EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

GRAFLARDA
BASKINLIK VE TOTAL BASKINLIK SAYISI

Nasire TAÇKIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bilim Dalı Kodu: 619.03.03

Sunuş Tarihi: 15.06.2006

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Pınar DÜNDAR

Bornova – İZMİR

Sayın **Nasire TAÇKIN** tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak sunulan "**Graflarda Baskınlık ve Total Baskınlık Sayısı**" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve .... tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

-

<u>Jüri Üyeleri</u>: <u>İmza</u>

Jüri Başkanı	:	....
Raportör Üye	:	....
Üye	:	....
Üye	:	... .
Üye	:	....

ÖZET

GRAFLARDA BASKINLIK VE TOTAL BASKINLIK SAYISI

TAÇKIN, Nasire

Yüksek lisans tezi Matematik Bölümü

Danışmanı: Doç. Dr. PınarDÜNDAR

Şubat 2006, 37 sayfa

Her birleştirilmiş graf bir iletişim ağı modeli olarak düşünülebilir. Graf teoride iletişim ağlarındaki komşuluk kavramı üzerine tanımlanmış çeşitli ölçümler kullanılmaktadır. Baskınlık ve total baskınlık sayıları bunlardandır. Bu sayılar ağlarda iş denetimi, görev paylaşımı kısaca hiyerarşi problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır.

Bu çalışmada baskınlık ve total baskınlık sayıları incelenmiştir. Çeşitli graflarda değerleri araştırılmıştır. Böylece bulunan kesin değerler yardımıyla; hiyerarşi problemi olarak adlandırılan problem grafla ifade edilerek bu problemin çözümüne deterministik bir yaklaşımda bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: İletişim ağları, graflar, komşuluk, baskınlık sayıları

ABSTRACT

DOMINATION AND TOTAL DOMINATION NUMBER IN GRAPHS

MSc Mathematics Department

Supervisor: Doç. Dr. Pınar DÜNDAR

February 2006, 37 pages

We can think every connected graph like a communication network model. In Graph Theory, we use different measurements on communication networks that contain the neighborhoods' concept. For example, domination and total domination numbers. This concept used for solving work supervision and work sharing problems.

In this thesis, domination and total domination numbers were defined and investigated. These numbers values were researched in different graphs. Thus a deterministic approach was found for solving hierarchy problems.

Key Words: communication networks, graphs, neighborhood, domination numbers.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince değerli önerileri ve bilimsel bilgilerinden yararlandığım ve tezin oluşmasında yakından ilgisini esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. Pınar DÜNDAR'a teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

İÇİNDEKİLER (Devam)

SAYFA

İÇİNDEKİLER (Devam)

SAYFA

GİRİŞ

Graf teoride, bir iletişim ağı modeli olarak ele alınan grafın iletişimini kuvvetlendirmek amacıyla çeşitli ölçümlerinden yararlanılmaktadır.Bu ölçümlerden olan baskınlık ve total baskınlık sayıları ile diğer ölçümlerin aksine bölgesel şekilde iletişim ağlarını kuvvetlendirmek amaçlanmaktadır. Bu ölçümler çeşitli graf modelleri için araştırılmaktadır.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; graf, graflarda birleştirilmişlik ölçümleri,temel graf kavramları ve işlemleri verilmiştir. İkinci bölümde; graflarda baskınlık ve farklı baskınlık sayıları tanımları verilmiş ve özel graflarda baskınlık sayısı değerleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde; graflarda total baskınlık sayısı ve özel graflarda total baskınlık sayısı değerleri araştırılarak sonuçlar teoremlerle ifade edilmiştir.Dördüncü bölümde ise bir hiyerarşi problemi olarak Satranç (Chess) Problemleri verilmiştir.Bu problemler graflarla ifade edilmiş, çözümleri total baskınlık sayısı kullanılarak hesaplanmıştır.Buradaki uygulamanın amacı; bir hiyerarşi probleminin deterministik çözümünün baskınlık sayısı kullanılarak bulunabileceği düşüncesinin gösterilmesidir.

BÖLÜM 1

1.1. Graf ve Graflarda Birleştirilmişlik Ölçümleri

Bir $G=(V(G),E(G))$ grafı, **tepeler(vertices)** denilen boş olmayan bir $V(G)$ sonlu objeler kümesi ile birlikte, **ayrıtlar(edges)** denilen G'nin farklı tepe çiftlerinin düzensiz sıralanışı olan bir $E(G)$(boş olabilir)kümesidir. Biz sadece, yönlü ayrıtları ve bukleleri olmayan basit, birleştirilmiş grafları ele alacağız.

$|V(G)|=n$ ve $|E(G)|=m$ olsun. Bir grafın iki tepesi arasında ayrıt varsa, bu tepeler **bitişiktir.**

Bir u tepesinin **açık komşuluğu** $N(u)$ olarak gösterilir ve u'ya bitişik olan $V(G)$'deki tüm tepeleri içerir. Bir v tepesinin **kapalı komşuluğu**; $N[v]=N(v)\cup\{v\}$ dir. Bir grafta olabilecek tüm ayrıtlar içeriliyorsa buna **tam(complete) graf** denir ve K_n ile gösterilir. $u,v \in V(G)$ tepeleri için bir *u-v* **yolu(path);** tepelerin ve ayrıtların birbirini takip ettiği bir dizidir, bu dizi u tepesiyle başlar ve v tepesiyle biter. Dizideki her ayrıt önündeki tepe ile birleşir ve bu birbirini izler. Daha da ötesi, bu dizide hiçbir tepenin tekrarı yoktur. $V(G)$'deki her tepe çifti için, bu iki tepe arasında bir yol varsa, G grafı **birleştirilmiştir(connected).** n tepeli bir yol; P_n ile gösterilir. n tepeli bir **çevre (cycle),** C_n, başlangıcı ve bitişi aynı tepe olan bir yoldur. Bir **ağaç(tree);** birleştirilmiş çevre içermeyen bir graftır. Bu tanım ile yollar, ağaçlardır. Fakat bir ağacın yol olması için gerek ve yeter koşul, maksimum derecesinin 2 olmasıdır. Bir **yıldız(star);** diğer tüm tepelerin bir tek tepeye bitişik olarak içerildiği bir ağaçtır. n-tepeli bir yıldız graf; $K_{1,n}$ olarak gösterilir.

Bir G grafının birleştirilmişliği**(connectivity);** graftan çıkarıldığı zaman grafı bağlantısız (disconnnected) ya da trivial graf yapan minumum tepe sayısıdır. $\kappa = \kappa(G)$ ile gösterilir.

Bir G grafının **bağımsızlık sayısı (independence number)**; $S \subseteq V(G)$ olmak üzere, S'deki herhangi iki tepe arasında G grafında ayrıt yok ise S'ye G'nin bağımsız kümesi denir. G'deki en çok elemanlı bağımsız kümesinin eleman sayısına G'nin bağımsızlık sayısı denir. $\beta = \beta(G)$ ile gösterilir.

Bir G grafının **örtü sayısı (vertex cover number)**; $S \subseteq V(G)$ olmak üzere, her bir ayrıtın enaz bir uç noktası S'de ise, S kümesine G grafının bir örtü kümesi denir. En az elemana sahip olan örtü kümesinin eleman sayısına ise G grafının örtü sayısı denir. $\alpha = \alpha(G)$ ile gösterilir.

1.2. Graflarda Temel İşlemler

1.2.1 Graflarda Basit Toplama İşlemi

G_1, G_2 birleştirilmiş graflar olmak üzere; sırasıyla $G(V_1, E_1)$, $G(V_2, E_2)$ iken $V_1 \cap V_2 = \emptyset, E_1 \cap E_2 = \emptyset$ olacak şeklinde tanımlansın. Bu iki grafın basit toplama işlemi;

$\forall v_i \in G_1$ tepesi ile $\forall v_j \in G_2$ tepesinin bir e_{ij} ayrıtı ile birleştirilmesidir, biçiminde tanımlanır. İki grafın basit toplamı

$G_1 \oplus G_2$ şeklinde gösterilir.

1.2.2 Graflarda Seri Toplama İşlemi

$G_1, G_2, ..., G_n$ birleştirilmiş graflar olmak üzere; sırasıyla $G(V_1, E_1)$, $G(V_2, E_2), ..., G(V_n, E_n)$ iken

$$V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n = \varnothing \text{ ve } E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n = \varnothing$$

olacak şekilde tanımlansın. İlk olarak G_1 ile G_2 arasında $G_1 \oplus G_2$ işlemi uygulanır. Ardından G_2 ile G_3 arasında $G_2 \oplus G_3$ işlemi uygulanır ve bu şekilde devam edilerek en sonunda G_{n-1} ile G_n arasındaki $G_{n-1} \oplus G_n$ işlemi uygulandıktan sonra $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n$ seri toplama işlemi tamamlanmış olur.

1.2.3 Graflarda Corono İşlemi:

Tepe ve ayrıtları birbirinden ayrık ,birleştirilmiş G_1 ve G_2 graflar için G_2 grafının bir kopyasının G_1'in her tepesi ile basit toplanması işlemi Corona adıyla bilinir. Bu işlem ‘ o’ ile gösterilir. $G_1 \, \mathrm{o} G_2 \neq G_2 \, \mathrm{o} G_1$ eşitsizliği açıktır.

1.2.4. Graflarda Çarpma İşlemi:

1.2.4.1. Graflarda Basit Çarpma:

Tepe ve ayrıtları birbirinden ayrık G_1 ve G_2 birleştirilmiş grafları için,

$G_1 \otimes G_2$ grafında (u_i, v_i) tepesi ile (u_j, v_j) tepesi birleştirilir eğer:

$u_i = u_j$ ve v_i tepesi ile v_j tepesi G_2 de birleştirilmiş ise

ya da

$v_i = v_j$ ve u_i tepesi ile u_j tepesi G_1 de birleştirilmiş ise.

1.2.4.2. Graflarda Dense çarpım

Verilen tepe ve ayrıtları birbirinden ayrık G_1 ve G_2 birleştirilmiş grafları için, $\left(u_i,u_j\right)$; G_1'de birbirine bitişik tepeler,ve$\left(v_i,v_j\right)$; G_2'de birbirine bitişik tepeler olsunlar:

G_1 e G_2 grafında $\left(u_i,v_i\right)$ tepesi ile $\left(u_j,v_j\right)$ tepesi ile birleştirilir eğer:

u_i=u_j ve v_i tepesi ile v_j tepesi G_2 birleştirilmiş ise, ya da

v_i=v_j ve u_i tepesi ile u_j tepesi G_1 birleştirilmiş ise ya da

$\left(u_i,u_j\right)$; G_1'de birbirine bitişik tepeler, ve$\left(v_i,v_j\right)$; G_2'de birbirine bitişik tepeler ise.

1.3. Özel Grafların Temel Birleştirilmişlik Ölçümleri

K_n Tam Grafı:

- Ancak $n-1$ tane tepenin çıkarılmasından sonra trivial (aşikar, K_1) oluyor. Böylece $\kappa(K_n)=n-1$.
- Bütün tepe çiftleri birbiri ile komşu olduğundan, hangi tepe seçilirse seçilsin bu tepeye bitişik olmayan başka bir tepe bulunamayacağı için, $\beta(K_n)=1$.
- Grafın içerebileceği tüm ayrıtlar tam grafta yer aldığından ve her ayrıtı örtmek için en azından bir uç noktası seçileceğinden dolayı, tüm ayrıtların örtülmesi için en az $n-1$ tane tepenin seçilmesi gerekmektedir. $\alpha(K_n)=n-1$.

P_n <u>Yol Grafı:</u>

- $n = 2$ ise herhangi iki tepeden birinin çıkarılması ile graf tek bir izole tepe olacaktır.

  $n > 2$ ise grafın uç tepeleri hariç, graftan herhangi bir tepenin çıkarılması ile graf bağlantısız olmaktadır. Böylece $\kappa(P_n) = 1$ 'dir.

- Tepelerinin ard arda dizilerek oluşturduğu seride, bir tepeyi seçip ardından gelen, ona komşu olan tepe seçilmeyecek şekilde bir sonraki tepe seçilerek maksimum bağımsızlık kümesi oluşturulur. Böylece tepe sayısı çift olan yol için $\beta(P_n) = n/2$ olur. Tepe sayısı tek ise; uçlardaki her iki tepe seçilebileceği için; $\beta(P_n) = \lceil n/2 \rceil$.

- Tüm ayrıtların örtülmesi için gerekli en az tepe sayısını bulmak için; ikinci tepeyi(en büyük dereceli) seçerek başlayalım. Bu tepe uçtaki tepe ile olan ortak ayrıtı ve kendine bağlı diğer ayrıtı örtmüş oldu. Tekrar işlem tekrarlanarak, bu tepenin sağında ona komşu olmayan diğer tepe seçilerek yolun ayrıtları örtülür. Böylece n tek ise; $\alpha(\mathrm{P_n}) = \left\lfloor \frac{\mathrm{n}}{2} \right\rfloor$, n çift ise; $\alpha(\mathrm{P_n}) = \frac{\mathrm{n}}{2}$ dir.

C_n <u>Çevre Grafı:</u>

- Graftaki herhangi bir tepeden diğer tepeye farklı iki yoldan gidilebileceği için tek bir tepenin çıkarılması grafın bağlantısız olması için yeterli değildir. Çıkarılan tepeye komşu olmayan başka bir tepenin de çıkarılması ile graf bağlantısız oluyor. Böylece $\kappa(C_n) = 2$.

- Başlangıcı ve bitişi aynı olan bir yol gibi düşünülürse, kendimize bir başlangıç tepesi belirleyelim. Saat yönünde devam edilirse, ardındaki tepe ona komşu olduğundan bir sonraki tepe seçilir. Böylece tepe sayısı çift ise; $\beta(C_n) = n/2$, tepe sayısı tek ise; $\beta(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

- Her tepenin derecesi iki olduğundan seçilecek her tepe ile iki ayrıt örtüyoruz. n çift ise; minimum n/2 tane tepe ile tüm graf örtülüyor. Fakat tepe sayısı tek olduğu zaman bir ayrıt açıkta kalıyor. Bu nedenle yolun sonundaki tepe seçiliyor. Böylece n çiftse, $\alpha(C_n) = n/2$; n tek ise, $\alpha(C_n) = \lceil n/2 \rceil$.

$K_{1,n}$ Yıldız Graf:

- Grafın merkezindeki tepenin diğer tüm tepelere komşu ve merkez tepe dışındaki tepe çiftleri birbirine bitişik olmadığından merkez tepenin çıkarılması ile graf n tane izole tepe haline dönüşecektir. Böylece $\kappa(K_{1,n}) = 1$.
- Merkez tepe dışındaki tepeler birbirine komşu olmadığından birbirinden bağımsız seçebileceğimiz maksimum tepe sayısı n'dir. Böylece $\beta(K_{1,n}) = n$.
- Grafta içerilen tüm ayrıtların bir uç noktası hep merkez tepe olduğu için, bu tepenin seçilmesi graftaki tüm ayrıtların örtülmesi için yeterlidir. Böylece $\alpha(K_{1,n}) = 1$

BÖLÜM 2

2.1 Graflarda Baskınlık(Dominating) Sayısı

Bir matematik konferansını göz önüne alalım. Komitenin, katılım çizelgesi için katılanların listesini oluşturması gerekmektedir. Bu nedenle; komite ve konferans katılımcıları arasında serbest akan bir iletişime sahip olunmalıdır. Kolay iletişim içinde, katılımcıların her biri en azından bir komite üyesini tanımalıdır.

Konferansın graf modelini göz önüne alalım. Her kişi, bir tepe olarak alınsın. Komite üyesi ile katılımcı birbirini tanıyorsa, bu iki tepe birleştirilsin. Bu özelliklerdeki komitenin, seçilen katılımcıları ile komite üyeleri grafın baskın kümesi olur.

Tanım: $S \subseteq V(G)$ kümesi; $V-S$ 'deki her tepe, S 'nin bir tepesine bitişik (yani $V-S$, S 'nin komşuluğunda) ise; S kümesine, G 'nin baskın kümesi denir. $V-S$ kümesinin S ile domine edildiği söylenir. Baskınlık sayısı; G 'nin baskın kümeleri arasında en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısıdır. $\gamma(G)$ ile gösterilir.

2.2. Özel Grafların Baskınlık Sayıları

K_n Tam Grafı:

Tam grafta tüm tepeler birbirine komşu olduğundan ,grafın tepe sayısı ne olursa olsun tek bir tepenin seçilmesi ile grafın geriye kalan tüm tepeleri domine edilecektir. Böylece $\gamma(K_n) = 1$ olur.

P_n Yol Grafı:

Yol grafta başlangıç ve bitiş tepeleri hariç diğer tüm tepeler iki derecelidir. Yani iki komşuya sahiptir. Buna göre yol grafı, minimum sayıda tepe ile domine etmek için seçilecek her tepe ile en fazla iki tepe domine edilir. Grafın tepeleri üçerli gruplara ayrılmış olur. Böylece $k \in Z$ olmak üzere grafın tepe sayısı $n = 3.k$ ise $\gamma(P_n) = n/3$ olur. Graf üçerli gruplara ayrıldığı zaman geriye 1 yada 2 tepe kalabilir. Bu kalan tepelerin de domine edilmesi için tek bir tepenin daha kümeye alınması gereklidir. Buna göre $n = 3.k + 1$ veya $n = 3.k + 2$ ise $\gamma(P_n) = (n/3) + 1$ olur. Kısaca gösterecek $\gamma(P_n) = \lceil n/3 \rceil$ olur.

C_n <u>Çevre Grafı:</u>

Çevre grafta tüm tepeler iki dereceli olduğundan; yol graftaki gibi seçilen her tepe ile iki tepe domine edilecektir. Böylece grafın tepeleri üçerli gruplara ayrılmış olur. Bu nedenle çevre grafın baskınlık sayısı da tıpkı yol graftaki gibi olacaktır. Kısaca $\gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$ olur.

$K_{1,n}$ <u>Yıldız Graf:</u>

Yıldız grafta merkezdeki tepe diğer tüm tepelere komşu olduğundan; bu tepenin seçilmesi ile diğer tüm tepeler domine edilmiş olur. Böylece minimum baskınlık sayısı elde edilir. $\gamma(K_{1,n}) = 1$ olur.

2.3. Graflarda Farklı Baskınlık Sayıları

Baskınlık sayısının belirli özellikleri taşıması açısından üç tane baskınlık tanımından söz edilecektir.

2.3.1 Birleştirilmiş Baskınlık Sayısı

<u>Tanım:</u> $S \subseteq V$ kümesi; *G* grafının baskın kümesi olsun. $G[S]$ indirgenmiş alt grafı birleştirilmiş graf ise, *S* kümesi *G* grafının bir birleştirilmiş baskın kümesidir, denir. Birleştirilmiş baskınlık sayısı, G'nin birleştirilmiş baskın kümeleri arasında en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısıdır. $\gamma_c(G)$ ile gösterilir.

2.3.1.1. Özel Grafların Birleştirilmiş Baskınlık Sayıları

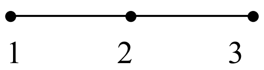
Özel grafların, birleştirilmiş baskınlık sayılarının genel bir ifadesi olup, olmadığı incelenmiştir.

K_n Tam Grafı:

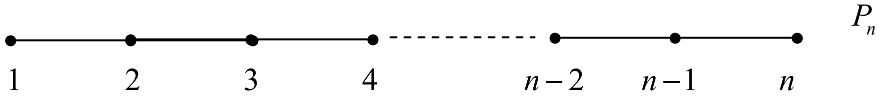
Tek tepenin seçilmesi ile graf domine edilir. Birleştirilmiş baskın küme için seçilen tepeye bir tepe eklenmesi yeterlidir. Çünkü tam grafta tüm tepeler birbirine komşudur. Böylece $\gamma_c(K_n) = 2$ 'dir.

P_n Yol Grafı:

Yol grafın birleştirilmişliğinin küçük olduğunu göz önüne alalım. Her tepe iki derecelidir. Bu nedenle seçilen baskın kümesinin birleştirilmiş olması için, uç tepeler hariç diğer tüm tepelerin kümede olması gerekmektedir.



P_3 $\{1,2\}$ P_3, yol grafı için $\gamma_c(P_3) = 2$ 'dir.



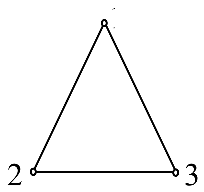
$n > 3$; P_n için minimum birleştirilmiş baskın kümesi; $\{2,3,...,n\text{-}2,\ n\text{-}1\}$

P_n için minimum birleştirilmiş baskınlık sayısı;

$\gamma_c(P_n) = n\text{-}2$ 'dir.

C_n Çevre Grafı:

Çevre grafta tüm tepeler iki derecelidir. Bu nedenle, baskın kümesinin birleştirilmiş olması için, birbiri ardına gelen tepeler seçilmelidir.

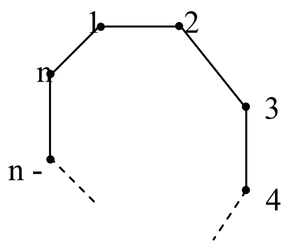


C_3 için minimum birleştirilmiş baskın kümesi;

$\{1,2\},\{1,3\}$ yada $\{2,3\}$ olur.

$\gamma_c(C_3) = 2$ ’dir.

n>3; C_n için minimum birleştirilmiş baskın kümelerinden biri;

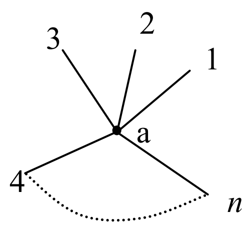


$\{2,3,..., n\text{-}1\}$

$\gamma_c(C_n) = n-2$ ’dir.

$K_{1,n}$ Yıldız Grafı:

Merkez tepesinin seçilmesi ile domine edildiğini göz önüne alalım. Merkez tepenin ve diğer *n* tane tepeden birinin seçilmesi ile yıldız graf birleştirilmiş olarak domine edilmiş olur.



$K_{1,n}$ için;

Minimum birleştirilmiş baskın küme;

$\{a,1\},\{a,2\},....,\{a,n\}$ $\quad \gamma_t(K_{1,n}) = 2$ ’dir.

2.3.2. Bağımsız Baskınlık Sayısı

<u>Tanım:</u> $S \subseteq V$ kümesi; G grafının baskın kümesi olsun. $G[S]$ indirgenmiş alt grafı birleştirilmemiş oluyorsa, S kümesi G grafının bir bağımsız baskın kümesidir denir. Bağımsız baskınlık sayısı, G'nın bağımsız baskın kümeleri arasında minimum elemana sahip olan kümenin eleman sayısıdır. $\gamma_i(G)$ ile gösterilir.

2.3.2.1. Özel Grafların Bağımsız Baskınlık Sayısı

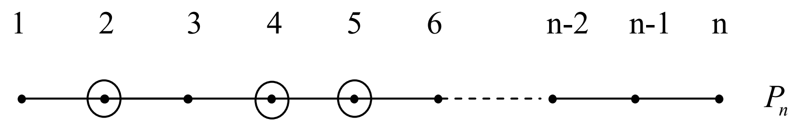
Özel grafların baskınlık sayılarının genel ifadeleri incelenmiştir.

K_n <u>Tam grafı</u>:

Tek tepenin seçilmesi ile grafın domine edildiğini göz önüne alalım. Bütün tepeler birbiri ile birleştirilmiş olduğundan bağımsız baskın küme tek tepelidir. Böyle $\gamma_i(K_n) = 1$'dir.

P_n <u>Yol grafı</u>:

Yol grafın baskınlık sayısını veren kümenin bağımsız küme olduğu görülür. Böylece $\gamma_i(P_n) = \gamma(P_n)$'dir.



$$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

C_n Çevre grafı:

Çevre grafın, başlangıç ve bitişi aynı tepe olan bir yol graf olduğu düşünülür. Böylece $\gamma_i(C_n) = \gamma(C_n)$ ’dir. Aynı zamanda $\gamma_i(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

$K_{1,n}$ Yıldız grafı:

Grafın merkez tepesinin seçilmesi ile domine edildiği kolayca görülür.Böylece $\gamma_i(K_{1,n}) = \gamma_i(K_{1,n}) = 1$ ’dir.

2.3.3. Total Baskınlık Sayısı

Bu özellikteki baskınlık sayısının tanımına ve özelliklerine 3. bölümde ayrıntılı olarak değinilmiştir.

BÖLÜM 3

3.1. Total Baskınlık Sayısı

Bu bölümde baskınlık sayılarından biri olan **total baskınlık sayısı** tanımlanarak çeşitli graflarda ve graf işlemleri sonucu elde edilen yeni graflarlarda hesaplamaları yapılmıştır. Sonuçlar teoremler olarak verilmiştir.

Tanım: $S \subseteq V(G)$ kümesi için; V 'deki her tepe, S 'nin bir tepesine bitişik ise; S kümesine, G 'nin **bir total baskın kümesi** denir. Kısaltılmış olarak TBK olarak gösterilir. V kümesinin S ile total olarak domine edildiği söylenir. Benzeri bir ifade ile $N(S) = V(G)$ oluyorsa S kümesine, G 'nin TBK'i denir. İzole tepe içermeyen her graf bir TBK'ye sahiptir. Örneğin $S = V$ her graf için bir TBK'dir. G 'nin **total baskınlık sayısı**; G' nin total baskın kümeleri arasında en az elemana sahip kümenin eleman sayısıdır. $\gamma_t(G)$ ile gösterilir.G grafının $\gamma_t(G)$ sayısını veren bir total baskın kümesine, G'nin $\gamma_t(G)$-kümesi denir.

Teorem 1: G birleştirilmiş bir grafı için ; $\gamma(G) \leq \gamma_t(G)$ 'dir.

İspat: G grafının en az baskın kümesi S olsun. S kümesi ile V-S'deki tüm tepeler domine edilir. Minimum total baskın kümesi ise S' olsun. S' kümesi ile V'deki tüm tepeler domine edilir. $|S| \leq |S'| \leq V$ olduğu görülür. Böylece $\gamma(G) \leq \gamma_t(G)$ 'dir.

Teorem 2: G birleştirilmiş bir graf, $|V| = n$ olsun. $2 \leq \gamma_t(G) \leq n-1$ 'dir.

İspat : G grafının, baskınlık sayısı 1 olsun.Bu grafın baskın kümesindeki tek tepeyi de domine eden bir tepe daha kümeye alınır. Böylece G grafı için minimum total baskınlık sayısı 2 olur. Şimdi de üst sınırı düşünelim. Grafın tepe sayısına bağlı olarak baskınlık ve total baskınlık sayılarını belirliyoruz. Grafın birleştirilmiş olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, $(n\text{-}1)$ tepeyi S kümesine seçelim. Bu $(n\text{-}1)$ tepe arasından en az bir tanesinin *n*. tepe ile ayrıtı olacağından bu tepenin seçilmesine gerek yoktur. Bu nedenle *G* grafı için $\gamma_t\left(G\right) \neq n$. Böylece $\gamma_t\left(G\right) \leq n\text{-}1$ dir.

Teorem 3: G birleştirilmiş bir graf,

$\left|V\right| = n$ ve $\Delta v_i = n-1 \Leftrightarrow \gamma_t(G) = 2$.

İspat: $(\Rightarrow)$ İki durum olsun:

İlk durum için;

$K_{1,n-1}$ yıldız grafı olsun:

Merkezdeki tepenin derecesi $n-1$ olduğundan, bu tepeyi total baskın kümeye seçiyoruz. Diğer tüm tepelerde bu tepe ile komşu olduğundan bu tepeyi domine edecek tek bir tepenin daha seçilmesi minimum total baskın küme için yeterli olacaktır. Böylece $\gamma_t(K_{1,n-1}) = 2$ olur .

İkinci durum için;

K_n tam graf olsun:

Tam grafta $\forall v_i \in V$ için $\deg v_i = n-1$ olduğundan tek bir tepenin total baskın kümeye seçilmesi ile graf domine edilir ve herhangi bir tepe daha seçilmesi ile ilk tepe de domine edilir. Böylece $\gamma_t(K_n) = 2$ olur.

Bu iki durumu genelleştirirsek;

$\Delta v_i = n-1$ olan herhangi n tepeli bir graf için maksimum dereceli tepesi olan v_i tepesinin total baskın kümeye seçilmesi grafın domine edilmesi için yeterlidir ve $\deg v_i = n-1$ olduğundan diğer tüm tepelerle komşudur. Böylece tek bir tepenin daha kümeye alınması ile grafın herhangi bir total baskın kümesi bulunmuş olur. Total baskınlık sayısı ise $\gamma_t(G) = 2$ olur. Böylece $(\Rightarrow)$ yönü ile ispat tamamlanır.

$(\Leftarrow)$ Kabul:

$\gamma_t(G)=2$ olan herhangi birleştirilmiş bir G grafı için $\Delta v_i \neq n-1$ olsun. Baskınlık sayısının 2'den büyük olduğu açıktır. Bu bir çelişkidir. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4: *G* birleştirilmiş bir graf, $v \in V$ ve v kritik tepe olmasın;

$$\gamma_t(G\text{-}v)=\gamma_t(G) \text{ ya da } \gamma_t(G\text{-}v)=\gamma_t(G)-1.$$

İspat: G grafından bir tepenin çıkarılması ile $|V|-1$ tane tepenin domine edilmesi gerekmektedir. Bu tepenin domine edilmesi için kümede olan tepeyi göz önüne alalım. Bu tepe s tepesi olsun. s tepesi sadece v tepesinin domine edilmesi ile görevlendirilmişse s tepesi baskın kümeden çıkarılır. Böylece $\gamma_t(G\text{-}v)=\gamma_t(G)-1$ olur. Aksi halde s tepesi G-v grafının baskın kümesinde olmalıdır. Bu durumda ise $\gamma_t(G\text{-}v)=\gamma_t(G)$'dir.

3.2. Özel Grafların Total Baskınlık Sayıları

Bu bölümde özel graf sınıflarının total baskınlık sayıları incelenmiş, n tepeli graflar için genel sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 5: $n \geq 2$ iken, P_n Yol Grafı için;

$$\gamma_t(P_n)=\begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ \dfrac{n+2}{2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{aksi halde} \end{cases} \text{ dir.}$$

İspat: $u-v$ yolunda; u uç tepesi ile başlanarak, aldığımız her dört tepede ortadaki bitişik iki tepe total baskın kümeye alınarak domine edilir. Ardından gelen her dört tepe için bu işlem tekrar edilir. Yol grafın tepe sayısı ;

$|V(P_n)| = n = 4k$, $k \in Z$ ise $\gamma_t(G) = \frac{n}{2}$ olur. Tepeler dörder dörder ayrıldıktan sonra bir tepe açıkta kalıyorsa; bu uç tepenin de domine edilmesi için, kendisinden önce gelen tepeninde total baskın kümeye alınması gerekir.

$n = 4k+1$ ise, $n-1$ tane tepe $\frac{n-1}{2}$ tepe ile domine edilir. Böylece $\gamma_t(P_n) = \left(\frac{n-1}{2}\right) + 2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ olur. Sonda kalan tepe sayısı iki ise; bu iki tepe de kümeye alınarak bu tepelerin birbirlerini domine etmeleri sağlanır.

$n = 4k+2$ ise; $n-2$ tane tepe $\frac{n-2}{2}$ tepe ile domine edilir. Böylece $\gamma_t(P_n) = \left(\frac{n-2}{2}\right) + 2 = \left(\frac{n+2}{2}\right)$. Sonda kalan tepe sayısı üç ise; bu üç tepenin ikisi seçilerek bu üç tepede domine edilir.

$n = 4k+3$ ise, $n-3$ tane tepe $\frac{(n-3)}{2}$ tepe ile domine edilir. Böylece $\gamma_t(P_n) = \left(\frac{n-3}{2}\right) + 2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ olur. Özetle P_n yol grafının total baskınlık sayısı aşağıdaki gibi gösterilir:

$n \geq 2$ için;

$$\gamma_t(P_n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ \dfrac{n+2}{2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Teorem 6: $n \geq 3$ iken; C_n çevresi için;

$$\gamma_t(C_n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ \dfrac{n+2}{2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \text{ dir.} \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

İspat: Çevre, başlangıcı ve bitişi aynı tepe olan bir yol graf gibi düşünülürse yol graf için bulunan total baskınlık sayıları çevre grafı da sağlamaktadır. Buna göre C_n çevre grafının total baskınlık sayısı aşağıdaki gibi gösterilir:

$n \geq 3$ için;

$$\gamma_t(C_n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ \dfrac{n+2}{2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

Teorem 7: Tam graf için; $\gamma_t(K_n) = 2$ 'dir.

İspat: Tepe sayısının büyüklüğünün bir önemi olmadan, tek bir tepe ile domine edilen($\gamma(K_n) = 1$) tam grafın baskın kümesindeki tepenin de domine edilmesi için grafın herhangi bir tepesinin kümeye alınması yeterli olur. Böylece $\gamma_t(K_n)=2$ olur.

Teorem 8: $K_{1,n}$ Yıldız graf için; $\gamma_t(K_{1,n})=2$ 'dir.

İspat: Tam graftaki gibi tepe sayısının bir önemi olmadan yıldız grafta da merkez tepenin seçilmesi ile diğer tüm tepeler domine edilir($\gamma(K_{1,n})=1$). Merkez tepenin de domine edilmesi için uç tepelerden herhangi birinin kümeye alınması yeterlidir. Böylece $\gamma_t(K_{1,n})=2$ olur.

3.3. Graflarda Toplama İşlemi ile Total Baskınlık Sayısı

Bu bölümde toplama işlemleri uygulanan grafların total baskınlık sayılarının, grafların kendi ölçümlerine bağlı olarak nasıl değiştiği incelenmiştir.

3.3.1. Graflarda Basit Toplama İşlemi ile Total Baskınlık Sayısı

Teorem 9: Herhangi birleştirilmiş iki graf G_1, G_2 olmak üzere bu graflar sırasıyla; $\gamma_t(G_1)=m$ ve $\gamma_t(G_2)=n$ total baskınlık sayılarına sahip olsunlar. $G_1 \oplus G_2$ grafının total baskınlık sayısı; $\gamma_t(G_1 \oplus G_2)=2$ 'dir.

İspat : Graflardaki toplama işlemine göre G_1 grafının tüm tepelerini G_2 grafının tüm tepeleri ile bir ayrıtla birleştiriyoruz. Bu işlem ile G_1 grafından seçilecek herhangi bir tepenin G_2 grafındaki tüm tepelere ayrıtı olduğundan G_2 grafının tüm tepeleri domine edilmiş olacaktır. Aynı şekilde G_2 grafından şeçilecek herhangi bir tepenin G_1 grafındaki tüm tepelere ayrıtı olacağından, bu grafdaki tüm tepeler de domine edilmiş olacaktır. Böylece grafın tüm tepeleri G_1 ve G_2 graflarından seçilen birer tepe ile domine edilmiş olur. $\gamma_t(G_1 \oplus G_2) = 2$.

3.3.2. Graflarda Seri Toplama İşlemi ile Total Baskınlık Sayısı

Teorem 10: $i \in \mathrm{N}$ **,** G_i birleştirilmiş graf olmak üzere, G grafı;

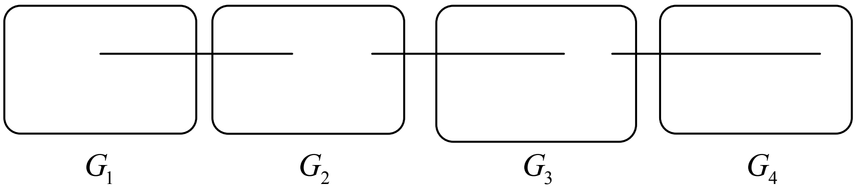
$G = \sum_{i=1}^{m} G_i$ seri toplamlı grafı olarak tanımlansın. Böylece,

$$\gamma_t(G) = \begin{cases} \frac{m}{2}, & m \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{m+2}{2}, & m \equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{m+1}{2}, & \text{aksi halde} \end{cases} \text{ dir.}$$

İspat: $m = 2$ için n basit toplama işlemi olduğundan $\gamma_t(G) = (2+2)/2 = 2$ teoreme göre doğru olduğu görülmektedir.

$m = 3$ için $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$ şeklinde tanımlansın. Seri toplama tanımından $G_1 \oplus G_2 \cup G_2 \oplus G_3$ olduğundan; G_1 grafından seçilecek bir tepe ile G_2 grafındaki tüm tepeler domine edilebilmektedir. G_2 grafından seçilecek bir tepe ile G_1 ve G_3 graflarındaki tüm tepeler domine edilebilmektedir. Aynı şekilde G_3 grafından seçilecek bir tepe ile G_2 grafındaki tüm tepeler domine edilebilmektedir. Bu nedenle total baskınlık sayısı için G_1 ve G_2 graflarından birer tepe seçilmesi ya da G_2 ve G_3 graflarından herhangi birer tepe seçilmesi yeterli olacaktır. Böylece teorem sonucu $\gamma_t(G) = (3+1)/2 = 2$ doğrulanmaktadır.

$m = 4$ için $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4$ şeklinde tanımlansın. Yine seri toplama tanımından $G_1 \oplus G_2 \cup G_2 \oplus G_3 \cup G_3 \oplus G_4$ olduğundan birbiri ile toplama işlemi yapılan graflar arasında karşılıklı olarak seçilecek bir tepe ile domine edilebilmektedirler. Bu şekilde G grafı; G_2 ve G_3 graflarından seçilecek birer tepe ile domine edilmektedir. Böylece teorem sonucu $\gamma_t(G) = 4/2 = 2$ doğrulanmaktadır.



Bu şekilde devam edildiğinde görülür ki; her graftan seçilecek bir tepe; toplama işlemi yapılan yanındaki grafın tüm tepelerini domine edebilmektedir. Böylece her grafın bir tepesinin domine edilmesi ile tüm tepeleri domine edilmiş olacağından ;her graf bir tepe gibi düşünülürse, seri toplamlı G grafı yol grafına dönüşmüş olacaktır. Böylece G grafı m tepe sayısına sahip bir yol graf olmasından dolayı yol graf için geçerli total baskınlık sayısı;

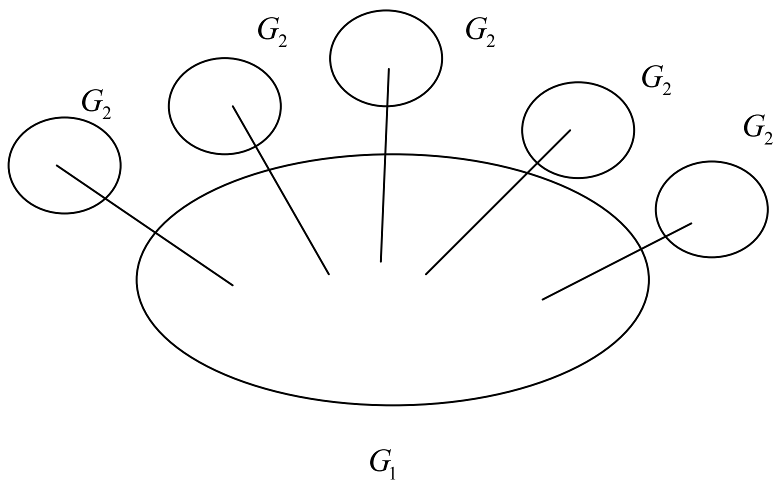
$$\gamma_t(G) = \begin{cases} \frac{m}{2}, & m \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{m+2}{2}, & m \equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{m+1}{2}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

seri toplanmış G grafını da sağlayacaktır.

3.3.3. Graflarda Corono İşlemi ile Total Baskınlık Sayısı

Teorem 11: Herhangi iki birleştirilmiş G_1 ve G_2 grafları için; $|V(G_1)|, |V(G_2)|$ sırasıyla G_1 ve G_2 graflarının tepe sayısı olsun. $\gamma_t(G_1 \text{o} G_2) = |V(G_1)|$ olur.

İspat: Corono işlemi gereği G_1 grafının tüm tepeleri G_2 grafının birer kopyası ile toplanıyor. Buna göre $|V(G_1)|$ tane G_2 kopyası oluşmaktadır. Toplama işleminin tanımından, bir graftan tek bir tepe seçilmesi ile diğer grafın tüm tepeleri domine ediliyordu. Corono işleminde de G_1'in tüm tepeleri üzerinde teker teker G_2 ile toplama işlemi yapıldığı düşünülürse, G_1 grafının seçilen her tepesi bir G_2 kopyasının tepelerini domine edecektir. Böylece tüm tepelerin domine edilmesi için tüm kopyalarının domine edilmesi gerekmektedir. G_1 birleştirilmiş grafının her tepesinin seçilmesi ile $|V(G_1)|$ tane kopya domine edilmiş olur. G_1 de birleştirilmiş bir graf olduğundan, tüm tepelerinin seçilmesi ile bu tepeler de birbirini domine etmektedir. Böylece $\gamma_t(G_1 \text{o} G_2) = |V(G_1)|$ olmaktadır.



3.4. Graflarda Çarpma İşlemi ile Total Baskınlık Sayısı

Bu bölümde çarpma işlemleri uygulanan grafların total baskınlık sayılarının, grafların kendi ölçümlerine bağlı olarak nasıl değiştiği incelenmiştir.

3.4.1. Graflarda Basit Çarpma İşlemi ile Total Baskınlık Sayısı

Basit çarpma işlemi uygulanan grafların total baskınlık sayılarının, grafların kendi ölçümlerine bağlı olarak nasıl değiştiği incelenmiştir.

Teorem 12: $n{=}3k$, $k \geq 1$, $m \geq n$ olmak üzere, P_m ve P_n yol graflar olsun.

$\gamma_t\left(P_m \otimes P_n\right) = m.k$ ’dır.

İspat : P_m ve P_n yol graflarının çarpım grafında n tane P_m grafı yer alır Çarpım grafta ; P_m grafının baskın kümesi ile çarpımın 1. satırı domine edilir. n tane P_m grafı olduğundan, her satırı P_m ’ın baskın kümesi ile domine ederiz. Böylece her satır, $\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$ tepe ile domine edilir. Her satırdan alınan tepeler de, bir üst satırdaki tepelere bitişik olduğundan, $n.\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$ tane tepe aynı zamanda total baskın kümede bulunur. Aynı şekilde P_n grafının baskın kümesi ile çarpımının her sütunu domine edilir. m tane P_n sütunu bulunmaktadır. Her sütundan seçilen tepeler; bir önceki ile bir sonraki sütunda aynı satıra gelmektedir. Böylece tepeler bitişik olduğundan $m.\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ tepeli bir total baskın küme bulunur. Bu iki küme göz önüne alındığında $m.\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ tepeli kümenin minimum total baskın küme olduğu görülür. Böylece,

$\gamma_t\left(P_m \otimes P_n\right) = m.k$ 'dir.

Teorem 13: $n \geq m \geq 1$ olmak üzere, P_{3m}, P_{3n} yol graflar olsun.

$\gamma_t\left(P_{3m} \otimes P_{3n}\right) = 3.m.n$ 'dir.

İspat:Çarpım grafta, 3n tane P_{3m} sütunu bulunmaktadır. Böylece çarpım grafı, $3n.\gamma\left(P_3\right)$ ile total olarak domine edilir. aynı şekilde, $3m$ tane P_{3n} satırı bulunmaktadır. Graf, $3m.\gamma\left(P_{3n}\right)$ ile total olarak domine edilebilir. Bu total baskın kümelerin eleman sayılarının eşit olduğu görülür. Böylece;

$\gamma_t\left(P_{3m} \otimes P_{3n}\right) = 3m.\gamma\left(P_{3n}\right) = 3n.\gamma\left(P_{3m}\right)$ 'dir.

$\gamma_t\left(P_{3m} \otimes P_{3n}\right) = 3.m.n$ bulunur.

Teorem 14: $n \geq 3$ olmak üzere, C_n çevre graf ve P_2 yol graf olsun.

$$\gamma_t\left(C_n \otimes P_2\right) = 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

$$\gamma_t\left(P_n \otimes P_2\right) = 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \text{ dir.}$$

İspat : Çarpım grafında ayrık iki C_n'e sahip olduğumuzu görürüz. Bu C_n'ler, $\gamma\left(C_n\right)$ ile domine edilirler. Her iki C_n'den seçilen tepeler de aynı satırda bulunmaktadır. Bu tepeler ile $C_n \otimes P_2$ grafı total olarak domine edilir. Böylece;

$$\gamma_t\left(C_n \otimes P_2\right) = 2.\gamma\left[C_n\right] = 2.\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \text{ bulunur.}$$

* C_n ile $P_n$in baskınlık sayıları aynı şekilde bulunduğundan aynı ispat Pn için de uygulanır.

Teorem 15: $n \geq 3$ olmak üzere, K_n tam graf ve P_m, C_m 'de sırasıyla yol ve çevre graflar,

$$\gamma_t\left(K_n \otimes P_m\right) = m$$

$$\gamma_t\left(K_n \otimes C_m\right) = m \text{ 'dir.}$$

İspat :Çarpım grafta m tane ayrık K_n 'e sahip olduğumuzu görürüz. Bu $\mathrm{K_n}$ 'lerin her biri tek tepe ile domine edilir. Domine edecek tepeler aynı satırda olacak şekilde seçilsin. Böylece bu tepeler ile kendi kendileri de domine edilmiş olur. Sonuç olarak, çarpım grafın total baskın kümesi m tepeli olur. $K_n \otimes P_m$ çarpımının total baskınlık sayısı $\gamma_t\left(K_n \otimes P_m\right) = m$ 'dir.

Çevre graf da, yol graf gibi düşünülür. Böylece yukarıda yol graf için yapılan ispat çevre graf için de geçerlidir.

Teorem 16: $\mathrm{n} \geq \mathrm{m} > 3$ olmak üzere, K_m ve K_n tam graflar olsun.

$$\gamma_t\left(K_n \otimes K_m\right) = m \text{ 'dir.}$$

İspat : Çarpım grafında, *n* tane ayrık K_m vardır. Her $\mathrm{K_m}$, tek tepe ile domine edilir. Her $\mathrm{K_m}$ için sütundaki tepe aynı sırada seçilir. Böylece seçilen tepeler birbirini domine eder. *n* sütun olduğundan *n* tepe ile çarpım grafı total olarak domine edilir. Aynı şekilde, *m* tane ayrık K_n vardır.Bu durumda ise total baskın küme, *m* tepeli olur. $n \geq m$ olduğundan, $\gamma_t\left(K_n \otimes K_m\right) = m$ olur.

Teorem 17: $n \geq m > 3$ olmak üzere, $K_{1,n}$ ve $K_{1,m}$ yıldız graflar olsun.

$$\gamma_t\left(K_{1,n} \otimes K_{1,m}\right) = m+1 \text{ 'dir.}$$

İspat: Çarpım grafının total baskınlık sayısını veren küme ayrık $(m+1)$ tane $K_{1,n}$'dir. Böylece, $\gamma_t\left(K_{1,n} \otimes K_{1,m}\right) = m+1$'dir.

Teorem 18: $m \geq 3, n \geq 3$ olmak üzere, $K_{1,n}$ ve K_m sırasıyla yıldız graf ve tam graf olsun.

$$\gamma_t\left(K_{1,n} \otimes K_m\right) = \begin{cases} m & ,m \leq n \\ n+1 & ,n<m \end{cases} \text{ dir.}$$

İspat:Yıldız grafın merkez tepesinin seçilmesi ile tüm tepeler domine edilir. Bu durumda *m* tane ayrık, yıldız graf olduğudan,çarpım graf, *m* tane tepe ile domine edilir. Bu tepeler aynı zamanda K_m grafının tepeleridir. Böylece tepeler birbirini de domine eder. *m* tepeli küme$\left(K_{1,n} \otimes K_m\right)$ grafı için total baskın kümedir. Aynı zamanda, tam graf herhangi bir tepesinin seçilmesi ile domine edilir. Bu durumda ise $(n+1)$ tane ayrık K_m olduğunu düşünelim. Bu $(n+1)$ tepe ile hem grafın tepeleri hem de seçilen tepeler birbirine domine etmiş olur. $(n+1)$ tepe kümesi $\left(K_{1,n} \otimes K_m\right)$ grafı için total baskın kümedir. Böylece $\left(K_{1,n} \otimes K_m\right)$ çarpım grafının total baskınlık sayısı,

$$\gamma_t\left(K_{1,n} \otimes K_m\right) = \begin{cases} m & ,m \leq n \\ m+1 & ,n<m \end{cases} \text{ olur.}$$

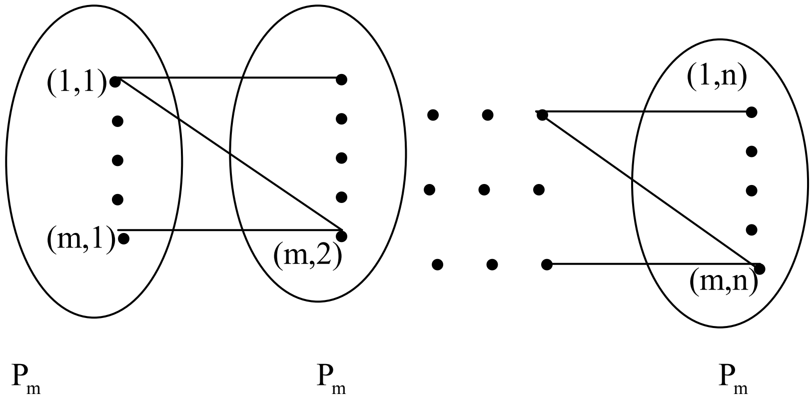
3.4.2. Graflarda Dense Çarpma İşlemi ile Total Baskınlık Sayısı:

Dense çarpma işlemi uygulanan grafların total baskınlık sayılarının grafların kendi ölçümlerine bağlı olarak nasıl değiştiği incelenmiştir.

Teorem 19: $m \geq n$ olmak üzere, P_n ve P_m yol graflar $\mathrm{C_m}$ ve $\mathrm{C_n}$ çevre graflar olsun.

$$\gamma_t\left(P_m \text{ e } P_n\right) = \gamma_t\left(P_n\right) \qquad \gamma_t\left(C_m \text{ e } C_n\right) = \gamma_t\left(C_n\right) \text{'dir.}$$

İspat: Dense çarpım tanımını göz önüne alalım. Bu durumda tek bir P_m'i total olarak domine eden tepe ile tüm çarpım grafı total olarak domine edilmiş olur. Bu total baskın kümenin eleman sayısı, $\gamma_t(P_m)$ değerine eşittir. Aynı şekilde, n tane ayrık P_m için ,birbirini total olarak domine eden tepe ile tüm graf total olarak domine edilmiş olur. Burdan total baskın kümenin eleman sayısı ise, $\gamma_t(P_m)$ değerine eşit olur.Bu durumda $m \geq n$ olduğundan $\gamma_t(P_m) \geq \gamma_t(P_n)$ olur. Böylece $\gamma_t(P_m \text{ e } P_n) = \gamma_t(P_n)$ olur.

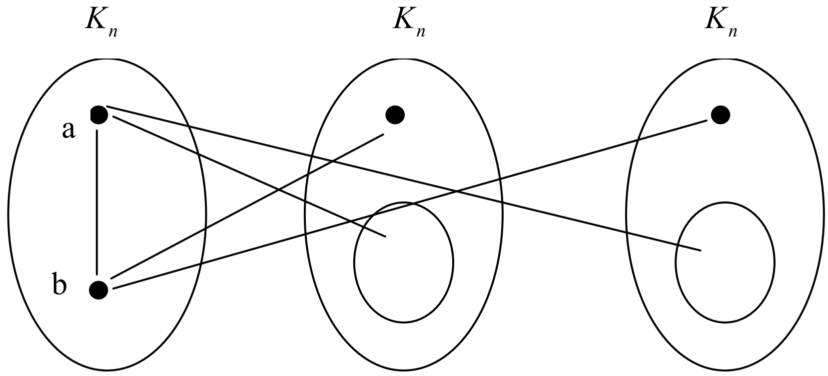


Aynı şekilde, Çevre graf da yol graf ile aynı total baskınlık sayısına sahiptir. Bu nedenle yol graf için yapılan ispat, çevre graf için de geçerlidir.

Teorem 20: K_n tam graf ve G de herhangi bir birleştirilmiş graf olsun.

$\gamma_t\left(K_n \text{ e } G\right) = 2$'dir.

İspat : K_n tam grafının total baskınlık sayısı 2'dir. Dense çarpımın tanımından , seçilen ilk tepe ile diğer K_n'lerde her sütundaki $\left(n-1\right)$ tane tepe domine edilmiş olur. Seçilen tepeyi domine eden ikinci tepe seçilir. Bu tepe ile n.ci satırdaki *G* nin tepeleri domine edilir. Böylece $\gamma_t\left(K_n \text{ e } G\right) = 2$'dir.

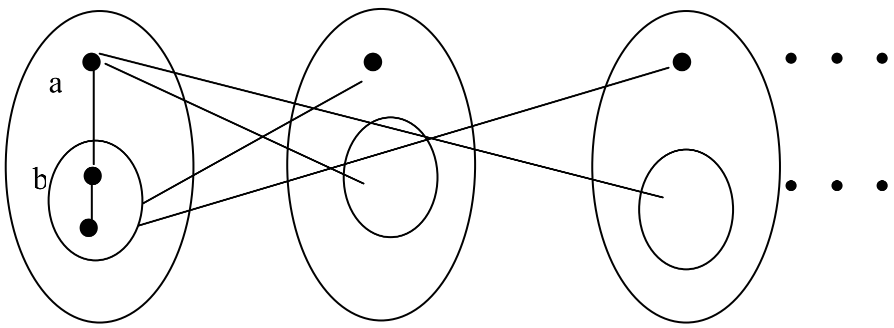


$\gamma_t\left(K_n \text{ e } G\right) = 2$ $\quad$ $A = \{a, b\}$

Teorem 21: $K_{1,n}$ yıldız graf ve G' de herhangi bir birleştirilmiş graf olsun.

$$\gamma_t\left(K_{1,n} \text{ e } G\right) = 2 \text{'dir.}$$

İspat: $K_{1,n}$ yıldız grafının total baskınlık sayısı ikidir. Merkez tepe ve uç tepelerden birinin seçilmesi ile $K_{1,n}$ grafı total olarak domine edilir. Aynı zamanda seçilen merkez tepe ile diğer $K_{1,n}$'lerdeki merkez tepeler dışındaki tüm tepeler domine edilmiş olur. Bu $K_{1,n}$ grafındaki tepeyi domine eden tepenin seçilmesi ile diğer $K_{1,n}$'lerdeki merkez tepeler de domine edilmiş olur. Böylece $\gamma_t\left(K_{1,n} \text{ e } G\right) = 2$'dir.



$K_{1,n}$ $K_{1,n}$ $K_{1,n}$

$\{a,b\}$ $\gamma_t\left(K_{1,n} \text{ e } G\right) = 2$

BÖLÜM 4

Bu bölümde Baskınlık ve Total baskınlık sayılarına birer uygulama olarak satranç tahtası ile ilgili bazı problemler ve çözümleri verilmiştir.

4.1.BaskınlıkUygulaması: SatrançTahtası (Chess Board)

Problemleri

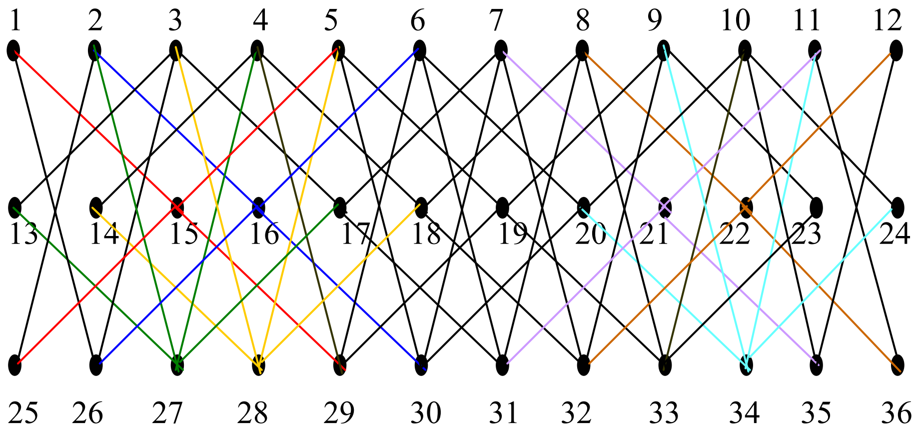
Büyüklüğü verilmiş bir satranç tahtası üzerinde, her kare en az bir karakter tarafından korunacak şekilde minimum sayıda kale, vezir, at veya piyon nasıl yerleştirilmelidir.(Karakter yerleştirilen kareler hariç).

Problem 1.

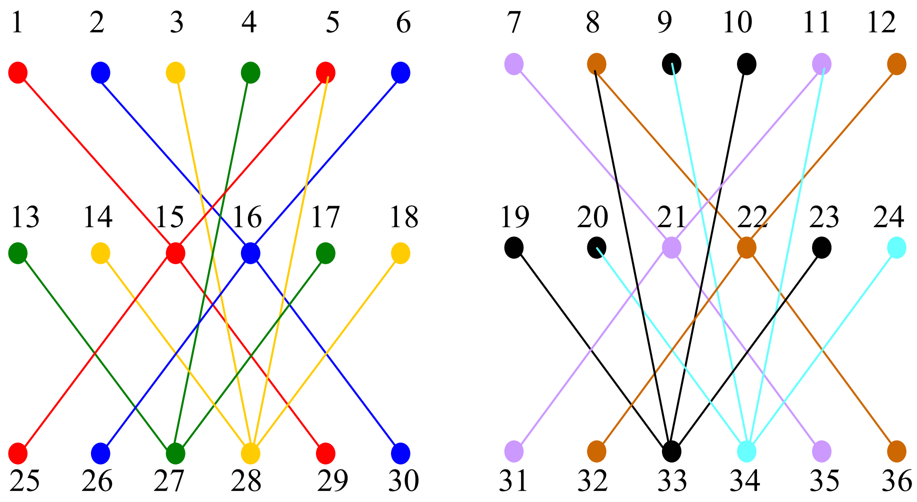
3 x 12 boyutunda bir tahtanın 8 at ile domine edilmesi:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36

3x12 lik Satranç tahtası



Atın L hareketine göre satranç tahtasının grafi



8 tane atın, L şeklinde gittiği düşünülürse;

15 tepesinin seçilmesi ile ; 1., 5., 25. ve 29. tepelerin

16 tepesinin seçilmesi ile ; 2., 6., 26. ve 30. tepelerin

27 tepesinin seçilmesi ile ; 4., 13. ve 17. tepelerin

28 tepesinin seçilmesi ile ; 3., 5., 14. ve 18. tepelerin

21 tepesinin seçilmesi ile ; 7., 11., 31. ve 35. tepelerin

22 tepesinin seçilmesi ile ; 8., 12., 32. ve 36. tepelerin

32 tepesinin seçilmesi ile ; 19. ve 23. tepelerin

34 tepesinin seçilmesi ile ; 9., 20. ve 24. tepelerin

domine edilmiş olduğu görülür.

Böylece 3 x 12'lik bir tahta için atlar; 8., 15., 16., 27., 28., 21., 22., 32. ve 34. tepelere yerleştirilerek tahtanın tüm kareleri savunulmuş olur. Aynı zamanda {8, 15, 16, 21, 22, 27, 28, 32, 34} kümesi at hareketine göre grafın baskın kümesidir.

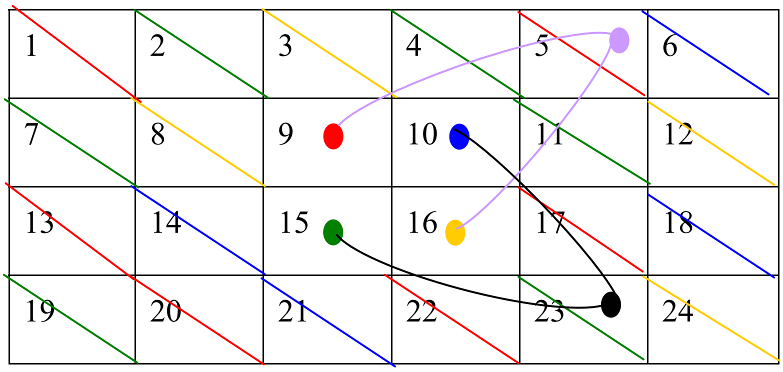
4.2. Total Baskınlık Uygulaması:Satranç Tahtası (Chess Board) Problemleri

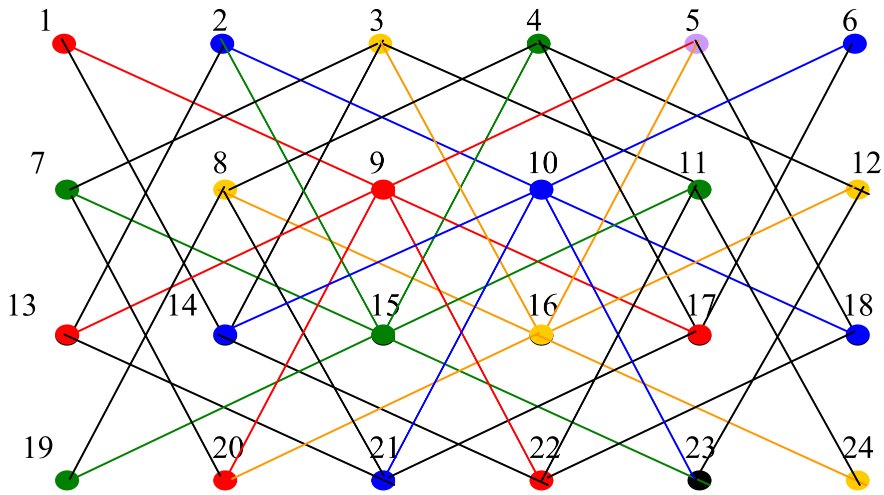
Belli büyüklükteki bir satranç tahtası üzerinde, minimum sayıda kale, vezir, at veya piyon nasıl yerleştirilsin ki, tüm tahtanın her karesi bu parçalar tarafından korunsun (Parçaların yerleştirileceği kareler dahil).

Problem 1.

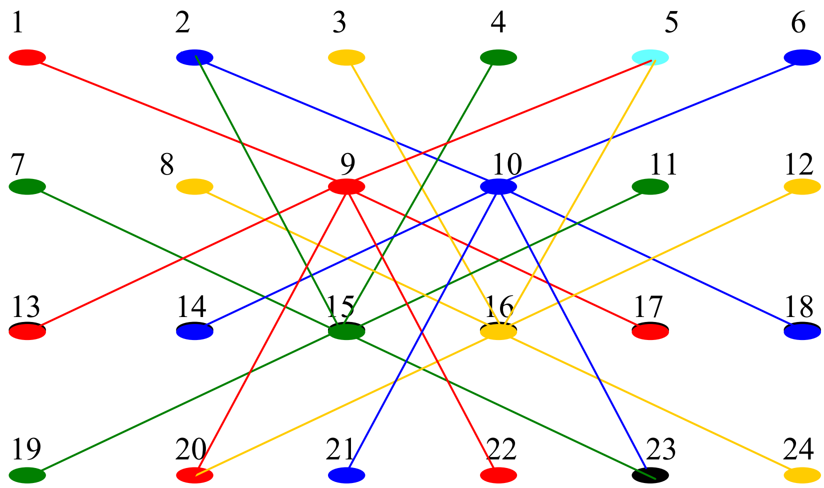
4 x 6 boyutunda bir tahtanın 6 at ile total olarak domine edilmesi

.





Atın L hareketine göre tahtanın grafı



6 tane atın, L şeklinde gittiği düşünülse;

9 tepesinin seçilmesi ile ; 1., 5., 13., 17., 20., 22 tepeleri

10 tepesinin seçilmesi ile ; 2., 6., 14., 18., 21., 23 tepeleri

15 tepesinin seçilmesi ile ; 2., 4., 7., 11., 19., 23 tepeleri

16 tepesinin seçilmesi ile ; 3., 5., 8., 12., 20., 24 tepeleri

domine edilmiş olur. Başka bir deyişler 4 x 6'lık tahta korunmuş olur. Fakat 9., 10., 15. ve 16. karelerinde başka atlar tarafından domine edilmesi gerekiyor. Böylece

5 tepesinin seçilmesi ile 9 ve 16 tepeleri

23 tepesinin seçilmesi ile de 10 ve 15 tepeleri domine edilmiş olur. Böylece atların bulunacağı karelerde dahil olmak üzere tüm tahta domine edilmiş olur. Başka bir deyişle total olarak domine edilmiş olur. {5, 9, 10, 15, 16, 23} no'lu kareler 4 x 6'lık tahta için total baskın kümesi olur.

SONUÇ

Çalışmanın sonucunda komşuluk kavramına bağlı olarak tanımlanış; baskınlık ve total baskınlık sayısının çeşitli graflar için değerlerine erişilmiştir

Bu çalışmada, hiyerarşik problemler göz önüne alındığında, baskınlık ve total baskınlık sayısı yardımıyla çözüme deterministik bir yaklaşımda bulunulmuştur. Teoremler sonucunda çeşitli graflar ve özel graf işlemleri sonucunda baskınlık ve total baskınlık sayısı değerlerine ulaşılmıştır. Böylece komşuluğun graf teorideki önemi baskınlık ve total baskınlık sayısı ile vurgulanmıştır.

Yapılan Satranç(chess) problemleri uygulaması ile de çeşitli boyutlardaki satranç tahtalarının belirli sayıdaki atlarla ve hangi şekilde yerleştirileceğinde savunulacağı örneklenmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ernest J. Cockayne, Michael A. Henning, Christina M. Mynhardt, 2003, Vertice Contained in all or in no Minimum Total Dominating set of a Tree,Discrete Mathematics,260,37-44 .

Xyezheng LV, Jingzhong Mao, 2003, Total Domination and Least Total Domination in a Tree, Discrete Mathematics,265,401-404 .

Robert E. Dautermann III, May 2000, Vertices in Total Dominating Sets, A Enesis Presented to the Faculty of the Department of Mathematics, East Tennessee State University.

Mohamed El-Zahar,Sylvain Gravier, Antoaneta Klobucar, January 2004, On The Total Domination Number of Cross Products of Graphs,Laboratoire Leibniz-IMAG, ISSN: 1298-020X

Teresa W. Haynes, Michael A. Henning, Lara Hopkins, 2004, Total Domination on Subdivision Numbers of Trees, Discrete Mathematics, 286,195-202 .

Marilyn Livingston, Quention F. Stout, 1994, Constant Time Computation of Minumum Dominating Sets, In Congressus Numerantium, 105, 116-128 .

Marilyn Livingson, Quentin F. Stout, 1990, Perfect Dominating Sets, In Congressus Numerantium, 79,187-203 .

E.J. Cockyane, 1990, Chessboard Domination Problems, Dicsrete Mathematics, 86, 13-20 .

M. Gardner, 1977, Mathematical Magic Show, W.H. Freeman & Co., New York, 127, 194-202 .

ÖZGEÇMİŞ

08/04/1981 yılında K.K.T.C'de doğdum. İlk öğrenimime 1987 yılında Alsancak İlkokulu(K.K.T.C)'nda başladım ve 1992 yılında tamamladım. Orta öğrenimime 1992 yılında Lapta Yavuzlar Ortaokulu'nda başladım. 1995 yılında 20 Temmuz Fen Lisesi'nde öğrenimime devam ettim ve 1998 yılında tamamladım. 1998 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne giremeye hak kazanarak 2003 yılında Matematik Bölümü Uygulamalı Bilimler Programından mezun oldum. 2004 yılında Ege üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde Bilgisayar Ana Bilim dalında Yüksek Lisansa Başladım. 2004 ve 2005 yılı içinde tez çalışmalarımı yaptım.