1} = \eta_{m+1} \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

bağıntıları vardır.

İspat:

$$\dot{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1}$$

ifadesinin A altındaki görüntüsüne bakarsak

$$A \dot{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i A \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} A \bar{a}_{k+m+1} \quad ,$$

$$A \dot{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i (-e_i) + \bar{\eta}_{m+1} A \bar{a}_{k+m+1} \quad ,$$

$$A \dot{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^k -\bar{\xi}_i e_i + \bar{\eta}_{m+1} a_{k+m+1}$$

elde edilir. $A \dot{\bar{\alpha}}(t) = \dot{\alpha}$ olduğu göz önüne alınır ve bu son ifade $\dot{\alpha}$ nin hipotezdeki değeri ile karşılaştırılırsa

$$\bar{\xi}_i = -\xi_i \quad , \quad \bar{\eta}_{m+1} = \eta_{m+1} \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

bulunur.

Teorem 3.4.4.2.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerine ait

$$\dot{\bar{a}}_{k+i} = -\bar{\kappa}_i \bar{e}_i + \sum_{j=1}^m \bar{\tau}_{ij} \bar{a}_{k+j} + \bar{\omega}_i \bar{a}_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\gamma}_{i\lambda} \bar{a}_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

ve

$$\dot{a}_{k+i} = -\kappa_i e_i + \sum_{j=1}^m \tau_{ij} a_{k+j} + \omega_i a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

türev vektörlerinin katsayıları arasında

$$(3.4.4.2) \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i \quad , \quad \bar{\omega}_i = \omega_i \quad , \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = -\gamma_{i\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

bağıntıları vardır.

İspat:

$$\dot{\bar{a}}_{k+i} = -\bar{\kappa}_i \bar{e}_i + \sum_{j=1}^m \bar{\tau}_{ij} \bar{a}_{k+j} + \bar{\omega}_i \bar{a}_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\gamma}_{i\lambda} \bar{a}_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

vektörünün hareketin A Jacobian dönüşümü altındaki resmine bakarsak

$$A \dot{\bar{a}}_{k+i} = -\bar{\kappa}_i A \bar{e}_i + \sum_{j=1}^m \bar{\tau}_{ij} A \bar{a}_{k+j} + \bar{\omega}_i A \bar{a}_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\gamma}_{i\lambda} A \bar{a}_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad ,$$

$$(3.4.4.3) \quad A \dot{\bar{a}}_{k+i} = -\bar{\kappa}_i e_i - \sum_{j=1}^m \bar{\tau}_{ij} a_{k+j} + \bar{\omega}_i a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\gamma}_{i\lambda} a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

$$A \bar{a}_{k+i} = -a_{k+i}$$

ifadesinde türev alarak

$$\dot{a}_{k+i} = -\dot{A} \bar{a}_{k+i} - A \dot{\bar{a}}_{k+i} \quad (\bar{a}_{k+i} = -A^{-1} a_{k+i}) \quad ,$$

$$\dot{a}_{k+i} = -\dot{A} A^{-1} a_{k+i} - A \dot{\bar{a}}_{k+i} \quad (\dot{A} A^{-1} = B) \quad ,$$

$$(3.4.4.4) \quad A \dot{\bar{a}}_{k+i} = B a_{k+i} - \dot{a}_{k+i}$$

bulunur. (III.4.4) denklemde \dot{a}_{k+i} değeri yerine yazılırsa

$$A \dot{a}_{k+i} = \kappa_i e_i - \sum_{j=1}^m \tau_{ij} a_{k+j} - \omega_i a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda} + B a_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir. Bu son denklem ile (3.4.4.3) denklemi karşılaştırıldığında

$$\bar{\kappa}_i = \kappa_i \quad , \quad \bar{\omega}_i = \omega_i \quad , \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = -\gamma_{i\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.4.4.3.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerine ait

$$\dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j \bar{a}_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\beta}_\lambda \bar{a}_{k+m+\lambda}$$

ve

$$\dot{a}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \omega_j a_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

türev denklemlerinin katsayıları arasında

$$(3.4.4.5) \quad \bar{\beta}_\lambda = \beta_\lambda, \quad \bar{\omega}_i = \omega_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

bağıntıları vardır.

İspat:

$$\dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j \bar{a}_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\beta}_\lambda \bar{a}_{k+m+\lambda}$$

eşitliğinin A Jacobian matrisi altında resmine bakarsak

$$A \dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j A \bar{a}_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\beta}_\lambda A \bar{a}_{k+m+\lambda}$$

ve

$$A \bar{a}_{k+j} = -a_{k+j}, \quad 1 \leq j \leq m$$

olduğundan

$$(3.4.4.6) \quad A \dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j a_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\beta}_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

elde edilir.

$$A \bar{a}_{k+m+1} = a_{k+m+1}$$

eşitliğinde türev alırsak

$$\dot{A} \bar{a}_{k+m+1} + A \dot{\bar{a}}_{k+m+1} = \dot{a}_{k+m+1},$$

$$A \dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -\dot{A} \bar{a}_{k+m+1} + \dot{a}_{k+m+1},$$

$$\bar{a}_{k+m+1} = A^{-1} a_{k+m+1}$$

olduğundan

$$A \dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -\dot{A} A^{-1} a_{k+m+1} + \dot{a}_{k+m+1},$$

$$A \dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -B a_{k+m+1} + \dot{a}_{k+m+1}.$$

Bu denklemde de \dot{a}_{k+m+1} yerine yazılırsa

$$(3.4.4.7) \quad A \dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -B a_{k+m+1} - \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j a_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\beta}_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

bulunur. (3.4.4.6) ve (3.4.4.7) denklemleri karşılaştırıldığında

$$\bar{\beta}_\lambda = \beta_\lambda, \quad \bar{\omega}_i = \omega_i \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir.

Teorem 3.4.4.4.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin i. dağılıma parametreleri, sırasıyla, \bar{P}_i ve P_i olmak üzere bunlar arasında

$$(3.4.4.8) \quad \bar{P}_i = P_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 3.4.4.1.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin dağılıma parametreleri, sırasıyla, \bar{P} ve P olmak üzere bunlar arasında

$$(3.4.4.9) \quad \bar{P} = P$$

bağıntısı vardır.

Teorem 3.4.4.5.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin i. açılım uzunlukları, sırasıyla, \bar{L}_i ve L_i olmak üzere bunlar arasında

$$(3.4.4.10) \quad |\bar{L}_i| = |L_i|, \quad 1 \leq i \leq m$$

eşitliği vardır.

Teorem 3.4.4.5.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin i. açılım açıları, sırasıyla $\bar{\lambda}_i$ ve λ_i olmak üzere bunlar arasında

$$(3.4.4.11) \quad |\bar{\lambda}_i| = |\lambda_i|, \quad 1 \leq i \leq m = k$$

eşitliği vardır.

Sonuç 3.4.4.2.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yzeylerinin açılım açılı, sırasıyla, $\bar{\lambda}$ ve λ olmak üzere bunlar arasında

$$(3.4.4.11) \quad |\bar{\lambda}| = |\lambda|$$

bağıntısı vardır.

3.4.5 E^n de k. Mertebeden Simetrik Homotetik Hareketlere İştirak Eden Regle Yüzey Çiftleri

Bu bölümde E^n deki k.mertebeden homotetik hareketlerden yararlanarak k. mertebeden simetrik homotetik hareketler tanımlanacaktır.

Tanım 3.4.5.1.

E^n de k.mertebeden homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen hareketli ve sabit aksoidler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. $\bar{\Phi}$ nin doğrultman uzayı $\bar{E}_k(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $S\bar{e}_i = \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq k$, olmak üzere, Φ nin doğrultman uzayı $E_k(t) = Sp\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ olsun. Bu ortonormal sistemler, homotetik hareketler altında birbirlerine

$$(3.4.5.1) \quad S\bar{e}_i = -\varepsilon_i \quad , \quad (\dot{S}S^{-1})\varepsilon_i = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

ifadesi ile karşılık geliyorsa bu homotetik harekete E^n de **k.mertebeden simetrik homotetik hareket** adı verilir,[18].

Çalışmamız boyunca k. mertebeden simetrik homotetik hareketler için h(t) homotetik oranı her $t \in I \subset IR$ için pozitif kabul edeceğiz.

Teorem 3.4.5.1.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeyleri dayanak eğrileri boyunca, birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanırlar,[18].

İspat:

$\bar{\Phi}$ ve Φ nin dayanak eğrileri pol eğrileri olarak seçilirse, bu eğriler hareket altında birbirlerine $\alpha = S\bar{\alpha} + C$ şeklinde karşılık gelirler. Burada türev alınırsa

$$\dot{\alpha} = S\dot{\bar{\alpha}} + \dot{S}\bar{\alpha} + \dot{C}$$

bulunur. Pol noktalarında $\dot{S}\bar{\alpha} + \dot{C} = 0$ olduğundan

$$(3.4.5.2) \quad \dot{\alpha} = S\dot{\bar{\alpha}}$$

elde edilir. α ve $\bar{\alpha}$ nın yay uzunlukları, sırasıyla, s ve \bar{s} ile gösterilirse

$$\bar{s} = \int_{\bar{\alpha}} \|\dot{\bar{\alpha}}\| dt ,$$

$$s = \int_{\alpha} \|\dot{\alpha}\| dt$$

dir. Buradan

$$ds = \|\dot{\alpha}\| dt ,$$

$$ds = \|S\dot{\alpha}\| dt ,$$

$$ds = \|hA\dot{\alpha}\| dt , \quad S = hA , \quad A \in SO(n) ,$$

$$ds = h\|\dot{\bar{\alpha}}\| dt ,$$

$$ds = h\bar{d}s$$

elde edilir. O halde $\bar{\Phi}$ ve Φ birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanırlar.

Teorem 3.4.5.2.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin doğrultman uzayları $\bar{E}_k(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $E_k(t) = Sp\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ olmak üzere

$$(3.4.5.3) \quad S\dot{\bar{e}}_i = -\dot{\varepsilon}_i , \quad 1 \leq i \leq k$$

dir,[18].

İspat:

Simetrik homotetik hareket tanımı gereğince $\bar{\Phi}$ ve Φ nin doğrultman uzaylarının vektörleri birbirlerine

$$S\bar{e}_i = -\varepsilon_i , \quad (\dot{S}S^{-1})\varepsilon_i = 0 , \quad 1 \leq i \leq k$$

olacak şekilde dönüşürler. Bu bağıntıdan türev alarak

$$\dot{S}\bar{e}_i + S\dot{\bar{e}}_i = -\dot{\varepsilon}_i$$

ve $\bar{e}_i = -S^{-1}\varepsilon_i$ olduğu göz önüne alınarak $-\dot{S}S^{-1}\varepsilon_i + S\dot{\bar{e}}_i = -\dot{\varepsilon}_i$ bulunur. $(\dot{S}S^{-1})\varepsilon_i = 0$ olduğundan

$$S\dot{\bar{e}}_i = -\dot{\varepsilon}_i , \quad 1 \leq i \leq k$$

elde edilir.

Sonuç 3.4.5.1.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin doğrultman uzayları olan $\bar{E}_k(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $E_k(t) = Sp\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ ye göre asimptotik demetleri sırasıyla, $\bar{A}(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_1, \dots, \dot{\bar{e}}_k\}$ ve $A(t) = Sp\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dot{\varepsilon}_1, \dots, \dot{\varepsilon}_k\}$ olmak üzere, bu uzayların vektörleri birbirlerine

$$S\bar{e}_i = -\varepsilon_i \quad , \quad S\dot{\bar{e}}_i = -\dot{\varepsilon}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

bağıntıları ile karşılık gelirler.

$\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin boyutunun $k+m$, $0 \leq m \leq k$, olmasından dolayı bu demetlerde $\dot{\bar{e}}_1, \dots, \dot{\bar{e}}_k$ ve $\dot{\varepsilon}_1, \dots, \dot{\varepsilon}_k$ vektörlerinin lineer bağımsız olan m tanesi alınırsa $\bar{A}(t)$ asimptotik demetinin bir bazı

$$(3.4.5.4) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}\} \quad , \quad 0 \leq m \leq k$$

olur. Benzer düşünce ile $A(t)$ asimptotik demetinin bir bazı da

$$(3.4.5.5) \quad \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dot{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \dot{\varepsilon}_{k+m}\} \quad , \quad 0 \leq m \leq k$$

şeklinde bulunur.

$\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}\}$ ve $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dot{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \dot{\varepsilon}_{k+m}\}$ bazlarında ilk k -tane vektörden oluşan $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ sistemleri ortogonal olduğundan $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ nin ortogonal bazları, sırasıyla,

$$(3.4.5.6) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_{k+m}\}$$

ve

$$(3.4.5.7) \quad \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}\}$$

olarak alınabilir. Bu ortogonal bazların simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine nasıl karşılık geldiğini aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.4.5.3.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin doğrultman uzayları olan $\bar{E}_k(t)$ ve $E_k(t)$ ye göre asimptotik demetlerinin ortogonal bazları sırasıyla, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_{k+m}\}$ ve $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}\}$ olmak üzere

$$(3.4.5.8) \quad S\bar{y}_{k+j} = -y_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m$$

dir,[18].

İspat:

Φ nin asimptotik demeti olan $A(t)$ nin (3.4.5.5) ile verilen bazına ortogonalleştirme metodu uygulanarak elde edilen $\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}\}$ sisteminin vektörleri

$$\begin{aligned}
y_1 &= \varepsilon_1 \quad , \\
y_2 &= -\frac{\langle y_1, \varepsilon_2 \rangle}{\|y_1\|} y_1 + \varepsilon_2 \quad , \\
y_3 &= -\frac{\langle y_1, \varepsilon_3 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{\langle y_2, \varepsilon_3 \rangle}{\|y_2\|^2} y_2 + \varepsilon_3 \quad , \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_k &= -\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle y_j, \varepsilon_k \rangle}{\|y_j\|^2} y_j + \varepsilon_k \quad , \\
y_{k+1} &= -\sum_{j=1}^k \frac{\langle y_j, \dot{\varepsilon}_{k+1} \rangle}{\|y_j\|^2} y_j + \dot{\varepsilon}_{k+1} \quad , \\
y_{k+2} &= -\sum_{j=1}^{k+1} \frac{\langle y_j, \dot{\varepsilon}_{k+2} \rangle}{\|y_j\|^2} y_j + \dot{\varepsilon}_{k+2} \quad , \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_{k+m} &= -\sum_{j=1}^{k+m-1} \frac{\langle y_j, \dot{\varepsilon}_{k+m} \rangle}{\|y_j\|^2} y_j + \dot{\varepsilon}_{k+m}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Simetrik homotetik hareketlerde, tanım gereğince, $S\bar{\varepsilon}_i = -\varepsilon_i$, $1 \leq i \leq k$, olduğundan $i \neq j$ için $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0$ dır. Ayrıca Teo. 3.4.5.2. den $S\dot{\varepsilon}_i = -\dot{\varepsilon}_i$, $1 \leq i \leq k$, dır. Bu neticeler yukarıdaki formüllerde kullanılırsa

$$y_i = \varepsilon_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

bulunur ve buradan da

$$y_{k+1} = (-S) \left(\sum_{j=1}^k \frac{\langle \bar{e}_j, \dot{\bar{e}}_{k+1} \rangle}{\|\bar{e}_j\|^2} \bar{e}_j + \dot{\bar{e}}_{k+1} \right)$$

bağıntısı elde edilir. Burada parantez içindeki ifade $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}\}$ bazının ortogonalleştirilmesi esnasında elde edilen \bar{y}_{k+1} vektörüdür. O halde y_{k+1} vektörleri arasında

$$S \bar{y}_{k+1} = -y_{k+1}$$

bağıntısı vardır. Buna göre y_{k+2}, \dots, y_{k+m} vektörleri içinde benzer uygulamayla

$$S \bar{y}_{k+2} = -y_{k+2}$$

.

.

.

$$S \bar{y}_{k+m} = -y_{k+m}$$

bağıntıları bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.4.5.2.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoit yüzeylerinin $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin ortogonal bazları birbirlerine

$$S \bar{e}_i = -\varepsilon_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

ve

$$S \bar{y}_{k+j} = -y_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m$$

bağıntıları ile karşılık gelirler.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin ortogonal bazları, sırasıyla, (3.4.5.6) ve (3.4.5.7) bağıntıları ile verilmiş olsun. Bu bazları ortonormalleştirebiliriz. $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ sistemi ortonormal olduğundan

$$(3.4.5.9) \quad e_i = \frac{\varepsilon_i}{h} \quad , \quad a_{k+j} = \frac{y_{k+j}}{\|y_{k+j}\|} \quad , \quad \bar{a}_{k+j} = \frac{\bar{y}_{k+j}}{\|\bar{y}_{k+j}\|} \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

alınırsa $\bar{\Phi}$ nin $\bar{A}(t)$ asimptotik demeti için

$$(3.4.5.10) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}\}$$

ortonormal bazı ve Φ nin $A(t)$ asimptotik demeti için de

$$(3.4.5.11) \quad \{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$$

ortonormal bazı bulunur.

Teorem 3.4.5.4.

k.mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin ortonormal bazları, sırasıyla, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$ olmak üzere bazlar birbirlerine

$$(3.4.5.12) \quad S\bar{e}_i = -h e_i, \quad S\bar{a}_{k+j} = -h a_{k+j}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq i \leq k$$

eşitlikleri ile karşılık gelirler,[18].

İspat:

$$S\bar{e}_i = -\varepsilon_i \quad \text{ve} \quad e_i = \frac{\varepsilon_i}{h}, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \text{olduğu göz önüne alınırsa}$$

$$S\bar{e}_i = -h e_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

dir. Diğer taraftan Teo. 3.4.5.3 den $S\bar{y}_{k+j} = -y_{k+j}$, $1 \leq j \leq m$, dir. Bu netice a_{k+j} nin tanımı olan

$$a_{k+j} = \frac{y_{k+j}}{\|y_{k+j}\|}$$

bağntısında yerine yazılırsa $h(t) > 0$ ve $A \in SO(n)$ olduğundan

$$a_{k+j} = -\frac{S}{h} \left(\frac{\bar{y}_{k+j}}{\|\bar{y}_{k+j}\|} \right)$$

bulunur. Burada parantez içindeki ifade \bar{a}_{k+j} olduğundan

$$a_{k+j} = -\frac{1}{h} S \bar{a}_{k+j}, \quad 1 \leq j \leq m$$

veya

$$S\bar{a}_{k+j} = -h a_{k+j}, \quad 1 \leq j \leq m$$

bulunur.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetleri, sırasıyla, $\bar{T}(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_1, \dots, \dot{\bar{e}}_m, \dot{\bar{\alpha}}\}$ ve $T(t) = Sp\{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_1, \dots, \dot{e}_k, \dot{\alpha}\}$ dir. Burada $\text{boy}\bar{T}(t) (= \text{boy}T(t)) = k + m$ ise $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin

bazları $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}\}$ ve $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dot{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \dot{\varepsilon}_{k+m}\}$ olur. Bunlar aynı zamanda $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin bazları olduklarından $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ nin sırasıyla (3.4.5.10) ve (3.4.5.11) ortonormal bazları $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ içinde bir ortonormal bazdır.

Kabul edelim ki boy $\bar{T}(t) (= \text{boy}T(t)) = k + m + 1$ olsun. O zaman $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin

$$(3.4.5.13) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_{k+m}, \dot{\bar{\alpha}}\}$$

ve

$$(3.4.5.14) \quad \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}, \dot{\alpha}\}$$

şeklinde ortogonal bazları elde edilir.

Teorem 3.4.5.5.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetleri için, boy $\bar{T}(t) (= \text{boy}T(t)) = k + m + 1$ ise $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin ortogonal bazları birbirlerine

$$(3.4.5.15) \quad \begin{aligned} S\bar{e}_i &= -\varepsilon_i, & 1 \leq i \leq k \\ S\bar{y}_{k+j} &= -y_{k+j}, & 1 \leq j \leq m \\ S\bar{y}_{k+m+1} &= y_{k+m+1} \end{aligned}$$

şeklinde karşılık gelirler.

İspat:

Φ nin $T(t)$ teğetsel demetinin $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dot{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \dot{\varepsilon}_{k+m}, \dot{\alpha}\}$ bazının ortogonalleştirilmiş şekli $\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}, y_{k+m+1}\}$ olsun. Bu taktirde $i \neq j$ için $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0$ olduğundan ortogonalleştirme metodundan

$$y_i = \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

elde edilir ve böylece $T(t)$ nin ortogonal bazı $\{e_1, \dots, e_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}, y_{k+m+1}\}$ olur. Ayrıca yine ortogonalleştirme metodu ile

$$y_{k+m+1} = -\sum_{i=1}^k \frac{\langle y_i, \dot{\alpha} \rangle}{\|y_i\|^2} y_i - \sum_{j=1}^m \frac{\langle y_{k+j}, \dot{\alpha} \rangle}{\|y_{k+j}\|^2} y_{k+j} + \dot{\alpha}$$

dir. Burada $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}\}$ aynı zamanda $A(t)$ asimptotik demetinin bir ortogonal bazı olduğundan, Sonuç 3.4.5.2. gereğince

$$S\bar{e}_i = -\varepsilon_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

ve

$$S\bar{y}_{k+j} = -y_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m$$

dir. Bu neticeler ve $y_i = \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq k$, vektörleri y_{k+m+1} formülünde kullanılırsa, $S\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha}$ olduğu dikkate alınır

$$y_{k+m+1} = S \left(-\sum_{i=1}^k \frac{\langle \bar{e}_i, \dot{\bar{\alpha}} \rangle}{\|\bar{e}_i\|^2} \bar{e}_i - \sum_{j=1}^m \frac{\langle \bar{y}_{k+j}, \dot{\bar{\alpha}} \rangle}{\|\bar{y}_{k+j}\|^2} \bar{y}_{k+j} + \dot{\bar{\alpha}} \right)$$

bulunur. Burada parantez içindeki ifade $\bar{T}(t)$ teğetsel demetinin bazının ortogonalleştirilmesi esnasında elde edilen \bar{y}_{k+m+1} vektörü olduğundan

$$S\bar{y}_{k+m+1} = y_{k+m+1}$$

olur. O halde $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin ortogonal baz vektörleri birbirlerine

$$S\bar{e}_i = -\varepsilon_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$S\bar{y}_{k+j} = -y_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad ,$$

$$S\bar{y}_{k+m+1} = y_{k+m+1}$$

şeklinde dönüşürler. $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin, sırasıyla, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$ orthonormal bazları elde edilir.

Teorem 3.4.5.6.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin orthonormal bazları, sırasıyla, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$ olmak üzere bu orthonormal baz vektörleri birbirlerine

$$S\bar{e}_i = -h e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$S\bar{a}_{k+j} = -h a_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad ,$$

$$S\bar{a}_{k+m+1} = h a_{k+m+1}$$

bağıntıları vardır.

İspat:

$\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$ sistemleri sırasıyla, $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ nin ortonormal bazları olduklarından Teo.3.4.5.4 gereğince

$$S\bar{e}_i = -h e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$S\bar{a}_{k+j} = -h a_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m$$

ve Teo.3.4.5.5. gereğince $S \bar{y}_{k+m+1} = y_{k+m+1}$ dır.

$$a_{k+m+1} = \frac{y_{k+m+1}}{\|y_{k+m+1}\|}$$

formülünde yerine yazılırsa

$$a_{k+m+1} = \frac{1}{h} S \left(\frac{\bar{y}_{k+m+1}}{\|\bar{y}_{k+m+1}\|} \right)$$

elde edilir. Burada parantez içindeki ifade \bar{a}_{k+m+1} vektörüdür. O halde

$$S\bar{a}_{k+m+1} = h a_{k+m+1}$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin bazları , sırasıyla, E^n nin $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ bazlarına tamamlanabilir. Burada $\bar{\Phi}$ ve Φ merkez regle yüzeyli ise $\{\bar{a}_{k+m+2}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ ortonormal bazlarına $\bar{\Phi}$ ve Φ nin sırasıyla **tamamlayıcı bazları** denir

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin tamamlayıcı bazlarının birbirlerine nasıl karşılık geldiğini gösterebiliriz.

Kabul edelim ki $\bar{\Phi}$ ve Φ , merkez regle yüzeyli olsunlar. O zaman tamamlayıcı ortonormal bazlar $\{\bar{a}_{k+m+2}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ dir. Bu baz vektörlerine simetrik homotetik hareketler altında karşılık gelen vektörler $y_{k+m+\lambda}$, $2 \leq \lambda \leq n-k-m$, ile gösterilirse

$$(3.4.5.16) \quad S\bar{a}_{k+m+\lambda} = y_{k+m+\lambda} \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

yazılabilir ve $\{y_{k+m+2}, \dots, y_n\}$ sistemi $\bar{\Phi}$ ye karşılık gelen Φ regle yüzeyi için tamamlayıcı ortogonal bir bazdır. Bu baz ortonormalleştirilirse,

$$a_{k+m+\lambda} = \frac{y_{k+m+\lambda}}{\|y_{k+m+\lambda}\|}$$

olmak üzere Φ için $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ tamamlayıcı ortonormal baz elde edilir.

$a_{k+m+\lambda} = \frac{y_{k+m+\lambda}}{\|y_{k+m+\lambda}\|}$ bağıntısından $S\bar{a}_{k+m+\lambda} = y_{k+m+\lambda}$ konumu yapılırsa

$$a_{k+m+\lambda} = \frac{1}{h} S\left(\frac{\bar{a}_{k+m+\lambda}}{\|\bar{a}_{k+m+\lambda}\|}\right)$$

bulunur. $\|\bar{a}_{k+m+\lambda}\| = 1$ olduğundan

$$S\bar{a}_{k+m+\lambda} = ha_{k+m+\lambda} \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

elde edilir.

Sonuç 3.4.5.3.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeyleri merkez regle yüzeyli olsun. $\bar{\Phi}$ ve Φ nin tamamlayıcı ortonormal bazlarının $\{\bar{a}_{k+m+2}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ olmak üzere buradaki baz vektörleri arasında

$$S\bar{a}_{k+m+\lambda} = ha_{k+m+\lambda} \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 3.4.5.4.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin ortonormal bazları, sırasıyla $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, a_n\}$ olmak üzere bu ortonormal baz vektörleri arasında

$$S\bar{e}_i = -h e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$S\bar{a}_{k+j} = -h a_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad ,$$

$$S\bar{a}_{k+m+\lambda} = h a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq \lambda \leq n - k - m$$

bağıntıları ile olduğundan k.mertebeden simetrik homotetik hareket, E^n de (n-k-m)-boyutlu $Sp\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ alt uzayına göre bir yansımadır.

3.4.6. k. Mertebeden Simetrik Homotetik Hareketler Altında Regle Yüzeylerin Dağılıma Parametreleri, Açılım Uzunlukları Ve Açılım Açılıarı

Teorem 3.4.6.1.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ , bunların dayanak eğrileri $\bar{\alpha}$ ve α olmak üzere

$$\dot{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1} \quad , \quad \dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

ifadelerindeki katsayılar arasında

$$(3.4.6.1) \quad \bar{\xi}_i = -h\xi_i \quad , \quad \bar{\eta}_{m+1} = h\eta_{m+1} \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

bağıntıları vardır.

İspat:

$$\dot{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1}$$

ifadesinin S altındaki görüntüsüne bakarsak

$$S \dot{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i S \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} S \bar{a}_{k+m+1} \quad ,$$

$$S \dot{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^k \bar{\xi}_i (-he_i) + \bar{\eta}_{m+1} S ha_{k+m+1} \quad ,$$

$$S \dot{\bar{\alpha}}(t) = \sum_{i=1}^k -h\bar{\xi}_i e_i + h\bar{\eta}_{m+1} a_{k+m+1}$$

elde edilir. $S\dot{\bar{\alpha}}(t) = \dot{\alpha}$ olduğundan göz önüne alınır ve bu son ifade $\dot{\alpha}$ nin hipotezdeki değeri ile karşılaştırılırsa

$$-h\bar{\xi}_i = \xi_i \quad , \quad h\bar{\eta}_{m+1} = \eta_{m+1} \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

bulunur.

Teorem 3.4.6.2.

k.mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerine ait

$$\dot{\bar{a}}_{k+i} = -\bar{\kappa}_i \bar{e}_i + \sum_{j=1}^m \bar{\tau}_{ij} \bar{a}_{k+j} + \bar{\omega}_i \bar{a}_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\gamma}_{i\lambda} \bar{a}_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

ve

$$\dot{a}_{k+i} = -\kappa_i e_i + \sum_{j=1}^m \tau_{ij} a_{k+j} + \omega_i a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

türev vektörlerinin katsayıları arasında

$$(3.4.6.2) \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i \quad , \quad \bar{\omega}_i = \omega_i \quad , \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = -\gamma_{i\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

bağıntıları vardır.

İspat:

$$\dot{\bar{a}}_{k+i} = -\bar{\kappa}_i \bar{e}_i + \sum_{j=1}^m \bar{\tau}_{ij} \bar{a}_{k+j} + \bar{\omega}_i \bar{a}_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\gamma}_{i\lambda} \bar{a}_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

vektörünün hareketin S altındaki resmine bakarsak

$$S \dot{\bar{a}}_{k+i} = -\bar{\kappa}_i S \bar{e}_i + \sum_{j=1}^m \bar{\tau}_{ij} S \bar{a}_{k+j} + \bar{\omega}_i S \bar{a}_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\gamma}_{i\lambda} S \bar{a}_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad ,$$

$$(3.4.6.3) \quad S \dot{\bar{a}}_{k+i} = \bar{\kappa}_i \varepsilon_i - \sum_{j=1}^m \bar{\tau}_{ij} h a_{k+j} + \bar{\omega}_i h a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\gamma}_{i\lambda} h a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

$$S \bar{a}_{k+i} = -h a_{k+i}$$

ifadesinde türev alarak

$$-S \dot{\bar{a}}_{k+i} + \dot{S} \bar{a}_{k+i} = -h \dot{a}_{k+i} - h \dot{a}_{k+i}$$

elde edilir. Buradan da

$$S \dot{\bar{a}}_{k+i} = -h \dot{a}_{k+i} + (-\dot{h} + h S S^{-1} a_{k+i})$$

bulunur. \dot{a}_{k+i} değeri yerine yazılırsa

$$(3.4.6.4) \quad S \dot{\bar{a}}_{k+i} = \kappa_i \varepsilon_i + \sum_{j=1}^m [h(SS^{-1} - \tau_{ij}) + \dot{h}] a_{k+i} - \omega_i h a_{k+m+1} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} h a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

bulunur. Bu son denklem ile (3.4.6.3) denklemi karşılaştırıldığında

$$\bar{\kappa}_i = \kappa_i \quad , \quad \bar{\omega}_i = \omega_i \quad , \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = -\gamma_{i\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir.

Teorem 3.4.6.3.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerine ait

$$\dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j \bar{a}_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\beta}_\lambda \bar{a}_{k+m+\lambda}$$

ve

$$\dot{a}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \omega_j a_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

türev denklemlerinin katsayıları arasında

$$(3.4.6.5) \quad \bar{\beta}_\lambda = \beta_\lambda, \quad \bar{\omega}_j = -\omega_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

bağıntıları vardır.

İspat:

$$\dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j \bar{a}_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\beta}_\lambda \bar{a}_{k+m+\lambda}$$

vektörünün S altındaki resmine bakarsak

$$S\dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j S\bar{a}_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\beta}_\lambda S\bar{a}_{k+m+\lambda}$$

$$\text{ve } S\bar{a}_{k+j} = -ha_{k+j}, \quad S\bar{e}_i = -\varepsilon_i, \quad S\bar{a}_{k+m+\lambda} = h\dot{a}_{k+m+\lambda}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq \lambda \leq n-k-m$$

olduğundan

$$(3.4.6.6) \quad S\dot{\bar{a}}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m h\bar{\omega}_j a_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\beta}_\lambda ha_{k+m+\lambda}$$

elde edilir.

$$S\bar{a}_{k+m+1} = ha_{k+m+1}$$

eşitliğinde türev alırsak

$$\dot{S}\bar{a}_{k+m+1} + S\dot{\bar{a}}_{k+m+1} = h\dot{a}_{k+m+1} + \dot{h}a_{k+m+1}$$

elde edilir.

$$\dot{S}\bar{a}_{k+m+1} = h\dot{a}_{k+m+1} + \dot{h}a_{k+m+1} - S\dot{\bar{a}}_{k+m+1}$$

ve $S\bar{a}_{k+m+1} = ha_{k+m+1}$ olduğundan

$$\dot{S}\bar{a}_{k+m+1} = h\dot{a}_{k+m+1} + (\dot{h} - \dot{S}S^{-1}h)a_{k+m+1}$$

bulunur. Bu son denklemde \dot{a}_{k+m+1} yerine yazılırsa

$$(3.4.6.7) \quad \dot{S}\bar{a}_{k+m+1} = h\left(-\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j \bar{a}_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\beta}_\lambda \bar{a}_{k+m+\lambda}\right) + (\dot{h} - \dot{S}S^{-1}h)a_{k+m+1}$$

bulunur. (3.4.6.6) ve (3.4.6.7) denklemleri karşılaştırıldığında

$$\bar{\beta}_\lambda = \beta_\lambda, \quad \bar{\omega}_j = -\omega_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir.

Teorem 3.4.6.4.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin i. dağılma parametreleri, sırasıyla, \bar{P}_i ve P_i olmak üzere bunlar arasında

$$(3.4.6.8) \quad h\bar{P}_i = P_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 3.4.6.1.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin dağılma parametreleri, sırasıyla, \bar{P} ve P olmak üzere bunlar arasında

$$(3.4.6.9) \quad h\bar{P} = P$$

bağıntısı vardır.

Teorem 3.4.6.5.

k. mertebeden kapalı simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin i. açılım uzunlukları, sırasıyla, \bar{L}_i ve L_i olmak üzere, bunlar arasında

$$(3.4.6.10) \quad dL_i = -hd\bar{L}_i, \quad 1 \leq i \leq m = k$$

dır.

Teorem 3.4.6.5.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin i. açılım açıları, sırasıyla, $\bar{\lambda}_i$ ve λ_i olmak üzere, bunlar arasında

$$(3.4.6.11) \quad \lambda_i = -\bar{\lambda}_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

dır.

Sonuç 3.4.6.2.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin açılım açıları, sırasıyla, $\bar{\lambda}$ ve λ olmak üzere bunlar arasında

$$(3.4.6.11) \quad \bar{\lambda} = \lambda$$

dır.

4.MATERYAL VE METOT

E^n de k. Mertebeden Homotetik Ve Helisel Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri

4.1 Konoidal Aksoid Yüzey Çiftleri

Teorem 4.1.1.

$\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidaldir ancak ve ancak Φ kuvvetli konoidaldir,[3].

İspat:

$\bar{\Phi}$ silindirik ise Φ de silindiriktir,[7].

$\bar{\Phi}$, q-konoidal olsun. $X = A\bar{X} + C$ hareketi esnasında $\bar{E}_k(t)$ nin ortonormal bazı için (3.4.1.5), (3.4.1.6), (3.4.1.9) gözönüne alınırsa E^q altuzayı vardır. O halde $\bar{E}_k(t) // \bar{E}^q$ ise $E_k(t) // E^q$ dir. Yani Φ , q-konoidaldir.

$\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidal olduğundan Teo.3.3.2. den

$$\bar{\omega}_i = 0, \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

ve

$$\bar{\omega}_i = \omega_i, \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = \gamma_{i\lambda}, \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

den

$$\omega_i = 0, \quad \gamma_{i\lambda} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

elde edilir. O halde Teo. 3.3.2. den Φ kuvvetli konoidaldir. Bu teoremin terside doğrudur.

Teorem 4.1.2.

$\bar{\Phi}$, (k+m)-ortokonoidal ise Φ , (k+m)-ortokonoidaldir,[3].

İspat:

$\bar{\Phi}$, (k+m)-ortokonoidal olduğundan $\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidaldir ve merkez regle yüzeye sahiptir. O halde Teo.4.1.1. den Φ de kuvvetli konoidaldir. $\bar{\Phi}$ merkez regle yüzeyli olduğundan $\bar{\eta}_{m+1} \neq 0$ dir. Ayrıca $\bar{\eta}_{m+1} = \eta_{m+1}$ olduğundan $\eta_{m+1} \neq 0$ dir. Bu ise Φ nin merkez regle yüzeye sahip olduğunu gösterir. O halde Φ , (k+m)-ortokonoidaldir.

Teorem 4.1.3.

$\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidal olsun. Eğer $\bar{\Phi}$ ortokonoidal ise Φ , ortokonoidaldir,[3].

İspat:

Teo. 4.1.1. den $\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidal olduğundan Φ , kuvvetli konoidaldir.

$\bar{\Phi}$ ortokonoidal olduğundan Teo.3.3.4. den

$$\beta_\lambda = 0, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

dir. Teo.3.3.6. dan $\bar{\omega}_i = 0$ dir. Çünkü q-ortokonoidallik için geçerli olan bu ifade q=n-1 içinde geçerlidir. O halde

$$\omega_i = \bar{\omega}_i, \quad \beta_\lambda = \bar{\beta}_\lambda \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m, \quad 1 \leq i \leq m$$

den

$$\omega_i = 0, \quad \beta_\lambda = 0 \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m, \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir. Burada Teo.3.3.4. e göre Φ ortokonoidaldir.

4.2 Homotetik Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri

Teorem 4.2.1.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden ve silindirik olmayan regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. $\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidaldir ancak ve ancak Φ kuvvetli konoidaldir.

İspat:

$\bar{\Phi}$, q- konoidal olsun. $X = S\bar{X} + C$ hareketi esnasında $\bar{E}_k(t)$ nin ortonormal bazı için

$$\begin{aligned} A\bar{e}_i &= e_i, & 1 \leq i \leq k, \\ A\bar{a}_{k+i} &= a_{k+i}, & 1 \leq i \leq m, \\ A\bar{a}_{k+m+\lambda} &= a_{k+m+\lambda}, & 1 \leq \lambda \leq n-k-m \end{aligned}$$

gözönüne alınırsa E^q altuzayı vardır. O halde $\bar{E}_k(t) // \bar{E}^q$ ise $E_k(t) // E^q$ dir. Yani Φ , q- konoidaldir. $\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidal olduğundan Teo. 3.3.2. den

$$\bar{\omega}_i = 0, \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

ve

$$\omega_i = \bar{\omega}_i, \quad \gamma_{i\lambda} = \bar{\gamma}_{i\lambda}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

den

$$\omega_i = 0, \quad \gamma_{i\lambda} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir. O halde Teo. 3.3.2. den Φ kuvvetli konoidaldir. Bu teoremin terside doğrudur.

Teorem 4.2.2.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden ve silindirik olmayan regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. $\bar{\Phi}$, (k+m)-ortokonoidal ise Φ , (k+m)-ortokonoidaldir,[3].

İspat:

$\bar{\Phi}$, (k+m)-ortokonoidal olduğundan $\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidaldir ve merkez regle yüzeye sahiptir. O halde Teo.4.2.1. den Φ de kuvvetli konoidaldir. $\bar{\Phi}$ merkez regle yüzeyli olduğundan $\bar{\eta}_{m+1} \neq 0$ dir. Ayrıca $|h\bar{\eta}_{m+1}| = |\eta_{m+1}|$ olduğundan $\eta_{m+1} \neq 0$ olur. Bu ise Φ nin merkez regle yüzeye sahip olduğunu gösterir. O halde Φ , (k+m)-ortokonoidaldir.

Teorem 4.2.3.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden ve silindirik olmayan regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. $\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidal olsun. Eğer $\bar{\Phi}$ ortokonoidal ancak ve ancak Φ ortokonoidaldir,[3].

İspat:

Teo.4.2.1. den $\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidal olduğundan Φ , kuvvetli konoidaldir.

$\bar{\Phi}$ ortokonoidal olduğundan Teo.3.3.4. den

$$\beta_\lambda = 0, \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

dir. Teo. 3.3.6. dan $\bar{\omega}_i = 0$ dir. Çünkü q-ortokonoidallik için geçerli olan bu ifade q=n-1 içinde geçerlidir. O halde

$$\bar{\omega}_i = \omega_i, \quad \bar{\beta}_\lambda = \beta_\lambda, \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m, \quad 1 \leq i \leq m$$

den

$$\omega_i = 0, \quad \beta_\lambda = 0, \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m, \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir. Burada Teo. 3.3.5. e göre Φ ortokonoidaldir.

5.BULGULAR

E^n de k. Mertebeden Simetrik Homotetik Ve Simetrik Helisel Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri

5.1 Simetrik Helisel Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri

Teorem 5.1.1.

$\bar{\Phi}$ ve Φ simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen regle yüzeyler olsun. $\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidaldir ancak ve ancak Φ kuvvetli konoidaldir.

İspat:

$\bar{\Phi}$ silindirik ise Φ de silindiriktir,[7].

$\bar{\Phi}$,q- konoidal olsun. $X = A\bar{X} + C$ hareketi esnasında $\bar{E}_k(t)$ nin ortonormal bazı için (3.4.3.1.) , (3.4.3.3) , (3.4.3.12) gözönüne alınırsa E^q altuzayı vardır. O halde $\bar{E}_k(t) // \bar{E}^q$ ise $E_k(t) // E^q$ dir. Yani Φ , q-konoidaldir. $\bar{\Phi}$,kuvvetli konoidal olduğundan Teo.3.3.2. den

$$\bar{\omega}_i = 0 \quad , \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

ve

$$\bar{\omega}_i = -\omega_i \quad , \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = -\gamma_{i\lambda} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

den

$$\omega_i = 0 \quad , \quad \gamma_{i\lambda} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

elde edilir. O halde Teo. 3.3.2. den Φ kuvvetli konoidaldir. Bu teoremin tersinin de ispatı kolaylıkla yapılabilir.

Teorem 5.1.2.

$\bar{\Phi}$ ve Φ simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen regle yüzeyler olsun. $\bar{\Phi}$, (k+m)-ortokonoidaldir ancak ve ancak Φ , (k+m)-ortokonoidaldir.

İspat:

$\bar{\Phi}$, (k+m)-ortokonoidal olduğundan $\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidaldir ve merkez regle yüzeye sahiptir. O halde Teo. 5.1.1. den Φ de kuvvetli konoidaldir. $\bar{\Phi}$ merkez regle yüzeyli olduğundan $\bar{\eta}_{m+1} \neq 0$ dir. Ayrıca $\bar{\eta}_{m+1} = \eta_{m+1}$ olduğundan $\eta_{m+1} \neq 0$ dir. Bu ise Φ nin merkez regle yüzeye sahip olduğunu gösterir. O halde Φ (k+m)-ortokonoidaldir. Tersi de doğrudur.

Teorem 5.1.3.

$\bar{\Phi}$ ve Φ simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen regle yüzeyler olsun. $\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidal olsun. Eğer $\bar{\Phi}$ ortokonoidaldir ancak ve ancak Φ ortokonoidaldir.

İspat:

Teo. 5.1.1. den $\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidal olduğundan Φ kuvvetli konoidaldir.

$\bar{\Phi}$ ortokonoidal olduğundan Teo. 3.3.4. den

$$\beta_\lambda = 0, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

dir. Teo. 3.3.6. dan $\bar{\omega}_i = 0$ dir. Çünkü q-ortokonoidallik için geçerli olan bu ifade q=n-1 için de geçerlidir. O halde

$$\bar{\omega}_i = -\omega_i, \quad \bar{\beta}_\lambda = \beta_\lambda, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m, \quad 1 \leq i \leq m$$

den

$$\omega_i = 0, \quad \beta_\lambda = 0, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m, \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir. Burada Teo.3.3.5. e göre Φ ortokonoidaldir. Teoremin tersi de doğrudur.

5.2 Simetrik Homotetik Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri

Teorem 5.2.1.

$X = S\bar{X} + C$ simetrik homotetik hareketine iştirak eden regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. $\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidaldir ancak ve ancak Φ kuvvetli konoidaldir

İspat:

$\bar{\Phi}$, q -konoidal olsun. $X = S\bar{X} + C$ hareketi esnasında $\bar{E}_k(t)$ nin ortonormal bazı için (3.4.5.1), (3.4.5.3), (3.4.5.12) gözönüne alınırsa E^q altuzayı vardır. O halde $\bar{E}_k(t) // \bar{E}^q$ ise $E_k(t) // E^q$ dir. Yani Φ , q -konoidaldir. $\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidal olduğundan Teo. 3.3.2. den

$$\bar{\omega}_i = 0 \quad , \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

ve

$$\bar{\omega}_i = -\omega_i \quad , \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = -\gamma_{i\lambda} \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

den

$$\omega_i = 0 \quad , \quad \gamma_{i\lambda} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

elde edilir. O halde Teo.3.3.2. den Φ kuvvetli konoidaldir. Bu teoremin tersi kolaylıkla ispat edilebilir.

Teorem 5.2.2.

$X = S\bar{X} + C$ simetrik homotetik hareketine iştirak eden regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. $\bar{\Phi}$, $(k+m)$ -ortokonoidaldir ancak ve ancak Φ , $(k+m)$ -ortokonoidaldir.

İspat:

$\bar{\Phi}$, $(k+m)$ -ortokonoidal olduğundan $\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidaldir ve merkez regle yüzeye sahiptir. O halde Teo. 5.1.1. den Φ de kuvvetli konoidaldir. $\bar{\Phi}$ merkez regle yüzeyli olduğundan $\bar{\eta}_{m+1} \neq 0$ dir. Ayrıca $\bar{\eta}_{m+1} = h\eta_{m+1}$ olduğundan $\eta_{m+1} \neq 0$ olur. Bu ise Φ nin merkez regle yüzeye sahip olduğunu gösterir. O halde Φ , $(k+m)$ -ortokonoidaldir. Teoremin tersi de doğrudur.

Teorem 5.2.3.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. $\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidal olsun. $\bar{\Phi}$ ortokonoidal ancak ve ancak Φ ortokonoidaldir.

İspat:

Teorem 5.2.1. den $\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidal olduğundan Φ kuvvetli konoidaldir. $\bar{\Phi}$ ortokonoidal olduğundan Teo.3.3.4. den

$$\bar{\beta}_\lambda = 0, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

dir. Teo. 3.3.6. dan $\bar{\omega}_i = 0$ dir. Çünkü q-ortokonoidallik için geçerli olan bu ifade q=n-1 içinde geçerlidir. O halde

$$\bar{\omega}_i = -\omega_i, \quad \bar{\beta}_\lambda = \beta_\lambda \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m, \quad 1 \leq i \leq m$$

den

$$\omega_i = 0, \quad \beta_\lambda = 0 \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m, \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir. Burada Teo. 3.3.5. e göre Φ ortokonoidaldir. Teoremin tersi de doğrudur.

6. TARTIŞMA

Bu çalışmada, E^n de $(k+1)$ - boyutlu regle yüzeyler, konoidal regle yüzeyler ve çeşitli hareketlere iştirak eden genelleştirilmiş regle yüzey çiftleri ve E^n de k . mertebeden helisel ve homotetik hareketlere iştirak eden konoidal regle yüzey çiftleri incelenmiştir. Bunların dışında simetrik helisel ve simetrik homotetik hareketlere iştirak eden konoidal regle yüzey çiftleri araştırılmış ve bunlarla ilgili bazı teoremler verilmiştir.

7.BÖLÜM

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Simetrik homotetik ve simetrik helisel hareketlere iştirak eden konoidal regle yüzey çiftleri incelenmiş ve [12] nolu çalışma esas alınarak, [12] da verilen bazı teoremlerin karşılıklarının k .mertebeden simetrik helisel ve simetrik homotetik hareketler için de sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca k .mertebeden simetrik helisel ve simetrik homotetik hareketlere iştirak eden konoidal regle yüzey çiftlerinin integral invaryantları araştırılabilir ve bunlar arasında ilişkiler kurulabilir.

KAYNAKLAR

- [1] ÇALIŞKAN,M., Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri, İnönü Üniv.Fen-Ed.Fak.,Doktora Tezi Malatya,1983.
- [2] ÇALIŞKAN,M., On The Pair Axoids,Pure And Applied Mathematica Sciences Vol.XXX,No:1-2,September,1989.
- [3] ÇALIŞKAN,M.,-KURUOĞLU,N., On The Pair Of Konoidal Axoids,Pure And Applied Mathematica Sciences Vol.XXXVI,No:1-2,September,1992.
- [4] FRANK,H.-GIERING,O., Varallgemeinerte Regelflachen,Math.Z.150.261-271,1976.
- [5] FRANK,H.-GIERING,O., Varallgemeinerte Regelflachen,Im Grossen I.,Arch, Math.,Vol.38, 106-115,1982.
- [6] FRANK,H.-GIERING,O., Varallgemeinerte Regelflachen,Im Grossen II.,Journal Of Geometry, Vol.23,1984.
- [7] FRANK,H., On Kinematics Of The n-Dimensional Euclidean Space,Contributions To Geometry,Proceedings Of The Geometry Symposium In Sigen 1978,Birkhauser Verlag Basel,1979.
- [8] HACISALİHOĞLU,H.H., Differensiyel Geometri,İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları,Mat.No:2,Malatya,1983.
- [9] ASLANER,R., Regle Altmanifoldlar,İnönü Üniv.Fen Bilimleri Enstitüsü,Bilim Uzmanlığı Tezi,Malatya,1989.

- [10] AKDEMİR,K., Homotetik Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri Üzerine, Ondokuz Mayıs Üniv.Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Samsun, 1995.
- [11] THAS,C., Een(lokal) Studie Van de (m+1)- Dimensionale Varieteiten, Van de n- Dimensionale Euclidische Ruimte \mathbb{R}^n ($n \geq 2m + 1$ en $m \geq 1$), Beschreven Door Een Eendimensionale Familie Van n- Dimensionale Lineaire Ruimten. Paleis Der Academien- Hertogsstraat, I, Brussel, 1974.
- [12] AKDEMİR,K., ÇALIŞKAN,M., and KURUOĞLU,N., On The Pair Of Konoidal Ruled Surfaces under The Homothetic Motions Of The Euclidean Space, E^n , Pure And Applied Mathematica Sciences Vol.XLVI, September, 1997.
- [13] HACISALİHOĞLU,H.H., On The Rolling Of One Curve Or Surface Upon Another, Proceeding Of Royal Irish Academy, Vol.7.1, Sec.A, Num.2 Dublin, 1971.
- [14] HACISALİHOĞLU,H.H., On Geometry Of Motion In The Euclidean n-Space, Faculte' des Science de l'universited' Ankara, Turquie, 1974.
- [15] MULLER,H.R., Zur Bewegungsgeometrie In Raumen Höherer Dimension Monatsh, Math., 70,47-57,(1966).
- [16] THAS,C.,1978. Properties of Ruled Surfaces In The Euclidean Space E^n , Acedemica Sinica, Vol.6, No.1, pp 133-142.
- [17] THAS,C.,1978. Minimal Monosystems, Yokohama Math. Journal, Vol.26, No.2, pp 157-167.

[18] AYDEMİR,İ.,

E^n de Simetrik Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftlerinin İntegral İnvaryantları ve Kesit Eğrilikleri, Ondokuz Mayıs Üni.Fen-Ed.Fak.,Yüksek Lisans Tezi Samsun,1992.

[19] TOSUN,M.,

E^n de Simetrik Helisel Hareketlere İştirak Eden Aksoit Yüzey Çiftleri Üzerine, Ondokuz Mayıs Üni.Fen-Ed.Fak.,Yüksek Lisans Tezi Samsun,1992.