

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU GRUPLARIN AYRIŞILABİLİRLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Öğretmeni Elvin ÖZÜTAŞTAN

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Cebir ve Sayılar Teorisi

MANİSA 2006

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU GRUPLARIN AYRIŞILABİLİRLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Öğretmeni Elvin ÖZÜTAŞTAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 Ağustos 2006

Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Ağustos 2006

Tez Danışmanı : Yard.Doç.Dr. Mustafa KAZAZ
Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU
: Yard.Doç.Dr. Ali ÖZDEMİR

MANİSA 2006

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
BİRİNCİ BÖLÜM	
TEMEL KAVRAMLAR	1
İKİNCİ BÖLÜM	
5 - VE 6 - AYRIŞILABİLİR SONLU GRUPLAR	11
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM	
7 - ve 8 - AYRIŞILABİLİR SONLU GRUPLAR	20
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM	
X - AYRIŞABİLİR GRUPLAR	28
4. 1. $X = \{1, 2, 3\}$ - AYRIŞABİLİR GRUPLAR	28
4. 2. $X = \{1, 3, 4\}$ - AYRIŞABİLİR GRUPLAR	35
KAYNAKLAR	40

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmamda emeği geçen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ'a, sevgi, saygı ve sabırlarını hiçbir zaman esirgemeyen annem Nalan ÖZÜTAŞTAN ve sayın Tayfun Tolga TÜRKYILMAZ'a sonsuz Őükranlarımı sunarım.

ÖZET

G bir sonlu grup ve A , G nin bir normal alt grubu olsun. $ncc(A)$ ile A 'nın G -eşlenik sınıflarının sayısını gösterelim. Eğer $ncc(A) = n$ ise A ya n -ayrışılabilir denir. $K_G = \{ncc(A) \mid A \triangleleft G\}$ olsun. X pozitif tamsayıların boştan farklı bir alt cümlesi olsun. Eğer $K_G = X$ ise bu taktirde, G ye X -ayrışılabilir denir. Eğer $X = \{1, n\}$ ve G , X -ayrışılabilir ise bu taktirde, G ye n -ayrışılabilir denir.

[13] de, Shahryari ve Shahabi, bir 2-ayrışabilir H alt grubunu içeren sonlu grupların yapısını belirlemişlerdir. Bu durum için, $H \leq G'$, $|H|(|H|-1) \mid |G|$ ve H G nin bir elemanter abelyen normal alt grubudur.

[14] de yine Shahryari ve Shahabi, 3-ayrışabilir H alt grublu sonlu G grupların yapısını incelediler. Bu durumda H in ya bir elemanter abelyen grup, bir yarıabelyen p -grup veya elemanter abelyen H' çekirdekli bir Frobenius grup olabileceğini ispatladılar.

[17] de Reise ve Shahabi de bir 4-ayrışabilir alt grublu sonlu G grupların yapısını belirlemişlerdir.

[6] da Ashrafi ve Sahraei, 2-, 3- ve 4- ayrışabilir sonlu grupların yapısını karakterize ettiler. Ayrıca çözülebilir n -ayrışabilir sonlu grupların yapısını elde ettiler.

Bu çalışma, Ashrafi'nin seri makaleleri incelenmiştir. 1. bölümde çalışmada gerekli olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir. 2. bölümde 5- ve 6-ayrışabilir sonlu grupların yapısı incelenmiştir. 3. bölümde ise 7- ve 8-ayrışabilir sonlu gruplar karakterize edilmiştir. Son bölümde, $X = \{1, 2, 3\}$ ve $\{1, 3, 4\}$ ise, bu taktirde X -ayrışabilir sonlu grupların yapısı incelenmiştir.

ABSTRACT

Let G be a finite group and A be a normal subgroup of G . We denote by $ncc(A)$ the number of G -conjugacy classes of A and is called n -decomposable if $ncc(A) = n$. Set $K_G = \{ncc(A) \mid A \triangleleft G\}$. Let X be a non-empty subset of positive integers. A group G is called X -decomposable, if $K_G = X$.

In [13], Shahryari and Shahabi, investigated the structure of finite groups, which contains a 2-decomposable subgroup H . In this case, $H \leq G'$, $|H|(|H|-1)$ divides $|G|$ and H is a elementary abelian normal subgroup of G .

In [14], Shahryari and Shahabi studied the structure of finite groups G with a 3-decomposable subgroup H . They proved that, H is either an elementary abelian subgroup, a metabelian p -group or a Frobenius group with elementary abelian kernel H' .

In [17], Reize and Shahabi, determined the structure of finite groups G with a 4-decomposable subgroup.

In [6], Ashrafi and Sahraei, characterized the structure of 2-, 3-, 4-decomposable finite groups. And they obtained the structure of n -decomposable solvable finite groups.

In this study, series articles of Ashrafi was examined. In the first part, the definitions and theorems which are necessary in this study, were given. In the second part, the structure of 5- and 6-decomposable finite groups was examined. In the third part, 7- and 8-decomposable finite groups were characterized. In the last part, if $X = \{1, 2, 3\}$ and $\{1, 3, 4\}$, then X -decomposable finite groups structure was examined.

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılan grup teori ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Genel olarak [1], [6], [7], [8], [9], [10], [13] ve [14] numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır.

Tanım 1.1 : Bir $G \neq \emptyset$ kümesinde bir $(a, b) \rightarrow ab$ ikili işlemi aşağıdaki kuralları gerçekliyors, G ye bir grup denir:

1. $\forall a, b, c \in G$ için $a (b c) = (a b) c$ Asosyatif kural verilir.
2. $\forall a \in G$ için $a e = e a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. e elemanına G nin birim elemanı denir
3. $\forall a \in G$ için $a a^{-1} = a^{-1} a = e$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ vardır. $a^{-1} \in G$ elemanına a nin inversi (tersi) denir.

G bir grup olsun. Eğer $\forall a, b \in G$ için $a b = b a$ oluyorsa G ye bir değişmeli (abel veya abelyan) grup denir.

Bir G grubunun eleman sayısına G grubunun mertebesi denir ve $|G|$ ile gösterilir. G grubu sonlu sayıda elemana sahip ise bu gruba sonlu grup, sonlu olmayan gruba da sonsuz grup denir.

Tanım 1.2 : G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ bir alt küme olsun. H , G de tanımlanan ikili işleme göre bizzat bir grup ise H a, G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 1.3 : $H = \{e\}$ ve $H = G$ alt kümeleri daima G grubunun alt gruplarıdır. $H = \{e\}$ alt grubuna trivial alt grup ve G den farklı her H alt grubuna da öz alt grup denir. Eğer H , G nin bir öz alt grubu ise $H < G$ yazılır.

Tanım 1.4 : G bir grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A yı içeren bütün alt gruplarının ailesinin arakesitini $\langle A \rangle$ ile gösterelim. Bu taktirde $\langle A \rangle$, G nin bir alt grubudur. Bu alt grup A

yı içeren en küçük alt gruptur ve A tarafından üretilen alt grup olarak adlandırılır. Eğer $A = \{x\}$ şeklinde bir elemanlı küme ise bu taktirde $\langle A \rangle$ yerine $\langle x \rangle$ yazılır. $\langle x \rangle \neq e$, G nin bir devirli alt grubu denir. $\langle x \rangle$ devirli alt grubunun mertebesine x elemanın mertebesi denir ve $|x|$ ile gösterilir.

Eğer G grubunun kendisi bir x elemanı tarafından üretilabiliyorsa G ye bir devirli grup denir.

$G = \langle x \rangle$ bir devirli grup olsun. Bu taktirde $G = \langle x \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dir. Ayrıca, $G = \langle x \rangle$ devirli grubunun değişmeli olacağı açıktır.

Tanım 1.5: G bir grup, S ve T , G nin boş olmayan alt kümeleri olsun. Bu taktirde

$$ST = \{st \mid s \in S, t \in T\}$$

olarak tanımlanır. Özellikle, $T = \{t\}$ için t yazarsak bu taktirde

$$St = \{st \mid s \in S\}.$$

Tanım 1.6: G bir grup, $H \leq G$ ve $g \in G$ olsun. Bu taktirde

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}$$

kümesine H in, G de bir sağ-yan sınıfı denir. Benzer şekilde bir gH sol-yan sınıfı da tanımlanır. g ye Hg (ve gH) nin bir temsilcisi denir. H in, G deki bütün sağ-yan sınıflarının koleksiyonu G/H ile gösterilir:

$$G/H = \{Hg \mid g \in G\}$$

dır. G de H in bir sağ-yan sınıfı birçok temsilciye sahip olabilir. Aşağıdaki teorem H in iki sağ yan sınıfının aynı olup olmadığını belirlemek için bir kriterdir.

Teorem 1.1: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu taktirde $Ha = Hb$ dir ancak ve ancak $ab^{-1} \in H$ dir (benzer olarak, $aH = bH \Leftrightarrow ba^{-1} \in H$ dir).

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. G de H in herhangi iki sağ-yan sınıfı ya aynıdır ya da ayrıktır. Ayrıca G de H in sağ-yan sınıflarının sayısı sol-yan sınıflarının sayısına eşittir.

Tanım 1.7: G bir grup, $H \leq G$ olsun. H alt grubunun her sol-yan sınıfından (veya sağ-yan sınıfından) bir tek eleman seçilerek, bu elemanlardan teşkil edilen R kümesine, H alt grubunun G deki bir sol transversalı (veya sağ transversalı) denir.

Tanım 1.8: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. G de H in bütün sağ-yan sınıflarının sayısına G de H in indeksi denir ve $[G:H]$ ile gösterilir. Buna göre, $|R| = [G:H]$ dir.

Tanım 1.9 : G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ için $gHg^{-1} = H$ oluyorsa H a, G nin bir normal alt grubu denir ve $H \triangleleft G$ ile gösterilir.

Teorem 1.2 : $[G : H] = 2$ ise H normaldir.

Teorem 1.3 : (Lagrange) : Eğer G sonlu bir grup ve $H \leq G$ ise bu taktirde $|H|$, $|G|$ yi böler. Özellikle, $[G : H] = |G|/|H|$ dir.

Teorem 1.4 : Eğer $|G| = p$, (p bir asal sayı) ise bu taktirde G devirlidir.

Tanım 1.10 : Eğer bir G grubu öz normal alt grup içermiyorsa G ye basit grup denir.

Tanım 1.11 : G bir grup ve $x, y \in G$ olsun.

$$y = g^{-1}xg$$

olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı varsa y, x e eşleniktir denir. G de x e eşlenik bütün elemanların kümesi x^G ile gösterilir: $x^G = \{ g^{-1}xg : g \in G \}$. x^G ye G de x in eşlenik sınıfı denir.

Tanım 1.12 : G bir grup ve H, K G nin iki alt grubu olsun. Eğer

$$K = g^{-1}Hg = \{ g^{-1}hg \mid h \in H \}$$

olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı varsa H ve K alt gruplarına eşleniktir denir. $g^{-1}Hg$ kümesi H^g ile gösterilir.

Tanım 1.13 : G bir grup olmak üzere

$$Z = Z(G) = \{ a \in G \mid \forall x \in G \text{ için } ax = xa \}$$

kümesine, G nin merkezi denir. Eğer $Z(G) = 1$ ise G grubuna merkezsizdir denir. $Z(G)$ nin G nin bir normal abelyan alt grubu olduğunu göstermek kolaydır.

Tanım 1.14 : G bir grup ve $a \in G$ olsun. a nın G deki merkezlieni, a ile değişmeli olan bütün $x \in G$ lerin cümlesidir. a nın G deki merkezleyeni $C_G(a)$ veya $C(a)$ ile gösterilir.

$$C_G(a) = \{ x \in G \mid ax = xa \}$$

$C_G(a)$ nın, G nin bir alt grubu olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca $Z(G) = \bigcap_{a \in G} C(a)$ dir.

Tanım 1.15 : N , G nin bir normal alt grubu olsun. G/N kümesi üzerinde $(Ng)(Nh) = N(gh)$ ile bir çarpım tanımlansın. Bu taktirde G/N bu çarpıma göre mertebesi $[G : N]$ olan bir gruptur. Bu gruba N ile G nin bölüm (faktör) grubu denir.

Tanım 1.16 : G bir grup ve H , G nin bir alt grubu olsun. $H < G$ ve $H < K \leq G$ den $K = G$ elde edilirse H alt grubuna, G nin bir maksimal alt grubu denir.

$E = \{ e \}$ olmak üzere $E < H$ ve $E \leq K < H$ dan $K = E$ elde edilirse H alt grubuna minimal alt grup denir.

Teorem 1.5 : G bir grup ve M , G nin bir normal alt grubu olsun. Bu taktirde M , G nin bir maksimal normal alt grubudur ancak ve ancak G/M basittir.

Tanım 1.17 : $(G, .)$ ve $(H, *)$ iki grup ve $\varphi : G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in G$ için

$$\varphi(a.b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

oluyorsa φ ye G den H ye bir homomorfi denir.

Tanım 1.18 : G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. Bu taktirde

$$\varphi : G \rightarrow G/N$$

$$g \mapsto gN$$

dönüşümü bir homomorfidir. Bu homomorfiye doğal homomorfi denir.

Tanım 1.19 : $\varphi : G \rightarrow H$ bir homomorfi olsun. Bu taktirde

$$\varphi^{-1}(e_H) = \{ a \in G : \varphi(a) = e_H \}$$

kümesi G nin bir alt grubudur. Buna φ homomorfisinin çekirdeği denir ve $\check{C}ek$ φ ile gösterilir.

Tanım 1.20 : Örtlen bir φ homomorfisine bir epimorfi ve 1-1 bir φ homomorfisine de bir monomorfi denir. Örtlen ve 1-1 bir φ homomorfisine izomorfi denir. Eğer G ve H grupları arasında bir izomorfi varsa bu gruplara izomorfiktir denir ve $G \cong H$ ile gösterilir. Bir G grubunun kendi üzerine bir izomorfisine bir otomorfi denir. G nin bütün otomorfilerinin kümesi $Aut(G)$ ile gösterilir. $Aut(G)$ bileşke işlemi altında bir gruptur.

Teorem 1.6 (Birinci İzomorfi Teoremi) : Eğer $\varphi : G \rightarrow H$ örtlen bir grup homomorfisi ise bu taktirde

$G / \zeta G \cong H$ dir.

Teorem 1.7 (İkinci İzomorfi Teoremi) : G bir grup, $H \leq G$ ve $N \triangleleft G$ olsun. Bu taktirde $H \cap N$, H in bir normal alt grubu, HN de G nin bir alt grubudur ve $H / H \cap N \cong HN / N$ dir.

Tanım 1.21 : H ve K iki grup olsun. $H \times K = \{ (h, k) \mid h \in H, k \in K \}$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde bir ikili işlem

$$(h, k) (h', k') = (hh', kk')$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde $H \times K$ bu ikili işleme göre bir gruptur. Bu gruba H ve K nın direkt çarpım grubu denir.

Teorem 1.8 : G bir grup ve H, K G nin iki normal alt grupları olsun. Eğer $H \cap K = \{e\}$ ve $G = HK$ ise bu taktirde $G \cong H \times K$ dir.

Teorem 1.9 : $G = H \times K$ olsun. $H_1 \triangleleft H$ ve $K_1 \triangleleft K$ olsun. Bu taktirde $H_1 \times K_1 \triangleleft G$ dir ve $G / (H_1 \times K_1) \cong (H / H_1) \times (K / K_1)$ dir.

Tanım 1.22 : K , G nin bir alt grubu olsun (normal alt grup olması gerekmez). Eğer $K \cap Q = 1$ ve $KQ = G$ olacak şekilde bir $Q \leq G$ alt grubu varsa Q ya, G de K nın bir komplementidir denir.

Tanım 1.23 : G bir grup ve $K \triangleleft G$ olsun. Eğer K , bir Q komplementine sahip ise bu taktirde G ye Q ile K nın bir yarı direkt çarpımı (semi-direct product) denir ve $G = K \rtimes Q$ ile gösterilir.

Eğer $G = K \rtimes Q$ ise bu taktirde her $x \in Q$ için

$$\varphi_x : K \rightarrow K, \varphi_x(k) = xkx^{-1}$$

ile tanımlanan dönüşüm K nın bir otomorfisidir. Üstelik, $\varphi : Q \rightarrow \text{Aut } K$, $\varphi(x) = \varphi_x$ ile tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfisidir. Böylece Q ile K nın bir yarı direkt çarpımını oluşturmak için Q dan $\text{Aut } K$ ya bir homomorfiye gereksinim vardır.

Teorem 1.10 : A ve B gruplar olsun. $\varphi : B \rightarrow \text{Aut } A$, $\varphi(b) = \varphi_b$ bir grup homomorfisi olsun. Bu taktirde $A \rtimes B$ kartezyen çarpımı,

$$(a, b)(a', b') = (a\varphi_b(a'), bb')$$

işlemine göre bir gruptur.

Tanım 1.24 : Teorem 1.10 da ifade edilen gruba φ yardımıyla B ile A nın yarı direk çarpımı denir ve $A \rtimes_{\varphi} B$ ile gösterilir.

Teorem 1.11 : $G = A \rtimes_{\varphi} B$, φ yardımıyla B ile A nın yarı direk çarpımı olsun. $K = \{ (a,1) \mid a \in A \}$ ve $Q = \{ (1,b) \mid b \in B \}$ olsun. Bu taktirde $K, Q \leq G$ ve $K \cong A, Q \cong B$ dir. Üstelik, $K \triangleleft G, G = KQ$ ve $K \cap Q = 1$ dir.

Tanım 1.25 : G bir grup olsun. $a, b \in G$ elemanları ile oluşturulan $a^{-1}b^{-1}ab$ elemanına, a ile b nin komütatörü denir ve $[a, b]$ ile gösterilir.

$G' = \langle [a, b] : a, b \in G \rangle \leq G$ alt grubuna G nin komütatör alt grubu denir. Ayrıca, $G' \triangleleft G$ dir.

Bir G grubu için $G = G'$ oluyorsa G ye mükemmel (perfect) grup denir. Her basit grubun mükemmel olacağı açıktır. Eğer $G \neq G'$ ise G ye mükemmel olmayan (non-perfect) grup denir.

G bir grup olsun. Eğer G nin G' komütatör alt grubu abelyan ise G ye yarıabelyan (metabelian) grup denir. Denk olarak, bir G grubu yarıabelyandır ancak ve ancak G nin bir abelyen N normal alt grubu vardır öyle ki, G/N bölüm grubu abelyandır.

Tanım 1.26 : G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer G nin mertebesi p nin bir kuvveti şeklinde ise G ye bir p - grup denir. Bir G grubunun bir H alt grubunun mertebesi bir p asal sayısının kuvveti şeklinde ise H a, G nin bir p - alt grubu denir.

Tanım 1.27 : Bir G grubu, p asal olmak üzere, $Z_p \times Z_p \times \cdots \times Z_p$ ye izomorfik ise G ye elementer abelyan p -grup denir.

Teorem 1.12 : (Cauchy): Eğer G , mertebesi bir p asal sayısı ile bölünebilen bir sonlu bir grup ise G , p . mertebeden bir eleman içerir.

Tanım 1.28 : $|G| = p^n m$, $(p, m) = 1$ olsun. G nin bir H alt grubunun mertebesi tam olarak p^n ise bu taktirde H a, G nin bir Sylow p - alt grubu denir.

Teorem 1.13 : G , sonlu bir grup ve H , G nin bir Sylow p - alt grubu olsun. Bu taktirde

i) Her $x \in G$ için H^x bir Sylow p - alt grubudur.

ii) $H \triangleleft G$ dir $\Leftrightarrow H$, yegane Sylow p - alt grubudur.

Teorem 1.14 (Sylow) :

- i) Eğer P , sonlu bir G grubunun Sylow p - alt grubu ise G nin bütün Sylow p -alt grupları P ye eşleniktir,
- ii) Eğer r tane Sylow p - alt grubu varsa; r , $|G|$ nin bir bölenidir ve $r \equiv 1 \pmod{p}$ dir.

Tanım 1.29 : G bir grup olsun. Her bir $G_i \triangleleft G_{i-1}$, $(i = 1, 2, \dots, r)$ olmak üzere G nin alt gruplarının sonlu bir

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_r = 1$$

Serisine G nin bir normal serisi denir. Bir normal serinin faktör grupları G_{i-1}/G_i ($i = 1, 2, \dots, r$) gruplarıdır. Bu G_{i-1}/G_i faktör gruplarına normal serinin faktörleri de denir. Bu serideki r doğal sayısına da, normal serinin uzunluğu denir; yani normal serinin uzunluğu trivial olmayan faktör gruplarının sayısıdır.

Eğer her bir G_i , G_{i-1} in maksimal öz normal alt grubu ise bu normal seriye bir kompozisyon serisi denir. G_{i-1}/G_i faktörlerine de kompozisyon faktörleri denir. Bu durumda G_{i-1}/G_i bir basit gruptur.

G sonlu bir grup olsun. Eğer G , faktör grupları asal mertebeli devirli olan bir normal seriye sahip ise G ye çözülebilirdir denir.

Teorem 1.15 : Bir sonlu $G \neq \{1\}$ grubu çözülebilirdir ancak ve ancak G abelyan faktör gruplarıyla bir normal seriye sahiptir.

Teorem 1.16 : Bir sonlu çözülebilir grubun bir maksimal alt grubu asal kuvvet indeksine sahiptir.

Teorem 1.17 : Sonlu grupların çözülebilir minimal normal alt grupları elementer abelian p -gruplardır.

Tanım 1.30 : G bir grup ve $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_r = 1$, G nin bir normal serisi olsun. Eğer her bir G_i , G de normal olan G_{i-1} in maksimal alt grubu ise bu taktirde $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_r = 1$ normal serisine bir esas (chief) serisi denir. G_{i-1}/G_i faktör gruplarına da serinin esas (chief) faktörler denir.

Tanım 1.31 : G bir grup olsun. Eğer G , her i için $G_{i-1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$ olacak şekilde bir

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_n = 1$$

normal serisine sahip ise G ye nilpotent grup denir. Bu tipteki bir seriye bir merkezi seri denir.

Her nilpotent grubun, çözülebilir olacağı açıktır. Zira, eğer G nilpotent ise bu taktirde $Z(G/G_i)$ değişmeli olacağından her bir G_{i-1}/G_i değişmeli olacaktır. Dolayısıyla G çözülebilirdir.

Teorem 1.18 : G bir sonlu grup olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

- i) G nilpotenttir.
- ii) G nin her maksimal alt grubu normaldir.
- iii) G nin her Sylow p - alt grubu normaldir.
- iv) G , onun Sylow p - alt gruplarının direk çarpımıdır.

Teorem 1.19 : Bir sonlu nilpotent grubun bir maksimal alt grubu asal indekse sahiptir.

Tanım 1.32 : Bir sonlu G grubunun bütün maksimal alt gruplarının arakesitine G nin, Frattini alt grubu denir ve $\Phi = \Phi(G)$ ile gösterilir.

Teorem 1.20 : Eğer G sonlu bir grup ise bu taktirde onun Frattini alt grubu Φ bir normal nilpotent alt gruptur.

Teorem 1.21 : G sonlu bir grup olsun. Bu taktirde, G nilpotenttir $\Leftrightarrow G' \leq \Phi(G)$ dir.

Tanım 1.33 : $X \neq \emptyset$ bir küme ve S_X de X in bütün permütasyonlarının kümesi olsun. Bu taktirde S_X bileşke işlemi altında bir gruptur. Bu gruba X üzerinde simetrik grup denir. S_X grubunun bir alt grubuna da X üzerinde bir permütasyon grubu denir. Eğer $X = \{ 1, 2, \dots, n \}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) ise S_X grubu S_n ile gösterilir. $|S_n| = n!$ olduğu açıktır.

Tanım 1.34 : S_n nin çift permütasyonlarının oluşturduğu

$$A_n = \{ g \in S_n \mid g \text{ çift permütasyon} \}$$

alt kümesi S_n nin bir alt grubudur. Bu gruba n . dereceden alterne grup denir ve $|A_n| = \frac{n!}{2}$ dir.

Teorem 1.22 (Cayley) : Her G grubu, S_G nin bir alt grubuna izomorftur. Özellikle, eğer $|G| = n$ ise bu taktirde G , S_n nin bir alt grubuna izomorftur.

Tanım 1.35 : $X \neq \emptyset$ bir küme ve G bir grup olsun. X üzerinde G nin bir etkisi aşağıdaki şartları sağlayan bir $\alpha : G \times X \rightarrow X$; $\alpha(g, x) = gx$, dönüşümüdür:

1. $1 \in G$ birim eleman olmak üzere her $x \in X$ için $1x = x$ dir,
2. Her $x \in X$ ve her $g, h \in G$ için $g(hx) = (gh)x$ dir.

Tanım 1.36 : Eğer her $x, y \in X$ ikilisi için bir $g \in G$ elemanı $gx = y$ olacak şekilde bulunabiliyorsa G ye transitif (geçişmeli) dir denir.

Tanım 1.36 : G, X üzerinde etki etsin ve $x \in X$ olsun. Bu taktirde X in $O(x) = \{gx | x \in X\}$ alt kümesine $x \in X$ in yörüngesi denir.

Tanım 1.37 (Frobenius Grubu): Bir Frobenius grubu sonlu bir X kümesi üzerinde geçişmeli bir G permütasyon grubudur öyleki X in bir noktadan fazla elemanını sabit bırakan $G^* = G - \{1\}$ nin eleman yoktur ve $G^* = G - \{1\}$ in bazı elemanlar en az bir noktayı sabit bırakır.

X kümesinin bir noktasını sabit bırakan bir G Frobenius grubunun H alt grubuna Frobenius komplementi adı verilir. H in herhangi bir eşleniğinde bulunmayan elemanlar ile birlik de birim eleman bir K normal alt grup oluşturur, bu gruba Frobenius Çekirdeği denir.

Bu tanıma göre, $K = G - \left(\bigcup_{g \in G} (H^g)^* \right)$ dir.

Tanım 1.38 : Eğer F bir cisim ise bu taktirde katsayıları F de olan bütün $n \times n$ li singular olmayan matrislerin kümesi bir gruptur. Bu gruba genel lineer grup adı verilir ve $GL(n, F)$ ile gösterilir.

Eğer F sonlu bir cisim ise bu taktirde p bir asal ve $n \geq 1$ olmak üzere $|F| = p^n$ olduğu iyi bilinir. $q = p^n$ elemanlı bu sonlu cisim $GF(q)$ yada F_q ile gösterilir. Eğer $q = p$ ise bu taktirde $GF(p)$ yerine F_p kullanılır.

Eğer $F = GF(q)$ ise $GL(n, F)$ yerine $GL(n, q)$ yazılır. Ayrıca $|GL(n, q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Determinantı 1 olan bir matrise unimodular matris adı verilir. Bütün $n \times n$ li unimodular matrislerin kümesini $SL(n, q)$ ile gösterelim. Bu taktirde $SL(n, q) \leq GL(n, q)$ ve $|SL(n, q)| = \frac{|GL(n, q)|}{q-1}$ dir.

Teorem 1.23: $SL(n, q)$ nin merkezi $Z(SL(n, q))$, $k^n = 1$ olmak üzere bütün kI skalar matrislerin kümesidir. Burada I birim matrisi gösterir. Üstelik, $|Z(SL(n, q))| = d$ dir. Burada $d = (n, q-1)$ dir.

Tanım 1.39 : $SL(n, q)/Z(SL(n, q))$ bölüm grubuna projektif özel lineer grup denir ve $PSL(n, q)$

ile gösterilir. $|PSL(n, q)| = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})}{d(q-1)}$, burada $d = (n, q-1)$ dir.

Teorem 1.24 (Brauer-Suzuki-Wall Teoremi): [7] G , $n \geq 2$ olmak üzere 2^n mertebeden bir T elementer abelyen Sylow 2- alt grubuna sahip bir sonlu basit grup olsun. Her $\tau \in T - \{1\}$ için $C_G(\tau) = T$ olduğunu farz edelim. Bu taktirde $G \cong SL(2, 2^n)$ dir.

Sonlu basit grupların sınıflandırılmasında önemli bir yere sahip olan Feit-Thompson Teoremi aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 1.25 (Feit-Thompson Teoremi): Her basit abelyen olmayan grubun mertebesi çifttir.

2.BÖLÜM

5 - VE 6 - AYRIŞILABİLİR SONLU GRUPLAR

Bu bölümde, 5- ve 6-ayrışabilir olan çözülebilir olmayan, mükemmel olmayan sonlu bir G grubunun yapısı incelenmiştir.

Tanım 2.1: G bir sonlu grup ve N_G de G 'nin trivial olmayan öz normal alt gruplarının cümlesi olsun. K , N_G nin bir elemanı olsun. Eğer K , G 'nin n farklı eşlenik sınıfının bir birleşimi ise, K ya n -ayrışılabilir denir. Eğer $N_G \neq \emptyset$ ve N_G 'nin her elemanı n -ayrışılabilir ise bu takdirde, G ye n -ayrışılabilir denir.

[13] de, Shahryari ve Shahabi, bir 2-ayrışabilir H alt grubunu içeren sonlu grupların yapısını belirlemişlerdir. Bu durum için, $H \leq G'$, $|H|(|H|-1) \mid |G|$ ve H G nin bir elementer abelyen normal alt grubudur. [14] de yine Shahryari ve Shahabi, 3-ayrışabilir H alt gruplu sonlu G grupların yapısını incelediler. Bu durumda H in ya bir elementer abelyen grup, bir yarıabelyen p -grup veya elementer abelyen H' çekirdekli bir Frobenius grup olabileceğini ispatladılar. [17] de Reise ve Shahabi de bir 4-ayrışabilir alt gruplu sonlu G grupların yapısını belirlemişlerdir.

[6] da Ashrafi ve Sahraei, 2-, 3- ve 4- ayrışabilir sonlu grupların yapısını karakterize ettiler. Ayrıca çözülebilir n -ayrışabilir sonlu grupların yapısını elde ettiler.

Bu bölümde, 5- ve 6-ayrışabilir olan çözülebilir olmayan, mükemmel olmayan sonlu bir G grubunun yapısı incelenmiştir.

Tanım 2.2: G bir grup olsun. $\pi_e(G)$ ile G deki elemanların bütün mertebelerinin cümlesi gösterilsin.

Bir sonlu G grubunun birimden farklı her elemanı bir asal mertebeye sahip ise, G ye EPO-grup adı verilir. Aşağıdaki teorem sonlu EPO-grubun ilginç bir özelliğini verir.

Teorem 2.1 : A_5 'in karakteristik özelliği:

1. grubun mertebesi en azından 3 farklı asal çarpan içerir,
2. gruptaki birim elemandan farklı her elemanın mertebesi bir asal sayıdır.

Teorem 2.2 : Eğer G , abelyan olmayan sonlu basit bir grup ve G nin birimden farklı her elemanının mertebesi asal ise bu taktirde G , A_5 e izomorfiktir.

İspat: G , birimden farklı her elemanının mertebesi asal olan, sonlu basit abelyan olmayan bir grup olsun. Feit-Thompson Teoremi ile G nin mertebesi çifttir ve G nin bir Sylow 2 -alt grubu elemanter abelyendir. Üstelik, G de mertebesi 2 olan her elemanın merkezleyeni elemanter abelyentir. Böylece Brower-Suzuki-Wall Teoremi G , $PSL(2, q)$ grubuna izomorftur (burada , $m > 1$ ve $q = 2^m$ dir). Bu grup, $q-1$ ve $q+1$ mertebeden devirli alt grupları içerir. Kabulümüzden, $q-1$ ve $q+1$ asaldırlar. Diğer taraftan, bu sayıların birisi 3 ile bölünür, bu yüzden, $3 = q \pm 1$ dir, yani, $q = 4$ tür. Böylece G , mertebesi 60 olan $PSL(2, 4) \cong A_5$ grubuna izomorfiktir.

Tanım 2.3 : G sonlu basit bir grup ve $\pi(G) = \{p \mid p \text{ bir asal ve } p \parallel |G|\}$ olsun. Eğer $|\pi(G)| = 3$ ise, G grubuna bir K_3 -grup adı verilir.

Teorem 2.3: [2] Eğer G , bir basit K_3 -grubu ise, bu taktirde, G grubu $A_5, A_6, U_3(3), U_4(2), PSL(2, 7), PSL(2, 8), PSL(2, 17)$ ve $PSL(3, 3)$ basit gruplarından birine izomorfiktir.

$\pi_e(G)$ cümlesini $\{1\}$, asalları içeren $\pi_e'(G)$ cümlesine ve bileşik sayıları içeren $\pi_e''(G)$ cümlesine bölelim. Bu durumda aşağıdaki önemli teoremi verebiliriz.

Teorem 2.4: [2] G , $|\pi_e''(G)| \leq 1$ ile sonlu basit bir grup olsun. Bu taktirde G aşağıdaki gruplardan birisidir:

1. Z_p , p asal,
2. $PSL(2, q)$, $q = 5, 7, 8, 9, 11, 13$ ya da 16 ,
3. $PSL(3, 4)$, $Sz(8)$
4. $PSL(2, 3^n)$, burada $\frac{3^n - 1}{2}$ ve $\frac{3^n + 1}{4}$ asallar, ya da
5. $PSL(2, 2^n)$, burada $2^n - 1$ ve $\frac{2^n + 1}{3}$ asallar.

Teorem 2.5 : [2] G değişmeli olmayan n -ayrışılabilir sonlu bir grup olsun. Bu taktirde,

1. N_G 'nin her elemanı maksimaldır ve aynı zamanda N_G de minimaldır.
2. G merkezsizdir ya da n asal bir sayıdır ve $|Z(G)| = n$ dir.
3. Eğer K ve L , N_G 'nin iki farklı elemanı ise bu taktirde $G = K \times L$ dir.
4. Eğer K , N_G nin bir çözülebilir elemanı ise, bu taktirde, K elemanter abelyendir.
5. Eğer N_G nin her elemanı çözülebilir ise, bu taktirde N_G yalnız bir elemandan oluşmuştur.
6. G çözülebilirdir $\Leftrightarrow G'$ abelyendir. Böyle bir durumda, $N_G = \{G'\}$, $G' \cong E(p')$, burada $E(p')$ mertebesi p' olan bir elemanter abelyan gruptur ve G' , G 'de maksimaldır. G , G' çekirdeği ile bir Frobenius gruptur ve onun komplementi $p' - 1 = (n-1)q$ olmak üzere q asal mertebeli bir devirli gruptur.

Not 2.1: Smallgroup(m, n), GAP ın küçük grup listesinde mertebesi m olan n . grubu gösterir.

Şimdi, çözülebilir olmayan 5- ve 6-ayrışabilir sonlu grupların sınıflandırılmasında ihtiyacımız olacak olan aşığıdaki teoremleri verelim.

Teorem 2.6 : [9] $G = PSL(2, 2^n)$ olsun. Bu taktirde G aşığıdaki eşlenik sınıflarına sahiptir:

1. $\{1\}$,
2. karesi 1 e eşit olan elemanların bir eşlenik sınıfı,
3. mertebesi $q-1$ i bölen elemanların $\frac{1}{2}(q-2)$ tane eşlenik sınıfı,
4. mertebesi $q+1$ i bölen elemanların $\frac{1}{2}q$ tane eşlenik sınıfı.

Lemma 2.1 : [2] $G = PSL(2, q) = \frac{SL(2, q)}{Z(SL(2, q))}$ grubu tam olarak $\frac{q-1}{2} + 3$ tane eşlenik sınıfına

sahiptir. Bunlar,

1. $\{Z\}$
2. $1 \leq i \leq \frac{q-3}{4}$ olmak üzere $q(q+1)$ uzunluklu, $(a^i Z)^{PSL(2, q)}$,
3. $\frac{1}{2}q(q-1)$ uzunluklu $(b(0, \tau)Z)^{PSL(2, q)}$
4. $q(q-1)$ uzunluklu $(b(\sigma, \tau)Z)^{PSL(2, q)}$

5. $\frac{1}{2}(q^2 - 1)$ uzunluklu $(cZ)^{PSL(2,q)}$ ve $(dZ)^{PSL(2,q)}$,

$$\text{burada } a = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}, b(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \varepsilon_0 \tau & \sigma \end{pmatrix},$$

v , $GF(q)^*$ çarpımlı grubunun bir üreticini gösterir, $Z = Z(SL(2, q))$, $\sigma^2 - \varepsilon_0 \tau^2 = 1$ ve $\varepsilon_0 \in GF(q) - GF(q)^2$ keyfidir.

Böylece bu lemma ile, eğer, $q = 3^n$, $\frac{q-1}{2}$ ve $\frac{q+1}{4}$ asallar ise bu taktirde,

$$\pi_e(PSL(2, q)) = \{1, 2, 3, \frac{q-1}{2}, \frac{q+1}{4}, \frac{q+1}{2}\} \text{ dir.}$$

Lemma 2.2 : [2] $n = 5, 6$ olmak üzere, G bir n -ayrışılabilir çözülebilir olmayan, mükemmel olmayan bir grup olsun. Bu taktirde G' basittir.

İspat: Teorem 2.4 de kabulümüzden G' , G 'nin bir abelyan olmayan minimal normal alt grubudur. Böylece G' , H_1, \dots, H_k gibi k tane izomorfik abelyen olmayan basit grupların bir direkt çarpımıdır. Kabul edelim ki $k \geq 2$ ve p, q 'da $|H_1|$ in iki tek asal bölenleri olsunlar. Bu taktirde, $\{1, 2, p, q, 2p, 2q, p.q\} \subseteq \pi_e(G')$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Lemma 2.3 : [2] G , n -ayrışılabilir, çözülebilir olmayan mükemmel olmayan sonlu bir grup ve $|N_G| \geq 2$ olsun. Bu taktirde $|N_G| = 2$, n bir asal sayı ve $G \cong \mathbb{Z}_n \times B$ dir. Burada B tam olarak n eşlenik sınıfına sahip bir abelyen olmayan basit gruptur.

İspat: A ve B , N_G nin elemanları olsunlar. Bu taktirde Teorem 2.4 ile $G \cong A \times B$ 'dir. Burada A ve B basit gruplar olduğunu görmek kolaydır. A ve B , G nin yegane trivial olmayan normal öz alt gruplarıdır [9, p.88]. Böylece $|N_G| = 2$ dir. Eğer A ve B abelyan olmayan basit gruplar ise bu taktirde, $G' = G$ 'dir ve bu bir çelişkidir. Bu nedenle, A veya B den birisi abelyendir. Bu A olsun. A basit olduğundan, n bir asal sayı ve $A \cong \mathbb{Z}_n$ dir. Bu ispatı tamamlar.

Kabul edelim ki, n bir pozitif tamsayı iken, tam n eşlenik sınıfı ile bir basit grubun varlığını kabul edelim. Bu durumda, iddia ediyoruz ki, bir mükemmel n -ayrışılabilir sonlu grup vardır. Bunu görmek için, A ve B tam n -eşlenik sınıfları ile abelyan olmayan basit gruplar olmak üzere, $G = A \times B$ olsun. Bu taktirde, G bir n -ayrışılabilir sonlu gruptur.

Burada sadece sonlu mükemmel olmayan gruplar göz önüne alınacaktır. Bununla birlikte, tam olarak bir tane trivial olmayan öz normal alt gruba sahip çözülebilir olmayan mükemmel olmayan sonlu grupların belirlenmesi kolay bir problem değildir.

Teorem 2.7 :[2] Bir çözülebilir olmayan, mükemmel olmayan G grubu 5-ayrışılabilirdir $\Leftrightarrow G$, $\mathbb{Z}_5 \times A_5$, $A_6.2_3$ veya $q = 7, 8$ için $Aut(PSL(2, q))$ e izomorftur.

İspat: A_5 in tam olarak 5 tane eşlenik sınıfına sahip yegane abelyan olmayan sonlu basit grup olduğu iyi bilinir. Bunu kullanarak, eğer, $|N_G| = 2$ ise, bu taktirde Lemma 2.3 ile istenildiği gibi $G \cong \mathbb{Z}_5 \times A_5$ ede edilir. Bu nedenle, G nin tam olarak bir öz trivial olmayan normal alt gruba sahip olduğunu kabul edelim, yani G' . Lemma 2.2 ile, G' basittir ve $3 \leq |\pi(G')| \leq 4$ ve $|G : G'| = p$ (p asal) olduğu görülür. Eğer, $|\pi(G')| = 4$ ise, bu taktirde, G' bir basit EPO-Gruptur ve Lemma 2.2 ile $G' \cong A_5$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece, $|\pi(G')| = 3$ ve G' bir K_3 -gruptur. Şimdi Teorem 2.3 ve G' nin 5 tane G -eşlenik sınıfının bir birleşimi olması gerçeği ile G' , A_5 , A_6 , $PSL(2, 7)$ veya $PSL(2, 8)$ e izomorftur. Eğer, $p \notin \pi(G')$ ise bu taktirde, $G \cong \mathbb{Z}_p \rtimes G'$ dir. Kabul edelim ki, $\varphi : \mathbb{Z}_p \rightarrow Aut(G')$ yarıdirek çarpımı tanımlayan homomorfi olsun. $|\pi(G')| = |\pi(Aut(G'))|$ ve $p \notin \pi(G')$ olduğunda, φ ile \mathbb{Z}_p 'nin bir üreticinin görüntüsü birim olmak zorundadır. Bu gösterir ki, φ homomorfi trivialdir ve $G \cong \mathbb{Z}_p \times G'$ dir, bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $p \in \pi(G')$ 'dir. Şimdi ispatımız aşağıdaki durumlara göre olacaktır.

$G' \cong A_5$ **durumu.** Bu durumda $|G : G'| = p \in \pi(G') = \{2, 3, 5\}$ ve böylece $|G| = 120, 180, 300$. GAP'ta bulunan bu mertebeden grupların karakter tablosunu kullanarak, mertebesi 120 ve komütatör alt grubu A_5 e izomorfik olan 2 sonlu grup vardır, bunlar $Smallgroup(120, 34)$ ve $Smallgroup(120, 35)$ dir. Fakat $Smallgroup(120, 35) \cong \mathbb{Z}_2 \times A_5$ dir ve bu bir çelişkidir. Diğer taraftan, $Smallgroup(120, 34) \cong S_5$ ve A_5 , S_5 'in bir 4-ayrışılabilir alt grubudur ki bunlar kabulümüzle çelişir. Yukarıdakine benzer argümanlar kullanılarak $|G| = 180$ ve $|G| = 300$ durumları benzer bir çelişkiye yol açarlar.

$G' \cong A_6$ **durumu.** Tablo 2.1 de A_6 nin eşlenik sınıflarını hesaplanmıştır. Bu tablo ile G' nün mertebesi 1, 2, 3, 4 ve 5 olan elemanlarının tam olarak 7 eşlenik sınıfı vardır. G' , 5 eşlenik sınıfının bir birleşimi olduğundan G' de 3 mertebeli elemanların 2 eşlenik sınıfı ve 5 mertebeli elemanların 2 eşlenik sınıfı G de kaybolur. Bu G de uzunlukları 1, 45, 80, 90 ve 144 olan bazı eşlenik sınıflarının

var olduğunu gösterir. G' de mertebesi 5 olan bir x elemanını düşünelim. Bu taktirde, bir t pozitif tamsayısı için, $|G| = |x^G| \cdot |C_G(x)| = 144.5t$ dir. Fakat $|G : G'|$ bir asal sayıdır, bu yüzden, $t = 1$ ve $|G| = 720$ dir. GAP'ın küçük grup listesini kullanarak, görebiliriz ki, komütatör alt grubu A_6 ya izomorfik olan bu mertebeden dört grup vardır. Bunlar, S_6 , $\mathbb{Z}_2 \times A_6$, $Smallgroup(720, 764)$, $Smallgroup(720, 765)$ dir. $\mathbb{Z}_2 \times A_6$ iki öz trivial olmayan normal alt gruba sahiptir ve A_6 da 6 tane S_6 -eşlenik sınıfının bir birleşimidir. Bu yüzden, $G \cong Smallgroup(720, 764) = A_6.2_2$ ya da $Smallgroup(720, 765) = A_6.2_3$ 'dir. Hesaplamalarımız gösterir ki, $A_6.2_2$ teoremimizin koşullarını sağlarken, A_6 altı tane $A_6.2_2$ -eşlenik sınıflarının bir birleşimidir.

$G' \cong PSL(2, 7)$ **durumu.** Tablo 2.1 de $PSL(2, 7)$ 'nin eşlenik sınıfları bulunmuştur. Bu tablo ile, G' , mertebesi 1, 2, 3, 4 ve 7 olan elemanların tam 6 eşlenik sınıfına sahiptir. G' , 5 G -eşlenik sınıflarının bir birleşimi olduğunda, G' de mertebesi 7 olan elemanların 2 sınıfı G' de kaybolur. Bu uzunluğu 48 olan bir G -eşlenik sınıfının olduğunu gösterir. G' de mertebesi 7 olan bir x elemanını düşünelim. Bu taktirde, kolayca görülebilir ki, bir pozitif t tamsayısı için, $|G| = |x^G| \cdot |C_G(x)| = 48.7t$ tir. Fakat, $|G : G'|$ bir asal sayıdır, bu yüzden, $t = 1$ ve $|G| = 336$ 'dir. GAP'ın küçük grup listesini kullanarak, komütatör alt grubu $PSL(2, 7)$ ye izomorfik olan bu mertebeden iki grup olduğunu görebiliriz. Bunlar, $\mathbb{Z}_2 \times PSL(2, 7)$ ve $Aut(PSL(2, 7))$ dir. Tablo 2.1 den $Aut(PSL(2, 7))$ problem için bir çözümdür.

$G \cong PSL(2, 8)$ **durumu.** Tablo 2.1 ile, G' , 1, 2, 3, 7 ve 9 mertebeden elemanların tam olarak dokuz eşlenik sınıfına sahiptir. G' , beş G -eşlenik sınıfının bir birleşimi olduğundan, G' de mertebesi 9 olan elemanların üç sınıfı ve mertebesi 7 olan elemanların üç sınıfı G de kaybolur. Bu gösterir ki, uzunluğu 168 olan bir G eşlenik sınıfı vardır. G' de mertebesi 9 olan bir x elemanını düşünelim. Kolayca görülebilir ki, bir pozitif t tamsayısı için, $|G| = |x^G| \cdot |C_G(x)| = 168.9t$ dir. Bu yüzden, $|G : G'| = 3$ ve $|G| = 1512$ 'dir. GAP'ı kullanarak, komütatör alt grubu $PSL(2, 8)$ 'e izomorfik olan bu mertebeden iki grup olduğunu görebiliriz. Bunlar $\mathbb{Z}_2 \times PSL(2, 8)$ ve $Aut(PSL(2, 8))$ dir. Tablo 2.1 ile $Aut(PSL(2, 8))$ nin problemin bir çözümü olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.8 : Bir çözülebilir olmayan, mükemmel olmayan sonlu G grubu 6-ayrışılabilir $\Leftrightarrow G$, S_6 ya da $A_6.2_2$ ye izomorfiktir.

İspat: Lemma 2.3 ile, G tam olarak bir tane öz trivial olmayan normal alt gruba sahiptir, yani G' ve Lemma 2.2 den G' basittir. Kabulümüzden $|\pi(G')| = 3, 4, 5$ tir. Eğer, $|\pi(G')| = 5$ ise bu taktirde, G' asal mertebeden elemanların en azından beş G -eşlenik sınıfına sahiptir. Bu gösterir ki, G' nün her elemanı bir asal mertebeye sahiptir ve Teorem 2.2 ile $G' \cong A_5$ tir. Fakat, A_5 tam olarak beş eşlenik sınıfına sahiptir ve bu yüzden 6 -ayrışılabilir olamaz, bu bir çelişkidir. Böylece $|\pi(G')| = 3, 4$ tür.

Teorem 2.7 tekine benzer metot kullanılarak, $|G : G'| = p$ (p asal) ve $p \in \pi(G')$ olduğu gösterilebilir. Eğer, $|\pi(G')| = 3$ ise, bu taktirde Teorem 2.3 ile G' , A_6 , $PSL(2, 7)$ ya da $PSL(2, 8)$ e izomorftir. Kabul edelim ki, $G' \cong A_6$ ve x , G' de mertebesi 5 olan bir eleman olsun. Tablo 2.1 ile $|G| = 5.144t = 360.2t$ dir ve bu yüzden $p = 2$ dir. A_6 nin eşlenik sınıflarını kullanarak ve GAP ile hesaplamaları kullanarak, görebiliriz ki, S_6 ve $Smallgroup(720, 764)$ tam olarak bir tane $G' \cong A_6$ öz trivial olmayan normal alt gruba sahiptir ve G' , G nin altı eşlenik sınıfının bir birleşimidir. Şimdi kabul edelim ki, $G' \cong PSL(2, 7)$ olsun. $\pi(G') = \{2, 3, 7\}$ olduğundan, $|G| = 336, 504, 1176$ dir. Bu durumlarda, GAP ile hesaplamamızın teoremin şartlarını sağlayan sonlu bir G grubunun olmadığını gösterir. Son olarak, $G' \cong PSL(2, 8)$ olduğunu kabul edelim. Tablo 2.1 i kullanarak, ya uzunluğu 56 olan sınıfların hepsi ve uzunluğu 72 olan iki sınıf, ya da uzunluğu 72 olan sınıfların hepsi ve uzunluğu 56 iki sınıf G de kaybolmalıdır. Her durumda Teorem 2.7 dekine benzer bir yöntem kullanılarak bir çelişki elde ederiz.

Şimdi kabul edelim ki, $|\pi(G')| = 4$ olsun. Lemma 2.2 ile, p , s ve r asallar ve a bir birleşik sayı olmak üzere, $\pi_e(G') = \{1, 2, p, s, r, a\}$ dir. Kabulden ve Teorem 2.4 den, G ya $PSL(2, 3^n)$ grubuna (burada $\frac{3^n - 1}{2}$ ve $\frac{3^n + 1}{4}$ asallar), ya $PSL(2, 2^n)$ grubuna (burada $2^n - 1$ ve $\frac{2^n + 1}{3}$ asallar), ya da $Sz(8)$ grubuna izomorftur.

$G' \cong PSL(2, 2^n)$ **durumu** (burada $2^n - 1$ ve $\frac{2^n + 1}{3}$ asallar). $q = 2^n$ olsun ve U , G' nün bir Sylow 2 -alt grubu olsun. Bu taktirde, [7] ile, $N_{PSL(2, 2^n)}(U) = HU$ dur (burada $|H| = 2^n - 1 = p$ tir). Böylece, G' mertebesi p olan elemanların tam olarak $\frac{1}{2}(q-1) - 1$ eşlenik sınıfına sahiptir. Kabul edelim ki, $x \in G'$ nün mertebesi p olsun. Bu taktirde, $|C_{PSL(2, 2^n)}(x)| = p$ ve $|x^{PSL(2, 2^n)}| = q(q+1)$ dir. $PSL(2, 2^n)$ 'nin mertebesi p olan her elemanını G de kaybolacağından, G uzunluğu

$\frac{1}{2}q(q+1)(q-4)$ olan bir eşlenik sınıfına sahiptir. Böylece bir pozitif t tamsayısı için, $|G| = |PSL(2, 2^n)| \cdot \frac{1}{2}(q-4)t$ dir. Dolayısıyla $\frac{1}{2}(q-4) = 2^{n-1} - 2$ asaldır. Bu $n=3$ olduğunu gösterir ki, bu bir çelişkidir.

$G' \cong PSL(2, 3^n)$ **durumu** (burada $\frac{3^n-1}{2}$ ve $\frac{3^n+1}{4}$ asallar). G' nün mertebesi p olan elemanlarının eşlenik sınıflarını düşünelim ve Lemma 2.1 i uygulayalım. G nin uzunluğu $\frac{1}{4}q(q-3)(q+1)$ olan bir eşlenik sınıfına sahip olduğunu görebiliriz. Bu nedenle, $\frac{1}{4}(q-3) = 1$ dir ya da bir asal sayıdır. Bu $\frac{1}{4}(q-3) \in \{1, 2, 3, \frac{q-1}{2}, \frac{q+1}{4}\}$ olduğunu gösterir ki, bu imkansızdır.

$G' \cong S_z(8)$ **durumu**. Bu durumda $|G'| = 29120$ ve Tablo 2.1 den mertebesi 4 olan elemanlar, mertebesi 7 olan elemanlar ve mertebesi 13 olan elemanlar G de kaybolmalıdır. Bu $|G : G'| = 3$ ve $|G| = 87360$ olduğunu gösterir. $|G'|$, 3 ile bölünmediğinde, $G \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\varphi} S_z(8)$ dir, burada φ , \mathbb{Z}_3 'den $S_z(8)$ 'e bir homomorfidir. Açık olarak, φ trivial değildir. $Aut(S_z(8))$ mertebesi 3 olan elemanların iki $3A$ ve $3B = 3A^{-1}$ eşlenik sınıflarına sahiptir. Böylece $S_z(8) \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_3 \cong Aut(S_z(8))$ dir. Şimdi Tablo 2.1 ile, $S_z(8)$, G' nün 7 eşlenik sınıfının bir birleşimidir, ki bu bir çelişkidir. Bu ispatı tamamlar.

Tablo 2.1: Bazı K_3 – Grupların Yok Olma Haritası

A_6 -sınıfları	1a	2a	3a	3b	4a	5a	5b		
Sınıf Uzunlukları	1	4	40	40	90	72	72		
S_6 da yok olanlar	1A	2A	3A	3B	4A	5A	5A		
A_6 -sınıfları	1a	2a	3a	3b	4a	5a	5b		
Sınıf Uzunlukları	1	4	40	40	90	72	72		
$A_6.2_2$ de yok olanlar	1A	2A	3A	3A	4A	5A	5B		
A_6 -sınıfları	1a	2a	3a	3b	4a	5a	5b		
Sınıf Uzunlukları	1	4	40	40	90	72	72		
$A_6.2_3$ de yok olanlar	1A	2A	3A	3A	4A	A	5A		
$PSL(2,7)$ -sınıflar	1a	2a	3a	4a	7a	7b			
Sınıf Uzunlukları	1	21	56	42	24	24			
$Aut(PSL(2,7))$ de yok olanlar	1A	2A	3A	4A	7A	7A			
$PSL(2,8)$ -sınıfları	1a	2a	3a	7a	7b	7c	9a	9b	9c
Sınıf Uzunlukları	1	63	56	72	72	72	56	56	56
$Aut(PSL(2,8))$ de yok olanlar	1A	2A	3A	7A	7A	7A	9A	9A	9A
$Sz(8)$ -sınıfları	1a	2a	4a	4b	5a	7a	7b	7c	13a
Sınıf Uzunlukları	1	455	1820	1820	5824	4160	4160	4160	2240
$Aut(Sz(8))$ de yok olanlar	1A	2A	4A	4B	5A	7A	7A	7A	13A
$Sz(8)$ -sınıfları	13b	13c							
Sınıf Uzunlukları	2240	2240							
$Aut(Sz(8))$ de yok olanlar	13A	13A							

3. BÖLÜM

7 - ve 8 - AYRIŞILABİLİR SONLU GRUPLAR

Bu bölümde $\psi(G)$ ile $\pi_e(G)$ nin bileşik (asal olmayan) sayılarının sayısını göstereceğiz.

Lemma 3.1 : G bir 7 - veya 8 -ayrışılabilir çözülebilir olmayan mükemmel olmayan sonlu grup olsun. Bu taktirde G' basittir.

İspat: G' , G 'nin bir maksimal normal alt grubu olduğunda, p bir asal olmak üzere, $|G : G'| = p$ 'dir ve G' , G 'nin abelyan olmayan, bir minimal normal alt grubudur. Bu yüzden, G' , $H_1 \cdots H_k$ diyebileceğimiz k izomorfik abelyan olmayan basit grupların bir direkt çarpımıdır. Eğer $k \geq 2$ ve H_1 bir K_3 _ grup değilse, bu taktirde $|\prod_e (H_1 \times H_2)| \geq 11$ 'dir ve bu bir çelişkidir. Böylece G' basittir ya da H_1 bir K_3 _ gruptur. Kabul edelim ki G' basit olmasın. Bu taktirde Teorem 2.3 ile H_1 , A_5 , A_6 , $U_3(3)$, $U_4(2)$, $PSL(2,7)$, $PSL(2,8)$, $PSL(2,17)$ ya da $PSL(3,3)$ 'den birine izomorfiktir. Bu grupların eleman mertebelerinin üzerinden GAP ile bir basit hesaplama kullanılarak, görürüz ki, $H_1 \cong A_5$ 'tir. İspatımızda durumlara tek tek ele alacağız.

DURUM 1:

G , 7 _ ayrışılabilir. $r \geq 3$ için, $\prod((A_5)^r) = 8$ olsun. Böylece G' basittir ya da $G' \cong A_5 \times A_5$ 'dir. Kabul edelim ki, $G' \cong A_5 \times A_5$ olsun. $\prod_e(G') = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$ ise G' deki aynı mertebeden elemanları G de eşlenik olmalıdır. Diğer taraftan, $p = 2$ ve $|G| = 7200$ şartları sağlanırken $|Aut(G')| = 28800$ dir. Fakat G' , mertebesi 2 olan elemanların, uzunlukları sırasıyla 15, 15 ve 225 olan üç eşlenik sınıfına sahiptir. Bu gösterir ki, 7200, 225 ile bölünmelidir. Bu ise bir çelişkidir.

DURUM 2:

G , 8_ ayrışılabilir. G' nün $o(x)=2$, $o(y)=3$ ve $o(z)=5$ olacak şekilde x , y , z elemanlarını seçelim. Öncelikle kabul edelim ki, $G' \cong A_5 \times A_5$ olsun. Bu taktirde, G' nün bir asal mertebeye sahip tüm elemanlarını içeren G nin en fazla bir eşlenik sınıfı vardır. Şimdi Durum1'dekine benzer bir hesaplama çelişkiye yol açar. Böylece $r \geq 3$ için $G' \cong (A_5)^r$ 'dir. $|\prod_e ((A_5)^r)| = 8$ olduğunda G' de hem mertebesi 2 olan elemanlar, hem de mertebesi 3 olan elemanlar G de eşlenik olmalıydılar. Karakter teorisinde iyi bilinen bir sonuç ile, $G' = A_5 \times A_5 \times \dots \times A_5$ olduğunda, G' nün her eşlenik sınıfı, A_5 grubunun eşlenik sınıflarının bir direkt çarpımıdır. Fakat A_5 , uzunluğu 15 olan 2 mertebeli elemanların yalnız bir eşlenik sınıfına sahiptir, bu yüzden, G' uzunluğu 15 olan 2 mertebeli elemanların tam $\binom{r}{1} = r$ tane eşlenik sınıfına, uzunluğu 15^2 olan 2 mertebeli elemanların $\binom{r}{2}$ tane eşlenik sınıfına, uzunluğu 15^3 olan 2 mertebeli elemanların $\binom{r}{3}$ tane eşlenik sınıfına, ..., uzunluğu 15^r olan 2 mertebeli elemanların $\binom{r}{r} = 1$ tane eşlenik sınıfına sahiptir. Bu nedenle,

$$|x^G| = 15 \binom{r}{1} + 15^2 \binom{r}{2} + \dots + 15^r \binom{r}{r} = 16^r - 1 = 2^{4r} - 1$$

dir. Benzer bir hesaplama $|y^G| = 21^r$ olduğunu gösterir. Bu u ve v tamsayıları için,

$$(2^{4r} - 1)u = 2^{2r} \cdot 3^r \cdot 5^r \cdot p$$

$$(21^r - 1)v = 2^{2r} \cdot 3^r \cdot 5^r \cdot p$$

dir. Eğer, $p \notin \{2, 3, 5\}$ ise bu taktirde, $G \cong (A_5)^r \times \mathbb{Z}_p$ dir, bu bir çelişkidir. $p = 2, 3$ için sırasıyla birinci ve ikinci eşitlikler bir tamsayı çözüme sahip değildir. Böylece $p = 5$ dir. $3^r \nmid y$ olduğunda $y = 3^r \cdot y_1$ dir. Eğer, $y_1 \geq 5$ ise bu taktirde, $(21^r - 1)v > 2^{2r} \cdot 3^r \cdot 5^{r+1}$ dir. Aynı zamanda, $y_1 = 2$ ise bu taktirde, $r \geq 19$ için $2 \cdot (21^r - 1) > 5 \cdot 20^r$ dir ve eğer, $y_1 = 4$ ise bu taktirde $r \geq 5$ için $4 \cdot (21^r - 1) > 5 \cdot 20^r$ 'dir. r nin diğer değerleri için, ikinci eşitlik için çözüm yoktur. Bu ispatı tamamlar.

Lemma 3.2 : G , bir n -ayrışılabilir, çözülebilir olmayan, mükemmel olmayan sonlu bir grup ve $|N_G| \geq 2$ olsun. Bu taktirde, $|N_G| = 2$, n bir asal sayı ve $G \cong \mathbb{Z}_n \times B$ dir (burada B tam n eşlenik sınıfına sahip abelyan olmayan bir basit gruptur).

İspat : A ve B , N_G nin elemanları olsunlar. Bu taktirde, [6] den $G \cong A \times B$ 'dir. Buradan A ve B lerin basit gruplar olduğunu görmek kolaydır. O halde, [11] den A ve B , G nin yegane öz trivial

olmayan normal alt gruplarıdır. Bu yüzden, $|N_G| = 2$ 'dir. Eğer A ve B abelyan olmayan basit gruplar ise bu taktirde, $G' = G$ dir ki bu bir çelişkidir. Bununla beraber A veya B 'den biri abelyendir, diyelim ki A abelyen olsun. A basit olduğunda, n bir asal sayıdır ve $A \cong \mathbb{Z}_n$ 'dir, bu lemmayı ispatlar.

Not 3.1: $\omega(G')$, $Aut(G')$ nin etkisi altında G' yörüngelerin sayısını gösterebilirsin. Aşağıdaki Lemma da G nin n -ayrışabilir olması durumunda n nin $\omega(G')$ için bir üst sınır olduğu ispatlanmıştır.

Lemma 3.3 : G yegane G' normal alt grubu ile çözülebilir olmayan, mükemmel olmayan bir n -ayrışılabilir sonlu grup olsun. Bu taktirde G , $Aut(G')$ nün bir alt grubuna izomorfiktir. Üstelik, eğer G' basit ise bu taktirde, $n \geq \omega(G')$ 'dir.

İspat : $\alpha : G \rightarrow Aut(G')$ dönüşümünü $\alpha(g) = \alpha_g : G' \rightarrow G'$ olarak tanımlayalım, burada her $a \in G'$ için $\alpha_g(a) = gag^{-1}$ dir. Açık ki, α iyi tanımlıdır. α nın 1:1 olduğunu göstereceğiz. g , G nin birimden farklı bir elemanı olmak üzere $\alpha(g) = I_{G'}$ olsun. Bu taktirde, $G' \subseteq C_G(g)$ ve böylece $C_G(g) \triangleleft G'$ dir. Eğer $G' = C_G(g)$ ise bu taktirde, $g \in Z(C_G(g)) = Z(G')$ dir. Fakat G' , G nin yegane normal alt grubudur, bu sebepten $Z(G') = G'$ dur. Böylece G' abelyen ve G çözülebilirdir, bu ise bir çelişkidir. Böylece, $g \in Z(G)$ dir. G' tek ve G abelyan olmadığında, $G' = Z(G)$ dir. Bu bir çelişkiye yol açar. Bu nedenle, α , 1:1 dir ve G , $Aut(G')$ nun bir alt grubuna izomorfiktir. Şimdi her $a, b \in G'$ elemanı için $a^G = b^G$ dir $\Leftrightarrow a$ ve b elemanları G nin etkisi altında aynı yörüngede bulunurlar, bu da ispatı tamamlar.

Not 3.2: T ile bütün $L_2(q)$ alt grupların kümesini gösterelim (burada $q = p^m$; p, m asallar) ve S ile bütün $L_2(q)$ grupların kümesini gösterelim (burada p asaldır). Aşağıdaki Lemma da $G' \in T \cup S$ olmak üzere 7- ve 8-ayrışılabilir sonlu grupları karakterize edeceğiz.

Lemma 3.4 : $G' \in T \cup S$ olmak üzere G nin bir 7- veya 8-ayrışılabilir sonlu grup olduğunu farz edelim. Bu taktirde, $G \cong PSL(2, 27) : 3$, $Aut(PSL(2, 11))$ veya $Aut(PSL(2, 13))$ dir.

İspat : $G' \in T$ olmak üzere G bir 7- veya 8-ayrışılabilir sonlu grup olsun. Eğer $2|q$ ise bu taktirde, Lemma 3.3 ile $n \geq \omega(G') \geq \omega(G) = 3 + \frac{2^m - 2}{m}$ dir. Bu $m = 2, 3$ olduğunu gösterir ve bu yüzden $G' \cong A_5$ ya da $PSL(2, 8)$ dir. Bu Tablo 3.1 ile çelişir. Şimdi q nun bir tek tamsayı olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\omega(G') = \begin{cases} 1 + \frac{(p+1)^2}{4} & , \quad m = 2 \text{ ise} \\ \frac{p^m + (m-1)p + 3m}{2m} & , \quad m \neq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

ve bu yüzden Lemma 3.3 ve Tablo 3.1 ile $G \cong PSL(2,27)$ dir. Son olarak, $G' \in S$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, p tekdir ve $\omega(G') = \frac{p+3}{2}$ dir. Bu $p = 11, 13$ ve $G \cong Aut(PSL(2,11))$ ya da $Aut(PSL(2,13))$ olduğunu verir, bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1 : G bir mükemmel olmayan 7 -ayrışılabilir sonlu grup olsun. Bu taktirde, G mertebesi 49 olan bir abelyen gruba, $Aut(PSL(2,11))$, $\mathbb{Z}_7 \times A_6$, $Aut(Sz(8))$ ya da $p \geq 5$ bir asal ve r bir pozitif tamsayı olmak üzere mertebesi $\frac{1}{6}p^r(p^r - 1)$ olan bir Frobenius gruba (burada G nin çekirdeği p^r mertebeden elemanter abelyan ve komplementi devirlidir) izomorfiktir.

İspat: Öncelikle G 'nin çözülebilir olduğunu kabul edelim. G abelyan ise, bu taktirde, istenildiği gibi, G 'nin mertebesi 49 olan abelyan grup olduğu açıktır. Kabul edelim ki, G abelyan olmasın. Bu taktirde, q asal olmak üzere, $|G : G'| = q$ 'dur. G' , G 'nin bir minimal normal alt grubu olmadığına G' , p^r mertebeden bir elemanter abelyan alt gruptur. Böylece, $|G| = p^r \cdot q$ 'dur. G abelyan olmadığından, $\forall x \in G'$, $x \neq 1$ için, $q \neq p$ ve $C_G(x) = G'$ 'dur. Bu yüzden, G , G' çekirdeği ile bir Frobenius gruptur. G' abelyan olduğunda, $n-1 = \frac{|G'| - 1}{q}$ 'dur. Bu, istenildiği gibi, $p^r - 1 = 6q$ eşitliğini sağlar.

Şimdi G 'nin çözülebilir olmadığını kabul edelim. Eğer, $|N_G| = 2$ ise bu taktirde, Lemma 3.2 ile $G \cong \mathbb{Z}_7 \times A_6$ 'dir. Bu yüzden araştırmamızı Lemma 3.1 ile açık olan G' 'nün G 'nin tek normal alt grup olduğu duruma kısıtlayabiliriz. Açıktır ki, $|\Pi(G')| \leq 6$ 'dır. Eğer $|\Pi(G')| = 6$ ise bu taktirde, G' bir EPO-gruptur ve Teorem 2.2 ile $G' \cong A_5$ 'tir, bu bir çelişkidir. Kabul edelim ki, $|\Pi(G')| = 3$ olsun. Bu taktirde, Teorem 2.3 ile G' , A_5 , A_6 , $U_3(3)$, $U_4(2)$, $PSL(2,7)$, $PSL(2,8)$, $PSL(2,17)$, $PSL(3,3)$ 'den birine ve Lemma 3.3 ile G , $Aut(G')$ 'nin bir alt grubuna izomorfiktir. Fakat G' , A_5 ve $PSL(2,7)$ gruplarına izomorfiktir, çünkü bu gruplar tam olarak sırasıyla, 5 ve 6 eşlenik sınıfına sahiptirler. Kabul edelim ki, $G' \cong A_6$ olsun. $|Aut(A_6) : A_6| = 4$ ve G , $Aut(A_6)$ 'nin asal mertebeli bir alt grubu olduğunda, G , $S_6 = A_6 \cdot 2_1$, $A_6 \cdot 2_2$ ya da $A_6 \cdot 2_3$ 'e izomorfiktir. Fakat Tablo 3.1 ile, böyle bir grup 5_- ya da 6_- ayrışılabilir, bu ise bir çelişkidir. Diğer taraftan bu tablo ile,

$L_2(8)$, $Aut(L_2(8))$ 'nin bir 5_ayrışılabilir alt grubudur

$L_2(17)$, $Aut(L_2(17))$ 'nin bir 10_ayrışılabilir alt grubudur

$L_3(3)$, $Aut(L_3(3))$ 'ün bir 9_ayrışılabilir alt grubudur

$U_3(3)$, $Aut(U_3(3))$ 'ün bir 10_ayrışılabilir alt grubudur

$U_4(2)$, $Aut(U_4(2))$ 'nin bir 15_ayrışılabilir alt grubudur

aynı zamanda $|Aut(G') : G'| = p$ 'dir, bu ise imkansızdır. Böylece $\prod(G') = 4, 5$ 'dir.

Durum 1:

$|\prod(G')| = 5$ 'dir. Bu durumda, $\psi(G') = 1$ 'dir ve G , $q = 7, 8, 9, 11, 13, 16$ olmak üzere $PSL(2, q)$ 'ya, $PSL(3, 4)$ 'e, $Sz(8)$ 'e, $\frac{3^n - 1}{2}$ ve $\frac{3^n + 1}{4}$ asallar olmak üzere $PSL(2, 3^n)$ 'e veya $2^n - 1$ ve $\frac{2^n + 1}{3}$ asallar olmak üzere $PSL(2, 2^n)$ 'e izomorftir. Bu grupların mertebeleri en fazla 4 asal ölene sahiptir, bu bir çelişkidir.

Durum 2:

$|\prod(G')| = 4$ olsun. Bu durumda, $\psi(G') = 1, 2$ 'dir. Öncelikle $\psi(G') = 1$ olsun. Lemma 3.4, Tablo 3.1 $|Aut(Sz(8)) : Sz(8)| = 3$ ve $Aut(Sz(8))$ 7_ayrışılabilir. Tablo 3.1 ile de, $Aut(PSL(2, 11))$, $\psi(G') = 1$ ile bir diğer 7_ayrışılabilir alt grubudur. Şimdi kabul edelim ki, $\psi(G') = 2$ olsun. $PSL(2, q)$ basit gruplarını tanımlamaya yeterlidir. Kabul edelim ki, $G' \cong PSL(2, q)$ olsun. Bu takdirde, Lemma 3.4 ve Tablo 3.1 ile G , 7_ayrışılabilir değildir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.2 : G bir mükemmel olmayan 8_ayrışılabilir sonlu grup olsun. Bu takdirde, G , $Aut(PSL(2, 13))$, $PSL(2, 27) : 3$, $PSL(3, 4) : 2$ ($PSL(3, 4).2_1$, $PSL(3, 4).2_2$, $PSL(3, 4).2_3$ leride içeren), $PSL(3, 4) : 3$, S_7 ya da r bir pozitif tamsayı olmak üzere mertebesi $\frac{1}{7} 2^r (2^r - 1)$ olan bir

Frobenius gruba (burada G nin çekirdeği mertebesi 2^r olan elemanter abelyan ve komplementi devirdir) izomorftir.

İspat: Böyle bir grubun abelyan olamayacağı açıktır. Eğer, G abelyan olmayan çözülebilir grup ise bu takdirde, Teorem 3.1 dekine benzer bir metotla p tek asal ve r pozitif tamsayı iken, G nin $\frac{1}{7} p^r (p^r - 1)$ mertebeli bir Frobenius Gruptur. Kabul edelim ki, G çözülebilir olmasın. Bu takdirde,

Lemma 3.2 ve 3.3 ile $|N_G| = 1$ ve G basittir. Aynı şekilde, Teorem 2.2, Teorem 2.3 ve Tablo 3.1 ile G' bir EPO_grup ya da bir K_3 - grup olamaz. Bu sebeple, $4 \leq |\prod(G')| \leq 6$ 'dır. Eğer, $|\prod(G')| = 6$

ise bu taktirde, $\psi(G') = 1$ 'dir. Fakat bu durumda, böyle bir grup en fazla 4 asal bölene sahiptir, bu bir çelişkidir. İspatımızda iki farklı durumu ele alacağız.

Durum 1:

$|\Pi(G')| = 5$ olsun. G bir EPO_grup olmadığına, $\psi(G') = 1, 2$ dir. Aynı şekilde, Lemma 3.4 ve $\psi(G') = 1$ ile bir G grubu yoktur. Böylece $\psi(G') = 2$ dir. Tablo 3.1 ile $PSL(3,4):2$, $PSL(3,4):3$ ve $Aut(PSL(2,13))$ problemimizin çözümleridir. Böylece G nin q nun bazı özel durumları için $Sz(q)$ Suziki Grubuna ya da $PSL(2,q)$ Projektif Özel Lineer Gruba izomorfik olma durumlarını incelememiz yeterlidir. Lemma 3.4 ile p ve m asallar olmak üzere, eğer $G' \cong PSL(2, p^m)$ ise bu taktirde, $G' \cong PSL(2, 27)$ 'dir. Bu taktirde, Kohl'ün verilen teoremi ile bir çelişki elde ederiz. Son olarak, $q-1$, $q-(2q)^{1/2}+1$, $q+(2q)^{1/2}+1$ her biri ya asal ya da iki farklı asalin çarpımı olduğunda $q = 2^{2m+1}$ iken, $G' \cong Sz(q)$ olsun. $w(Sz(q)) = w(PSL(2, q)) + 2$ ve Lemma 3.3 ile $8 \geq w(Sz(q)) = 2 + w(PSL(2, q)) = 5 + \frac{2^{2m+1} - 2}{2m+1}$ dir. Bu $G' \cong Sz(8)$ olduğunu gösterir ve Tablo 3.1 ile son çelişkimizi elde ederiz.

Durum 2:

$|\Pi(G')| = 4$ olsun. Lemma 3.4 ve Tablo 3.1'i kullanarak uzun hesaplamalar sonucunda $G \cong Aut(PSL(2,13))$, $PSL(2,27):3$, $PSL(3,4):2$ ya da $PSL(3,4):3$ olduğunu elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Tablo 3.1 Bazı Basit Grupların Otomorfizm Grupları İçerisinde Parçalanma Haritaları

A_5 -sınıfları	1a	2a	3a	5a	5b				
S_5 de yok olanlar	1A	2A	3A	5A	5B				
A_6 -sınıfları	1a	2a	3a	3b	4a	5a	5b		
S_6 de yok olanlar	1A	2A	3A	3B	4A	5A	5A		
A_6 -sınıfları	1a	2a	3a	3b	4a	5a	5b		
$A_6.2_2$ de yok olanlar	1A	2A	3A	3A	4A	5A	5B		
A_6 -sınıfları	1a	2a	3a	3b	4a	5a	5b		
$A_6.2_3$ de yok olanlar	1A	2A	3A	3A	4A	5A	5A		
A_7 -sınıfları	1a	2a	3a	3b	4a	5a	6a	7a	7b
S_7 de yok olanlar	1A	2A	3A	3B	4A	5A	6A	7A	7B
$PSL(2,7)$ -sınıfları	1a	2a	3a	3b	4a	7a	7b		
$Aut(PSL(2,7))$ de yok olanlar	1A	2A	3A	3B	4A	7A	7A		
$PSL(2,8)$ -sınıfları	1a	2a	3a	7a	7b	7c	9a	9b	9c
$Aut(PSL(2,8))$ de yok olanlar	1A	2A	3A	7A	7A	7A	9A	9A	9A
$PSL(2,11)$ -sınıfları	1a	2a	3a	5a	5b	6a	11a	11b	
$Aut(PSL(2,11))$ de yok olanlar	1A	2A	3A	5A	5B	6A	11A	11A	
$PSL(2,13)$ -sınıfları	1a	2a	3a	6a	7a	7b	7c	13a	13b
$Aut(PSL(2,13))$ de yok olanlar	1A	2A	3A	6A	7A	7B	7C	13A	13A
$PSL(2,16)$ -sınıfları	1a	2a	3a	5a	5b	15a	15b	15c	15d
$PSL(2,16).2$ de yok olanlar	1A	2A	3A	5A	5B	15A	15B	15A	15B
$PSL(2,16)$ -sınıfları	17a	17b	17c	17d	17e	17f	17g	17h	
$PSL(2,16).2$ de yok olanlar	17B	17A	17D	17B	17D	17C	17C	17A	
$PSL(2,19)$ -sınıfları	1a	2a	3a	5a	5b	9a	9b	9c	10a
$Aut(PSL(2,19))$ de yok olanlar	1A	2A	3A	5A	5B	9A	9B	9C	10A
$PSL(2,19)$ -sınıfları	10b	19a	19b						
$Aut(PSL(2,19))$ de yok olanlar	10B	19A	19A						
$PSL(2,17)$ -sınıfları	1a	2a	3a	4a	8a	8b	9a	9b	9c
$Aut(PSL(2,17))$ de yok olanlar	1A	2A	3A	4A	8A	8B	9A	9B	9C
$PSL(2,17)$ -sınıfları	17a	17b							
$Aut(PSL(2,17))$ de yok olanlar	17A	17A							
$PSL(2,27)$ -sınıfları	1a	2a	3a	3b	7a	7b	7c	13a	13b
$PSL(2,27):2$ de yok olanlar	1A	2A	3A	3A	7A	7B	7C	13A	13B
$PSL(2,27)$ -sınıfları	13c	13d	13e	13f	14a	14b	14c		
$PSL(2,27):2$ de yok olanlar	13C	13D	13E	13F	14A	14B	14C		

Tablo 3.1'in Devamı

$PSL(2,27)$ -sınıfları	1a	2a	3a	3b	7a	7b	7c	13a	13b
$PSL(2,27) : 3$ de yok olanlar	1A	2A	3A	3B	7A	7A	7A	13A	13A
$PSL(2,27)$ -sınıfları	13c	13d	13e	13f	14a	14b	14c		
$PSL(2,27) : 3$ de yok olanlar	13A	13B	13B	13B	14A	14A	14A		
$PSL(3,3)$ -sınıfları	1a	2a	3a	3b	4a	6a	8a	8b	13a
$Aut(PSL(3,3))$ de yok olanlar	1A	2A	3A	3B	4A	6A	8A	8A	13A
$PSL(3,3)$ -sınıfları	13b	13c	13d						
$Aut(PSL(3,3))$ de yok olanlar	13A	13B	13B						
$PSL(3,4)$ -sınıfları	1a	2a	3a	4a	4b	4c	5a	5b	7a
$PSL(3,4).2$ de yok olanlar	1A	2A	3A	4D	4A	4C	5A	5A	7A
$PSL(3,4)$ -sınıfları	7b								
$PSL(3,4).2$ de yok olanlar	7A								
$PSL(3,4)$ -sınıfları	1a	2a	3a	4a	4b	4c	5a	5b	7a
$PSL(3,4).3$ de yok olanlar	1A	2A	3C	4A	4A	4A	5A	5B	7A
$PSL(3,4)$ -sınıfları	7b								
$PSL(3,4).3$ de yok olanlar	7B								
$U_3(3)$ -sınıfları	1a	2a	3a	3b	4a	4b	4c	6a	7a
$U_3(3) : 2$ de yok olanlar	1A	2A	3A	3B	4A	4A	4B	6A	7A
$U_3(3)$ -sınıfları	7b	8a	8b	12a	12b				
$U_3(3) : 2$ de yok olanlar	7A	8A	8A	12A	12A				
$U_4(2)$ -sınıfları	1a	2a	2b	3a	3b	3c	3d	4a	4b
$U_4(2) : 2$ de yok olanlar	1A	2A	2B	3A	3A	3B	3C	4A	4B
$U_4(2)$ -sınıfları	5a	6a	6b	6c	6d	6e	6f	9a	9b
$U_4(2) : 2$ de yok olanlar	5A	6A	6A	6B	6B	6C	6D	9A	9A
$U_4(2)$ -sınıfları	12a	12b							
$U_4(2) : 2$ de yok olanlar	12A	12A							
$Sz(8)$ -sınıfları	1a	2a	4a	4b	5a	7a	7b	7c	13a
$Aut(Sz(8))$ de yok olanlar	1A	2A	4A	4B	5A	7A	7A	7A	13A
$Sz(8)$ -sınıfları	13b	13c							
$Aut(Sz(8))$ de yok olanlar	13A	13A							
M_{22} -sınıfları	1a	2a	3a	4a	4b	5a	6a	7a	7b
$Aut(M_{22})$ de yok olanlar	1A	2A	3A	4A	4B	5A	6A	7A	7B
M_{22} -sınıfları	8a	11a	11b						
$Aut(M_{22})$ de yok olanlar	8A	11A	11B						

4. BÖLÜM

X - AYRIŞABİLİR GRUPLAR

Bu bölümde, $X = \{1, 2, 3\}$ ve $X = \{1, 3, 4\}$ olmak üzere X - Ayırışabilir mükemmel olmayan sonlu grupların yapısını inceleyeceğiz. 2. ve 3. bölümde $X = \{1, n\}$, $n \leq 8$ olması durumu incelenmişti.

4. 1. $X = \{1, 2, 3\}$ -AYRIŞABİLİR GRUPLAR

Tanım 4.1.1: G bir sonlu grup ve A , G nin bir normal alt grubu olsun. $ncc(A)$ ile A 'nın G - eşlenik sınıflarının sayısını gösterelim. Eğer $ncc(A) = n$ ise A ya n -ayrışılabilir denir. $K_G = \{ncc(A) \mid A \triangleleft G\}$ olsun. X pozitif tamsayıların boştan farklı bir alt cümlesi olsun. Eğer $K_G = X$ ise bu taktirde, G ye X -ayrışılabilir denir. Eğer $X = \{1, n\}$ ve G , X -ayrışılabilir ise bu taktirde, G ye n -ayrışılabilir denir.

Not 4.1.1: p bir asal sayı olmak üzere, $E(p^n)$ ile mertebesi p^n olan bir elemanter abelyan grubu gösterelim. $\pi(G)$ ile $|G|$ nin bütün asal bölenlerinin kümesini ve $\pi_e(G)$ ile de G nin elemanlarının bütün mertebelerinin kümesini gösterelim. Ayrıca, $d(n)$ ile n nin bütün pozitif bölenlerinin kümesini gösterebiliriz.

Bu bölümde, aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 4.1.1 : G bir $\{1, 2, 3\}$ -ayrışılabilir mükemmel olmayan sonlu grup olsun. Bu taktirde G grubu Z_6 , Q_8 , S_4 , $Smallgroup(20, 3)$ veya $Smallgroup(24, 3)$ e izomorfiktir.

Önce X -Ayırışabilir sonlu gruplara bazı örnekler verelim. Sonlu abelyan gruplarla başlayalım.

Lemma 4.1.2 : G bir sonlu abelyan grup olsun. $n = |G|$ olmak üzere $X = d(n) - \{n\}$ olsun. Bu taktirde G , X -ayrışılabilir.

İspat: Açıktır.

Yukarıdaki Lemma ya göre mertebesi n olan bir devirli grup $(d(n) - \{n\})$ -ayrışılabilir. Aşağıdaki örnek de ise bazı abelyan olmayan sonlu grupların normal alt gruplarını belirleriz.

Örnek 4.1.1 : p ve q asallar ve $p > q$ olmak üzere, G mertebesi $p \cdot q$ olan abelyan olmayan bir grup olsun. $q \mid p-1$ ve G tam olarak bir normal alt gruba sahiptir. H in G nin bu normal alt grubu olduğunu kabul edelim. Bu taktirde H , $\left(1 + \frac{p-1}{q}\right)$ -ayrışılabilir. $X = \left\{1, 1 + \frac{p-1}{q}\right\}$ olsun. Bu taktirde G , X -ayrışılabilir.

Örnek 4.1.2 : $n \geq 3$ olmak üzere, D_{2n} mertebesi $2n$ olan dihedral grup olsun. Bu grup

$$D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

şeklinde gösterilebilir. Önce, kabul edelim ki, n tek tamsayı ve $X = \left\{\frac{d+1}{2} \mid d \mid n\right\}$ olsun. Bu durumda,

D_{2n} in her öz normal alt grubu, $\langle a \rangle$ da içerilir ve bu nedenle D_{2n} , X -ayrışılabilir. Şimdi, n in çift

olduğunu kabul edelim ve $Y = \left\{\frac{d+1}{2} \mid d \mid n; 2 \nmid d\right\} \cup \left\{\frac{d+2}{2} \mid d \mid n; 2 \mid d\right\}$ olsun. Bu durumda, D_{2n} in

$H = \langle a^2, b \rangle$ ve $K = \langle a^2, ab \rangle$ gibi iki farklı alt gruba sahip olduğunu görebiliriz. Örneği tamamlamak için, $ncc(H)$ ve $ncc(K)$ yı hesaplamalıyız. $ncc(K) = ncc(H)$ olduğu açıktır. Eğer, $4 \mid n$ ise bu

taktirde $ncc(H) = \frac{n}{4} + 2$ ve $4 \nmid n$ ise bu taktirde $ncc(H) = \frac{n+6}{4}$ tür. $A = Y \cup \left\{\frac{n}{4} + 2\right\}$ ve

$B = Y \cup \left\{\frac{n+6}{4}\right\}$ olsun. Hesaplamalarımız, $4 \mid n$ ise D_{2n} in A -ayrışılabilir ve $4 \nmid n$ ise bu taktirde

D_{2n} nin B -ayrışılabilir olduğunu verir.

Örnek 4.1.3 : $n \geq 2$ olmak üzere, Q_{4n} mertebesi $4n$ olan genelleştirilmiş quaternion grup olsun. Bu grup

$$Q_{4n} = \langle a, b \mid a^{2n} = 1, b^2 = a^n, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

şeklinde gösterilebilir.

$X = \left\{\frac{d+1}{2} \mid d \mid n; 2 \nmid d\right\} \cup \left\{\frac{d+2}{2} \mid d \mid 2n; 2 \mid d\right\}$ ve $Y = X \cup \left\{\frac{n+4}{2}\right\}$ olsun. İyi biliniz ki, Q_{4n} ,

$$\{1\}; \{a\}; \{a^r, a^{-r}\} (1 \leq r \leq n-1); \{a^{2^j}b \mid 0 \leq j \leq n-1\}; \{a^{2^{j+1}}b \mid 0 \leq j \leq n-1\}$$

şeklinde $n+3$ eşlenik sınıfına sahiptir. n in tek veya çift olduğu iki durumu inceleyeceğiz.

Eğer n tek ise, bu taktirde, Q_{4n} in her normal alt grubu, $\langle a \rangle$ devirli grubunda içerilir. Böylece bu durumda Q_{4n} , X -ayrışılabilir. Eğer, n çift ise bu taktirde, her ikisi de $\frac{n+4}{2}$ -ayrışılabilir olan iki tane $\langle a^2, b \rangle$ ve $\langle a^2, ab \rangle$ normal alt grup elde ederiz. Böylece Q_{4n} , Y -ayrışılabilir.

Örnek 4.1.4 : G mertebesi p^3 olan abelyan olmayan bir grup olsun (p asal). Bu grup $p^2 + p + 1$ eşlenik sınıfına sahiptir. G nin her eşlenik sınıfı p uzunluklu olduğundan G grubu $\{1, p, 2p-1\}$ -ayrışılabilir.

Bu bölümde $X = \{1, 2, 3\}$ olsun. G' nün 2- veya 3-ayrışılabilir olduğu iki farklı durumu göz önüne alacağız. Aşağıdaki Lemma da X -ayrışılabilir sonlu abelyan grupları sınıflandıracaktır.

Lemma 4.1.3 : G , X -ayrışılabilir sonlu bir grup olsun. Bu taktirde $G \cong Z_6$ (mertebesi 6 olan devirli grup) dir.

İspat: Lemma 4.1.2 den açıktır.

Kolaylık için, daha sonra kullanacak olan U ve V grupları,

$$U = \langle x, y, z \mid x^3 = y^4 = 1, y^2 = z^2, z^{-1}yz = y^{-1}, x^{-1}yx = y^{-1}z^{-1}, x^{-1}zx = y^{-1} \rangle$$

$$V = \langle x, y \mid x^4 = y^5 = 1, x^{-1}yx = y^2 \rangle$$

şeklinde gösterilsin. U ve V sırasıyla mertebeleri 24 ve 20 olan $Smallgroup(24, 3)$ ve $Smallgroup(20, 3)$ e izomorfik olan, gruplardır. Bu gruplar X -ayrışılabilir.

[3] de GAP programı yardımıyla mertebesi 8, 12, 18, 20, 24, 36 ve 42 olan X -ayrışılabilir olan grupların hepsi belirlenmiştir.

Teorem 4.1.4 : G bir mükemmel olmayan, abelyan olmayan ve G' 2-ayrışılabilir olacak şekilde, X -ayrışılabilir sonlu grup olsun. Bu taktirde, G ; D_8 , Q_8 ya da $Smallgroup(20, 3)$ e izomorftir.

İspat: $G' = 1 \cup Cl_G(a)$ olsun. Bu taktirde, bir r asalı için, G' , G nin elemanter abelyan r -alt grubudur. Öncelikle, $|G'| = 2$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, $G' = Z(G)$ dir. Eğer G , bir 2-grup değil ise bu taktirde, bir q tek asal mertebeli $x \in G$ elemanı vardır. $H = G' \langle x \rangle$ olsun. H , mertebesi $2q$ olan devirli bir grup olduğunda, $ncc(H) \geq 4$ tür, ki bu imkansızdır. Böylece, G bir 2-gruptur. $|G| = 8$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki, $|G| \geq 16$ dir. $|G'| = 2$ ve G' nü içeren her alt grup normal olduğundan, G nin alt gruplarının $G' < H < K < G$ zincirine ulaşılır ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle $G \cong D_8$ ya da Q_8 dir ve Örnek 4.1.2 ve Örnek 4.1.3 ile bu gruplar X -ayrışılabilir.

Şimdi kabul edelim ki, $|G'| \geq 3$ dir. Eğer $Z(G) \neq 1$ ise bu taktirde, $Z(G) = 2$ ya da 3 olduğunu görmek kolaydır. Kabul edelim ki, $Z(G) = 3$ olsun. Bu taktirde, $G'Z(G) = G$ ya da G' dür. Eğer, $G'Z(G) = G$ ise, bu taktirde, $G \cong G' \times Z(G)$ 'dir. Bu G nin abelyan olmasını gerektirir ki, bu bir çelişkidir. Böylece $Z(G) \leq G'$ 'dür. Bu G mükemmel olmadığına ve G' , 2-ayrışılabilir olduğuna bir çelişkidir. Böylece $|Z(G)| = 2$ dir. Fakat bu durumda, $H = Z(G)G'$, 3-ayrışılabilir ki bu imkansızdır. Bu nedenle, $Z(G) = 1$ dir. Böylece $|G| = |G'|(|G'| - 1)$ ve G , G' çekirdeği ile bir Frobenius Gruptur ve komplementi abelyandır. $|G'| = r^n$ olsun, bu taktirde, $|G| = r^n(r^n - 1)$ 'dir. T , G nin Frobenius komplementi olmak üzere, K yı T nin öz trivial olmayan herhangi bir alt grubu olacak şekilde seçelim. Bu taktirde, KG' , 3-ayrışılabilir ve K da herhangi bir $x \neq 1$ için, $|Cl_G(x)| = \frac{|G|}{|T|} = |G'|$ dir. Böylece, $|KG'| = 2|G'|$ ve bu nedenle $|K| = 2$ elde ederiz. T abelyan olduğunda, bu 2 nin T nin yegane böleni olduğunu verir, böylece $|T| = 4$ tür. Böylece $|G| = 20$ dir ve G , T ile Z_5 in bir yarıdirekt çarpımıdır. Üstelik $Z(G) = 1$ olması $T \leq Aut(Z_5) \cong Z_4$ olmasını verir. Bu yüzden $T = Aut(Z_5)$ tir. Bu nedenle, $G \cong Aut(Z_5) \rtimes Z_5$. İspatı tamamlamak için, $G \cong Smallgroup(20,3)$ ve X -ayrışılabilir olduğunu ispatlamalıyız. x ve y , G nin mertebeleri $|x| = 4$ ve $|y| = 5$ olan elemanları olsunlar. G mertebesi 2 olan (involition) beş tane eleman içeren merkezsiz bir grup olduğundan, G tam olarak iki tane trivial olmayan öz normal alt gruplara sahiptir, bunlar mertebeleri sırasıyla 5 ve 10 olan $A = \langle y \rangle$ ve $B = A \langle x^2 \rangle$ gruplarıdır. Açık olarak, B abelyan değildir ve bu yüzden, mertebesi 10 olan dihedral gruba izomorfiktir. Bu $B - A$ nin elemanlarının B de eşlenik olduğunu verir. Fakat $i = 2, 3, 4$ için $x^{-1}yx = y^i$ dir. Kabul edelim ki, $i = 4$ olsun. $B \cong D_{10}$ olduğundan, $x^2yx^{-2} = y^{-1}$ olduğunu elde ederiz. Böylece, $xyx^{-1} = x^{-1}y^{-1}x$ dir. Bundan dolayı, $i = 4$ ise bu taktirde, $x^{-1}y^{-1}x = y^{-1}$ ve G abelyan olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. Aynı zamanda, $i = 2$ ve $i = 3$ ile inşaa edilen iki grup izomorfik olmalıdır. Böylece genelliği kaybetmeden $i = 2$ olduğunu kabul edelim ve böylece $G \cong V \cong Smallgroup(20,3)$ dir. Bu gösterir ki, A nin birimden farklı elemanları G de eşlenik olmalıdır ve bu yüzden A , 2-ayrışılabilir ve B , 3-ayrışılabilir.

Teorem 4.1.5 : G , G' 3-ayrışılabilir olmak üzere, mükemmel olmayan ve abelyan olmayan X -ayrışılabilir sonlu bir grup olsun. Bu taktirde G , S_4 ya da $Smallgroup(24,3)$ e izomorfiktir.

İspat: $G' = 1 \cup Cl_G(a) \cup Cl_G(b)$ olsun. İspatımızı üç farklı durumu inceleyerek yapacağız.

Durum 1 :

$a^{-1} \notin Cl_G(a)$ olsun. Bu durumda $Cl_G(b) = Cl_G(a^{-1})$ dir ve p bir tek asal olmak üzere G' , G nin bir elemanter abelyen p -grubudur. H in G nin bir 2-ayrışılabilir alt grubu olduğunu farzedelim. Bu taktirde, $H = Z(G)$ nin mertebesi 2 dir. Böylece $G \cong Z(G) \times G'$ dir, bu bir çelişkidir.

Durum 2 :

$a^{-1} \in Cl_G(a)$, $b^{-1} \in Cl_G(b)$ ve $(|a|, |b|) = 1$ olsun. p ve q farklı asallar olmak üzere $|G'| = pq^n$ ve $Z(G') = 1$ 'dir. Aynı zamanda, $G'' = 1 \cup Cl_G(a)$ nin mertebesi q^n dir. G' , 3-ayrışılabilir olduğunda, r bir asal olmak üzere, $|G : G'| = r$ dir. Böylece $|G| = prq^n$ ve $|\pi(G)| = 2$ veya 3 tür. Kabul edelim ki, $|\pi(G)| = 2$ olsun. Bu durumda, $2^h - 1$ bir Mersenne asalı ve $2^{a_1} + 1$ bir Fermat asalı olmak üzere, $|G''| = 2, 3, 2^{b_1}$ ya da $2^{a_1} + 1$ dir. Eğer $|G''| = 2$ ise bu taktirde, G' mertebesi $2p$ olan bir devirli gruptur. Bu bir çelişkidir. Eğer $|G''| = 3$ ise bu taktirde, G' mertebesi $3p$ olan bir devirli gruptur veya 3 sembol üzerinden simetrik gruba izomorfiktir. G' merkezsiz olduğundan, $G' \cong S_3$ 'tür. Bu $|G| = 12$ ya da 18 olduğunu gösterir. Fakat GAP ile mertebesi 12 ya da 18 olan X -ayrışılabilir grup yoktur. Şimdi kabul edelim ki, $|G''| = 2^{b_1}$ olsun. Böylece $|G| = 2^b(2^{b_1} - 1)$ ve $|G'| = 2^{b_1}(2^{b_1} - 1)$ dir. Kabul edelim ki, $x \in G' - G''$ ve $y \in G''$ olsun. Bu taktirde, $|Cl_G(x)| = 2^{b_1}(2^{b_1} - 1)$ ve $|Cl_G(y)| = 2^{b_1} - 1$ 'dir. $|Cl_G(x)|$, $|G|$ 'nin bir böleni olduğunda, $2^{b_1} - 1 | 2^{b_1} - 1$, ki bu $b_1 = 2$ olmasını gerektirir. Üstelik, $|G'| = 12$ ve $|G| = 24$ ya da 36'dır. GAP yardımıyla, $|G| = 24$ ve G' merkezsiz olduğunda $G \cong S_4$ 'tür. Şimdi kabul edelim ki, $|G''| = 2^{a_1} + 1$ olsun. Bu taktirde $|G| = 2^a(2^{a_1} + 1)^b$ 'dir. Bu yüzden, G , $2(2^{a_1} + 1)$ mertebeden bir dihedral gruptur ve $|G| = 2(2^{a_1} + 1)^2$ ya da $4(2^{a_1} + 1)$ 'dir. Eğer $|G| = 2(2^{a_1} + 1)^2$ ise bu taktirde, G , mertebesi $(2^{a_1} + 1)^2$ olan bir 3-ayrışılabilir alt gruba sahiptir. Bu alt grup uzunluğu $q^2 - q = 2^{a_1}(2^{a_1} + 1)^2$ olan bir G -eşlenik sınıfına sahiptir, böylece $a_1 = 1$ ve $|G| = 18$ 'dir ki bu bir çelişkidir. $|G| = 4(2^{a_1} + 1)$ ise bu taktirde, $q(q-1) | 4(2^{a_1} + 1)$, böylece $a_1 = 1, 2$ 'dir. Bu $|G| = 12, 20$ olmasını gerektirir ki bu imkansızdır.

Şimdi, farklı p, q, r asalları için, $|G| = prq^n$ olduğunu kabul edelim. G'' , q^n mertebeli bir 2-ayrışılabilir alt grup olduğunda $q^n(q^n - 1) | |G|$ 'dir. Böylece $q^n - 1 | pr$ 'dir. $n = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, $|G| = pqr$, $|G'| = pq$ ve G' , $q-1$ ve $q(p-1)$ uzunluklu iki G -eşlenik sınıfına sahiptir. Böylece $p-1 | r$ ve $q-1 | pr$. Eğer $p = 2$ ise bu taktirde, G , qr mertebeden bir 3-

ayrışılabilir bir H alt grubuna sahiptir. H , $q(r-1)$ uzunluklu bir G -eşlenik sınıfına sahip olduğunda $r=3$ tür. Böylece, $q-1|6$. Bu $q=7$ ve $|G|=42$ olduğunu gösterir. Fakat GAP'a göre mertebesi 42 olan bir grup yoktur. Eğer $p \neq 2$ ise bu taktirde, $p=3$, $r=2$ ve benzer bir hesaplama $|G|=42$ olduğunu verir ki bu imkansızdır. Böylece $n \neq 1$ 'dir. Şimdi $q \neq 2$ olduğunu kabul edelim. $q^n - 1 | pr$ olduğunda $q-1=p$ ya da r 'dir. Bu $q=3$ olduğunu gösterir ve p ya da r 'dan biri 2'ye eşittir. p ya da r 'dan biri 2'ye eşit olduğunda $n=1$ olduğu durumdaki hesaplamalar kullanılarak, p ya da r 'dan birinin 3'e eşit olduğunu elde ederiz. $q=3$ olması ile bu bir çelişkidir. Son olarak $q=2$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, $|G'|=2^n p$ ve $|G|=2^n pr$ 'dir. G' uzunluğu $2^n(p-1)$ olan bir G -eşlenik sınıfına sahip olduğunda $p-1|r$ 'dir. Böylece $p=2$ ya da $r=2$ 'dir. Bu bir çelişkidir.

Durum 3 :

$a^{-1} \in Cl_G(a)$, $b^{-1} \in Cl_G(b)$ ve $(o(a), o(b)) \neq 1$. Bu durumda G' bir metabelian p -grup'tur. G' , G 'nin maksimal alt grubu olduğunda, q bir asal iken $|G : G'| = q$ 'dur. Eğer $p = q$ ise bu taktirde, G , p -grup'tur ve böylece $G' \leq \Phi(G)$ 'dir. Bu G 'nin devirli olduğunu verir ki, bu bir çelişkidir. Böylece farklı p ve q asalları için $|G| = p^n q$ 'dir. H , G 'nin bir 2-ayrışılabilir alt grubu olsun. H , merkezi ise bu taktirde, $H = Z(G)$ 'dir. Öncelikle, $Z(G) \not\leq G'$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, $Z(G') = 1$ 'i gerektiren $G \cong G' \times Z(G)$ 'dir, ki bu bir çelişkidir. Şimdi, $Z(G) \leq G$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, G , $2^n - 2$ uzunluklu bir G eşlenik sınıfına sahiptir ve bu yüzden $p=2$ ve $q=2^{n-2}-1$ 'dir. $|Cl_G(a)|=1$ ve $|Cl_G(b)|=2^n-2$ olduğunu kabul edelim. Bu, $|C_G(b)| = |G|/|Cl_G(b)| = 2^{n-1}$ ve G' abelyan olamaz, çünkü G' abelyan olduğunda $G' < C_G(b)$ olduğunu elde ederiz. G' abelyan olmadığında, $o(b)=4$ ve G' mertebesi 2 olan bir tek alt gruba sahiptir. Böylece, $G' \cong Q_8$ ve G , \mathbb{Z}_3 ile Q_8 'in semidirekt çarpımıdır. $H = \langle x \rangle$ mertebesi 3 olan devirli grup ve $N = Q_8$ olsun. Bu taktirde, $Aut(N)$ mertebesi 3 olan otomorfizmlerin bir tek eşlenik tipine sahiptir. Bu nedenle $\theta(x)$, Q_8 grubunun mertebesi 3 olan otomorfizmi iken, $G = H\alpha_\theta H$ 'dir. Şimdi G 'nin X -ayrışılabilir ve $Smallgroup(24,3)$ 'e izomorfik olduğunu ispatlayalım. G 'nin bir trivial olmayan normal alt grubu için mümkün mertebeler, 2,4,6,8,12'dir, açık olarak, $Z(G) = Z(N)$ ve $\frac{G}{Z(G)} \cong A_4$ 'tür. Fakat, A_4 , mertebesi, 2,3,6 olan normal alt gruplara sahip değildir, bu yüzden, G 'nin her normal alt grubu 2 ya da 8 alt gruba sahiptir ve bunlar tekdir. Diğer taraftan, $N = \langle y, z | y^4 = 1, y^2 = z^2, z^{-1}yz = y^{-1} \rangle$ olduğunu kabul edelim. Böylece G , daha önce

tanımladığımız, V grubu ile aynı gösterime sahip gruba izomorfiktir. Buradan $G \cong \text{Smallgroup}(24,3)$ ve N 'de 3-ayrışılabilir.

H 'ın merkez olmadığı durumu incelememiz kaldı. Böylece, $H \leq G'$ ve $G', 1 \leq i \leq n-1$ için, uzunluğu $p^i - 1$ olan bir G eşlenik sınıfına sahiptir. Böylece, $p^i - 1 = q$ 'dur. Eğer, $p = 3$ ise bu taktirde, $i = 1, q = 2$ ve $|G| = 18$ olduğunu gösterebiliriz. Böylece $|G'| = 9$ 'dur ve bu yüzden G' abelyandır. Şimdi, $|H| = 3$ ve $b \in G' \setminus H$ kabul edersek, $|Cl_G(b)| = 6$ elde ederiz. Bundan dolayı, $|C_G(b)| = 3$ elde edilir ki bu bir çelişkidir, en fazla 9 olmalıdır. Bundan dolayı, $p = 2$ asal ve $|G| = 2^{2^i}(2^i - 1)$ ya da $2^{i+1}(2^i - 1)$ 'dir. $|G| = 2^{i+1}(2^i - 1)$, Q , G 'nin bir Sylow q -alt grubu ve $N = HQ$ olsun. $\frac{G}{N}$ abelyan olduğunda, $G' \leq N$, $|G'|$, $|N|$ 'ni bölemeyeceğinden bu imkansızdır. Son olarak, $|G| = 2^{2^i}(2^i - 1)$ kabul edelim. Genellikle vazgeçmeden, $H = 1 \cup Cl_G(a)$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, $|Cl_G(a)| = 2^i - 1$ olduğunu elde ederiz ve bu yüzden $H \leq C_G(b)$ 'dir. Fakat, $|C_G(b)| = 2^i = |H|$ ve bu yüzden $H = C_G(b)$ 'dir. Böylece $b \in H$ 'dir. Bu ise bizim son çelişkimizdir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.6: G bir mükemmel olmayan X -ayrışılabilir sonlu grup olsun. Bu taktirde, G grubu $\mathbb{Z}_6, D_8, Q_8, S_4, \text{Smallgroup}(20,3)$ ya da $\text{Smallgroup}(24,3)$ e izomorfiktir.

İspat: Lemma 4.1.3, Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5. den açıktır.

4.2. $X = \{1, 3, 4\}$ - AYRIŞILABİLİR GRUPLAR

Bu kısımda $X = \{1, 3, 4\}$ olsun. Aşağıdaki ana teorem ispatlanmıştır.

Teorem 4.2.1 : G bir mükemmel olmayan sonlu grup olsun. Eğer G , X -ayrışılabilir ise bu taktirde G grubu *Smallgroup* (36,9) grubuna, n bir pozitif tek tamsayı ve $2^{\frac{n-1}{2}} - 1$ bir Mersenne asalı olmak üzere mertebesi $2^n \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right)$ olan bir Metabelian gruba, ya da $3/n$ ve $2^{\frac{n}{3}} - 1$ bir Mersenne asalı olmak üzere mertebesi $2^n \left(2^{\frac{n}{3}} - 1 \right)$ olan bir Metabelian gruba izomorfiktir.

Önce Abelyenlik durumunu alalım. Teorem 4.1.2 den aşağıdaki sonucu kolayca verebiliriz.

Sonuç 4.2.2 : Abelyen X -ayrışılabilir sonlu grup yoktur.

$I = \{8, 12, 18, 20, 24, 28, 30, 42, 48, 54, 78, 96, 100, 294\}$ olsun. [4] de Ashrafi bir GAP programı ile $n \in I$ için, n . mertebeden X -ayrışılabilir sonlu grubun mevcut olmadığını göstermiştir. Aynı makalede aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 4.2.3. $n \in I$ için, n . mertebeden X -ayrışılabilir sonlu grup yoktur. Üstelik, eğer G mertebesi 36 olan X -ayrışılabilir bir grup ise bu taktirde, $G \cong \text{Smallgroup}(36, 9)$ dır.

Sonuç 4.2.2 den abelyan X -ayrışılabilir sonlu grup mevcut olmadığından bundan sonra G bir abelyan olmayan sonlu grubu gösterecektir.

Lemma 4.2.4 : G bir X -ayrışılabilir sonlu grup ve K ve H da G nin sırasıyla 3- ve 4-ayrışılabilir alt grupları olsunlar. Bu taktirde, $K \subset H$ dir ve G yalnızca bir 3-ayrışılabilir alt gruba sahiptir. Üstelik G merkezsizdir ya da $|Z(G)| = 3$ tür ve G , yalnızca bir 4-ayrışılabilir alt gruba sahiptir ki bu, $Z(G)$ 'yi içeren 3-gruptur.

İspat: Kabul edelim ki L , G nin başka bir 3-ayrışılabilir alt grubu ve $T = LK$ olsun. Bu taktirde, $G = L \times K$ 'dir ve bu bir çelişkidir. Böylelikle, G 'nin 3-ayrışılabilir alt grubu tekdir. Ayrıca eğer, $K \not\subset H$ ise bu taktirde, $K \cap H = 1$ 'dir ve böylece $G \cong H \times K$ 'dir ki bu imkansızdır. Şimdi kabul edelim ki, $Z(G) \neq 1$ 'dir. G , A -ayrışılabilir olduğunda, $|Z(G)| = 3$ ve $Z(G) \subset H$ 'dir.

Şimdi , H 'in bir 3 -grup olduğunu ispatlayacağız. H bir p -gruptur ve $H'' = 1$ 'dir. $H \cong A_5$, 5. dereceden alterne grup ve $\frac{G}{C_G(H)} \cong S_5$ ve ya $p \neq 3$ asal ve a, b pozitif tamsayılar olmak üzere, mertebesi $3^a p^b$ olan çözülebilir gruptur.

$Z(G) \subset H$ olduğunda, H , A_5 'e izomorfik değildir. Kabul edelim ki, $|H| = 3^a p^b$ olsun. Bu taktirde, H , $M \supset Z(G)$ çekirdeği ile bir Frobenius gruptur, burada M üç eşlenik sınıfının birleşimi olan H 'in bir Sylow 3 -alt grubudur ve $\frac{H}{M}$, p . mertebeden devirlidir. Fakat bir Frobenius grup merkezsizdir, bu bir çelişkidir. Böylelikle, H bir 3 -gruptur.

Son olarak, kabul edelim ki, M , G 'nin bir başka 4 -ayrışılabilir alt grubu olsun. Bu taktirde, M bir 3 -gruptur. $T = MH$ düşünelim. G , A -ayrışılabilir olduğunda $T = G$ 'dir, yani, G , mertebesi $r > 1$ için 3^r diyebileceğimiz bir 4 -ayrışılabilir H alt grubu ile bir 3 -gruptur. Kabul edelim ki, $n > r$ için $|G| = 3^n$ olsun. Bu taktirde, $3^r - 3|3^n$ elde edilir ki bu da son çelişkimizdir.

Teorem 4.2.5 :

G bir mükemmel olmayan A -ayrışılabilir sonlu grup olsun. G' , 3 -ayrışılabilirdir ancak $G' \cong \text{Smallgroup}(36, 9)$ dir.

İspat:

G' 'nün 3 -ayrışılabilir olduğunu kabul edelim. İddia ediyoruz ki, G bir p -grup değildir. Bunu ispatlayabilmek için, G 'nin p^n . mertebeden non-perfect A -ayrışılabilir olduğunu kabul edelim. Lemma 4.2.4 ile $p = 3$ ve G yalnızca, 3^r . mertebeden $Z(G)$ 'yi içeren A -ayrışılabilir H alt grubuna sahiptir. Bu yüzden, $3^r - 3|3^n$ bir çelişkidir. Şimdi G' 'nün abelyan olduğunu göstereceğiz. $Cl_G(x)$, G 'nin x 'i içeren eşlenik sınıfını göstermek üzere, kabul edelim ki, $G' = 1 \cup Cl_G(g) \cup Cl_G(h)$ olsun. Eğer, $g^{-1} \in Cl_G(h)$ ise, bu taktirde, G' istenildiği gibi elemanter abelyandır. Kabul edelim ki, $g^{-1} \in Cl_G(g)$ olsun. Eğer, $(o(g), o(h)) = 1$ ise, bu taktirde, $1 \neq G'' < G'$ 'dür ve bu imkansızdır. Aynı zamanda eğer, $(o(g), o(h)) \neq 1$ ise bu taktirde, G' bir metabelian p -gruptur. Kolayca görülebilir ki, G' abelyandır ve $\Phi(G') = 1$ 'dir. Böylece G' elemanter abelyandır.

Şimdi kabul edelim ki, H , G nin bir 4 -ayrışılabilir alt grubudur. Lemma 4.2.4 ile $G' \subset H$ ve böylece $H = G' \cup Cl_G(k)$ dır. H bir p -gruptur ya da a, b pozitif tamsayılar ve p, q farklı asallar iken $p^a q^b$. mertebeden bir çözülebilir gruptur. Şimdi de, G nin bir 4 -ayrışılabilir p -alt gruba sahip olup olmama durumlarını inceleyelim.

Durum 1 :

G bir 4-ayrışılabilir p -alt gruba sahip değildir. Bu durumda, H in mertebesinin $p^a q^b$ olduğunu kabul edebiliriz. N , H 'in bir minimal normal alt grubu olsun. Bu taktirde, N , G nin bir 3-ayrışılabilir alt grubudur ve buradan $N = G'$ dür. Diğer taraftan, G' , H in bir Sylow alt grubudur. $|G'| = p^n$ olduğunu kabul edelim. Böylece $|H| = p^n q$ ve H , $p^n(q-1)$. mertebeden bir G -eşlenik sınıfını içerir. H , G nin bir maksimal alt grubu olduğunda, r bir asal olmak üzere, $|G| = p^n q r$ dir. Kabul edelim ki, $r \notin \{p, q\}$ olsun. Bu taktirde, G , $p^n q r$. mertebeden bir çözülebilir gruptur ve $p^n r$. mertebeden bir 4-ayrışılabilir alt grubu içerir. Bu, ya $q = 2$, $r = 3$ ya da $q = 3$, $r = 2$ olmasını gerektirir. Böylece, $p \neq 2, 3$ için $|G| = 6p^n$ dir. Kabul edelim ki, $1, a$ ve b , G' nün G -eşlenik sınıflarının uzunlukları olsunlar. $p^n = 1 + a + b$ denklemini ve mümkün olabilecek (a, b) çiftlerini düşünelim. Kolayca görülebilir ki, $p \nmid a$ ve $p \nmid b$ dir. Benzer bir hesaplama ile, $|G| \in \{30, 42, 78, 294\}$ olduğu görülür. Fakat bu Teorem 4.2.3 ile çelişir. Şimdi $r = q$ olduğun kabul edelim. Yukarıdakine benzer bir hesaplamanın kullanımı ile görebiliriz ki, $q = 2$ dir ve $|G| \in \{12, 20, 28, 36, 100\}$ dir. Teorem 4.2.3'e uygularsak $G \cong \text{Küçük grup}(36, 9)$ olduğunu elde edebiliriz. Son olarak, eğer $r = p$ ise bu taktirde, $|G'| = p^{n+1}$ dir ki bu imkansızdır.

Durum 2 :

G bir 4-ayrışılabilir H p -alt grubuna sahip olsun. p asal ve $n > 1$ olduğunda $|H| = p^n$ olduğunu kabul edelim. H maksimal olduğundan, q bir asal iken $|G| = p^n q$ dur. G bir p -grup olmadığına $q \neq p$ dir. Kabulümüzden, G' , p^{n-1} mertebesine sahiptir ve $|Cl_G(k)| = p^{n-1}(p-1)$ dir. Böylece ya $p = 2$ ya da $p = 1 + q$ dir. Kabul edelim ki, $p = 2$ ve $y \in H$, q . mertebeden bir eleman olsun. Bu taktirde, $|G| = 2^n \cdot q$ dur. $T = G' \langle y \rangle$ alt grubunu düşünelim. Açıkça, T , G nin bir 4-ayrışılabilir alt grubudur ve böylece $q = 3$ tür. Bu gösterir ki, $|G| = 2^n \cdot 3$ tür. a, b G nin sınıf uzunlukları olmak üzere, $2^{n-1} = 1 + a + b$ yazalım. $2 \nmid a$ ve $2 \nmid b$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece $a = 1$ ya da 3 tür. Eğer, $a = 1$ ise bu taktirde, $|G| = 48$ ya da 96 dir. Lemma 3.2.3 ile bu bir çelişki verir. $p = 1 + q$ ve $|G| = 2 \cdot 3^n$ dir. Yukarıda benzer bir argümanı kullanarak, $|G| = 18$ olduğunu görebiliriz. Bu bizim son çelişkimizdir.

Teorem 4.2.6 : G , bir mükemmel olmayan X -ayrışılabilir sonlu grup ve G' , G nin 4-ayrışılabilir alt grubu olsun. Bu taktirde, G grubu n bir tek sayı ve $2^{\frac{n-1}{2}} - 1$ bir Mersenne asalı olmak üzere $2^n \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right)$. mertebeden bir metabelian gruba, ya da $3/n$ ve $2^{\frac{n}{3}} - 1$ bir Mersenne asalı olmak üzere $2^n \left(2^{\frac{n}{3}} - 1 \right)$. mertebeden bir metabelian gruba izomorfiktir.

İspat: Kabul edelim ki, G' ve H , G nin sırasıyla 4-ayrışılabilir ve 3-ayrışılabilir alt grupları olsunlar. Teorem 4.2.4 ile $H \subset G'$ dür. G' a, b tamsayılar ve p ve q farklı asallar olmak üzere, bir p -gruptur ya da $p^a q^b$. mertebeden bir çözülebilir alt gruptur. G nin çözülebilir böylece $G'' = H$ ya da 1 olduğunu ispatlayacağız. Önce kabul edelim ki, $G'' = H$ olsun. Eğer, G' bir p -grup değilse, bu taktirde, m, n pozitif tamsayılar, p, q farklı asallar olmak üzere $|G'| = p^n q^m$ dir. G' non-abelyan ise, M , G nin bir Sylow q -alt grubu ve $\frac{G'}{M}$ p . mertebeden devirli olmak üzere, $M \supseteq H$ çekirdeği ile bir Frobenius gruptur. Açık olarak, $|G'| = pq^m$ ve bir s asalı için $|G| = spq^m$ ile q^m . mertebede $M = H$ dir. Böylece $p = 2$ ya da $p = 1 + s$ olduğunu elde ederiz. Eğer $p = 2$ ise bu taktirde, G indeksi 2 olan bir T alt grubuna sahiptir. T , $(s-1)q^m$. mertebeden bir G eşlenik sınıfına sahip olduğundan $s = 2, 3$ tür. Böylece, $|G| = 4q^m$ ya da $6q^m$ dir. Teorem 4.2.5'dekine benzer bir metot kullanarak $|G| \in \{12, 18, 20, 28, 30, 36, 42, 54\}$ olduğunu görebiliriz. Teorem 4.2.3 ile bu bir çelişki verir. Bu yüzden kabul edelim ki, $p = 3$ ve $s = 2$ olsun. Bu taktirde, $|G| = 6q^m$ ve $|G| \in \{18, 24, 30, 42, 48, 54, 78, 96, 294\}$ tür. Bu ise imkansızdır. Böylelikle G' abelyandır ve G nin yalnızca bir normal alt grubunu içerdiğinden G' , p -gruptur. Kabul edelim ki, p ve q farklı asallar, n ve t , $t < n$ ile pozitif tamsayılar olmak üzere $|G'| = p^n$, $|H| = p^t$ ve $|G| = p^n q$ olsun. Böylece G' , uzunluğu $p^t(p^{n-t} - 1)$ olan bir G -eşlenik sınıfına sahiptir. Bu $p = 2$ ve $t = n - 1$ ya da $q = p^{n-t} - 1$ olmasını gerektirir. Kabul edelim ki, $p = 2$ ve $t = n - 1$ olsun. Bu taktirde, $|G| = 2^n q$ ve $|H| = 2^{n-1}$ dir. Mertebesi q olan y elemanını seçelim ve y ve H ile üretilen T alt grubunu tanımlayalım. H , $2^{n-1}(q-1)$ uzunluğunda bir G -eşlenik sınıfına sahip olduğundan $q = 2, 3$ tür. Şimdi Teorem 4.2.3 ile çelişen $|G| \in \{24, 48, 96\}$ yı ispat etmek için Teorem 4.2.5' tekine benzer bir yöntemi tekrar kullanabiliriz. Böylece $q = 2^{n-t} - 1$ dir. Kabul edelim ki, a, b G nin sınıf uzunlukları olmak üzere,

$2^t = 1 + a + b$ olsun. Genelliği bozmadan, $a|q$ olduğunu kabul edebiliriz. Kabulümüzden, $a \neq 1$ dir.

Böylece $a = q$ ve $b = 2^t - 2^{n-t}$ dir. Bu gösterir ki, $t = \frac{n+1}{2}$ ya da $\frac{2n}{3}$ tür, bu da ispatı tamamlar.

Şimdi bizim temel sonucumuzu vermek için hazırız.

Teorem 4.2.7 : G bir mükemmel olmayan sonlu grup olsun. Eğer G , X -ayrışılabilir ise bu taktirde G grubu *Smallgroup* (36,9) grubuna, n bir pozitif tek tamsayı ve $2^{\frac{n-1}{2}} - 1$ bir Mersenne asalı olmak üzere mertebesi $2^n \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right)$ olan bir Metabelian gruba, ya da $3/n$ ve $2^{\frac{n}{3}} - 1$ bir Mersenne asalı olmak üzere mertebesi $2^n \left(2^{\frac{n}{3}} - 1 \right)$ olan bir Metabelian gruba izomorfiktir.

İspat: Lemma 4.1.2, Teorem 4.2.5 ve Teorem 4.2.6 dan açıktır.

KAYNAKLAR

- [1] Aschbacher M., Finite Group Theory, *Cambridge Univ. Press*, (1986).
- [2] Ashrafi A.R. and Zhao Y., On 5- and 6-Decomposable Finite Groups, *Math Slovaca*, **53**, (2003), No.4, 373-383.
- [3] Ashrafi A.R. and Wujie Shi, On 7- and 8-Decomposable Finite Groups, to appear in *Math Slovaca*, (2004).
- [4] Ashrafi A. R., On Decomposibility of Finite Groups, *J. Korean Math. Soc.* **41** (2004) No.3 479-487.
- [5] Ashrafi A. R., On finite groups Whose Every Proper Normal Subgroup is a Union of a Given Number of Conjugacy Classes, *Proc. Indian Acad. Sci.* **114**, (2004), No.3, 217-224.
- [6] Ashrafi A. R. and Sahraei H., On Finite Groups Whose Every Normal Subgroup is a Union of the Same Number of Conjugacy Classes, *Vietnam J. Math.* **30**, (2002), No.3, 289-294.
- [7] Bayar E., Gruplar Teorisi, *Karadeniz Üniversitesi, Trabzon*, (1986).
- [8] Collins M. J., Representations and Characters of Finite Groups, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- [9] Gorenstien D., Finite Groups, *Chelsa Publishing Company*, New York, (1980).
- [10] Robinson D.J.S., A Course in the Theory of Groups, *Springer-Verlag*, New York, 1982.
- [11] Rotman J.J., An Intraduction to the Theory of Groups, Fourth Edition, *Springer-Verlag*, New York, Berlin, Londra, 1995
- [12] Schonert M.,et al., GAP : Groups, Algorithms and Programming, *Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen*, (1992).
- [13] Shahryari M. and Shahabi, M. A., Subgroups Which are the Union of Two Conjugacy Classes, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **25**, (1999), No.1,59-71.
- [14] Shahryari M. and Shahabi, M. A., Subgroups Which are the Union of Three Conjugacy Classes, *J. Algebra*, **207** (1998), 326-332.
- [15] Solomon R., A Brief History of the Classification of the Finite Simple Groups, *Bull. American Math. Soc.*, **38**, (2001), No.3, 315-352.
- [16] Suzuki M., Group Theory *II*, *Springer-Verlag*, New York, 1986.
- [17] Reise U. and Shahabi M. A., Subgroups Which are the Union of Four Conjugacy Classes, *Comm. Algebra*, **29** (2001), 695-701.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : elvin özütaştan
Baba Adı : Derviş
Anne Adı : Nalan
Doğum Tarihi : 29.03.1981
Doğum Yeri : Konya

İlk öğrenimi Konya Ereğli Öğretmen Abdurrahim İlkokulunda 1987-1991, Ortaokulu Konya Ereğli Lisesinde 1991-1994, liseyi Konya Ereğli Lisesinde 1994-1999 yılında tamamladı. 1999-2003 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2003-2004 Öğretim yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans eğitimine başladı. Hala öğrenimine devam etmektedir.