ÖNSÖZ

Bu çalışma, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışma ile ilgili literatür hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, matris tersleri ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise normlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölüm bu çalışmanın esas kısmını oluşturmaktadır. Dördüncü bölümde ilk olarak Catalan ve Motzkin sayılarıyla tanımlanan Hankel matrislerinin l_p normları için üst sınırlar ve bu matrislerin Hadamard çarpımının Frobenius normu için sınırlar elde edilmiştir. Özel olarak Teorem 4.1.1, Teorem 4.1.2, Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4 tarafımdan oluşturulup ispatlanmıştır. Daha sonra Catalan sayılarına bağlı tanımlanan $A=\left[C_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}\right]_{i,j=1}^{n}$ şeklindeki circulant matrisin Frobenius normu için üst sınır hesaplanmıştır. $A=\left[\binom{n}{\mathrm{mod}(j-i)}\right]_{i,j=1}^{n}$ biçimindeki circulant matrisin spektral normu için alt ve üst sınır elde edilmiş ve bu matrisin grup tersinin normu incelenmiştir. Ayrıca bu matris ile $B=\left[M_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}\right]_{i,j=1}^{n}$ matrisinin Hadamard çarpımının spektral normu hesaplanmıştır. Yine Teorem 4.2.1, Teorem 4.2.2, Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.4 tarafımdan oluşturulup ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde, dördüncü bölümde verilen bazı teoremler için bilgisayar programları ve grafikler verilmiştir.

Bu çalışma, Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA tarafından yönetilmiş ve Selçuk Üniversitesi Araştırma Fonu tarafından 2003/042 nolu proje ile desteklenmiştir. Bu çalışmanın yürütülmesinde yardımcı olan hocam Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA' ya teşekkürlerimi sunarım.

Aynur YALÇINER

SEMBOLLER

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi

λ : A $n \times n$ matrisinin öz değeri

$\sigma(A)$: A matrisinin öz değerlerinden oluşan küme

$\rho(A)$: A matrisinin spektral yarıçapı

A^H : A $m \times n$ matrisinin eşlenik transpozu

$\circ$: Hadamard çarpım

A^{-1}: A $n \times n$ matrisinin tersi

A^+: A matrisinin Moore-Penrose tersi

A^D: A $n \times n$ matrisinin Drazin tersi

$A^\#$: A $n \times n$ matrisinin grup tersi

$A^{\circ(-1)}$: A $m \times n$ matrisinin Hadamard tersi

$\|\cdot\|_1$: A matrisinin sütun normu

$\|\cdot\|_\infty$: A matrisinin satır normu

$\|\cdot\|_p$: A matrisinin ℓ_p normu

$\|\cdot\|_2$: A matrisinin spektral normu

$\|\cdot\|_F$: A matrisinin Frobenius (Euclidean) normu

$\zeta(p)$: Riemann zeta fonksiyonu

C_n : n. Catalan sayısı

M_n : n. Motzkin sayısı

$Ind(A)$: A $n \times n$ matrisinin indeksi

$rank(A)$: A $m \times n$ matrisinin rankı

TABLO VE ŞEKİL LİSTESİ

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Bir matrisi pozitif reel sayıya dönüştürme işlemi olan matris normları matematiğin çeşitli alanlarında önemli bir yer teşkil eder. Örneğin, $Ax = b$ lineer denklem sisteminin çözülebilirliğini karakterize eden $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ şart sayısının hesabında matris normlarına ihtiyaç vardır.

Ayrıca $Ax = b$ lineer denklem sisteminin çözümü A matrisi singüler olmayan kare matris ise $x = bA^{-1}$ şeklindedir. Dolayısıyla "Başka matris tersleri tanımlanabilir mi ? " sorusu gündeme gelmiştir.

M. P. Drazin (1958), halkalar üzerinde Drazin ters olarak bilinen genelleştirilmiş tersin varlığını ve tekliğini göstermiştir.

I. Erdelyi (1967), singüler A ve B matrisleri için

$$Ax = \lambda Bx$$

şeklindeki matris denkleminin çözümünden hareketle yeni bir genelleştirilmiş matris tersi tanımlamış ve bunu grup tersi olarak adlandırmıştır.

C. Cao ve arkadaşları (2004), $(AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#}$ olması için gerekli şartları incelemişlerdir.

Matris çarpımlarından olan Hadamard çarpımı periyodik fonksiyonların konvolüsyonlarının trigonometrik momentlerinde, integral denklemlerinin çekirdeklerinin çarpımında, kısmi diferensiyel denklemlerin zayıf minumum prensiplerinde ve olasılık teorisinde kullanılır.

Aynı boyutlu ve elemanları sıfırdan farklı matrislerin ailesi Hadamard çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. Bu işleme göre matrisin tersi Hadamard tersi olarak bilinir.

R. B. Bapat (1988), A elemanları pozitif olan $n \times n$ tipinde simetrik bir matris ve A' nın bir tane pozitif öz değeri varsa A matrisinin Hadamard tersinin pozitif yarı tanımlı olduğunu göstermiştir.

R. Reams (1999), A elemanları pozitif olan $n \times n$ tipinde simetrik bir matris ise, A' nın bir tane pozitif öz değeri varsa ve A ters çevrilebilir ise A' nın pozitif tanımlı olduğunu göstermiştir.

R. S. Varga (1976), singüler olmayan bir sınıf matris için $\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$ nın üst sınırını incelemiştir.

Y. Wei ve X. Li (2001), A ve E $n\times$n matrisler ve $Ind(A) = Ind(B) = 1$ olmak üzere $\left\|B^{\#}\right\|$, $\left\|BB^{\#}\right\|$, $\dfrac{\left\|B^{\#} - A^{\#}\right\|}{\left\|A^{\#}\right\|}$ ve $\dfrac{\left\|BB^{\#} - AA^{\#}\right\|}{\left\|AA^{\#}\right\|}$ için üst sınırlar elde etmiştir.

Y. Wei ve H. Diao (2005), singüler Toeplitz matrisin grup tersini alt üçgen ve üst üçgen Toeplitz matrislerin çarpımlarının toplamı şeklinde ifade etmişlerdir.

Y. Wei ve arkadaşları (2006), singüler Toeplitz matrisin Drazin tersini alt üçgen ve üst üçgen Toeplitz matrislerin çarpımlarının toplamı şeklinde ifade etmişlerdir.

X. Cui (2004), A matrisinin singüler olması durumunda $\kappa(A) = \|A\|\left\|A^{D}\right\|$ şeklinde tanımlanan şart sayısını incelemiş ve

$$\inf_{\|\cdot\|\in U} \|A\|\left\|A^{D}\right\| = \rho(A)\rho(A^{D})$$

olduğunu göstermiştir.

H. Diao ve Y. Wei (2005), A matrisinin Toeplitz, Hankel ve circulant matrisler olması durumunda singüler lineer yapısal (structured) sistem olarak bilinen $Ax = b$ şeklindeki 1 indeksli sisteminin κ^{struct} şart sayısını incelemişlerdir. Özelikle yapısal olmayan sistemin şart sayısı κ için $\dfrac{\kappa^{struct}}{\kappa}$ oranını hesaplamışlardır. Bu oranın A matrisinin singüler circulant matris olması durumunda

$$\frac{1}{2\sqrt{2\left\|A^{\#}\right\|\|A\|}} \le \frac{\kappa_{A,b}^{circ}(A,x)}{\kappa_{A,b}(A,x)} \le 1,$$

A matrisinin Hankel matrisi olması durumunda

$$\frac{1}{\sqrt{2}\left\|A^{\#}\right\|\|A\|} \le \frac{\kappa_{A,b}^{Hankel}(A,x)}{\kappa_{A,b}(A,x)} \le 1,$$

ve A matrisinin Toeplitz matrisi olması durumunda

$$\frac{1}{\sqrt{2}\left\|A^{\#}\right\|\|A\|} \le \frac{\kappa_{A,b}^{Toep}(A,x)}{\kappa_{A,b}(A,x)} \le 1$$

şeklinde olduğunu yani, yapısal sistemin şart sayısının yapısal olmayan sistemin şart sayısından daha iyi olduğunu belirlemişlerdir.

R. Arens ve M. Goldberg (1994), $W=(w_{ij})$ pozitif elemanlı $n \times n$ matris olmak üzere

$$\|A\|_{W,\infty} = \|W \circ A\|_{\infty}, \quad A=(a_{ij})$$

şeklinde bir norm tanımlamışlardır. Bu norm için

$$\|AB\|_{W,\infty} \leq \|A\|_{W,\infty} \|B\|_{W,\infty}$$

ve

$$\left\|A^k\right\|_{W,\infty} \leq \|A\|_{W,\infty}^k, \; k=1,2,...$$

özeliklerinin sağlanması ile

$$(W^{\circ(-1)})^2 \leq W^{\circ(-1)}$$

olmasının eşdeğer olduğunu göstermişlerdir.

R. Mathias (1993), A matrisinin Hadamard operatör normunu

$$\left\|\|A\|\right\|_{\infty} = \max\{\|A \circ B\|_{\infty} : \|B\| \leq 1\}$$

şeklinde tanımlamıştır. Genelleştirilmiş circulant matrisin Hadamard operatör normunu incelemiştir.

S. Solak (2005), Fibonacci ve Lucas sayılarını kullanarak circulant matrisler tanımlamış ve bu matrislerin spektral ve Euclidean normları için sınırlar elde etmiştir.

R. Donaghey ve L. W. Shapiro (1977), Motzkin sayılarının oluştuğu 14 farklı durumu belirtmiş ve Motzkin sayıları ve Catalan sayıları arasındaki ilişkiyi göstermişlerdir.

M. Aigner (1998), Motzkin sayılarını kullanarak

$$\begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_n \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_n & M_{n+1} & \cdots & M_{2n} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \cdots & M_n \\ M_2 & M_3 & \cdots & M_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_n & M_{n+1} & \cdots & M_{2n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde Hankel matrisleri tanımlamış ve bu matrislerin determinantını hesaplamıştır.

Bu çalışmada ise,

$$D=\begin{bmatrix} C_2 & C_3 & \cdots & C_{n+1} \\ C_3 & C_4 & \cdots & C_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n+1} & C_{n+2} & \cdots & C_{2n} \end{bmatrix}$$

ve

$$N=\begin{bmatrix} M_2 & M_3 & \cdots & M_{n+1} \\ M_3 & M_4 & \cdots & M_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n+1} & M_{n+2} & \cdots & M_{2n} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen Hankel matrislerinin Hadamard terslerinin l_p normlarını hesaplandı.

Daha sonra Catalan sayılarına bağlı tanımlanan circulant matrisin spektral normu için üst sınır elde edildi. Singüler circulant matrisin EP matrisi olduğuna dikkat çekilerek

$$A=\binom{n}{\mathrm{mod}(j-i,n)}_{i,j=1}^{n}$$

şeklindeki circulant matrisin grup tersinin Frobenius normu incelendi ve spektral normu için alt ve üst sınırlar elde edildi. Ayrıca bu matris ile $B=\left[M_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}\right]_{i,j=1}^{n}$ matrisinin Hadamard çarpımının spektral normu hesaplandı.

2. MATRİS TERSLERİ

2.1. Genelleştirilmiş Matris Tersleri

Bilindiği gibi herhangi bir A matrisinin tersinin olması için kare matris olması ve singüler olmayan bir matris olması gerekmektedir. Bu durumda A matrisinin tersi vardır , tektir ve A^{-1} ile gösterilir. Ancak uygulamalı matematiğin çeşitli alanlarında singüler matrislerin ve dikdörtgen matrislerin terslerine de ihtiyaç duyulmaktadır. O halde böyle matrislerin tersleri nasıl hesaplanabilir? Bu tür matrislerin terslerine *genelleştirilmiş ters* denir. Bir matrisin genelleştirilmiş tersi aşağıdaki üç şartı sağlamalıdır:

i) Singüler olmayan matrislerin sınıfından daha geniş matrislerin sınıfı için olmalıdır,

ii) Singüler olmayan matrislerin tersinin sağladığı çeşitli özellikleri sağlamalıdır,

iii) Singüler olmayan matris için alışılmış terse indirgenmelidir.

2.1.1. Moore-Penrose Tersi

Tanım 2.1.1.1. $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ olsun.

$$AXA = A \tag{1}$$

$$XAX = X \tag{2}$$

$$(AX)^H = AX \tag{3}$$

$$(XA)^H = XA \tag{4}$$

denklemlerini sağlayan tek $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ matrisine A matrisinin *Moore-Penrose tersi* denir ve A^+ ile gösterilir. Eğer A singüler olmayan bir matris ise $X = A^{-1}$ dir. (Ben-Israel, Greville 1974)

Bu tanım 1955 yılında Penrose tarafından verilmiştir. Ancak daha önce Moore tarafından başka bir şekilde verildiği için Moore-Penrose tersi olarak bilinir.

Tanım 2.1.1.1 deki dört denkleme *Penrose denklemleri* denir. Bu dört denklemin bazılarını sağlayan genelleştirilmiş tersler de vardır.

Tanım 2.1.1.2. $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ olsun. (1), (2), (3) ve (4) Penrose denklemleri arasında *i.*, *j.* ve *k.* denklemleri sağlayan $G \in C^{n\times m}$ matrisine A matrisinin *(i,j,k)-tersi* denir. (Ben-Israel, Greville 1974)

Örneğin, A matrisi için $AGA = A$ ve $GAG = G$ sağlanıyorsa G matrisi A' nın *(1,2)*-tersidir.

2.1.2. Drazin Tersi

Moore-Penrose tersi ve diğer *(i,j,k)*-terslerin en önemli özelliği bir lineer cebirsel denklem sistemi için bazı tip çözümler sağlamalarıdır. Yani bu tersler "denklem çözen" terslerdir.

Ancak bu tersler bazı gerekli özelliklere sahip değillerdir. Örneğin, bu terslerin $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisleri için

i) $AA^{-} = A^{-}A$,

ii) $(A^{-})^{p} = (A^{p})^{-}, p > 0$

iii) $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda^{+} \in \sigma(A^{-})$

iv) $A^{p+1}A^{-} = A^{p}$

şartlarını sağlayan $A^{-}, B^{-} \in C(i, j, k)$ olacak şekilde bir $C(i, j, k)$ sınıfı yoktur. Uygulama alanlarına bağlı olarak bir genelleştirilmiş tersin cebirsel denklem çözen terslerin özellikleri yerine diğer bazı özelliklere sahip olması istenebilir. Grup ve Drazin tersler hem yukarıdaki özellikleri sağlar hem de singüler olmayan matrisin tersine *(i,j,k)*-terslerden daha çok benzerler.

Not. Drazin tersi sadece kare matrisler için tanımlanabilir.

Tanım 2.1.2.1. $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ olmak üzere

$$R(A) = \{ y \in \mathbb{C}^{m} : y = Ax,\ x \in \mathbb{C}^{n} \}$$

ifadesine *A' nın görüntüsü* ve

$$N(A) = \{ x \in \mathbb{C}^{n} : Ax = 0 \}$$

ifadesine de *A' nın sıfır uzayı* denir.

Lemma 2.1.2.1. A, $\mathbb{C}^n$ üzerinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.

$\mathbb{C}^n = R(A^k) + N(A^k)$ olacak şekilde bir negatif olmayan k tamsayısı vardır.

(Campbell, Meyer 1979)

Burada tanıtılan k sayısı oldukça önemlidir.

Tanım 2.1.2.2. A, $\mathbb{C}^n$ üzerinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.

$\mathbb{C}^n = R(A^k) + N(A^k)$ veya denk olarak $rank(A^k) = rank(A^{k+1})$ olacak şekildeki en küçük negatif olmayan k tamsayısına A nın indeksi denir ve $Ind(A)$ ile gösterilir.

Eğer A ters çevrilebilir bir matris ise $Ind(A) = 0$ dır. Ayrıca $Ind(0) = 1$ dir.

Tanım 2.1.2.3. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve $Ind(A) = k$ olsun.

i) $XAX = X$

ii) $AX = XA$

iii) $A^{k+1}X = A^k$

şartlarını sağlayan tek X matrisine A' nın *Drazin tersi* denir ve A^D ile gösterilir.

Teorem 2.1.2.1. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve $Ind(A) = k > 0$ olsun. C singüler olmayan matris ve N indeksi k olan nilpotent matris olmak üzere

$$A = P\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}P^{-1}$$

olacak şekilde singüler olmayan P matrisi vardır. Ayrıca

$$A^D = P\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

dir. (Campbell, Meyer 1979)

Tanım 2.1.2.4. $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin elemanları aşağıdaki şartları sağlarsa H matrisine *Hermite Eşelon Formda* denir ve kısaca H.E.F. ile gösterilir.

i) H üst üçgen matris,

ii) h_{ii}' ler 0 veya 1' e eşit,

iii) $1 \leq k \leq n$ şeklindeki her k için $h_{ii} = 0$ ise $h_{ik} = 0$,

iv) $h_{ii} = 1$ ise $k \neq i$ için $h_{ki} = 0$ dır.

Singüler bir matrisin Drazin tersi aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

Algoritma 2.1.2.1. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve $Ind(A) = k$ olsun.

1) p, $p \geq k$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. (p her zaman n'e eşit alınabilir.)

2) A^p matrisi H.E.F.' ye indirgenir. (Bu matrisi H_{A^p} ile gösterelim.)

3) H_{A^p} matrisinde sıfırdan farklı köşegen elemanlarının olduğu sütunlar belirlenir ve A^p matrisinde buna karşılık gelen sütunlar seçilir. Bu sütunlara $v_1, v_2, v_3, ..., v_r$ diyelim.

4) $I - H_{A^p}$ matrisi hesaplanır ve sıfırdan farklı sütunlar belirlenir. Bu sütunlara $v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_n$ diyelim.

5) Singüler olmayan $P = [v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n]$ matrisi kurulur.

6) P^{-1} hesaplanır.

7) $P^{-1}AP$ hesaplanır. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ formundadır. Burada C singüler olmayan matris ve N nilpotent matristir.

8) C^{-1} hesaplanır.

9) $A^D = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$ den A^D hesaplanır. (Campbell, Meyer 1979)

Örnek 2.1.2.1. $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini hesaplayalım.

1) A matrisinin indeksini bilmediğimiz için $p=3$ alalım.

$$A^3 = \begin{bmatrix} -64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -64 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) $H_{A^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3) $v_1 = \begin{bmatrix} -64 \\ 0 \\ -64 \end{bmatrix}$

4) $I - H_{A^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dolayısıyla $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

5) $P = \begin{bmatrix} -64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -64 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6) $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7) $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. Böylece $C = -4$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

8) $C^{-1} = -\dfrac{1}{4}$

9) $A^D = P\begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sonuç 2.1.2.1. *A* singüler olmayan bir matris ise $A^D = A^{-1}$ dir. (Ben-Israel, Greville 1974)

Teorem 2.1.2.2. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $Ind(A) = k$ olsun. *p* negatif olmayan bir tamsayı ve $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi $XAX = X$, $AX = XA$ ve $A^{p+1}X = A^p$ şartlarını sağlıyorsa $p \geq k$ ve $X = A^D$ dir. (Campbell, Meyer 1979)

Lemma 2.1.2.2. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için aşağıdakiler doğrudur:

i) $(A^H)^D = (A^D)^H$

ii) $(A^l)^D = (A^D)^l$, $l = 1,2,...$

iii) $((A^D)^D)^D = A^D$ (Ben-Israel, Greville 1974)

Singüler olmayan *A* ve *B* matrisleri için

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

dır. Bu özellik singüler matrisin Drazin tersi için sağlanmaz. Yani

$$(AB)^D \neq B^D A^D$$

dır. Ancak A ve B matrisleri değişmeli ise $(AB)^D = B^D A^D$ olur.

Teorem 2.1.2.3. $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve $AB = BA$ ise

i) $(AB)^D = B^D A^D = A^D B^D$

ii) $A^D B = BA^D$ ve $AB^D = B^D A$

olur. (Campbell, Meyer 1979)

Tanım 2.1.2.5. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve p pozitif tamsayı olsun. $\lambda \in \sigma(A)$ için $(A - \lambda I)^p x = 0$ ve $(A - \lambda I)^{p-1} x \neq 0$ ise x vektörüne λ öz değerine karşılık gelen derecesi p olan *genelleştirilmiş öz vektör* denir. (Bronson,1970)

Bilindiği gibi singüler olmayan bir A matrisi için x' in $\lambda \in \sigma(A)$ öz değerine karşılık gelen derecesi p olan bir genelleştirilmiş öz vektör olması için gerek ve yeter şart x' in A^{-1} matrisi için $\lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$ öz değerine karşılık gelen derecesi p olan bir genelleştirilmiş öz vektör olmasıdır. Bu özellik singüler matrislerin Drazin tersleri için de sağlanır.

Teorem 2.1.2.4. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve $Ind(A) = k$ olsun.

i) $\lambda \in \sigma(A)$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda^{+} \in \sigma(A^D)$ olmasıdır.

ii) x' in A matrisinin $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$ öz değerine karşılık gelen derecesi p olan genelleştirilmiş öz vektör olması için gerek ve yeter şart x' in $\lambda^{-1} \in \sigma(A^D)$ öz değerine karşılık gelen derecesi p olan genelleştirilmiş öz vektör olmasıdır.

iii) x' in $\lambda = 0$ öz değeri için genelleştirilmiş öz vektör olması için gerek ve yeter şart $x \in N(A^k) = N(A^D)$ olmasıdır. (Campbell, Meyer 1979)

A singüler olmayan bir matris ise A^{-1} , A' nın bir polinomu olarak ifade edilebilir. Bu özellik bütün singüler matris tersleri için sağlanmaz. Eğer A kare matris ise $A^{+} = p(A)$ olacak şekilde bir *p(x)* polinomu yoktur. Ancak A' nın Drazin tersi her zaman A' nın bir polinomu olarak ifade edilebilir.

Teorem 2.1.2.5. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ise $A^D = p(A)$ olacak şekilde bir $p(x)$ polinomu vardır. (Campbell, Meyer 1979)

İspat. P ve C singüler olmayan matrisler ve N indeksi k olan nilpotent matris olmak üzere $A = P\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}P^{-1}$ yazılabilir. C singüler olmayan bir matris olduğundan $C^{-1} = q(C)$ olacak şekilde bir *q(x)* polinomu vardır. Campbell ve Meyer (1979)' ye göre *p(x)* polinomu $p(x) = x^k[q(x)]^{k+1}$ şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} p(A) = A^k[q(A)]^{k+1} &= P\begin{bmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q(C) & 0 \\ 0 & q(N) \end{bmatrix}^{k+1} P^{-1} \\ &= P\begin{bmatrix} C^k[q(C)]^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = A^D \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır. (Campbell, Meyer 1979) ■

Aşağıdaki teorem $p(A) = A^D$ olacak şekildeki *p(x)* polinomunun nasıl kurulacağını gösterir.

Teorem 2.1.2.6. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olsun. $\lambda_0 = 0$ olmak üzere $\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_t\}$ -ler A matrisinin farklı öz değerlerini göstersin. m_i, λ_i özdeğerinin cebirsel katı ve $m = n - m_0 = m_1 + m_2 + ... + m_t$ olsun. $p(x) = x^{m_0}(\alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{m-1}x^{m-1})$ derecesi *n-1* ve katsayıları

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_i} &= p(\lambda_i), \\ -\frac{1}{\lambda_i^2} &= p'(\lambda_i), \\ &\vdots \\ \frac{(-1)^{m_i-1}(m_i-1)!}{\lambda_i^{m_i}} &= p^{(m_i-1)}(\lambda_i).\ (i = 1,2,...,t) \end{aligned}$$

$m \times m$ lineer denklem sisteminin tek çözümü olan polinom olsun. O zaman $p(A) = A^D$ dır. (Campbell, Meyer 1979)

İspat. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi Jordan formuna benzer olduğundan Campbell ve Meyer (1979) göstermiştir ki $J = diag[B_1, ..., B_h]$ ve $N = diag[F_1, ..., F_g]$ blok köşegen matrisler olmak üzere $A=T\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}T^{-1}$ yazılabilir. Her bir B_j , sıfırdan farklı bir öz değere karşılık gelen Jordan bloktur. Yani

$$B_j=\begin{bmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_l & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_l \end{bmatrix}_{s\times s}, \lambda_l \neq 0 \tag{2.1}$$

şeklindedir. Her bir F_j de sıfır öz değerine karşılık gelen Jordan bloktur. Açık olarak J singüler olmayan ve $N\in\mathbb{C}^{m_0\times m_0}$ indeksi $k=Ind(A)\le m_0$ olan nilpotent matristir. Böylece $A^D=T\begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T^{-1}$ dir. $N^{m_0}=0$ olduğundan $p(N)=0$ dır ve $p(A)=T\begin{bmatrix} p(J) & 0 \\ 0 & p(N) \end{bmatrix}T^{-1}=T\begin{bmatrix} p(J) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T^{-1}$ dir. Campbell ve Meyer (1979)' e göre $p(J)=diag[p(B_1),...,p(B_h)]$ olduğundan her j için $p(B_j)=B_j^{-1}$ olduğunu göstermek yeterlidir. (2.1) kullanılarak

$$p(B_j)=\begin{bmatrix} p(\lambda_l) & \frac{p'(\lambda_l)}{1!} & \frac{p''(\lambda_l)}{2!} & \dots & \frac{p^{(s-1)}(\lambda_l)}{(s-1)!} \\ 0 & p(\lambda_l) & \frac{p'(\lambda_l)}{1!} & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & \frac{p''(\lambda_l)}{2!} \\ \vdots & & & & \frac{p'(\lambda_l)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p(\lambda_l) \end{bmatrix}_{s\times s}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_l} & -\frac{1}{\lambda_l^2} & \frac{1}{\lambda_l^3} & \dots & \frac{(-1)^{s-1}}{\lambda_l^s} \\ 0 & \frac{1}{\lambda_l} & -\frac{1}{\lambda_l^2} & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & -\frac{1}{\lambda_l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_l} \end{bmatrix}=B_j^{-1}.$$

Böylece $p(A)=A^D$ olur. (Campbell, Meyer 1979) ■

Teorem 2.1.2.6 A^D'nin hesaplanmasında kullanılır.

Örnek 2.1.2.2. Teorem 2.1.2.6 kullanarak $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin

tersini hesaplayalım.

A' nın öz değerleri $\sigma(A) = \{0,0,1,1\}$ dir. Böylece $m_0 = 2$ ve $m_1 = 2$ olur.

Teorem 2.1.2.6 dan $p(x) = x^2(\alpha_0 + \alpha_1 x)$ ve $A^D = A^2(\alpha_0 I + \alpha_1 A)$ elde edilir. Burada α_0 ve α_1

$$\begin{aligned} 1 &= p(1) = \alpha_0 + \alpha_1 \\ -1 &= p'(1) = 2\alpha_0 + 3\alpha_1 \end{aligned}$$

sisteminin çözümünden $\alpha_0 = 4$ ve $\alpha_1 = -3$ olarak bulunur. Böylece

$$A^D = A^2(4I - 3A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

olur.

Her $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin iki tane önemli polinomu vardır. Bunlar minimal polinom ve karakteristik polinomdur. Önce A matrisinin minimal polinomu olan

$$m(x) = x^d + \alpha_{d-1}x^{d-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

polinomunu göz önüne alalım. A singüler olmayan matris olması için gerek ve yeter şart $\alpha_0 \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}(A^{d-1} + \alpha_{d-1}A^{d-2} + \ldots + \alpha_2 A + \alpha_1 I)$$

olur. A matrisinin singüler olduğunu farz edelim. A singüler ise $\alpha_0 = 0$ dır. $0 = \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{i-1}$ ve $\alpha_i \neq 0$ olacak şekilde en küçük doğal sayıya i diyelim. Bu i sayısına, sıfır öz değerinin indeksi denir. Aşağıdaki teorem göstermektedir ki A matrisinin sıfır öz değerinin indeksi ile A'nın indeksi aynıdır.

Teorem 2.1.2.7. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $\alpha_i \neq 0$ olmak üzere $m(x) = x^d + \alpha_{d-1}x^{d-1} + \ldots + \alpha_i x^i$, A' nın minimal polinomu olsun. Bu durumda $i = Ind(A)$ dır. (Campbell, Meyer 1979)

İspat. C singüler olmayan matris ve N indeksi k olan nilpotent matris olmak üzere $A = P\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}P^{-1}$ yazılabilir. $m(A) = 0$ olduğundan, Campbell ve Meyer (1979)' e göre,

$$
\begin{aligned}
0 = m(N) &= N^d + \alpha_{d-1}N^{d-1} + \ldots + \alpha_{i+1}N^{i+1} + \alpha_i N^i \\
&= (N^{d-i} + \alpha_{d-1}N^{d-i-1} + \ldots + \alpha_i I)N^i
\end{aligned}
$$

olur. $(N^{d-i} + \alpha_{d-1}N^{d-i-1} + \ldots + \alpha_i I)$ ters çevrilebilir olduğundan $N^i = 0$ ve dolayısıyla $i \geq k$ elde edilir. $i > k$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$A^D A^i = A^{i-1}$$

olur. $m(x) = x^i q(x)$ şeklinde yazarsak

$$0 = m(A) = A^i q(A)$$

ve eşitliğin her iki tarafını soldan A^D ile çarparsak

$$0 = A^{i-1} q(A)$$

elde edilir. Böylece $r(x) = x^{i-1}q(x)$ polinomu $der[r(x)] < der[m(x)]$ ve $r(A) = 0$ olan bir polinomdur. Bu da *m(x)*' in minimal polinom olmasıyla çelişir. O halde *k*=*i* dir. (Campbell, Meyer 1979) ■

Sonuç 2.1.2.2. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $Ind(A) = k$ olsun ve m_0, sıfır özdeğerinin cebirsel katını göstersin. Her zaman $m_0 \geq k$ dır. (Campbell, Meyer 1979)

A^D, *A* matrisinin karakteristik polinomuna bağlı olarak da ifade edilebilir.

Teorem 2.1.2.8. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $Ind(A) = k$ olsun. *A* matrisinin karakteristik denklemini

$$0 = x^{m_0}(x^{n-m_0} + \beta_{n-1}x^{n-1-m_0} + \ldots + \beta_{m_0+1}x + \beta_{m_0}) = x^{m_0}q(x), \quad (\beta_{m_0} \neq 0)$$

şeklinde yazalım ve

$$r(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\beta_{m_0}}(x^{n-m_0-1}+\beta_{n-1}x^{n-m_0-2}+\ldots+\beta_{m_0+1}), & m_0<n\\ 0, & m_0=n\end{cases}$$

olsun. O zaman her $l \geq k$ için $A^D = A^l[r(A)]^{l+1}$ dir. (Campbell, Meyer 1979)

İspat. $m_0 = n$ ise A matrisi nilpotent matris ve dolayısıyla $A^D = 0$ dır. $m_0 < n$ durumunu inceleyelim. Campbell ve Meyer (1979)' e göre

$$0 = A^{m_0}q(A)$$

eşitliğinin her iki tarafı soldan $(A^D)^{m_0+1}$ ile çarpılırsa

$$0 = A^D q(A)$$

ve buradan da

$$A^D = AA^D r(A)$$

elde edilir. Her iki tarafın *(l+1)*-inci kuvveti alınırsa

$$(A^D)^{l+1} = AA^D[r(A)]^{l+1}$$

ve her iki taraf soldan A^l ile çarpılırsa

$$A^D = A^l[r(A)]^{l+1}$$

elde edilir. (Campbell, Meyer 1979) ■

Bir matrisin indeksi, matrisin boyutundan ve m_0 sıfır öz değerinin cebirsel katından fazla olamayacağı için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.2.3. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ için $A^D = A^n[r(A)]^{n+1} = A^{m_0}[r(A)]^{m_0+1}$ dir. (Campbell, Meyer 1979)

Teorem 2.1.2.9. *A* ve *C* kare matrisler, $Ind(A) = k$ ve $Ind(C) = l$ ve

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$M^D = \begin{bmatrix} A^D & X \\ 0 & C^D \end{bmatrix}$$

dir ve burada

$$X = (A^D)^2\left[\sum_{i=0}^{l-1}(A^D)^i BC^i\right](I - CC^D) + (I - AA^D)\left[\sum_{i=0}^{k-1}A^i B(C^D)^i\right](C^D)^2 - A^D BC^D$$

şeklindedir. (Campbell, Meyer 1979)

Sonuç 2.1.2.4. A kare matris ve

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{bmatrix},\ M_1 = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

şeklindeki kare matrisler için

$$M_1^D = \begin{bmatrix} A^D & (A^D)^2 B \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_2^D = \begin{bmatrix} A^D & 0 \\ B(A^D)^2 & 0 \end{bmatrix},\ M_3^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (A^D)^2 B & A^D \end{bmatrix},$$

$$M_4^D = \begin{bmatrix} 0 & B(A^D)^2 \\ 0 & A^D \end{bmatrix}$$

olur. (Campbell, Meyer 1979)

2.1.3. Grup Tersi

Grup tersi, Drazin tersin özel bir hali olmakla beraber önemli uygulamaları vardır. Grup tersi adı I. Erdelyi tarafından verilmiştir. Çünkü verilen bir A matrisinin pozitif ve negatif kuvvetleri birimi $AA^{\#}$ olan bir değişmeli gruptur. (Erdelyi, 1967) Drazin tersi her kare matris için vardır ancak grup tersi sadece indeksi 1 olan matrisler için vardır.

Tanım 2.1.3.1. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $Ind(A) = 1$ ise A matrisinin Drazin tersine *grup tersi* denir ve $A^{\#}$ ile gösterilir. Yani, $A^{\#}$

i) $A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}$

ii) $AA^{\#} = A^{\#}A$

iii) $AA^{\#}A = A$

denklemlerini sağlayan tek matristir. Tekliği de aşağıdaki gibi gösterilebilir:

A matrisinin X ve Y gibi iki tane tersi olduğunu kabul edelim.

$AX = XA = E$ ve $AY = YA = F$ diyelim. Bu durumda

$$E = AX = AYAX = FE$$

$$F = YA = YAXA = FE$$

yazılabilir. Yani $E = F$ dir. Böylece

$$X = XAX = EX = FX = YAX = YE = YF = YAY = Y$$

olur. (Ben-Israel, Greville 1974)

Teorem 2.1.2.1' in özel hali aşağıdaki gibidir:

Sonuç 2.1.3.1. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ için $A^{\#}$ olması için gerek ve yeter şart

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

olacak şekilde singüler olmayan P ve C matrislerinin olmasıdır. (Campbell, Meyer 1979)

Sonuç 2.1.3.2. A singüler olmayan bir matris ise $A^{\#} = A^{-1}$ dir. (Ben-Israel, Greville 1974)

Lemma 2.1.3.1. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ için aşağıdakiler doğrudur:

i) $(A^{\#})^{\#} = A$

ii) $(A^{H})^{\#} = (A^{\#})^{H}$

iii) $(A^{l})^{\#} = (A^{\#})^{l}$, $l = 1,2,...$ (Ben-Israel, Greville 1974)

Tanım 2.1.3.2. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve $rank(A) = r$ olsun. Eğer $A^{+}A = AA^{+}$ oluyorsa A matrisine *EP matrisi* denir.

Teorem 2.1.3.1. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olsun. $A^{D} = A^{\#} = A^{+}$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin EP matrisi olmasıdır. (Campbell, Meyer 1979)

İspat. A, EP matrisi ise $A^{+}A = AA^{+}$ dir. A^{+} her zaman A matrisinin (1,2)-tersi oluğundan $A^{+} = A^{\#} = A^{D}$ olur. Tersine $A^{+} = A^{\#}$ olsun. $AA^{+} = AA^{\#} = A^{\#}A = A^{+}A$ olur. Yani A matrisi EP matrisidir. (Campbell, Meyer 1979) ■

EP matrislerinin en önemli örneklerinden biri circulant matrislerdir.

Tanım 2.1.3.3. $i = 1,2,...,n$ için $c_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$C = circ(c_0, c_1, ..., c_{n-1}) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_{n-2} \\ & & \\ c_1 & c_2 & c_0 \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrise *circulant matris* denir. Bir circulant matris ilk satırın (veya sütun) elemanları ile temsil edilir. Diğer satırlar ilk satır ile aynı elemanlara sahiptir ancak her bir satırın elemanları bir önceki satırdan bir adım sağa kaymıştır. Circulant matrisler denk olarak

$$j - i \equiv k \pmod{n}$$

olmak üzere

$$C = [c_{ij}] = [c_k]$$

şeklinde de tanımlanabilir. (Davis, 1979)

Tanım 2.1.3.4. $n \geq 1$ sabit bir tamsayı ve

$$w = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

olsun.

$$F^H = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[w^{(i-1)(j-1)}\right]_{i,j=1}^{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrise *Fourier matrisi* denir ve Fourier matrisi üniterdir.

Teorem 2.1.3.2. C circulant matris ve $i = 0,1,...,n-1$ için $\lambda_i - ler$ C matrisinin öz değerleri olsun. Λ, C matrisinin öz değerlerinden oluşan köşegen matris, yani

$$\Lambda = diag(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$$

olmak üzere

$$C = F^H \Lambda F$$

dir. (Davis, 1979)

λ -lar skalerler olmak üzere

$$\begin{cases} \lambda^+ = 1/\lambda, & \lambda \neq 0 \\ \lambda^+ = 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

ve $\Lambda = diag(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$ için,

$$\Lambda^+ = diag(\lambda_0^+, \lambda_1^+, ..., \lambda_{n-1}^+)$$

şeklindedir. Ayrıca C matrisinin öz değerleri

$$\lambda_j(C) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w^{-jk}, \quad j = 0,1,...,n-1$$

şeklindedir. (Davis, 1979)

Teorem 2.1.3.3. *C* circulant matris ve $C = F^H \Lambda F$ olmak üzere *C* matrisinin Moore-Penrose tersi

$$C^+ = F^H \Lambda^+ F$$

şeklindedir. (Davis, 1979)

Sonuç 2.1.3.3. Circulant matrisler EP matrisidir.

İspat. *C* circulant matris olmak üzere

$$CC^+ = (F^H \Lambda F)(F^H \Lambda^+ F) = F^H \Lambda\Lambda^+ F$$

ve

$$C^+ C = (F^H \Lambda^+ F)(F^H \Lambda F) = F^H \Lambda^+ \Lambda F$$

şeklindedir. Λ köşegen matris olduğundan

$$\Lambda\Lambda^+ = \Lambda^+ \Lambda$$

ve sonuç olarak

$$CC^+ = C^+ C$$

elde edilir. ■

C singüler circulant matris ise indeksi 1' dir. (Diao, Wei 2005)

Gerçekten; $C = F^H \Lambda F$ ve $C^2 = F^H \Lambda^2 F$ şeklindedir. F^H ve F matrisleri singüler olmayan matrisler olduğu için

$$rank(C) = rank(F^H \Lambda F) = rank(\Lambda)$$

ve

$$rank(C^2) = rank(F^H \Lambda^2 F) = rank(\Lambda^2)$$

olur. Λ köşegen matris olduğundan $rank(\Lambda) = rank(\Lambda^2)$ ve sonuç olarak $rank(C) = rank(C^2)$ elde edilir. İndeks tanımından *C* matrisinin indeksi 1 olur.

Yani, singüler circulant *C* matrisi için $C^+ = C^\#$ dır.

Sonuç 2.1.3.4. $C^\#$ matrisi normal matristir.

İspat.

$$
\begin{aligned}
C^{\#}(C^{\#})^{H} &= (F^{H}\Lambda^{+}F)(F^{H}\Lambda^{+}F)^{H} \\
&= F^{H}\Lambda^{+}(\Lambda^{+})^{H}F = F^{H}(\Lambda^{+})^{H}\Lambda^{+}F \\
&= (F^{H}\Lambda^{+}F)^{H}(F^{H}\Lambda^{+}F) \\
&= (C^{\#})^{H}C^{\#}
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

2.2. Hadamard Tersi

Aynı boyutlu ancak kare olmayan herhangi A ve B matrisleri için alışılmış matris çarpımı AB tanımlanamaz. Ancak bu matrisler için Hadamard çarpımı $A \circ B$ tanımlanabilir. Alışılmış matris çarpımı gibi Hadamard çarpımı da birleşme ve toplama üzerine dağılma özelliğine sahiptir. Hadamard çarpımına göre birim eleman matrisi bütün elemanları 1 olan matristir ve bu matris J ile gösterilir. Hadamard çarpımına göre matrisin ters elemanı Hadamard tersi olarak bilinir. Matrislerin Hadamard ters çevrilebilir olması için elemanlarının sıfırdan farklı olması gerekir. Hadamard çarpımının alışılmış matris çarpımından en önemli farkı değişmeli olmasıdır. (Horn, 1990)

Hadamard çarpımı geniş bir uygulama alanına sahiptir. Periyodik fonksiyonların konvolüsyonlarının trigonometrik momentleri, integral denklemlerinin çekirdeklerinin çarpımı, kısmi diferensiyel denklemlerin zayıf minumum prensipleri ve olasılık teorisindeki karakteristik fonksiyonlar bunlara örnek verilebilir. (Horn, Johnson, 1991)

Tanım 2.2.1. $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ve $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrisleri için

$$A \circ B = [a_{ij}b_{ij}]$$

şeklinde tanımlanan çarpıma A ve B matrislerinin *Hadamard çarpımı* denir.

Teorem 2.2.1. (Schur Çarpım Teoremi) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pozitif yarı tanımlı matrisler ise $A \circ B$ de pozitif yarı tanımlıdır.

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi pozitif yarı tanımlı ise Schur teoremi

$$A \circ A = \left[(a_{ij})^{2}\right]$$

Hadamard çarpımının ve

$$A \circ (A \circ A) = \left[(a_{ij})^3\right]$$

çarpımının ve dolayısıyla, $k = 1,2,...$ için,

$$A^{\circ k} = \left[(a_{ij})^k\right]$$

şeklindeki A matrisinin bütün pozitif tamsayı kuvvetlerinin pozitif yarı tanımlı olmasını garanti eder. (Horn, 1990)

Tanım 2.2.2. $a_{ij} \neq 0$ olmak üzere $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisi verilsin.

$$A^{\circ(-1)} = \left[\frac{1}{a_{ij}}\right]$$

şeklinde tanımlanan matrise A matrisinin *Hadamard tersi* denir. (Horn, 1990)

Bir matrisin Hadamard ters çevrilebilir olması için elemanlarının sıfırdan farklı olması gerekir. Ancak matrisin elemanları içinde sıfır bulunması durumunda tanımı aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz.

Tanım 2.2.3. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ verilsin.

$$A^{\circ(-1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{ij}}, & a_{ij} \neq 0 \\ 0, & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matrise A' nın genelleştirilmiş Hadamard tersi denir.

Teorem 2.2.2. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi pozitif elemanlı, bir tane pozitif öz değere sahip simetrik matris olsun. Bu durumda $A^{\circ(-1)}$ pozitif yarı tanımlıdır. (Bapat, 1988)

Teorem 2.2.3. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi pozitif elemanlı, bir tane pozitif öz değere sahip simetrik matris olsun. Eğer A matrisi ters çevrilebilir ise $A^{\circ(-1)}$ pozitif tanımlıdır. (Reams, 1999)

Lemma 2.2.1. $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olsun. $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ köşegen matrisler olmak üzere

$$D(A \circ B)E = (DAE) \circ B = (DA) \circ (BE) = (AE) \circ (DB) = A \circ (DBE)$$

dır. (Horn, Johnson, 1991)

Tanım 2.2.4. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singüler olmayan matris olmak üzere

$$\Phi(A) \equiv A \circ A^{-1}$$

ve

$$\Phi_T(A) \equiv A \circ (A^{-1})^T$$

ile gösterilir. (Horn, Johnson, 1991)

Lemma 2.2.2. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singüler olmayan matris ve $D, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singüler olmayan köşegen matrisler olmak üzere

i) $\Phi_T(DAE) = \Phi_T(A)$

ii) $\Phi(DAE) = (D^{-1}E)^{-1}\Phi(A)(D^{-1}E)$

olur. (Horn, Johnson, 1991)

A singüler matris ve $Ind(A) = 1$ olsun. Tanım 2.2.4.' deki $\Phi(A)$ ve $\Phi_T(A)$ ifadelerini bu *A* matrisi için yazarsak

$$\Phi^g(A) \equiv A \circ A^{\#}$$

$$\Phi_T^g(A) \equiv A \circ (A^{\#})^T$$

olur. $\Phi^g(A)$ ve $\Phi_T^g(A)$ için Lemma 2.2.2 sağlanmaz, ancak *A* matrisi circulant matris ise aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 2.2.3. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singüler circulant matris ve $D, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ skaler matrisler olmak üzere

i) $\Phi_T^g(DAE) = \Phi_T^g(A)$

ii) $\Phi^g(DAE) = (D^{-1}E)^{-1}\Phi^g(A)(D^{-1}E)$

olur.

İspat.

i) *D* ve *E* singüler olmayan matrisler olduğu için $rank(DAE) = rank(A)$ dır.

Tanımdan

$$\Phi_T^g(DAE) = (DAE) \circ ((DAE)^{\#})^T \tag{2.2}$$

yazılır. *D*, *E* ve *A* matrisleri circulant matris olduğu için

$$(DAE)^{\#} = E^{\#}A^{\#}D^{\#}$$

E ve *D* singüler olmayan matrisler olduğu için $E^{\#} = E^{-1}$ ve $D^{\#} = D^{-1}$ dir. (2.2) denklemi tekrar düzenlenir ve Lemma 2.2.1 göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\Phi_T^g(DAE) &= (DAE)\circ((D^{-1})(A^{\#})^T(E^{-1})) \\
&= (DA)\circ(D^{-1}(A^{\#})^T) \\
&= A\circ(A^{\#})^T = \Phi_T^g(A)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

ii) $\Phi^g(DAE)$ nin tanımı ve Lemma 2.2.1 kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\Phi^g(DAE) &= (DAE)\circ(DAE)^{\#} \\
&= (DAE)\circ(E^{-1}A^{\#}D^{-1}) \\
&= (E^{-1}DAE)\circ(A^{\#}D^{-1}) \\
&= ((D^{-1}E)^{-1}AE)\circ(A^{\#}D^{-1}) \\
&= ((D^{-1}E)^{-1}A)\circ(A^{\#}D^{-1}E) \\
&= (D^{-1}E)^{-1}(A\circ A^{\#})(D^{-1}E) \\
&= (D^{-1}E)^{-1}\Phi^g(A)(D^{-1}E)
\end{aligned}
$$

olur. ■

3. NORMLAR

3.1. Vektör Normları

Tanım 3.1.1. $(V,+)$ değişmeli bir grup ve $(F,+,\cdot)$ bir cisim olsun. Her $a,b\in F$ ve her $u,v\in V$ için,

i) $au\in V$,

ii) $a(bu)=(ab)u$,

iii) $(a+b)u=au+bu$,

iv) $a(u+v)=au+av$,

v) $1u=u$ (1, F cisminin birim elemanıdır.)

aksiyomları sağlanırsa V kümesine F cismi üzerinde bir *vektör uzayı* (veya lineer uzay) denir.

Tanım 3.1.2. V, F cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olmak üzere

$$\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}^+$$

dönüşümü her $u,v\in V$ ve $\alpha\in F$ için

i) $\|u\|\geq 0$ ve $\|u\|=0\Leftrightarrow u=0$,

ii) $\|\alpha u\|=\alpha\|u\|$,

iii) $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$

aksiyomlarını sağlarsa bu dönüşüme *norm*, V uzayına da *normlu uzay* denir.

3.2. Matris Normları

Tanım 3.2.1. $M_n(F)$ elemanları F cisminden alınan $n\times n$ matrislerin kümesini göstermek üzere

$$\|\cdot\|:M_n(F)\to\mathbb{R}^+$$

dönüşümü her $A,B\in M_n(F)$ ve her $\alpha\in F$ için,

i) $\|A\|\geq 0$ ve $\|A\|=0\Leftrightarrow A=0$,

ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$,

iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

aksiyomlarını sağlarsa bu dönüşüme *matris normu* denir. Matris normu $A \in M_n(F)$ için $\|A\|$ ile gösterilir. Eğer sadece **i)**, **ii)** ve **iii)** aksiyomları sağlanırsa bu norma genelleştirilmiş matris normu denir.

Yukarıdaki norm aksiyomlarını sağlayan bazı matris normları şu şekilde verilebilir:

A, $n \times n$ matris olmak üzere

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

ifadesine A matrisinin *sütun normu*,

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

ifadesine A matrisinin *satır normu*,

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{iz(A^H A)}$$

ifadesine A matrisinin *Frobenius* (*Euclidean veya Schur veya* ℓ_2) *normu*,

$$\|A\|_2 = max\{ \sqrt{|\lambda|} : \lambda ,\ A^H A \text{' nın öz değeri}\}$$

ifadesine A matrisinin *spektral normu*,

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

ifadesine A matrisinin ℓ_p *normu* denir.

Herhangi bir $\|\cdot\|$ matris normu için eğer A ters çevrilebilir bir matris ise $AA^{-1} = 1$ olacağından

$$\|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\|$$

olur ve

$$\left\|A^{-1}\right\| \geq \frac{\|I\|}{\|A\|}$$

şeklinde A^{-1} için alt sınır elde edilir.

Tanım 3.2.2. A matrisinin mutlak değerce en büyük öz değerine A' nın *spektral yarıçapı* denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.1. Herhangi bir $\|\cdot\|$ matris normu için

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

eşitsizliği sağlanır.(Noble, 1969)

Teorem 3.2.2. $\|A\| < 1$ ve $\|I\| = 1$ ise $I + A$ singüler olmayan matristir ve

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \left\|(I+A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

sağlanır. (Noble, 1969)

İspat λ_i'ler A matrisinin öz değerleri olmak üzere Teorem 3.2.1' den $|\lambda_i| < 1$ dir. Noble (1969)' a göre $I + A$'nin öz değerleri $1+\lambda_i$'ler olduğundan $I + A$ öz değerleri sıfırdan farklı ve dolayısıyla $I + A$ ters çevrilebilir bir matristir.

$$(I+A)(I+A)^{-1} = I \tag{3.1}$$

ve

$$\|I\| = 1$$

olduğundan

$$1 \leq \|I+A\|\left\|(I+A)^{-1}\right\| \leq \left(1+\|A\|\right)\left\|(I+A)^{-1}\right\| \tag{3.2}$$

elde edilir. Ayrıca yine Noble (1969)' a göre (3.1) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$(I+A)^{-1} = I - A(I+A)^{-1}$$

ve

$$\left\|(I+A)^{-1}\right\| \leq 1 + \left\|A(I+A)^{-1}\right\| \leq 1 + \|A\|\left\|(I+A)^{-1}\right\| \tag{3.3}$$

olur ve (3.2) ve (3.3) den ispat tamamlanır. (Noble, 1969) ■

Tanım 3.2.3. Herhangi bir $A \in M_n$ matrisi ve $U, V \in M_n$ üniter matrisleri için

$$\|UAV\| = \|A\|$$

ise bu norma *üniter invaryant matris normu* denir.

$\|UAV\|_F = \|A_F\|$ ve $\|UAV\|_2 = \|A\|_2$ dir. Yani Frobenius normu ve spektral norm üniter invaryant matris normlarıdır. (Horn, Johnson 1985)

Teorem 3.2.3. Herhangi bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi için $\|A\|_F^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$ dır ve

$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin normal olmasıdır.

(Horn, Johnson 1985)

Lemma 3.2.1. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $rank(A) = r$ ve $Ind(A) = 1$ olsun. Bu durumda

$$\|AA^{\#}\| = \|I - AA^{\#}\|$$

olur. (Wei, 1999)

İspat. Wei (1999), göstermiştir ki A matrisinin Schur parçalanışından Q üniter matris, B köşegen elemanları sıfırdan farklı bir matris ve C köşegen elemanları sıfır olan bir matris olmak üzere

$$A = Q\begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix} Q^H$$

yazılabilir. $rank(A) = rank(A^2)$ olduğundan $C = 0$ elde edilir. Sonuç 2.1.2.4'den

$$A^{\#} = Q\begin{bmatrix} B^{-1} & (B^{-1})^2 D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^H$$

olur. Buradan

$$AA^{\#} = Q\begin{bmatrix} I_r & B^{-1}D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^H$$

ve

$$I - AA^{\#} = Q\begin{bmatrix} 0 & -B^{-1}D \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} Q^H$$

elde edilir ve sonuçta

$$\|AA^{\#}\| = \|I - AA^{\#}\|$$

olur. (Wei, 1999) ■

Tanım 3.2.4. A, $m \times n$ matris olsun.

$$r_i(A)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2},\ i=1,2,\ldots,m$$

ifadesine A matrisinin *Euclidean satır uzunluğu* ve

$$c_j(A)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^2},\ j=1,2,\ldots n$$

ifadesine de A matrisinin *Euclidean sütun uzunluğu* denir. (Horn, Johnson 1991)

Teorem 3.2.4. A, B ve C $m\times n$ matrisler ve $A=B\circ C$ olsun. $r_1(B)=\max_i\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2}$ ve $c_1(C)=\max_j\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|c_{ij}\right|^2}$ olmak üzere

$$\left\|A\right\|_2\leq r_1(B)c_1(C)$$

dir. (Mathias, 1990)

4. MATRİSLERİN TERSLERİNİN NORMLARI

Bu bölümde Catalan ve Motzkin sayılarından faydalanılarak tanımlanan matrislerin normları incelendi.

Catalan sayıları bir tamsayı dizisidir ve Euler'in çokgen bölme problemi olarak bilinen "n-kenarlı bir düzgün çokgen kaç tane farklı *n-2* tane üçgene bölünebilir?" sorusunun cevabıdır. Bir Catalan sayısı

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

şeklinde formüle edilir. Böylece ilk sayılar

n	0	1	2	3	4	5	6	…
C_n	1	1	2	5	14	42	132	…

şeklindedir.

Tanım 4.1. Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklinde seri açılımında $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ katsayıları bir sayı dizisi veriyorsa $f(x)$ fonksiyonuna *üretici fonksiyon* (generating function) denir. $f(x)$ üretici fonksiyonu bazen de enumerate olarak adlandırılır.

Aşağıdaki tabloda üretici fonksiyonlara örnekler görülmektedir:

n^p	$f(x)$	$seri$
1	$\dfrac{x}{1-x}$	$x+x^2+x^3$
n	$\dfrac{x}{(1-x)^2}$	$x+2x^2+3x^3+4x^4$
n^2	$\dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}$	$x+4x^2+9x^3+16x^4$
n^3	$\dfrac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$	$x+8x^2+27x^3$
n^4	$\dfrac{x(x+1)(x^2+10x+1)}{(1-x)^5}$	$x+16x^2+81x^3$

(http://mathworld.wolfram.com)

Catalan sayıları için üretici fonksiyon

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n=1+x+2x^2+5x^3+\ldots$$

şeklinde verilmektedir. (Deutsch, Shapiro 2001)

Motzkin sayıları da bir tamsayı dizisidir. Donaghey ve Shapiro (1977) bu sayıları 14 farklı şekilde ifade etmişlerdir. Özellikle (0,0)' den (0,n)' e sadece (1,0), (1,1) ve (1,-1) adımlarını kullanarak giden yol sayısı Motzkin sayısıdır. Motzkin sayıları $M_0=1,\ M_1=1$ olmak üzere

$$M_n=M_{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}M_k M_{n-2-k} \quad (n\geq 2)$$

formülüyle ifade edilir. (Aigner 1998) Böylece ilk sayılar

n	0	1	2	3	4	5	6	…
M_n	1	1	2	4	9	21	51	…

şeklindedir. Motzkin sayıları için üretici fonksiyon

$$\frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}M_n x^n=1+x+2x^2+4x^3+9x^4+21x^5+\ldots$$

şeklindedir. (Aigner 1998)

Catalan ve Motzkin sayıları arasında

$$M_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} C_k$$

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k$$

şeklinde bir ilişki bulunmaktadır. (Aigner 1998)

Teorem 4.1. Her $n \geq 1$ için aşağıdakiler doğrudur.

i) $\dfrac{M_n}{M_{n-1}} \leq \dfrac{M_{n+1}}{M_n}$

ii) $\dfrac{M_n}{M_{n-1}} < 3$

iii) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{M_n}{M_{n-1}} = 3$

dir. (Aigner 1998)

Catalan ve Motzkin sayılarının en güzel özeliklerinden biri Hankel matrislerine uygulamalarıdır:

$$A = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ C_2 & C_3 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-1} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Hankel matrislerinin determinantı 1'dir. (Aigner, 1999)

Ayrıca

$$K=\begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_n \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_n & M_{n+1} & \cdots & M_{2n} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

ve

$$L=\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \cdots & M_n \\ M_2 & M_3 & \cdots & M_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_n & M_{n+1} & \cdots & M_{2n-1} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

olsun.

Her n için $\det K = 1$ dir . Ayrıca $n \equiv 0,1$ için; $\det L = 1 \pmod 6$, $n \equiv 2,5$ için; $\det L = 0 \pmod 6$ ve $n \equiv 3,4$ için; $\det L = 0 \pmod 6$ dır. (Aigner 1998)

Tanım 4.2. $p > 1$ olmak üzere

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

fonksiyonuna Riemann zeta fonksiyonu denir.

4.1. Catalan ve Motzkin Sayılarına Bağlı Tanımlanan Hankel Matrislerinin Hadamard Terslerinin Normları

Bu bölümde

$$D=\begin{bmatrix} C_2 & C_3 & \cdots & C_{n+1} \\ C_3 & C_4 & \cdots & C_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n+1} & C_{n+2} & \cdots & C_{2n} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

ve

$$N=\begin{bmatrix} M_2 & M_3 & \cdots & M_{n+1} \\ M_3 & M_4 & \cdots & M_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n+1} & M_{n+2} & \cdots & M_{2n} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

şeklinde Hankel matrisleri tanımlanarak, bu matrislerin Hadamard terslerinin ℓ_p normları için üst sınırlar elde edildi. Buna bağlı olarak (4.1) ve (4.2) de verilen

Hankel matrislerinin Hadamard terslerinin ℓ_p normlarının üst sınırları verildi. Ayrıca bu matrislerin Hadamard çarpımlarının Frobenius normu için sınırlar hesaplandı.

Teorem 4.1.1. D matrisi (4.5) deki gibi tanımlansın. Bu durumda $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\left\| D^{\circ(-1)} \right\|_p \leq \sqrt[p]{\zeta(p) + \frac{1}{C_4^p}}$$

üst sınırı geçerlidir.

İspat. Matrisin ℓ_p normunun tanımından

$$\left\| D^{\circ(-1)} \right\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{C_{k+1}^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{C_{n+k+1}^p}$$

olur. Buradan birinci toplam için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{C_{k+1}^p} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \tag{4.7}$$

olduğunu n üzerinden tümevarımla ispatlayabiliriz.

n=1 için sağlandığı açıktır.

n-1$\in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{C_{k+1}^p} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \tag{4.8}$$

ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.

$n\in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{C_{k+1}^p} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$$

olduğunu gösterelim. $C_{n+1} \geq n^2$ olduğundan

$$\frac{1}{C_{n+1}} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{n}{C_{n+1}} \leq \frac{1}{n}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{n}{C_{n+1}^p} \leq \frac{1}{n^p} \tag{4.9}$$

elde edilir. Böylece (4.8) ve (4.9) ifadelerinden n için eşitsizlik ispatlanır. (4.7) ifadesinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{C_{k+1}^{p}} < \zeta(p) \tag{4.10}$$

olur. Diğer taraftan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ olmasından faydalanarak

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)}} = \frac{4n+2}{n+2}$$

elde edilir. Her $n \geq 4$ için $\frac{C_{n+1}}{C_n} \geq 3$ dir. Bunu tümevarımla ispatlarsak

$n = 4$ için $\frac{C_5}{C_4} = \frac{42}{14} = 3$

$n = 5$ için $\frac{C_6}{C_5} = \frac{132}{42} \geq 3$

$n = s-1$ için $\frac{C_s}{C_{s-1}} = \frac{4s-2}{s+1} \geq 3$ olsun.

$n = s$ için $\frac{C_{s+1}}{C_s} = \frac{4s+2}{s+2} \geq 3$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\frac{4s-2}{s+1} \geq 3 \Rightarrow 4s-2 \geq 3s+3 \Rightarrow 4s+2 \geq 3s+6$$
$$\Rightarrow 4s+2 \geq 3(s+2)$$
$$\Rightarrow \frac{4s+2}{s+2} \geq 3$$

olur.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{C_{n+k+1}^{p}} = \frac{n-1}{C_{n+2}^{p}} + \frac{n-2}{C_{n+3}^{p}} + \frac{n-3}{C_{n+4}^{p}} + \ldots + \frac{1}{C_{2n}^{p}}$$

toplamı göz önüne alınırsa,

$n = 2$ için

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{2-k}{C_{3+k}^{p}} = \frac{1}{C_4^{p}}$$

$n = 3$ için

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{3-k}{C_{4+k}^{p}}=\frac{2}{C_5^p}+\frac{1}{C_6^p}<\frac{1}{C_4^p}$$

$n\geq 4$ için

$$\frac{C_{n+1}}{C_n}\geq 3$$

olmasından faydalanarak

$$C_{n+k+1}\geq 3C_{n+k}\ \geq 27C_{n+k-2}\geq C_4C_{n+k-2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{C_{n+k+1}^{p}}\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{C_4^pC_{n+k-2}^{p}}=\frac{1}{C_4^p}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{C_{n+k-2}^{p}}$$

yazabiliriz.

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{C_{n+k-2}^{p}}=\frac{n-1}{C_{n-1}^p}+\frac{n-2}{C_n^p}+\frac{n-3}{C_{n+1}^p}+...+\frac{1}{C_{2n-3}^p}$$

ve

$$\frac{n-1}{C_{n-1}^p}\geq\frac{n-2}{C_n^p}\geq\frac{n-3}{C_{n+1}^p}\geq...\geq\frac{1}{C_{2n-3}^p}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{C_{n+k+1}^{p}}\leq\frac{1}{C_4^p}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{C_{n+k-2}^{p}}\leq\frac{1}{C_4^p}\frac{(n-1)^2}{C_{n-1}^p}$$

elde edilir. Burada $C_{n-1}^p\geq(n-1)^2$ ve dolayısıyla $0<\dfrac{(n-1)^2}{C_{n-1}^p}<1$ olur. Sonuç olarak

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{C_{n+k+1}^{p}}\leq\frac{1}{C_4^p}\frac{(n-1)^2}{C_{n-1}^p}\leq\frac{1}{C_4^p}\tag{4.11}$$

olur. Böylece (4.10) ve (4.11) den ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.1.1. A matrisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Bu durumda $1<p<\infty$ olmak üzere

$$\left\|A^{\circ(-1)}\right\|_p\leq\sqrt[p]{3+\zeta(p)+\frac{1}{C_2^p}}$$

dır.

İspat. Norm tanımından

$$\left\|A^{\circ(-1)}\right\|_p^p=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{C_k^p}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{C_{n+k+1}^p}$$

ve birinci toplam için

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{C_k^p}=3+\sum_{k=2}^{n}\frac{k+1}{C_k^p}$$

yazabiliriz. Burada

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k+1}{C_k^p}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p} \tag{4.12}$$

olur. Gerçekten $n<5$ için (4.12) nin doğru olduğu açıktır.

$n-1\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k+1}{C_k^p}\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p} \tag{4.13}$$

doğru olsun. Her $n\geq 5$ için $C_n\geq n^2$ ve her $n\geq 3$ için $C_n\geq n+1$ olduğundan

$C_n^2\geq n^2(n+1)$ ve dolayısıyla $\dfrac{n+1}{C_n^2}\leq\dfrac{1}{n^2}$ dir. Ayrıca $\dfrac{1}{C_n}\leq\dfrac{1}{n}$ olduğu da göz önüne

alınarak

$$\frac{n+1}{C_n^p}\leq\frac{1}{n^p} \tag{4.14}$$

elde edilir ve (4.13) ve (4.14) den $n\in\mathbb{N}$ için doğru olduğu görülür. Böylece

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{C_k^p}<3+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$$

olur ve bu ifadede $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{C_k^p}<3+\zeta(p)$$

bulunur.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{C_{n+k+1}^p}\leq\frac{1}{C_2^p}$ olduğu da Teorem 4.1.1. deki gibi gösterilebilir. ■

Sonuç 4.1.2. B matrisi (4.2) deki gibi tanımlansın. Bu durumda $1<p<\infty$ olmak üzere

$$\left\|B^{\circ(-1)}\right\|_p\leq\sqrt[p]{1+\zeta(p)+\frac{1}{C_3^p}}$$

üst sınırı geçerlidir.

Teorem 4.1.2. D matrisi (4.5) deki gibi ve B matrisi (4.2) deki gibi tanımlansın. Bu durumda

$$\left\| D \circ B^{\circ(-1)} \right\|_F \leq 4n$$

dir.

İspat. $D \circ B^{\circ(-1)}$ matrisi

$$D \circ B^{\circ(-1)} = \begin{bmatrix} \frac{C_2}{C_1} & \frac{C_3}{C_2} & \cdots & \frac{C_{n+1}}{C_n} \\ \frac{C_3}{C_2} & \frac{C_4}{C_3} & \cdots & \frac{C_{n+2}}{C_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{C_{n+1}}{C_n} & \frac{C_{n+2}}{C_{n+1}} & \cdots & \frac{C_{2n}}{C_{2n-1}} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan Frobenius normu tanımından

$$\left\| D \circ B^{\circ(-1)} \right\|_F^2 = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{C_{k+1}}{C_k} \right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \left(\frac{C_{n+k+1}}{C_{n+k}} \right)^2$$

olur. Her $k \geq 1$ için

$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{4k+2}{k+2} = 4 - \frac{6}{k+2} < 4$ olduğundan

$$\left\| D \circ B^{\circ(-1)} \right\|_F^2 \leq 16 \sum_{k=1}^{n} k + 16 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = 16 \frac{n^2+n}{2} + 16 \frac{n^2-n}{2} = 16n^2$$

ve

$$\left\| D \circ B^{\circ(-1)} \right\|_F \leq 4n$$

elde edilir. ■

Teorem 4.1.3. N matrisi (4.6) deki gibi tanımlansın. Bu durumda $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\left\| N^{\circ(-1)} \right\|_p \leq \sqrt[p]{\zeta(p) + \frac{1}{M_4^p}}$$

üst sınırı geçerlidir.

İspat. Norm tanımından

$$\left\| N^{\circ(-1)} \right\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{M_{k+1}^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{M_{n+k+1}^p}$$

olur. Tümevarım yöntemiyle

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{M_{k+1}^{p}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p}}$$

olduğunu gösterelim.

$n=1$ için sağlandığı açıktır.

n-1$\in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{M_{k+1}^{p}} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{p}} \tag{4.15}$$

doğru olsun. $M_{n+1} \geq n^2$ olduğundan $\frac{n}{M_{n+1}} \leq \frac{1}{n}$ ve dolayısıyla

$$\frac{n}{M_{n+1}^{p}} < \frac{1}{n^{p}}$$

ifadesi ve (4.15) göz önüne alınırsa

$n\in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{M_{k+1}^{p}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p}}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu ifadede $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{M_{k+1}^{p}} < \zeta(p) \tag{4.16}$$

elde edilir.

Her $n \geq 1$ için $\frac{M_{n+1}}{M_n} \geq 2$ dir. Gerçekten

$n = 1$ için $\frac{M_2}{M_1} = 2 \geq 2$

$n = 2$ için $\frac{M_3}{M_2} = 2 \geq 2$

$n = s-1$ için $\frac{M_s}{M_{s-1}} \geq 2$ doğru olduğunu kabul edelim.

$n = s$ için Teorem 4.1 i) den faydalanarak

$$2 \leq \frac{M_s}{M_{s-1}} \leq \frac{M_{s+1}}{M_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{s+1}}{M_s} \geq 2$$

olur.

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{M_{n+k+1}^{p}}=\frac{n-1}{M_{n+2}^{p}}+\frac{n-2}{M_{n+3}^{p}}+\ldots+\frac{1}{M_{2n}^{p}}$$

toplamını inceleyelim.

$n=2$ için $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{2-k}{M_{3+k}^{p}}=\frac{1}{M_{4}^{p}}$

$n=3$ için $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{3-k}{M_{4+k}^{p}}=\frac{2}{M_{5}^{p}}+\frac{1}{M_{6}^{p}}<\frac{1}{M_{4}^{p}}$

$n=4$ için $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{4-k}{M_{5+k}^{p}}=\frac{3}{M_{6}^{p}}+\frac{2}{M_{7}^{p}}+\frac{1}{M_{8}^{p}}<\frac{1}{M_{4}^{p}}$

Genel olarak her $n\geq 2$ için $\dfrac{M_{n+1}}{M_{n}}\geq 2$ olmasından faydalanarak

$$M_{n+k+1}>M_{4}M_{n+k-3}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{M_{n+k+1}^{p}}<\frac{1}{M_{4}^{p}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{M_{n+k-3}^{p}}=\frac{1}{M_{4}^{p}}\left(\frac{n-1}{M_{n-2}^{p}}+\frac{n-2}{M_{n-1}^{p}}+\ldots+\frac{1}{M_{2n-4}^{p}}\right)$$

olur. $M_{n-2}<M_{n-1}<\ldots<M_{2n-4}$ ve dolayısıyla

$$\frac{n-1}{M_{n-2}^{p}}>\frac{n-2}{M_{n-1}^{p}}>\ldots>\frac{1}{M_{2n-4}^{p}}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{M_{n+k+1}^{p}}<\frac{1}{M_{4}^{p}}\frac{(n-1)^{2}}{M_{n-2}^{p}}$$

bulunur. $n\geq 5$ için $M_{n-2}^{2}\geq(n-1)^{2}$ olduğundan $0<\dfrac{(n-1)^{2}}{M_{n-2}^{p}}<1$ ve

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{M_{n+k+1}^{p}}\leq\frac{1}{M_{4}^{p}}\tag{4.17}$$

bulunur. (4.16) ve (4.17) den ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.1.4. *K* matrisi (4.3) deki gibi tanımlansın. Bu durumda $1<p<\infty$ olmak üzere

$$\left\|K^{\circ(-1)}\right\|_{p}\leq\sqrt[p]{3+\zeta(p)+\frac{1}{M_{2}^{p}}}$$

üst sınırı geçerlidir.

İspat.

$$\left\|K^{\circ(-1)}\right\|_p^p = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{M_k^p} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{M_{n+k+1}^p}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{M_k^p} = 3 + \sum_{k=2}^{n} \frac{k+1}{M_k^p}$$

ve

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k+1}{M_k^p} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \tag{4.18}$$

elde edilir. $n \geq 6$ için $M_n > n^2$ ve $M_n \geq n$ den faydalanarak $M_n^{p-1} > n^p$ ve $n \geq 3$ için $M_n \geq n+1$ olmasından faydalanarak $\frac{n+1}{M_n^p} < \frac{1}{n^p}$ olur ve (4.18) eşitsizliğinin doğruluğu görülür. İkinci toplam da Teorem 4.1.3 deki gibi gösterilebilir. ■

Sonuç 4.1.5. L matrisi (4.4) deki gibi tanımlansın. Bu durumda $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\left\|L^{\circ(-1)}\right\|_p \leq \sqrt[p]{1 + \zeta(p) + \frac{1}{M_3^p}}$$

dir.

Teorem 4.1.4. N matrisi (4.6) deki gibi ve L matrisi (4.4) deki gibi tanımlansın Bu durumda

$$\left\|N \circ L^{\circ(-1)}\right\|_F \leq 3n$$

üst sınırı geçerlidir.

İspat. $\left\|N \circ L^{\circ(-1)}\right\|_F^2 = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\left(\frac{M_{n+k+1}}{M_{n+k}}\right)^2$ olur. Teorem 4.1 ii) den faydalanarak

$$\left\|N \circ L^{\circ(-1)}\right\|_F^2 \leq 9\sum_{k=1}^{n} k + 9\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = 9n^2$$

ve

$$\left\|N \circ L^{\circ(-1)}\right\|_F \leq 3n$$

elde edilir. ■

4.2. Circulant Matrislerin ve Circulant Matrislerin Terslerinin Normları

Teorem 4.2.1. $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ ve $a_{ij}\equiv C_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ olsun. Bu durumda

$$\left\|A^{\circ(-1)}\right\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{18}\left(7-\frac{1}{4^{n-1}}\right)(2n^3+3n^2+n)}$$

dır.

İspat. $C_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ olduğu göz önüne alınırsa $A^{\circ(-1)}$ matrisi

$$A^{\circ(-1)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{C_0} & \frac{1}{C_1} & \cdots & \frac{1}{C_{n-1}} \\ \frac{1}{C_{n-1}} & \frac{1}{C_0} & \cdots & \frac{1}{C_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_2} & \cdots & \frac{1}{C_0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\binom{0}{0}} & \frac{1}{\frac{1}{2}\binom{2}{1}} & \cdots & \frac{1}{\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}} \\ \frac{1}{\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}} & \frac{1}{\binom{0}{0}} & \cdots & \frac{1}{\frac{1}{n-1}\binom{2(n-2)}{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\frac{1}{2}\binom{2}{1}} & \frac{1}{\frac{1}{3}\binom{4}{2}} & \cdots & \frac{1}{\binom{0}{0}} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{\binom{0}{0}} & \frac{1}{\binom{2}{1}} & \cdots & \frac{1}{\binom{2(n-1)}{n-1}} \\ \frac{1}{\binom{2(n-1)}{n-1}} & \frac{1}{\binom{0}{0}} & \cdots & \frac{1}{\binom{2(n-2)}{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\binom{2}{1}} & \frac{1}{\binom{4}{2}} & \cdots & \frac{1}{\binom{0}{0}} \end{pmatrix}$$

ve

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $A^{\circ(-1)} = B \circ C$ şeklinde yazılabilir. Teorem 3.2.4 den

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_j |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{2k}{k}^2}} = \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{2k}{k}^2}} = \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k!}{(k+1)(k+2)...(2k)} \right)^2}$$

$k \geq 1$ için

$$k+1 \geq \frac{k}{2} + 1 \geq \frac{k}{3} + 1 \geq ... \geq 2$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{2}{k+2} \leq ... \leq \frac{1}{2}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$r_1(B) \leq \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{4} \right)^k} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(7 - \frac{1}{4^{n-1}} \right)}$$

elde edilir.

$$c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_i |c_{ij}|^2} == \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \sqrt{\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)}$$

Böylece $\left\| A^{\circ(-1)} \right\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{18}\left(7 - \frac{1}{4^{n-1}} \right)(2n^3 + 3n^2 + n)}$ elde edilir. ■

Sonuç 4.2.1. A matrisi Teorem 4.2.1 deki gibi olsun. Bu durumda

$$n^{-1/p} \left\| A^{\circ(-1)} \right\|_p \leq \sqrt[p]{1 + \zeta(p)}$$

dir.

İspat. Teorem 4.1.1 deki gibi yapılır.

Teorem 4.2.2. $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ ve $a_{ij} \equiv \binom{n}{\mathrm{mod}(j-i,n)}$ olsun. Bu durumda

$$\sqrt{(n+1)C_n - 1} \leq \|A\|_2 \leq (n+1)C_n - 1$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ olmasından faydalanarak

$$\|A\|_F^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2 = n\binom{2n}{n} - n$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafını *n* ile böler ve karekök alırsak

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F = \sqrt{\binom{2n}{n}-1}$$

olur ve

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \le \|A\|_2 \le \|A\|_F$$

eşitsizliğinden ve

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

olmasından faydalanarak

$$\sqrt{(n+1)C_n - 1} \le \|A\|_2 \qquad (4.19)$$

bulunur. Diğer taraftan, $A = B \circ C$ olacak şekilde

$$B = (b_{ij}) = \begin{cases} b_{ij} = \binom{n}{\operatorname{mod}(j-i,n)}, & i \ge j \\ b_{ij} = 1, & i < j \end{cases}$$

$$C = (c_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} = \binom{n}{\operatorname{mod}(j-i,n)}, & i \le j \\ c_{ij} = 1, & i > j \end{cases}$$

matrislerini tanımlayalım.

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_j |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |b_{nj}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2} = \sqrt{\binom{2n}{n}-1}$$

$$c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_i |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |c_{in}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2} = \sqrt{\binom{2n}{n}-1}$$

$$\|A\|_2 \le \binom{2n}{n} - 1 = (n+1)C_n - 1 \qquad (4.20)$$

olur. (4.19) ve (4.20) dan ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.2.2. $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ ve $b_{ij} \equiv M_{(\operatorname{mod}(j-i,n))}$ olsun. Bu matris için

$$n^{-1/p}\left\|B^{\circ(-1)}\right\|_p \le \sqrt[p]{1+\zeta(p)}$$

üst sınırı vardır.

Teorem 4.2.3. B matrisi Sonuç 4.2.2 deki gibi ve A matrisi Teorem 4.2.2 deki gibi tanımlansın. Bu durumda

$$\|B \circ A\|_2 \leq C_{n+1} - M_n$$

üst sınırı geçerlidir.

İspat. $B \circ A = K$ matrisi

$$B \circ A = K = \begin{pmatrix} M_0\binom{n}{0} & M_1\binom{n}{1} & \cdots & M_{n-1}\binom{n}{n-1} \\ M_{n-1}\binom{n}{n-1} & M_0\binom{n}{0} & \cdots & M_{n-2}\binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_1\binom{n}{1} & M_2\binom{n}{2} & \cdots & M_0\binom{n}{0} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisi

$$D = (d_{ij}) = \sqrt{M_{(\mathrm{mod}(j-i,n))} \cdot \binom{n}{\mathrm{mod}(j-i,n)}}$$

ve

$$E = (e_{ij}) = \sqrt{M_{(\mathrm{mod}(j-i,n))} \cdot \binom{n}{\mathrm{mod}(j-i,n)}}$$

olmak üzere $K = D \circ E$ şeklinde yazabiliriz. $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k$ olduğu göz önüne alınarak Teorem 3.2.4 den

$$r_1(D) = \max_i \sqrt{\sum_j |b_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} M_k \binom{n}{k}} = \sqrt{C_{n+1} - M_n}$$

$$c_1(E) = \max_j \sqrt{\sum_i |c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} M_k \binom{n}{k}} = \sqrt{C_{n+1} - M_n}$$

olur. Böylece

$$\|K\|_2 = \|B \circ A\|_2 \leq C_{n+1} - M_n$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2.4. A matrisi Teorem 4.2.2. deki gibi tanımlansın. Bu durumda

$$\|A^{\#}\|_F \geq \sqrt{\frac{n}{\binom{2n}{n}-1}}$$

alt sınırı geçerlidir.

İspat. $A^{\#}$ matrisi normal olduğundan Teorem 3.2.3 den $\|A^{\#}\|_F^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \left|\lambda_j(A^{\#})\right|^2$ dir. A matrisinin öz değerleri

$$\lambda_j(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^{-jk} \qquad j = 0,1,\ldots,n-1 \tag{4.21}$$

şeklindedir. (4.21) ifadesi düzenlenirse

$$\lambda_j(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^{-jk} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!k!} w^{-jk} = \left(1 + \frac{1}{w^j}\right)^n - \frac{1}{w^{jn}} = \left(w^j + 1\right)^n - 1$$

ve $A^{\#}$ matrisinin öz değerleri

$$\lambda_j(A^{\#}) = \frac{1}{(1+w^j)^n - 1} \qquad j = 0,1,\ldots,n-1$$

şeklindedir.

$$\|A^{\#}\|_F^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \left|\lambda_j(A^{\#})\right|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\left|(1+w^j)^n - 1\right|^2}$$

ve

$$(1+w^j)^n = \binom{n}{0} w^{jn} + \binom{n}{1} w^{j(n-1)} + \binom{n}{3} w^{j(n-2)} + \ldots + \binom{n}{n-1} w^j + \binom{n}{n}$$

olduğundan

$$\left\|A^{\#}\right\|_F^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\left|(1+w^j)^n - 1\right|^2} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\left|\binom{n}{0} w^{jn} + \binom{n}{1} w^{j(n-1)} + \binom{n}{2} w^{j(n-2)} + \ldots + \binom{n}{n-1} w^j\right|^2}$$

$$\geq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\left|\binom{n}{0} w^{jn}\right|^2 + \left|\binom{n}{1} w^{j(n-1)}\right|^2 + \ldots + \left|\binom{n}{n-1} w^j\right|^2}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{2n}{n} - 1} = \frac{n}{\binom{2n}{n} - 1}$$

ve sonuçta

$$\left\|A^{\#}\right\|_F \geq \sqrt{\frac{n}{\binom{2n}{n} - 1}}$$

elde edilir. ■

5. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde, 4.bölümdeki bazı teoremlerde geçen eşitsizlikler için C program dilinde yazılan bilgisayar programları verildi. Programlar yardımıyla eşitsizliklerin aldığı değerler tablolar halinde verildi ve bu değerlere karşılık gelen grafikler çizildi. Grafik çiziminde Curve Expert 1.1 programı kullanılmıştır.

Program 1:

/* Teorem 4.1.1'de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{C_{k+1}^{p}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p}}$ için */

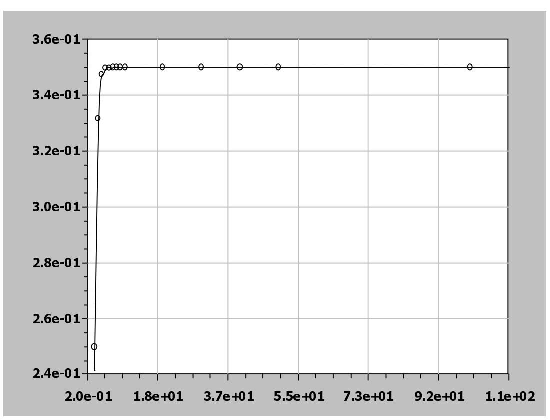
```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#define deger 100
main()
{
   int i,k;
   float c[deger],sonuc1=0.0,sonuc2=0.0;
   c[0]=1.0;
   for(i=0;i<=deger;i++)
   {
      c[i+1]=0.0;
       for(k=0;k<=i;k++)
         c[i+1]=c[i+1]+c[k]*c[i-k];
      printf("\n c[%d] sayısı : %f",i+1,c[i+1]);
    }
    for(k=1;k<deger;k++)
      sonuc1=sonuc1+(k/((c[k+1])*(c[k+1])*c[k+1]));
    for(k=1;k<deger;k++)
      sonuc2=sonuc2+(1./(k*k*k));

    printf("\n Toplam 1 = %1.8f",sonuc1);
    printf("\n Toplam 2 = %1.8f",sonuc2);
    getch();
}
```

p=2 için;

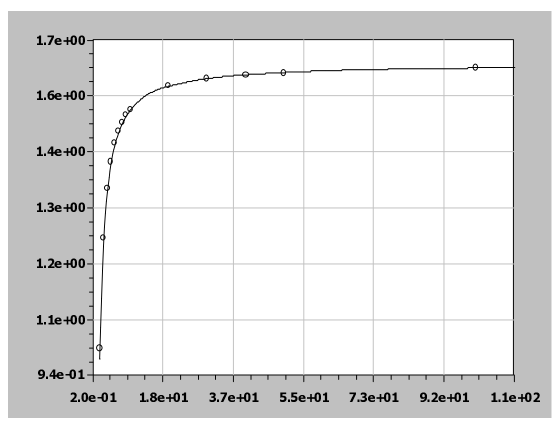
Tablo 5.1.

n	$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{C_{k+1}^{p}}$	$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{p}}$
2	0.25000000	1.00000000
3	0.33000000	1.25000000
4	0.34530613	1.36111116
5	0.34757370	1.42361116
6	0.34786066	1.46361113
7	0.34789327	1.49138892
8	0.34789670	1.51179707
9	0.34789702	1.52742207
10	0.34789705	1.53976774
20	0.34789705	1.59366302
30	0.34789705	1.61103916
40	0.34789705	1.61961925
50	0.34789705	1.62473297
100	0.34789705	1.63488400

Bu değerlere karşılık gelen grafikler aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.1.



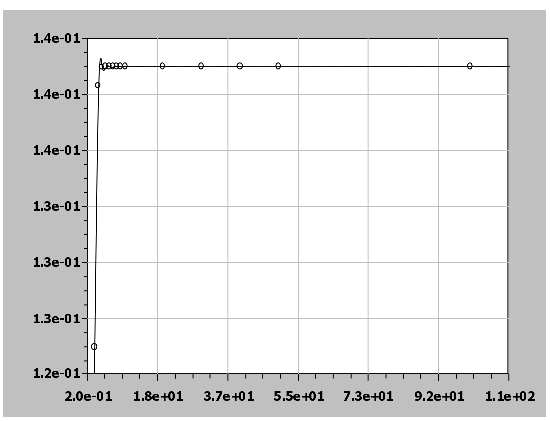
Şekil 5.2.

p=3 için;

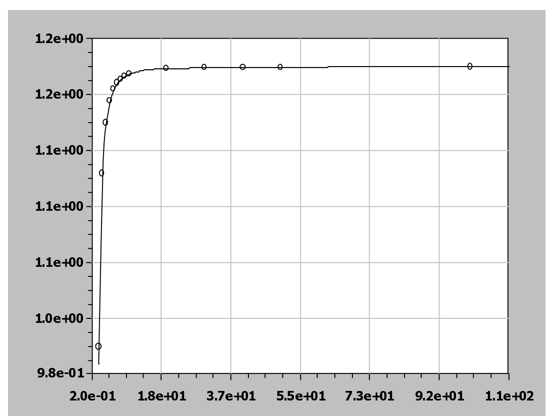
Tablo 5.2.

n	$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{C_{k+1}^{p}}$	$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{p}}$
2	0.12500000	1.00000000
3	0.14100000	1.12500000
4	0.14209330	1.16203701
5	0.14214729	1.17766201
6	0.14214946	1.18566203
7	0.14214954	1.19029164
8	0.14214954	1.19320714
9	0.14214954	1.19516027
10	0.14214954	1.19653201
20	0.14214954	1.20074284
30	0.14214954	1.20148253
40	0.14214954	1.20173657
50	0.14214954	1.20185292
100	0.14214954	1.20200646

Bu değerlere karşılık gelen grafikler aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.3.



Şekil 5.4.

Program 2:

/* Teorem 4.4.1 de $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{C_{n+k+1}^{p}} \leq \frac{1}{C_4^p}$ eşitsizliği için */

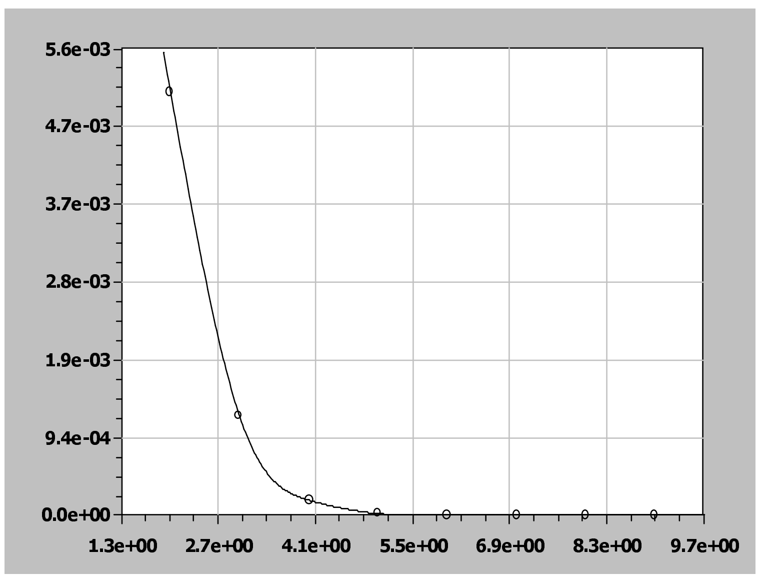
```
 #include<stdio.h>
#include<conio.h>
#define deger 6
main()
{
    int i,k,n,s;
    float t,c[deger*2],sonuc1=0.0,sonuc2=0.0;
    n=deger;
    c[0]=1.0;
    s=2*n;
    for(i=0;i<=s;i++)
   {
      c[i+1]=0.0;
      for(k=0;k<=i;k++)
         c[i+1]=c[i+1]+c[k]*c[i-k];
      printf("\n c[%d] sayısı : %f",i+1,c[i+1]);
   }

   for(k=1;k<=(n-1);k++)
   {
       t=c[n+k+1]*c[n+k+1]*c[n+k+1];
       sonuc1=sonuc1+((n-k)/t);
   }
       printf("\n\n\n Toplam 1 = %1.8f",sonuc1);
       getch();
}
```

p=2 için;

Tablo 5.3.

n	$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{C_{n+k+1}^{p}}$	$\frac{1}{C_4^p}$
2	0.00510204	0.00510204
3	0.00119118	0.00510204
4	0.00018353	0.00510204
5	0.00002329	0.00510204
6	0.00000263	0.00510204
7	0.00000027	0.00510204
8	0.00000003	0.00510204
9	0.00000000	0.00510204

Bu değerlere karşılık gelen grafik aşağıdaki gibidir:



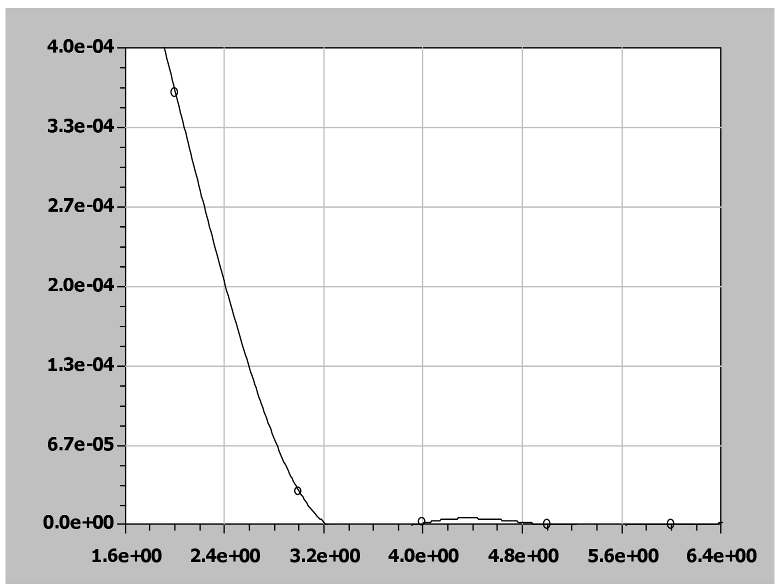
Şekil 5.5.

p=3 için;

Tablo 5.4.

n	$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{C_{n+k+1}^{p}}$	$\frac{1}{C_4^p}$
2	0.00036443	0.0003644
3	0.00002743	0.0003644
4	0.00000133	0.0003644
5	0.00000005	0.0003644
6	0.00000000	0.0003644

Bu değerlere karşılık gelen grafik aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.6.

Program 3.

/* Teorem 4.1.3’ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{M_{k+1}^{p}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p}}$ eşitsizliği için */

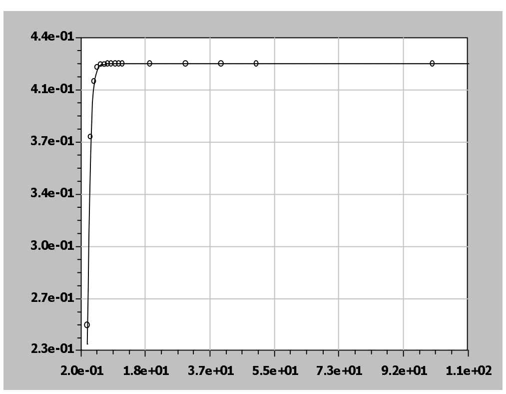
```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#define deger 10
main()
{
   int i,k;
   float M[deger],sonuc1=0.0,sonuc2=0.0;
   M[0]=1.0;M[1]=1.0;
   for(i=2;i<=deger;i++)
   {
      M[i]=M[i-1];
      for(k=0;k<=i-2;k++)
         M[i]=M[i]+M[k]*M[i-2-k];
      printf("\n M[%d] sayisi : %1.8f",i,M[i]);
    }
    for(k=1;k<deger;k++)
      sonuc1=sonuc1+(k/((M[k+1])*(M[k+1])*(M[k+1])));
    for(k=1;k<deger;k++)
      sonuc2=sonuc2+(1./(k*k*k));
    printf("\n\n Toplam 1 = %1.8f",sonuc1);
    printf("\n\n Toplam 2 = %1.8f",sonuc2);
    getch();
}
```

p=2 için;

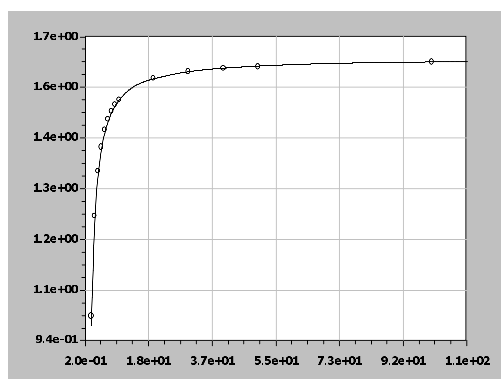
Tablo 5.5.

n	$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{M_{k+1}^{p}}$	$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{p}}$
2	0.25000000	1.00000000
3	0.37500000	1.25000000
4	0.41203704	1.36111116
5	0.42110735	1.42361116
6	0.42302969	1.46361113
7	0.42340168	1.49138892
8	0.42346877	1.51179707
9	0.42348024	1.52742207
10	0.42348212	1.53976774
11	0.42348242	1.54976773
12	0.42348248	1.55803216
20	0.42348248	1.59366302
30	0.42348248	1.61103916
40	0.42348248	1.61961925
50	0.42348248	1.62473297
100	0.42348248	1.63488400

Bu değerlere karşılık gelen grafikler aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.7.



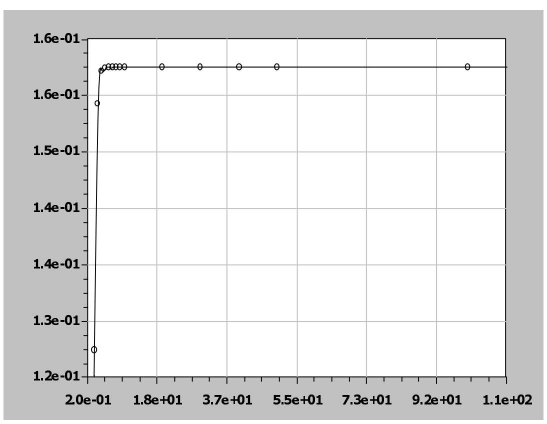
Şekil 5.8.

p=3 için;

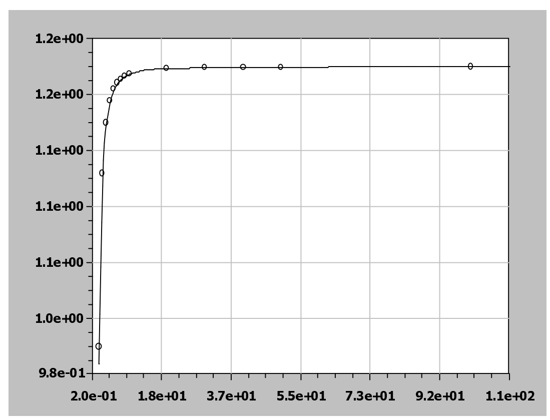
Tablo 5.6.

n	$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{M_{k+1}^{p}}$	$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{p}}$
2	0.12500000	1.00000000
3	0.15625000	1.12500000
4	0.16036522	1.16203701
5	0.16079715	1.17766201
6	0.16083485	1.18566203
7	0.16083778	1.19029164
8	0.16083799	1.19320714
9	0.16083801	1.19516027
10	0.16083801	1.19653201
20	0.16083801	1.20074284
30	0.16083801	1.20148253
40	0.16083801	1.20173657
50	0.16083801	1.20185292
100	0.16083801	1.20200646

Bu değerlere karşılık gelen grafikler aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.9.



Şekil 5.10.

Program 4:

/* Teorem 4.1.3 de $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{M_{n+k+1}^{p}} \leq \frac{1}{M_4^p}$ eşitsizliği için */

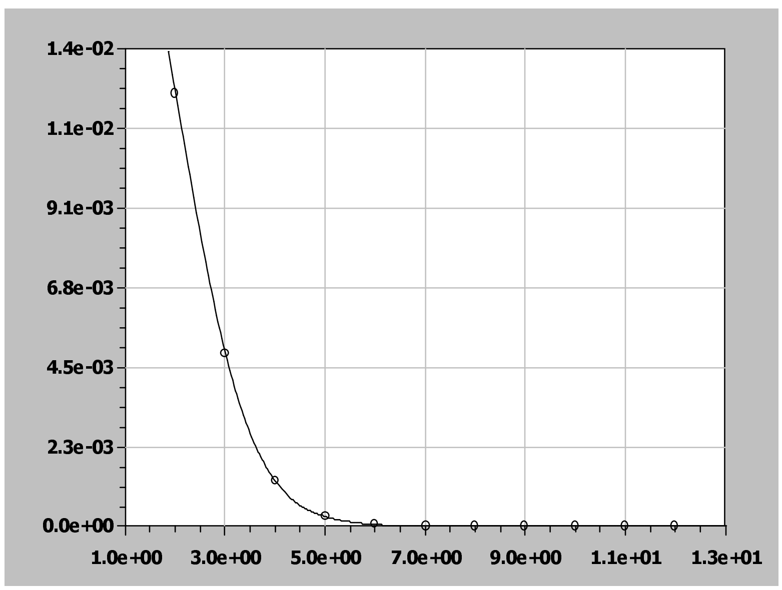
```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#define deger 8
main()
{
  int i,k,n;
  float t,m=0.0,h=0.0,M[deger*2],sonuc1=0.0,sonuc2=0.0;
  n=deger;
  M[0]=1.0;M[1]=1.0;
  for(i=2;i<=2*n;i++)
  {
    M[i]=M[i-1];
    for(k=0;k<=i-2;k++)
      M[i]=M[i]+M[k]*M[i-2-k];
    printf("\n M[%d] sayisi : %f",i,M[i]);
  }

    for(k=1;k<=(n-1);k++)
    {
       t=M[n+k+1]*M[n+k+1]*M[n+k+1];
       sonuc1=sonuc1+((n-k)/t);
    }
    printf("\n\n\n Toplam 1 = %1.8f",sonuc1);
    getch();
}
```

p=2 için;

Tablo 5.7.

n	$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{M_{n+k+1}^{p}}$	$\frac{1}{M_4^p}$
2	0.01234568	0.01234568
3	0.00491962	0.01234568
4	0.00128699	0.01234568
5	0.00027983	0.01234568
6	0.00005435	0.01234568
7	0.00000978	0.01234568
8	0.00000166	0.01234568
9	0.00000027	0.01234568
10	0.00000004	0.01234568
11	0.00000001	0.01234568
12	0.00000000	0.01234568

Bu değerlere karşılık gelen grafik aşağıdaki gibidir:



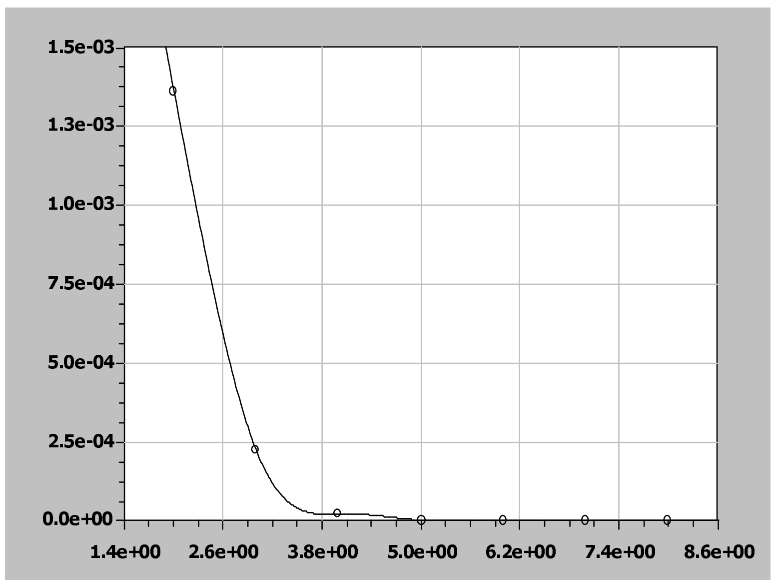
Şekil 5.11.

p=3 için;

Tablo 5.8.

n	$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{M_{n+k+1}^{p}}$	$\frac{1}{M_4^p}$
2	0.00137174	0.00137174
3	0.00022350	0.00137174
4	0.00002362	0.00137174
5	0.00000205	0.00137174
6	0.00000016	0.00137174
7	0.00000001	0.00137174
8	0.00000000	0.00137174

Bu değerlere karşılık gelen grafik aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.12.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $Ax = b$ singüler lineer denklem sisteminin şart sayısı $\kappa(A) = \|A\| \|A^D\|$ hesabından yola çıkılarak önce A matrisinin singüler circulant matris olması durumunda EP matrisi olduğu gösterilmiştir. Buna bağlı olarak

$$A = \begin{pmatrix} n \\ \mathrm{mod}(j-i,n) \end{pmatrix}_{i,j=1}^{n}$$

şeklinde tanımlanan circulant matrisin normu ve bu matrisin grup tersinin normu incelenmiştir. Diğer yandan bazı matrislerin Hadamard terslerinin normları incelenmiştir. İlk olarak Catalan ve Motzkin sayılarına bağlı tanımlanan Hankel matrislerinin Hadamard terslerinin ℓ_p normları için $\zeta(p)$ Riemann zeta fonksiyonuna bağlı üst sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca bu sayılarla tanımlanan circulant matrisin Hadamard tersinin ℓ_p normu bulunmuştur. Daha sonra ise Catalan sayılarına bağlı tanımlanan circulant matrisin Hadamard tersinin spektral normu incelenmiştir.

Yapmış olduğumuz bu çalışmaya bağlı olarak başka EP matrislerinin varlığı ve matrislerin Hadamard tersleriyle ilgili çalışmalarımız devam etmektedir.

KAYNAKLAR

Aigner, M. 1998. Motzkin Numbers, Europ. J. Combinatorics 19: 663-675.

Aigner, M. 1999. Catalan-like numbers and determinants, J. Combinatorial Theory, Series A 87: 33-51.

Arens, R., Goldberg M., 1994. Weighted l_∞ norms for matrices, Linear Algebra and its Applications 201: 155-163.

Bapat, R. B. 1988. Multinomial probabailities, permanents and a conjecture of Karlin and Rinott, Proceedings of the American mathematical society, volume 102, number 3: 467-472.

Ben-Israel, A., Greville, T. N. E. 1974. Generalized Inverses: Theory and Applications, Wiley, New York.

Bozkurt, D., Türen, B. 2003. Lineer Cebir, Sel-Ün Vakfı Yayınları, Konya.

Bronson, R. 1970. Matrix Methods, Academic Pres, New York.

Campbell, S. L., Meyer, C. D. 1979. Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman, London.

Cao, C., Zhang, X., Tang, X. 2004. Reverse order law of group inverses of products of two matrices, Applid Mathematics and Computation 158: 489-495.

Cui, X., 2004. Bounds on condition number of a singular matrix and its application, Applid Mathematics and Computation 162: 81-93.

Davis, P. J. 1979. Circulant Matrices, Wiley, New York.

Deutsch, E., Shapiro, L. 2001. A survey of the fine numbers, Discrete Mathematics 241: 241-265.

Diao, H., Wei, Y. 2005. Structured perturbations of group inverse and singüler linear system with index one, Journal of Computatioanal and Applied Mathematics 173: 93-113.

Donaghey, R., Shapiro, L. W. 1977. Motzkin Numbers, Journal of Combinatorial Theory, Series A 23:291-301.

Drazin, M.P. 1958. Pseudo-Inverses in Associative Rings and Semigroup, The American Mathematical Monthly, Vol. 65, No. 7:506-514.

Horn ,R.A., Johnson, C.R. 1985. Matrix Analysis, Cambridge University Pres, New York.

Horn, R.A. 1990. The Hadamard product, in: C.R. Johnson (Ed.), Proc. Appl. Math., vol. 40. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.:87-169.

Horn ,R.A., Johnson, C.R. 1991. Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York.

Lütkepohl, H. 1996. Handbook of Matrices, Wiley, Chichester.

Mathias, R. 1990. The spectral norm of a nonnegative matrix, Linear Algebra and its Applications, 131:269-284.

Reams, R. 1999. Hadamard inverses, square roots and products of almost semidefinite matrices, Linear Algebra and its Applications 288: 35-43.

Solak, S. 2005. On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, Applied Mathematics and Computation 160: 125-132.

Taşçı, D. 1999. Lineer Cebir, Sel-Ün Vakfı Yayınları, Konya.

Varga, R.S. 1976. On diagonal dominance arguments for bounding $\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}$, Linear Algebra and its Applications 14: 211-217.

Wei, Y. 1999. On the Perturbation of the Group Inverse and Oblique Projection, Applied Mathematics and Computation 98: 29-42.

Wei, Y., Xiezhang, L. 2001. An Improvement on the Perturbation of the Group Inverse and Oblique Projection, Linear Algebra and its Applications 338: 53-66.

Wei, Y., Wang, G., Wang, D. 2003. Condition number of Drazin inverse and their condition numbers of singular linear systems, Applid Mathematics and Computation 146: 455-467.

Wei, Y., Diao, H. 2005. On group inverse of Toeplitz matrices, Linear Algebra and its Applications 399: 109-123.

Wei, Y., Diao, H., Ng, M. K. 2006. On Drazin inverse of singular Toeplitz matrix, Applied Mathematics and Computation 172: 809-817.

Yalçıner, A., Taşkara N. On the norms of matrices with the Catalan numbers, Applied Mathematics Letters (incelemede).