

## 1. RIEMANN UZAYINDA LIE TÜREVİ VE UYGULAMALARI

### 1.1 GİRİŞ

Genel bir  $U_n$  uzayında  $(x^i)$  koordinat sisteminde, koordinatları ancak  $dx^i$  ler kadar fark eden herhangi  $P(x^1, x^2, \dots, x^n)$  ve  $Q(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, \dots, x^n + dx^n)$  nokta çiftine,  $g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n)$  ler sürekli fonksiyonlar ve  $g_{ij} = g_{ji}$  olmak üzere

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.1)$$

skaler invariantı karşı geliyor ve

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisi pozitif tanımlı ise veya buna denk olarak hepsi birden sıfır olmayan  $dx^i$  ler için  $g_{ij} dx^i dx^j > 0$  ise  $U_n$  uzayına Riemann uzayı, (1.1) metriğine de Riemann metriği adı verilir.

Bu uzayı  $R^n$  ile göstereceğiz. Burada  $ds$  ye  $dx^i$  bileşenli diferansiyel vektörün uzunluğu denir.  $ds^2$  bir skaler invariant,  $g_{ij} = g_{ji}$  olup metrik tensördür.

$R^n$  Riemann uzayında,  $R$  ve  $\bar{R}$  bölgeleri arasında

$$f : x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \equiv (x^i) \rightarrow \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) \equiv (\bar{x}^i) ; \text{Det}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) \neq 0 \quad (1.2)$$

nokta dönüşümü verilsin. Bu nokta dönüşümü  $R$  deki  $x^i$  noktasını  $\bar{R}$  deki  $\bar{x}^i$  noktasına ;

$R$  deki  $x^i + dx^i$  noktasını  $\bar{R}$  deki  $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$  noktasına dönüştürsün.

**Tanım 1.1**  $x^i$  ile  $x^i + dx^i$  arasındaki uzunluk,  $\bar{x}^i$  ile  $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$  arasındaki uzunluğa eşitse

(1.2) nokta dönüşümüne Riemann uzayında hareket veya izometri denir.

**Tanım 1.2** (1.2) de verilen nokta dönüşümü  $\varepsilon$  bir sonsuz küçük,  $z^i \varepsilon$  kontravaryant bir vektör olmak üzere

$$\bar{x}^i = x^i + z^i(x^i) \varepsilon \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanmış ise, bu dönüşüme sonsuz küçük deformasyon ;  $z^i$  vektörüne ise sonsuz küçük deformasyon vektörü adı verilir.  $\bar{x}^i$ ,  $x^i$  noktasının deformasyonu adını alır.

**Tanım 1.3** Yeni bir  $x^i \rightarrow x^{i'}$  koordinat dönüşümü  $\bar{R}$  deki  $\bar{x}^i$  noktasının  $f^{-1}$  ters dönüşümü olan noktanın dönüşümünü versin. Yani bu yeni koordinat sisteminde  $x^i$  noktasının yeni koordinatı

$$x^{i'} = \bar{x}^i \quad (1.4)$$

olsun. Bu yeni koordinata  $\bar{x}$  nin sürüklenmiş koordinatı denir.

**Tanım 1.4** (1.3) deki sonsuz küçük bükülmede

$$x^{i'} = \bar{x}^i = x^i + z^i(x^1, x^2, \dots, x^n)\epsilon \quad (1.5)$$

koordinat dönüşümüne  $z^i\epsilon$  tarafından sürüklenme denir.

$x = (x^i) \in R_N$  olmak üzere  $A(x^i)$  ile temsil ettiğimiz  $A$  geometrik objesini ele alalım.

**Tanım 1.5** (1.3) sonsuz küçük deformasyonu ile

$$\bar{A}(x^{i'}) = A(\bar{x}^i) \quad (1.6)$$

olsun. Yani Eğer  $\bar{A}(x^{i'})$  geometrik objesinin  $i'$  koordinat sisteminin  $x$  noktasındaki değeri  $A$  geometrik objesinin  $i$  koordinat sistemindeki  $\bar{x}$  noktasındaki değerine eşitse;  $\bar{A}(x^{i'})$  geometrik objesine  $A(x^i)$  nin deformasyonu denir.

**Tanım 1.6**  $\bar{A}$ ; (1.3) e göre  $A$  geometrik objesinin deforme olmuş hali olmak üzere;

$$\mathfrak{L}_z A \epsilon = \bar{A}(x^{i'}) - A(x^i) \quad (1.7)$$

$A(x^i)$  nin Lie diferansiyeli denir.

$z = z^i(x^j)$  olmak üzere

$$\mathfrak{L}_z A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{A}(x^{i'}) - A(x^i)}{\epsilon} \quad (1.8)$$

limit değerine ise  $A(x^i)$  nin Lie türevi denir.

**Tanım 1.7**(1.3) sonsuz küçük deformasyonu ile

$$\bar{g}_{ij}(x) = g_{ij}(\bar{x}) \quad (1.9)$$

olacak şekilde dönüşen  $\bar{g}_{ij}(x)$  metrik tensörüne  $g_{ij}(x)$  metrik tensörünün deformasyonu adı verilir.

**Tanım 1.8**  $\bar{g}_{ij}(x) - g_{ij}(x)$  farkına  $g_{ij}$  metrik tensörünün  $z^i$  kontravaryant vektör alanına göre Lie diferansiyeli denir .

$$\mathcal{L}_z g_{ij}(x)\mathcal{E} = \bar{g}_{ij}(x) - g_{ij}(x) \quad (1.10)$$

ile gösterilir.

Şimdi  $g_{ij}$  metrik tensörünün Lie diferansiyelini inceleyelim.  $\bar{g}_{ij}(x)$  metrik tensörünün yeni ve eski koordinat sistemi arasında

$$\bar{g}_{mn}(x) = \bar{g}_{i'j'}(x) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^n} \quad (1.11)$$

bağıntısı vardır. (1.9) dan ,

$$\bar{g}_{mn}(x) = g_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial x^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^j}{\partial x^n} \quad (1.12)$$

elde edilir. Burada,  $g_{ij}(\bar{x})$  Taylor serisi ile

$$g_{ij}(\bar{x}) = g_{ij}(x + \mathcal{E}z) = g_{ij}(x) + \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k} \mathcal{E}z^k + \dots \quad (1.13)$$

bulunur. (1.5) den türev alarak

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^m} = \delta_m^i + \mathcal{E} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} \quad , \quad \frac{\partial x^j}{\partial x^n} = \delta_n^j + \mathcal{E} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} \quad (1.14)$$

elde edilir. (1.13) ve (1.14) kullanılarak (1.12) dan

$$\bar{g}_{mn}(x) = (\delta_m^i + \frac{\partial z^i}{\partial x^m} \mathcal{E})(\delta_n^j + \frac{\partial z^j}{\partial x^n} \mathcal{E})(g_{ij}(x) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} z^k \mathcal{E}) \quad (1.15)$$

bulunur.

Buradan,

$$\bar{g}_{mn}(x) = (\delta_m^i + \frac{\partial z^i}{\partial x^m} \mathcal{E})(\delta_n^j + \frac{\partial z^j}{\partial x^n} \mathcal{E})(g_{ij}(x) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} z^k \mathcal{E}) \quad (1.16)$$

$$\bar{g}_{mn}(x) = \delta_m^i \delta_n^j g_{ij}(x) + (\delta_m^i \delta_n^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} z^k + \delta_m^i \frac{\partial z^j}{\partial x^n} g_{ij} + \delta_n^j \frac{\partial z^i}{\partial x^m} g_{ij}) \mathcal{E} \quad (1.17)$$

$$\bar{g}_{mn}(x) = g_{mn}(x) + \left( g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k \right) \mathcal{E} \quad (1.18)$$

elde edilir. O halde  $g_{mn}$  nin Lie diferansiyeli

$$\mathfrak{L}_z g_{mn} \mathcal{E} = \bar{g}_{mn} - g_{mn} = \left[ g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k \right] \mathcal{E} \quad (1.19)$$

dır. Tanım (1.1) den  $x^i$  ile  $x^i + dx^i$  arasındaki uzaklık

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.20)$$

ve  $\bar{x}^i$  ile  $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$  arasındaki uzaklık ise

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{mn} d\bar{x}^m d\bar{x}^n \quad (1.21)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (1.19) gereğince aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 1.1** (1.2) dönüşümünün  $R^n$  de bir hareket olması için gerek ve yeter şart

$$\left( g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k \right) = 0 \text{ olmasıdır.}$$

$$\left( g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k \right) = 0 \text{ ifadesini inceleyelim.}$$

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} = \nabla_k g_{mn} + g_{mj} \left\{ \begin{matrix} j \\ nk \end{matrix} \right\} + g_{jn} \left\{ \begin{matrix} j \\ mk \end{matrix} \right\} \quad z^k \text{ ile çarpalım}$$

$$\frac{\partial z^k}{\partial x^m} = \nabla_m z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ im \end{matrix} \right\} \quad g_{kn} \text{ ile çarpalım}$$

$$\frac{\partial z^k}{\partial x^n} = \nabla_n z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ in \end{matrix} \right\} \quad g_{mk} \text{ ile çarpalım}$$

$$z^k \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} = z^k \nabla_k g_{mn} + g_{mj} \left\{ \begin{matrix} j \\ nk \end{matrix} \right\} z^k + g_{jn} \left\{ \begin{matrix} j \\ mk \end{matrix} \right\} z^k$$

$$g_{kn} \frac{\partial z^k}{\partial x^m} = g_{kn} \nabla_m z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ im \end{matrix} \right\} g_{kn}$$

$$g_{mk} \frac{\partial z^k}{\partial x^n} = g_{mk} \nabla_n z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ in \end{matrix} \right\} g_{mk}$$

olup, bu ifadelerin taraf tarafa toplanması sonucunda

$$\begin{aligned}
g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k &= g_{mk} \nabla_n z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ in \end{matrix} \right\} g_{mk} + g_{kn} \nabla_m z^k - z^i \left\{ \begin{matrix} k \\ im \end{matrix} \right\} g_{kn} + \\
&+ z^k \nabla_k g_{mn} + g_{mj} \left\{ \begin{matrix} j \\ nk \end{matrix} \right\} z^k + g_{jn} \left\{ \begin{matrix} j \\ mk \end{matrix} \right\} z^k
\end{aligned} \quad (1.22)$$

bulunur ve gerekli düzenlemelerle

$$\begin{aligned}
g_{mj} \frac{\partial z^j}{\partial x^n} + g_{in} \frac{\partial z^i}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} z^k &= g_{kn} \nabla_m z^k + g_{mk} \nabla_n z^k \\
&= \nabla_m z_n + \nabla_n z_m \\
&= 2\nabla_{(m} z_{n)}
\end{aligned} \quad (1.23)$$

sonucu elde edilir.

$$\mathfrak{L}_z g_{mn} = 2\nabla_{(m} z_{n)} \quad (1.24)$$

dır. Buradan teorem 1.1 in bir diğer ifadesini verebiliriz.

**Teorem 1.2** (1.2) dönüşümün  $R^n$  de bir hareket olması için gerek ve yeter şart

$$2\nabla_{(m} z_{n)} = 0 \quad (1.25)$$

olmasıdır.

**Tanım 1.9** (1.3) sonsuz küçük deformasyonu ile  $\bar{u}^i(x) = u^i(\bar{x})$  olacak şekilde dönüşen  $u^i(\bar{x})$

kontravaryant vektörüne  $u^i(x)$  kontravaryant vektörünün deformasyonu adı verilir.

**Tanım 1.10**  $u^i(\bar{x}) - u^i(x)$  farkına  $u^i$  kontravaryant vektörünün  $z^i$  kontravaryant vektör alanına göre Lie diferansiyeli denir.

$$\mathfrak{L}_z u^i(x) \mathcal{E} = \bar{u}^i(x) - u^i(x) \quad (1.26)$$

ile gösterilir. Şimdi  $u^i$  kontravaryant vektörünün Lie diferansiyelini inceleyelim.

$$\bar{u}^\alpha(x) = \bar{u}^i(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} \quad (1.27)$$

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \varepsilon z^\alpha \quad (1.3) \text{ sonsuz küçük deformasyonu kullanalım.}$$

$$x^\alpha = x^{\alpha'} - \varepsilon z^\alpha \text{ olup } x^i \text{ ye göre türev alarak}$$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{i'}} - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} = \delta_i^{\alpha'} - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \quad (1.28)$$

ve

$x^m = x^{m'} - \varepsilon z^m$  den  $x^{i'}$  ye göre türev alarak

$$\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} = \delta_i^{m'} - \varepsilon \frac{\partial z^m}{\partial x^{i'}} \quad \text{bulunur ve (1.28) de yerine yazılarak}$$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} = \delta_i^{\alpha'} - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} (\delta_i^{m'} - \varepsilon \frac{\partial z^m}{\partial x^{i'}})$$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} = \delta_i^{\alpha'} - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \delta_i^{m'}$$

elde edilir.  $\delta_i^{\alpha'} = \delta_i^\alpha$  ve  $\delta_i^{m'} = \delta_i^m$  olduğundan;

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} = \delta_i^\alpha - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \delta_i^m \quad (1.29)$$

dır. (1.29) u (1.27) de yerine yazarak;

$$\bar{u}^\alpha(x) = u^i(\bar{x}) (\delta_i^\alpha - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \delta_i^m)$$

bulunan eşitliği Taylor serisine açalım.

$$u^i(\bar{x}) = u^i(x + \varepsilon z) = u^i(x) + \frac{\partial u^i(x)}{\partial x^c} \varepsilon z^c + \varepsilon^2 \dots + \dots$$

Buradan

$$\bar{u}^\alpha(x) = (u^i(x) + \frac{\partial u^i(x)}{\partial x^c} \varepsilon z^c) (\delta_i^\alpha - \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \delta_i^m)$$

$$\bar{u}^\alpha(x) = u^\alpha(x) - u^m(x) \varepsilon \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} + \frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^c} \varepsilon z^c$$

$$\bar{u}^\alpha(x) = u^\alpha(x) + \left[ \frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^c} z^c - u^m(x) \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} \right] \varepsilon$$

$$\bar{u}^\alpha(x) - u^\alpha(x) = \left[ \frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^c} z^c - \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} u^m \right] \varepsilon$$

olup  $u^\alpha$  nın Lie diferansiyeli

$$\mathfrak{L}_z u^\alpha(x)\mathcal{E} = \bar{u}^\alpha(x) - u^\alpha(x) = \left[ \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^c} z^c - \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^m} u^m \right] \mathcal{E} \quad (1.30)$$

şeklinde bulunur.

**Tanım 1.11** (1.3) sonsuz küçük deformasyonu ile  $\bar{u}_i(x) = u_i(\bar{x})$  olacak şekilde dönüşen  $u_i(\bar{x})$  kovaryant vektörüne  $u_i(x)$  kovaryant vektörünün deformasyonu verilir.

**Tanım 1.12**  $u_i(\bar{x}) - u_i(x)$  farkına  $u_i$  kovaryant vektörünün  $z^i$  kontravaryant vektör alanına göre Lie diferansiyeli denir.

$$\mathfrak{L}_z u_i(x)\mathcal{E} = \bar{u}_i(x) - u_i(x) \quad (1.31)$$

ile gösterilir. Şimdi  $u_i$  kovaryant vektörünün Lie diferansiyelini inceleyelim.

$$\bar{u}_\alpha(x) = \bar{u}_j(x) \frac{\partial x^j}{\partial x^\alpha}$$

$x^j = x^j + \mathcal{E}z^j$  (1.3) sonsuz küçük deformasyonun kullanalım.  $x^\alpha$  ya göre türev alalım.

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^j}{\partial x^\alpha} + \mathcal{E} \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha}$$

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^j + \mathcal{E} \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha}$$

$$\bar{u}_\alpha(x) = u_j(\bar{x}) \left( \delta_\alpha^j + \mathcal{E} \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha} \right) \quad [\bar{u}_i(x) = u_i(\bar{x})]$$

$u_j(\bar{x})$  yi seriye açalım:

$$u_j(\bar{x}) = u_j(x + \mathcal{E}z) = (u_j(x) + \frac{\partial u_j(x)}{\partial x^m} \mathcal{E}z^m + \mathcal{E}^2 \dots + \dots)$$

$$\bar{u}_\alpha(x) = (u_j(x) + \frac{\partial u_j(x)}{\partial x^m} \mathcal{E}z^m) \left( \delta_\alpha^j + \mathcal{E} \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$\bar{u}_\alpha(x) = u_\alpha(x) + (u_j \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha} + z^m \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^m}) \mathcal{E}$$

Buradan  $u_\alpha$  nın Lie diferansiyeli:

$$\mathfrak{L}_z u_\alpha(x)\varepsilon = \bar{u}_\alpha(x) - u_\alpha(x) = \left[ u_j \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha} + z^m \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^m} \right] \varepsilon \quad (1.32)$$

şeklinde bulunur.

## 2. AFİN UZAYDA HAREKET

$L_{jk}^i$  simetrik olmayan afin konneksiyona ve

$$T_{jk}^i = L_{jk}^i - L_{kj}^i = 2L_{[jk]}^i$$

burulma tensörüne sahip  $n$  boyutlu  $L_n$  uzayını düşünelim.

**Tanım 2.1**  $u^i$  ve  $u^i + du^i$  sırası ile  $x^i$  ve  $x^i + dx^i$  noktasındaki iki vektör olmak üzere bu vektörler arasındaki paralellik koşulu

$$\delta u^i = du^i + \Gamma_{jk}^i u^k dx^j = 0$$

ile tanımlıdır. Burada  $\delta u^i$ ,  $u^i$  vektörünün kovaryant diferansiyelidir.

**Tanım 2.2** (1.2) nokta dönüşümü tanım 2.1 de ifade edilen paralel vektör çiftlerini yine paralel olan vektör çiftlerine dönüştürüyor ise bu dönüşüme  $L_n$  de bir afin hareket denir.

**Tanım 2.3** (1.3) sonsuz küçük deformasyonu ile  $\bar{L}_{jk}^i(x) = L_{jk}^i(\bar{x})$  olacak şekilde dönüşen  $\bar{L}_{jk}^i$  lineer konneksiyonuna  $L_{jk}^i$  nın deformasyonu adı verilir.

**Tanım 2.4**  $\bar{L}_{jk}^i - L_{jk}^i$  farkına  $L_{jk}^i$  lineer konneksiyonunun  $z^i$  kontravaryant vektör alanına göre Lie diferansiyeli denir.

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i(x) \mathcal{E} = \bar{L}_{jk}^i(x) - L_{jk}^i(x) \quad (2.1)$$

ile gösterilir.

Şimdi  $L_{jk}^i$  lineer konneksiyonunun Lie diferansiyelini inceleyelim.

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = \bar{L}_{jk}^i(x) \frac{\partial x^j}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^i} \quad (2.2)$$

olup (1.3) den  $x^{\alpha}$  ya göre türev alarak;

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{\alpha}} + \mathcal{E} \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}}$$

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{\alpha}} = \delta_{\alpha}^j + \mathcal{E} \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}}$$

(1.3) den  $x^\beta$  ya göre türev alarak;

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^k}{\partial x^\beta} + \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^\beta}$$

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^k + \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^\beta}$$

bulunur. (1.3) den  $x^{\sigma'} = x^\sigma + \varepsilon z^\sigma$  yazarak

$x^\sigma = x^{\sigma'} - \varepsilon z^\sigma$  nin  $x^i$  ye göre türevini alalım.

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^i} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^i} = \delta_i^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^i}$$

dir.  $x^t = x^{t'} - \varepsilon z^t$  olduğundan; benzer olarak

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^i} = \delta_i^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^i} = \delta_i^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^i} (\delta_i^{t'} - \varepsilon \frac{\partial z^t}{\partial x^i})$$

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^i} = \delta_i^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^i} \delta_i^{t'}$$

elde edilir.

$x^i = x^i + \varepsilon z^i$  nin  $x^\alpha$  ya göre türevi ise

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^j}{\partial x^\alpha} + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha}$$

olup burada  $x^\beta$  ya göre tekrar türev alınırsa

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \varepsilon \frac{\partial^2 z^j}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

bulunur. Bu ifadesini  $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^i}$  ile çarpımı ise

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^i} = \varepsilon \frac{\partial^2 z^j}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \delta_i^{\sigma'}$$

$$\left( \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^i} = \delta_i^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^i} \delta_i^{t'} \right)$$

dir. Şimdi bulduğumuz bu sonuçları (2.2) de yerine yazalım.

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = \bar{L}_{jk}^i(x) \left[ \delta_{\alpha}^j + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} \right] \left[ \delta_{\beta}^k + \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} \right] \left[ \delta_i^{\sigma'} - \varepsilon \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^i} \delta_i^{\sigma'} \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \delta_i^{\sigma'}$$

$$\bar{L}_{jk}^i(x) = L_{jk}^i(\bar{x})$$

ve

$$\delta_i^{\sigma'} = \delta_i^{\sigma}, \delta_i^{\sigma'} = \delta_i^{\sigma}$$

olduğundan;

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = L_{jk}^i(\bar{x}) \left[ \delta_{\alpha}^j + \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} \right] \left[ \delta_{\beta}^k + \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} \right] \left[ \delta_i^{\sigma} - \varepsilon \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^i} \delta_i^{\sigma} \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \delta_i^{\sigma}$$

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = L_{jk}^i(\bar{x}) \left[ \delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^k + \delta_{\alpha}^j \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + \delta_{\beta}^k \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} \right] \left[ \delta_i^{\sigma} - \varepsilon \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^i} \delta_i^{\sigma} \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \delta_i^{\sigma}$$

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = L_{jk}^i(\bar{x}) \left[ \delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^k \delta_i^{\sigma} - \delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^k \delta_i^{\sigma} \varepsilon \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^i} + \delta_i^{\sigma} \delta_{\alpha}^j \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + \delta_i^{\sigma} \delta_{\beta}^k \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \delta_i^{\sigma}$$

yazılabilir. Burada  $L_{jk}^i(\bar{x})$  ifadesinin Taylor serisine açılımı

$$L_{jk}^i(\bar{x}) = L_{jk}^i(x + \varepsilon z) = L_{jk}^i(x) + \frac{\partial L_{jk}^i}{\partial x^b} \varepsilon z^b + \varepsilon^2 \dots + \dots$$

olup

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = \left[ L_{jk}^i(x) + \frac{\partial L_{jk}^i}{\partial x^b} \varepsilon z^b \right] \left[ \delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^k \delta_i^{\sigma} - \delta_{\alpha}^j \delta_{\beta}^k \delta_i^{\sigma} \varepsilon \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^i} + \delta_i^{\sigma} \delta_{\alpha}^j \varepsilon \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + \delta_i^{\sigma} \delta_{\beta}^k \varepsilon \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 z^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \delta_i^{\sigma}$$

$$\bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = L_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) + \left[ -L_{\alpha\beta}^i \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^i} + L_{\alpha k}^{\sigma} \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + L_{j\beta}^{\sigma} \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial L_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^b} z^b + \frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right] \varepsilon$$

bulunur. O halde  $L_{\alpha\beta}^{\sigma}$  nin Lie diferansiyeli

$$\mathfrak{L}_z L_{\alpha\beta}^{\sigma} \varepsilon = \bar{L}_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) - L_{\alpha\beta}^{\sigma}(x) = \left[ L_{\alpha k}^{\sigma} \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + L_{j\beta}^{\sigma} \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} - L_{\alpha\beta}^i \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^i} + \frac{\partial L_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^b} z^b + \frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right] \varepsilon$$

Yani

$$\mathfrak{L}_z L_{\alpha\beta}^{\sigma} = L_{\alpha k}^{\sigma} z_{,\beta}^k + L_{j\beta}^{\sigma} z_{,\alpha}^j - L_{\alpha\beta}^i z_{,i}^{\sigma} - L_{\alpha\beta,b}^{\sigma} z^b + z_{,\alpha\beta}^{\sigma} \quad (2.3)$$

dir. Buradan şu teoremi ifade edebiliriz:

**Teorem 2.1** (1.2) nokta dönüşümünün  $L_n$  de bir hareket olması için gerek ve yeter şart

$$L_{\alpha k}^{\sigma} \frac{\partial z^k}{\partial x^{\beta}} + L_{j\beta}^{\sigma} \frac{\partial z^j}{\partial x^{\alpha}} - L_{\alpha\beta}^t \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial x^t} + \frac{\partial L_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^b} z^b + \frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} = 0 \quad (2.4)$$

olmasıdır.

## 2.1 L Konneksiyonunun Bir Tensör Olarak Lie Türevi

Buraya kadar Lie türevini kısmi türeve göre ifade etmiştik. Şimdi Lie türevinin kovaryant türeve göre ifadesine araştıralım.

Daha önceki hesaplamalarda,  $L_{jk}^i$  nin Lie türevinin

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{,jk}^i + L_{jk,p}^i z^p - z_{,p}^i L_{jk}^p + z_{,j}^p L_{pk}^i + z_{,k}^p L_{jp}^i \quad (2.5)$$

şeklinde olduğunu biliyoruz.

$z_{,jk}^i$  nın kovaryant türevi cinsinden ifadesini elde ederek

(2.5) de yerine yazalım.

$z_{,jk}^i$  ifadesini hesaplayalım,

$z^i$  sonsuz küçük bükülme vektörünün  $z^j$  ye göre kovaryant türevi

$$z_{|j}^i = z_{,j}^i + z^p L_{pj}^i \quad (2.6)$$

dir. (2.6) da  $x^k$  ya göre kovaryant türevi ise

$$(z_{|j}^i)_{|k} = (z_{,j}^i)_{,k} + z_{|j}^k L_{pk}^i - z_{|p}^i L_{jk}^p$$

dir

$$(z_{|j}^i)_{|k} = (z_{,j}^i + z^p L_{pj}^i)_{,k} + (z_{,j}^p + z^s L_{sj}^i) L_{pk}^i - (z_{,p}^i + z^s L_{ps}^i) L_{jk}^p$$

$$z_{|jk}^i = z_{,jk}^i + z_{,k}^p L_{pj}^i + z^p L_{pj,k}^i + z_{,j}^p L_{pk}^i + z^s L_{sj}^i L_{pk}^i - z_{,p}^i L_{jk}^p - z^s L_{ps}^i L_{jk}^p$$

$$z_{,jk}^i = z_{|jk}^i - z_{,k}^p L_{pj}^i - z^p L_{pj,k}^i - z_{,j}^p L_{pk}^i - z^s L_{sj}^i L_{pk}^i + z_{,p}^i L_{jk}^p + z^s L_{ps}^i L_{jk}^p$$

Burada  $z_{|jk}^i$   $z^i$  nin j ve k ya göre kovaryant türevidir.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_z L_{jk}^i &= z_{|jk}^i - L_{pj,k}^i z^p - L_{pj}^i z_{,k}^p - L_{pk}^i L_{sj}^p z^s + L_{jk}^p z_{,p}^i \\ &\quad - L_{pk}^i z_{,j}^p + L_{jk}^p L_{sp}^i z^s + L_{jk,p}^i z^p - z_{,p}^i L_{jk}^p + z_{,j}^p L_{pk}^i + z_{,k}^p L_{jp}^i \end{aligned}$$

Bu ifadede 5. terim ile 9. terim ; 6. terim ile 10. terim sadeleşmektedir.

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i - L_{pj,k}^i z^p - L_{pj}^i z_{,k}^p - L_{pk}^i L_{sj}^p z^s + L_{jk}^p L_{sp}^i z^s + L_{jk,p}^i z^p + z_{,k}^p L_{jp}^i$$

$z_{,k}^p$  parantezine alıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + z_{,k}^p (L_{jp}^i - L_{pj}^i) - L_{pj,k}^i z^p + L_{jk,p}^i z^p - L_{pk}^i L_{sj}^p z^s + L_{jk}^p L_{sp}^i z^s$$

elde edilir. Son iki terim de  $p \rightarrow s$  indis değişimi yapılarak Riemann eğrilik tensörünü elde etmek amacı ile

$$+ L_{sk}^i L_{pj}^s z^p - L_{jk}^s L_{ps}^i z^p + L_{jp,k}^i z^p$$

$$- L_{sk}^i L_{pj}^s z^p + L_{jk}^s L_{ps}^i z^p - L_{jp,k}^i z^p$$

terimlerini ekleyelim. Buradan

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_z L_{jk}^i &= z_{|jk}^i + z_{,k}^p (L_{jp}^i - L_{pj}^i) - L_{pj,k}^i z^p + L_{jk,p}^i z^p - L_{sk}^i L_{pj}^s z^p + L_{jk}^s L_{ps}^i z^p \\ &\quad + L_{sk}^i L_{jp}^s z^p - L_{jk}^s L_{sp}^i z^p + L_{jp,k}^i z^p \\ &\quad - L_{sk}^i L_{jp}^s z^p + L_{jk}^s L_{sp}^i z^p - L_{jp,k}^i z^p \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_z L_{jk}^i &= z_{|jk}^i + z_{,k}^p (L_{jp}^i - L_{pj}^i) z^p + L_{sk}^i (L_{jp}^s - L_{pj}^s) z^p \\ &\quad + L_{jk}^s (L_{sp}^i - L_{ps}^i) z^p + (L_{jp,k}^i - L_{pj,k}^i) z^p + \\ &\quad + L_{jk,p}^i z^p - L_{jp}^s L_{sk}^i z^p + L_{jk}^s L_{sp}^i z^p - L_{jp,k}^i z^p \end{aligned}$$

$$T_{jk}^i = L_{jk}^i - L_{kj}^i$$

ve

$$R_{jkp}^i = L_{jk,p}^i - L_{jp}^s L_{sk}^i + L_{jk}^s L_{sp}^i - L_{jp,k}^i$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + z_{,k}^p T_{jp}^i + L_{sk}^i T_{jp}^s z^p + L_{jk}^s T_{ps}^i z^p + T_{jp,k}^i z^p + R_{jkp}^i z^p$$

dır. 4. terimdeki  $T$  karışık tensöründe  $p \rightarrow s$  indis değişimi yapılır ve  $-L_{sk}^p T_{jp}^i z^s + L_{sk}^p T_{jp}^i z^s$  terimleri eklenirse ifade

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + z_{,k}^p T_{jp}^i + L_{sk}^i T_{jp}^s z^p - L_{jk}^s T_{sp}^i z^p + T_{jp,k}^i z^p - L_{sk}^p T_{jp}^i z^s + L_{sk}^p T_{jp}^i z^s + R_{jkp}^i z^p$$

haline gelir; elde ettiğimiz bu ifadede 6. terimde  $p \rightarrow s$  indis değişimi yapılır

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + z_{,k}^p T_{jp}^i + L_{sk}^i T_{jp}^s z^p - L_{jk}^s T_{sp}^i z^p + T_{jp,k}^i z^p - L_{pk}^s T_{js}^i z^p + L_{sk}^p T_{jp}^i z^s + R_{jkp}^i z^p$$

ve bulunan bu ifadede

$$T_{jp|k}^i z^p = T_{jp,k}^i z^p + L_{sk}^i T_{jp}^s z^p - L_{jk}^s T_{sp}^i z^p - L_{pk}^s T_{js}^i z^p$$

eşitliği kullanılırsa

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + T_{jp|k}^i z^p + T_{jp}^i z_{,k}^p + T_{jp}^i L_{sk}^p z^s + R_{jkp}^i z^p$$

elde edilir.

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + T_{jp|s}^i z^p + z_{|k}^p T_{jp}^i - L_{sk}^p T_{jp}^i z^s + T_{jp}^i L_{sk}^p z^s + R_{jkp}^i z^p$$

4. ve 5. terimler sadeleşirse

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + T_{jp|s}^i z^p + z_{|k}^p T_{jp}^i + R_{jkp}^i z^p$$

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + (T_{jp}^i z^p)_{|k} + R_{jkp}^i z^p$$

$$\mathfrak{L}_z L_{jk}^i = z_{|jk}^i + R_{jkp}^i z^p$$

bulunur.

## 2.2 $t_k^{ij}$ Tensörünün Lie Türevi

$z^i$  ve  $t_k^{ij}$  nin kovaryant türevleri sırası ile aşağıdaki şekildedir:

$$z_{;m}^i = z_{,m}^i + z^p L_{pm}^i$$

$$t_{k;m}^{ij} = t_{k,m}^{ij} + t_k^{pj} L_{pm}^i + t_k^{ip} L_{pm}^j - t_p^{ij} L_{km}^p$$

$t_k^{ij}$  nin Lie türevi:

$$\mathfrak{L}_z t_k^{ij} = t_{k,p}^{ij} z^p + t_p^{ij} z_{,k}^p - t_k^{pj} z_{,p}^i - t_k^{ip} z_{,p}^j \quad (2.7)$$

şeklindedir.

$$t_{k,p}^{ij} = t_{k|p}^{ij} - t_k^{hj} L_{hp}^i - t_k^{ih} L_{hp}^j + t_h^{ij} L_{kp}^h$$

$$z_{,k}^p = z_{|k}^p - z^h L_{hk}^p$$

$$z_{,p}^i = z_{|p}^i - z^h L_{hp}^i$$

$$z_{,p}^j = z_{|p}^j - z^h L_{hp}^j$$

eşitliklerini (2.4) de yerine yazarak

$$\mathfrak{L}_z t_k^{ij} = (t_{k,p}^{ij} - t_k^{hj} L_{hp}^i - t_k^{ih} L_{hp}^j + t_h^{ij} L_{kp}^h) z^p + t_p^{ij} (z_{,k}^p - z^h L_{hk}^p) - t_k^{pj} (z_{,p}^i - z^h L_{hp}^i) - t_k^{ip} (z_{,p}^j - z^h L_{hp}^j)$$

ifade düzenlenirse;

$$\mathfrak{L}_z t_k^{ij} = t_{k;p}^{ij} z^p + t_p^{ij} z_{,k}^p - t_k^{pj} z_{,p}^i - t_k^{ip} z_{,p}^j + t_p^{ij} z^h T_{hk}^p + t_k^{hj} z^h T_{ph}^i + t_k^{ih} z^h T_{ph}^j \quad (2.8)$$

elde edilir.

### 2.3 (u, v) Tipinden $t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u}$ Tensörünün Lie Türevi

(u, v) Tipinden  $t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u}$  Tensörünün Lie Türevi

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u} = (t_{j_1 j_2 \dots j_v, p}^{i_1 i_2 \dots i_u} z^p - \sum_{\alpha=1}^u z_{,p}^{i_\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{,j_\beta}^p \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u}) \mathcal{E} \quad (2.9)$$

şeklinde olup burada  $\binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} p i_{\alpha+1} \dots i_u}$  ve  $\binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_{\beta-1} p j_{\beta+1} \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$  dır.

$t_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_u}$  tensörünün Lie türevinin kovaryant türeve göre ifadesini bulalım:

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \mathfrak{L}_\theta z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v, p}^{i_1 \dots i_u} z^p - \sum_{\alpha=1}^u z_{|p}^{i_\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{J_\beta}^P \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \quad (2.10)$$

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \left[ t_{j_1 \dots j_v | p}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u L_{ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v L_{j_\beta p}^s \binom{j_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \right] z^p - \sum_{\alpha=1}^u (z_{|p}^{i_\alpha} - L_{ps}^{i_\alpha} z^s) \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v (z_{|j_\beta}^{i_\alpha} - L_{j_\beta p}^s z^s) \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} &= t_{j_1 \dots j_v | p}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u z_{|p}^{i_\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{|j_\beta}^{i_\alpha} \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^u L_{ps}^{i_\alpha} z^p \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u L_{ps}^{i_\alpha} z^s \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^v L_{j_\beta p}^s z^p \binom{J_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\beta=1}^v L_{j_\beta s}^p z^s \binom{J_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \end{aligned}$$

5. ve 7. terimlerde

$p \rightarrow s$

$s \rightarrow p$

indis değişimi yapalım

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v | p}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u z_{|p}^{i_\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{|j_\beta}^{i_\alpha} \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u (L_{sp}^{i_\alpha} - L_{ps}^{i_\alpha}) z^p \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

Burada

$$T_{sp}^{i_\alpha} = L_{sp}^{i_\alpha} - L_{ps}^{i_\alpha} \quad (2.11)$$

olduğundan, ifade

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v | p}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u z_{|p}^{i_\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{|j_\beta}^{i_\alpha} \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u T_{sp}^{i_\alpha} z^p \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

şeklini alır. Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

**Teorem 2.2:**  $(u, v)$  tipinden karışık  $t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$  tensörünün Lie türevi  $(u, v)$  tipinde bir tensördür

ve

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v | p}^{i_1 \dots i_u} z^p - \sum_{\alpha=1}^u z_{|p}^{i_\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{|j_\beta}^{i_\alpha} \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u T_{sp}^{i_\alpha} z^p \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_{\beta-1} P^j j_{\beta+1} \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

ve

$$\binom{P}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} P^i i_{\alpha+1} \dots i_u}$$

dır.

**Önerme 2.1:**  $L_N$  uzayı  $L_{jk}^i$  simetrik konneksiyona sahip burulmasız bir uzay ise ( $T_{jk}^i = 0$ )

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \mathfrak{L}_z^0 t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \equiv t_{j_1 \dots j_v | P}^{i_1 \dots i_u} z^P - \sum_{\alpha=1}^u z_{|P}^{i_\alpha} \binom{P}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{|j_\beta}^P \binom{J_\beta}{P} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

dır.

### 2.3.1 (u, v) Tipindeki $n^{12 \dots i}$ Tensörünün Lie Türevinin Diğer Bir İfadesi

$L_{jk}^i$  simetrik olmayan afin konneksiyona ve

$$T_{jk}^i = L_{jk}^i - L_{kj}^i = 2L_{[jk]}^i$$

burulma tensörüne sahip n boyutlu  $L_n$  uzayındaki Lie türevi için,  $L_{jk}^i$  konneksiyonunun

$$L_{jk}^i = \frac{1}{2}(L_{jk}^i - L_{kj}^i)$$

simetrik kısmını ele alarak işlemleri yeniden inceleyelim. Burada  $T_{jk}^i = L_{jk}^i - L_{kj}^i = 2L_{[jk]}^i$  olduğundan

$$L_{jk}^i = L_{jk}^i + \frac{1}{2}T_{jk}^i$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} t_{j_1 \dots j_v | P}^{i_1 \dots i_u} &= t_{j_1 \dots j_v, P}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u L_{Ps}^{i_\alpha} z^P \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\beta=1}^v L_{j_\beta P}^s z^P \binom{J_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \\ t_{j_1 \dots j_v | P}^{i_1 \dots i_u} &= t_{j_1 \dots j_v, P}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u (L_{Ps}^{i_\alpha} + \frac{1}{2}T_{Ps}^{i_\alpha}) \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\beta=1}^v (L_{j_\beta P}^s + \frac{1}{2}T_{j_\beta P}^s) \binom{j_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \\ t_{j_1 \dots j_v | P}^{i_1 \dots i_u} &= t_{j_1 \dots j_v, P}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\alpha=1}^u L_{Ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\beta=1}^v L_{j_\beta P}^s \binom{j_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^u T_{Ps}^{i_\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^v T_{j_\beta P}^s \binom{j_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \end{aligned}$$

$$t_{j_1 \dots j_v | p}^{i_1 \dots i_u} = t_{j_1 \dots j_v : p}^{i_1 \dots i_u} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^v T_{j\beta p}^s \binom{j_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

dir ve

$$z_{|p}^{i\alpha} = z_{,p}^{i\alpha} + L_{ps}^{i\alpha} z^s$$

$$z_{|p}^{i\alpha} = z_{,p}^{i\alpha} + (L_{ps}^{i\alpha} + \frac{1}{2} T_{ps}^{i\alpha}) z^s$$

$$z_{|p}^{i\alpha} = z_{,p}^{i\alpha} + L_{ps}^{i\alpha} z^s + \frac{1}{2} T_{ps}^{i\alpha} z^s$$

$$z_{|p}^{i\alpha} = z_{,p}^{i\alpha} \frac{1}{2} T_{ps}^{i\alpha} z^s$$

dir. Burada ( $\cdot$ ),  $L_{jk}^i$  konneksiyonunun  $L_{jk}^i$  simetrik kısmına göre alınan kovaryant türevi

temsil etmektedir. Şimdi bulduğumuz ifadeleri Lie türevinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} &= \mathfrak{L}_\theta z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \equiv t_{j_1 \dots j_v | p}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u z_{\theta | p}^{i\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\beta=1}^v z_{\theta | j_\beta}^{j_\beta} \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \left[ t_{j_1 \dots j_v : p}^{i_1 \dots i_u} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^v T_{j\beta p}^s \binom{j_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \right] z^p$$

$$- \sum_{\alpha=1}^u (z_{,p}^{i\alpha} + \frac{1}{2} T_{ps}^{i\alpha} z^s) \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v (z_{,j_\beta}^p + \frac{1}{2} T_{j\beta}^p z^s) \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} &= t_{j_1 \dots j_v : p}^{i_1 \dots i_u} z^p + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} z^p - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^v T_{j\beta p}^s \binom{j_\beta}{s} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} z^p \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^u z_{,p}^{i\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i\alpha} z^s \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{,j_\beta}^p \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^v T_{j\beta}^p z^s \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} - \sum_{\alpha=1}^u T_{ps}^{i\alpha} \binom{s}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} z^p \end{aligned}$$

$p \leftrightarrow s$  indis değişimi yaptığımızda antisimetrik  $T_{ps}^{i\alpha}$  tensörünün

$$T_{ps}^{i\alpha} = -T_{sp}^{i\alpha}$$

şeklinde işaret değiştirdiğini belirtelim.

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \mathfrak{L}_0 z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \equiv t_{j_1 \dots j_v : p}^{i_1 \dots i_u} z^p - \sum_{\alpha=1}^u z_{,p}^{i\alpha} \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{,j_\beta}^p \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

**Teorem 2.3:**  $(u, v)$  tipinden karışık  $t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$  tensörünün Lie türevi

$$\mathfrak{L}_z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} = \mathfrak{L}_0 z t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} \equiv t_{j_1 \dots j_v \cdot p}^{i_1 \dots i_u} z^p - \sum_{\alpha=1}^u z_{;\alpha}^i \binom{p}{i_\alpha} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u} + \sum_{\beta=1}^v z_{;\beta}^p \binom{j_\beta}{p} t_{j_1 \dots j_v}^{i_1 \dots i_u}$$

şeklindedir. Burada  $(;)$ ,  $L_{jk}^i$  konneksiyonunun  $L_{jk}^i$  simetrik kısmına göre alınan kovaryant türevi temsil etmektedir.

**Teorem 2.4**  $z^i(x)$  vektör alanının  $R^n$  Riemann uzayında bir sonsuz küçük hareket tanımlaması için gerek ve yeter koşul  $z^i$  ile keyfi bir jeodeziğin teğet birim vektörünün bu jeodezik boyunca iç çarpımının sabit olmasıdır.

**İspat:**

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

Riemann metriği ile verilen  $n$  boyutlu  $R^n$  Riemann uzayını düşünelim. Daha önce

$$\bar{x}^i = x^i + z^i(x^i) \epsilon$$

nokta dönüşümünün  $R^n$  de bir hareket olması için gerek ve yeter şartın

$$\mathfrak{L}_z g_{mn} = 2\nabla_{(m} z_{n)}$$

olduğunu göstermiştik.

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( g_{mn} z^m \frac{dx^n}{ds} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (g_{mn}) z^m \frac{dx^n}{ds} + g_{mn} \frac{\partial}{\partial s} (z^m) \frac{dx^n}{ds} + g_{mn} z^m \frac{d^2 x^n}{ds^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{mn}) z^m \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + g_{mn} \frac{\partial}{\partial s} (z^m) \frac{dx^n}{ds} + g_{mn} z^m \frac{d^2 x^n}{ds^2}$$

Burada jeodeziklerin diferansiyel denklemi

$$\frac{d^2 x^n}{ds^2} + L_{ij}^n \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (2.13)$$

kullanılarak

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{mn}) z^m \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + g_{mn} \frac{\partial}{\partial s} (z^m) \frac{dx^n}{ds} - g_{mn} z^m L_{ij}^n \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}$$

elde edilir. Ve

$$g_{mn} L_{ij}^n = [ij, m] = \Gamma_{ijm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) \quad (2.14)$$

ifadeleri yerine yazılarak

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{mn}) z^m \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + g_{mn} \frac{\partial}{\partial s} (z^m) \frac{dx^n}{ds} - \frac{z^m}{2} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{mn}) z^m \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^n} (g_{mn}) z^m \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + g_{mn} \frac{\partial}{\partial s} (z^m) \frac{dx^n}{ds} - \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} z^m - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} z^m + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} z^m \end{aligned}$$

bulunur. Burada

4. terimde  $i \rightarrow n$

$j \rightarrow k$

5. terimde  $j \rightarrow n$

$i \rightarrow k$

indis değişimlerini yaptıktan sonra ifade düzenlenirse 1.-4. ve 2.-5. terimler sadeleşir

3. terim iki eşit parça halinde yazılarak

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{1}{2} g_{mn} \frac{\partial}{\partial s} (z^m) \frac{dx^n}{ds} + \frac{1}{2} g_{mn} \frac{\partial}{\partial s} (z^m) \frac{dx^n}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} z^m \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{1}{2} g_{mn} \frac{\partial}{\partial x^k} (z^m) \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2} g_{mn} \frac{\partial}{\partial x^k} (z^m) \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} z^m$$

1.terimde  $n \rightarrow i$

$k \rightarrow j$

2.terimde  $m \rightarrow n$

$n \rightarrow j$

$k \rightarrow i$

3.terimde  $m \rightarrow k$

indislerini deęiřtirerek

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{1}{2} \left( g_{mi} \frac{\partial}{\partial x^j} z^m + g_{nj} \frac{\partial}{\partial x^j} z^n + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} z^k \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \quad (2.16)$$

elde edilir  $2\nabla_{(i} z_{j)} = \left( g_{mi} \frac{\partial}{\partial x^j} z^m + g_{nj} \frac{\partial}{\partial x^j} z^n + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} z^k \right)$  dan

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{1}{2} (2\nabla_{(i} z_{j)}) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \quad (2.17)$$

ifadesi bulunur. Burada

$$2\nabla_{(i} z_{j)} = 0$$

olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \frac{1}{2} (2\nabla_{(i} z_{j)}) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0$$

dır ve buradan da

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z_n \frac{dx^n}{ds} \right) = \nabla_{(i} z_{j)} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (2.18)$$

olup, bu i arpımın jeodezik boyunca sabit olduğu ispatlanmış olur.

**KAYNAKLAR**

Yano, K., (1957), The Theory of Lie Derivatives and Its Applications, N-Holland Publ.Co , Amsterdam.

Velimirovic, L.S., Mincic, S.M., Stankovic, M.S., (2003), "Infinitesimal Deformations and Lie Derivative of a Non-Symmetric Affine Connection Space", Acta Univ. Palacki. Olomouc., Fac. Rer. Nat., Mathematica, 42:111-121.

Velimirovic, L.S., Mincic, S.M., Stankovic, M.S., (2001), "Infinitesimal Deformations of Non-Symmetric Affine Connection Space", Filomat, 175-182.

Velimirovic, L.S., Mincic, S.M., (2004), "Infinitesimal Bending of a Subspace of a generalized Riemannian Space", Tensor, N.S. 65:212-224.

Velimirovic, L.S., Mincic, S.M., Stankovic, M.S., (2002), "Infinitesimal Deformations of Curvature Tensors At Non-Symmetric Affine Connection Space", Matematicki Vesnik, 54:219-226

Eisenhart, L.P., (1927), Non-Reimannien Geometry, Published by the American Mathematical Society, New York.

Weatherburn, C.E., (1966), An Introduction To Riemannian Geometry and The Tensor Calculus. Published by The Syndics of The Cambridge Univercity Press, London.

Soyuçok Z., Soyuçok A., (2004), Tensör Analizi ve Uygulamaları, YTÜ Basım Yayın Merkezi, YTÜ.FE.DK-04.0713/Fakülte Yayın No:FE.Mat-04.001.

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum Tarihi	06.10.1981	
Doğum Yeri	Isparta	
Lise	1995-1999	Gazi Süper Lisesi
Lisans	1999-2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

**Çalıştığı Kurumlar**

2006-Devam ediyor Bilge Adam Bilgi Teknolojileri Akademisi