EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

İKİ BOYUTLU BINOMIAL DAĞILIMIN GENELLEŞMELERİ VE UYGULAMALARI

Özge ELMASTAŞ GÜLTEKİN

Uygulamalı İstatistik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu: 406.02.01.
Sunuş Tarihi: 14.08.2006

Tez Danışmanı: Prof.Dr. İsmihan BAYRAMOĞLU

Bornova-İZMİR

Özge ELMASTAŞ GÜLTEKİN tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan "İki Boyutlu Binomial Dağılımın Genelleşmeleri ve Uygulamaları" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve ………………….. tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:	**İmza**
Jüri Başkanı:………………………………………	**………………….**
Raportör Üye:……………………………………	**………………….**
Üye :……………………………………	**………………….**

ÖZET

İKİ BOYUTLU BINOMIAL DAĞILIMIN GENELLEŞMELERİ VE UYGULAMALARI

ELMASTAŞ GÜLTEKİN, Özge

Yüksek Lisans Tezi, İstatistik Bölümü

Tez Yöneticisi: Prof.Dr.İsmihan BAYRAMOĞLU

Ağustos 2006, 45 sayfa

Bu çalışmada, iki değişkenli binom dağılımının genelleşmeleri ve uygulamaları üzerinde durulmuştur. İki değişkenli binom dağılımının birleşik olasılık fonksiyonu, marjinalleri, olasılık türeten fonksiyonları incelenmiştir. Ayrıca bu dağılımın modifikasyonları ele alınmış ve yeni modeller göz önüne alınmıştır.

Aynı zamanda iki değişkenli binom dağılımının iki değişkenli Poisson dağılımına yaklaşımı gösterilmiş olup iki değişkenli binom dağılımının uygulandığı alanlara ilişkin örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İki değişkenli binom dağılımı, olasılık türeten fonksiyon, iki değişkenli Poisson dağılımı.

ABSTRACT

GENERALIZATION OF BIVARIATE BINOMIAL DISTRIBUTION AND ITS APPLICATIONS

ELMASTAŞ GÜLTEKİN, Özge

M.Sc. in Statistics

Supervisor: Prof.Dr. İsmihan BAYRAMOĞLU

August 2006, 45 pages

In this study, generalization of bivariate binomial distribution and its applications are considered. Joint probability function, marginals, and probability generating functions of bivariate binomial distribution are derived. Furthermore, modifications of this distribution are discussed and new models are investigated.

Also, the convergence of bivariate binomial distribution to bivariate Poisson distribution is proved. Examples on applications of modified bivariate binomial distribution in different areas are provided.

Keywords: Bivariate binomial distribution, probability generating function, bivariate Poisson distribution.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında benden ilgisini ve desteğini hiç esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof.Dr.İsmihan BAYRAMOĞLU'na (İzmir Ekonomi Üniversitesi Matematik Bölümü Başkanı) sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve Yüksek Lisans öğrenimimi gördüğüm Ege Üniversitesi İstatistik Bölümü'ndeki tüm değerli hocalarıma katkılarından ötürü en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca beni her zaman destekleyen ve daima yanımda olan canım aileme; bu yolda ilerlememi sağlayan ve bana her türlü sevgi, hoşgörü, anlayışı gösteren sevgili eşim Emre GÜLTEKİN'e sonsuz teşekkürler…

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET V

ABSTRACT………………………………………………………………...VII

TEŞEKKÜR IX

TABLOLAR DİZİNİ ……………………………………………………..XIII

1. GİRİŞ 1

2. İKİ DEĞİŞKENLİ BINOM DAĞILIMI……………………………..........3

2.1. İki Değişkenli Bernoulli Dağılımı……………………………………...3

2.2. İki Değişkenli Binom Dağılımı………………………………………...6

2.3. İki Değişkenli Poisson Dağılımı………………………………………..7

2.4. Olasılık Türeten Fonksiyon ve Faktoriyel Moment Türeten Fonksiyon.8

2.5. İki Değişkenli Binom Dağılımının Olasılık Türeten Fonksiyonunun Bulunması……………………………………………………………9

3. YENİ BİR ÜÇ DEĞİŞKENLİ DEĞİŞTİRİLMİŞ BİNOM DAĞILIMI ……………………………………………………………...12

3.1. Değiştirilmiş Üç Değişkenli Binom Dağılımı…………………………12

3.2. Kesikli (ξ_1, ξ_2, ξ_{11}) Rasgele Vektörünün Marjinalleri……………..14

3.3. Deneyin $m \times m$ Mümkün Sonuçlarının Olduğu Durum………………. 19

3.4. Kesikli $(\xi_1, \xi_2, \xi_{12}, \xi_{21})$ Rasgele Vektörünün Marjinalleri…………29

4. İKİ DEĞİŞKENLİ BİNOM DAĞILIMININ İKİ DEĞİŞKENLİ POİSSON DAĞILIMINA YAKLAŞIMI……………………………34

5. UYGULAMALAR…………………………………………………40

KAYNAKLAR DİZİNİ………………………………………………..42

ÖZGEÇMİŞ………………………………………………………45

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo Sayfa

3.1. $n = 4$ ve $p_{ij} = \frac{1}{9}$ (i,j=1,2,3) olasılıklarına ilişkin $\boldsymbol{f(n,k,l,r)}$ 'nin sayısal değerleri…………………………………………………………………...18

3.2. $n = 2$ ve $p_{ij} = \frac{1}{9}$, (i,j=1,2,3) olasılıkları için $\boldsymbol{f(n,k,l,r,m)}$ 'nin sayısal değerleri……………………………………………………………………25

3.3. $n = 3$ ve $p_{ij} = \frac{1}{9}$, (i,j=1,2,3) olasılıkları için $\boldsymbol{f(n,k,l,r,m)}$ 'nin sayısal değerleri…………………………………………………………………....26

1. GİRİŞ

İki değişkenli binom dağılımı birçok istatistiki modellerde, yaşam istatistikleri analizinde, oyun teorisinde, aşan (exceedance) istatistikleri ile bağlı araştırmalarda, uyumluluk tabloları ve birçok başka alanda önemli bir yere sahiptir. Bu alanda yapılan araştırmalar, istatistik teorisi ve uygulamaları açısından güncel ve önemlidir.

İki ve çok değişkenli binom dağılımları, tek değişkenli binom dağılımının doğal bir uzantısı olarak birçok yazarın ilgisini çekmiştir. Aitken ve Gonin (1935), dört katlı populasyondan yerine koyarak örnekleme yöntemini göz önüne alarak iki değişkenli binom olasılık fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Krishnomoorthy (1951), çok değişkenli binom dağılımı üzerine çalışmış ve Aitken ve Gonin ‘in iki değişkenli binom dağılımının serilerini genişletmiştir. Hamdan (1972, 1975), Hamdan ve Jensen (1976), Papageorgiou ve David (1994) çalışmalarında üç ve çok değişkenli binom dağılımlarına ilişkin koşullu dağılımlara değinmiştir. Son yıllarda, Chandrasekar ve Balakrishnan (2002), üç değişkenli binom dağılımını göz önüne almışlar ve bu dağılımın regresyon eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Aynı zamanda Hamdan (1975) iki değişkenli binom dağılımının trinomial dağılım ile olan ilişkisini incelemiştir. Mishra (1996) çalışmalarında genelleştirilmiş binom dağılımlarına yer vermiştir. Marshall ve Olkin (1985) ise iki değişkeni Bernoulli dağılımından yola çıkarak iki değişkenli binom dağılımına ilişkin bilgilere değinmiştir. Ayrıca, iki değişkenli binom dağılımına ilişkin çeşitli makaleler Biswas ve Hwang (2002), Kocherlakota (1989), Ong (1992) tarafından da ortaya konmuştur. Le (1984) simetrik iki değişkenli binom dağılımını tıbbi araştırmalardaki kümelenmiş örneklemlerin analizinde kullanmıştır. Hamdan ve Al-Bayyati (1969) iki değişkenli binom dağılımının iki değişkenli Poisson dağılımına yaklaşımına değinmiştir. Holgate (1964), Papageorgiou ve Kemp (1988) ise çalışmalarında iki değişkenli Poisson dağılımına ve bu dağılıma ilişkin tahminlere yer vermişlerdir.

2. İKİ DEĞİŞKENLİ BINOM DAĞILIMI

$X_1, X_2, \ldots$ bağımsız Bernoulli rasgele değişkenler dizisi ise, ilk n denemedeki başarıların sayısı binom dağılımına uymaktadır. Bu durum iki değişkenli Bernoulli dağılımı için de aynı şekildedir. Öncelikle iki değişkenli Bernoulli dağılımından söz etmek gerekmektedir.

2.1. İki Değişkenli Bernoulli Dağılımı

(X, Y) Bernoulli marjinallerine sahip ise, (X, Y)'nin 4 mümkün sonucu vardır. Sırasıyla p_{11}, p_{12}, p_{21} ve p_{22} olasılıklarına sahip (1,1), (1,0), (0,1) ve (0,0) değerleridir.

X\Y	**1**	**0**	
1	p_{11}	p_{12}	$p_{1.}$
0	p_{21}	p_{22}	$p_{2.}$
	$p_{.1}$	$p_{.2}$	1

$p_{11} + p_{12} = p_{1.} = 1 - p_{2.}$

$p_{11} + p_{21} = p_{.1} = 1 - p_{.2}$

X ve Y arasındaki kovaryansa bakılırsa;

Cov (X,Y)= p_{11}- $p_{1.}$ $p_{.1}$= p_{11}-(p_{11}+ p_{12})(p_{11}+ p_{21})

gerekli işlemler yapıldığında kovaryans aşağıdaki gibi bulunur.

Cov (X,Y)= $p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12} = \tau$ (2.1)

Korelasyon ise;

$$\rho = \frac{\tau}{\sqrt{\sigma_x^2 . \sigma_y^2}} \quad (2.2)$$

formülünü kullanarak

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = p_{1.} - p_{1.}^2 = p_{1.}(1 - p_{1.}) = p_{1.}\, p_{2.}$$

$$\sigma_y^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = p_{.1} - p_{.1}^2 = p_{.1}(1 - p_{.1}) = p_{.1}\, p_{.2}$$

$$\rho = \frac{\tau}{\sqrt{p_{1.} p_{2.} p_{.1} p_{.2}}}$$

ile hesaplanır.

$$\rho = \begin{cases} -1 \quad , \quad p_{11} = p_{22} = 0 \text{ ise} \\ \\ +1 \quad , \quad p_{12} = p_{21} = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

değerlerini alır.

Bilindiği gibi tek değişkenli Bernoulli rasgele değişkenlerinin toplamının dağılımı binom dağılımına uymaktadır. Bu durum iki değişkenli durum için de geçerlidir.

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)$ bağımsız iki değişkenli Bernoulli rasgele değişkenleri olsun.

$X_i \backslash Y_i$	1	0
1	p_{11}	p_{12}
0	p_{21}	p_{22}

i = 1,2,…,n

İlk satır ve sütun toplamları iki değişkenli binom dağılımına uyar.

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad , \qquad \xi_2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$P\{\xi_1 = k, \xi_2 = l\} = \sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k,l)} \binom{n}{i, k-i, l-i, n-k-l+i} p_{11}^{i} p_{12}^{k-i} p_{21}^{l-i} p_{22}^{n-k-l+i} \quad (2.3)$$

k=0, 1, …, n ; l= 0, 1, …, n ,

burada $\binom{n}{i, k-i, l-i, n-k-l+i} = \frac{n!}{i!(k-i)!(l-i)!(n-k-l+i)!}$ olmaktadır.

(Marshall ve Olkin (1985))

2.2. İki Değişkenli Binom Dağılımı

Bir populasyondaki bireyler $A_1, A_2, \ldots, A_n$'lerden biri ve $B_1, B_2, \ldots, B_n$'lerden biri olmak üzere eş zamanlı olarak sınıflandırılsın. $P(A_i B_j) = \Pi_{ij}$, i,j = 1,2,…,n olasılıklarına sahip ve $\sum \Pi_{ij} = 1$, $P(A_i) = \sum_{j=1}^{n} P(A_i B_j)$ ve $P(B_j) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i B_j)$ olsun. Deneyin n kez tekrarlandığı durumda; ξ_1, A_1'in meydana gelme sayısını; ξ_2, B_1'in meydana gelme sayısını; ξ_{11}, A_1B_1'in meydana gelme sayısını göstersin. $p(k,l) = P\{\xi_1 = k, \xi_2 = l\}$ olasılığı aşağıdaki gibi bulunur. Bu olasılık, A_1 olayından k tane ve B_1 olayından l tane gelme olasılığını gösterir.

A \ B	**B_1**	**B_2**	
A_1	Π_{11} i	Π_{12} $k-i$	k
A_2	Π_{21} $l-i$	Π_{22} $n-k-l+i$	$n-k$
	l	$n-l$	n

Sonuç olarak iki değişkenli binom dağılımının birleşik olasılık fonksiyonu şu şekilde bulunur.

$$p(k,l)=P\{\xi_1=k,\xi_2=l\}=\sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k,l)} C_n^i C_{n-i}^{k-i} C_{n-k}^{l-i} C_{n-k-l+i}^{n-k-l+i} \Pi_{11}^i \Pi_{12}^{k-i} \Pi_{21}^{l-i} \Pi_{22}^{n-k-l+i}$$

$$p(k,l)=\sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k,l)} \frac{n!}{i!(k-i)!(l-i)!(n-k-l+i)!} \Pi_{11}^i \Pi_{12}^{k-i} \Pi_{21}^{l-i} \Pi_{22}^{n-k-l+i} \tag{2.4}$$

k, l = 0,1,…,n.

(Aitken ve Gonin (1935)) ve Johnson, Kotz ve Balakrishnan (1997))

2.3. İki Değişkenli Poisson Dağılımı

İki değişkenli Poisson dağılımına ilişkin Campbell (1934) tarafından önemli çalışmalar ortaya konmuştur. Holgate (1964) çalışmalarında, iki değişkenli Poisson dağılımının önemli bir sınıfından söz etmiştir. Bu,

$$X_1 = Y_1 + Y_{12} \quad \text{ve} \quad X_2 = Y_2 + Y_{12}$$

değişkenlerinin birleşik dağılımına dayanır.

Burada Y_1, Y_2 ve Y_{12} sırasıyla θ_1, θ_2 ve θ_{12} parametreli karşılıklı bağımsız Poisson rasgele değişkenleridir.

X_1 ve X_2’nin birleşik olasılık fonksiyonu şöyledir:

$$P\{X_1=x_1, X_2=x_2\}=P(x_1,x_2)=e^{-(\theta_1+\theta_2+\theta_{12})}\sum_{i=0}^{\min(x_1,x_2)} \frac{\theta_1^{x_1-i}}{(x_1-i)!}\frac{\theta_2^{x_2-i}}{(x_2-i)!}\frac{\theta_{12}^i}{i!} \tag{2.5}$$

İki değişkenli Poisson dağılımının olasılık türeten fonksiyonu (pgf) şu şekildedir:

$$\exp\{\theta_1 (t_1 - 1) + \theta_2 (t - 1) + \theta_{12} (t_1 t_2 - 1)\} = \exp\{\phi_1 (t_1 - 1) + \phi_2 (t - 1) + \phi_{12} (t_1 - 1)(t_2 - 1)\} \quad (2.6)$$

Burada $\phi_1 = \theta_1 + \theta_{12}$, $\phi_2 = \theta_2 + \theta_{12}$ ve $\phi_{12} = \theta_{12}$ olmaktadır.

2.4. Olasılık Türeten Fonksiyon (Probability Generating Function - pgf) ve Faktoriyel Moment Türeten Fonksiyon (Factorial Moment Generating Function - fmgf)

Sayılabilen bir X rasgele değişkenini göz önüne alalım, yani negatif olmayan değerler alan kesikli bir X rasgele değişkeni olsun. Olasılık türeten fonksiyon (pgf), tek değişken için

$$\psi(t) = E[t^X] = \sum_x t^x P(x) \quad (2.7)$$

formülü ile, 2 değişken için ise

$$\psi(t, s) = E[t^X . s^Y] = \sum_x \sum_y t^x s^y p(x, y) \quad (2.8)$$

formülü ile hesaplanmaktadır.

Bu formülde $t = 1 + \alpha$ ve $s = 1 + \beta$ alındığında faktöriyel moment türeten fonksiyon (fmgf) elde edilir;

$$F(\alpha, \beta) = \sum_x \sum_y (1 + \alpha)^x (1 + \beta)^y p(x, y) \quad (2.9)$$

2.5. İki Değişkenli Binom Dağılımının Olasılık Türeten Fonksiyonunun Bulunması

İki değişkenli binom dağılımının birleşik olasılık fonksiyonu (2.4) numaralı formülde olduğu gibi şöyle idi:

$$p(k,l)=\sum_{i=\max(0,\,k+l-n)}^{\min(k,l)} \frac{n!}{i!(k-i)!(l-i)!(n-k-l+i)!}\Pi_{11}^{i}\Pi_{12}^{k-i}\Pi_{21}^{l-i}\Pi_{22}^{n-k-l+i}$$

k, l = 0,1,…,n.

Bu dağılımın birleşik olasılık türeten fonksiyonu bulunurken aşağıdakiler tanımlanır:

$$\xi_1^i=\begin{cases}1, & i.\ \text{denemede } A_1\text{'in meydana gelmesi}\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$\xi_2^i=\begin{cases}1, & i.\ \text{denemede } B_1\text{'in meydana gelmesi}\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$\xi_1=\sum_{i=1}^{n}\xi_1^i \quad , \quad \xi_2=\sum_{i=1}^{n}\xi_2^i \quad , \text{ i=1,…,n.}$$

(ξ_1,ξ_2) rasgele vektörünün birleşik olasılık türeten fonksiyonu,

$$\psi(t,s)=\left(\sum_{x_1,x_2=0}^{1} t^{x_1}s^{x_2}q_{x_1,x_2}\right)^n \tag{2.10}$$

formülü ile bulunur ve burada $q_{x_1,x_2}=P\left\{\xi_1^i=x_1,\xi_2^i=x_2\right\},\quad x_1,x_2=0,1.$

q_{x_1,x_2} değerleri hesaplandığında,

$q_{1,1} = P(A_1 B_1) = \Pi_{11}$

$q_{1,0} = P(A_1 B_1^c) = \Pi_{12}$

$q_{0,1} = P(A_1^{\ c} B_1\ ) = \Pi_{21}$

$q_{0,0} = P(A_1^{\ c} B_1^c) = \Pi_{22}$

$$\psi(t,s) = (\,t^1 s^1 q_{1,1} + t^1 s^0 q_{1,0} + t^0 s^1 q_{0,1} + t^0 s^0 q_{0,0})^n$$

$$\psi(t,s) = \left(\Pi_{11} ts + \Pi_{12} t + \Pi_{21} s + \Pi_{22}\right)^n \qquad (2.11)$$

olarak bulunur.

Burada marjinal olasılık türeten fonksiyonu şu şekilde elde edilir;

$\psi(t,1) = \psi(t) = \left(\Pi_{11} t + \Pi_{12} t + \Pi_{21} + \Pi_{22}\right)^n$

$\psi(t) = (\left(\Pi_{11} + \Pi_{12}\right) t + (\Pi_{21} + \Pi_{22})\big)^n$

$\Pi_{11} + \Pi_{12} = \Pi_{1.}$ ve $\Pi_{21} + \Pi_{22} = \Pi_{2.}$ olarak yazılırsa;

$\psi(t) = \left(\Pi_{1.} t + \Pi_{2.}\right)^n$ olarak bulunur.

Aynı şekilde ;

$\psi(1,s) = \psi(s) = \left(\Pi_{11} s + \Pi_{12} + \Pi_{21} s + \Pi_{22}\right)^n$

$\psi(s) = (\left(\Pi_{11} + \Pi_{21}\right) s + (\Pi_{12} + \Pi_{22})\big)^n$

$\Pi_{11} + \Pi_{21} = \Pi_{.1}$ ve $\Pi_{12} + \Pi_{22} = \Pi_{.2}$ olarak yazılırsa;

$\psi(s) = \left(\Pi_{.1} s + \Pi_{.2}\right)^n$ olarak bulunur.

Formülde $t = 1 + \alpha$ ve $s = 1 + \beta$ yazılırsa faktöriyel moment türeten fonksiyonu elde edilir.

$$F(\alpha,\beta) = \sum_k \sum_l (1+\alpha)^k (1+\beta)^l \, p(k,l) = \left[1 + \alpha\Pi_1 + \beta\Pi_1^* + \alpha\beta\Pi_{11}\right]^n \qquad (2.12)$$

burada $\Pi_1 = P(A_1)$ ve $\Pi_1^* = P(B_1)$ olmaktadır.

3. YENİ BİR ÜÇ DEĞİŞKENLİ DEĞİŞTİRİLMİŞ BİNOM DAĞILIMI

3.1. Değiştirilmiş Üç Değişkenli Binom Dağılımı

Aşağıdaki gibi dört katlı modeli göz önüne alalım.

A \ B	B_1	B_2	
A_1	Π_{11} r	Π_{12} $k-r$	k
A_2	Π_{21} $l-r$	Π_{22} $n-k-l+r$	$n-k$
	l	$n-l$	n

Burada deney sonuçları, A_1, A_2 olaylarından biri ve aynı anda B_1, B_2 olaylarından biri olarak $P(A_iB_j)=\Pi_{ij},\ i,j=1,2$; $\sum_{ij}\Pi_{ij}=1$ olasılıklarıyla gözlensin.

<u>Tanım 1:</u> n kez rasgele örnekleme altında; ξ_1, A_1'in meydana gelme sayısını; ξ_2, B_1'in meydana gelme sayısını; ξ_{11}, A_1B_1'in meydana gelme sayısını göstersin.

<u>Teorem 1</u>:(Bairamov, Balakrishnan (2004))

a) ξ_1, ξ_2 ve ξ_{11} rasgele değişkenlerinin birleşik olasılık fonksiyonu aşağıda gösterildiği gibidir.

$$p(k,l,r)=P\{\xi_1=k,\xi_2=l,\xi_{11}=r\}=\frac{n!}{r!(k-r)!(l-r)!(n-k-l+r)!}\Pi_{11}^{r}\Pi_{12}^{k-r}\Pi_{21}^{l-r}\Pi_{22}^{n-k-l+r} \tag{3.1}$$

k, l = 0,1,…,n ve r = max(0, k+l-n),…,min(k,l)

b) Bu dağılımın birleşik olasılık türeten fonksiyonu şöyle hesaplanır.

$$\xi_1^i=\begin{cases}1, & i.\ \text{denemede } A_1\text{'in meydana gelmesi}\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$\xi_2^i=\begin{cases}1, & i.\ \text{denemede } B_1\text{'in meydana gelmesi}\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$\xi_{11}^i=\begin{cases}1, & i.\ \text{denemede } A_1B_1\text{'in meydana gelmesi}\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$\xi_1=\sum_{i=1}^{n}\xi_1^i \quad , \quad \xi_2=\sum_{i=1}^{n}\xi_2^i \quad , \quad \xi_{11}=\sum_{i=1}^{n}\xi_{11}^i \quad , \ i = 1,\ldots,n.$$

$$\psi(t,s,z)=\left(\sum_{x_1,x_2,x_3=0}^{1} t^{x_1}s^{x_2}z^{x_3}q_{x_1,x_2,x_3}\right)^{n}$$ formülünde

$q_{x_1,x_2,x_3}=P\{\xi_1^i=x_1,\xi_2^i=x_2,\xi_{11}^i=x_3\}$, $x_1,x_2,x_3=0,1$ olmaktadır.

q_{x_1,x_2,x_3} değerleri hesaplandığında,

$q_{1,1,1} = P\{A_1B_1(A_1B_1)\} = \Pi_{11}$

$q_{1,1,0} = P\{A_1B_1(A_1B_1)^c\} = 0$

$q_{1,0,1} = P\{A_1B_1^{\ c}(A_1B_1)\} = 0$

$q_{1,0,0} = P\{A_1B_1^{\ c}(A_1B_1)^c\} = \Pi_{12}$

$q_{0,1,1} = P\{A_1^{\ c}B_1(A_1B_1)\} = 0$

$q_{0,1,0} = P\{A_1^{\ c}B_1(A_1B_1)^c\} = \Pi_{21}$

$q_{0,0,1} = P\{A_1^{\ c}B_1^{\ c}(A_1B_1)\} = 0$

$q_{0,0,0} = P\{A_1^{\ c}B_1^{\ c}(A_1B_1)^c\} = \Pi_{22}$

$$\begin{aligned}\psi(t,s,z) = (&t^1s^1z^1q_{1,1,1} + t^1s^1z^0q_{1,1,0} + t^1s^0z^1q_{1,0,1} + t^1s^0z^0q_{1,0,0} + t^0s^1z^1q_{0,1,1} \\ &+ t^0s^1z^0q_{0,1,0} + t^0s^0z^1q_{0,0,1} + t^0s^0z^0q_{0,0,0})^n\end{aligned}$$

$$\psi(t,s,z) = (\Pi_{11}tsz + \Pi_{12}t + \Pi_{21}s + \Pi_{22})^n \qquad (3.2)$$

olarak bulunur.

3.2. Kesikli (ξ_1, ξ_2, ξ_{11}) Rasgele Vektörünün Marjinalleri

Kesikli (ξ_1, ξ_2, ξ_{11}) rasgele vektörünün tek değişkenli marjinalleri de sırasıyla $(\Pi_{11} + \Pi_{12})$, $(\Pi_{11} + \Pi_{21})$ ve Π_{11} olasılıklarına sahip binom dağılımı gösterir.

$$P\{\xi_1 = k\} = \binom{n}{k}(\Pi_{11} + \Pi_{12})^k [1 - (\Pi_{11} + \Pi_{12})]^{n-k}$$

k = 0,1,…,n

$$P\{\xi_2 = l\} = \binom{n}{l}(\Pi_{11} + \Pi_{21})^l [1 - (\Pi_{11} + \Pi_{21})]^{n-l}$$

l = 0,1,…,n

$$P\{\xi_{11} = r\} = \binom{n}{r}\Pi_{11}{}^r [1 - \Pi_{11}]^{n-r}$$

r = 0,1,…,n

İki değişkenli marjinalleri de şu şekildedir:

(ξ_1, ξ_2)'nin birleşik dağılımı (2.4) formülündeki olasılık fonksiyonuna sahip iki değişkenli binom dağılımıdır ve olasılık türeten fonksiyonu (pgf) ise (2.11) formülünde verildiği gibi

$$\psi(t, s, 1) = (\Pi_{11}ts + \Pi_{12}t + \Pi_{21}s + \Pi_{22})^n$$

olmaktadır.

(ξ_1, ξ_{11}) 'in birleşik olasılık fonksiyonu,

$$P\{\xi_1 = k, \xi_{11} = r\} = \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{r!(k-r)!(l-r)!(n-k-l+r)!}\Pi_{11}^r\Pi_{12}^{k-r}\Pi_{21}^{l-r}\Pi_{22}^{n-k-l+r}$$

ve pgf'si de

$$\psi(t, 1, z) = (\Pi_{11}tz + \Pi_{12}t + \Pi_{21} + \Pi_{22})^n$$

olarak bulunur.

$\left(\xi_2, \xi_{11}\right)$'in birleşik olasılık fonksiyonu,

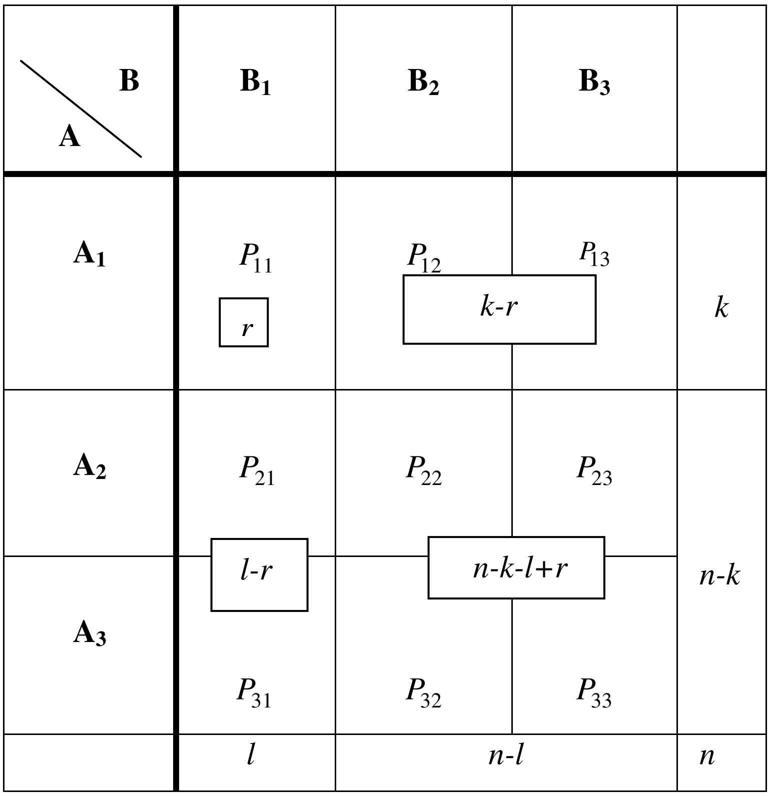
$$P\{\xi_2 = l, \xi_{11} = r\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{r!(k-r)!(l-r)!(n-k-l+r)!} \times \Pi_{11}^{r} \Pi_{12}^{k-r} \Pi_{21}^{l-r} \Pi_{22}^{n-k-l+r}$$

ve pgf'si de

$$\psi(1, s, z) = \left(\Pi_{11} sz + \Pi_{21} s + \Pi_{12} + \Pi_{22}\right)^n$$

olarak bulunur.

Tanım 2: Aşağıdaki model için,



n kez rasgele örnekleme altında; ξ_1, A_1'in meydana gelme sayısını; ξ_2, B_1'in meydana gelme sayısını; ξ_{11}, A_1B_1'in meydana gelme sayısını göstersin.

Teorem 1'den (ξ_1, ξ_2 , ξ_{11}) 'nin birleşik olasılık fonksiyonu (3.1) formülündeki gibi verilmişti.

$$p(k,l,r) = P\{\xi_1 = k, \xi_2 = l, \xi_{11} = r\} = \frac{n!}{r!(k-r)!(l-r)!(n-k-l+r)!} \times \Pi_{11}^{r}\Pi_{12}^{k-r}\Pi_{21}^{l-r}\Pi_{22}^{n-k-l+r}$$

k, l = 0,1,…,n ve r = max(0, k+l-n),…, min(k,l)

Burada $\Pi_{11} = p_{11}$, $\Pi_{12} = p_{12} + p_{13}$, $\Pi_{21} = p_{21} + p_{31}$, $\Pi_{22} = p_{22} + p_{23} + p_{32} + p_{33}$ olmaktadır.

(ξ_1, ξ_2, ξ_{11}) 'in birleşik olasılık fonksiyonu bir diğer şekilde şöyle bulunabilir:

<table>
<tr><th>A \ B</th><th>B_1</th><th>B_2</th><th>B_3</th><th></th></tr>
<tr><td>A_1</td><td>P_{11}
r</td><td>P_{12}
i</td><td>P_{13}
$k-r-i$</td><td>k</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>P_{21}
j</td><td>P_{22}</td><td>P_{23}</td><td rowspan="3">$n-k$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">$n-k-l+r$</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>P_{31}
$l-r-j$</td><td>P_{32}</td><td>P_{33}</td></tr>
<tr><td></td><td>l</td><td colspan="2">$n-l$</td><td>n</td></tr>
</table>

$$p(k,l,r)=P\{\xi_1=k,\xi_2=l,\xi_{11}=r\}=\sum_{i=0}^{k-r}\sum_{j=0}^{l-r}\frac{n!}{r!i!j!(k-r-i)!(l-r-j)!(n-k-l+r)!} \quad (3.3)$$
$$\times p_{11}^{r}p_{12}^{i}p_{13}^{k-r-i}p_{21}^{j}p_{31}^{l-r-j}(p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+r}$$

k, l = 0,1,…,n ve r = max(0, k+l-n),…, min(k,l).

Aşağıda verilen tabloda $n=4$ ve $p_{ij}=\dfrac{1}{9}$, i,j=1,2,3 olasılıkları için $f(n,k,l,r)=P\{\xi_1=k,\xi_2=l,\xi_{11}=r\}$ 'nin sayısal değerleri hesaplanmıştır.

Tablo 3.1: $n=4$ ve $p_{ij}=\dfrac{1}{9}$ (i,j=1,2,3) olasılıklarına ilişkin $f(n, k, l, r)$ 'nin sayısal değerleri.

n	**k**	**l**	**r**	**f(n,k,l,r)**		**n**	**k**	**l**	**r**	**f(n,k,l,r)**
4	0	0	0	0.039		4	2	3	1	0.015
4	0	1	0	0.078		4	3	2	1	0.015
4	1	0	0	0.078		4	2	2	0	0.015
4	1	1	1	0.039		4	2	3	2	0.015
4	1	1	0	0.117		4	3	3	2	7.316×10^{-3}
4	0	2	0	0.059		4	4	1	1	4.877×10^{-3}
4	1	2	0	0.059		4	4	2	2	3.658×10^{-3}
4	2	0	0	0.059		4	0	4	0	2.439×10^{-3}
4	2	1	0	0.059		4	1	4	1	4.877×10^{-3}
4	1	2	1	0.059		4	2	4	2	3.658×10^{-3}
4	2	2	1	0.059		4	3	3	3	2.439×10^{-3}
4	2	2	2	0.015		4	4	3	3	1.279×10^{-3}
4	2	1	1	0.059		4	4	0	0	2.439×10^{-3}
4	3	0	0	0.02		4	4	4	4	1.524×10^{-4}
4	3	1	1	0.029		4	1	3	0	9.755×10^{-3}
4	3	1	0	9.755×10^{-3}		4	3	2	2	0.015
4	0	3	0	0.02		4	3	4	3	1.219×10^{-3}
4	1	3	1	0.029						

$f(n,k,l,r)$ ‘nin değerleri için tabloyu oluştururken; k, l ve r’nin tüm mümkün değerlerini göz önüne alırız. n = 4 için, k; 0,1,2,3,4 değerlerini, l; 0,1,2,3,4 değerlerini alır ve r; max (k+l-4, 0)’dan min(k,l)’a kadar değerler alır. Örneğin; k = 1 ve l = 3 olduğunda r = 0, 1 değerlerini alır. Aynı şekilde k = 3 ve l = 2 olduğunda r = 1, 2 değerlerini alır.

3.3. Deneyin m×m Mümkün Sonuçlarının Olduğu Durum

Deneydeki sonuçlar A_1, A_2,…,A_m’lerden biri ve B_1, B_2,…,B_m’lerden biri olmak üzere eş zamanlı olarak sınıflandırılsın.
$P(A_iB_j)=p_{ij}$, i, j = 1,2,…,m olasılıklarına sahip ve $\sum p_{ij}=1$ olsun. Deneyin sonuçları A_iB_j , i, j = 1,2,…,m çiftleridir. Deneyin n kez tekrarlandığı ve denemelerin birbirinden bağımsız olduğu varsayılsın.

<u>Tanım 3</u>: n kez rasgele örnekleme altında; ξ_1, A_1’in meydana gelme sayısını; ξ_2, B_1’in meydana gelme sayısını; ξ_{11}, A_1B_1’in meydana gelme sayısını; ξ_{12}, A_1B_2’nin meydana gelme sayısını göstersin.

Bu durum için ξ_1, ξ_2 ve ξ_{11} rasgele değişkenlerinin birleşik olasılık fonksiyonu şu şekildedir:

$$P\{\xi_1=k,\xi_2=l,\xi_{11}=r\}=\frac{n!}{r!(k-r)!(l-r)!(n-k-l+r)!}\times\Pi_{11}^{r}\Pi_{12}^{k-r}\Pi_{21}^{l-r}\Pi_{22}^{n-k-l+r} \tag{3.4}$$

Burada $\Pi_{11} = p_{11}$, $\Pi_{12} = \sum_{j=2}^{m} p_{1j}$, $\Pi_{21} = \sum_{i=2}^{m} p_{i1}$, $\Pi_{22} = 1 - p_{11} - \sum_{j=2}^{m} p_{1j} - \sum_{i=2}^{m} p_{i1}$

olmaktadır.

<u>Teorem 2</u>: (Bairamov, Balakrishnan (2004))

a) ξ_1 , ξ_2 ve ξ_{12} rasgele değişkenlerinin birleşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$P\{\xi_1 = k, \xi_2 = l, \xi_{12} = r\} = \sum_{i=\max(0,\, k+l-n)}^{\min(k-r,\, l)} \sum_{j=0}^{l-i} \frac{n!}{r!\,i!\,j!\,(k-i-r)!\,(l-i-j)!\,(n-k-l+i)!} \tag{3.5}$$
$$\times \Pi_{11}^{i}\,\Pi_{12}^{r}\,\Pi_{13}^{k-i-r}\,\Pi_{21}^{j}\,\Pi_{31}^{l-i-j}\,(1-\Pi_{11}-\Pi_{12}-\Pi_{13}-\Pi_{21}-\Pi_{31})^{n-k-l+i}$$

l = 0,1,…,n-r ; k = r, r+1,…,n ; r = 0,1,…,n.

Burada $\Pi_{11} = p_{11}$, $\Pi_{12} = p_{12}$, $\Pi_{13} = \sum_{j=3}^{m} p_{1j}$, $\Pi_{21} = p_{21}$, $\Pi_{31} = \sum_{i=3}^{m} p_{i1}$

b) Birleşik olasılık türeten fonksiyonu;

$$\psi(t, s, z) = (a_1 ts + a_2 tz + a_3 t + a_4 s + a_5)^n \tag{3.6}$$

$a_1 = p_{11}$, $a_2 = p_{12}$, $a_3 = \sum_{j=3}^{m} p_{1j}$, $a_4 = \sum_{i=2}^{m} p_{i1}$ ve $a_5 = \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=2}^{m} p_{ij}$ ‘dir.

***İspat* :** Model sembolik olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

A \ B	B_1	B_2	....	B_m	
A_1	p_{11} i	p_{12} r	$k\text{-}i\text{-}r$	p_{1m}	k
A_2	p_{21} j	p_{22}	....	p_{2m}	$n\text{-}k$
. . .	$l\text{-}i\text{-}j$		$n\text{-}k\text{-}l+i$	. . .	
A_m	p_{m1}	p_{m2}	....	p_{mm}	
	l	$n\text{-}l$			n

a) Deney n kez tekrarlandığı zaman A_1 olayının B_2 ile birlikte r kez uygulanması $\binom{n}{r}$ şekilde, A_1 olayının B_1 ile olması $\binom{n-r}{i}$ şekilde, A_1 olayının B_3, B_4,…, B_m olayları ile olması da $\binom{n-r-i}{k-i-r}$ şekilde olur. B_1 olayının A_2

olayı ile olması $\binom{n-r-i-(k-i-r)}{j}=\binom{n-k}{j}$ şekilde, B_1 olayının A_3, $A_4,\ldots,A_m$ olayları ile olması $\binom{n-k-j}{l-i-j}$ şekilde olur. Böylece, n kez tekrarlanan bağımsız denemelerde, A_1 olayının i kez, B_1 olayının j kez ve A_1B_2 olayının r kez görüldüğü mümkün durumların sayısı,

$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{i}\binom{n-r-i}{k-i-r}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{l-i-j}=\frac{n!}{r!i!j!(k-i-r)!(l-i-j)!(n-k-l+i)!}$$

olmaktadır. Ayrıca her durum,

$\Pi_{11}^{i}\Pi_{12}^{r}\Pi_{13}^{k-i-r}\Pi_{21}^{j}\Pi_{31}^{l-i-j}(1-\Pi_{11}-\Pi_{12}-\Pi_{13}-\Pi_{21}-\Pi_{31})^{n-k-l+i}$’nin aynı olasılığına sahiptir.

Burada j, 0’dan 1-i’ye ve i, max(0, k+l-n)’den min(k-r, l)’ye kadar değişir ve sonuçta (3.5) numaralı formül elde edilir.

b) Birleşik olasılık türeten fonksiyonunu elde edebilmek için, aşağıdakiler tanımlanır.

$$\xi_1^i=\begin{cases}1, & i.\ \text{denemede } A_1\text{'in meydana gelmesi}\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$\xi_2^i=\begin{cases}1, & i.\ \text{denemede } B_1\text{'in meydana gelmesi}\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

$$\xi_{11}^{i} = \begin{cases} 1, & i.\ \text{denemede } A_1B_1\text{'in meydana gelmesi} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

i = 1,2,…,n için $\xi_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_1^i$, $\xi_2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_2^i$, $\xi_{11} = \sum_{i=1}^{n} \xi_{11}^i$ olduğu açıktır.

n deneme birbirinden bağımsız olduğu için, (ξ_1, ξ_2, ξ_{12}) rasgele vektörünün olasılık türeten fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$\psi(t,s,z) = \left(\sum_{x_1,x_2,x_3=0}^{1} t^{x_1} s^{x_2} z^{x_3} q_{x_1,x_2,x_3} \right)$$

$$q_{x_1,x_2,x_3} = P\left\{ \xi_1^i = x_1, \xi_2^i = x_2, \xi_{11}^i = x_3 \right\},\ x_1, x_2, x_3 = 0,1.$$

$$q_{1,1,1} = P\{A_1B_1(A_1B_2)\} = 0$$

$$q_{1,1,0} = P\left\{A_1B_1(A_1B_2)^c\right\} = p_{11}$$

$$q_{1,0,1} = P\left\{A_1{B_1}^c(A_1B_2)\right\} = p_{12}$$

$$q_{1,0,0} = P\left\{A_1{B_1}^c(A_1B_2)^c\right\} = \sum_{j=3}^{n} p_{1j}$$

$$q_{0,1,1} = P\left\{{A_1}^c B_1(A_1B_2)\right\} = 0$$

$$q_{0,1,0} = P\left\{{A_1}^c B_1(A_1B_2)^c\right\} = \sum_{i=2}^{n} p_{i1}$$

$$q_{0,0,1} = P\left\{{A_1}^c {B_1}^c(A_1B_2)\right\} = 0$$

$$q_{0,0,0} = P\left\{{A_1}^c {B_1}^c(A_1B_2)^c\right\} = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} p_{ij}$$

Bu elde edilenler yerine konduğunda (3.6) elde edilir.

l = 0,1,…,n-r ; k = r, r+1,…, n ; r = 0,1,…,n.

Teorem 3:

a) Aşağıdaki model için, n kez rasgele örnekleme altında ξ_1, A_1'in meydana gelme sayısını, ξ_2, B_1'in meydana gelme sayısını, ξ_{12}, A_1B_2'nin meydana gelme sayısını ve ξ_{21}, A_2B_1'nin meydana gelme sayısını göstersin.

A \ B	**B_1**	**B_2**	**B_3**	
A_1	p_{11} i	p_{12} r	p_{13} $k-i-r$	k
A_2	p_{21} m	p_{22} $n-k-l+i$	p_{23}	$n-k$
A_3	p_{31} $l-i-m$	p_{32}	p_{33}	
	l	$n-l$		n

$$P\{\xi_1 = k, \xi_2 = l, \xi_{12} = r, \xi_{21} = m\} =$$

$$\sum_{i=\max(k+l-n,0)}^{\min(k-r,l-m)} \frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!} p_{11}^{i} p_{12}^{r} p_{13}^{k-i-r} p_{21}^{m} \times p_{31}^{l-i-m} (p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i} \qquad (3.7)$$

Burada k, l, r ve m'nin sınırları şu şekildedir:

k= r, r+1,..., n-m ; l= m, m+1,..., n-r ; r= 0, 1,..., n-m ; m= 0, 1,...,n.

Sınırların kontrolü amacıyla n=10 değeri ve her bir olasılığın eşit olduğu yani 1/9 olduğu durum için toplam olasılık değeri Mathcad programında 1 olarak bulunmuştur.

$$\sum_{m=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-m}\sum_{k=r}^{n-m}\sum_{l=m}^{n-r}\sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k-r,l-m)}\left(\frac{n!}{i!\cdot r!\cdot m!\cdot(k-i-r)!\cdot(l-i-m)!\cdot(n-k-l+i)!}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{9}\right)^{k+l-i}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-k-l+i}\right]=1$$

Aşağıdaki tabloda $n=2$ ve $p_{ij}=\frac{1}{9}$, i, j = 1, 2, 3 için $f(n,k,l,r,m)=P\{\xi_1=k,\xi_2=l,\xi_{12}=r,\xi_{21}=m\}$ olasılıklarının sayısal değerleri verilmiştir.

Tablo 3.2: $n=2$ ve $p_{ij}=\frac{1}{9}$, (i,j=1,2,3) olasılıkları için $f(n,k,l,r,m)$ 'nin sayısal değerleri.

n	**k**	**l**	**r**	**m**	***f(n,k,l,r,m)***		**n**	**k**	**l**	**r**	**m**	***f(n,k,l,r,m)***
2	0	0	0	0	0.198		2	1	1	1	0	0.025
2	0	1	0	0	0.099		2	2	0	1	0	0.025
2	0	2	0	0	0.012		2	2	1	1	0	0.025
2	1	0	0	0	0.099		2	2	0	2	0	0.012
2	1	1	0	0	0.123		2	0	1	0	1	0.099
2	1	2	0	0	0.025		2	0	2	0	1	0.025
2	2	0	0	0	0.012		2	1	1	0	1	0.025
2	2	1	0	0	0.025		2	1	2	0	1	0.025
2	2	2	0	0	0.012		2	1	1	1	1	0.025
2	1	0	1	0	0.099		2	0	2	0	2	0.012

Tablo 3.3: $n = 3$ ve $p_{ij} = \frac{1}{9}$, (i,j=1,2,3) olasılıkları için $f(n,k,l,r,m)$ 'nin sayısal değerleri.

n	**k**	**l**	**r**	**m**	***f(n,k,l,r,m)***		**n**	**k**	**l**	**r**	**m**	***f(n,k,l,r,m)***
3	0	0	0	0	0.088		3	2	0	2	0	0.016
3	1	0	0	0	0.066		3	3	0	2	0	4.115×10^{-3}
3	2	0	0	0	0.016		3	2	1	2	0	4.115×10^{-3}
3	3	0	0	0	1.372×10^{-3}		3	3	1	2	0	4.115×10^{-3}
3	0	1	0	0	0.066		3	3	0	3	0	1.372×10^{-3}
3	1	1	0	0	0.099		3	0	1	0	1	0.066
3	2	1	0	0	0.037		3	1	1	0	1	0.033
3	3	1	0	0	4.115×10^{-3}		3	2	1	0	1	4.115×10^{-3}
3	0	2	0	0	0.016		3	0	2	0	1	0.033
3	1	2	0	0	0.037		3	1	2	0	1	0.041
3	2	2	0	0	0.025		3	2	2	0	1	8.23×10^{-3}
3	3	2	0	0	4.115×10^{-3}		3	0	3	0	1	4.115×10^{-3}
3	0	3	0	0	1.372×10^{-3}		3	1	3	0	1	8.23×10^{-3}
3	1	3	0	0	4.115×10^{-3}		3	2	3	0	1	4.115×10^{-3}
3	2	3	0	0	4.115×10^{-3}		3	1	1	1	1	0.033
3	3	3	0	0	1.372×10^{-3}		3	2	1	1	1	8.23×10^{-3}
3	1	0	1	0	0.066		3	1	2	1	1	8.23×10^{-3}
3	2	0	1	0	0.033		3	2	2	1	1	8.23×10^{-3}
3	3	0	1	0	4.115×10^{-3}		3	2	1	2	1	4.115×10^{-3}
3	1	1	1	0	0.033		3	0	2	0	2	0.016
3	2	1	1	0	0.041		3	1	2	0	2	4.115×10^{-3}
3	3	1	1	0	8.23×10^{-3}		3	0	3	0	2	4.115×10^{-3}
3	1	2	1	0	4.115×10^{-3}		3	1	3	0	2	4.115×10^{-3}
3	2	2	1	0	8.23×10^{-3}		3	1	2	1	2	4.115×10^{-3}
3	3	2	1	0	4.115×10^{-3}		3	0	3	0	3	1.372×10^{-3}

b) Birleşik olasılık türeten fonksiyonunu bulmak için, aşağıdakiler tanımlanır:

$$\xi_1^i = \begin{cases} 1, & i.\ \text{denemede } A_1\text{'in meydana gelmesi} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\xi_2^i = \begin{cases} 1, & i.\ \text{denemede } B_1\text{'in meydana gelmesi} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\xi_{12}^i = \begin{cases} 1, & i.\ \text{denemede } A_1B_2\text{'nin meydana gelmesi} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\xi_{21}^i = \begin{cases} 1, & i.\ \text{denemede } A_2B_1\text{'nin meydana gelmesi} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

i = 1,2,…,n için $\xi_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_1^i \quad , \quad \xi_2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_2^i \quad , \quad \xi_{12} = \sum_{i=1}^{n} \xi_{12}^i \ , \ \xi_{21} = \sum_{i=1}^{n} \xi_{21}^i$

olduğu açıktır.

n deneme birbirinden bağımsız olduğu için, $(\xi_1, \xi_2, \xi_{12}, \xi_{21})$ rasgele vektörünün olasılık türeten fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$\psi(t,s,z,c) = \left(\sum_{x_1,x_2,x_3,x_4=0}^{1} t^{x_1} s^{x_2} z^{x_3} c^{x_4} q_{x_1,x_2,x_3,x_4} \right)^n$ formülünde

$q_{x_1,x_2,x_3,x_4} = P\{\xi_1^i = x_1, \xi_2^i = x_2, \xi_{12}^i = x_3,\ \xi_{21}^i = x_4\},\ x_1, x_2, x_3, x_4 = 0{,}1$ olmaktadır.

q_{x_1,x_2,x_3,x_4} değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$q_{1,1,1,1} = P(A_1B_1(A_1B_2)(A_2B_1)) = 0$

$q_{1,1,1,0} = P(A_1B_1(A_1B_2)(A_2B_1)^c) = 0$

$q_{1,1,0,1} = P(A_1B_1(A_1B_2)^c(A_2B_1)) = 0$

$q_{1,1,0,0} = P(A_1B_1(A_1B_2)^c(A_2B_1)^c) = p_{11}$

$q_{1,0,1,1} = P(A_1{B_1}^c(A_1B_2)(A_2B_1)) = 0$

$q_{1,0,1,0} = P(A_1{B_1}^c(A_1B_2)(A_2B_1)^c) = p_{12}$

$q_{1,0,0,1} = P(A_1{B_1}^c(A_1B_2)^c(A_2B_1)) = 0$

$q_{1,0,0,0} = P(A_1{B_1}^c(A_1B_2)^c(A_2B_1)^c) = p_{13}$

$q_{0,1,1,1} = P({A_1}^cB_1(A_1B_2)(A_2B_1)) = 0$

$q_{0,1,1,0} = P({A_1}^cB_1(A_1B_2)(A_2B_1)^c) = 0$

$q_{0,1,0,1} = P({A_1}^cB_1(A_1B_2)^c(A_2B_1)) = p_{21}$

$q_{0,1,0,0} = P({A_1}^cB_1(A_1B_2)^c(A_2B_1)^c) = p_{31}$

$q_{0,0,1,1} = P({A_1}^c{B_1}^c(A_1B_2)(A_2B_1)) = 0$

$q_{0,0,1,0} = P({A_1}^c{B_1}^c(A_1B_2)(A_2B_1)^c) = 0$

$q_{0,0,0,1} = P({A_1}^c{B_1}^c(A_1B_2)^c(A_2B_1)) = 0$

$q_{0,0,0,0} = P({A_1}^c{B_1}^c(A_1B_2)^c(A_2B_1)^c) = \sum_{j=2}^{3}\sum_{i=2}^{3} p_{ij}$

Elde edilenler formülde yerine konur.

$$\begin{aligned}\psi(t,s,z,c) = (&t^1s^1z^1c^1q_{1,1,1,1} + t^1s^1z^1c^0q_{1,1,1,0} + t^1s^1z^0c^1q_{1,1,0,1} + t^1s^1z^0c^0q_{1,1,0,0}\\ &+ t^1s^0z^1c^1q_{1,0,1,1} + t^1s^0z^1c^0q_{1,0,1,0} + t^1s^0z^0c^1q_{1,0,0,1} + t^1s^0z^0c^0q_{1,0,0,0}\\ &+ t^0s^1z^1c^1q_{0,1,1,1} + t^0s^1z^1c^0q_{0,1,1,0} + t^0s^1z^0c^1q_{0,1,0,1} + t^0s^1z^0c^0q_{0,1,0,0}\\ &+ t^0s^0z^1c^1q_{0,0,1,1} + t^0s^0z^1c^0q_{0,0,1,0} + t^0s^0z^0c^1q_{0,0,0,1} + t^0s^0z^0c^0q_{0,0,0,0})^n\end{aligned}$$

$$\psi(t,s,z,c) = (ts\,p_{11} + tz\,p_{12} + t\,p_{13} + sc\,p_{21} + s\,p_{31} + \sum_{i=2}^{3}\sum_{j=2}^{3} p_{ij})^n$$

Yapılan işlemler sonucunda birleşik olasılık türeten fonksiyonu şu şekilde bulunur:

$$\psi(t,s,z,c) = (a_1 ts + a_2 tz + a_3 sc + a_4 t + a_5 s + a_6)^n \tag{3.8}$$

$a_1 = p_{11}$, $a_2 = p_{12}$, $a_3 = p_{21}$, $a_4 = p_{13}$, $a_5 = p_{31}$ ve

$a_5 = \sum_{i=2}^{3} \sum_{j=2}^{3} p_{ij}$ 'dir.

3.4. Kesikli $(\xi_1, \xi_2, \xi_{12}, \xi_{21})$ Rasgele Vektörünün Marjinalleri

Kesikli $(\xi_1, \xi_2, \xi_{12}, \xi_{21})$ rasgele vektörünün tek değişkenli marjinalleri şu şekildedir.

$$P\{\xi_1 = k\} = \binom{n}{k} (p_{11} + p_{12} + p_{13})^k \left[1 - (p_{11} + p_{12} + p_{13})\right]^{n-k}$$

k= 0,…, n

$$P\{\xi_2 = l\} = \binom{n}{l} (p_{11} + p_{21} + p_{31})^l \left[1 - (p_{11} + p_{21} + p_{31})\right]^{n-l}$$

l=0,…,n

$$P\{\xi_{12} = r\} = \binom{n}{r} p_{12}{}^r \left[1 - p_{12}\right]^{n-r}$$

r=0,…,n

$$P\{\xi_{21} = m\} = \binom{n}{m} p_{21}{}^m \left[1 - p_{21}\right]^{n-m}$$

m=0,…,n

Kesikli $(\xi_1, \xi_2, \xi_{12}, \xi_{21})$ rasgele vektörünün iki değişkenli marjinalleri de şu şekilde ifade edilir.

❖ $$P\{\xi_1 = k,\ \xi_2 = l\} = \sum_{r=0}^{\min(k,n-l)} \sum_{m=0}^{\min(l,n-k)} \sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k-r,l-m)} \frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!} \times p_{11}^{i}\, p_{12}^{r}\, p_{13}^{k-i-r}\, p_{21}^{m}\, p_{31}^{l-i-m}\, (p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i}$$

$$\psi(t,s,z,c) = \left[a_1 ts + a_2 tz + a_3 cs + a_4 t + a_5 s + a_6\right]^n$$

$$\psi(t,s,1,1) = \left[a_1 ts + a_2 t + a_3 s + a_4 t + a_5 s + a_6\right]^n$$

$$\psi(t,s,1,1) = \psi(t,s) = \left[b_1 ts + b_2 t + b_3 s + b_4\right]^n$$

Burada $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + a_4$, $b_3 = a_3 + a_5$, $b_4 = a_6$ olmaktadır.

❖ $$P\{\xi_1 = k,\ \xi_{12} = r\} = \sum_{m=0}^{n-k} \sum_{l=m}^{n-r} \sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k-r,l-m)} \frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!} \times p_{11}^{i}\, p_{12}^{r}\, p_{13}^{k-i-r}\, p_{21}^{m}\, p_{31}^{l-i-m}\, (p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i}$$

$$\psi(t,1,z,1) = \left[a_1 t + a_2 tz + a_3 + a_4 t + a_5 + a_6\right]^n$$

$$\psi(t,1,z,1) = \psi(t,z) = \left[c_1 tz + c_2 t + c_3\right]^n$$

Burada $c_1 = a_2$, $c_2 = a_1 + a_4$, $c_3 = a_3 + a_5 + a_6$ olmaktadır.

❖ $$P\{\xi_1=k,\ \xi_{21}=m\}=\sum_{r=0}^{k}\sum_{l=m}^{n-r}\sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k-r,l-m)}\frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!}\times p_{11}^{i}\,p_{12}^{r}\,p_{13}^{k-i-r}\,p_{21}^{m}\,p_{31}^{l-i-m}\,(p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i}$$

$$\psi(t,1,1,c)=\left[a_1t+a_2t+a_3c+a_4t+a_5+a_6\right]^n$$

$$\psi(t,1,1,c)=\psi(t,c)=\left[d_1t+d_2c+d_3\right]^n$$

Burada $d_1=a_1+a_2+a_4,\quad d_2=a_3,\quad d_3=a_5+a_6$ olmaktadır.

❖ $$P\{\xi_2=l,\ \xi_{12}=r\}=\sum_{m=0}^{l}\sum_{k=r}^{n-m}\sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k-r,l-m)}\frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!}\times p_{11}^{i}\,p_{12}^{r}\,p_{13}^{k-i-r}\,p_{21}^{m}\,p_{31}^{l-i-m}\,(p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i}$$

$$\psi(1,s,z,1)=\left[a_1s+a_2z+a_3s+a_4+a_5s+a_6\right]^n$$

$$\psi(1,s,z,1)=\psi(s,z)=\left[e_1s+e_2z+e_3\right]^n$$

Burada $e_1=a_1+a_3+a_5,\quad e_2=a_2,\quad e_3=a_4+a_6$ olmaktadır.

❖ $$P\{\xi_2=l,\ \xi_{21}=m\}=\sum_{r=0}^{n-l}\sum_{k=r}^{n-m}\sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k-r,l-m)}\frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!}\times p_{11}^{i}\,p_{12}^{r}\,p_{13}^{k-i-r}\,p_{21}^{m}\,p_{31}^{l-i-m}\,(p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i}$$

$$\psi(1,s,1,c)=\left[a_1s+a_2+a_3cs+a_4+a_5s+a_6\right]^n$$

$$\psi(1,s,1,c)=\psi(s,c)=\left[f_1cs+f_2s+f_3\right]^n$$

Burada $f_1=a_3,\quad f_2=a_1+a_5,\quad f_3=a_2+a_4+a_6$ olmaktadır.

❖ $$P\{\xi_{12}=r,\ \xi_{21}=m\}=\sum_{l=m}^{n-r}\sum_{k=r}^{n-m}\sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k-r,l-m)}\frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!}$$
$$\times p_{11}^{i}\,p_{12}^{r}\,p_{13}^{k-i-r}\,p_{21}^{m}\,p_{31}^{l-i-m}\,(p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i}$$

$$\psi(1,1,z,c)=\left[a_1+a_2z+a_3c+a_4+a_5+a_6\right]^n$$

$$\psi(1,1,z,c)=\psi(z,c)=\left[g_1c+g_2z+g_3\right]^n$$

Burada $g_1=a_3$, $g_2=a_2$, $g_3=a_1+a_4+a_5+a_6$ olmaktadır.

Kesikli $(\xi_1,\xi_2,\xi_{12},\xi_{21})$ rasgele vektörünün üç değişkenli marjinalleri de şu şekilde ifade edilir.

❖ $$P\{\xi_1=k,\ \xi_2=l\ ,\xi_{12}=r\}=\sum_{m=0}^{\min\,(l,n-k)}\ \sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k-r,l-m)}\frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!}$$
$$\times p_{11}^{i}\,p_{12}^{r}\,p_{13}^{k-i-r}\,p_{21}^{m}\,p_{31}^{l-i-m}\,(p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i}$$

$$\psi(t,s,z,1)=\left[a_1ts+a_2tz+a_3s+a_4t+a_5s+a_6\right]^n$$

$$\psi(t,s,z,1)=\psi(t,s,z)=\left[h_1ts+h_2tz+h_3t+h_4s+h_5\right]^n$$

Burada $h_1=a_1$, $h_2=a_2$, $h_3=a_4$, $h_4=a_3+a_5$, $h_5=a_6$ olmaktadır.

❖ $$P\{\xi_1=k,\xi_2=l\ ,\xi_{21}=m\}=\sum_{r=0}^{\min\,(k,\ n-l)}\ \sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k-r,l-m)}\frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!}$$
$$\times p_{11}^{i}p_{12}^{r}p_{13}^{k-i-r}p_{21}^{m}p_{31}^{l-i-m}(p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i}$$

$$\psi(t,s,1,c)=\left[a_1ts+a_2t+a_3cs+a_4t+a_5s+a_6\right]^n$$

$$\psi(t,s,1,c)=\psi(t,s,c)=\left[j_1ts+j_2cs+j_3t+j_4s+j_5\right]^n$$

Burada $j_1=a_1$, $j_2=a_3$, $j_3=a_2+a_4$, $j_4=a_5$, $j_5=a_6$ olmaktadır.

❖ $$P\{\xi_1 = k, \xi_{12} = r, \xi_{21} = m\} = \sum_{l=m}^{n-r} \sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k-r,l-m)} \frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!}$$
$$\times p_{11}^{i} p_{12}^{r} p_{13}^{k-i-r} p_{21}^{m} p_{31}^{l-i-m} (p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i}$$

$$\psi(t,1,z,c) = [a_1 t + a_2 tz + a_3 c + a_4 t + a_5 + a_6]^n$$

$$\psi(t,1,z,c) = \psi(t,z,c) = [k_1 tz + k_2 t + k_3 c + k_4]^n$$

Burada $k_1 = a_2$, $k_2 = a_1 + a_4$, $k_3 = a_3$, $k_4 = a_5 + a_6$ olmaktadır.

❖ $$P\{\xi_2 = l, \xi_{12} = r, \xi_{21} = m\} = \sum_{k=r}^{n-m} \sum_{i=\max(0,k+l-n)}^{\min(k-r,l-m)} \frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!}$$
$$\times p_{11}^{i} p_{12}^{r} p_{13}^{k-i-r} p_{21}^{m} p_{31}^{l-i-m} (p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i}$$

$$\psi(1,s,z,c) = [a_1 s + a_2 z + a_3 cs + a_4 + a_5 s + a_6]^n$$

$$\psi(1,s,z,c) = \psi(s,z,c) = [n_1 cs + n_2 s + n_3 z + n_4]^n$$

Burada $n_1 = a_3$, $n_2 = a_1 + a_5$, $n_3 = a_2$, $n_4 = a_4 + a_6$ olmaktadır.

4. İKİ DEĞİŞKENLİ BİNOM DAĞILIMININ İKİ DEĞİŞKENLİ POİSSON DAĞILIMINA YAKLAŞIMI

Tek değişkenli durumda, Poisson olasılık fonksiyonu, $n \to \infty$ iken ve $np \to m$ ile binom olasılık fonksiyonunun limiti ile elde edilir. Aynı durum, iki değişkenli binom olasılık fonksiyonunun limitinin iki değişkenli Poisson olasılık fonksiyonunu vermesinde de geçerlidir.

İki değişkenli binom dağılımının tanımından, bir kitledeki her birey A veya $\overline{A}$ aynı zamanda B veya $\overline{B}$ olarak sınıflandırılmaktadır.

A \ B	**B**	**$\overline{B}$**	
A	p_{11}	p_{12}	p_1
$\overline{A}$	p_{21}	p_{22}	q_1
	p_2	q_2	1

n kez örnekleme altında, yerine koyma söz konusu olduğunda, A'nın meydana gelme sayısı x ; B'nin meydana gelme sayısı y olsun.

Bilindiği gibi x ve y ‘nin iki değişkenli olasılık fonksiyonu şöyleydi:

$$p(x,\ y)=\sum_{i=\max(0,\,x+y-n)}^{\min(x,\ y)}\frac{n!}{i!(x-i)!(y-i)!(n-x-y+i)!}p_{11}^{i}\,p_{12}^{x-i}\,p_{21}^{y-i}\,p_{22}^{n-x-y+i}$$

Sabit x ve y için; $n\to\infty$ ve $p_{11},\,p_{12},\,p_{21}\to 0$, $np_{11}\to\overline{m}$, $np_1\to m_1$, $np_2\to m_2$.

$$\lim_{n\to\infty}p(x,y)=\sum_i\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{i!(x-i)!(y-i)!(n-x-y+i)!}p_{11}^{i}p_{12}^{x-i}\,p_{21}^{y-i}\,p_{22}^{n-x-y+i}$$

$$=\sum_i\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{i!(x-i)!(y-i)!(n-x-y+i)!}$$
$$\times\left(\frac{\overline{m}}{n}\right)^{i}\left(\frac{m_1-\overline{m}}{n}\right)^{x-i}\left(\frac{m_2-\overline{m}}{n}\right)^{y-i}\left(1-\frac{m_1+m_2-\overline{m}}{n}\right)^{n-x-y+i}$$

$$=\sum_i\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)...(n-i)...(n-x)...(n-x-y+i+1)}{i!(x-i)!(y-i)!}$$
$$\times\left(\frac{\overline{m}}{n}\right)^{i}\left(\frac{m_1-\overline{m}}{n}\right)^{x-i}\left(\frac{m_2-\overline{m}}{n}\right)^{y-i}\left(1-\frac{m_1+m_2-\overline{m}}{n}\right)^{n-x-y+i}$$

$$=\sum_i\lim_{n\to\infty}\frac{1(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{i}{n})...(1-\frac{x}{n})...(1-\frac{x+y-i-1}{n})}{i!(x-i)!(y-i)!}$$
$$\times(\overline{m})^{i}(m_1-\overline{m})^{x-i}(m_2-\overline{m})^{y-i}\left[1-\frac{m_1+m_2-\overline{m}}{n}\right]^{n-x-y+i}$$

$$= \sum_i \lim_{n\to\infty} \frac{(\overline{m})^i (m_1 - \overline{m})^{x-i} (m_2 - \overline{m})^{y-i} \left[1 - \frac{m_1 + m_2 - \overline{m}}{n}\right]^{n-x-y+i}}{i!(x-i)!(y-i)!}$$

$$= \sum_i \frac{(\overline{m})^i}{i!} \frac{(m_1 - \overline{m})^{x-i}}{(x-i)!} \frac{(m_2 - \overline{m})^{y-i}}{(y-i)!} e^{-(m_1 + m_2 - \overline{m})}$$

$$= e^{-(m_1 + m_2 - \overline{m})} \sum_i \frac{(\overline{m})^i}{i!} \frac{(m_1 - \overline{m})^{x-i}}{(x-i)!} \frac{(m_2 - \overline{m})^{y-i}}{(y-i)!} = p(x,\ y;\ m) \quad (4.1)$$

(Hamdan ve Al-Bayyati (1969))

NOT:

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{m_1 + m_2 - \overline{m}}{n}\right]^{n-x-y+i} = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{m_1 + m_2 - \overline{m}}{n}\right]^{n} \left[1 - \frac{m_1 + m_2 - \overline{m}}{n}\right]^{-x-y+i}$$

$$= e^{-(m_1 + m_2 - \overline{m})}$$

Teorem 4: **($\xi_1, \xi_2, \xi_{12}, \xi_{21}$) Dört Değişkenli Binom Dağılımının Dört Değişkenli Poisson Dağılımına Yaklaşımı**

n kez rasgele örnekleme altında ξ_1, A_1'in meydana gelme sayısını, ξ_2, B_1'in meydana gelme sayısını, ξ_{12}, A_1B_2'nin meydana gelme sayısını ve ξ_{21}, A_2B_1'nin meydana gelme sayısını göstersin.

$P\{\xi_1 = k, \xi_2 = l, \xi_{12} = r, \xi_{21} = m\}$'nin olasılık fonksiyonu (3.7) formülünde olduğu gibi şöyledir.

$P\{\xi_1 = k, \xi_2 = l, \xi_{12} = r, \xi_{21} = m\} =$

$$\sum_{i=\max(k+l-n,0)}^{\min(k-r,l-m)} \frac{n!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!} \times p_{11}^{i}\, p_{12}^{r}\, p_{13}^{k-i-r}\, p_{21}^{m}\, p_{31}^{l-i-m}\, (p_{22}+p_{23}+p_{32}+p_{33})^{n-k-l+i}$$

Burada k, l, r ve m'nin sınırları şu şekildedir:

k= r, r+1,..., n-m

l= m, m+1,..., n-r

r= 0, 1,..., n-m

m= 0, 1,...,n

$n \to \infty$ ve $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{13}, p_{31} \to 0$, $np_{11} \to \lambda_{11}$, $np_{12} \to \lambda_{12}$, $np_{21} \to \lambda_{21}$, $np_1 \to \lambda_1$, $np_2 \to \lambda_2$ olarak yazılır.

Burada $p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13}$ ve $p_2 = p_{11} + p_{21} + p_{31}$ olmaktadır.

Olasılık fonksiyonunda olasılıkların yerine değerleri yazıldığında;

$$\lim_{n\to\infty} p(k,\, l,\, r,\, m) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=\max\{0,\,k+l-n\}}^{\min\{k-r,\,l-m\}} \frac{n(n-1)....(n-k).....(n-k-l+i+1)(n-k-l+i)!}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!(n-k-l+i)!}$$
$$\times(\frac{\lambda_{11}}{n})^{i}(\frac{\lambda_{12}}{n})^{r}(\frac{\lambda_1-\lambda_{11}-\lambda_{12}}{n})^{k-i-r}(\frac{\lambda_{21}}{n})^{m}(\frac{\lambda_2-\lambda_{11}-\lambda_{21}}{n})^{l-i-m}(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_{11}}{n})^{n-k-l+i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=\max\{0,\,k+l-n\}}^{\min\{k-r,\,l-m\}} \frac{n(n-1)....(n-k).....(n-k-l+i+1)}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!}\,\lambda_{11}^{i}\,\lambda_{12}^{r}(\lambda_1-\lambda_{11}-\lambda_{12})^{k-i-r}$$
$$\times\lambda_{21}^{m}\,(\lambda_2-\lambda_{11}-\lambda_{21})^{l-i-m}(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_{11}}{n})^{n-k-l+i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=\max\{0,\,k+l-n\}}^{\min\{k-r,\,l-m\}} \frac{1(1-\frac{1}{n})....(1-\frac{k}{n}).....(1-\frac{k+l-i-1}{n})}{i!r!m!(k-i-r)!(l-i-m)!}\,\lambda_{11}^{i}\,\lambda_{12}^{r}\,(\lambda_1-\lambda_{11}-\lambda_{12})^{k-i-r}$$
$$\times\lambda_{21}^{m}(\lambda_2-\lambda_{11}-\lambda_{21})^{l-i-m}(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_{11}}{n})^{n-k-l+i}$$

$$= \sum_{i}\frac{\lambda_{11}^{i}}{i!}\,\frac{\lambda_{12}^{r}}{r!}\,\frac{\lambda_{21}^{m}}{m!}\,\frac{(\lambda_1-\lambda_{11}-\lambda_{12})^{k-i-r}}{(k-i-r)!}\,\frac{(\lambda_2-\lambda_{11}-\lambda_{21})^{l-i-m}}{(l-i-m)!}\;e^{-(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_{11})}$$

Sonuç olarak;

$$\lim_{n\to\infty} p(k,l,r,m) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_{11})} \sum_i \frac{\lambda_{11}^i}{i!}\frac{\lambda_{12}^r}{r!}\frac{\lambda_{21}^m}{m!}\frac{(\lambda_1-\lambda_{11}-\lambda_{12})^{k-i-r}}{(k-i-r)!} \times \frac{(\lambda_2-\lambda_{11}-\lambda_{21})^{l-i-m}}{(l-i-m)!} \tag{4.2}$$

bulunur.

NOT:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_{11}}{n}\right)^{n-k-l+i} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_{11}}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_{11}}{n}\right)^{-k-l+i} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_{11})}$$

5. UYGULAMALAR

1) A ve B oyuncularının bulunduğu stratejik bir oyunu göz önüne alalım. A oyuncusu, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ stratejilerin

2) den birini kullanırken aynı anda B oyuncusu da $B_1, B_2, \ldots, B_n$ stratejilerinden birini kullanır. "A oyuncusu A_i stratejisini kullanırken B oyuncusunun B_j stratejisini kullanması" olayının olasılığı $P(A_i B_j) = p_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n.$

Eğer A oyuncusu A_i stratejisini B oyuncusunun B_j stratejisine karşı kullanırsa, A oyuncusu a_{ij} birim kazanacak, B oyuncusu da a_{ij} birim kaybedecektir. Oyun n kez tekrarlanırsa, ξ_1, ξ_2, ξ_{11} rasgele değişkenlerinin birleşik dağılımı ile ilgileniriz. Burada ξ_1, A_1 stratejisinin oynandığı durumların sayısını; ξ_2, B_1 stratejisinin oynandığı durumların sayısını; ξ_{11}, A_1 ve B_1 stratejilerinin aynı anda kullanıldığı durumların sayısını göstersin.

ξ_1, ξ_2 ve ξ_{11} rasgele değişkenlerinin birleşik olasılık fonksiyonu şu şekildedir:

$$P\{\xi_1 = k, \xi_2 = l, \xi_{11} = r\} = \frac{n!}{r!(k-r)!(l-r)!(n-k-l+r)!} \Pi_{11}^{r} \, \Pi_{12}^{k-r} \, \Pi_{21}^{l-r} \, \Pi_{22}^{n-k-l+r}$$

Burada $\Pi_{11} = p_{11}$, $\Pi_{12} = \sum_{j=2}^{n} p_{1j}$, $\Pi_{21} = \sum_{i=2}^{n} p_{i1}$, $\Pi_{22} = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} p_{ij}$ olmaktadır.

(Bairamov ve Balakrishnan (2004))

2) $(X_1, Y_1),\ldots,(X_n, Y_n)$, iki değişkenli bir dağılımdan elde edilen bir örneklem olsun. Bu iki değişkenli dağılımın dağılım fonksiyonu $F(x,y)$, marjinal dağılım fonksiyonları da $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ olsun. $\#\{i : X_i \le x\}$ ile x'den küçük olanların sayısı gösterilsin.

$$\xi_1 = \#\{i : X_i \le x\} \qquad \xi_2 = \#\{j : Y_j \le y\} \qquad \xi_{11} = \#\{(i,j) : X_i \le x,\ Y_j \le y\}$$

$$A_1 = \{X \le x\} \qquad A_2 = \{X > x\} \quad , \quad B_1 = \{Y \le y\} \qquad B_2 = \{Y > y\}$$

$$\Pi_{11} = P(A_1B_1) = P\{X \le x,\ Y \le y\} = F(x,y) = \Pi_{11}(x,y)$$
$$\Pi_{12} = P(A_1B_2) = P\{X \le x,\ Y > y\} = F_X(x) - F(x,y) = \Pi_{12}(x,y)$$
$$\Pi_{21} = P(A_2B_1) = P\{X > x,\ Y \le y\} = F_Y(y) - F(x,y) = \Pi_{21}(x,y)$$
$$\Pi_{22} = P(A_2B_2) = P\{X > x,\ Y > y\} = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x,y) = \Pi_{22}(x,y)$$

(ξ_1, ξ_2 ve ξ_{11}) aşanının birleşik olasılık fonksiyonu şöyledir:

$$P\{\xi_1 = k, \xi_2 = l, \xi_{11} = r\} = \frac{n!}{r!(k-r)!(l-r)!(n-k-l+r)!}\Pi_{11}^{r}(x,y)\Pi_{12}^{k-r}(x,y)$$
$$\times \Pi_{21}^{l-r}(x,y)\Pi_{22}^{n-k-l+r}(x,y)$$

k, l = 0,1,…,n ; r = max{0, k+l-n},…,min{k,l}

(Bairamov ve Balakrishnan (2004))

KAYNAKLAR DİZİNİ

AITKEN, A.C. and GONIN, H.T. (1935). On fourfold sampling with and without replacement , *Proc.Roy.Soc.Edinburg,* 55, 114-125.

BAIRAMOV, I. and BALAKRISHNAN, N. (2004). A new class of multivariate distributions with binomial and multinomial marginals, *Mathematics Preprint Archive, Volume 2004, Issues 1, January 2004,* Pages 254-264.

BISWAS, A. and HWANG, J. (2002). A new bivariate binomial distribution, *Statistics&Probability Letters,* 60, 231-240.

CAMPBELL, J.T. (1934). The Poisson correlation function, *Proc. Edinb. Math. Soc.,* 4, 18-26.

CHANDRASEKAR, B. and BALAKRISHNAN, N. (2002). Some properties and a characterization of trivariate and multivariate binomial distributions, *Statistics,* Vol 36(3), pp. 211-218.

HAMDAN, M.A. and AL-BAYYATİ, H.A. (1969). A Note on the Bivariate Poisson Distribution, *The American Statistician,* 23, No.4, 32-33.

HAMDAN, M.A. (1972). Canonical Expansion of the Bivariate Binomial Distribution with Unequal Marginal Indices, *Int. Stat. Rev.,* Vol.40, No.3, pp 277-280.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

HAMDAN, M.A. (1975). A Note on the Trinomial Distribution, *Int. Stat. Rev.,* Vol.43, No.2, pp. 219-220.

HAMDAN, M.A. and JENSEN, D.R. (1976). A bivariate binomial distribution and some applications, *Austral. J. Statist.,* 18, 163-169.

HAMDAN, M.A. and MARTINSON, E.O. (1971). Maximum likelihood estimation in the bivariate Binomial (0,1) distribution: Application to 2×2 tables, *Austral. J. Statist., 13(3), 1971, 154-158.*

HOLGATE, P. (1964). Estimation for the bivariate Poisson distribution, *Biometrika,* 51, 1 and 2 , p.241.

JOHNSON, N.L., KOTZ, S. and BALAKRISHNAN, N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions,* John Wiley & Sons, New York.

KRISHNAMOORTHY, A.S. (1951). Multivariate Poisson and binomial distributions, *Sankhya,* 11, 117-124.

KOCHERLAKOTA, S. (1989). A Note on The Bivariate Binomial Distribution, *Statistics&Probability Letters,* 8, 21-24.

LE, C.T. (1984). A Symmetric Bivariate Binomial Distribution and Its Application to the Analysis of Clustered Samples in Medical Research, *Biom. J.,* 26 (3), 289-294.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

MARSHALL, A.W. and OLKIN, I. (1985). A family of bivariate distributions generated by the bivariate bernoulli distribution, *Journal of the American Statistical Association,* Vol.80, No.390.

MISHRA, A. (1996). A generalized bivariate Binomial Distribution applicable in four-fold sampling, *Commun. Statist.-Theory Meth., 25(8), 1943-1956.*

ONG, S.H. (1992). The Computer Generation of Bivariate Binomial Variables with Given Marginals and Correlation, *Commun. Statist.-Simula.,* 21(2), 285-299.

PAPAGEORGIOU, H. and DAVID, K.M. (1994). On countable mixtures of bivariate binomial distributions, *Biom. J.,* 36, 581-601.

PAPAGEORGIOU, H. and KEMP, C.D. (1988). A method of estimation for some bivariate discrete distributions, *Biom. J., 30(1988)8, 993-1001.*

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında İzmir'de doğan Özge ELMASTAŞ GÜLTEKİN, ilk, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamlamıştır. 1999 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'ne girmeye hak kazanmış ve 2003 yılında bölüm birincisi olarak lisans derecesi almıştır. Eylül 2003'de Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı İstatistik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başlamıştır. Haziran 2004'den bu yana aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.