TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİ İÇİN ROBUST ALGORİTMALARI

Aysu Özen YAYCILI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2006
ANKARA

Aysu Özen YAYCILI tarafından hazırlanan TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİ İÇİN ROBUST ALGORİTMALARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr.Jale Balibeyoğlu

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından İstatistik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Semra Oral ERBAŞ
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Jale BALİBEYOĞLU
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İhsan KARABULUT
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Emel BAŞAR
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Sevil BACANLI

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİ İÇİN
ROBUST ALGORİTMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Aysu Özen YAYCILI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Nisan 2006

ÖZET

Bu çalışmada, temel bileşenler analizine alternatif olan robust temel bileşenler analizi ile ilgili bilgi verilmiştir.

Daha sonra robust temel bileşenler analizi algoritmalarının aykırı değerlerin belirlenmesinde uygun bir test olabileceği anlatılmıştır. Son olarak istatistiksel paket program yardımıyla türetilen veri kümesinde aykırı değerlerin robust temel bileşenler analizi algoritmaları yardımıyla belirlenmesine yönelik bir uygulama yapılmıştır.

Bilim Kodu : 205.1.066
Anahtar Kelimeler : Aykırı değer, robust, robust temel bileşenler analizi
Sayfa Adedi : 56
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Jale Balıbeyoğlu

ROBUST ALGORITHMS FOR PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS

(M.Sc.Theis)

Aysu Özen YAYCILI

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
April 2006

ABSTRACT

In this study, one of the alternative methods, robust principal component analysis of algoritms has been considered.

Then robust principal component analysis of algoritms has been considered as a formal test for detecting outliers. Finally, a random data generation study was carried out using a statistical software and an application has been achieved for detecting outliers via robust principal component analysis of algoritms.

Science Code : 205.1.066
Key Words : Outliers, robust, robust principal components
Page Number : 56
Advisor : Yrd. Doç. Dr. Jale Balıbeyoğlu

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Yrd.Doç. Dr. Jale BALİBEYOĞLU’na teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

1. GİRİŞ

Veri kümesinde, üzerinde çalışılan dağılım hakkındaki varsayımlar ve örneğe ait gözlemlerin birbirinden bağımsızlığı konusunda bazı sorunlar oluşabilmektedir. Özellikle aykırı değerlerin ortaya çıkardığı sorunlar istatistiksel veri analizlerinin sağlıklı sonuçlar vermemesine yol açmaktadır. Bu değerlerin nasıl belirleneceği istatistikte inceleme konusu olmuştur.

Aykırı değerler, analizde kullanılan modele ait varsayımlara kuşkuyla bakılmasına neden olur. Özellikle de normal dağıldığı varsayılan veri kümesinde model üzerinde ciddi sorunlar yaratabilir. Hazırlanan tezde aykırı değerler, robust temel bileşen algoritmaları yardımıyla belirlenmeye çalışılacaktır.

İkinci bölümde aykırı değerler hakkında genel bilgi verilerek,aykırı değerler üzerinde neden çalışma yapıldığı hakkında bilgi verilecektir.Temel bileşenler analizi ile ilgili uygulamalı olarak konu anlatımına yer verilecektir.

Üçüncü bölümde, robust temel bileşenler analizinden ve farklı bir ağırlıklandırma yöntemi olan robust algoritmaları hakkında bilgi verilecektir.

Dördüncü bölümde, robust temel bileşenler algoritmalarından PCA ve FRPCA algoritmalarıyla bulunan ağırlıklar yardımıyla aykırı değerlerin belirlenmesine yönelik bir uygulama yapılacaktır.

2.GENEL BİLGİLER

2.1. Aykırı Değerler

Bir veri kümesinde önerilen modele uymayan gözlemlere (değerlere) aykırı değer adı verilir. Tek bir bileşen içerisinde büyük ölçüde etkili olan gözlem(ler); her bir değişkene tek değişkenli tekniklerin uygulanması ile kolayca belirlenmekle beraber çok değişkenli veri içerisinde bu gözlemlerin belirlenmesi o kadar kolay değildir. Gözlemler ancak her bir değişken içerisindeki gözlemin diğer değişkenlerle olan ilişkisi birlikte düşünüldüğü zaman belirlenebilir.

Aykırı değerler, süreç üzerinde önemli bilgiler sağlayabilirler. Bazı aykırı değerler hatalı veri kaydına işaret edebilir,üzerinde çalışılan standartların tanımı hakkındaki karışıklıkları, belirsizlikleri veya yanlış istatistiksel modeli belirtebilir. Aykırı değerlerin nedenleri için deneysel araştırmalar yapılmaktadır. Dolayısıyla, aykırı değerlerin hatalı gözlem olarak değerlendirilmesi sadece aykırı değer araştırmasının bir bölümünü oluşturmaktadır.

Üzerinde çalışılan veri kümesi, aykırı değerlere karşı sürekli olarak denetlenmelidir. Çünkü aykırı değerler veri kümesi hakkında kullanışlı bilgiler sağlayabilmektedir. Aynı zamanda aykırı değer belirleme testleri de oldukça dikkatli seçilmelidir.

Her ne kadar incelenecek veri kümesi içinde aykırı değer olduğunu bilmek çok da istenen bir durum olmamasına rağmen veri kümesi için yapılacak aykırı değer araştırmaları oldukça faydalı olmaktadır. Çünkü aykırı değerler birçok nedenden dolayı ortaya çıkabilir. Her bir neden, veri elde etme sürecinin kalitesini arttırmak için yeni imkanlar sağlayabilir ve istatistiksel çıkarımlar yapma konusunda alternatif modeller için bize ipucu verebilir. Aykırı değerler için bazı olası nedenler şunlardır:

Aykırı değerler; kaydetme veya ölçüm hatalarından dolayı ortaya çıkarlar. Bir veri kümesinde bir veya iki adet rahatça fark edilebilen aykırı değerlerin saptanabilmesi ihtimaline rağmen, kuşku uyandırmayan birçok gözlem olabilmektedir.

Veri kümesinin geldiği yığın üzerinde yanlış dağılım varsayımı yapılmış olabilir. Bu durum bazı değerlerin aykırı olduğunu düşünmemize neden olabilir. Yeteri kadar farklı sayıda dağılımdan gelmiş veri kümesinin normal dağılacağı varsayımı da sıkça yapılan yanlış bir varsayımdır. Bazı veri kümeleri sıklıkla aykırı değer gibi görünen gözlemleri kapsayabilirler. Uygun istatistiksel modellerin kullanışı genellikle doğru olmayan bu aykırı değerleri belirler. Bazı durumlarda aykırı değerler için sonuçlanan araştırmalar bizi daha uygun istatistiksel modellere yönlendirebilirler. Bu nedenden dolayı daha fazla uygun istatistiksel model belirlenir.

Aykırı değerlerin belirlenebilmesi için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları aşağıda özetlenmiştir.

1. Mahalanobis uzaklığı hesaplanarak ki-kare nokta grafiğini çizmek ve doğrudan aşırı derecede farklılık gösteren değerleri belirlemek.
2. Tüm değişkenlerin ikişerli nokta grafiğini çizmek ve genel eğilime uymayan gözlemleri belirlemek.
3. Değişkenlerin histogramlarını grafiklerini çizerek gerek dağılımların yapısını gerekse de dağılımlardaki aşırı gözlemleri görmek .

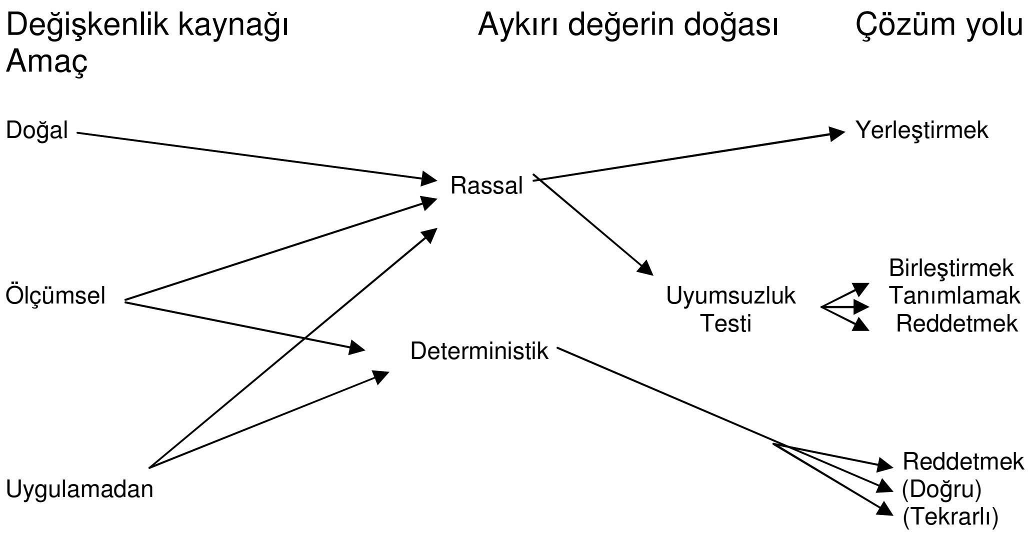
Bu yöntemlerin dışında aykırı değerleri belirlemede en yaygın olarak kullanılan testler ESD (Extreme Studentized Deviate Test) ve L testleridir. Barnett ve Lewis aykırı değeri, veri kümesinin içerisindeki diğer veriye göre çelişkili gözlem olarak nitelendirmiştir. Hawkings aykırı değeri, farklı bir mekanizma tarafından üretilen kuşku uyandıran ve diğerlerinden ayrılan gözlem olarak tanımlamaktadır. Bacman ve Cook, bütünlüğü bozan ve uyumsuz gözlem olarak aykırı değerden bahsetmektedir [1].

Aykırı değerler genelde 3 tip değişkenlik kaynağından oluşur. Birinci değişkenlik kaynağı, verinin doğal yapısıdır. İkinci değişkenlik kaynağı ölçüm hatasıdır. Son olarak da veri elde etme sürecinde oluşabilen dolaylı bir değişkenlik kaynağı olabilir.

Verinin doğasından kaynaklanan değişkenlik kontrol edilemez ve veriyi doğru olarak oluşturmayı açıklayan bir temel modelin dağılımsal özelliklerini yansıtır.

Ölçüm hatası, genellikle çalışmadaki yığının üyelerinden fiziksel ölçümler alınarak incelenir. Ölçme aracındaki yetersizlikler, esas faktördeki değişkenliğin derecesini etkiler. Elde edilen verinin yuvarlanması, kaydedilmesindeki hatalar ölçme hatalarını oluşturan nedenlerdir. Bu tip değişkenliğin kontrolü bir dereceye kadar mümkündür.

Son olarak değişkenlik kaynağı,verinin eksik toplanması olarak gösterilebilir. Elde olmadan yanlı bir örneklem kullanılabilir yada örnekleme, çalışılan yığını doğru temsil etmeyen bireyler dahil edebilir. Her ne kadar duyarlı önlemlerle bunların etkisi azaltılabilinse de uygulama hatalarının farkında olunmayabilir. Aykırı değerlerin genel yapısı aşağıda verilmiştir [2].



Şekil 2.1. Aykırı değerlerin davranışı

2.2. Temel Bileşenler Analizi

Temel Bileşenler Analizi; veri indirgemek, şekil sıkıştırıp, özellik çıkarmak için esaslı ve önemli bir tekniktir.Temel bileşenler analizi; bir değişkenler setinin varyans-kovaryans yapısını, bu değişkenlerin doğrusal birleşimleri yardımıyla açıklayarak, boyut indirgenmesi ve yorumlanmasını sağlayan çok değişkenli bir istatistik yöntemidir [3].

Temel bileşenler analizinde, karşılıklı bağımlılık gösteren, ölçüm sayısı (n) olan p adet değişken; doğrusal, ortogonal ve birbirinden bağımsız olma özellikleri taşıyan k tane yeni değişkene dönüştürülmektedir [4].

n birey (gözlem) ve p değişkenden oluşan veri matrisi, X_{pxn} p boyutlu uzayda olsun. Burada X_{pxn} ham veri matrisi doğrudan kullanılabileceği gibi Z_{pxn} biçiminde ifade edilen standartlaştırılmış değerler matrisini de kullanabilinir. Ham veri matrisinin kullanılması durumunda temel bileşenlerin bulunmasında varyans-kovaryans matrisinden, standartlaştırılmış veri matrisinin kullanılması durumunda ise korelasyon matrisinden yararlanılmaktadır. Oldukça farklı sonuçlar veren bu iki yoldan hangisinin kullanılacağı konusunda belirleyici, verilerin ölçü birimleridir. Eğer verilerin ölçü birimleri ve varyansları birbirine yakın ise kovaryans, değilse korelasyon matrisinden yararlanılır. Pratikte değişkenlerin ölçü birimlerinin birbirine yakın olması pek mümkün olmadığından genelde Z_{pxn} standart matrisi kullanılır.

İstatistiksel analizlerde, konumdan bağımsız ancak ölçeğe bağımlı olan y_J vektörlerinin özelliklerinden yararlanılmaktadır. Özellikler aşağıda verildiği gibidir [5].

- Gerek ham veri matrisi X ve gerekse standartlaştırılmış biçimi olan Z matrisinde değişkenler arasında bağımlılık sözkonusu iken y_j vektörleri birbirinden bağımsızdır. Geometrik olarak y_j değerleri dik eksenlere göre elde edilmiştir. Oysaki z_j değerleri eğik eksenler üzerinde bulunmaktadır.

- Noktaların z_j eksenlerine göre varyans değişiktir ve eksenler arası kovaryans terimi de bulunmaktadır. Oysa ki y_j eksenlerinin varyansları büyükten küçüğe doğru sıralıdır. Ayrıca eksenler birbirine dik olduğundan, kovaryans terimi yoktur ve noktaların dağılımı yalnız varyansla açıklanmaktadır.

- Bu özellikler ek olarak, eğer ilk m tane temel bileşen toplam varyansın büyük kısmını açıklıyorsa geriye kalan p-m tane temel bileşen ihmal edilebilir. Bu durumda az bir bilgi (varyans) kaybıyla üzerinde çalışan uzayın boyutu p'den m'ye ($m<p$) indirgenmiş olur.

- z_j değerlerinin varyansının tümü y_j değişkenleri tarafından açıklanmaktadır. Bu nedenle, p tane y_j temel bileşeninin kullanılması durumunda boyut indirgenme kazancı sağlamasa bile, hiçbir varyans kaybı olmaksızın p tane bağımsız yeni değişken elde edilmiş olur.

Temel bileşenler analizinin, bağımlılık yapısını yok etmek ve boyut indirgenme için kullanıldığından söz edilmiştir. Z matrisinin değişkenleri arasında tam yada tama yakın bağımsızlık olması durumunda, bağımsızlaştırma bir amaç olamayacağı gibi, boyut indirgenmeden de önemli bir kazanç sağlanamaz. Çünkü;

$$\hat{R} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N} z_j z_j' = ZZ^1 = I$$

özelliği nedeniyle z_j'lerin y_j'lere dönüştürülmesinden de yine birim ilişki matrisine ulaşılacaktır. Bu durumda tek değişkenli analizlerdeki varyans karşılığı olan genelleştirilmiş varyans kavramı ve aşağıdaki testler önerilmiştir [5].

$$X_h^2 = -\left\{(n-1) - \frac{1}{6}(2p+5)\right\}\ell og\left|\hat{R}\right|$$

veya

$$X_h^2 = -\left\{(n - \frac{1}{6}(2p+11)\right\}\ell og\left|\hat{R}\right| \approx X^2_{\frac{1}{2}p(p-1)}$$

Küresellik olarak bilinen test için;

$$H_0 : R = I$$
$$H_1 : R \neq I$$

hipotezleri kurulur ve H_o reddedilirse temel bileşenler analizinin kullanılması önerilir [5].

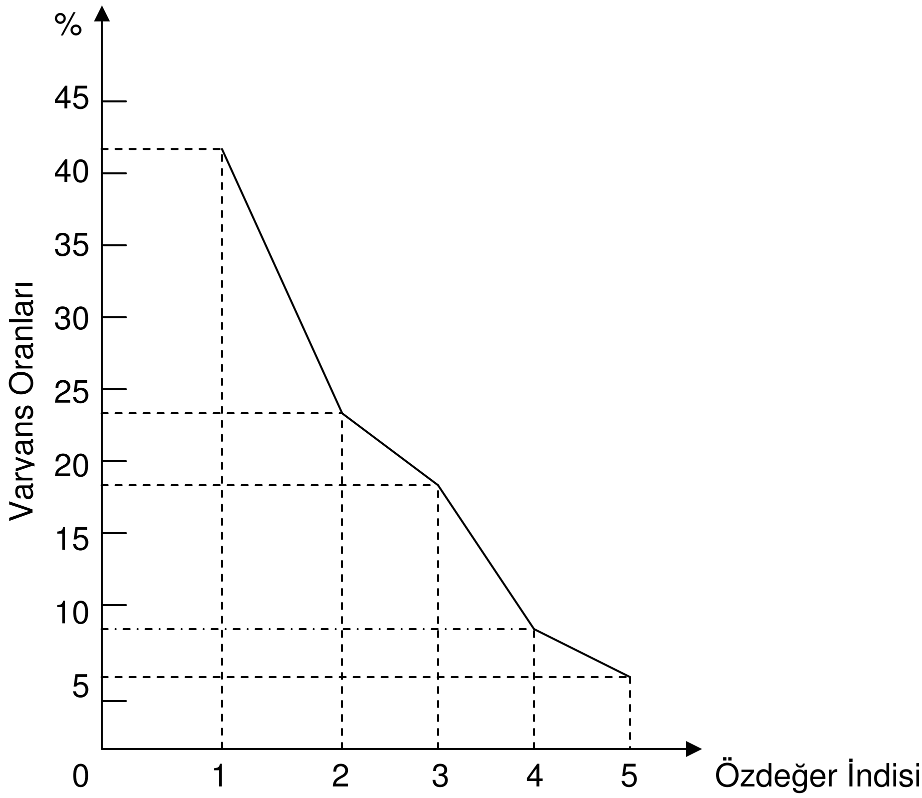
Temel bileşenler analizinde iki amaç olduğu daha önce belirtilmiştir. Bunlardan biri bağımlılık yapısının yok edilmesi, diğeri de boyut indirgemedir. İlk önce $\left|\hat{R} - \lambda I\right| = 0$ ' dan özdeğerler bulduktan sonra içlerinde önemli olan m tane özdeğer sayısına karar verilecektir. Bunun için birçok metot bulunmaktadır. Bunlardan ilki, $\hat{R}$ matrisi kullanıldığı takdirde birden (1'den) büyük özdeğerlerin sayısı, m sayısını verir. Burada kullanılacak eşitlik;

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda j}{p} \geq \frac{2}{3}'d\ddot{u}r\,.$$

Eşitsizliği sağlayan en küçük m değeri önemli iki temel bileşenlerin sayısı olur.

Yöntemlerden ikincisi Anderson yöntemidir. Yöntem örneklemdeki denek sayısının çok olması durumunda kullanılır. Diğer bir yöntem ise Bartlett testidir ve örneklemdeki denek sayısının az olması durumunda kullanılır [5].

Bu yöntemlerin dışında, temel bileşen sayısını belirtmede grafik yöntemlerinden de yararlanılır. Dikey eksene varyans açıklama oranları, yatay eksene ise özdeğerin indisleri yerleştirilir. Varyans oranlarındaki hızlı düşüş noktalarına göre temel bileşen sayısına karar verilir.



Şekil 2.2. Özdeğerlerin varyans açıklama oranları

Yukarıdaki grafiğe bakıldığında en hızlı düşüş birinci ve ikinci özdeğer arasındadır. Ancak % 43'lük bir açıklama oranının yeterli bulunamayacağı düşünülecek olursa ikinci hızlı düşüş noktası üçüncü özdeğerden sonra olduğu için temel bileşen sayısı üç olarak belirlenir ve seçilen ilk üç temel bileşen toplam varyansın % 88'i gibi büyük bir oranını açıklamaktadır.

2.2.1. Örnek uygulama

26 Avrupa ülkesinin 1979 yılı verileri kullanılarak istihdam durumu incelenmek istenmiştir. x_1-tarım, x_2- madencilik, x_3 – imalat, x_4- enerji üretimi, x_5- inşaat, x_6- servis endüstrisi, x_7-finans, x_8- sosyal ve personel servisi, x_9- taşımacılık ve iletişim olmak üzere dokuz farklı sektörde istihdam edilenlerin yüzdeleri aşağıda verilmiştir. Bu veriler kullanılarak temel bileşenler analizi uygulanacaktır. Daha sonra temel bileşenler analizinin gerekli olup olmadığına karar verilecektir.

Çizelge 2.1. 9 değişken ve 26'şar gözlemden oluşan orijinal gözlemler

Ülkeler	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
Belçika	3,3	0,9	27,6	0,9	8,2	19,1	6,2	26,6	7,2
Danimarka	9,2	0,1	21,8	0,6	8,3	14,6	6,5	23,2	7,1
Fransa	10,8	0,8	27,5	0,9	8,9	16,8	6,0	22,6	5,7
B. Almanya	6,7	1,3	35,8	0,9	7,3	14,4	5,0	22,3	6,1
İrlanda	23,2	1,0	20,7	1,3	7,5	16,8	2,8	20,8	6,1
İtalya	15,9	0,6	27,6	0,5	10,0	18,1	1,6	20,1	5,7
Lüksemburg	7,7	3,1	30,8	0,8	9,2	19,5	4,6	19,2	6,2
Hollanda	6,3	0,1	22,5	1,0	9,9	19,0	6,8	28,5	6,8
İngiltere	2,7	1,4	30,2	1,4	6,9	16,9	5,7	28,3	6,4
Avusturya	12,7	1,1	30,2	1,4	9,0	16,8	4,9	16,8	7,0
Finlandiya	13,0	0,4	25,9	1,3	7,4	14,7	5,5	24,3	7,6
Yunanistan	41,4	0,6	17,6	0,6	8,1	11,5	2,4	11,0	6,7
Norveç	9, 0	0,5	22,4	0,8	8,6	16,9	4,7	27,6	9,4
Portekiz	27,3	0 ,3	24,5	0,6	8,4	13,3	2,7	16,7	5,7
İspanya	22,9	0, 8	28,5	5,7	11,5	9,7	8,5	11,8	5,5
İsveç	6,1	0, 4	25,9	0,8	7,2	14,4	6,0	32,4	5,8
İsviçre	7,7	0, 2	37,8	0,8	9,5	17,5	5,3	15,4	5,7
Türkiye	66,8	0,7	7,9	0,1	2,8	5,2	1,1	11,9	3,2
Bulgaristan	23,6	1,9	32,3	0,6	7,9	8,0	0,7	18,2	6,7
Çekoslovakya	16,5	2,9	35,5	1,2	8,7	9,2	0,9	17,9	7,0
D. Almanya	4,2	2,9	41,2	1,3	7,6	11,2	1,2	22,1	8,4
Macaristan	21,7	3,1	29,6	1,9	8,2	9,4	0,9	17,2	8,0
Polonya	31,1	2,5	25,7	0,9	8,4	7,5	0,9	16,1	6,9
Romanya	34,7	2,1	30,1	0,6	8,7	5,9	1,3	11,7	5,0
S.Birliği	23,7	1,4	25,8	0,6	9,2	6,1	0,5	23,6	9,3
Yugoslavya	48,7	1,5	16,8	1,1	4,9	6,4	11,3	5,3	4,0

Temel bileşenler analizinde; değişkenlerin ölçü birimleri ve varyansları birbirine yakın ise varyans-kovaryans matrisinden yakın değilse korelasyon matrisi $\hat{R}$'den yararlanır.

Bu uygulamada varyans değerleri birbirine yakın olmadığı için korelasyon matrisi $\hat{R}$ kullanılmıştır.

$$
\hat{R} = \begin{bmatrix}
1,000 & & & & & & & \text{Sim} & \\
0,036 & 1,000 & & & & & & & \\
-0,671 & 0,445 & 1,000 & & & & & & \\
-0,400 & 0,406 & 0,385 & 1,000 & & & & & \\
-0,538 & -0,026 & 0,495 & 0,060 & 1,000 & & & & \\
-0,737 & -0,397 & 0,204 & 0,202 & 0,356 & 1,000 & & & \\
-0,220 & -0,443 & -0,156 & 0,110 & 0,016 & 0,366 & 1,000 & & \\
-0,747 & -0,281 & 0,154 & 0,132 & 0,158 & 0,572 & 0,108 & 1,000 & \\
-0,565 & 0,157 & 0,351 & 0,375 & 0,388 & 0,188 & -0,246 & 0,568 & 1,000
\end{bmatrix}
$$

şeklindedir. İlk olarak $\hat{R}$ matrisinden $\left|\hat{R} - \lambda I\right| = 0$ kullanılarak özdeğerler hesaplanır.

$\lambda_1 = 3,487$ $\lambda_2 = 2,130$ $\lambda_3 = 1,099$ $\lambda_4 = 0,995$ $\lambda_5 = 0,543$ $\lambda_6 = 0,383$ $\lambda_7 = 0,226$ $\lambda_8 = 0,137$ $\lambda_9 = 0,000$ olarak bulunur. Bu özdeğerler kullanılarak özvektörler elde edilir.

$(\hat{R} - \lambda I)[t] = 0$ eşitliğinden;

$$
T = \begin{bmatrix}
0,524 & 0,001 & -0,348 & -0,256 & -0,325 & -0,379 & -0,074 & -0,387 & -0,367 \\
0,054 & 0,618 & 0,355 & 0,261 & 0,051 & -0,350 & -0,454 & -0,222 & 0,203 \\
-0,049 & 0,201 & 0,151 & 0,561 & -0,153 & 0,115 & 0,587 & -0,312 & -0,378 \\
0,029 & 0,064 & -0,346 & 0,393 & -0,668 & -0,050 & -0,052 & 0,412 & 0,314 \\
0,213 & -0,164 & -0,385 & 0,295 & 0,472 & -0,283 & 0,280 & -0,220 & 0,513 \\
-0,153 & 0,101 & 0,289 & -0,357 & -0,130 & -0,615 & 0,526 & 0,263 & 0,124 \\
0,021 & -0,726 & 0,479 & 0,256 & -0,211 & 0,229 & -0,188 & -0,191 & 0,068 \\
0,008 & 0,088 & 0,126 & -0,341 & 0,356 & 0,388 & 0,174 & 0,506 & 0,545 \\
-0,806 & -0,49 & -0,366 & -0,019 & -0,083 & -0,238 & -0,145 & -0,351 & -0,072
\end{bmatrix}
$$

özvektör matrisi elde edilir.

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = p \Rightarrow 3{,}487 + 2{,}130 + ...0{,}000 = 9$$

Birinci Asıl Temel Bileşen $y_1 = \sqrt{\lambda_1}\left[t_1\right] = \sqrt{3{,}487}\begin{bmatrix} 0{,}524 \\ 0{,}054 \\ -0{,}049 \\ 0{,}029 \\ 0{,}213 \\ -0{,}153 \\ 0{,}021 \\ 0{,}008 \\ -0{,}806 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}978 \\ 0{,}100 \\ -0{,}091 \\ 0{,}054 \\ 0{,}397 \\ -0{,}285 \\ 0{,}0392 \\ 0{,}014 \\ -1{,}505 \end{bmatrix}$

İkinci Asıl Temel Bileşen $y_2 = \sqrt{\lambda_2}\left[t_2\right] = \sqrt{2{,}130}\begin{bmatrix} 0{,}001 \\ 0{,}618 \\ 0{,}201 \\ 0{,}064 \\ -0{,}164 \\ 0{,}101 \\ -0{,}726 \\ 0{,}088 \\ -0{,}49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}001 \\ 0{,}901 \\ 0{,}293 \\ 0{,}093 \\ -0{,}239 \\ 0{,}147 \\ -1{,}059 \\ 0{,}128 \\ -0{,}071 \end{bmatrix}$

Üçüncü Asıl Temel Bileşen $y_3 = \sqrt{\lambda_3}\left[t_3\right] = \sqrt{1{,}099} - \begin{bmatrix} -0{,}348 \\ 0{,}355 \\ 0{,}151 \\ -0{,}346 \\ -0{,}385 \\ 0{,}289 \\ 0{,}479 \\ 0{,}126 \\ -0{,}366 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0{,}364 \\ 0{,}372 \\ 0{,}158 \\ -0{,}362 \\ -0{,}403 \\ 0{,}302 \\ 0{,}501 \\ 0{,}132 \\ -0{,}383 \end{bmatrix}$

Dördüncü Asıl Temel Bileşen $y_4 = \sqrt{\lambda_4}\,[t_4] = \sqrt{0,995}\begin{bmatrix} -0,256 \\ 0,261 \\ 0,561 \\ 0,393 \\ 0,295 \\ -0,357 \\ 0,256 \\ -0,341 \\ -0,019 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,255 \\ 0,260 \\ 0,559 \\ 0,391 \\ 0,294 \\ -0,355 \\ 0,255 \\ -0,339 \\ -0,018 \end{bmatrix}$

Beşinci Asıl Temel Bileşen $y_5 = \sqrt{\lambda_5}\,[t_5] = \sqrt{0,543}\begin{bmatrix} -0,325 \\ 0,051 \\ -0,153 \\ -0,668 \\ 0,472 \\ -0,130 \\ -0,211 \\ 0,356 \\ -0,083 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,239 \\ 0,037 \\ -0,112 \\ -0,491 \\ 0,347 \\ -0,095 \\ -0,155 \\ 0,262 \\ -0,061 \end{bmatrix}$

Altıncı Asıl Temel Bileşen $y_6 = \sqrt{\lambda_6}\,[t_6] = \sqrt{0,383}\begin{bmatrix} -0,379 \\ -0,350 \\ 0,115 \\ -0,050 \\ -0,283 \\ -0,615 \\ 0,229 \\ 0,388 \\ -0,238 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,234 \\ -0,216 \\ 0,071 \\ -0,030 \\ -0,174 \\ -0,380 \\ 0,141 \\ 0,239 \\ -0,147 \end{bmatrix}$

Yedinci Asıl Temel Bileşen $y_7 = \sqrt{\lambda_7}\left[t_7\right] = \sqrt{0,226}\begin{bmatrix} -0,074 \\ -0,454 \\ 0,587 \\ -0,052 \\ 0,280 \\ 0,526 \\ -0,188 \\ 0,174 \\ -0,145 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,035 \\ -0,215 \\ 0,278 \\ -0,024 \\ 0,133 \\ 0,249 \\ -0,089 \\ 0,082 \\ -0,068 \end{bmatrix}$

Sekizinci Asıl Temel Bileşen $y_8 = \sqrt{\lambda_8}\left[t_8\right] = \sqrt{0,137}\begin{bmatrix} -0,387 \\ -0,222 \\ -0,312 \\ 0,412 \\ -0,220 \\ 0,263 \\ -0,191 \\ 0,506 \\ -0,351 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,143 \\ -0,082 \\ -0,115 \\ 0,152 \\ -0,081 \\ 0,097 \\ -0,070 \\ 0,187 \\ -0,129 \end{bmatrix}$

olarak bulunur.

$$V = \begin{bmatrix} 0,978 & 0,001 & -0,364 & -0,255 & -0,239 & -0,234 & -0,035 & -0,143 \\ 0,100 & 0,901 & 0,372 & 0,260 & 0,037 & -0,216 & -0,215 & -0,082 \\ -0,091 & 0,293 & 0,158 & 0,559 & -0,112 & 0,071 & 0,278 & -0,115 \\ 0,054 & 0,093 & -0,362 & 0,391 & -0,491 & -0,030 & -0,024 & 0,152 \\ 0,397 & -0,239 & -0,403 & 0,294 & 0,347 & -0,174 & 0,133 & -0,081 \\ -0,285 & 0,147 & 0,302 & -0,355 & -0,095 & -0,380 & 0,249 & 0,097 \\ 0,039 & -0,159 & 0,501 & 0,255 & -0,155 & 0,141 & -0,089 & -0,070 \\ 0,014 & 0,128 & 0,132 & -0,339 & 0,262 & 0,239 & 0,082 & 0,187 \\ -1,505 & -0,071 & -0,383 & -0,018 & -0,061 & -0,147 & -0,068 & -0,129 \end{bmatrix}$$

Buradan $W = (v_{iJ})^2;\ (i, j = 1,.....p)$ hesaplanır.

TOPLAM	3,487	2,130	1,099	0,995	0,543	0,383	0,226	0,137	0
ORAN	38,7	23,6	12,2	11,1	6,0	4,2	2,5	1,6	0

Elde edilen özvektörleri kullanarak denklemleri yazarsak;

$$y_1 = 0{,}524x_1 + 0{,}001x_2 - 0{,}348x_3 - 0{,}256x_4 - 0{,}325x_5 - 0{,}379x_6 - 0{,}074x_7 - 0{,}387x_8 - 0{,}367x_9$$

$$y_2 = 0{,}054x_1 + 0{,}618x_2 + 0{,}355x_3 + 0{,}261x_4 + 0{,}051x_5 - 0{,}350x_6 - 0{,}454x_7 - 0{,}222x_8 + 0{,}203x_9$$

$$y_3 = -0{,}049x_1 + 0{,}201x_2 + 0{,}151x_3 + 0{,}561x_4 - 0{,}153x_5 + 0{,}115x_6 + 0{,}587x_7 - 0{,}312x_8 - 0{,}378x_9$$

$$y_4 = 0{,}029x_1 + 0{,}064x_2 - 0{,}346x_3 + 0{,}393x_4 - 0{,}668x_5 - 0{,}050x_6 - 0{,}052x_7 + 0{,}412x_8 + 0{,}314x_9$$

$$y_5 = 0{,}213x_1 - 0{,}164x_2 - 0{,}385x_3 + 0{,}295x_4 + 0{,}472x_5 - 0{,}283x_6 + 0{,}280x_7 - 0{,}220x_8 + 0{,}513x_9$$

$$y_6 = -0{,}153x_1 + 0{,}101x_2 + 0{,}289x_3 - 0{,}357x_4 - 0{,}130x_5 - 0{,}615x_6 + 0{,}526x_7 + 0{,}263x_8 + 0{,}214x_9$$

$$y_7 = 0{,}021x_1 - 0{,}726x_2 + 0{,}479x_3 + 0{,}256x_4 - 0{,}211x_5 + 0{,}229x_6 - 0{,}188x_7 - 0{,}191x_8 + 0{,}068x_9$$

$$y_8 = 0{,}008x_1 + 0{,}088x_2 + 0{,}126x_3 - 0{,}341x_4 + 0{,}356x_5 + 0{,}388x_6 + 0{,}174x_7 + 0{,}506x_8 + 0{,}545x_9$$

$$y_9 = -0{,}806x_1 - 0{,}49x_2 - 0{,}366x_3 - 0{,}019x_4 - 0{,}083x_5 - 0{,}238x_6 - 0{,}145x_7 - 0{,}351x_8 - 0{,}072x_9$$

yukarıdaki eşitlikler elde edilir.

Elde edilen sonuçları yorumlarsak birinci temel bileşen varyansın % 38,7'sini, ikinci temel bileşen % 23,6'sını, üçüncü temel bileşen % 12,2'sini, dördüncü temel bileşen % 11,1'ini, beşinci temel bileşen % 6,0'sını, altıncı temel bileşen % 4,2, yedinci temel bileşen % 2,5'ini, sekizinci temel bileşen % 1,6'sını, dokuzuncu temel bileşen % 0'sını açıklamaktadır. Boyut indirgeme amacının güdülmesi durumunda birinci ve ikinci temel bileşenle olay açıklanmak istenirse, kaybedilecek varyans % 37,7'tür. Böylece olayımız birinci ve ikinci temel bileşenler ile açıklanacaktır. Yani 1'den büyük özdeğerler ile,

$m = 2 ve \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{p} = \frac{3{,}487 + 2{,}130}{8} \geq \frac{2}{3}$ olduğundan olay birinci ve ikinci temel bileşen ile açıklanır. O halde;

$$y_1 = 0{,}524 z_1 + 0{,}001 z_2 - 0{,}348 z_3 - 0{,}256 z_4 - 0{,}325 z_5 - 0{,}379 z_6 - 0{,}074 z_7 - 0{,}387 z_8 - 0{,}367 z_9$$

$$y_2 = 0{,}054 z_1 + 0{,}618 z_2 + 0{,}355 z_3 + 0{,}261 z_4 + 0{,}051 z_5 - 0{,}350 z_6 - 0{,}454 z_7 - 0{,}222 z_8 + 0{,}203 z_9$$

olur.

$z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = z_7 = z_8 = z_9 = 0{,}1$ standart değer olarak verildiğinde,

$$y_1 = 0{,}524(0{,}1) + 0{,}001(0{,}1) - 0{,}348(0{,}1) - 0{,}256(0{,}1) - 0{,}325(0{,}1) - 0{,}379(0{,}1) - 0{,}074(0{,}1) - 0{,}387(0{,}0) - 0{,}367(0{,}1) = -0{,}1611$$

$$y_2 = 0{,}054(0{,}1) + 0{,}618(0{,}1) + 0{,}355(0{,}1) + 0{,}261(0{,}1) + 0{,}051(0{,}1) - 0{,}350(0{,}1) - 0{,}454(0{,}1) - 0{,}222(0{,}1) + 0{,}203(0{,}1) = 0{,}0516$$

Uygulamada, ham veriler temel bileşenler analizinin uygulanmasının gerekli olup olmadığını araştırmak için küresellik testi yapılmıştır.

$$H_0 : R = I$$
$$H_1 : R \neq I$$

$$X_h^2 = -\left\{(n-1) - \left(\frac{2p \ +5}{6}\right)\right\}\ell n\left|\hat{R}\right| = -\left\{(26-1) - \left(\frac{2{,}9+5}{6}\right)\right\}\ell n\left|0{,}0213\right|$$

$$X_h^2 = (96{,}225 - 14{,}753) = 81{,}472$$

$$X_t^2 = X^2{}_{\frac{p(p-1)}{2}}; \alpha = x^2{}_{36;0{,}05} = 48{,}459$$

$X_h^2 > X_t^2$ olduğu için H_0 hipotezi reddedilir. Temel bileşenler analizinin uygulaması uygundur.

2.2.2. Temel bileşenler analizinde aykırı değer sorunu

Bir veri kümesinde önerilen modele uymayan gözlemlere (değerlere) aykırı değer adı verilir. Tek bir bileşen içerisinde büyük ölçüde etkili olan gözlem(ler); her bir değişkene tek değişkenli tekniklerin uygulanması ile kolayca belirlenmekle beraber çok değişkenli veri içerisinde bu gözlemlerin belirlenmesi o kadar kolay değildir. Bu gözlemler ancak her bir değişken içerisindeki gözlemin diğer değişkenlerle olan ilişkisi birlikte düşünüldüğü zaman belirlenebilir.

Çok değişkenli veri kümesinde bir veya iki aykırı değer her bir gözlem için Mahalanobis uzaklığının hesaplanması ile saptanabilir. Ancak veri kümesinde pek çok aykırı değer varsa Mahalanobis uzaklığı aykırı değerlerin bulunmasında kullanışlı olmayabilir. Ayrıca çok değişkenli veri kümelerinde aykırı değer olarak bulunması problemleri ile karşılaşıldığında Mahalanobis uzaklığının kullanışsız bir yöntem olduğu çok iyi bilinmektedir [4].

Bu konuda ilk çalışma Campbell (1980) tarafından yapılmıştır. Campbell çalışmasında robust M-kestiricisi kullanılarak aykırı değerlerden etkilenmeyen temel bileşenleri belirlemiştir. Bu yöntemde amaç; aykırı değerlerin etkisini ortadan kaldıracak gerçek ağırlıkları bularak tüm veri kümesini temsil eden gerçek varyans-kovaryans matrisini elde etmektedir [6].

Ardından Li ve Chen (1985), Projection Pursuit (PP)'e dayalı bir çözüm önerdiler. PP yöntemi; çok değişkenli verinin bir doğru yada bir düzlem üzerindeki lineer izdüşümleri yardımı ile orijinal verinin yapısını ortaya çıkarmaya çalışır. Burada tüm veri kümesi hakkında en fazla bilgiyi açığa çıkaran küçük boyutlu izdüşümü bulma amacı ile veri kullanılır. Bu yöntemde amaç; en büyük robust ölçeklemeye sahip izdüşümü alınmış gözlemlerin doğrultusunu belirlemektir. Birbirini izleyen adımlarla her yeni doğrultu önceki tüm doğrultulara dik olacak şekilde belirlenmektedir. Yüksek boyutlu veri kümelerinde hatta $p>n$ iken de dahil olmak üzere iyi sonuç veren bir algoritmadır. İtaratif yöntem olduğu için bazı problemler içermektedir [4].

3. ROBUST TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİ

Robust istatistik, istatistik varsayımlarının sağlanmamasından pek fazla etkilenmiyorsa bu tür istatistiklere denir. Robust metotlar kümesi sözel veri kümelerini değil, nümerik veri kümelerini kullanmaktadır.

Veri kümesinde, üzerinde çalışılan dağılım hakkındaki varsayımlar ve örneğe ait gözlemlerin birbirinden bağımsızlığı konusunda bazı sorunlar oluşabilmektedir. Özellikle aykırı değerlerin ortaya çıkardığı sorunlar temel bileşenler analizinin sağlıklı sonuçlar vermemesine yol açmaktadır. Bu gibi durumlarda robust tahmin metotları gerekir.

Temel bileşenler analizinde robust tahminlerini elde etmek için;

1. Temel bileşenler analizinde kullanılan kovaryans ve korelasyon matrisinin robust tahminleri elde edilerek klasik temel bileşenler analizi çalışması sürdürülebilir [7].

2. Karakteristik kök ve vektörlerin robust tahminleri elde edilebilir. Bu tahminlerden bazıları kovaryans ve korelasyon matrisinin robust tahminlerini elde etmek için kullanılabilir [7].

Bunları uygulamak için genelde Mahalanobis uzaklık fonksiyonundan yararlanılır. Mahalanobis uzaklık fonksiyonu;

$$di = \{(x_i - a)' S^{*-1} (x_i - a\}^{1/2} \tag{3.1}$$

şeklindedir.

Burada x_i bir gözlem vektörü, a ortalamanın tahmin edicisi S^* ise kovaryans matrisinin tahmin edicisidir [7].

$$a = \sum_{i=1}^{n} w_a(d_i) \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_a(d_i)} \tag{3.2}$$

$$S^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_s(d_i^2)[x_i - a][x_i - a]^1}{f\{w_s(d_i^2)\}} \tag{3.3}$$

Burada w ağırlık, $f\{w_s(d_i)\}$ bir adım fonksiyonudur.Belirlenen ağırlıkların her birinin meydana gelme olasılığı 1/n dir.

3.1. Ortalama ve Kovaryansın Robust Tahminleri

Robust tahminlerin elde edilmesindeki birinci metot korelasyon ve kovaryans matrisinden yararlanılarak bulunur. Ortalama ve kovaryansın M tahmin edicileri Eş.3.2'de gösterilen ortalamanın ve Eş.3.3'de gösterilen kovaryans matrisinin tahmin edicilerinin elde edilmesindeki her gözlemin ağırlıklandırılmasını içerir. Merkezden uzak gözlemler daha düşük olarak ağırlıklandırılırlar. Ağırlıklar ile ilgili yöntemlerden bazıları aşağıda verilmiştir [7].

MLT (Maronna, 1976)

$$w_a(d_i) = \frac{p+v}{v+d_i^2} = w_s(d_i^2) \tag{3.4}$$

Burada v çoklu t dağılımına ait serbestlik derecesidir. Genellikle v 1'e eşittir. p değişken sayısıdır.

$f\{w_s(d_i)\} = 1/n$ dir [7].

HUB (Huber, 1964)

$$w_a(d_i) = 1 \qquad d_i \le c_\imath \qquad (3.5)$$

$$= c_1 / d_1 \qquad d_i > c_1 \qquad (3.6)$$

$$w_s(d_i^2) = \{w_a(d_i)\}^2 / \quad c_2$$

$c_1 = X^2{}_{px10}$ ve c_2 ise yansız ortalama tahmini yapmak için bir düzeltmedir [7].

Campbell (1980b)

$$w^*(d_i) = d_i \qquad d_i \le c_3$$

$$= c_3 \exp\left\{-\frac{1}{2}(d_i - c_3)^2 / c_4^2\right\} \qquad d_i > c_3$$

Burada $c_3 = \sqrt{p} + c_5 / \sqrt{2}$ dir.

Buradan;

$$w_a(d_i) = \{w^*(d_i)\} / d_i \qquad (3.7)$$

$$w_s(d_i^2) = \{w_a(d_i)\}^2 \qquad (3.8)$$

$$f(w_s(d_i)) = \sum_{i=\imath}^{n} \{w_s(d_i)\}^2 - 1 \qquad (3.9)$$

şeklinde ifade edilir. Campbell c_4 ve c_5 değerini sırasıyla 1,25 ve 2 olarak önermiştir [6].

3.2. Robust Temel Bileşenler Analizinde Aykırı Değer Algoritmaları

Robust PCA algoritmalarını çıkarmak için Xu ve Yuille (1995) bir optimizasyon fonksiyonu önermiştir. $u_i \in \{0,1\}$bağlı olarak;

$$E(u,w) = \sum_{i=\iota}^{n} u_i e(x_i) + \eta \sum_{i=\iota}^{n} (\iota - u_i) \tag{3.10}$$

dir.

$X = \{x_{1,} x_2,..,x_n\}$veri seti ve $U = \{u_i / i = 1,..,n\}$üye setidir. η başlangıçtır. e(x$_i$) ölçüsü aşağıdaki fonksiyonlardan biri olabilir.

$$e_1(x_i) = \left\| x_i - x^T x_i x \right\|^2$$

$$e_2(x_i) = \left\| x_i \right\|^2 - \frac{\left\| w^T x_i \right\|^2}{\left\| w \right\|} = x_i^T x_i - \frac{w^T x_i x_i^T w}{w^T w}$$

$E_1 = \sum_{i=\iota}^{n} e_1(x_i)$ ve $E_2 = \sum_{i=\iota}^{n} e_2(x_i)$ minimuma indirgeme kuralları;

$$w^{yeni} = w^{eski} + \alpha_t [y(x_i - u) + (y - v)x_i] \tag{3.11}$$

$$w^{yeni} = w^{eski} + \alpha_t \left(x_i y - \frac{w}{w^T w} y^2 \right) \tag{3.12}$$

dir .

α_t, öğrenme oranıdır. Algoritmalarda e=e$_1$ veya e=e$_2$ şeklinde kullanılabilir.

3.2.1. Xu ve Yuille's in PCA algoritmaları

PCA 1 algoritması

Adım 1: İlk olarak t=1 tekrar sayısını, T sınır tekrar, $\alpha_o \in (0,1]$ katsayısı öğrenme, w başlangıç ağırlığı ve başlangıç ŋ kur.

Adım 2 : t, T den daha küçük iken, adım 3-8 yap

Adım 3: i=1 ver ve $\alpha_t = \alpha_o(1-t/T)$'yi hesapla

Adım 4: i, n den daha küçük iken, adım 5-7 yap

Adım 5: $y = w^T x_i, u = yw$ ve $v = w^T u$ hesapla

Adım 6: Ağırlığı güncelleştir;

$$w^{yeni} = w^{eski} + \alpha_t \frac{1}{1+\exp(\gamma e_1(x_i)-\eta)}[y(x_i-u)+(y-v)x_i] \quad (3.13)$$

Adım 7: i'ye 1 ekle

Adım 8: t'ye 1 ekle

PCA2 algoritması

Adım 6 hariç PCA1 algoritmasıyla aynıdır.

Adım 6: Ağırlığı güncelleştir:

$$w^{yeni} = w^{eski} + \alpha_t \frac{1}{1+\exp(\gamma e_2(x_i)-\eta)}[(x_i y - \frac{w}{w^T w} y^2] \quad (3.14)$$

PCA3 algoritması

Adım 6 dışında PCA1 algoritması ile aynıdır.

Adım 6: Ağırlığı güncelleştir:

$$w^{yeni} = w^{eski} + \alpha_t \frac{1}{1+\exp(\gamma e\ (x_i) - \eta)}(x_i y - w y^2) \tag{3.15}$$

γ ve η , bu algoritmada iki parametredir. Xu ve Yuille γ sonsuzluğa doğru artarken ilk önce küçük bir γ, sonra objektif fonksiyonun minimumu kurmayı önermiştir. Bunun için;

$RE = \sum_{i=1}^{n}(u_i)^m e(x_i) + \eta \sum_{i=\iota}^{n}(1-u_i)^m$ objektif fonksiyon önerilir.

$u_i \in \{0,1\}$ ve $m \in [1,\infty)$'dir. m, ağırlık örneğidir. u_i, veri kümesine ait x_i'nin üyeliğidir. (ı-u_i) çıktı kümesine ait x_i'nin üyeliğidir. e(x_i), x_i ve ortalama arasındaki hataları ölçer. Buradan;

$$u_i = \frac{1}{1+(e(x_i)/\eta)^{1/(m-1)}}$$

dir. Burada,

$$\beta\ (x_i) = \left[\frac{1}{1+(e(x_i)/\eta)^{1/m-1}}\right]^m$$

biçiminde tanımlanır. m'yi ayarlamak için herhangi bir kural yoktur. $m=2$'ye ayarlanır. e(x_i), $e_1(x_i)$ ve $e_2(x_i)$ ile yer değiştirince FRPCA1 FRPCA2, FRPCA3 algoritmaları türetilmiştir.

3.2.2. T.N-Wang and Yang' ın FRPCA algoritmaları

FRPCA1 algoritması

Adım 1: Önce iterasyon sayısı t=1'e iterasyon sınırı T'ye öğrenme katsayısı $\alpha_0 \in (0,1]$ başlangıcı η'i küçük pozitif değere ve rastgele başlatılmış ağırlık olan w'yi ayarla.

Adım 2: t, T'den küçükken adım 3-9 yap

Adım 3: $\alpha_t = \alpha_0(1 - t/T)$ hesapla, i=1 ve $\sigma = O$

Adım 4: i, n'den küçükken adım 5-8 yap

Adım 5: $y = w^T x_i, u = yw$ ve $v = w^T u$ hesapla

Adım 6: Ağırlığı güncelleştir:

$$w^{yeni} = w^{eski} + \alpha_t \beta(x_i)[y(x_i - u) + (y - v)x_i] \tag{3.16}$$

Adım 7: Geçici saymayı güncelle : $\sigma = \sigma + e_1(x_i)$

Adım 8: i'ye 1 ekle

Adım 9: η=(σ / n) ve t'ye 1 ekle

FRPCA2 algoritması

Adım 6 ve Adım 7 hariç FRPCA1 algoritması ile aynıdır.

Adım 6: Ağırlığı güncelleştir:

$$w^{yeni} = w^{eski} + \alpha_t \beta(x_i)\left(x_, y - \frac{w}{w^T w} y^2 \right) \tag{3.17}$$

Adım 7: Geçici saymayı güncelle : $\sigma = \sigma + e_2(x_i)$

<u>FRPCA3 algoritması</u>

Adım 6 ve Adım 7 hariç FRPCA1 algoritması ile aynıdır.

Adım 6: Ağırlığı güncelleştir:

$$w^{yeni} = w^{eski} + \alpha_t \beta(x_i)(x_i y - wy^2) \tag{3.18}$$

Adım 7: Geçici saymayı güncelle : $\sigma = \sigma + e(x_i)$

4. UYGULAMA

Bu bölümde robust temel bileşenler analizi algoritmalarından olan PCA ve FRPCA yöntemleri ile her biri 100 gözlemden oluşan 4 değişkenli veri kümesi için aykırı değer belirleme çalışması yapılacaktır.

Çalışma iki aşamalı olarak sürdürülecektir. Çalışmada ortalaması 0 varyansı 1 olan ve her biri 100 gözlemden oluşan 4 değişkenli standart normal dağılım veri kümesi STATGRAPH paket programı tarafından üretilen veriler kullanılmıştır [8].

Verilerin içine 5 adet aykırı gözlem kasıtlı olarak yerleştirilmiştir.Bu gözlemler 20, 40, 60, 80 ve 100. gözlemlerdir. Amaç bunları aykırı değer olarak belirlemektir.

Birinci aşamada belirlenen veri kümesine Xu ve Yuille'nin önerdiği PCA algoritmaları uygulanacak ve aykırı değerler belirlenecektir.

İkinci aşamada yine aynı veri kümesine T.-N. Yang ve S.-D. Wang'ın önerdiği FRPCA algoritmaları uygulanacak ve aykırı değerler belirlenecektir.

Daha sonra bu iki farklı algoritmalardan elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak gösterilecektir.

Bu çalışmada kullanılacak gözlemler Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. 4 değişken ve 100'er gözlemden oluşan orjinal gözlemler

Sıra	x	y	z	t
1	-0,7006	-0,8153	1,0615	-0733
2	-0,7766	-0,37	-1,272	0,225
3	0,3201	-1,5005	-0,1145	-0,445
4	1,2266	0,3765	-1,0102	1,2896
5	0,8558	0,9985	-1,4672	0,7264
6	0,0094	1,1109	0,7324	-1,4364
7	-0,8819	0,3364	0,6783	0,9532
8	1,2147	0,0408	-1,8606	-1,7238
9	2,4972	0,3422	-0,3824	0,7678
10	-0,2576	0,1939	-1,0938	-1,0675
11	-1,4947	1,0879	-0,3196	0,5247
12	0,0819	0,012	1,0506	0,3137
13	0,5053	0,2491	0,1583	0,2298
14	0,349	-0,4383	0,2793	0,7528
15	0,0113	-0,2834	-0,0074	-0,4178
16	0,1259	0,8508	-0,2436	-0,5566
17	-1,2579	-0,7658	0,8879	-1,1965
18	-2,2768	-0,9327	-0,8577	0,6361
19	-0,1277	-0,7312	-0,4756	0,2693
20	12,82	6,452	10,148	12,1151
21	-0,6337	0,3105	-1,3628	1,3126
22	0,7257	-0,3046	1,7763	0,8351
23	-0,8364	-0,1565	1,0007	-0,0792
24	0,8214	-1,0169	1,41	1,7599
25	0,5033	-0,3609	0,1356	0,5715
26	1,6453	-0,6484	0,0986	1,6186
27	0,2333	1,0899	-1,22	-1,1183
28	0,9009	0,7008	-0,9281	-0,0744
29	-0,5223	-0,2379	-0,6508	-1,0381
30	0,4651	-0,7554	-1,4382	-0,2432
31	0,8789	-0,0762	0,0395	0,524
32	0,7726	-1,4931	-0,4443	-0,3405
33	0,9668	0,77	0,0509	-0,0604
34	1,0385	1,4372	0,9048	-0,2339
35	2,4062	-0,0199	0,2925	0,6106
36	-0,2418	-1,0264	1,3475	1,2142
37	-0,0648	-1,385	0,193	-0,02
38	-0,5442	-0,6969	0,5211	0,7449
39	-0,4634	0,7597	0,1931	0,147
40	13,253	-14,4767	-14,14	-16,576
41	-0,022	0,1807	-1,6231	1,2903
42	0,4	-0,3851	0,2121	-0,9888

Çizelge 4.1. (Devam) 4 değişken ve 100’er gözlemden oluşan orjinal gözlemler

43	1,0233	-0,7431	-0,5877	0,3259
44	-0,3138	-0,1293	1,9178	-0,287
45	1,3048	0,7105	-1,2422	-1,7104
46	-0,0092	1,1981	-0,0414	-0,5227
47	-1,0941	-0,5847	1,6738	0,6295
48	1,5322	-0,0821	0,2332	1,4763
49	0,0231	0,2453	-1,0251	0,7481
50	-1,4087	0,0936	-0,3183	-0,7082
51	1,0988	-0,5207	-1,242	1,7489
52	0,6717	0,62	-1,5339	-2,444
53	-0,4192	0,9433	1,5679	-0,7372
54	-0,9071	1,9776	0,2635	0,1389
55	0,9305	-0,2972	-0,7305	0,6767
56	-1,0181	0,5269	-0,2049	-1,3973
57	1,2302	-0,5974	0,6193	-0,3394
58	-0,2456	1,3901	0,2483	-0,949
59	-0,3085	1,928	-0,7921	-1,6222
60	-23,204	10,0453	-16,323	18,8223
61	0,9128	1,6763	0,7866	-0,184
62	-0,6782	0,6179	-0,1464	-0,3482
63	1,2325	-0,3396	1,1466	0,095
64	0,1381	1,3643	0,6858	0,401
65	-0,3412	-0,0071	-0,533	-0,0769
66	-1,6509	-2,2126	0,5155	-1,4216
67	-0,7335	-0,195	-2,5619	2,7323
68	0,6093	0,664	0,6958	-0,9167
69	-0,2687	-0,015	0,7396	-0,1474
70	0,2329	-2,0138	-1,7209	1,3305
71	1,603	-0,4051	0,0761	0,9552
72	0,8407	0,3795	0,4995	-0,5248
73	1,562	-0,8217	-0,1395	0,8238
74	-0,6518	-0,266	-1,1948	0,7356
75	-0,438	-1,4608	-1,2726	0,4337
76	0,5042	-0,0916	-0,2865	1,467
77	-1,2352	-0,9707	-0,1587	1,0538
78	0,168	-0,4065	1,039	0,3021
79	1,3598	0,4479	0,7294	0,1081
80	-14,423	-20,222	13,2	-15,826
81	-0,9473	0,9151	1,09	0,3431
82	-1,0108	0,3291	-0,5507	-0,6512
83	-0,001	-0,1823	-0,577	0,3729
84	2,6093	0-9128	-0,8171	-0,7959
85	1,6591	0,5818	-0,47	0,2158

Çizelge 4.1. (Devam) 4 değişken ve 100'er gözlemden oluşan orjinal gözlemler

86	1,9975	-1,3154	2,7703	-0,4744
87	-0,3124	0,7092	-0,1921	-0,2321
88	0,3955	2,555	0,2942	0,5151
89	0,6128	1,2727	1,3636	0,2712
90	1,5122	-0,1356	0,1605	0,0926
91	-0,8532	2,2344	0,1976	1,6255
92	-0,3732	-0,588	-0,6953	-1,9846
93	-0,378	2,1991	-1,0103	0,5202
94	-1,4893	0,5922	-0,5093	0,5132
95	-1,2367	-0,138	1,6095	-0,2419
96	-0,835	0,7295	-1,8508	0,5886
97	-0,0163	0,3161	2,4001	0,427
98	-1,3774	0,7999	0,8223	-0,476
99	-0,7064	-0,3774	-0,2565	0,366
100	10,981	-18,155	17,527	17,837

Birinci olarak veri kümesine PCA algoritmalarından olan PCA3 algoritması uygulanacaktır. PCA3 algoritması aşağıda gösterilmiştir.

Adım 1: İlk olarak t=1 tekrar sayısını T sınır tekrar, $\alpha_o \in (0,1]$ katsayı öğrenme, w başlangıç ağırlığı ve başlangıç η kur.

Adım 2: t, T'den daha küçük iken, adım 3-8 yap.

Adım 3: i=1 ver ve $\alpha_t = \alpha_o(1 - t/T)$'yi hesapla

Adım 4: i, n den daha küçük iken, adım 5-7 yap

Adım 5: y=w^Tx$_i$, u=yw ve v=w^Tu hesapla

Adım 6: Ağırlığı güncelleştir.

$$w^{yeni} = w^{eski} + \alpha_t \frac{1}{1 + \exp(\gamma e(x_i) - \eta)}(x_i y - w y^2)$$

Adım 7: i'ye 1 ekle

Adım 8: t'ye 1 ekle

Xu ve Yuille'nin önerdiği bu algoritmada T=40, $\alpha_o = 1, w = 0{,}4$ ve η=0,6, $\gamma = 30$ olarak alınacaktır. PCA3 algoritmasını uygulamak için bir program yazılmıştır.

Bu program EK-9 da verilmiştir. PCA3 algoritması uygulandığında elde edilen sonuçların tamamı EKLER kısmında verilmiştir.

Çizelge 4.2. PCA3 algoritması uygulandığında değişkenlere ilişkin aykırı değerler

	x	Y	z	t
Sıra	w^{yeni}	w^{yeni}	w^{yeni}	w^{yeni}
20	6,132235	-71,625	-128,672	3,402
40	-54,912260	18,902	5,000	4,232
60	5,516790	-10,565	3,913	11,524
80	-1,855266	120,236	-51,143	20,671
100	-3,100564	18,769	0,068	-4,0364

Buna göre PCA3 algoritması uygulandığında değişkenlere ilişkin aykırı değerler ve ağırlıkları Çizelge 4.2 de verilmiştir. Çizelge 4.2 den de anlaşılacağı gibi 20, 40, 60, 80 ve 100 üncü sıradaki gözlemler aykırı değere olarak işaretlenmektedir.

Çalışmanın birinci bölümünde PCA algoritmaları yardımıyla aykırı değerler belirlenmiştir. Diğer gözlemlere göre farklılık gösteren gözlemler Çizelge 4.2 de aykırı değer olarak işaretlenmiştir.

İkinci bölümde ise yine aynı veri kümesini kullanarak FRPCA algoritmalarından FRPCA3 algoritması uygulanacaktır. FRPCA3 algoritması aşağıda gösterilmiştir.

Adım 1: Önce iterasyon sayısı t=1'e, iterasyon sınırı T 'ye, öğrenme katsayısı $\alpha_o \in (0,1]$ başlangıcı η'i küçük pozitif değer ve rastgele başlatılmış ağırlık olan w'yi ayarla.

Adım 2: t, T'den daha küçükken, adım 3-9 yap.

Adım 3: $\alpha_t = \alpha_o(1 - t/T)$ hesapla, i=1 ve $\sigma = 0$

Adım 4: i, n den daha küçükken, adım 5-8 yap

Adım 5: y=$w^T x_i$, u=yw ve v=w^Tu hesapla

Adım 6: Ağırlığı güncelleştir.

$$w^{yeni} = w^{yeni} + \alpha_t \beta(x_i)(x_i y - wy^2)$$

Adım 7: Geçici saymayı güncelle;

$$\sigma = \sigma + e_1(x_i)$$

Adım 8: i'ye 1 ekle

Adım 9: η=(σ / n) ve t'ye 1 ekle

Burada;

$$\beta(x_i) = \left(\frac{1}{1 + (e(x_i)/\eta)^{1/m-1}} \right)^m$$

şeklindedir.

T.-N. Yang ve S.-D. Wang'ın önerdiği bu algoritmada T=40, $\alpha_o = 1, w = 0{,}4$ ve η = 0,6 olarak alınacaktır.

FRPCA3 algoritmasından elde edilen sonuçların tamamı EKLER kısmında verilmiştir. Bu algoritma uygulandığında değişkenlere ilişkin aykırı değerler ve ağırlıkları Çizelge 4.3 de verilmiştir.

Çizelge 4.3. FRPCA3 algoritması uygulandığında değişkenlere ilişkin aykırı değerler

	X	y	z	t
Sıra	w^{yeni}	w^{yeni}	w^{yeni}	w^{yeni}
20	29,135	-775,319	-549,709	34,331
40	-405,912	886,902	600,422	300,341
60	10,517	-466,798	49,913	66,645
80	29,922	989,236	-516,144	216,972
100	-31,855	87,682	106,064	10,024

Çizelge 4.3 den de anlaşılacağı gibi 20, 40, 60, 80 ve 100 üncü sıradaki gözlemler aykırı değer olarak işaretlenmektedir.

Çalışmanın ikinci bölümünde FRPCA algoritmaları yardımıyla aykırı değerler belirlenmiştir. Diğer gözlemlere göre farklılık gösteren gözlemler Çizelge 4.3 de aykırı değer olarak işaretlenmiştir.

Sonuç olarak, robust temel bileşenler algoritmaları kasıtlı olarak veri kümesinin içine atılan değerleri tespit edebilmekte ve bu gözlemleri aykırı değer olarak işaretlemektedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

İstatistiksel veri analizinde kullanılan verinin her zaman istenilen varsayımlara uygun olmaması analizin sonuçlandırılmasında sorunlar çıkarabilmektedir. Veri grubundaki bir veya birkaç değer diğer gözlemlere göre farklılık gösterebilir. Bu değerler istatistikte "aykırı değer" olarak ifade edilmektedir.

Çok değişkenli istatistiksel analizin bir konusu olan temel bileşenler analizi, değişkenler arası bağımlılık yapısını yok etmek amacıyla kullanılır.Temel bileşenler analizinde aykırı değerler ortaya çıkarsa modelde bozulmalar olur. Bu konuda çalışmalar yapılmış ve robust temel bileşenler analizi geliştirilmiştir. Robust temel bileşenler analizi, veride aykırı değerler olması ve normallik varsayımlarının tam olarak yerine gelmemesi durumunda dahi iyi sonuçlar verebilen bir istatistiksel analiz yöntemidir.

Robust temel bileşenler analizi ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Campbell ortalama ve varyansların robust kestiricilerini bularak, kullanılan ağırlık değerleri için 1'den küçük olan değerlere aykırı değer demektedir. Bu konuda H.E.Bulut[2001] hazırladığı tezde Campbell 'ın ağırlıklandırma yöntemini kullanarak bir çalışma yapmıştır. Çizelge 4.1 deki verileri kullanarak yaptığı çalışmada, ortalama ve varyansın robust tahminlerini bularak kullandığı ağırlık değerleri için 1'den küçük olan değerleri aykırı değer olarak belirlemiştir. Burada amaç farklı dağılımlardan gelen gözlemlerin çalışmada uygulanacak robust temel bileşenler yöntemiyle ne şeklide işaretleneceğini belirlemek olacaktır.

Xu - Yuille ve T.-N.Yang - S.-D.Wang PCA ve FRPCA adında farklı algoritmalar geliştirerek yeni ağırlıklar elde etmiş ve 1'den çok büyük ağırlık değerlerine aykırı değer demişlerdir.PCA algoritmasının uygulanması işleyiş açısından FRPCA algoritmasına göre daha zordur. FRPCA algoritmaları PCA algoritmalarına göre aykırı değerlere daha yüksek değerler vererek, aykırı değerleri belirlemede daha iyi sonuçlar vermektedir. Diğer gözlem değerlerini de birbirlerine yakınlaştırmaktadır.

Sonuç olarak; FRPCA algoritmaları, hem uygulama kolaylığı hem de aykırı değerleri daha iyi belirlemesi açısından PCA algoritmalarına göre daha iyi sonuçlar vermektedir. İstatistikte karşımıza çıkan aykırı değerler dikkatle incelenmeli ve bu değerlerin kaynağı araştırılmalıdır.

KAYNAKLAR

1. Alpar R. ,”Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş I”, Hacettepe Üniversitesi Tıp Fakültesi Biyoistatistik Bölümü, ***Hacettepe Yayınları,*** 325-335 (1997).

2. Barnett, V and Levis , T.”Outliers In Statistical Data”,***Wiley & Sons Co***, 3-50 (1994).

3. Yang, T. and Wang S, “ Robust Algorithms For Principal Component Analysis”, ***Department of Electrical Engineering National Taiwan University.*** 927-933 (1999).

4. Kıral, G. ve Billor N., “Bacon Temel Bileşenler Analiziyle Sapan Değerlerin Belirlenmesi”,***VII.Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu***,Adana, 1-21 (2000).

5. Tatlıdil, H, “Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz”, Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, ***Akademi Yayınları***,138-166 (1980).

6. Campbell ,”Robust Procedures In Multivariate Analysis I:Robust Covariance Estimation “, ***Applied Statistics***, 231-237 (1980).

7. Flury , B .“Common Principal Components and Related Multivariate Models”,***Wiley&Sons Co***, 231-239 (1998).

8. Bulut H.,”Temel Bileşenler Analizinde Aykırı Değer Sorunu ve Aykırı Değerlerin Robust Temel Bileşenler Analizi ile Belirlenmesi”,Yüksek Lisans Tezi, ***Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***,29-31 (2001).

9. Xu, L., Yuille, A.L. ,Robust principal component analysis by self-organizing rules based on statistical physics approach. ***IEEE Trans. Neural Net***. 6(1):131-143 (1995).

10. Torre, F. and Black M. ,”Robust Principal Components Analysis For Computer Vision”, Department of Computer Science, ***Brown University***,1-8 (1996).

EKLER

EK-1 PCA3 algoritması uygulandığında x değişkenine ait aykırı değerler

Sıra	x	w^{eski}	w^{yeni}	Aykırı değer
1	-0,7006	0,4	0,899999	
2	-0,7766	0,4	1	
3	0,3201	0,4	0,847521	
4	1,2266	0,4	-0,899999	
5	0,8558	0,4	1	
6	0,0094	0,4	0,302016	
7	-0,8819	0,4	1	
8	1,2147	0,4	-0,897100	
9	2,4972	0,4	0,675634	
10	-0,2576	0,4	0,768591	
11	-1,4947	0,4	-0,899999	
12	0,0819	0,4	0,320487	
13	0,5053	0,4	0,899465	
14	0,349	0,4	0,880067	
15	-0,0113	0,4	0,372831	
16	0,1259	0,4	0,507070	
17	-1,2579	0,4	1,000010	
18	-2,2768	0,4	0,899456	
19	-0,1277	0,4	0,424233	
20	12,82	0,4	6,132235	Aykırı Değer
21	-0,6337	0,4	0,899996	
22	0,7257	0,4	0,899999	
23	-0,8364	0,4	1	
24	0,8214	0,4	1	
25	0,5033	0,4	0,89951	
26	1,6453	0,4	-1,002632	
27	0,2333	0,4	0,384597	
28	0,9009	0,4	0,899996	
29	-0,5223	0,4	0,899990	
30	0,4651	0,4	0,899086	
31	08789	0,4	1	
32	0,7726	0,4	0,899999	
33	0,9668	0,4	0,899999	
34	1,0385	0,4	0,899999	
35	2,4062	0,4	0,899654	
36	-0,2418	0,4	0,705741	
37	-0,0648	0,4	0,384254	
38	-0,5442	0,4	0,899692	
39	-0,4634	0,4	0,898662	
40	13,253	0,4	-54,912260	Aykırı Değer
41	-0,022	0,4	0,363653	
42	0,4	0,4	0,896388	
43	1,0233	0,4	0,899996	
44	-0,3138	0,4	0,901356	
45	1,3048	0,4	1	
46	-0,0092	0,4	0,305566	
47	-1,0941	0,4	1	
48	1,5322	0,4	1,001356	
49	-0,0231	0,4	0,363505	
50	-1,4087	0,4	-0,999654	
51	1,0988	0,4	0,899999	

EK-1 (Devam) PCA3 algoritması uygulandığında x değişkenine ait aykırı değerler

52	0,6717	0,4	0,899996	
53	-0,4192	0,4	0,888292	
54	-0,9071	0,4	1	
55	0,9305	0,4	-1	
56	-1,0181	0,4	-0,899999	
57	1,2302	0,4	1	
58	-0,2456	0,4	0,715887	
59	-0,3085	0,4	0,845564	
60	-23,204	0,4	5,516790	Aykırı değer
61	0,9128	0,4	1	
62	-0,6782	0,4	0,889994	
63	1,2325	0,4	0,889996	
64	0,1381	0,4	0,504242	
65	-0,3412	0,4	0,864492	
66	-1,6509	0,4	1,005162	
67	-0,7335	0,4	1	
68	0,6093	0,4	0,869992	
69	-0,2687	0,4	0,765462	
70	0,2329	0,4	0,722056	
71	1,603	0,4	-0,737398	
72	0,8407	0,4	1	
73	1,562	0,4	-0,898966	
74	-0,6518	0,4	-0,899951	
75	-0,438	0,4	0,889043	
76	0,5042	0,4	0,899651	
77	-1,2352	0,4	0,899999	
78	0,168	0,4	0,563591	
79	1,3598	0,4	-0,826571	
80	-14,423	0,4	-1,855266	Aykırı Değer
81	-0,9473	0,4	1	
82	-1,0108	0,4	1	
83	-0,001	0,4	0365466	
84	2,6093	0,4	0,745665	
85	1,6591	0,4	-0,899866	
86	1,9975	0,4	1,000254	
87	-0,3124	0,4	0,847055	
88	0,3955	0,4	0,885066	
89	0,6128	0,4	0,899254	
90	1,5122	0,4	0,600602	
91	-0,8532	0,4	1	
92	-0,3732	0,4	0,860102	
93	-0,378	0,4	0,822176	
94	-1,4893	0,4	0,899826	
95	-1,2367	0,4	0,899254	
96	-0,835	0,4	1	
97	-0,0163	0,4	0,361754	
98	-1,3774	0,4	0,741754	
99	-0,7064	0,4	1	
100	10,981	0,4	-3,100564	Aykırı Değer

EK-2 PCA3 algoritması uygulandığında y değişkenine ait aykırı değerler

Sıra	y	w^{eski}	w^{yeni}	Aykırı değer
1	-0,8153	0,4	0,999898	
2	-0,37	0,4	0,860017	
3	-1,5005	0,4	-0,899659	
4	0,3765	0,4	0,861728	
5	0,9985	0,4	0,996958	
6	1,1109	0,4	0,999599	
7	0,3364	0,4	0,862838	
8	0,048	0,4	0,360954	
9	0,3422	0,4	0,876756	
10	0,1939	0,4	0,580978	
11	1,0879	0,4	0,889996	
12	0,012	0,4	0,360954	
13	0,2491	0,4	0,786902	
14	-0,4383	0,4	0,865422	
15	-0,2834	0,4	0,806659	
16	0,8508	0,4	0,999569	
17	-0,7658	0,4	0,865473	
18	-0,9327	0,4	0,889292	
19	-0,7312	0,4	0,899196	
20	6,452	0,4	-71,625456	Aykırı Değer
21	0,3105	0,4	0,865423	
22	-0,3046	0,4	0,835592	
23	-0,1565	0,4	0,344853	
24	-1,0169	0,4	0,899091	
25	-0,3609	0,4	0,889092	
26	0,4684	0,4	0,795654	
27	1,0899	0,4	0,999558	
28	0,7008	0,4	0,899254	
29	-0,2379	0,4	0,605958	
30	-0,7554	0,4	0,898651	
31	-0,0762	0,4	0,389087	
32	-1,4931	0,4	-0,899964	
33	0,77	0,4	0,898951	
34	1,4372	0,4	-0,365824	
35	-0,0199	0,4	0,302156	
36	-1,0264	0,4	0,887854	
37	-1,385	0,4	0,877671	
38	-0,6969	0,4	0,899698	
39	0,7597	0,4	0,995699	
40	-14,4767	0,4	18,901954	Aykırı Değer
41	0,1807	0,4	0,285764	
42	-0,3851	0,4	0,876587	
43	-0,7431	0,4	0,982456	
44	-0,1293	0,4	0,325466	
45	0,7105	0,4	0,865453	
46	1,1981	0,4	0,875248	
47	-0,5847	0,4	0,815858	
48	-0,0821	0,4	0,345522	
49	0,2453	0,4	0,765451	
50	0,0936	0,4	0,92541	
51	-0,5207	0,4	0,878651	

EK-2 (Devam) PCA3 algoritması uygulandığında y değişkenine ait aykırı değerler

52	0,62	0,4	0,885438	
53	0,9433	0,4	0,99981	
54	1,9776	0,4	0,992165	
55	-0,2972	0,4	0,906171	
56	0,5269	0,4	0,896541	
57	-0,5974	0,4	0,867152	
58	1,3901	0,4	0,899266	
59	1,928	0,4	-0,725676	
60	10,0453	0,4	-10,565461	Aykırı Değer
61	1,6763	0,4	-0,0899651	
62	0,6179	0,4	0,899961	
63	-0,3396	0,4	0,766723	
64	1,3643	0,4	1	
65	-0,0071	0,4	0,386451	
66	-2,2126	0,4	0,787849	
67	-0,195	0,4	0,456651	
68	0,664	0,4	0,928928	
69	-0,015	0,4	0,340350	
70	-2,0138	0,4	-1,000013	
71	-0,4051	0,4	0,969623	
72	0,3795	0,4	0,965381	
73	-0,8217	0,4	0,999866	
74	-0,266	0,4	0,726451	
75	-1,4608	0,4	0,367071	
76	-0,0916	0,4	1	
77	-0,9707	0,4	0897070	
78	-0,4065	0,4	0,929466	
79	0,4479	0,4	0,728461	
80	-20,222	0,4	120,235807	Aykırı Değer
81	0,9151	0,4	0,899952	
82	0,3291	0,4	0,866487	
83	-0,1823	0,4	0,539404	
84	-0,9128	0,4	1	
85	0,5818	0,4	0,869998	
86	-1,3154	0,4	-1	
87	0,7092	0,4	0,958999	
88	2,555	0,4	-0,565931	
89	1,2727	0,4	0,899691	
90	-0,1356	0,4	0,369618	
91	2,2344	0,4	-0,825186	
92	-0,588	0,4	0,898999	
93	2,1991	0,4	0,869186	
94	-0,5922	0,4	0,898651	
95	-0,138	0,4	0,564563	
96	07295	0,4	0,898999	
97	0,3161	0,4	0,942603	
98	0,7999	0,4	0,882899	
99	-0,3774	0,4	0,891747	
100	-18,155	0,4	18,768940	Aykırı Değer

EK-3 PCA3 algoritması uygulandığında z değişkenine ait aykırı değerler

Sıra	z	w^{eski}	w^{yeni}	Aykırı değer
1	1,0615	0,4	0,966699	
2	-1,272	0,4	1	
3	-0,1145	0,4	0,400820	
4	-1,0102	0,4	1	
5	1,4672	0,4	0,989898	
6	0,7324	0,4	0,989898	
7	0,6783	0,4	0,989898	
8	-1,8606	0,4	-1,000005	
9	-0,3824	0,4	0,893251	
10	-1,0938	0,4	0,989999	
11	-0,3196	0,4	0,856202	
12	1,0506	0,4	1	
13	0,1583	0,4	0,475466	
14	0,2793	0,4	0,725192	
15	-0,0074	0,4	0,350351	
16	-0,2436	0,4	0,791712	
17	0,8879	0,4	1	
18	-0,8577	0,4	1	
19	-0,4756	0,4	0,878565	
20	10,148	0,4	-128,671523	Aykırı Değer
21	-1,3628	0,4	1	
22	1,7763	0,4	-0,989651	
23	1,0007	0,4	1	
24	1,41	0,4	1	
25	0,1356	0,4	0,565231	
26	0,0986	0,4	0,465431	
27	-1,22	0,4	0,899999	
28	-0,9281	0,4	1	
29	-0,6508	0,4	0,869393	
30	-1,4382	0,4	0,839696	
31	0,0395	0,4	0,365861	
32	-0,4443	0,4	0,883180	
33	0,0509	0,4	0,367164	
34	0,9048	0,4	1	
35	0,2925	0,4	0,818720	
36	1,3475	0,4	0,899999	
37	0,193	0,4	0,558721	
38	0,5211	0,4	0,878999	
39	0,1931	0,4	0,562356	
40	-14,14	0,4	5,000054	Aykırı Değer
41	-1,6231	0,4	0,929964	
42	0,2121	0,4	0,723304	
43	-0,5877	0,4	0,989972	
44	1,9178	0,4	-0,261132	
45	-1,2422	0,4	0,286456	
46	-0,0414	0,4	0,310302	
47	1,6738	0,4	-0,668240	
48	0,2332	0,4	0,926450	
49	-1,0251	0,4	1	
50	-0,3183	0,4	0,605858	
51	-1,242	0,4	0,774662	

EK-3 (Devam) PCA3 algoritması uygulandığında z değişkenine ait aykırı değerler

52	-1,5339	0,4	-0,364375	
53	1,5679	0,4	1	
54	0,2635	0,4	0,662154	
55	-0,7305	0,4	0,589251	
56	-0,2049	0,4	0,612380	
57	0,6193	0,4	0,899998	
58	0,2483	0,4	0,820394	
59	-0,7921	0,4	0,878766	
60	-16,323	0,4	3,91304	Aykırı Değer
61	0,7866	0,4	0,566154	
62	-0,1464	0,4	0,521029	
63	1,1466	0,4	1	
64	0,6858	0,4	0,969154	
65	-0,533	0,4	0,981987	
66	0,5155	0,4	0,966514	
67	-2,5619	0,4	0,526154	
68	0,6958	0,4	0,865431	
69	0,7396	0,4	1	
70	-1,7209	0,4	1	
71	0,0761	0,4	0,362453	
72	0,4995	0,4	0,869945	
73	-0,1395	0,4	0,557266	
74	-1,1948	0,4	1	
75	-1,2726	0,4	1	
76	-0,2865	0,4	0,802123	
77	-0,1587	0,4	0,560021	
78	1,039	0,4	1	
79	0,7294	0,4	0,962351	
80	13,2	0,4	-51,143410	Aykırı Değer
81	1,09	0,4	1	
82	-0,5507	0,4	0,481675	
83	-0,577	0,4	0,688491	
84	-0,8171	0,4	1	
85	-0,47	0,4	0,691403	
86	2,7703	0,4	0965413	
87	-0,1921	0,4	0,665896	
88	0,2942	0,4	0,284521	
89	1,3636	0,4	1	
90	0,1605	0,4	0,323562	
91	0,1976	0,4	0,686952	
92	-0,6953	0,4	0,326514	
93	-1,0103	0,4	1	
94	-0,5093	0,4	0,986776	
95	1,6095	0,4	1	
96	-1,8508	0,4	0,286552	
97	2,4001	0,4	0,00566	
98	0,8223	0,4	1	
99	-0,2565	0,4	0,526616	
100	-17,527	0,4	0,068751	Aykırı Değer

EK-4 PCA3 algoritması uygulandığında t değişkenine ait aykırı değerler

Sıra	t	w^{eski}	w^{yeni}	Aykırı değer
1	-0,733	0,4	1	
2	0,225	0,4	0,269535	
3	-0,445	0,4	0,399453	
4	1,2896	0,4	1	
5	0,7264	0,4	1	
6	-1,4364	0,4	0,895664	
7	0,9532	0,4	1	
8	-1,7238	0,4	1	
9	0,7678	0,4	0,256521	
10	-1,0675	0,4	1	
11	0,5247	0,4	0,928518	
12	-0,3137	0,4	0,624619	
13	0,2298	0,4	0,572650	
14	0,7528	0,4	0,899983	
15	-0,4178	0,4	0,797940	
16	-0,5566	0,4	0,769983	
17	-1,1965	0,4	-0,724651	
18	0,6361	0,4	0,865558	
19	0,2693	0,4	0,624551	
20	12,1151	0,4	3,401659	Aykırı Değer
21	1,3126	0,4	1	
22	0,8351	0,4	1	
23	-0,0792	0,4	0,492304	
24	1,7599	0,4	0,866351	
25	0,5715	0,4	0,879881	
26	1,6186	0,4	1	
27	-1,1183	0,4	1	
28	-0,0744	0,4	0,237208	
29	-1,0381	0,4	1	
30	-0,2432	0,4	0,729927	
31	0,524	0,4	0,986599	
32	-0,3405	0,4	0,975166	
33	-0,0604	0,4	0,485658	
34	-0,2339	0,4	0,699966	
35	0,6106	0,4	0,699666	
36	1,2142	0,4	0638966	
37	-0,02	0,4	0,282624	
38	0,7449	0,4	0,989866	
39	0,147	0,4	0,233561	
40	-16,576	0,4	4,231656	Aykırı Değer
41	1,2903	0,4	0,863673	
42	-0,9888	0,4	1	
43	0,3259	0,4	0,8630573	
44	-0,287	0,4	0,810738	
45	-1,7104	0,4	-0,986271	
46	-0,5227	0,4	0,928857	
47	0,6295	0,4	0,899963	
48	1,4763	0,4	-1	
49	0,7481	0,4	0,695499	
50	-0,7082	0,4	-0,090985	
51	1,7489	0,4	0,909085	

EK-4 (Devam) PCA3 algoritması uygulandığında t değişkenine ait aykırı değerler

52	-2,444	0,4	-0,865366	
53	-0,7372	0,4	1	
54	0,1389	0,4	0,265133	
55	0,6767	0,4	0,695366	
56	-1,3973	0,4	1	
57	-0,3394	0,4	0,563256	
58	-0,949	0,4	1	
59	-1,6222	0,4	0,866977	
60	18,8223	0,4	11,523631	Aykırı Değer
61	-0,184	0,4	0,544063	
62	-0,3482	0,4	0,871645	
63	0,095	0,4	0,201558	
64	0,401	0,4	0,686555	
65	-0,0769	0,4	0,238279	
66	-1,4216	0,4	-0,866741	
67	2,7323	0,4	-0,283414	
68	-0,9167	0,4	1	
69	-0,1774	0,4	0,236551	
70	1,3305	0,4	1	
71	0,9552	0,4	0,969196	
72	-0,5248	0,4	0,921566	
73	0,8238	0,4	1	
74	0,7356	0,4	1	
75	0,4337	0,4	0,836061	
76	1,467	0,4	1	
77	1,0538	0,4	1	
78	0,3021	0,4	0,234561	
79	0,1081	0,4	0,286538	
80	-15,826	0,4	20,670558	Aykırı Değer
81	0,3431	0,4	0,876569	
82	-0,6512	0,4	1	
83	0,3729	0,4	0,890718	
84	-0,7959	0,4	0,928515	
85	0,2158	0,4	0,662691	
86	-0,4744	0,4	0,989827	
87	-0,2321	0,4	0,680017	
88	0,5151	0,4	0,867794	
89	0,2712	0,4	0,360388	
90	0,0926	0,4	1,008802	
91	1,6255	0,4	-1,008593	
92	-1,9846	0,4	0,8067526	
93	0,5202	0,4	0,825461	
94	0,5132	0,4	0,928553	
95	-0,2419	0,4	0,236531	
96	0,5886	0,4	0921966	
97	0,427	0,4	0,862512	
98	-0,476	0,4	0,625514	
99	0,366	0,4	0,888064	
100	17,837	0,4	-4,036371	Aykırı Değer

EK-5 FRPCA3 algoritması uygulandığında x değişkenine ait aykırı değerler

Sıra	x	w^{eski}	w^{yeni}	Aykırı değer
1	-0,7006	0,4	0,999999	
2	-0,7766	0,4	1	
3	0,3201	0,4	0,957521	
4	1,2266	0,4	-0,999999	
5	0,8558	0,4	1	
6	0,0094	0,4	0,400579	
7	-0,8819	0,4	1	
8	1,2147	0,4	-0,997140	
9	2,4972	0,4	0,796361	
10	-0,2576	0,4	0,848591	
11	-1,4947	0,4	-0,999999	
12	0,0819	0,4	0,445320	
13	0,5053	0,4	0,999946	
14	0,349	0,4	0,980067	
15	-0,0113	0,4	0,400837	
16	0,1259	0,4	0,510670	
17	-1,2579	0,4	1,000407	
18	-2,2768	0,4	0,999926	
19	-0,1277	0,4	0,514233	
20	12,82	0,4	29,135211	Aykırı Değer
21	-0,6337	0,4	0,999999	
22	0,7257	0,4	0,999999	
23	-0,8364	0,4	1	
24	0,8214	0,4	1	
25	0,5033	0,4	0,999955	
26	1,6453	0,4	-1,000000	
27	0,2333	0,4	0,782459	
28	0,9009	0,4	0,999999	
29	-0,5223	0,4	0,999985	
30	0,4651	0,4	0,999758	
31	0,8789	0,4	1	
32	0,7726	0,4	0,999999	
33	0,9668	0,4	0,999999	
34	1,0385	0,4	0,999999	
35	2,4062	0,4	0,999943	
36	-0,2418	0,4	0,805741	
37	-0,0648	0,4	0,428253	
38	-0,5442	0,4	0,999996	
39	-0,4634	0,4	0,999662	
40	13,253	0,4	-4057,912	Aykırı Değer
41	-0,022	0,4	0,403178	
42	0,4	0,4	0,996388	
43	1,0233	0,4	0,999998	
44	-0,3138	0,4	0,951313	
45	1,3048	0,4	1	
46	-0,0092	0,4	0,400554	
47	-1,0941	0,4	1	
48	1,5322	0,4	1,000001	
49	-0,0231	0,4	0,403505	
50	-1,4087	0,4	-0,999995	
51	1,0988	0,4	0,999999	

EK-5 (Devam) FRPCA3 algoritması uygulandığında x değişkenine ait aykırı değerler

52	0,6717	0,4	0,999999	
53	-0,4192	0,4	0,998298	
54	-0,9071	0,4	1	
55	0,9305	0,4	-1	
56	-1,0181	0,4	-0,999999	
57	1,2302	0,4	1	
58	-0,2456	0,4	0,815878	
59	-0,3085	0,4	0,945564	
60	-23,204	0,4	10,516790	Aykırı Değer
61	0,9128	0,4	1	
62	-0,6782	0,4	0,999999	
63	1,2325	0,4	0,999999	
64	0,1381	0,4	0,534242	
65	-0,3412	0,4	0,974446	
66	-1,6509	0,4	0,961645	
67	-0,7335	0,4	1	
68	0,6093	0,4	0,999994	
69	-0,2687	0,4	0,874725	
70	0,2329	0,4	0,782206	
71	1,603	0,4	-0,837359	
72	0,8407	0,4	1	
73	1,562	0,4	-0,999997	
74	-0,6518	0,4	0,999998	
75	-0,438	0,4	0,999004	
76	0,5042	0,4	0,999952	
77	-1,2352	0,4	0,999999	
78	0,168	0,4	0,603592	
79	1,3598	0,4	-0,986577	
80	-14,423	0,4	29,922521	Aykırı Değer
81	-0,9473	0,4	1	
82	-1,0108	0,4	1	
83	-0,001	0,4	0,400065	
84	2,6093	0,4	0,819274	
85	1,6591	0,4	-0,999998	
86	1,9975	0,4	0,906022	
87	-0,3124	0,4	0,947055	
88	0,3955	0,4	0,995736	
89	0,6128	0,4	0,999998	
90	1,5122	0,4	-1,000009	
91	-0,8532	0,4	1	
92	-0,3732	0,4	0,990015	
93	-0,378	0,4	0,992176	
94	-1,4893	0,4	0,999998	
95	-1,2367	0,4	0,999322	
96	-0,835	0,4	1	
97	-0,0163	0,4	0,401743	
98	-1,3774	0,4	-1,123725	
99	-0,7064	0,4	1	
100	10,981	0,4	-31,855939	Aykırı Değer

EK-6 FRPCA3 algoritması uygulandığında y değişkenine ait aykırı değerler

Sıra	y	w^{eski}	w^{yeni}	Aykırı değer
1	-0,8153	0,4	1	
2	-0,37	0,4	0,990017	
3	-1,5005	0,4	-0,999998	
4	0,3765	0,4	0,991728	
5	0,9985	0,4	1	
6	1,1109	0,4	1	
7	0,3364	0,4	0,972838	
8	0,048	0,4	0,410995	
9	0,3422	0,4	0,976762	
10	0,1939	0,4	0,670978	
11	1,0879	0,4	0,999999	
12	0,012	0,4	0,400944	
13	0,2491	0,4	0,826901	
14	-0,4383	0,4	0,999140	
15	-0,2834	0,4	0,903275	
16	0,8508	0,4	1	
17	-0,7658	0,4	0,999999	
18	-0,9327	0,4	0,999999	
19	-0,7312	0,4	0,999999	
20	6,452	0,4	-775,318812	Aykırı Değer
21	0,3105	0,4	0,945966	
22	-0,3046	0,4	0,938651	
23	-0,1565	0,4	0,574885	
24	-1,0169	0,4	0,999999	
25	-0,3609	0,4	0,986829	
26	-0,4684	0,4	0,999765	
27	1,0899	0,4	1	
28	0,7008	0,4	0999998	
29	-0,2379	0,4	0,795988	
30	-0,7554	0,4	0,999999	
31	-0,0762	0,4	0,439087	
32	-1,4931	0,4	-0,999998	
33	0,77	0,4	0,999999	
34	1,4372	0,4	-0,458975	
35	-0,0199	0,4	0,402599	
36	-1,0264	0,4	0,999998	
37	-1,385	0,4	0,999999	
38	-0,6969	0,4	0,999998	
39	0,7597	0,4	1	
40	-14,4767	0,4	886,901948	Aykırı Değer
41	0,1807	0,4	0,635765	
42	-0,3851	0,4	0,993411	
43	-07431	0,4	0,999999	
44	-0,1293	0,4	0,517165	
45	0,7105	0,4	0,999999	
46	1,1981	0,4	0,999999	
47	-0,5847	0,4	0,999997	
48	-0,0821	0,4	0,445525	
49	0,2453	0,4	0,815722	
50	0,0936	0,4	0,459710	
51	-0,5207	0,4	0,999983	

EK-6 (Devam) FRPCA3 algoritması uygulandığında y değişkenine ait aykırı değerler

52	0,62	0,4	0,999998	
53	0,9433	0,4	1	
54	1,9776	0,4	0,918184	
55	-0,2972	0,4	0,926170	
56	0,5269	0,4	0,999991	
57	-0,5974	0,4	0,999992	
58	1,3901	0,4	0,999999	
59	1,928	0,4	-0,76765025	
60	10,0453	0,4	-466,798949	Aykırı Değer
61	1,6763	0,4	-0,999996	
62	0,6179	0,4	0,999999	
63	-0,3396	0,4	0,974133	
64	1,3643	0,4	1	
65	-0,0071	0,4	0,400330	
66	-2,2126	0,4	0,999896	
67	-0,195	0,4	0,674613	
68	0,664	0,4	0,999999	
69	-0,015	0,4	0,401475	
70	-2,0138	0,4	-1,000083	
71	-0,4051	0,4	0,996741	
72	0,3795	0,4	0,992052	
73	-0,8217	0,4	0,999999	
74	-0,266	0,4	0,866308	
75	-1,4608	0,4	0,999996	
76	-0,0916	0,4	0,457077	
77	-0,9707	0,4	1	
78	-0,4065	0,4	0,997077	
79	0,4479	0,4	0,999423	
80	-20,222	0,4	989,235805	Aykırı Değer
81	0,9151	0,4	0,999999	
82	0,3291	0,4	0,966487	
83	-0,1823	0,4	0,639404	
84	-0,9128	0,4	1	
85	0,5818	0,4	0,999998	
86	-1,3154	0,4	-1	
87	0,7092	0,4	0,999999	
88	2,555	0,4	-0,615931	
89	1,2727	0,4	0,999999	
90	-0,1356	0,4	0,529618	
91	2,2344	0,4	-0,925103	
92	-0,588	0,4	0,999998	
93	2,1991	0,4	-1,000274	
94	-0,5922	0,4	0,999998	
95	-0,138	0,4	0,534525	
96	0,7295	0,4	0,999999	
97	0,3161	0,4	0,952960	
98	0,7999	0,4	0,999999	
99	-0,3774	0,4	0,991789	
100	-18,155	0,4	87,681270	Aykırı Değer

EK-7 FRPCA3 algoritması uygulandığında z değişkenine ait aykırı değerler

Sıra	z	w^{eski}	w^{yeni}	Aykırı değer
1	1,0615	0,4	0999999	
2	-1,272	0,4	1	
3	-0,1145	0,4	0,490828	
4	-1,0102	0,4	1	
5	-1,4672	0,4	0999999	
6	0,7324	0,4	0,999999	
7	0,6783	0,4	0,999999	
8	-1,8606	0,4	-1,000005	
9	-0,3824	0,4	0,993252	
10	-1,0938	0,4	0,9999999	
11	-0,3196	0,4	0,956602	
12	1,0506	0,4	1	
13	0,1583	0,4	0,578921	
14	0,2793	0,4	0,895173	
15	-0,0074	0,4	0,400339	
16	-0,2436	0,4	0,811712	
17	0,8879	0,4	1	
18	-0,8577	0,4	1	
19	-0,4556	0,4	0,999856	
20	10,148	0,4	-549,709618	Aykırı Değer
21	-1,3628	0,4	1	
22	1,7763	0,4	-1,000003	
23	1,0007	0,4	1	
24	1,41	0,4	1	
25	0,1356	0,4	0,529540	
26	0,0986	0,4	0,466482	
27	-1,22	0,4	0,999999	
28	-0,9281	0,4	1	
29	-0,6508	0,4	0,999998	
30	-1,4382	0,4	0,999999	
31	0,0395	0,4	0,410280	
32	-0,4443	0,4	0,999318	
33	0,0509	0,4	0,417164	
34	0,9048	0,4	1	
35	0,2925	0,4	0,919872	
36	1,3475	0,4	0,999999	
37	0,193	0,4	0,668721	
38	0,5211	0,4	0,999984	
39	0,1931	0,4	0,669275	
40	-14,14	0,4	600,422054	Aykırı Değer
41	-1,6231	0,4	0,999999	
42	0,2121	0,4	0,723304	
43	-0,5877	0,4	0,999997	
44	1,9178	0,4	-1,000003	
45	-1,2422	0,4	0,999999	
46	-0,0414	0,4	0,411302	
47	1,6738	0,4	-0,968241	
48	0,2332	0,4	0,782411	
49	-1,0251	0,4	1	
50	-0,3183	0,4	0,95583	
51	-1,242	0,4	1	

EK-7 (Devam) FRPCA3 algoritması uygulandığında z değişkenine ait aykırı değerler

52	-1,5339	0,4	-0,999999	
53	1,5679	0,4	1	
54	0,2635	0,4	0,862227	
55	-0,7305	0,4	0,999999	
56	-0,2049	0,4	0,702388	
57	0,6193	0,4	0,999998	
58	0,2483	0,4	0,824394	
59	-0,7921	0,4	0,999999	
60	-16,323	0,4	49,913040	Aykırı Değer
61	0,7866	0,4	0,999999	
62	-0,1464	0,4	0,552097	
63	1,1466	0,4	1	
64	0,6858	0,4	0,999999	
65	-0,533	0,4	0,999987	
66	0,5155	0,4	0,999974	
67	-2,5619	0,4	1,006711	
68	0,6958	0,4	0,999999	
69	0,7396	0,4	1	
70	-1,7209	0,4	1	
71	0,0761	0,4	0,438965	
72	0,4995	0,4	0,999945	
73	-0,1395	0,4	0,537286	
74	-1,1948	0,4	1	
75	-1,2726	0,4	1	
76	-0,2865	0,4	0,910023	
77	-0,1587	0,4	0,580002	
78	1,039	0,4	1	
79	0,7294	0,4	0,999999	
80	13,2	0,4	-516,143410	Aykırı Değer
81	1,09	0,4	1	
82	-0,5507	0,4	0,999994	
83	-0,577	0,4	0,999996	
84	-0,8171	0,4	1	
85	-0,47	0,4	0,999779	
86	2,7703	0,4	0,9140430	
87	-0,1921	0,4	0,666890	
88	0,2942	0,4	0,921461	
89	1,3636	0,4	-1	
90	0,1605	0,4	0,584301	
91	0,1976	0,4	0,682562	
92	-0,6953	0,4	0,999999	
93	-1,0103	0,4	1	
94	-0,5093	0,4	0,999972	
95	1,6095	0,4	1	
96	-1,8508	0,4	-1,000008	
97	2,4001	0,4	1,000172	
98	0,8223	0,4	1	
99	-0,2565	0,4	0,845605	
100	-17,527	0,4	106,063998	Aykırı Değer

EK-8 FRPCA3 algoritması uygulandığında t değişkenine ait aykırı değerler

Sıra	t	w^{eski}	w^{yeni}	Aykırı değer
1	-0,733	0,4	1	
2	0,225	0,4	0,759535	
3	-0,445	0,4	0,999425	
4	1,2896	0,4	1	
5	0,7264	0,4	1	
6	-1,4364	0,4	0,999999	
7	0,9532	0,4	1	
8	-1,7238	0,4	1	
9	0,7678	0,4	0,999999	
10	-1,0675	0,4	1	
11	0,5247	0,4	0,999987	
12	-0,3137	0,4	0,951541	
13	0,2298	0,4	0,772619	
14	0,7528	0,4	0,999999	
15	-0,4178	0,4	0,997403	
16	-0,5566	0,4	0,999998	
17	-1,1965	0,4	0,999999	
18	0,6361	0,4	0,999998	
19	0,2693	0,4	0,876168	
20	12,1151	0,4	34,330634	Aykırı Değer
21	1,3126	0,4	1	
22	0,8351	0,4	1	
23	-0,0792	0,4	0,442304	
24	1,7599	0,4	0,999993	
25	0,5715	0,4	0,999998	
26	1,6186	0,4	1	
27	-1,11863	0,4	1	
28	-0,0744	0,4	0,437200	
29	-1,0381	0,4	1	
30	-0,2432	0,4	0,810604	
31	0,524	0,4	0,999992	
32	-0,3405	0,4	0,975169	
33	-0,0604	0,4	0,424317	
34	-0,2339	0,4	0,785685	
35	0,6106	0,4	0,999996	
36	1,2142	0,4	0,999999	
37	-0,02	0,4	0,402624	
38	0,7449	0,4	0,999999	
39	0,147	0,4	0,5533434	
40	-16,576	0,4	300,340929	Aykırı Değer
41	1,2903	0,4	-0,999999	
42	-0,9888	0,4	1	
43	0,3259	0,4	0,963057	
44	-0,287	0,4	0,910073	
45	-1,7104	0,4	-0,997297	
46	0-,5227	0,4	0,999998	
47	0,6295	0,4	-1	
48	1,4763	0,4	0,999999	
49	0,7481	0,4	0,999999	
50	-0,7082	0,4	-1,090908	
51	1,7489	0,4	-0,999909	

EK-8 (Devam) FRPCA3 algoritması uygulandığında t değişkenine ait aykırı değerler

52	-2,444	0,4	1	
53	-0,7372	0,4	0,536133	
54	0,1389	0,4	0,999999	
55	0,6767	0,4	-1	
56	-1,3973	0,4	0,973256	
57	-0,3394	0,4	1	
58	-0,949	0,4	0,999997	
59	-1,6222	0,4	0,723629	
60	18,8223	0,4	66,644906	Aykırı Değer
61	-0,184	0,4	0,6449063	
62	-0,3482	0,4	0,979649	
63	0,095	0,4	0,461558	
64	0,401	0,4	0,996555	
65	-0,0769	0,4	0,439827	
66	-1,4216	0,4	-0,999967	
67	2,7323	0,4	-0,966160	
68	-0,9167	0,4	1	
69	-0,1774	0,4	0,554358	
70	1,3305	0,4	1	
71	0,9552	0,4	0,999999	
72	-0,5248	0,4	0,999998	
73	0,8238	0,4	1	
74	0,7356	0,4	0,999999	
75	0,4337	0,4	0,998978	
76	1,467	0,4	1	
77	1,0538	0,4	1	
78	0,3021	0,4	0,936026	
79	0,1081	0,4	0,480537	
80	-15,826	0,4	216,971827	Aykırı Değer
81	0,3431	0,4	0,976569	
82	-0,6512	0,4	1	
83	0,3729	0,4	0,990781	
84	-0,7959	0,4	0,999999	
85	0,2158	0,4	0,732691	
86	-0,4744	0,4	0,999827	
87	-0,2321	0,4	0,780017	
88	0,5151	0,4	0,999998	
89	0,2712	0,4	0,877794	
90	0,0926	0,4	0,458393	
91	1,6255	0,4	0,913088	
92	-1,9846	0,4	0,968595	
93	0,5202	0,4	0,999982	
94	0,5132	0,4	0,999976	
95	-0,2419	0,4	0,8067526	
96	0,5886	0,4	0,999994	
97	0,427	0,4	0,998577	
98	-0,476	0,4	0,999840	
99	0,366	0,4	0,988064	
100	17,837	0,4	10,024373	Aykırı Değer

EK-9 Program

```
İnt konu=0;
İnt t=1;
İnt T=40;
double alfa[40];
alfa[0]=1;
int m=2;
double gama=30;
double nu=0.6;
int n=100;
int i;
double y=0;
int k=0;
double w[100];
double wt[100];
for(k=0;k<=99;k++) {  w[k]=0.4;  }
for(k=0;k<=99;k++) {  wt[k]=w[k];  }
double iks[100];
//100 adet veri girişi ör. İks[0]=-0,7006; …… iks[99]=10.981;
double ikst[100];
for(k=0;k<=99;k++) {  ikst[k]=iks[k];  }
double ikstiks=0;
double wtiks=0;
double ikstw=0;
double wtw=0;
double iksy[100];
double wwtw[100];
double son[100];
double formile=0;
double betax=0;
double wy[100];
```

EK-9 (Devam) Program

```
double eustu=0;
for(k=0;k<=99;k++) { ikstiks=ikstiks+(ikst[k]*iks[k]);  }
for(k=0;k<=99;k++) {  wtiks=wtiks+(wt[k]*iks[k];  }
for(k=0;k<=99;k++) { ikstw=ikstw+(ikst[k]*w[k]);  }
for(k=0;k<=99;k++) {  wtw=wtw+(wt[k]*w[k]);  }
formile=ikstiks-((wtiks*ikstw)/wtw);
betax=1/((1+formile/nu)*(1+formile/nu));
for(t=0;t<=40;t++) {  alfa[t]=alfa[0]*(1-t/T);
i=1;
for(k=0;k<=99;k++){y=y+(wt[k]*iks[k]);}
for(k=0;k<=99;k++){iksy[k]=iks[k]*y;}
for(k=0;k<=99;k++){wwwtw[k]=w[k]/wtw;}
for(k=0;k<=99;k++)son[k]=iksy[k]-(wwtw[k]*y*y);}
for(k=0;k<=99;k++){wy[k]=w[k]+(alfa[t]*betax*(iks[k]*y-w[k]*y*y));
a->Cells[0][k]=wy[k];
if(k==99){
ShowMessage("dur"); }
} }
Edit1->Text=wy[0];
```

ÖZGEÇMİŞ

Aysu Özen YAYCILI 18.06.1980 tarihinde Ankara'da doğdu. İlk,Orta ve Lise eğitimini Ankara'da Yüksek öğrenimini Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik bölümünde tamamladı. Şu anda Yaycılı Kardeşler L.T.D de Muhasebeci olarak çalışmaktadır.