



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TERS İKİLİ SARKACIN MODELLEME

ve

KONTROLÜ

Mak. Müh. Aydın ÖZBEY

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Mühendisliği Programı

Danışman

Doç. Dr. Erol UZAL

Haziran, 2006

İSTANBUL



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TERS İKİLİ SARKACIN MODELLEME

ve

KONTROLÜ

Mak. Müh. Aydın ÖZBEY

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Mühendisliği Programı

Danışman

Doç. Dr. Erol UZAL

Haziran, 2006

İSTANBUL

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı başta çok değerli hocam Doç. Dr. Erol UZAL olmak üzere tüm hocalarıma, bu çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen çalışma arkadaşlarıma ve her zaman beni desteklemiş olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Haziran, 2006

Aydın ÖZBEY

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET.....	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	2
3. MALZEME VE YÖNTEM	5
3.1 Lineerleştirilmiş Sistemin Kontrolü.....	7
3.2 Tam Durum Geri Beslemesi ile Kontrol.....	7
3.2.1 Kutup Yerleştirme.....	8
3.3 Geri Besleme ile Lineerleştirme	9
4. BULGULAR	11
4.1. TERS SARKACIN KONTROLÜ	11
4.1.1 Lineerleştirme.....	12
4.1.2 Kontrol Edilebilirlik:	13
4.1.3 Tam durum geri beslemesi:	14
4.1.4 Geri Besleme ile Kısmi Lineerleştirme	19
4.2 TERS İKİLİ SARKACIN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ.....	26
4.2.1 Lineerleştirme.....	27
4.2.2 Kontrol Edilebilirlik.....	29
4.2.3 Tam Durum Geri Beslemesi	29
4.2.4 Geri Besleme ile Kısmi Lineerleştirme	34
4.3 İKİ KONTROLCÜ UYGULANMIŞ TERS İKİLİ SARKACIN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ	44

4.3.1 Geri Besleme ile Lineerleştirme	45
4.3.2 Genel Kontrol Kanunu	49
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	53
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ.....	57

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1	:Geri beslemeli (kapalı çevrimli) kontrol sistemi	6
Şekil 4.1	:Araba üzerindeki ters sarkaç sistemi	11
Şekil 4.2	:Kutupların değişiminin sistemin kararlılığı üzerindeki etkisi.....	16
Şekil 4.3	:Sistem kutuplarının kontrol kuvveti üzerindeki etkisi.....	17
Şekil 4.4	: $\theta=5^\circ$ başlangıç değeri için lineerize edilmiş ve nonlinear sistemlerin davranışının karşılaştırılması	17
Şekil 4.5	: $\theta=50^\circ$ başlangıç açısı için lineerize edilmiş ve nonlinear sistemlerin davranışının karşılaştırılması	18
Şekil 4.6	: $\theta=60^\circ$ başlangıç açısı için nonlinear sistemin davranışı	19
Şekil 4.7	:Geri besleme ile lineerleştirme uygulanmış sistemin kontrol sabitlerinin değişimine göre davranışı	22
Şekil 4.8	:Geliştirilmiş genel kontrol kanununun sistem üzerine uygulanması sonucu elde edilen simülasyon sonuçları	24
Şekil 4.9	:Araba üzerindeki ters ikili sarkaç sistemi	26
Şekil 4.10	:Lineerize edilmiş sistemin kutup değerlerine göre kararlılığının değişimi	31
Şekil 4.11	: $\theta_1=5^\circ$ ve $\theta_2=5^\circ$ başlangıç değerleri için lineerize edilmiş ve nonlinear sistemin davranışlarının karşılaştırılması.....	32
Şekil 4.12	: $\theta_1= \theta_2=20$ başlangıç değerleri için lineerize edilmiş ve nonlinear sistemin davranışlarının karşılaştırılması.....	33
Şekil 4.13	: $\theta_1= \theta_2=22^\circ$ başlangıç değerleri için nonlinear sistemin davranışı.....	34
Şekil 4.14	:Geri Besleme ile lineerleştirme uygulanmış ters ikili sarkaç sisteminin simülasyon sonuçları.....	39
Şekil 4.15	:Geliştirilen genel kontrol kanununun ters ikili sarkaç üzerine uygulanması sonucu elde edilen simülasyon sonuçları.....	41
Şekil 4.16	:Geliştirilen genel kontrol kanununun ters ikili sarkaç sistemine uygulanması esnasında θ_1 ve θ_2 açılarının davranışları	43
Şekil 4.17	:İki kontrolcü uygulanmış araba üzerindeki ters ikili sarkaç sistemi.....	44

Şekil 4.18	:Geri besleme ile lineerleştirme uygulanmış iki kontrolcülü ters ikili sarkaç sisteminin simülasyon sonuçları	49
Şekil 4.19	:Geliştirilen kontrol kanununu uygulanmış iki kontrolcülü ters ikili sarkaç sisteminin simülasyon sonuçları	51

SEMBOL LİSTESİ

M	: Araba kütlesi [kg]
m	: Ters sarkaç probleminde çubuk kütlesi [kg]
m₁	: Ters ikili sarkaç probleminde birinci çubuğun kütlesi [kg]
m₂	: Ters ikili sarkaç probleminde ikinci çubuğun kütlesi [kg]
l	: Ters sarkaç probleminde çubuk boyunun yarısı [m]
l₁	: Ters ikili sarkaç probleminde birinci çubuk boyunun yarısı [m]
l₂	: Ters ikili sarkaç probleminde ikinci çubuk boyunun yarısı [m]
I	: Ters sarkaç probleminde çubuğun atalet momenti [kg.m ²]
I₁	: Ters ikili sarkaç probleminde birinci çubuğun atalet momenti [kg.m ²]
I₂	: Ters ikili sarkaç probleminde ikinci çubuğun atalet momenti [kg.m ²]
θ	: Ters sarkaç probleminde çubuğun dikeyle yaptığı açı [derece]
θ₁	: Ters ikili sarkaç probleminde birinci çubuğun dikeyle yaptığı açı [derece]
θ₂	: Ters ikili sarkaç probleminde ikinci çubuğun dikeyle yaptığı açı [derece]
x	: Arabanın yer değiştirmesi [m]
K_i	: Geri besleme ile lineerleştirme yönteminde kontrol sabitleri
k_i	: Tam durum geri beslemesi ile kontrol yönteminde kontrol sabitleri
s_i	: Sistem kutupları

ÖZET

TERS İKİLİ SARKACIN MODELLEME VE KONTROLÜ

Bu çalışmada ters ikili sarkaç sistemi modellenerek bir kontrolcü geliştirilmiştir. Öncelikte problem tanıtılmış ve konu üzerinde yapılmış çalışmalar incelenmiş, daha sonra çalışma esnasında kullanılacak yöntemler hakkında genel bilgiler verilmiştir. Ters ikili sarkaç için bir kontrolcü geliştirme amacıyla öncelikle ters sarkaç problemi incelenmiştir. Geliştirilen ve başarılı olan kontrol kanunu ters ikili sarkaç üzerinde denenerek başarılı olduğu görülmüştür.

Geliştirilen kontrol kanunları lineerize edilen sistem üzerinden tasarlanan tam durum geri beslemesi ve nonlinear sistem için tasarlanan geri besleme ile lineerleştirme yöntemlerinin kademeli olarak kullanılması esasına dayanmaktadır. Son bölümde geliştirilen kontrol kanunu irdelenerek gelecek çalışmalar için öneriler sunulmuştur.

SUMMARY

MODELLING AND CONTROL OF DOUBLE INVERTED PENDULUM

Double inverted pendulum system is modeled and a controller is developed. After the problem is introduced, previous relevant work is shortly described, and general information about the methods and concepts to be used in this thesis is given. The inverted pendulum problem is first examined with the aim of developing a control law for the double inverted pendulum. The control law developed for the inverted pendulum problem was extended to the case of double inverted pendulum and gave successful results.

The control laws developed were based on using full-state feedback law for the linearized system and the feedback linearization control law at different ranges of the pendulum angles. Finally, the developed control laws were analyzed and suggestions for future work were made.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada araba üzerindeki ters sarkaç probleminin ve araba üzerindeki ters ikili sarkaç probleminin modellenmesi ve kontrolü incelenmektedir.

Araba üzerindeki ters sarkaç sistemi yatay doğrultuda hareket eden M kütleli bir araba üzerine bir ucundan mesnetlenmiş m kütleli ve $2l$ boyundaki bir çubuktan oluşmaktadır. Amaç arabaya yatay doğrultuda bir u kontrol kuvveti uygulayarak arabanın yatay doğrultudaki “ x ” yer değiştirmesini ve çubuğun dikeyle yaptığı “ θ ” açısını sıfır değerine getirmektir (Şekil 4.1).

Araba üzerindeki ters ikili sarkaç sistemi ise yatay doğrultuda hareket eden M kütleli bir araba üzerine bir ucundan mesnetlenmiş m_1 kütleli $2l_1$ boyundaki bir çubuk ve bu çubuğun diğer ucuna mesnetlenmiş m_2 kütleli $2l_2$ boyundaki ikinci bir çubuktan oluşmaktadır. Burada amaç arabaya yatay doğrultuda bir u_1 kontrol kuvveti ve iki çubuğun bağlantı noktasına bir u_2 kontrol momenti uygulayarak arabanın yatay doğrultudaki “ x ” yer değiştirmesini ve çubukların dikey doğrultu ile yaptıkları sırasıyla “ θ_1 ” ve “ θ_2 ” açılarını sıfır değerine getirmektir (Şekil 4.8).

Çalışma konusu olarak ters sarkaç probleminin incelenmesinin sebebi problemin nonlineer ve kanonik bir problem olması nedeniyle kontrol yöntemlerinin üzerinde denenmesi için uygun olmasıdır. Yetersiz tahrikli bir mekanik sistem olması ve yüksek derecede nonlineer dinamiği sayesinde ters sarkaç sistemi gerek klasik gerekse modern kontrol tekniklerinin tasarımında kullanışlı bir test aracıdır.

Bu çalışmada öncelikle ters sarkaç problemi ilgili yapılmış çalışmalar üzerinde durulacak, ardından çalışma esnasında kullanılacak kontrol yöntemleri hakkında genel bilgiler verilecek, daha sonra sırasıyla araba üzerindeki ters sarkacın ve araba üzerindeki ters ikili sarkacın modellenmesi ve kontrolü incelenecektir.

2. GENEL KISIMLAR

Ters sarkaç üzerine yapılan çalışmalar, nonlinear kontrol yöntemleri ile ilgili yapılan çalışmalarla paralellik arz etmektedir. Bunun sebebi daha önceden de değinildiği gibi ters sarkaç probleminin kontrol yöntemlerinin denenmesi için uygun bir problem olmasıdır. Bu güne kadar yapılmış tüm çalışmaları kapsayacak bir literatür araştırması çok güç olacağından bazı çalışmalardan bahsedilmesi yeterli görülmüştür.

Bu konuda yapılan ilk çalışmalardan birisi Furuta ve diğerlerinin [1] ters ikili sarkaç üzerine yaptığı çalışmadır. Bu çalışmada sistem lineerize edilerek modellenmiş ve durum uzayı gösteriminden yararlanılarak bir bilgisayar programı yardımı ile hem kutup yerleştirme ve hem de optimal kontrol yöntemleri ile tasarlanan gözlemleyici ile birlikte simülasyonu yapılmış ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Spong [2] yetersiz tahriklenmiş (under-actuated) sistemlerin geri besleme ile lineerleştirme yapılarak kontrolünü çeşitli kol sayılarına sahip araba üzerindeki ters sarkaçlar üzerinde, tahriklenmenin yapıldığı yere göre incelemiştir.

Lin ve diğerleri ise araba üzerindeki ters sarkaç sisteminde, arabanın hareketini sınırlı bir bölge içerisinde tutmak koşulu ile lineer kontrolcü tasarlayarak lineerize edilmiş sistemi kontrol etmiştir [3].

Bazı çalışmalarda ise araba üzerindeki ters sarkaç probleminin yerine döner tabla üzerindeki ters sarkaç incelenmiştir. Örneğin, Thein ve Misawa [4] bu sistem üzerinden kayan kipli gözlemleyici ile bazı başka gözlemleyici çeşitlerini karşılaştırırken, Pomales ve Gonzales [5] kayan kipli kontrolcü ve PID kontrolcü kullanmış, Lee ve diğerleri [6] ise kayan kipli kontrolcünün yanında gürültü gözlemleyicisi de tasarlayarak sistemi kararlı hale getirmeye çalışmışlardır. Döner tabla üzerindeki ters sarkaç deney düzeneğinin hazırlanması bakımından klasik araba üzerindeki ters sarkaçtan daha kolaydır. Bunun sebebi ters sarkacı kontrol etmek için gerekli ivmelere kolayca

ulaşılabilmesi ve hareket alanının bir döngü şeklinde olmasıdır. Bu döngüsel hareket, tablanın istenilen konuma getirilmesi koşulu arandığında da en fazla 180 derecelik bir açı değişimini gerektiğinden araba üzerindeki sisteme göre avantaj sağlar.

Enerji yöntemi da araba üzerindeki ters sarkaç problemlerinin çözülmesinde sıkça kullanılan bir yöntemdir. Enerji yöntemi esas olarak sistemin getirilmek istendiği konumda sıfır sonucunu veren bir enerji fonksiyonu yazmaktır. Bu fonksiyon bu konumun dışındaki her noktada sıfırdan büyük sonuçlar vereceğinden yazılacak kontrol kanunu bu enerjiyi sıfır yapmaya dolayısı ile sistemi istenilen konuma getirmeye çalışmaktadır. Aström ve Furuta [7] enerji yöntemi kullanmış ve durum değişkenlerinin sahip olduğu değerlere göre çeşitli stratejiler geliştirmeye çalışmıştır. Bujega [8] ise enerji yönteminin yanında kayan kipli kontrolcü tasarlarken Hemni ve diğerleri [9] bu yöntemi ters iki sarkaç üzerinde denemiştir.

Kullanılan kontrol yöntemi çeşitliliğini göstermek açısından yapılan diğer çalışmalara örnek vermek gerekirse; Ge ve diğerlerinin [10] kayan kipli kontrolcünün yanında çok katmanlı sinir ağı kullanarak tasarladığı adaptif kontrolcüden yada Bulanık mantık kontrolcü yardımıyla geri besleme ile kontrol katsayılarını değiştirerek araba üzerindeki ters ikili sarkacın lineerleştirilmiş modeli için Xiaoxia ve Qiuhai'nin [11] geliştirdiği kontrolcüden bahsedilebilir.

Ters sarkaç probleminin çeşitli şekilleri için yapılan çalışmaların varlığından bahsetmiştik. Bu tip çalışmalara örnek olarak, bir düzlem üzerinde hareket eden tabla üzerine yerleştirilmiş ters sarkacın kontrolü için adaptif bir kontrolcü geliştiren Wai ve diğerlerinden [12], ayrı ayrı tahriklenen iki tekerleği olan ters sarkacın hız ve pozisyon kontrolü üzerinde deneysel bir çalışma yapmış olan Pathak ve diğerlerinden [13] söz edilebilir.

Daha önce de değinildiği gibi burada adı geçen çalışmalar bu konudaki çalışmaların küçük bir kısmıdır. Fakat ters sarkaç problemi üzerinde yapılan çalışmaların çeşitliliğinin görülmesi bakımından bir fikir vermektedir. Görüldüğü gibi yapılan çalışmalarda bazen geliştirilen bir kontrol yönteminin gücü denenirken, bazen farklı kontrol yöntemlerinin bu problem üzerinden kıyaslanması deneysel yada teorik olarak yapılmıştır.

Bu çalışmada, ters ve ikili ters sarkaç problemlerinin geri besleme ile lineerleştirme yöntemi ve tam durum geri beslemesi ile kontrolü kullanılarak kontrol kanunu teklif edilecektir. Burada tasarlanan ve (4.22), (4.40), (4.54), (4.55) ifadeleri ile verilen kontrol kanunları bildiğimiz kadarıyla orijinaldir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu kısımda çalışma esnasında kullanılan teorik bilgilerin genel bir incelenmesi yapılmaktadır.

Burada bahsi geçen kontrol modelleri, \mathbf{u} giriş, \mathbf{y} çıkış (ölçülen, kontrol edilen), \mathbf{x} durum değişkeni vektörleri olmak üzere,

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

şeklindedir. Tek giriş ve tek çıkışa sahip sistemlerde u ve y skaler olmaktadır. Bir çok problemde kontrol girişi durum denklemlerine lineer olarak girer, yani

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

sık karşılaşılan bir özel durumudur.

Lineer ve zamandan bağımsız sistemler, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} ve \mathbf{D} sabit, uygun boyutlu matrisler olmak üzere

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}$$

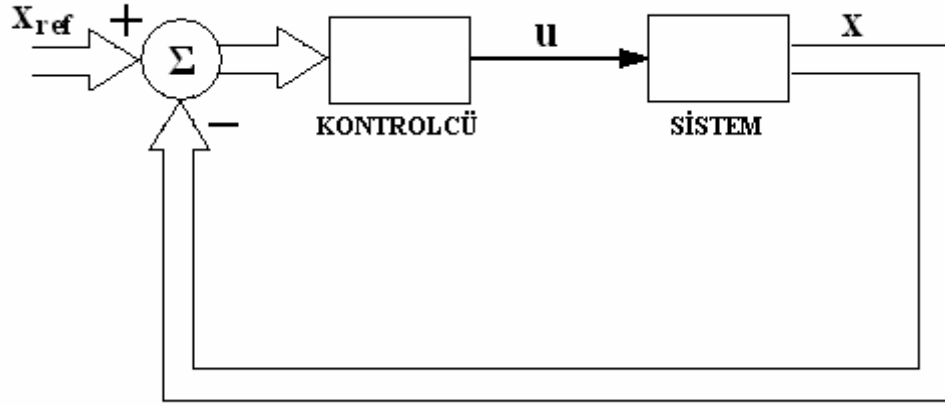
şeklindedir.

Esas problem, sistemin istenilen şekilde davranmasını sağlayacak bir u girişinin bazı veya bütün durum değişkenleri yardımıyla oluşturulmasıdır; yani (sembolik olarak)

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}(\mathbf{x})$$

şeklinde tasarlanacak kontrol kanunu sistem denklemlerinde yerine konduğunda ortaya çıkan adi diferansiyel denklem takımının çözümü olarak elde edilen durum değişkenlerinin belli bir şekilde davranması istenir.

Kullanılacak kontrol yöntemleri geri beslemeli (kapalı çevrimli) kontrol yöntemleridir. Geri beslemeli bir kontrol sisteminin şeması Şekil 3.1 de görülmektedir. Sistem üzerinden ölçülen durum değişkenlerinin bu değişkenler için istenen referans değerleri ile olan farkı yani hata hesaplanır. Daha sonra bu değer üzerinden kontrolcü tarafından bu değeri sıfıra yani sistemin değişkenlerini referans değerlere çekecek bir kontrol etkisi üretilerek sisteme geri yollanır.



Şekil 3.1: Geri beslemeli (kapalı çevrimli) kontrol sistemi

Bu çalışmada tüm durum değişkenlerinin değerleri sıfıra getirilmeye çalışıldığından hata ölçülen durum değişkeninin negatif işaretlisi şeklindedir ve ayrıca sisteme bir referans girişi olmamaktadır. Ancak mesela arabanın konumunu belirlenen başka bir yere getirmeye ya da çubuk açısını farklı bir değerde tutmaya çalışsaydık bir referans girişi vermemiz gerekebilirdi. Öte yandan çubuğun açını belirli bir değerde tutmak bir noktadan sonra arabayı sabit bir ivme ile hareket ettirmemiz bu da zamanla sonsuza giden bir hıza ulaşmamız manasına geleceğinden uygun hedef olmayacaktır.

3.1 LİNEERLEŞTİRİLMİŞ SİSTEMİN KONTROLÜ

Nonlinear bir sistemin içerisindeki nonlinear terimleri belirli kurallar çerçevesinde Taylor serileri yardımıyla basitleştirerek sistemi lineer bir şekle getirme işlemine lineerleştirme adı verilir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir a değeri civarındaki lineer ifadesi bu ifadenin Taylor serisinin ilk iki terimi yani,

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x} (x - a) + \dots \quad (3.1)$$

ifadesinden elde edilir. Bu şekilde sistem,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

şeklinde ifade edilebilecek bir hale gelir.

Bu kontrol yönteminde amaç sistemin lineerleştirilmiş hali üzerinden bir kontrol kanunu geliştirdikten sonra bunu nonlinear sisteme uygulamaktır. Yani nonlinear sistemin davranışının lineer sistemle benzeştiği bölgede nonlinear olan sistemi sanki lineer bir sistemmiş gibi kontrol etme yöntemidir. Sınırlı nonlinearliğe sahip sistemlerde bu yöntem çok kullanışlıdır. Sınırlı nonlinearlikten kasıt nonlinear bir sistem olmasına karşın değişkenlerin lineer kabulü yapılabilecek bir bölge içerisinde değişmesidir. Örneğin taşıt dinamiğinde normal koşullarda taşıtın gövdesinin yapacağı kafa atma hareketi (taşıtın dingillere paralel bir eksen etrafında dönmesi) lineer kabulünün yapılabileceği bir aralıkta değişir.

3.2 TAM DURUM GERİ BESLEMESİ İLE KONTROL

Kontrol kanunu yazılırken sistem içerisindeki tüm durumların göz önüne alındığı kontrol yöntemine tam durum geri beslemesi ile kontrol adı verilir. Bu kontrol yönteminin kullanılması sırasında tüm durumların ölçülmesinin güç, bazen imkansız olması uygulama açısından bir sorun teşkil etmektedir. Gözlemleyici tasarlamak bu tip durumlarda kullanışlı bir yöntemdir. Sistemin bazı değişkenlerini ölçüp diğer

değişkenleri bu ölçülen değişkene bağlı olarak tahmin eden yapılara gözlemleyici adı verilir. Gözlemleyici kullanabilmek için öncelikle sistemin gözlemlenebilir olması gerekmektedir. Biz çalışmamız esnasında bir gözlemleyiciye ihtiyaç duymayacağımızı farz ediyoruz.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

şeklindeki bir lineer sistemde tam durum geri beslemesi uygulandığında kontrol kanunu,

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{x}$$

biçimindedir. Bu durumda sistem,

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{x}$$

halini alır ve kontrol edilen sistemin davranışını $\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}$ matrisinin özdeğerleri (kutuplar) tayin eder.

3.2.1 Kutup Yerleştirme

Kontrol edilen değişkenlere ait kontrol sabitleri (\mathbf{K} matrisi) ile kontrol uygulanmış sistemin kutupları arasında bir bağıntı kurarak istenilen kutup değerlerini elde etmek için gerekli olan kontrol sabitlerini tayin etme işlemine kutup yerleştirme (pole placement) adı verilir. Lineer sistemler üzerinde uygulanır. Bu işlemin yapılabilmesi için sistemin kontrol edilebilir olması gerekmektedir. Zira sistemin kaç tane durum değişkeni varsa (bir çok durumda) o kadar kutbu vardır ve eğer kontrol sabiti sayısı bu sayıdan az ise genel bir bağıntı kurmak olanaksızdır.

Tam durum geri beslemesi uygulanmış kontrol edilebilir bir sistemin

$$|s \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}| = 0$$

ifadesi ile verilen karakteristik denkleminin determinantı sıfıra eşitlendiğinde elde edilen polinom ifadenin kökleri karakteristik denklemin özdeğerlerini yani sistemin kutuplarını vermektedir. Burada her bir karakteristik denklem katsayısına tek bir bağımsız k_i geribesleme kazancı düştüğünden özdeğerlerin keyfi yerleştirilebileceği

açıktır. Eğer bir yada daha fazla durum değişkeni kontrol edilemez olsaydı kutuplar istendiği gibi yerleştirilemeyecekti [14].

3.3 GERİ BESLEME İLE LİNEERLEŞTİRME

Nonlinear bir sistemin içerisindeki nonlinear terimleri kontrol kanunu sayesinde yok ederek tam olarak linear bir ifade elde etme işlemine geri besleme ile lineerleştirme adı verilir. Bu kontrol yönteminde kontrol kanunu sisteme uygulandığında sistemin içerisindeki nonlinear terimleri sadeleştirecek biçimde seçilir. Bu durumda sistem modeli ve kontrol kanunu nonlinear, fakat kontrol uygulanmış sistem linear olur.

Geri besleme ile lineerleştirme, diğer bir deyişle nonlinearlikleri kaldırma ve arzu edilen linear dinamiği uygulama, kontrol edilebilir kanonik formdaki nonlinear sistemlere uygulanabilir.

Tek girişli kontrol edilebilir kanonik formdaki bir dinamik sistem; u kontrol girişi, $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$ durum vektörü, $f(\mathbf{x})$ ve $b(\mathbf{x})$ durumların nonlinear fonksiyonları olmak üzere

$$\dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \quad (3.2)$$

şeklindedir. Yani sistem bu duruma getirilebiliyorsa bu işlem uygulanabilir.

Kontrol edilebilir kanonik formda gösterilebilen bir sistem ($b(\mathbf{x})$ sıfır olmamak kaydıyla),

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{x})} [v - f(\mathbf{x})] \quad (3.3)$$

şeklinde bir kontrol girişi uygulanarak nonlinearlikler kaldırılabilir ve

$$\dot{x}^{(n)} = v$$

şeklindeki basit giriş-çıkış ilişkisi elde edilebilir.

Kapalı çevrim (kontrol uygulanmış) sistemin tüm kutupları kompleks düzlemin sol tarafında olmak üzere karakteristik denkleminin $p^n + K_{n-1} p^{n-1} + \dots + K_0$ biçiminde olmasını istiyorsak,

$$v = -K_0 x - K_1 \dot{x} - \dots - K_{n-1} x^{(n-1)} \quad (3.4)$$

olarak seçildiğinde

$$x^{(n)} + K_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + K_0 x = 0$$

elde edilir. Böylelikle $x(t) \rightarrow 0$ 'ı gerektiren üstel kararlı bir dinamik oluşur. Burada K'ları seçerek sistemin kararlılığını istediğimiz gibi yapabiliriz.

$x(t) \rightarrow 0$ yerine istenilen bir $x_d(t)$ çıkışının izlenmesini gerektiren bir durumda kontrol kanunu, hata

$$e(t) = x(t) - x_d(t)$$

olmak üzere,

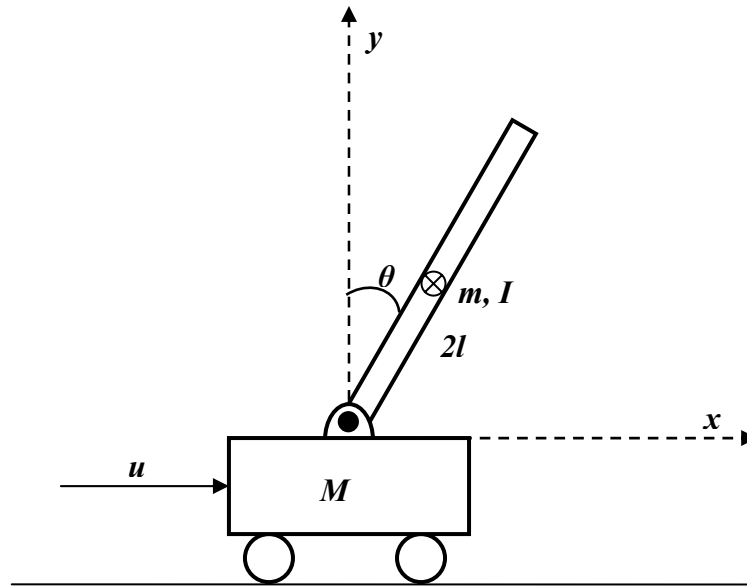
$$v = x_d^{(n)} - K_0 e - K_1 \dot{e} - \dots - K_{n-1} e^{(n-1)} \quad (3.5)$$

şeklinde seçilir [15].

Geri besleme ile lineerleştirme yöntemi yetersiz tahriklenmiş (under-actuated), yani serbestlik derecesi sayısı kontrol girişi sayısından fazla olan sistemlerde genellikle tek başına istenilen sonucu vermez. Zira sistemin serbestlik derecesi kontrol girişi sayısından fazla olduğunda sistemin içerdiği nonlineer ifadelerin hepsinin geri besleme ile lineerleştirilmesi genellikle mümkün olmamaktadır. Bu durumda ise geri besleme ile kısmi lineerleştirme bazen bir çözüm olabilmektedir. Kontrolcü durum denklemlerinden olabildiğince fazlasını lineerize edecek şekilde tasarlanırsa hiç değilse kontrol edilecek sistem için en çok önem arzeden bir kaç durum kontrol altına alınabilir. Yapılan bu işlem ise geri besleme ile kısmi lineerleştirme olarak adlandırılır.

4. BULGULAR

4.1. TERS SARKACIN KONTROLÜ



Şekil 4.1: Araba üzerindeki ters sarkaç sistemi

Araba üzerindeki ters sarkac sisteminin hareket denklemleri,

$$(M + m)\ddot{x} + m\ddot{\theta}l \cos \theta - m\dot{\theta}^2 l \sin \theta = u \quad (4.1)$$

$$m\ddot{x}l \cos \theta + (ml^2 + I)\ddot{\theta} = mgl \sin \theta \quad (4.2)$$

şeklindedir.

(4.2) ifadesinde çubuğun kütle merkezine göre atalet momenti,

$$I = \frac{ml^2}{3}$$

olarak yazılarak düzenlenirse,

$$\ddot{x} \cos \theta + \frac{4}{3} l \ddot{\theta} = g \sin \theta \quad (4.3)$$

elde edilir.

4.1.1 Lineerleştirme

(4.1) ve (4.3) ifadeleri $\theta = 0$ civarında (3.1) 'den yararlanılarak lineerleştirilirse,

$$(M + m) \ddot{x} + m \ddot{\theta} l = u$$

$$\ddot{x} + \frac{4}{3} l \ddot{\theta} = g \theta$$

halini alır. Bu ifadeler \ddot{x} ve $\ddot{\theta}$ için çözümlenerek düzenlendiğinde,

$$\ddot{\theta} = \frac{3(M + m)g}{(4M + m)l} \theta - \frac{3}{(4M + m)l} u \quad (4.4)$$

$$\ddot{x} = \frac{-3mg}{4M + m} \theta + \frac{4}{4M + m} u \quad (4.5)$$

olur. Durum uzayı gösterimi için,

$$\theta = x_1$$

$$\dot{\theta} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$x = x_3$$

$$\dot{x} = \dot{x}_3 = x_4$$

yazarak (4.4) ve (4.5) ifadelerinden,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3(M+m)g}{(4M+m)l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-3mg}{4M+m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{(4M+m)l} & 0 & \frac{4}{4M+m} \end{bmatrix}^T \quad (4.7)$$

olmak üzere,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \quad (4.8)$$

şeklinde durum uzayı gösterimi elde edilir.

4.1.2 Kontrol Edilebilirlik:

(4.8) ifadesi ile verilen n. mertebeden bir sistemin kontrol edilebilir olması için,

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (4.9)$$

biçiminde tanımlanan n. mertebeden \mathbf{C} kontrol edilebilirlik matrisinin rankının n olması, yani başka bir deyişle, tek giriş-çıkışlı bir sistem için,

$$\det(\mathbf{C}) \neq 0$$

şartını sağlaması gerekir. İncelenen sistem 4. mertebeden olduğundan kontrol edilebilirlik matrisi,

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B}]$$

şeklindedir ve

$$\det(\mathbf{C}) = 81 \frac{g^2}{l^4 (4M+m)^4}$$

olarak elde edilir ve bu ifade her zaman sıfırdan farklıdır.

4.1.3 Tam durum geri beslemesi:

Sistem kontrol edilebilir olduğundan tam durum geri beslemesi uygulanabilir.

x_1, x_2, x_3, x_4 'ün yani $\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}$ 'in ölçülebilir olduğunu farz edelim. İncelenen sisteme tam durum geri beslemesi uygulandığında kontrol kanunu

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 = \mathbf{K} \mathbf{x} \quad (4.10)$$

olarak yazılır. Bu durumda

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \mathbf{x} \quad (4.11)$$

olduğundan kontrol uygulanmış sistemin kutupları,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}) = 0 \quad (4.12)$$

karakteristik denkleminde bulunur.

Eğer sistemin kutuplarının $s = -a, -b, -c, -d$ (hepsi sol yarı düzlemde) olması isteniyorsa (4.12) deki polinomu,

$$\begin{aligned} (s+a)(s+b)(s+c)(s+d) &= s^4 + (a+b+c+d)s^3 \\ &+ (ab+ac+ad+bc+bd+cd)s^2 + (abcd+abd+acd+bcd)s \\ &+ (abcd) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ifadesine eşitleyerek gerekli k sabitleri bulunur. Eğer sistem kontrol edilebilir ise bu işlem yapılabilir.

(4.10), (4.11)'de yazılınca, kontrol uygulanmış sistem (diğer bir adı "kapalı çevrim" sistem),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0}{3(M+m)g - 3k_1} & \frac{1}{(4M+m)l} & \frac{0}{-3k_2} & \frac{0}{-3k_3} \\ \frac{0}{(4M+m)l} & \frac{-3k_2}{(4M+m)l} & \frac{0}{(4M+m)l} & \frac{-3k_4}{(4M+m)l} \\ \frac{0}{-3mg + 4k_1} & \frac{0}{4k_2} & \frac{0}{4k_3} & \frac{1}{4k_4} \\ \frac{0}{4M+m} & \frac{0}{4M+m} & \frac{0}{4M+m} & \frac{0}{4M+m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

şekline gelir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}) = & s^4 + \frac{3k_2 - 4l k_4}{(4M + m)l} s^3 + \frac{-3Mg - 3k_1 - 3mg - 4lk_3}{(4M + m)l} s^2 \\ & + \frac{3gk_4}{(4M + m)l} s + \frac{3gk_3}{(4M + m)l} \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklinde elde edilen denklemin köklerinin $-a, -b, -c, -d$ şeklinde oldukları varsayılırsa karakteristik denklem bu defa (4.13), (4.14)'e eşitlenerek dört bilinmeyenli bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde kontrolcü katsayıları

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{abcd(4M + m)l}{3g} \\ k_4 &= \frac{(abc + abd + acd + bcd)(4M + m)l}{3g} \\ k_1 &= \frac{(ab + ac + ad + bc + bd + cd)(4M + m)l + 3g(M + m) + 4lk_3}{3} \\ k_2 &= \frac{(a + b + c + d)(4M + m)l + 4lk_4}{3} \end{aligned}$$

olarak elde edilirler.

$M = 10$ kg, $m = 1$ kg, $l = 1$ m olarak kabul edildiğinde, lineerleştirilmiş sistemin kontrolcü katsayıları, kapalı çevrim sistemin kutupları

$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = -1$ için,

$$k_1 = 191.7675$$

$$k_2 = 62.0967$$

$$k_3 = 1.3931$$

$$k_4 = 5.5725$$

ve $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = -2$ istendiği durum için

$$k_1 = 465.6302$$

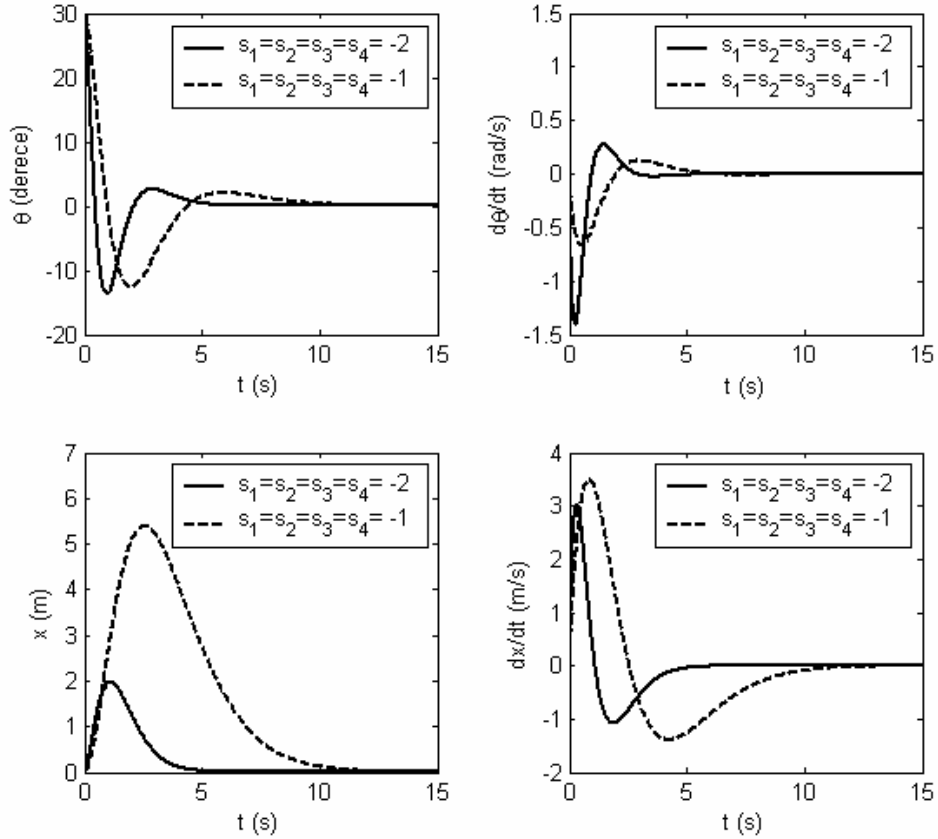
$$k_2 = 168.7738$$

$$k_3 = 22.2902$$

$$k_4 = 44.5804$$

olarak hesaplanır.

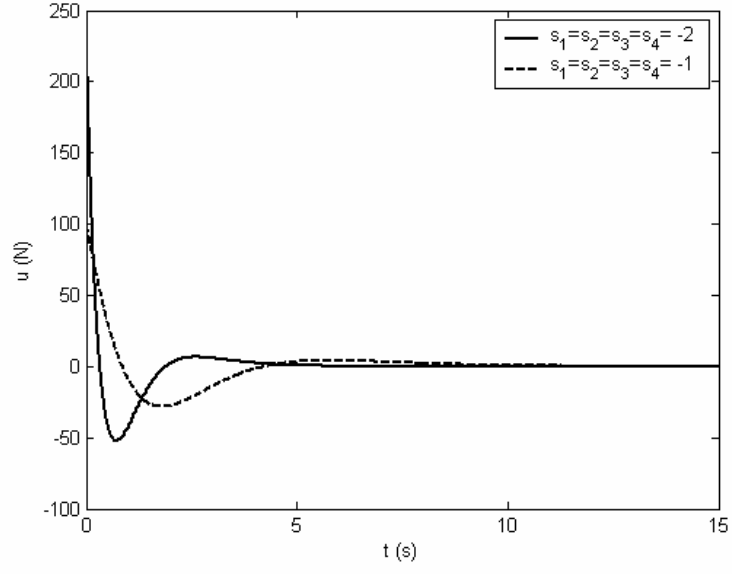
Her iki durum için çubuğun başlangıç açısının $\theta=30^\circ$ olduğu durum için lineerleştirilmiş sistem simule edildiğinde Şekil 4.2 'deki sonuçlar elde edilmiştir.



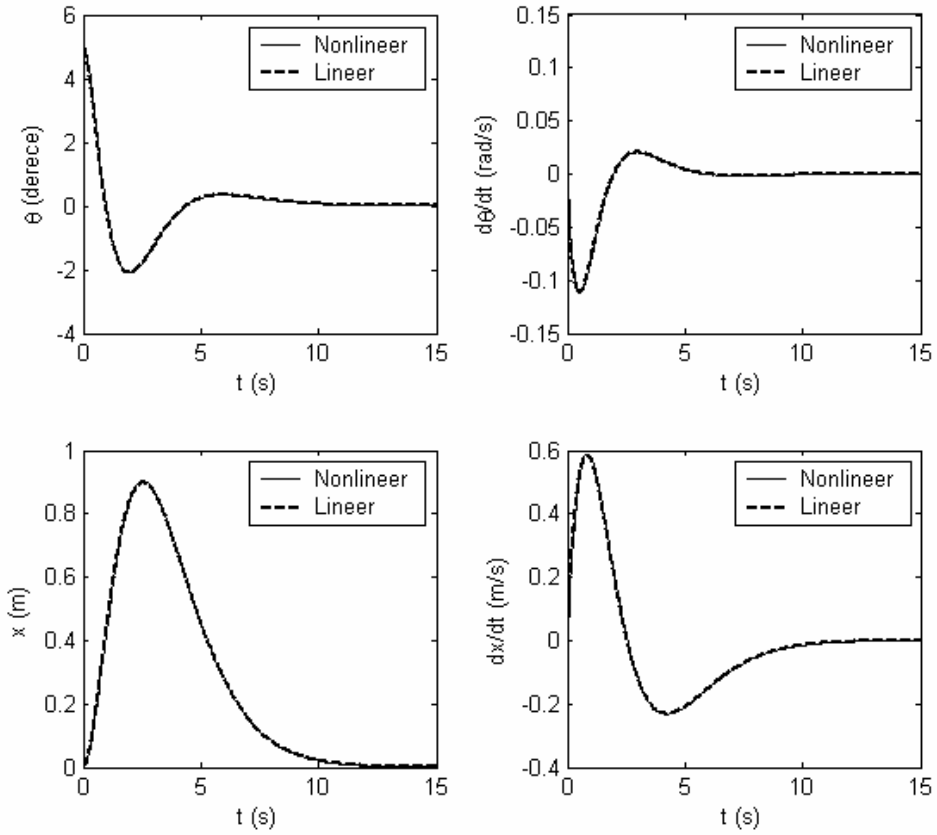
Şekil 4.2: Kutupların değişiminin sistemin kararlılığı üzerindeki etkisi

Grafikten de açıkça anlaşılacağı gibi tam durum geri beslemesi lineerleştirilmiş sistemi kontrol etmede başarılı olmuştur. Sistemin kutuplarının gerçel negatifliğinin arttıkça cevap hızının arttığı yine grafikte görülmektedir. Şekil 4.3 de ise sistem kutuplarının gerçel negatifliği arttıkça kontrol kuvvetinin de artım eğilimi gösterdiği görülmektedir.

Lineerleştirilmiş sistem tam durum geri beslemesi ile kontrol edebildiğine göre, lineer olmayan sistemde lineerleştirmenin yapıldığı bölge civarında ($\theta \approx 0$) bu değerler için kontrolcünün başarısını inceleyelim.



Şekil 4.3: Sistem kutuplarının kontrol kuvveti üzerindeki etkisi

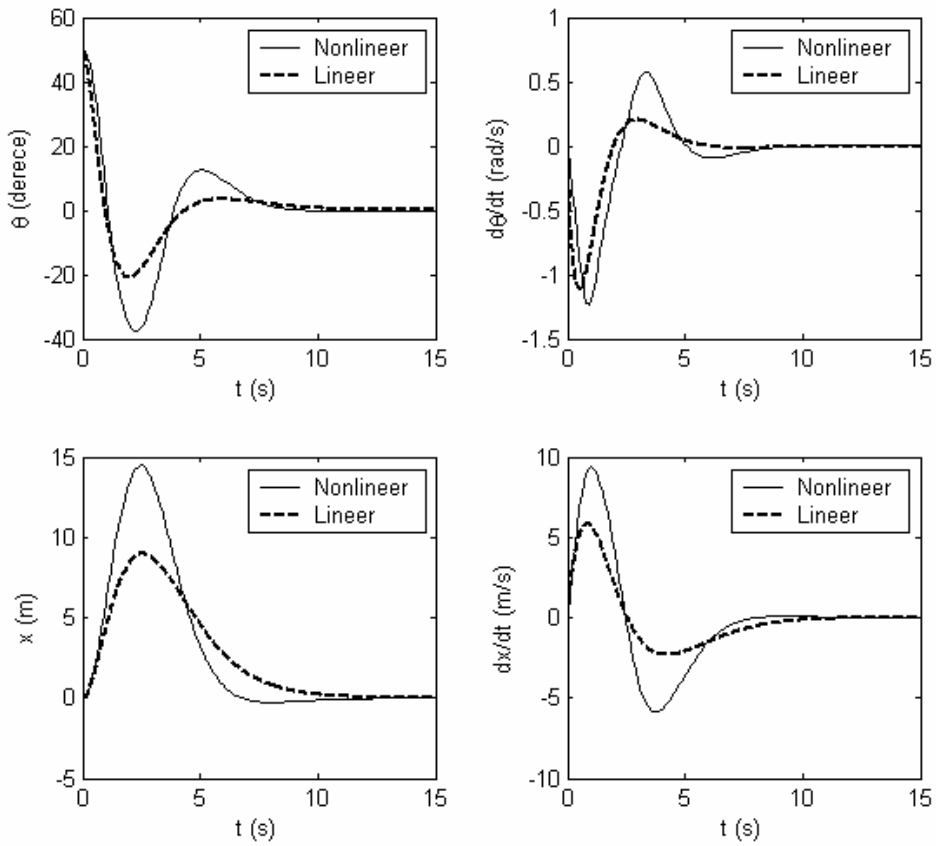


Şekil 4.4: $\theta=5^\circ$ başlangıç değeri için lineerize edilmiş ve nonlinear sistemlerin davranışının karşılaştırılması

Yine lineerleştirilmiş sistemin kutuplarının $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = -1$ olduğu durum için hesaplama yapıldığında elde edilen kontrolcü katsayıları bu kez lineer olmayan sistem üzerinde çubuğun başlangıç açısının $\theta = 5^\circ$ olduğu durum için uygulandığında aşağıdaki grafik elde edilmiştir.

Şekil 4.4 'deki grafikte görüldüğü gibi $\theta \approx 0$ civarında, lineerleştirilmiş sistem için tasarlanmış kontrol kanunu lineer olmayan sistemi de kontrol edebilmektedir.

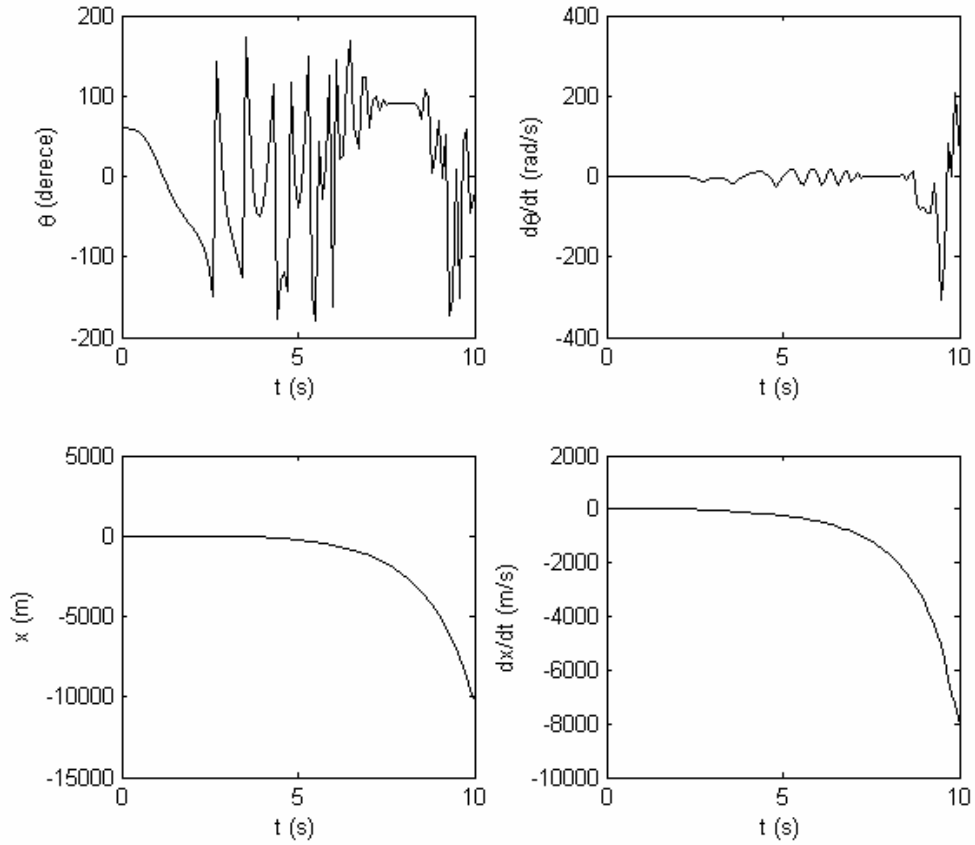
Bu kez çubuğun başlangıç açısının $\theta = 50^\circ$ olduğu durum için aynı kontrolcü katsayıları ile sistem simüle edildiğinde Şekil 4.5'deki grafik elde edilmiştir.



Şekil 4.5: $\theta = 50^\circ$ başlangıç açısı için lineerize edilmiş ve nonlinear sistemlerin davranışının karşılaştırılması

Grafikten görüldüğü gibi $\theta \approx 0$ civarından uzaklaştıkça lineerleştirilmiş sistem için tasarlanmış kontrol kanununun lineer olmayan sistemi kararlı hale getirmekte görece olarak daha zorlandığı görülmektedir.

Çubuğun başlangıç açısı $\theta=60^\circ$ olarak alındığında ve sistem simüle edildiğinde Şekil 4.6 'deki grafik elde edilmiştir. Grafikten de görüldüğü gibi bir noktadan sonra lineerleştirilmiş sistem için tasarlanmış kontrol kanunu lineer olmayan sistemi kararlı hale getirememektedir. O halde $\theta \approx 0$ civarında olmadığı durumlar için de sistemi kararlı hale getirecek bir kontrol kanununa ihtiyaç vardır.



Şekil 4.6: $\theta=60^\circ$ başlangıç açısı için nonlineer sistemin davranışı

4.1.4 Geri Besleme ile Kısmi Lineerleştirme

(4.1) ve (4.3) ifadeleri ile belirtilmiş olan sistemin dinamik denklemleri \ddot{x} ve $\ddot{\theta}$ için çözümlenerek düzenlendiğinde,

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{3 m l \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - 3 (M + m) g \sin \theta}{3 m l \cos^2 \theta - 4 (M + m)} \right) + \left(\frac{3 \cos \theta}{3 m l \cos^2 \theta - 4 (M + m)} \right) u \quad (4.15)$$

$$\ddot{x} = \left(\frac{3 m g \cos \theta \sin \theta - 4 l m \dot{\theta}^2 \sin \theta}{3 m \cos^2 \theta - 4 (M + m)} \right) + \left(\frac{-4}{3 m \cos^2 \theta - 4 (M + m)} \right) u \quad (4.16)$$

olur.

Burada,

$$\begin{aligned} \theta &= x_1 \\ x &= x_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak,

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= \left(\frac{3 m l \dot{x}_1^2 \cos x_1 \sin x_1 - 3 (M + m) g \sin x_1}{3 m l \cos^2 x_1 - 4 (M + m)} \right) \\ f_2(\mathbf{x}) &= \left(\frac{3 \cos x_1}{3 m l \cos^2 x_1 - 4 (M + m)} \right) \\ f_3(\mathbf{x}) &= \left(\frac{3 m g \cos x_1 \sin x_1 - 4 l m \dot{x}_1^2 \sin x_1}{3 m \cos^2 x_1 - 4 (M + m)} \right) \\ f_4(\mathbf{x}) &= \left(\frac{-4}{3 m \cos^2 x_1 - 4 (M + m)} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

olmak üzere (4.15) ve (4.16) denklemleri,

$$\ddot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) u \quad (4.18)$$

$$\ddot{x}_2 = f_3(\mathbf{x}) + f_4(\mathbf{x}) u \quad (4.19)$$

Şeklinde gösterilebilir. Kontrol edilecek çıkış değişkeni,

$$y = x_1 = \theta$$

olarak kabul edilirse,

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_1 \\ \ddot{y} &= \ddot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) u\end{aligned}\quad (4.20)$$

şeklini alır. Burada kontrol kanununu,

$$u = \frac{1}{f_2(\mathbf{x})}(-K_1 y - K_2 \dot{y} - f_1(\mathbf{x}))$$

olarak alırsak ve (4.20) ifadesinde yerine koyarsak,

$$\ddot{y} + K_2 \dot{y} + K_1 y = 0\quad (4.21)$$

elde edilir. Bu kontrol kanunu (4.19) ifadesinde yerine konulduğunda,

$$\ddot{x}_2 = f_3(\mathbf{x}) + f_4(\mathbf{x}) \frac{1}{f_2(\mathbf{x})}(-K_1 y - K_2 \dot{y} - f_1(\mathbf{x}))\quad (4.22)$$

olur.

Görüldüğü gibi sistem uygun kontrol kanununun seçilmesi ile kısmi olarak lineerleştirilmiş oldu. Çünkü seçilen kontrol kanunu sistemin her iki denklemini de aynı anda lineerize edememektedir. Bu durumda kontrol kanunu sistemi kısmi olarak lineerize edebilmektedir denilir. (4.21) ifadesi lineer bir ifade olduğundan bu ifadenin kararlılığına K_1 ve K_2 katsayılarına bağlı olarak etki edilebilmektedir.

Seçilen kontrol kanunu

$$K_1 = 1$$

$$K_2 = 1$$

(Yani $y = x_1$ için kutuplar $s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ oluyor)

için,

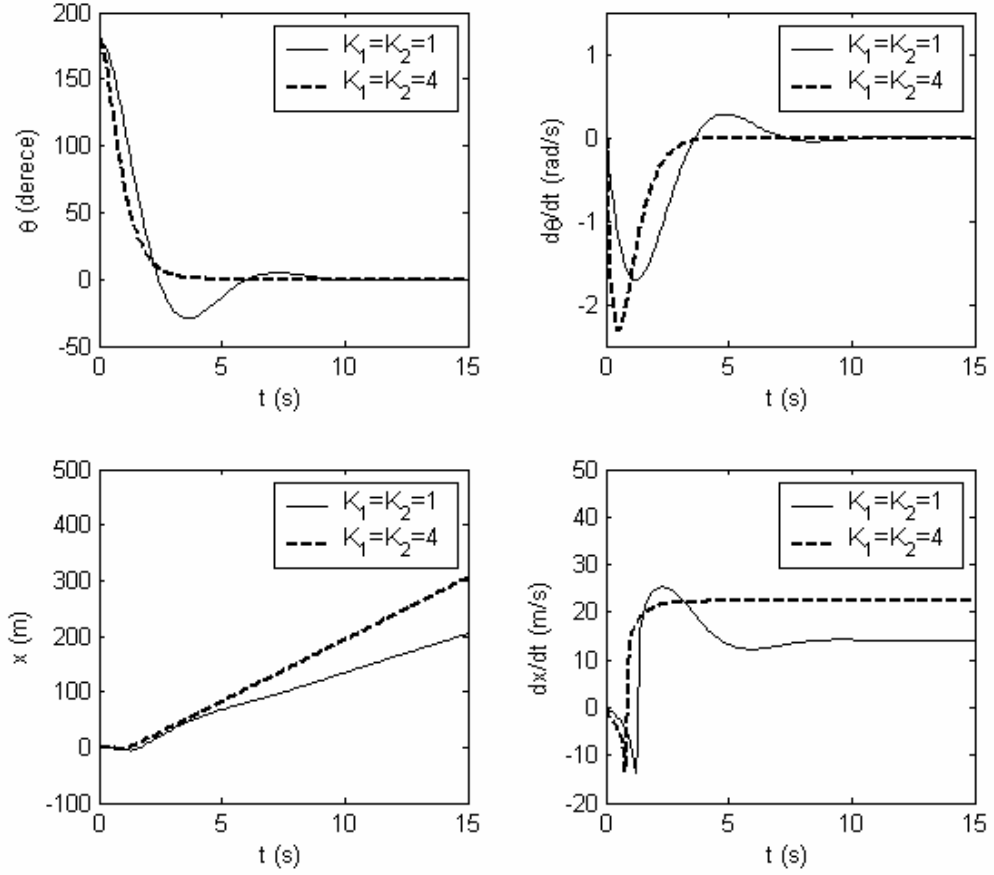
ve

$$K_1 = 4$$

$K_2 = 4$

(Yani $y = x_1$ için kutuplar $s_{1,2} = -2$ oluyor)

için sisteme uygulanarak simülasyon yapıldığında Şekil 4.7 'daki grafik elde edilmiştir.



Şekil 4.7: Geri besleme ile lineerleştirme uygulanmış sistemin kontrol sabitlerinin değişimine göre davranışı

Buradan görüldüğü gibi seçilen kontrol kanunu sadece θ ve $\dot{\theta}$ durum değişkenlerini kararlı hale getirebilmektedir. Bu geri besleme ile kısmi lineerleştirmenin bir sonucudur. Aynı zamanda grafikten K_1 ve K_2 katsayılarının sistemin kararlılığına olan etkisi açık olarak görülmektedir.

Tüm durumların kararlı hale getirilmesi amaçlandığından dolayı geri besleme ile kısmi lineerleştirme ile geliştirilen kontrol kanunu da tek başına bu amaca ulaşılmasını sağlamamaktadır.

Dikkat edildiğinde ardı ardına denenen iki kontrol kanununun birbirini tamamlayıcı özellikleri olduğu görülmüştür. Lineerleştirilmiş sistem için geliştirilmiş olan tam durum geri beslemesi belirli bir açı değerinden küçük olan durumlar için tüm durumları; geri besleme ile kısmi lineerleştirme ile geliştirilen kontrol kanunu ise açı değeri ne olursa olsun sadece açığı ve açısal hızı kararlı hale getirebilmektedir. Burada belirli bir açı değerinden büyük durumlarda geri besleme ile kısmi lineerleştirme yapılarak çubuğu lineerleştirilmiş sistem için geliştirilmiş olan tam durum geri beslemesi tarafından kontrol edilebilecek bir açı değerine getirmek ve bu noktadan sonra kontrol kanununu değiştirerek tam durum geri beslemesi uygulanması teklif edilmektedir.

Kısacası ters sarkacı dikey konuma getirmek için geri besleme ile kısmi lineerleştirme, sarkaç dikey konumdayken arabayı başlangıç noktasına taşımak için tam durum geri beslemesi yapılması teklif edilmektedir. Bu durumda kontrol kanununun değiştirileceği açı değerine θ_0 dersek, teklif edilen kontrol kanunu

$$u = \begin{cases} \frac{1}{f_2(\mathbf{x})}(-K_1 x_1 - K_2 x_2 - f_1(\mathbf{x})) & |\theta| > \theta_0 \\ k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 & |\theta| \leq \theta_0 \end{cases} \quad (4.23)$$

olarak tanımlanabilir.

Teklif edilen bu kontrol kanununu sistemimiz üzerinde uyguladığımızda Şekil 4.8 'deki grafik elde edilmiştir.

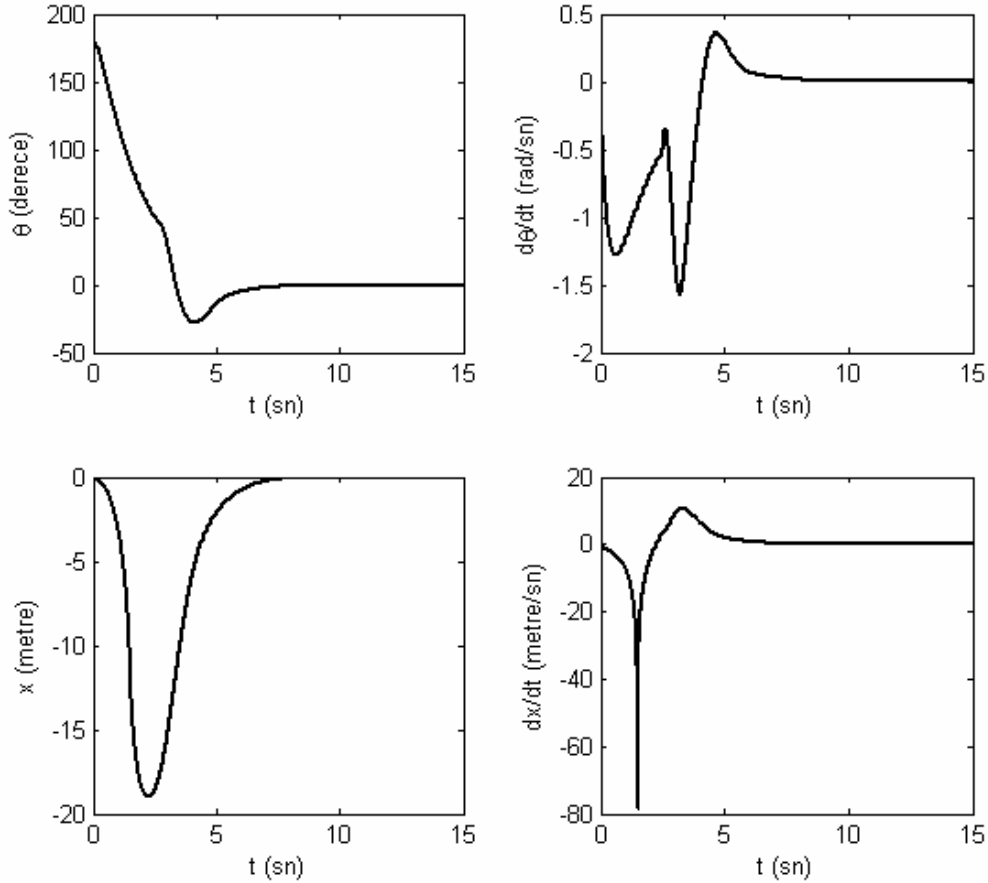
Burada, kontrol kanununun değiştirileceği açı değeri ve durumların $t=0$ anındaki değerleri sırasıyla,

$$\theta_0 = 50^\circ$$

$$\theta(0) = 180^\circ$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$$

olarak alınmıştır. Görüldüğü gibi bu başlangıç değerleri için teklif edilen kontrol kanunu sistemin tüm durumlarını kararlı hale getirmektedir.

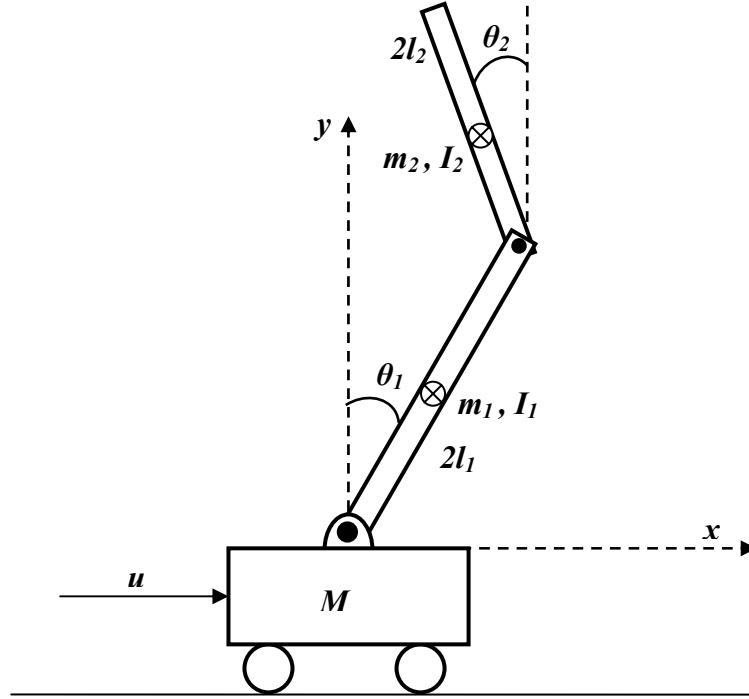


Şekil 4.8: Geliştirilmiş genel kontrol kanununun sistem üzerine uygulanması sonu elde edilen simülasyon sonuçları

Teklif edilen kontrol kanununda dikkat edilmesi gereken en önemli husus kontrolcü katsayılarının ne olarak alınacağıdır. Zira başlangıç değerlerinin ve kontrol kanununun değiştirileceği açı değerinin sistemin durumu üzerindeki etkisi büyüktür. Mesela yer değiştirmeye bağlı olan kontrolcü katsayısının değeri yüksek seçilirse ve sistem başlangıç değerleri yüzünden tam durum geri beslemesi ile kontrol yapılan bölgeye girdiğinde yer değiştirme çok yüksek değerlere varmış bulunursa kontrolcünün bu durumu kontrol etmek için ürettiği kuvvet yüksek olacağından diğer durumlara bozucu bir etkiye bulunacak bu da tüm durumların kararlılığına menfi etkiye bulunacaktır. Bunun sebebi ise sistemin bir noktadan sonra lineer kabulü yapılarak buna göre kontrol kuvveti üretilmesidir. Başka bir yönden ele alırsak, sistemin lineer kabulü yapılmış

bölgesine girildiğinde çubuğun açısal hızı çok yüksek değerlerde ise lineer kontrolcünün bu durumu kararlı hale getirmek için üreteceği kuvvet dolaylı yoldan çubuğa etkidiği için çubuğun diğer taraftan lineer bölgenin dışına çıkmasına mani olamayacaktır. Bu bize kısmi lineerleştirme ile kontrolün katsayılarını çok yüksek tutmamamız gerektiğini göstermektedir. Aksi halde sistem çok hızlı bir biçimde lineer kabulü yapılan bölgeye girer ama lineer kontrolcü sistemi ilk seferinde bu bölge içerisinde tutamaz.

4.2 TERS İKİLİ SARKACIN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ



Şekil 4.9: Araba üzerindeki ters ikili sarkaç sistemi

Şekil 4.9 'da görülen araba üzerindeki ters ikili sarkacın hareket denklemleri, 1. ve 2. çubukların kütle merkezlerine göre atalet momentleri sırasıyla,

$$I_1 = \frac{m_1 l_2^2}{3}, \quad I_2 = \frac{m_2 l_2^2}{3}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} (M + m_1 + m_2) \ddot{x} + (m_1 l_1 + 2 m_2 l_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ - (m_1 l_1 + 2 m_2 l_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 = u \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} (m_1 l_1 + 2 m_2 l_1) \cos \theta_1 \ddot{x} + \left(m_1 l_1^2 + 4 m_2 l_1^2 + \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \right) \ddot{\theta}_1 \\ + 2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 \\ + 2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - (m_1 l_1 + 2 m_2 l_1) g \sin \theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
& m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{x} + 2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \left(m_2 l_2^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \right) \ddot{\theta}_2 \\
& - 2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 g \sin \theta_2 = 0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

şeklindedir.

4.2.1 Lineerleştirme

Bu ifadeler $\theta_1 = \theta_2 = 0$ civarında lineerleştirilirse,

$$(M + m_1 + m_2) \ddot{x} + (m_1 l_1 + 2 m_2 l_1) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 = u \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
& (m_1 l_1 + 2 m_2 l_1) \ddot{x} + \left(m_1 l_1^2 + 4 m_2 l_1^2 + \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \right) \ddot{\theta}_1 + 2 m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \\
& - (m_1 l_1 + 2 m_2 l_1) g \theta_1 = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$m_2 l_2 \ddot{x} + 2 m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + \left(m_2 l_2^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \right) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_2 g \theta_2 = 0 \tag{4.29}$$

elde edilir. Gösterim kolaylığı için,

$$a_1 = - \frac{3 g (4 M m_1 + 4 m_1^2 + 8 M m_2 + 9 m_1 m_2 + 2 m_2^2)}{4 l_1 (m_1 (m_1 + m_2) + M (4 m_1 + 3 m_2))}$$

$$a_2 = \frac{9 g m_2 (-2 M - m_1)}{4 l_1 (m_1 (m_1 + m_2) + M (4 m_1 + 3 m_2))}$$

$$a_3 = - \frac{3 (2 m_1 + m_2)}{2 l_1 (m_1 (m_1 + m_2) + M (4 m_1 + 3 m_2))}$$

$$a_4 = - \frac{9 g (2 M m_1 + m_1^2 + 4 M m_2 + 2 m_1 m_2)}{4 l_2 (m_1 (m_1 + m_2) + M (4 m_1 + 3 m_2))}$$

$$a_5 = - \frac{3 g (-4 M m_1 - m_1^2 - 12 M m_2 - 4 m_1 m_2)}{4 l_2 (m_1 (m_1 + m_2) + M (4 m_1 + 3 m_2))}$$

$$a_6 = \frac{3 m_1}{2 l_2 (m_1 (m_1 + m_2) + M (4 m_1 + 3 m_2))}$$

$$\begin{aligned}
a_7 &= \frac{-3g(2(m_1^2 + m_2^2) + 5gm_1m_2)}{2(m_1(m_1 + m_2) + M(4m_1 + 3m_2))} \\
a_8 &= \frac{3gm_1m_2}{2(m_1(m_1 + m_2) + M(4m_1 + 3m_2))} \\
a_9 &= \frac{2(4m_1 + 3m_2)}{2(m_1(m_1 + m_2) + M(4m_1 + 3m_2))}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

büyüklikleri tanımlanırsa, (4.27),(4.28) ve (4.29) 'den

$$\ddot{\theta}_1 = a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2 + a_3 u \tag{4.31}$$

$$\ddot{\theta}_2 = a_4 \theta_1 + a_5 \theta_2 + a_6 u \tag{4.32}$$

$$\ddot{x} = a_7 \theta_1 + a_8 \theta_2 + a_7 u \tag{4.33}$$

elde edilir. Burada durum uzayı gösterimi için,

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= x_1 \\
\dot{\theta}_1 &= \dot{x}_1 = x_2 \\
\theta_2 &= x_3 \\
\dot{\theta}_2 &= \dot{x}_3 = x_4 \\
x &= x_5 \\
\dot{x} &= \dot{x}_5 = x_6
\end{aligned}$$

yazarsak,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_7 & 0 & a_8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{B} = [0 \quad a_3 \quad 0 \quad a_6 \quad 0 \quad a_9]^T$$

olmak üzere,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u$$

elde edilir.

4.2.2 Kontrol Edilebilirlik

Sistemimiz 6. dereceden olduğundan kontrol edilebilirlik matrisi,

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3 \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^4 \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^5 \mathbf{B}]$$

şeklinindedir. Sistemin kontrol edilebilir olması için kontrol edilebilirlik matrisinin rankı 6 olmalıdır. Bu durumda \mathbf{C} bir kare matris olduğundan ve

$$\det(\mathbf{C}) \neq 0$$

olduğundan kontrol edilebilirlik matrisinin rankı 6 dır ve sistem kontrol edilebilirdir.

4.2.3 Tam Durum Geri Beslemesi

Sistem kontrol edilebilir olduğundan tam durum geri beslemesi uygulanabilir. Tam Durum Geri Beslemesi uygulandığında kontrol kanunu,

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 + k_5 x_5 + k_6 x_6 = \mathbf{K} \mathbf{x} \quad (4.34)$$

olarak yazılır ve kapalı çevrim sistemin kökleri

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}) = 0$$

Eşitliğinden (karakteristik denklem) bulunur. Bu ifadenin köklerinin $-a, -b, -c, -d, -e, -f$ olmasını istendiğinde,

$$(s + a)(s + b)(s + c)(s + d)(s + e)(s + f)$$

polinomu karakteristik denkleme eşitlenir ve polinomların eşitliğinden 6 denklem elde edilir. $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ olmak üzere 6 tane de bilinmeyenimiz bulunduğundan, bu denklem sistemi çözülerek bu bilinmeyenler için yalnız bir cevap elde edilebilir.

Elde edilen bu verilerden yola çıkarak bu kontrol yaklaşımını lineerleştirilmiş sistem üzerinde deneyelim.

$M = 10$ kg, $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg, $l_1 = 1$ m, $l_2 = 0,5$ m olarak kabul edildiğinde, lineerleştirilmiş sistemin kontrolcü katsayıları, sistemin kutupları

$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = -1$ için,

$$k_1 = 518.9654$$

$$k_2 = 44.9722$$

$$k_3 = -401.4455$$

$$k_4 = -59.0482$$

$$k_5 = -0.0670$$

$$k_6 = -0.4018$$

ve $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = -2$ istendiği durum için

$$k_1 = 832.1269$$

$$k_2 = 32.5866$$

$$k_3 = -872.2592$$

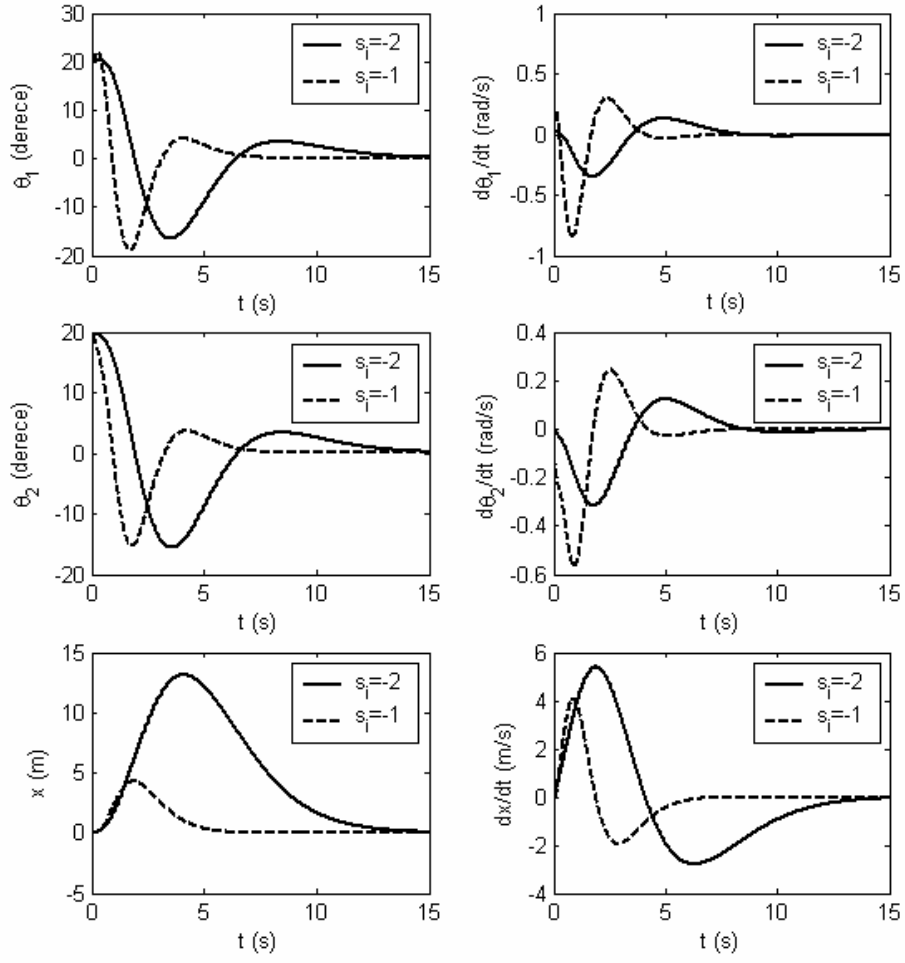
$$k_4 = -167.6951$$

$$k_5 = -4.2858$$

$$k_6 = -12.8573$$

olarak hesaplanır.

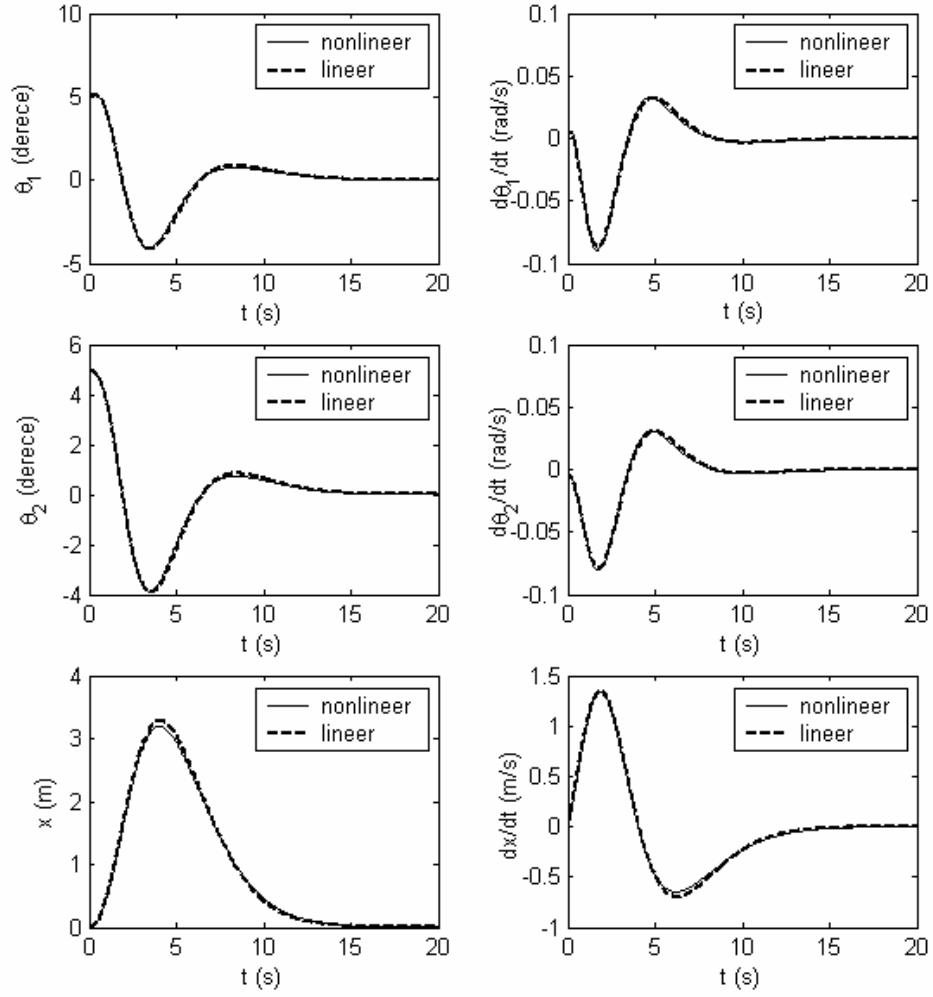
Her iki durum için çubukların başlangıç açılarının $\theta_1 = \theta_2 = 20^\circ$ olduğu durum için sistem simule edildiğinde Şekil 4.10 'daki grafik elde edilmiştir.



Şekil 4.10: Lineerize edilmiş sistemin kutup değerlerine göre kararlılığının değişimi

Grafikten de görüldüğü gibi sistemin kutuplarının gerçel negatifliği arttıkça sistemin kararlılığı da artmaktadır.

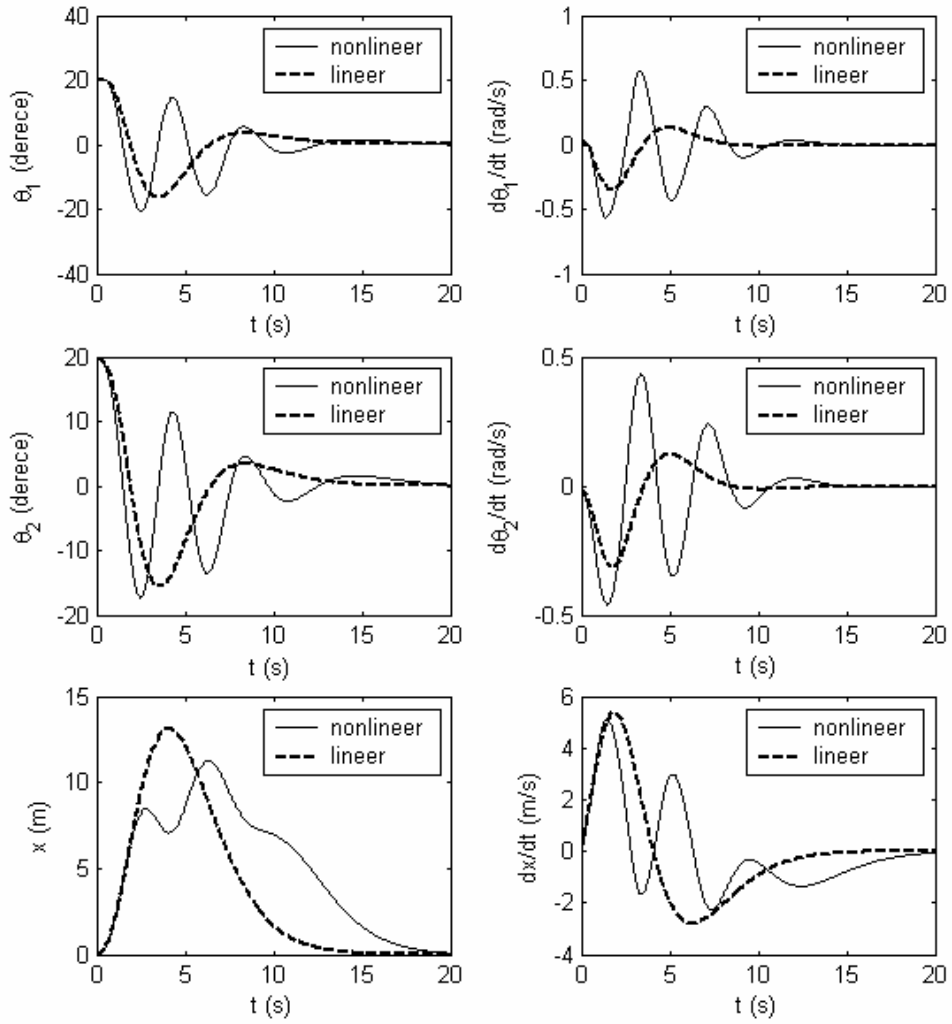
Lineerleştirilmiş sistem tam durum geri beslemesi ile kontrol edebildiğine göre, lineer olmayan sistemin de lineerleştirmenin yapıldığı bölge civarında ($\theta_1 \approx 0$, $\theta_2 \approx 0$) bu değerler için kontrolcünün başarısını inceleyelim.



Şekil 4.11: $\theta_1=5^\circ$ ve $\theta_2=5^\circ$ başlangıç değerleri için lineerize edilmiş ve nonlinear sistemin davranışlarının karşılaştırılması

Yine lineerleştirilmiş sistemin kutuplarının $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = -1$ olduğu durum için hesaplama yapıldığında elde edilen kontrolcü katsayıları bu kez lineer olmayan sistem üzerinde çubukların başlangıç açılarının $\theta_1=5^\circ$ ve $\theta_2=5^\circ$ olduğu durum için uygulandığında Şekil 4.11 'daki grafik elde edilmiştir.

Çubukların başlangıç açıları $\theta_1 = \theta_2 = 20^\circ$ olarak alındığında ve sistem simüle edildiğinde Şekil 4.12 'deki grafik elde edilmiştir

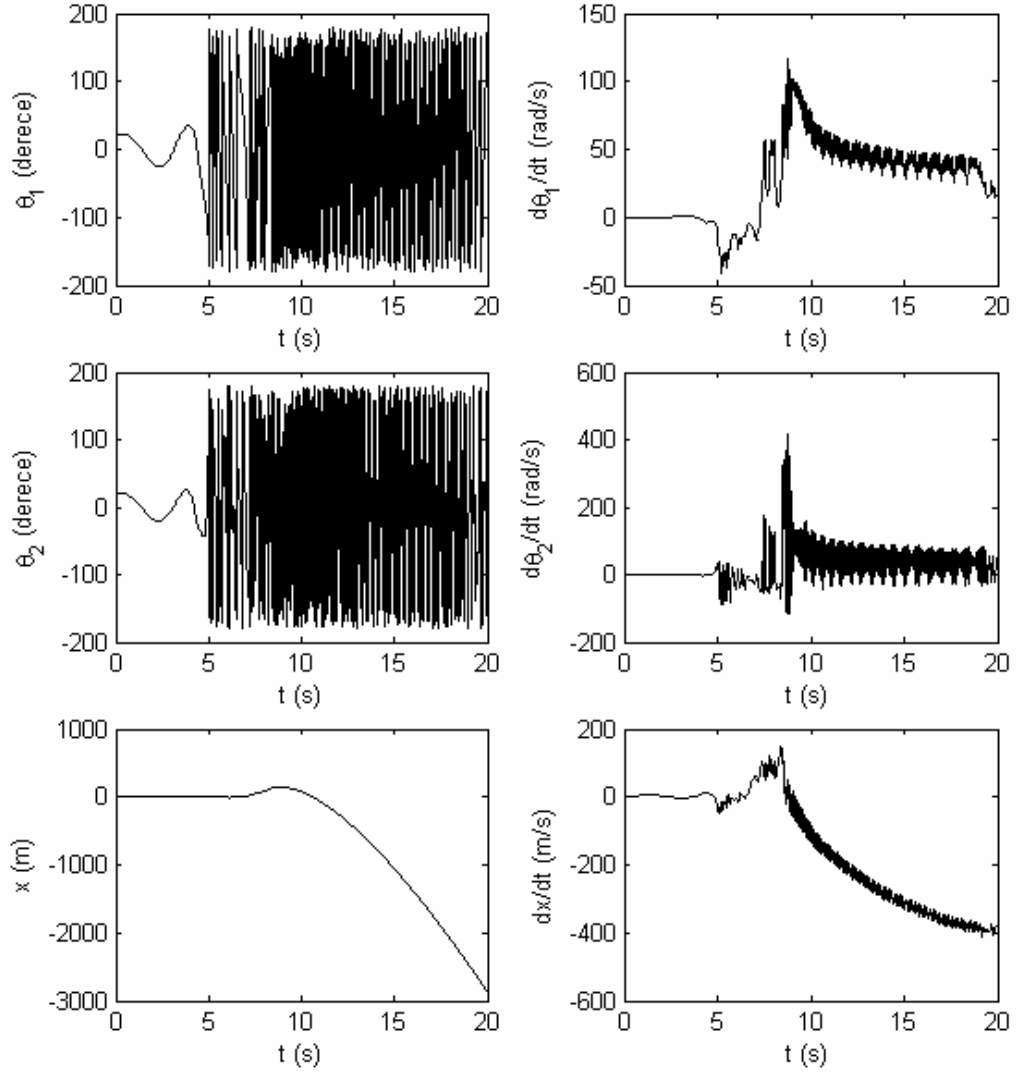


Şekil 4.12: $\theta_1 = \theta_2 = 20$ başlangıç değerleri için lineerize edilmiş ve nonlinear sistemin davranışlarının karşılaştırılması

Grafikten görüldüğü gibi $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ civarından uzaklaştıkça lineerleştirilmiş sistem için tasarlanmış kontrol kanununun lineer olmayan sistemi kararlı hale getirmekte görece olarak daha zorlandığı görülmektedir.

Bu kez başlangıç açıları $\theta_1 = \theta_2 = 22^\circ$ olarak alındığında ve sistem simüle edildiğinde Şekil 4.13 'deki grafik elde edilmiştir. Grafikten de görüldüğü gibi bu noktadan sonra lineerleştirilmiş sistem için tasarlanmış kontrol kanunu lineer olmayan sistemi kararlı

hale getirememektedir. O halde $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ civarında olmadığı durumlar için de sistemi kararlı hale getirecek bir kontrol kanununa ihtiyaç vardır.



Şekil 4.13: $\theta_1 = \theta_2 = 22^\circ$ başlangıç değerleri için nonlineer sistemin davranışı

4.2.4 Geri Besleme ile Kısmi Lineerleştirme

(4.24), (4.25) ve (4.26) ifadeleri düzenlenerek,

$$\theta_1 = x_1$$

$$\theta_2 = x_2$$

$$x = x_3$$

tarifleri yapıldığında ve

$$\begin{aligned}
a_1(\mathbf{x}) = & 12 m_1^2 \sin \theta_1 g + 36 m_1 m_2 g \sin \theta_1 + \cos^2 \theta_2 \sin \theta_1 \\
& - 18 m_1 m_2 g \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin \theta_2 + 9 m_1 m_2 g \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\
& + 6 m_2^2 g (4 \sin \theta_1 - 3 \cos^2 \theta_2 \sin \theta_1 - 3 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin \theta_2 + 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2) \\
& + 6 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2 l_1 m_2 (m_1 + 2 m_2) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\
& - 12 \cos(\theta_1 - \theta_2) l_1 m_2 (M + m_1 + m_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\
& - 2 l_2 m_2 (4 M + 4 m_1 + (4 - 3 \cos^2 \theta_2) m_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\
& - 2 \cos \theta_1 l_1 (m_1 + 2 m_2) (2 m_1 \sin \theta_1 + 4 m_2 \sin \theta_1 - 3 m_2 \cos \theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) \dot{\theta}_1^2 \\
& + 6 m_2^2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 - 4 \cos \theta_1 l_2 (m_1 + 2 m_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \\
& + 3 M g (4 m_1 \sin \theta_1 + 8 m_2 \sin \theta_1 - 6 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin \theta_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1(\mathbf{x}) = & 4 l_1 (4 - 3 \cos^2 \theta_1) m_1^2 \\
& + 4 l_1 m_1 m_2 (16 - 12 \cos^2 \theta_1 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) \\
& + 4 l_1 m_1 m_2 (9 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos^2 \theta_2) \\
& + 4 l_1 M (4 m_1 + 3 (4 - 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) m_2) \\
& - 12 l_1 m_2 (-4 + 4 \cos^2 \theta_1 + 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) \\
& + 12 l_1 m_2 (6 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos^2 \theta_2)
\end{aligned}$$

$$c_1(\mathbf{x}) = -(3(-6 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2 m_2 + 4 \cos \theta_1 (m_1 + 2 m_2)))$$

$$\begin{aligned}
a_2(\mathbf{x}) = & -18 \cos(\theta_1 - \theta_2) g (M + m_1 + m_2) (m_1 + 2 m_2) \sin \theta_1 \\
& + 12 g (M + m_1 + m_2) (m_1 + 3 m_2) \sin \theta_2 \\
& + 18 \cos \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) l_1 (m_1 + 2 m_2)^2 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\
& - 12 \cos \theta_2 l_1 (m_1 + 2 m_2) (m_1 + 3 m_2) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\
& + 36 \cos(\theta_1 - \theta_2) l_2 m_2 (M + m_1 + m_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\
& + 24 l_1 (M + m_1 + m_2) (m_1 + 3 m_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\
& - 9 \cos^2 \theta_1 (m_1 + 2 m_2)^2 (g \sin \theta_2 + 2 l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2) \\
& + 9 \cos \theta_1 \cos \theta_2 (m_1 + 2 m_2) (g (m_1 + 2 m_2) \sin \theta_1 - 2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2) \\
& + 18 \cos \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) l_2 m_2 (m_1 + 2 m_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\
& - 12 \cos \theta_2 l_2 m_2 (m_1 + 3 m_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2(\mathbf{x}) &= 4 l_2 (4 - 3 \cos^2 \theta_1) m_1^2 \\
&+ 4 l_2 m_1 m_2 (16 - 12 \cos^2 \theta_1 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) \\
&+ 4 l_2 m_1 m_2 (9 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos^2 \theta_2) \\
&+ 4 l_2 M (4 m_1 + 3 (4 - 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) m_2) \\
&- 12 l_2 m_2 (-4 + 4 \cos^2 \theta_1 + 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) \\
&+ 12 l_2 m_2 (6 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos^2 \theta_2) \\
c_2(\mathbf{x}) &= 3(6 \cos \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)(m_1 + 2m_2) - 4 \cos \theta_2(m_1 + 3m_2)) \\
a_3(\mathbf{x}) &= 18 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) l_1 m_2 (m_1 + 2 m_2) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\
&- 8 l_1 (m_1 + 2 m_2) (m_1 + 3 m_2) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\
&+ 6 \cos \theta_2 m_2 (m_1 + 3 m_2) (g \sin \theta_2 + 2 l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2) \\
&- 9 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2 m_2 (g (m_1 + 2 m_2) \sin \theta_1 - 2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2) \\
&+ 3 \cos \theta_1 (m_1 + 2 m_2) g (2 m_1 \sin \theta_1 + 4 m_2 \sin \theta_1 - 3 \cos(\theta_1 - \theta_2) m_2 \sin \theta_2) \\
&- 6 \cos \theta_1 (m_1 + 2 m_2) (3 \cos(\theta_1 - \theta_2) l_1 + 2 l_2) m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\
&+ 18 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) l_2 m_2^2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 - 8 l_2 m_2 (m_1 + 3 m_2) \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \\
b_3(\mathbf{x}) &= 2 (-4 + 3 \cos^2 \theta_1) m_1^2 \\
&+ 2 (-16 + 12 \cos^2 \theta_1 + 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) m_1 m_2 \\
&- 2 (9 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 3 \cos^2 \theta_2) m_1 m_2 \\
&+ 6 (-4 + 4 \cos^2 \theta_1 + 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) m_2^2 \\
&- 6 (6 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos^2 \theta_2) m_2^2 \\
&+ 2 M (-4 m_1 + 3 (-4 + 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) m_2) \\
c_3(\mathbf{x}) &= 18 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) m_2 - 8 (m_1 + 3 m_2) \tag{4.35}
\end{aligned}$$

ve

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{a_1(\mathbf{x})}{b_1(\mathbf{x})}$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \frac{c_1(\mathbf{x})}{b_1(\mathbf{x})}$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \frac{a_2(\mathbf{x})}{b_2(\mathbf{x})}$$

$$f_4(\mathbf{x}) = \frac{c_2(\mathbf{x})}{b_2(\mathbf{x})}$$

$$f_5(\mathbf{x}) = \frac{a_3(\mathbf{x})}{b_3(\mathbf{x})}$$

$$f_6(\mathbf{x}) = \frac{c_3(\mathbf{x})}{b_3(\mathbf{x})} \quad (4.36)$$

olmak üzere,

$$\ddot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})u \quad (4.37)$$

$$\ddot{x}_2 = f_3(\mathbf{x}) + f_4(\mathbf{x})u \quad (4.38)$$

$$\ddot{x}_3 = f_5(\mathbf{x}) + f_6(\mathbf{x})u \quad (4.39)$$

şekline dönüşür. Görüldüğü gibi elimizdeki üç ifadeyi aynı anda lineerleştirmek için sadece bir tek kontrol kanunu kullanma zorunluluğu ortaya çıkmaktadır.

Bizim için önceliğin ilk çubuğun kontrol edilmesi olduğunu kabul edersek, kontrol edilecek çıkış değişkeni,

$$y = x_1$$

olur ve

$$\dot{y} = \dot{x}_1$$

$$\ddot{y} = \ddot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})u \quad (4.40)$$

elde edilir. Burada kontrol kanununu,

$$u = \frac{1}{f_2(\mathbf{x})}(-K_1 y - K_2 \dot{y} - f_1(\mathbf{x}))$$

olarak alırsak ve (4.40) ifadesinde yerine koyarsak,

$$\ddot{y} + K_2 \dot{y} + K_1 y = 0 \quad (4.41)$$

elde edilir. Bu kontrol kanunu (4.38), (4.39) ifadesinde yerine konulduğunda ise

$$\ddot{x}_2 = f_3(\mathbf{x}) + f_4(\mathbf{x}) \frac{1}{f_2(\mathbf{x})} (-K_1 y - K_2 \dot{y} - f_1(\mathbf{x})) \quad (4.42)$$

$$\ddot{x}_3 = f_5(\mathbf{x}) + f_6(\mathbf{x}) \frac{1}{f_2(\mathbf{x})} (-K_1 y - K_2 \dot{y} - f_1(\mathbf{x})) \quad (4.43)$$

haline gelir. Görüldüğü gibi seçilen kontrol kanunu sadece (4.41) ifadesini lineerleştirdi.

Bu kontrol kanununu,

$$K_1 = 1$$

$$K_2 = 2$$

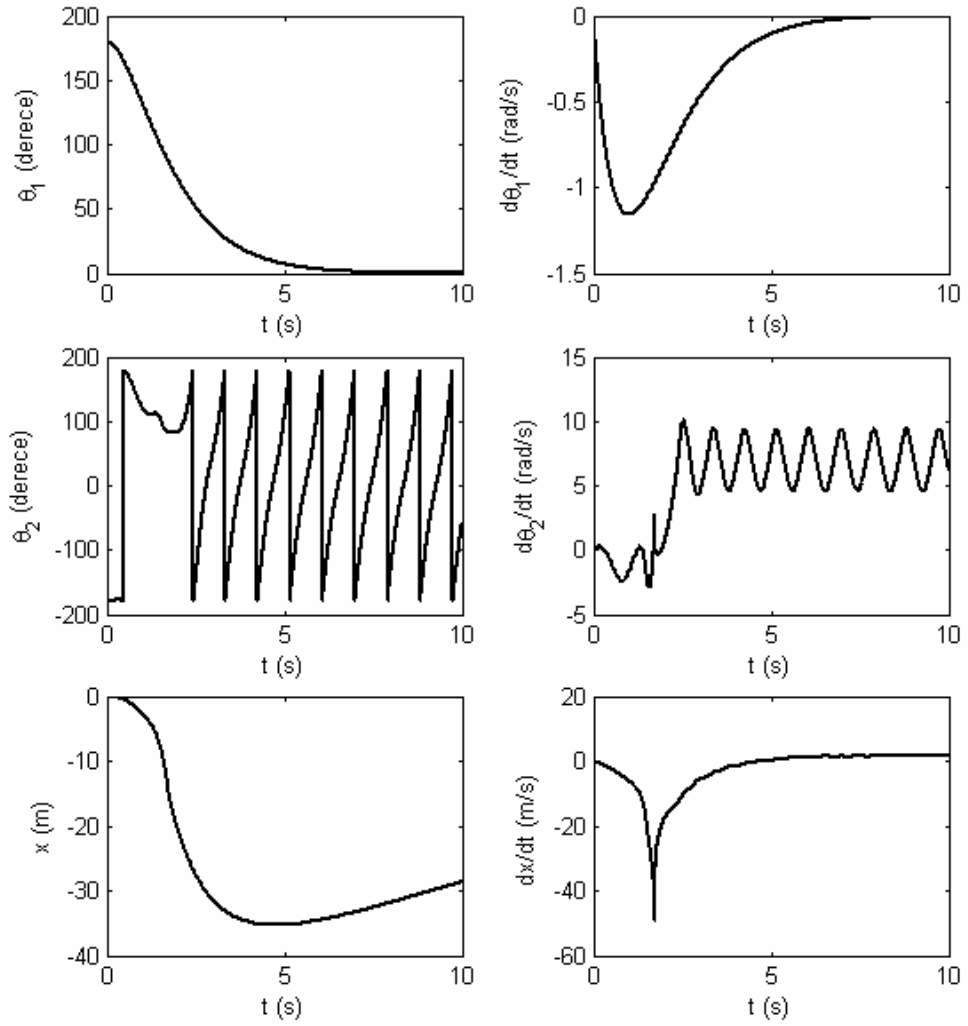
(Yani $y = x_1$ için kutuplar $s_1 = s_2 = -1$ oluyor)

olarak kabul edip sisteme uyguladığımızda Şekil 4.13 'deki grafik elde edilmiştir.

Grafikten de görüldüğü gibi sadece θ_1 ve $\dot{\theta}_1$ durumları sıfıra çekilebilmektedir.

Şurası açıktır ki birinci çubuğu kontrol etmeksizin ikinci çubuğu kontrol etmek olası değildir. Zira ikinci çubuk birinciye bağlıdır ve kontrol kuvvetinin etkisi ikinci çubuğa birinci çubuk üzerinden gelmektedir.

Şekil 4.14 'den de görüldüğü gibi birinci çubuk kararlı hale getirilmeye çalışılırken ikinci çubuk da $\theta_2 = 0$ civarından geçmektedir. Bu durumda iki çubuk da aynı anda lineer olarak kabul edilebilecekleri bölgede buldukları esnada kontrol kanunu değiştirilerek lineerleştirilmiş sistem için tasarlanmış kontrol kanunu uygulanabilir. Lineerleştirilmiş sistem için tasarlanan kontrol kanununun nonlinear sistemi belirli açılarda kararlı hale getirebildiği daha önce gösterilmişti.



Şekil 4.14: Geri Besleme ile lineerleştirme uygulanmış ters ikili sarkaç sisteminin simülasyon sonuçları

Bu düşüncelerden yola çıkarak kontrol kanununu,

$$u = \begin{cases} \frac{1}{f_2(\mathbf{x})}(-K_1 x_1 - K_2 x_2 - f_1(\mathbf{x})) & |\theta_1 + \theta_2| > \theta_0 \\ k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 & \theta_0 \geq |\theta_1 + \theta_2| \geq \theta_x \\ k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 + k_5 x_5 + k_6 x_6 & \theta_x \geq |\theta_1 + \theta_2| \end{cases} \quad (4.44)$$

şeklinde kabul edelim. Yani sarkaç tepe konumuna iyice yaklaşmadan $x_5 = x$ ve $\dot{x}_5 = \dot{x}$ durum değişkenleri gözönüne alınmıyor.

$$k_1 = 549.6059$$

$$k_2 = 61.3717$$

$$k_3 = -417.1407$$

$$k_4 = -90.7349$$

$$k_5 = -0.1500$$

$$k_6 = -0.9000$$

$$K_1 = 3$$

$$K_2 = 3$$

$$\theta_0 = 30$$

$$\theta_x = 3$$

$$M = 10 \text{ kg}$$

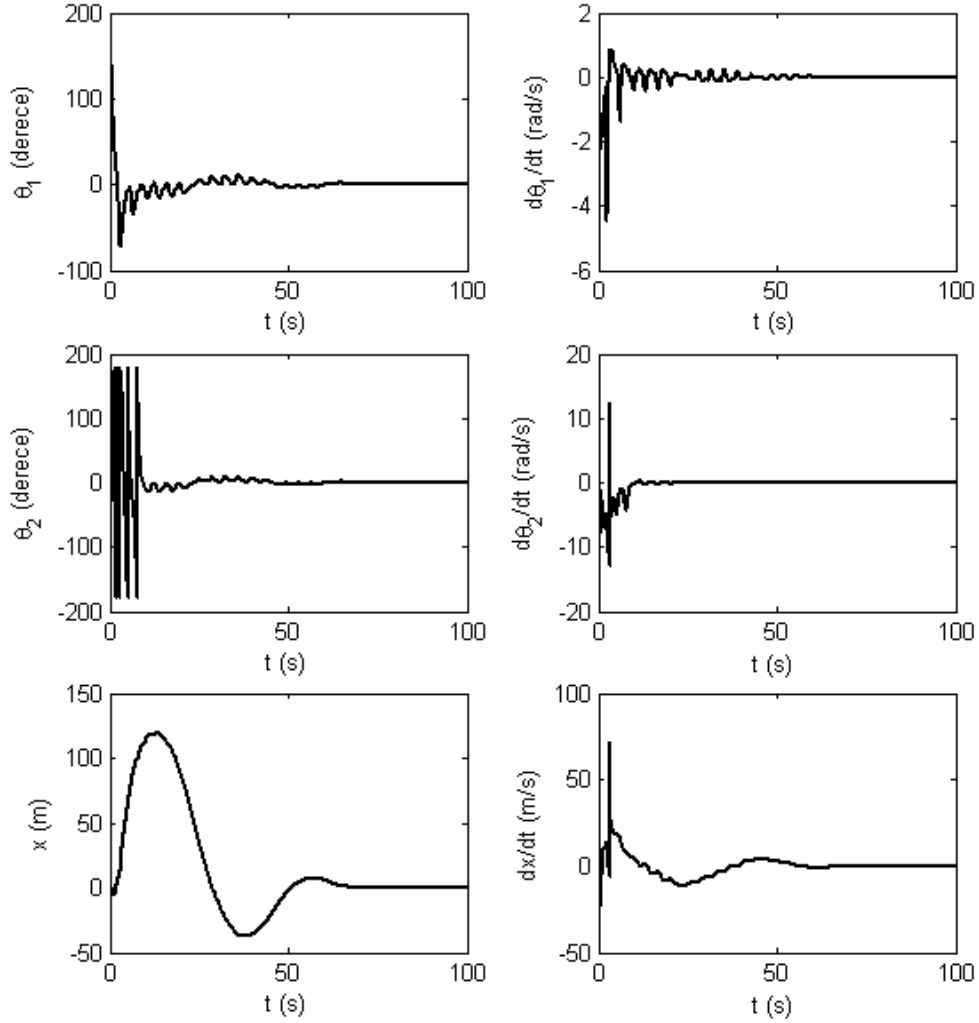
$$m_1 = 2 \text{ kg}$$

$$m_2 = 3 \text{ kg}$$

$$l_1 = 0,5 \text{ m}$$

$$l_2 = 1,8 \text{ m}$$

olarak kabul edilerek simule edildiğinde Şekil 4.15 'deki grafik elde edilmiştir.



Şekil 4.15: Geliştirilen genel kontrol kanununun ters ikili sarkaç üzerine uygulanması sonucu elde edilen simülasyon sonuçları

Görüldüğü gibi verilen bu değerler için sistem kararlılığı sağlanmıştır. Fakat aslında bu sadece özel bir durumdur. Farklı kütle ve uzunluk değerleri yada başlangıç açısı değerleri için sistem kararlı hale gelemeyebilirdi. Burada çözüm sağlanmasının nedenini şu şekilde açıklayabiliriz: daha önceden gösterildiği gibi geri besleme ile kısmi lineerleştirme yaparak birinci çubuğun hareketini kararlı hale getirmek mümkündür. Yine aynı şekilde $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ civarında olduğu durumlarda da tam durum geri beslemesi ile sistemi kararlı hale getirebiliyorduk. Burada açıkta kalan tek durum

θ_2 'nin kararlı hale getirilememesidir. Fakat $\theta_1 = 0$ civarındayken $\theta_2 = 0$ civarında olması koşulu sağlanabildiğinde tam durum geri beslemesi uygulanabilmektedir.

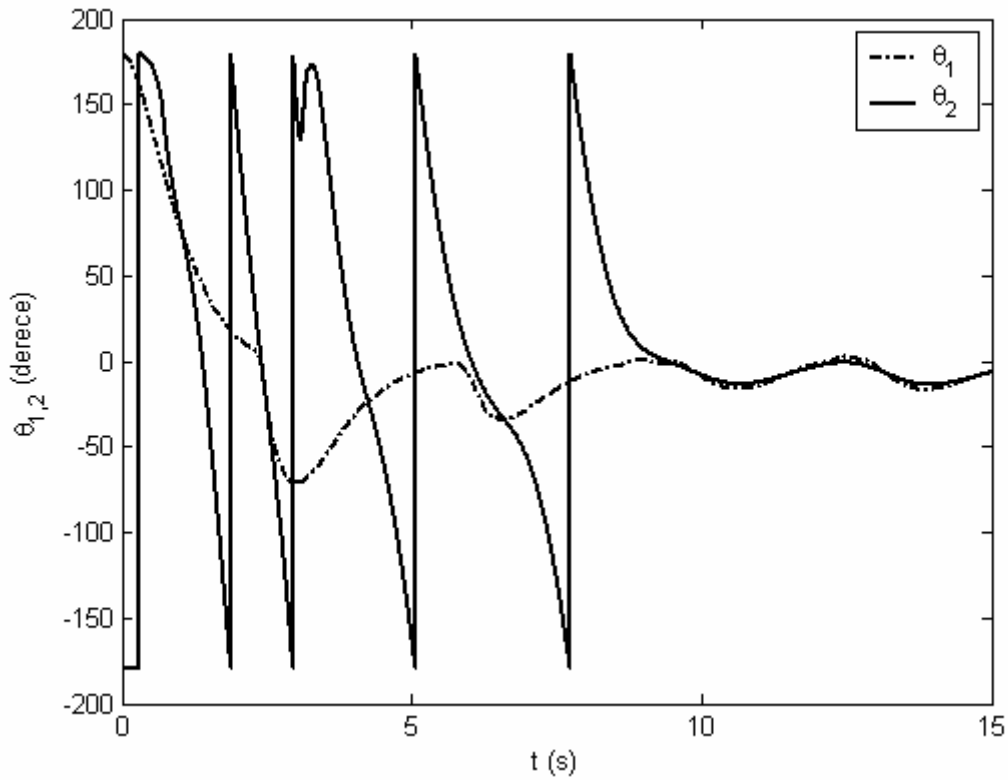
(4.40) ifadesi ile gösterilen kontrol kanunu üç kademedен oluşан bir kontrol kanunudur. İki çubuğun sahip oldukları açılar toplamının mutlak değeri bir θ_0 açısından küçük olduğu sürece geri besleme ile lineerleştirme, θ_0 ile θ_x açıları arasında ise sadece x_1 , x_2 , x_3 , x_4 durum değişkenlerine bağlı olarak geri besleme ile kontrol ve θ_x açısından büyükse tam durum geri beslemesi ile kontrol uygulanmıştır. θ_0 ile θ_x açıları arasında x_5 ve x_6 durumlarının kontrol kanunu içerisine eklenmemesinin sebebi öncelikle ikinci çubuğun açısının sıfıra çekilmeye çalışılmasıdır. Zira bu aralıkta x_5 ve x_6 durumları da kontrol edilmeye çalışılırdı o an için yüksek değerlere sahip olduklarından kontrol kanunu bu iki duruma öncelik tanıyacak ve ikinci çubuğun kontrol edilememesine sebep olacaktı. Fakat ikinci çubuk da bir θ_x açısı civarına taşındığında uygun kontrol sabitleri ile tüm durumları kontrol etmek mümkündür. Kısacası kontrol kanunu önce birinci çubuğu, sonra birinci ve ikinci çubuğu sonra da birinci ve ikinci çubukla beraber arabayı da sıfıra çekmeye çalışmaktadır.

Şekil 4.15 'de grafiği verilen sonuçlar üzerinden θ_1 ve θ_2 açılarının birbirlerine göre durumları bu koşul sağlanana kadar Şekil 4.16 'deki grafikte verildiği gibidir.

Grafikten de görüldüğü gibi birinci çubuğu kontrol etmek için uygulanan kontrol kuvveti ile ikinci çubuk da harekete başlamaktadır. Birinci çubuk geri besleme ile lineerleştirme yapılarak kontrol edildiğinden kararlı hale gelmektedir ve bu esnada ikinci çubuk da $\theta_2 = 0$ civarından geçmektedir. Burada devreye geri besleme ile kontrol girmektedir. Her ne kadar ikinci çubuk $\theta_2 = 0$ civarından ilk geçtiğinde geri besleme ile kararlı hale getirilemese de bir kendi etrafında bir kaç tur yaptıktan sonra kararlı hale getirilebilmektedir. Ve bu açı değerleri θ_x değerinden küçük konuma geldiklerinde ise devreye geri besleme ile kontrol girmektedir.

Burada unutulmaması gereken şey teklif edilen bu kontrol kanununun sadece çubukların kütleleri, boyları ve başlangıç açılarının özel bir hali için çözüm getirmiş olmasıdır.

Gözetilmesi gereken durum her iki çubuğun da aynı anda 0° civarından geçmesi gerektiği ve bu geçiş esnasında ikinci çubuğun açısal hızının da çok yüksek olmaması gerektiğidir. Zira ikinci çubuk çok hızlı olarak 0° civarından geçerse kontrol kuvvetinin etkisi dolaylı olarak ulaştığından ikinci çubuğu bu civarda tutmakta yetersiz kalacaktır. Mesela ikinci çubuğun boyu birinciye göre küçük seçilirse bu hız yüksek olacaktır. Diğer yandan ikinci çubuğun boyu birinciye göre çok uzun seçilirse 0° civarına ulaşamayacaktır. Kütlelerde ise eğer ikinci çubuğun kütlesi çok küçükse çubuğun hızı yüksek olacak, çok küçük olursa da bu kez yine 0° civarına ulaşamayacaktır.

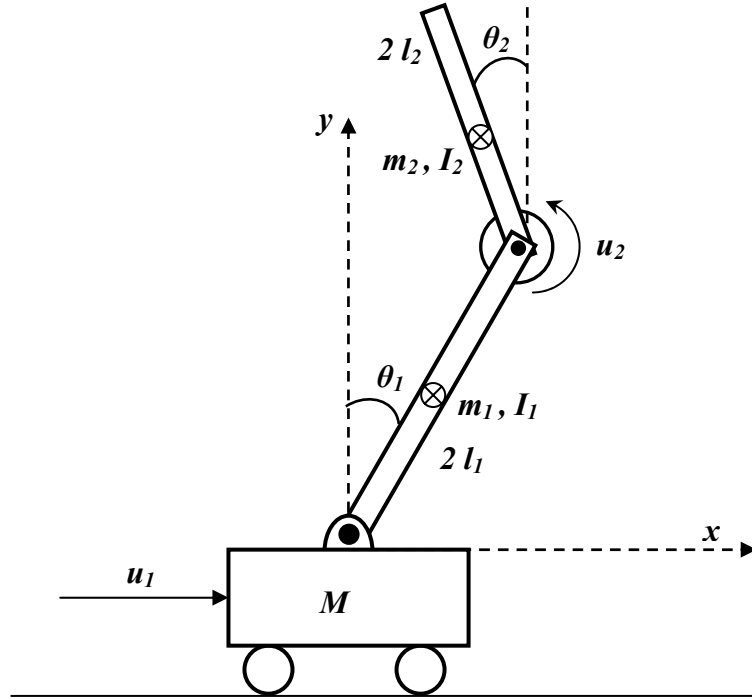


Şekil 4.16: Geliştirilen genel kontrol kanununun ters ikili sarkaç sistemine uygulanması esnasında θ_1 ve θ_2 açılarının davranışları

Görüldüğü gibi sadece bir kontrol kuvveti uygulayarak incelenen kontrol yöntemleri ile genelde kararlı hale gelmesi güç olmaktadır. Bunun sebebi sistemin serbestlik derecesi 3 iken kontrolcü sayısının sadece 1 olmasıdır. Yani sistem yetersiz tahriklenmektedir. O halde sisteme bir kontrolcü daha ekleyerek sistemin kararlılığını inceleyelim.

4.3 İKİ KONTROLCÜ UYGULANMIŞ TERS İKİLİ SARKACIN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ

Arabaya yatay doğrultuda kuvvet uygulayan kontrolcü yerinde kalmak şartıyla iki çubuğun bağlantı noktasından moment uygulayan bir kontrolcü daha ekleyelim. Bu durumda sistem aşağıda görüldüğü gibi olmaktadır.



Şekil 4.17: İki kontrolcü uygulanmış araba üzerindeki ters ikili sarkaç sistemi

Şekil 4.17 'de görülen iki kontrolcülü sistemin matematiksel modeli,

$$\begin{aligned} (M + m_1 + m_2) \ddot{x} + (m_1 l_1 + 2 m_2 l_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ - (m_1 l_1 + 2 m_2 l_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 = u_1 \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} (m_1 l_1 + 2 m_2 l_1) \cos \theta_1 \ddot{x} + \left(m_1 l_1^2 + 4 m_2 l_1^2 + \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \right) \ddot{\theta}_1 \\ + 2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 \\ + 2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - (m_1 l_1 + 2 m_2 l_1) g \sin \theta_1 = -u_2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
& m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{x} + 2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \left(m_2 l_2^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \right) \ddot{\theta}_2 \\
& - 2 m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 g \sin \theta_2 = u_2
\end{aligned} \tag{4.47}$$

şeklindedir.

4.3.1 Geri Besleme ile Lineerleştirme

(4.45), (4.46), (4.47) ifadeleri düzenlenerek,

$$\theta_1 = x_1$$

$$\theta_2 = x_2$$

$$x = x_3$$

dönüşümleri yapıldığında ve

$$\begin{aligned}
d_1(\mathbf{x}) &= -18 \cos(\theta_1 - \theta_2) l_1 (M + m_1 + m_2) - 12 l_2 (M + m_1 + m_2) \\
&+ 9 \cos^2 \theta_2 l_2 m_2 + 9 \cos \theta_1 \cos \theta_2 (m_1 + 2 m_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_1(\mathbf{x}) &= 4 l_1^2 l_2 m_2 (4 - 3 \cos^2 \theta_1) m_1^2 \\
&+ 4 l_1^2 l_2 m_1 m_2^2 (16 - 12 \cos^2 \theta_1 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) \\
&+ 4 l_1^2 l_2 m_1 m_2^2 (9 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos^2 \theta_2) \\
&+ 4 l_1^2 l_2 m_2 M (4 m_1 + 3 (4 - 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) m_2) \\
&- 12 l_1^2 l_2 m_2^2 (-4 + 4 \cos^2 \theta_1 + 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) \\
&- 12 l_1^2 l_2 m_2^2 (-6 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 3 \cos^2 \theta_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2(\mathbf{x}) &= -18 \cos(\theta_1 - \theta_2) l_2 m_2 (M + m_1 + m_2) + 9 \cos \theta_1 \cos \theta_2 l_2 m_2 (m_1 + 2 m_2) \\
&+ 9 \cos^2 \theta_1 l_1 (m_1 + 2 m_2)^2 - 12 l_1 (M + m_1 + m_2) (m_1 + 3 m_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2(\mathbf{x}) &= 4 l_1 l_2^2 m_2 (4 - 3 \cos^2 \theta_1) m_1^2 \\
&+ 4 l_1 l_2^2 m_1 m_2^2 (16 - 12 \cos^2 \theta_1 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) \\
&+ 4 l_1 l_2^2 m_1 m_2^2 (9 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos^2 \theta_2) \\
&+ 4 l_1 l_2^2 m_2 M (4 m_1 + 3 (4 - 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) m_2) \\
&- 12 l_1 l_2^2 m_2^2 (-4 + 4 \cos^2 \theta_1 + 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) \\
&- 12 l_1 l_2^2 m_2^2 (-6 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 3 \cos^2 \theta_2) \\
d_3(\mathbf{x}) &= -9 \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2 l_2 m_2 \\
&- 3 \cos \theta_1 (-3 \cos(\theta_1 - \theta_2) l_1 - 2 l_2) (m_1 + 2 m_2) - 6 \cos \theta_2 l_1 (m_1 + 3 m_2) \\
e_3(\mathbf{x}) &= 2 l_1 l_2 (-4 + 3 \cos^2 \theta_1) m_1^2 \\
&- 2 l_1 l_2 m_1 m_2 (-16 + 12 \cos^2 \theta_1 + 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) \\
&- 2 l_1 l_2 m_1 m_2 (-9 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 3 \cos^2 \theta_2) \\
&- 6 l_1 l_2 m_2^2 (-4 + 4 \cos^2 \theta_1 + 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) \\
&- 6 l_1 l_2 m_2^2 (-6 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 3 \cos^2 \theta_2) \\
&+ 2 l_1 l_2 M (-4 m_1 + 3 (-4 + 3 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) m_2)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

ve

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{a_1(\mathbf{x})}{b_1(\mathbf{x})}$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \frac{c_1(\mathbf{x})}{b_1(\mathbf{x})}$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \frac{d_1(\mathbf{x})}{e_1(\mathbf{x})}$$

$$f_4(\mathbf{x}) = \frac{a_2(\mathbf{x})}{b_2(\mathbf{x})}$$

$$f_5(\mathbf{x}) = \frac{c_2(\mathbf{x})}{b_2(\mathbf{x})}$$

$$f_6(\mathbf{x}) = \frac{d_2(\mathbf{x})}{e_2(\mathbf{x})}$$

$$f_7(\mathbf{x}) = \frac{a_3(\mathbf{x})}{b_3(\mathbf{x})}$$

$$f_8(\mathbf{x}) = \frac{c_3(\mathbf{x})}{b_3(\mathbf{x})}$$

$$f_9(\mathbf{x}) = \frac{d_3(\mathbf{x})}{e_3(\mathbf{x})} \quad (4.49)$$

olmak üzere,

$$\ddot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})u_1 + f_3(\mathbf{x})u_2 \quad (4.50)$$

$$\ddot{x}_2 = f_4(\mathbf{x}) + f_5(\mathbf{x})u_1 + f_6(\mathbf{x})u_2 \quad (4.51)$$

$$\ddot{x}_3 = f_7(\mathbf{x}) + f_8(\mathbf{x})u_1 + f_9(\mathbf{x})u_2 \quad (4.52)$$

elde edilir. Burada kontrol edilecek olan çıkış değişkenlerini,

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2$$

olarak kabul edersek,

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1$$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2$$

ve

$$\ddot{y}_1 = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})u_1 + f_3(\mathbf{x})u_2 \quad (4.53)$$

$$\ddot{y}_2 = f_4(\mathbf{x}) + f_5(\mathbf{x})u_1 + f_6(\mathbf{x})u_2 \quad (4.54)$$

olur.

Kontrol kanununu (4.53) ve (4.54) 'i lineerleştirecek şekilde, yani

$$u_1 = -\frac{f_1(\mathbf{x}) + (K_1 y_1 + K_2 \dot{y}_1)}{f_2(\mathbf{x})} + \frac{f_3(\mathbf{x})(f_4(\mathbf{x}) + (K_3 y_2 + K_4 \dot{y}_2))}{f_2(\mathbf{x})(f_5(\mathbf{x}) + f_6(\mathbf{x}))} \quad (4.55)$$

$$u_2 = -\frac{f_4(\mathbf{x}) + K_3 y_2 + K_4 \dot{y}_2}{f_5(\mathbf{x}) + f_6(\mathbf{x})} \quad (4.56)$$

olarak kabul edersek ve (4.52), (4.53), (4.54)'den

$$\ddot{y}_1 = -K_1 y_1 - K_2 \dot{y}_1 \quad (4.57)$$

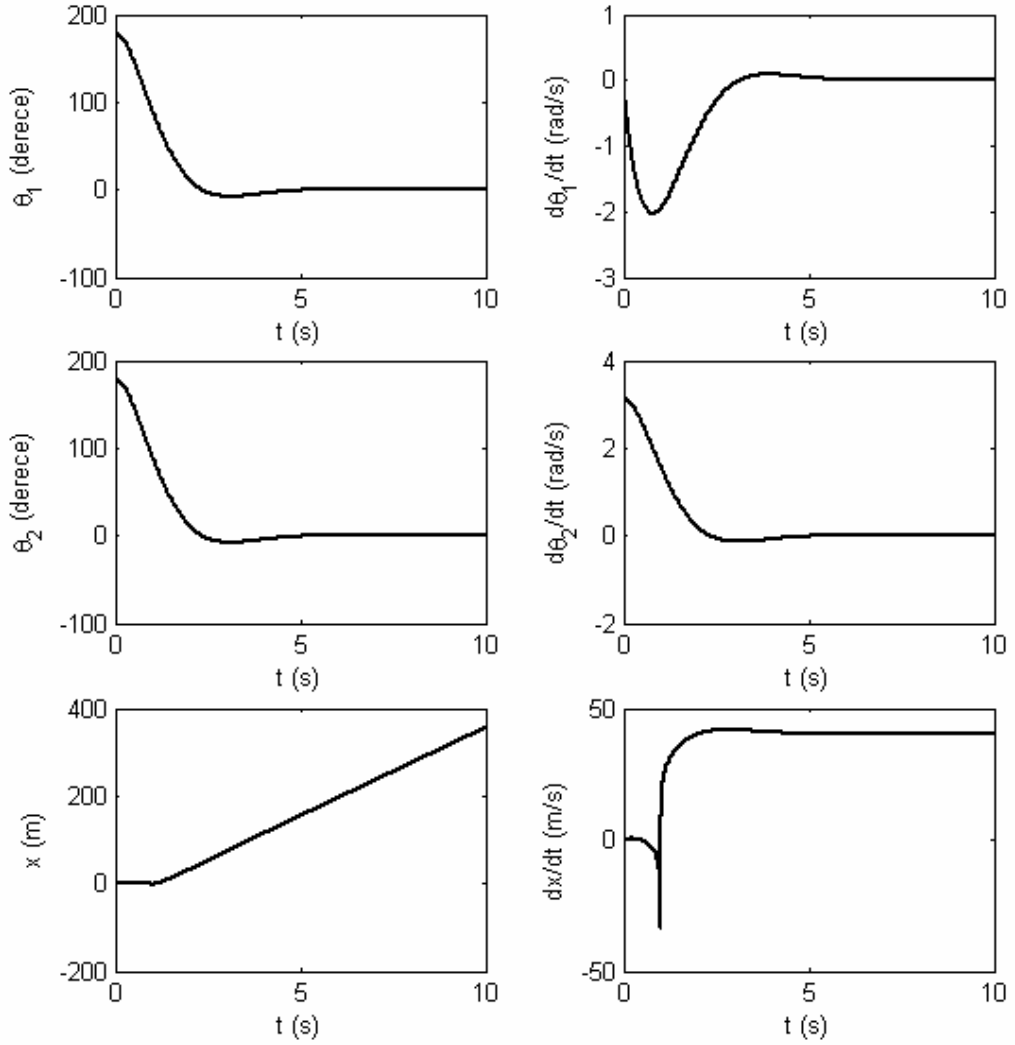
$$\ddot{y}_2 = -K_3 y_2 - K_4 \dot{y}_2 \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_3 = & f_7(\mathbf{x}) + f_8(\mathbf{x}) \left(-\frac{f_1(\mathbf{x}) + (K_1 y_1 + K_2 \dot{y}_1)}{f_2(\mathbf{x})} + \frac{f_3(\mathbf{x})(f_4(\mathbf{x}) + (K_3 y_2 + K_4 \dot{y}_2))}{f_2(\mathbf{x})(f_5(\mathbf{x}) + f_6(\mathbf{x}))} \right) \\ & + f_9(\mathbf{x}) \left(-\frac{f_4(\mathbf{x}) + K_3 y_2 + K_4 \dot{y}_2}{f_5(\mathbf{x}) + f_6(\mathbf{x})} \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi seçilen kontrol kanunu ilk iki ifadeyi lineerleştirmektedir. Bu durumda arabanın yataydaki hareketi dışındaki durumların kararlı hale getirilebilmesi gerekir.

$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 2$ ve $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 180^\circ$ için sistemi simüle ettiğimizde Şekil 4.18 'deki grafik elde edilmiştir.

Grafikten de açıkça anlaşılacağı gibi çubukların her ikisi de kararlı hale gelirken arabanın hareketi sabit hızla sürmektedir.



Şekil 4.18: Geri besleme ile lineerleştirme uygulanmış iki kontrolcülü ters ikili sarkaç sisteminin simülasyon sonuçları

4.3.2 Genel Kontrol Kanunu

Sistemimiz sadece bir tek kontrolcü kullanılarak $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ civarında olduğunda lineerleştirilmiş sistem için tam durum geri beslemesi uygulanarak kararlı hale getirilebiliyordu. O halde θ_0 yeterince küçük olmak üzere $|\theta_1| + |\theta_2| \leq \theta_0$ gibi bir koşul sağlanana kadar geri besleme ile kısmi lineerleştirme yapmak, koşul sağlandıktan sonra sisteme tam durum geri beslemesi uygulamak sistemi kararlı hale getirebilmelidir.

Bu durumda teklif edilen kontrol kanunu,

$$u_1 = \begin{cases} -\frac{f_1(\mathbf{x}) + (K_1 x_1 + K_2 x_2)}{f_2(\mathbf{x})} + \frac{f_3(\mathbf{x})(f_4(\mathbf{x}) + (K_3 x_3 + K_4 x_4))}{f_2(\mathbf{x})(f_5(\mathbf{x}) + f_6(\mathbf{x}))} & |\theta_1| + |\theta_2| > \theta_0 \\ k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 + k_5 x_5 + k_6 x_6 & |\theta_1| + |\theta_2| \leq \theta_0 \end{cases} \quad (4.60)$$

$$u_2 = \begin{cases} -\frac{f_4(\mathbf{x}) + K_3 x_3 + K_4 x_4}{f_5(\mathbf{x}) + f_6(\mathbf{x})} & |\theta_1| + |\theta_2| > \theta_0 \\ 0 & |\theta_1| + |\theta_2| \leq \theta_0 \end{cases} \quad (4.61)$$

şeklinindedir. Görüldüğü gibi $|\theta_1| + |\theta_2| \leq \theta_0$ durumu için ikinci kontrolcüye gerek olmadığından devreden çıkarılmaktadır.

Teklif edilen bu kontrol kanunu,

$$k_1 = 667.2645$$

$$k_2 = 56.6498$$

$$k_3 = -582.0472$$

$$k_4 = -103.2829$$

$$k_5 = -0.3857$$

$$k_6 = -2.0572$$

$$K_1 = 1$$

$$K_2 = 2$$

$$K_3 = 1$$

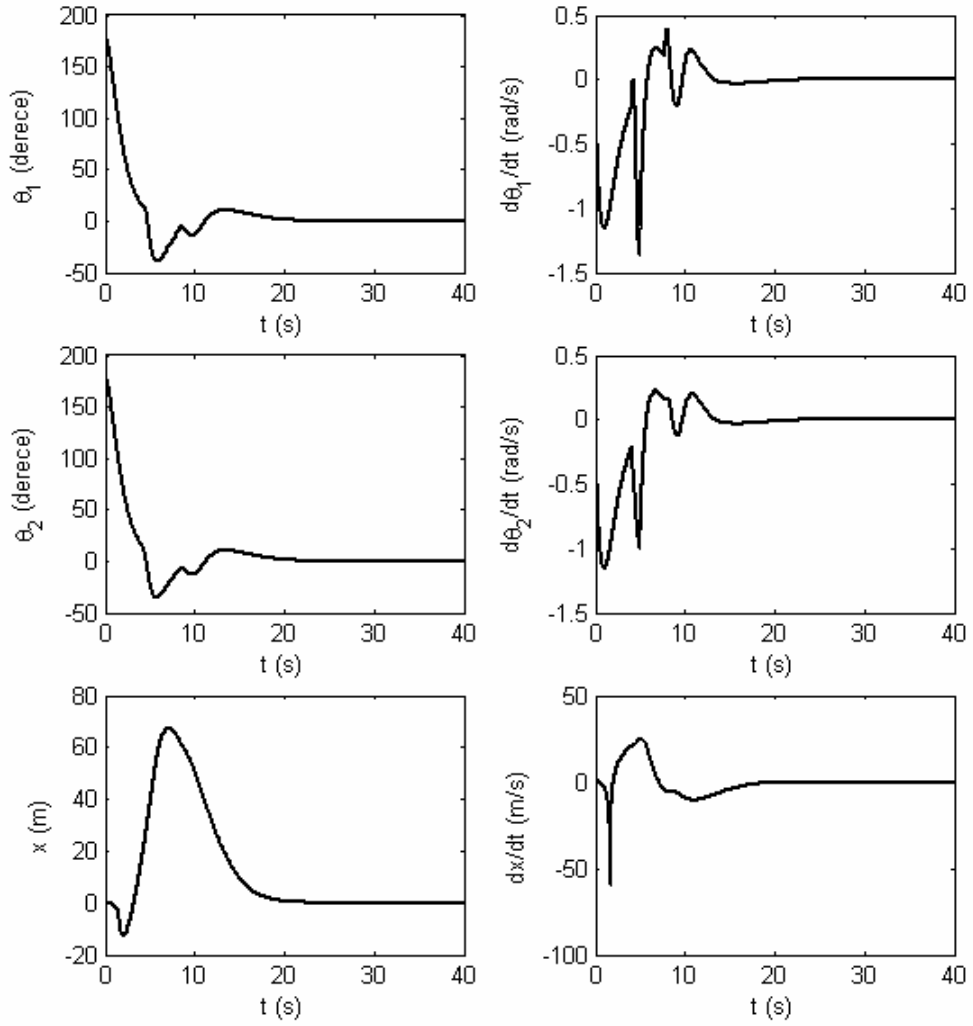
$$K_4 = 2$$

$$\theta_0 = 30^\circ$$

$$\theta_1(0) = 180^\circ$$

$$\theta_2(0) = 180^\circ$$

olmak üzere sisteme uygulandığında Şekil 4.19 'deki grafik elde edilmiştir.



Şekil 4.19: Geliştirilen kontrol kanununu uygulanmış iki kontrolcülü ters ikili sarkaç sisteminin simülasyon sonuçları

Grafikten de görüldüğü gibi teklif edilen kontrol kanunu sistemin tüm durumlarını kararlı hale getirebilmektedir.

Burada gözden kaçırılmaması gereken bir nokta vardır. Her ne kadar teklif edilen kontrol kanunu genel bir kontrol kanunuysa da sistemin parametrelerine göre kontrolcü katsayılarını ve kontrol kanununun değiştirildiği açığı değiştirmek gerekebilir. Mesela sistemdeki çubuk boyları çok uzatılırsa k_5 ve k_6 katsayılarının büyüklüğünü düşürmek gerekir. Zira çubuk boylarının görece uzun olması sebebiyle kontrol kanununun değiştirileceği noktaya gelindiğinde arabanın yer değiştirmesi görece fazla olacağından arabanın yer değiştirmesine bağlı üretilen kontrol kuvveti yüksek olacak ve bozucu bir

etki yapacaktır. Burada bize en iyi sonucu veren bölge geri besleme ile kısmi lineerleştirmenin yapıldığı bölgedir. Çünkü nonlinear bir kontrol kanunudur ve nonlinear olarak kontrol kuvveti üretimi oluşturur. Tam durum geri beslemesi ise sonuçta lineerleştirilmiş sistem için tasarlanmıştır ve bu sebeple sistemin davranışının lineerle benzerlik gösterdiği bölgelerde kullanışlıdır. Sonuçta bu bölgelerin kesin bir tanımı yoktur ve sistem parametrelerine göre değişebilmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yapılan çalışmada önce ters sarkaç, daha sonra da ters ikili sarkaç modellenmiş ve her birisi için genel kontrol kanunları geliştirilmiştir. Geliştirilen kontrol kanunları sarkaçları en alt konumdan kararsız olan en üst konuma getirirken arabayı da başlangıç konumuna getirmekte ve burada tutabilmektedir.

İncelenen sistemler yetersiz tahrikli sistemlerdir. Çalışma esnasında aynı anda tüm durum değişkenlerinin sadece lineerleştirilmiş sistem için kontrol edilebildiği gözlemlenmiştir. Burada nonlinear sistem için kullanılan geri besleme ile lineerleştirme yönteminde ise durum değişkenlerinden ancak bir kısmı lineerize edilebilmektedir. Yapılan simülasyonlar sonucu lineerleştirilmiş sistem için başarılı olan kontrol kanununun sistem parametrelerine bağlı olarak belirli aralıklarda nonlinear sistem için de başarılı olduğu görülmüştür. Bununla beraber, geri besleme ile kısmi lineerleştirme yöntemi kullanılarak geliştirilen kontrol kanununun tüm açı değerleri için sadece çubuk açılara bağlı olan durum değişkenlerini kontrol etmede başarılı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumda öncelikle belirli çubuk açı değerlerine kadar geri besleme ile kısmi lineerleştirme yöntemi kullanılarak geliştirilen kontrol kanununun uygulanması ve sadece çubuklara bağlı durum değişkenlerinin kontrol edilmesi, bu açı değerlerine ulaşıldıktan sonra lineerize edilmiş sistem için geliştirilen kontrol kanunu uygulanarak sistemin tüm durum değişkenlerinin kontrol altına alınması temeline dayanan bir genel kontrol kanunu geliştirilmiş ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Geliştirilen kontrol kanunları kademeli kontrol kanunlarıdır ve öncelikle çubuklara bağlı olan durumları, daha sonra tüm durumları kontrol etme eğilimindedir.

İleriki çalışmalarda burada başarısı gözlemlenen kontrol kanunlarının hem üzerinde çalışılan ters sarkaç problemlerinin hem de yetersiz tahrikli diğer sistemlerin fiziksel modelleri üzerinde genelleştirilmesi önerilir. Çalışma esnasında tüm durum değişkenlerinin ölçülebilir olduğu varsayılmıştır. Fakat fiziksel modellerde bu her

zaman mümkün olmadığından, bu kontrol kanunları ile birlikte çalışılacak gözlemleyici tasarlanması gerekliliği de göz ardı edilmemelidir.

KAYNAKLAR

1. FURUTA, K., OKUTANI, T., SONE, H., 1978, Computer control of a double inverted pendulum, *Computers & Electrical Engineering*, V. 5, Issue 1, March, Pg. 67-84.
2. SPONG, M. W., 1994, Partial Feedback Linearization of Underactuated Mechanical Systems, *Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS*, (Miinchen), pp. 314-321.
3. LIN, Z., SABERI, A., GUTMANN, M., SHAMASH, Y., 1995, Linear Controller for an Inverten Pendulum Having Restricted Travel – A High and Low Gain Approach, *Proceedings of The American Control Conference*, Seattle, Washington, June.
4. THEIN, M. W. L., MISAWA, E. A., 1995, Comparison of the Sliding Observer to Several State Estimators Using a Rotational Inverted Pendulum, *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, New Orleans, LA, December.
5. POMALES, W. T., GONZALES, O. R., 1996, Nonlinear Control of Swing-Up Inverted Pendulum, *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications* Dearborn, MI, September 15-18.
6. LEE, K.Y., HA, J.H., KONG, J. H., KIM, J. S., 2001, Robust Control System Desing for Rotational Inverted Pendulums Using Output Feedback Sliding Mode Controller and Disturbance Observer, *SICE 2001* July 25-27, , Nagoya, Japan.
7. ASTRÖM, K.J, FURUTA, K., 1996, Swing Up a Pendulum by Energy Control, *IFAC 13th World Congress*, San Fancisco, California.
8. BUGEJA, M., 2003, Non-Linear Swing-Up and Stabilizing Control of an Inverted Pendulum System, *EUROCON 2003* Ljublijana, Slovenia.
9. HENMI, T., DENG, M., INOUE, A., UEKI, N., HIRASHIMA, 2004, Y., Swing-up Control of a Serial Double Inverted Pendulum, *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, Boston, Massachusetts June 30- July 2.
10. GE, S. S., HANG, C. C., ZHANG, T., 1998, A Direct Approach to Adaptive Controller Desing and Its Application to Inverted Pendulum Tracking, *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia, Pennsylvania, June.

11. XIAOXIA, S., QIUHAI, Z., 2003, The Mathematic Model for The Double Inverted Pendulum Based on State Feedback and T-S model, *SICE Annual Conference in Fukui, Japan*, August 4-6.
12. WAI, R. J., LEE, J. D., CHANG, L.J., 2003, Development of Adaptive Sliding-Mode Control for Nonlinear Dual-Axis Inverted-Pendulum System, *Proceedings of the 2003 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*.
13. PATHAK, K., FRANCH, J., AGRAWAL, S. K., 2005, Velocity and Position Control of a Wheeled Inverted Pendulum by Partial Feedback Linearization, *IEEE Transaction on Robotics*, Vol:21, No:3, June.
14. KUO, B.C., 1999, *Otomatik Kontrol Sistemleri*, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 97-7860-94-8.
15. SLOTINE, J. J. E., LI, W., 1991, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, USA, 0-13-040890-5.

ÖZGEÇMİŞ

Aydın Özbey 1980 yılında Almanya'nın Delmenhorst şehrinde doğdu. Orta öğrenimini Heybeliada Hüseyin Rahmi Gürpınar Lisesinde tamamladı. 2003 yılında İstanbul Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2004 yılında İstanbul Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı ve halen burada görev yapmaktadır.