



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS

**KOZMOLOJİK SÂBİTİN BIANCHI-TİP MODELLERİN
EVİRİMİNE ETKİSİ**

**Gülçin BERKÖZ
Fizik Anabilim Dalı
Matematiksel Fizik Programı**

**Danışman
Doç.Dr. Hâşim MUTUŞ**

Haziran, 2004

ÖNSÖZ

Tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı Doç.Dr.Hâşim MUTUŞ'a, anabilim dalı başkanımız Prof. Dr. Şehsuvar Zebitay ile anabilim dalındaki tüm diğer hocalarıma, bölüm başkanımız Prof. Dr .Gediz Akdeniz'e ve aileme en içten dileklerle teşekkür ederim.

Haziran, 2004

Gülçin BERKÖZ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ	v
BİRİM SİSTEMİ VE KABULLER.....	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	vii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	4
2.1. KOZMOLOJİK SÂBİTİN TARİHÇESİ	4
2.2. KOZMOLOJİK SABİT PROBLEMİ.....	8
3. MALZEME VE YÖNTEM	12
3.1. KİLLİNG DENKLEMLERİ VE EŞÖLÇÜM GRUPLARI	12
3.2. BIANCHI-TİP MODELLER	14
3.3. İNVARYANT TABAN İNŞASI	16
3.4. TETRAD FORMALİZMİ	20
3.5. BIANCHI-TİP MODELLERİN ELLIS-MACCALLUM SINIFLANDIRMASI	29
3.6. EAD'NE METRİK VE TETRAD FORMALİZMİ YAKLAŞIMLARI	32
3.7. EVRENİN MADDE-ENERJİ İÇERİĞİ	35
3.8. WALD'IN HESABI	38
4. BULGULAR	43
4.1. GENEL BIANCHI-TİP METRİK İÇİN ALAN DENKLEMLERİNİN HESABI.....	43
4.2. KÖŞEGEN BIANCHI-TİP METRİK İÇİN ALAN DENKLEMLERİ	48
4.3. ALAN DENKLEMLERİNİN İNTEGRASYONU	51
4.4. I VE V TİP İÇİN DENKLEMLERİN ANALİZİ.....	59

5. TARTIŞMA VE SONUÇ	86
KAYNAKLAR	88
ÖZGEÇMİŞ	90

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1: t =sabit hiperyüzeylerinde Killing ötelenmesinin ve dördlü taban vektörlerinin gösterimi.....	17
Şekil 3.2: Sıfırdan farklı parametrelerin sıfır alınmasıyla elde edilebilen grup tiplerinin özelliğini gösteren diagram.....	31
Şekil 4.1: Bianchi I tip için (V-t) grafikleri.....	70
Şekil 4.2: Bianchi I tip için (θ -t) grafikleri.....	71
Şekil 4.3: Bianchi I tip için (A-t) grafikleri.....	72
Şekil 4.4: Bianchi I tip için (σ^2 -t) grafikleri.	73
Şekil 4.5: Bianchi I tip için (q-t) grafikleri.....	74
Şekil 4.6: FLRW modelinin $k=0$ durumu için (V-t) grafikleri.....	75
Şekil 4.7: FLRW modelinin $k=0$ durumu için (θ -t) grafikleri.....	76
Şekil 4.8: FLRW modelinin $k=0$ durumu için (q-t) grafikleri.....	77
Şekil 4.9: Bianchi V tip için (V-t) grafikleri.....	78
Şekil 4.10: Bianchi V tip için (θ -t) grafikleri.....	79
Şekil 4.11: Bianchi V tip için (A-t) grafikleri.....	80
Şekil 4.12: Bianchi V tip için (σ^2 -t) grafikleri.....	81
Şekil 4.13: Bianchi V tip için (q-t) grafikleri.....	82
Şekil 4.14: FLRW modelinin $k=-1$ durumu için (V-t) grafikleri.....	83
Şekil 4.15: FLRW modelinin $k=-1$ durumu için (θ -t) grafikleri.....	84
Şekil 4.16: FLRW modelinin $k=-1$ durumu için (q-t) grafikleri.....	85

TABLO LİSTESİ

Tablo 3.1	: Bianchi modellerinin Ellis-Mac Callum sınıflandırması.....	30
Tablo 3.2	: Bianchi modellerinin taban vektörlerini, taban 1-formlarının ve Killing vektörlerinin ifadeleri	34
Tablo 3.3	: Bianchi Modelleri için $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\Omega^{\gamma}_{\alpha\beta}$ katsayılarının toplu gösterimi	35
Tablo 4.1	: Kozmolojik sabitin +,0,- olması durumlarında asimptotik davranışlar.....	61
Tablo 4.2	: Bianchi I modeli için hacim parametresinin zamana bağlı ifadeleri.....	65
Tablo 4.3	: Bianchi I modeli için genişleme parametresinin zamana bağlı ifadeleri....	66
Tablo.4.4	: Bianchi I modeli için eşyönsüzlük parametresinin zamana bağlı ifadeleri.	67
Tablo 4.5	: Bianchi I modeli için kayma parametresinin zamana bağlı ifadeleri.....	68
Tablo 4.6	: Bianchi I modeli için yavaşlama parametresinin zamana bağlı ifadeleri....	69

BİRİM SİSTEMİ VE İNDİS KABULÜ

2. bölümden itibaren $8\pi G = 1$, $c = 1$, $\kappa=1$ birim sisteminde çalışacağız.

Latin alfabesinin ilk yarısı: uzay-zamansal tetrad indisleri	: a,b,c,...=0,1,2,3
Grek alfabesinin ilk yarısı: uzaysal tetrad indisleri	: $\alpha,\beta,\gamma,\dots = 1,2,3$
Latin alfabesinin ikinci yarısı: uzay-zamansal tansör indisleri	: i,j,k,.....= 0,1,2,3
Grek alfabesinin ikinci yarısı: uzaysal tansör indisleri	: $\mu,\nu,\rho,\dots =1,2,3$

ÖZET

KOZMOLOJİK SÂBİTİN BIANCHI-TİP MODELLERİN EVRİMİNE ETKİSİ

Bu çalışmada, kozmolojik sâbitin (Λ) pozitif, sıfır ve negatif değerlerine sahip olması durumunda Bianchi-tip Modellerin evrimine etkisinin ne şekilde olacağı araştırılmıştır. Önce Λ 'nın ortaya çıkışı ve önemi üzerinde durulmuş, boyut ve limitine bakarak anlamı incelenmiştir.

Takip eden bölümde Bianchi-tip modeller ve alan denklemlerinin elde edilmesi için gerekli yöntemler verildi. Dördüncü bölümde, Bianchi Modellerinin alan denklemlerinin hesaplanmasında metrik yöntemi kullanılarak genel halde tüm Bianchi modelleri için geçerli denklemler oluşturuldu ve bunların integrasyonu ele alındı.

Sonuçta Wald'ın tüm modeller için asimptotik olarak bulduğu sonuçlar, özel olarak mükemmel akışkan formuna sahip enerji-momentum tansörünün alınmasıyla, I ve V tip modelleri için analitik ve nümerik hesaplarla bulundu. Ayrıca kozmolojik sâbitin etkilerini incelemek için bunların grafikleri incelendi

SUMMARY

THE EFFECT of COSMOLOGICAL CONSTANT on EVOLUTION of BIANCHI-TYPE MODELS

In this thesis, the effect of cosmological constant (Λ) on evolution of Bianchi-type Models is studied in the cases $\Lambda > 0$, $\Lambda = 0$, $\Lambda < 0$.

After giving a brief history and emphasizing the importance of Λ , an analysis by considering its dimension and limits is contained in the first chapter.

In the following chapter the general characteristics of Bianchi-type Models and calculating methods of its field equations are presented in detail. Metric approach used for the calculations of Einstein Field Equations in order to derive equations in general form holding for all the Bianchi-type Models and integration of them is discussed in chapter four.

Finally, asymptotic conclusions of Wald for all models except type IX, specially, for a stress-energy tensor with perfect fluid, equations of I and V models are found numerically and analitically. Also, their graphics are presented to examine effect of cosmological constant carefully.

1.GİRİŞ:

Kozmoloji, evrenin büyük ölçekteki geometrisi ile madde-enerji içeriğini konu alır. Evreni dolduran galaksi, kuazar, kara delik, ışınım gibi madde-enerjiyi yönlendiren görünürdeki baskın etkileşimin gravitasyon (kütle çekim) olduğu varsayıldığından, bir gravitasyon teorisi olarak Einstein'ın 1916'da ileri sürmüş olduğu Genel Rölativite Teorisi'nin

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = \kappa T_{ab}$$

gravitasyon alan denklemleri, evrenin yapısının incelenmesinde en çok rağbet görenini oluşturmaktadır. Burada R_{ab} : Ricci tansörü, g_{ab} : 4-boyutlu uzay-zamanın metrik bileşenleri, R : uzay-zamanın Riemann skaler eğriliği, T_{ab} : enerji-momentum tansörü, κ : Einstein gravitasyon sabiti ve Λ : kozmolojik sâbittir. Einstein'ın alan denklemleri (kısaca EAD), ilk şekliyle Λ kozmolojik sâbitsiz yazılmıştır. Einstein, teorisini ileri sürmesinden hemen sonra evren için bir model oluşturmak istediğinde, tasarladıklarının ancak böyle bir sâbitin teoriye sokulmasıyla gerçekleşebileceğini düşünmüştür. Einstein evreni denilen bu ilk evren modelini 1917'de de Sitter'in Λ 'lı; 1922'de Friedman'ın Λ 'sız ve 1927'lerde Eddington ve Lemaître'in Λ 'lı evren modelleri izlemiştir. Ve daha bu süreçte Λ teriminin gerekliliği ya da gereksizliği konusunda görüş ayrılıkları belirlemiştir.

Tüm bu modeller, basit bir çalışma varsayımı olmak üzere, evrenin uzaysal yapısının homojen ve eşyönlü olduğu varsayımına dayandırılmışlardır. 1932-33'de Robertson ve Walker, bu varsayımı grup teorisi diliyle kesin bir matematiksel çerçeveye oturtmuştur. Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (kısaca FLRW) olarak anılan bu modeller, evrenin büyük ölçekteki yapısının tasviri, gözlemsel verilerin incelenmesi ve yorumlanması konusunda en çok başvurulan ve kullanılan modeller olmuşlar ve olmaya da devam etmektedirler. Bunu haklı gösteren en sağlam dayanak modellerin temel varsayımı olan homojenliği ve eşyönlülüğü reddettirecek bir gözlem verisinin şimdiye kadar bulunamamasıdır. Tam tersine, özellikle kalıntı ışınımına ilişkin gözlem verileri, evrenin çok yüksek derecede eşyönlü olduğunu destekler mahiyettedir. Bununla

beraber, FLRW modelleri homojenlik ve eşyönlülüğü varsayım olarak kabul eden ama açıklayan modeller değildirler. Kaldı ki, bu özelliğin evrenin başlangıç evrelerinde de var olduğu yolunda herhangi bir inandırıcı kanıt da yoktur. Dolayısıyla, evrenin başlangıç evrelerinde homojensizlikler ve eşyönsüzlükler varsaymak hiç de mantıksız değildir. Nitekim genel eğilim de bu yöndedir.

FLRW modellerinin ilk bir genellemesini, uzayca homojen ama eşyönsüz 4-boyutlu uzay-zaman modelleri oluşturmaktadır. 3-boyut söz konusu olduğunda, bu özelliği gösteren uzaylar, daha 1900'lerin başında Bianchi tarafından ele alınmıştır [1]. Bianchi, eşölçüm grubuna göre invaryant kalan 3-boyutlu uzayları: I, II,....; IX şeklinde dokuz tip olarak sınıflandırmıştır. Bu modeller ilk defa 1951'de Taub [2] tarafından kozmolojiye sokulmuş ve günümüze kadar yoğun bir çalışma alanı oluşturmuşlardır. Bu çalışmalarındaki temel meselelerden biri şudur: mahiyet olarak eşyönsüz olan bu Bianchi-tip modeller evrenin evrim sürecinde acaba eşyönlü hâle gelebilirler mi? Bu problem yaklaşık 40 yıldır fizikçilerin ilgisini çekmektedir. Bunlar arasında Wald; eğer akla yatkın enerji koşulları kullanılırsa ve de pozitif kozmolojik sâbit alınırsa, Bianchi-tip modellerden tip-IX dışında hepsinin eşyönlüleceğini ileri sürmektedir[3]. Wald bu iddiaya, EAD'nin tetrad formalizmiyle yazılmış denklemlerin asimptotik davranışlarını inceleyerek varmaktadır.

Biz bu Tez'de, Wald'ın iddiasını, Bianchi I ve V modelleri çerçevesinde, metrik yaklaşımla yazılmış EAD'ni kullanarak ele almayı amaçlıyoruz. Bu denklemlerin tam çözümlerini analitik ve de sayısal olarak tesis edip eşyönsüzlük parametresi, kayma gibi temel bazı kozmolojik büyüklüklerin evrimini grafiklerle görüntülemek istiyoruz. Bu uğraşımızda Λ kozmolojik sâbiti temel yönlendirici parametre olacaktır. Başka bir deyişle Λ 'nın pozitif, negatif veya sıfır olmasının modellerin evrimleşmesine nasıl etki yaptığı incelenecektir.

Tez şu şekilde düzenlenmiştir: Genel Kısımlar Bölümü'nde Einstein'ın Λ sabitini teorisine ithal etmeye yönelten nedenler özetlenmekte ve Λ hakkında yapılan bazı yorum ve tartışmalara yer verilmektedir. Malzeme ve Yöntem Bölümü'nde Bianchi-tip modeller ve bunların dayandığı matematiksel çerçeve tanıtılmakta; yapılacak hesapların anlaşılmasına yardım edecek kadar tetrad formalizminden bahsedilmektedir. Bu

bölümde, aynı zamanda, bulgularımızla bir karşılaştırma yapabilmek için Wald'ın çalışması kısaca özetlenmektedir. Bulgular Bölümü; özgün çalışmamızı oluşturmaktadır. Önce, tüm Bianchi-tip modelleri için yazılmış metrikten hareketle EAD açıkça hesaplanmakta ve sonra da bunlar, köşegen bir metrik için özelleştirilmektedir. Daha sonra, denklemlerin Bianchi I ve V modelleri için çözümleri gerçekleştirilerek grafiklerle görüntülenmekte ve Λ parametresine göre irdelenmektedir. Tartışma ve Sonuç Bölümü'nde ise, bulguların kısa bir özeti yapılmakta ve Λ parametresinin oynadığı rol vurgulanmaktadır.

2. GENEL KISIMLAR

2.1 KOZMOLOJİK SÂBİTİN TARİHÇESİ:

Einstein'in 1916'da ileri sürmüş olduğu Genel Rölativite Teorisi'nin (kısaca GRT denilecek) alan denklemlerinin ilk şekli kozmolojik sâbitsiz (Λ) olup

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \kappa T_{ab} \quad (2.1)$$

dir. Burada; R_{ab} Ricci tansörü ve R skaler eğriliği, 4-boyutlu uzay-zamanının $R^a{}_{bcd}$ Riemann Eğrilik tansörünün izleri olup gravitasyon potansiyelleri rolü oynayan g_{ab} metrik fonksiyonlarının en fazla ikinci mertebeden uzay-zaman türevlerini içermektedir. Lineer olmayan (nonlinear) bu diferansiyel denklemler g_{ab} metrik fonksiyonlarını, yerel olarak, T_{ab} enerji-momentum tansörüyle tasvir edilen madde-enerjiye (her türlüsüne) bağlar. κ , Einstein gravitasyon sâbiti olup Newton gravitasyon sâbiti G ve ışık hızı c cinsinden $\kappa=(8\pi G)/c^4$ dir.

Einstein'ı GRT'nin inşasına yönelten nedenlere kısaca değinmek yerinde olacaktır. Bu aynı zamanda Einstein'ın teoriye neden Λ gibi bir sâbit ithâl etmek istemesinin nedenlerinin anlaşılmasını da kolaylaştıracaktır. Bilindiği üzere, Einstein'ın 1905'te ileri sürmüş olduğu Özel Rölativite teorisi (ÖRT) ve ÖRT ilkesi; birbirlerine göre düzgün doğrusal hareket yapan eylemsizlik sistemlerinde tüm fizik kanunlarının kovaryant olarak (gözlemciden bağımsız, yani, referans sistemlerinin hızlarını içermeyecek biçimde) ifâde edilmesi gerektiğini söylemektedir. Bunun mümkün olması için ise, temel simetri dönüşümünün Mekaniğin Galile dönüşümleri değil de, bundan böyle, elektrodinamiğin Lorentz dönüşümleri olması gerekmektedir. Bunun sonucunda, Maxwell teorisi'nde hipotetik olarak varsayılan Esir; artık kendisine göre bir hareketin ortaya konulabileceği elektromagnetik mahiyetli hiçbir gözlem ve deney olamayacağı gerekçesiyle fazladan ve gereksiz bir kavram hâline düşmektedir (zira, Lorentz dönüşümleri altında hiçbir fizik kanunu referans sistemlerinin izafi hızlarını barındırmayacaktır). Böylece, elektrodinamikte tüm eylemsizlik referans sistemleri birbirlerine eşdeğer olmakta, yani Esir gibi ayrıcalıklı bir referans sistemine gerek

kalmamaktadır. Maxwell denklemleri zaten Lorentz invariant olduklarından, ÖRT bu teoride bir değişikliğe yol açmamıştır. Öte yandan, Newton Mekaniği cephesinde ise, mutlak zaman kavramı dışında, mekaniğin özüne pek dokunulmamış; yalnızca: kütle, momentum ve enerji gibi kavramlar, mekanik kanunları Lorentz dönüşümleri altında invariant kalacak biçimde, yeniden tanımlanmışlardır.

ÖRT adının da belirttiği üzere özel bir durumu: birbirlerine göre düzgün doğrusal hareket yapan eylemsizlik sistemlerini konu almaktadır. Bu bakımdan; Newton'un mutlak hareket fikrine Berkeley ve Mach tarafından eleştiri olarak getirilen ve Einstein'ın da savunduğu: “mutlak hareketten bahsetmek anlamsızdır, yalnızca izafi hareketler vardır” biçiminde ifade olunabilecek “hareketin izafiliği ilkesi”ne ancak kısıtlı olarak uymaktadır [4]. Nitekim, ivmeli veya dönen sistemlere geçildiğinde ÖRT'de de tıpkı Newton Mekaniğinde olduğu gibi, sistemlerin hızına bağlı bir takım kuvvetler ortaya çıkmaktadır. Newton, kendi mekaniği çerçevesinde bu sanal kuvvetleri eylemsizlik kuvveti olarak adlandırmış ve bunların Mutlak Uzay adını verdiği ayrıcalıklı bir referans sistemine göre bir mutlak hareketten kaynaklandığını ve dolayısıyla da bir mutlak hareketin belirleyicisi olduklarını ileri sürmüştür. Berkeley ve daha sonra da Mach, bu mutlak hareket fikrine şiddetle karşı çıkmış, ancak izafi hareketlerin bir fiziksel anlam taşıyabileceğini savunmuşlardır. Mach, Berkeley'in düşüncelerin daha da ileri götürerek, eylemsizlik kuvvetlerinin kökeninin mutlak uzay değil de, evrendeki kütleli cisimler olduğunu ileri sürmüştür. Einstein, Mach'ın düşüncelerinden çok etkilendiğini çeşitli vesilelerle ifade etmiştir. Eylemsizliğin kökenine gözlenebilir fiziksel büyüklükleri bağlaması nedeniyle Einstein Mach'ın düşüncelerini “eylemsizliğin izafiliği” ya da “Mach ilkesi” diye adlandırmıştır [4]. ÖRT ise Mach'ın düşünceleriyle uyuşmamaktadır. Her ne kadar bu teoride uzay ve zaman kavramları tek başlarına mutlaklık anlamlarını yitirmiş olsalar bile, bu sefer de, ikisinin birleşimi olan uzay-zaman, mutlak bir varlık olarak sahneye çıkmaktadır. ÖRT'nin geometrisinin metriğinin $g_{ab} \equiv (-1,1,1,1)$ olarak peşinen ve de bir kereye mahsus olarak verilmiş olması ile Newton'un temel referans sistemi olarak Mutlak uzayı varsayması arasında hiçbir fark yoktur. Einstein, Mutlak uzayı ya da metriği peşinen belirlenmiş bir uzay-zamanı, kendi deyimiyle, “etkiyen ama üzerine etkinmez” olmasından ötürü idraki ve kabulü güç bir durum olarak nitelendirmiştir.

Yukarıda vurgulandığı üzere, ÖRT, tüm fizik kanunlarının eylemsizlik sistemlerinde Lorentz invaryant olacak biçimde formüllendirilmesi zorunluluğunu getirmektedir. Gravitasyon teorisi olarak bu koşulu sağlayan pek çok teori ileri sürülmüş olmakla birlikte hiç biri tatminkar olamamıştır [5]. Einstein da bu konuda, 1905'ten 1916'ya kadar pek çok çalışma yapmıştır. Aslında, yukarıda söylenenler ışığında, Einstein'ın sırf bir gravitasyon teorisi oluşturmak niyetiyle yola çıktığını söylemek pek de doğru olmaz. Görünen odur ki, Einstein'ın temel amacı, Mach'ın da düşüncelerinin etkisinde, mutlak uzayın fizikte oynadığı rolü tamamen ortadan kaldırmaktır. ÖRT'nin genel hareketlere (ivmeli veya dönme) genelleştirilmesi konusunda en önemli engeli oluşturan eylemsizlik kuvvetlerini bertaraf etmeyi Einstein dahiyane bir biçimde başarmıştır. Bilindiği gibi, tasarımsal bir asansör deneyi aracılığıyla Einstein, çok ama çok basit bir çıkarımlamayla, eylemsizlik alanlarının, yerel olarak, bir zahiri gravitasyon alanı gibi yorumlanabileceğini göstermiştir. Bu görüşe, Einstein, Yerel Eşdeğerlik İlkesi adını vermiştir. O hâlde, gerçek gravitasyon alanlarının kökeninin madde-enerji olması dolayısıyla, zahiri gravitasyon alanı gibi davranan eylemsizlik alanlarını da kökeni madde-enerji olacak ve her iki alan da 4-boyutlu Riemansal bir geometrinin aynı g_{ab} metrik tansörüyle temsil edileceklerdir. Einstein, böylece, cisimlerin, eylemsizliğini Mach'ın düşünceleri ışığında madde ve enerjiye bağlamakta ve diğer verilerin de ışığında (2.1) alan denklemlerine varmaktadır.

Şimdi, kozmolojik sâbitin teoriye ithâli konusuna gelelim. Einstein'ın alan denklemleri (EAD), ilk bakışta Mach'ın düşüncelerini yansıtmışa benzemektedir. Gerçekten de, Einstein, maddenin eylemsizliğinin izafiliği anlamında, yani maddenin uzaya göre değil de ancak maddeye göre eylemsizliği olabileceği görüşü doğrultusunda öngörülebilecek üç etkiyi alan denklemlerinden hesaplamayı başarmıştır [4]. Buradan, Einstein, teorisinin Mach İlkesini kapsadığı inancını beslemiştir. Ancak, EAD'nin çok açık biçimde Mach'a aykırı bir çözümü bulunmaktadır: denklemler, $T_{ab} = 0$ olduğunda, triviyal (bayağı) $g_{ab} \equiv \eta_{ab} = (-1,1,1,1)$ çözümünü vermektedirler. Oysa bu metrik, yukarıda söylenildiği gibi, Newtonsal Mutlak Uzayın ÖRT'deki benzeridir ve hiç de Mach'ın düşüncelerine uygun değildir. Zira, bu durumda, evrende eylemsizliğe neden olacak hiçbir madde bulunmasa bile hâlâ bir cismin eylemsizliğinden söz ediliyor olunmaktadır. Bir başka mesele de, EAD'nin yapıları gereği sonsuzda sınır koşullarına gereksinim göstermeleridir. Bu iş için, ilk bakışta: metriğin sonsuzda η_{ab} Minkowski

metriğine düşmesi koşulu düşünülebilir. Ancak böyle bir şey Mach'ın düşüncelerine pek uygun değildir; zira, Mach'ın düşüncelerini kabul eden bir görüş açısından g_{ab} 'ler için sınır koşulu peşinen verilmek yerine evrendeki kütle dağılımından çıkarımlanması gerekmektedir. Şöyle ki; sonsuzda uzay-zamanın Minkowski tip olduğunu varsaymak, geometrisi peşinen verilmiş, yani mutlak bir karakter taşıyan bir uzay-zamanın varlığını kabul etmek anlamına gelmektedir. Böyle bir varsayım altında yapılacak hesaplar, maddenin uzay-zamanı belirlemesini değil de, onu ne ölçüde düz uzay-zamandan sapmaya uğratacağını gösterecektir.

Einstein, teorisini evrenin bütününe uygulamak, yani, bir evren modeli oluşturmak isterken işte bu sınır koşulları sorunu önünde duruyordu. Aslında, sonsuzda sınır koşulu olarak, $g_{ab} = \eta_{ab}$ yerine $g_{ab} = 0$ ya da yalnızca on tanesinin alan denklemlerinde yer alacağı otuz bağımsız koşul veren $R_{abcd} = 0$ (Riemann Eğrilik Tansörü=0) koşulunu ileri sürebilirdi. Ancak, Einstein bunları fiziksel dayanağı olmadığı gerekçesiyle suni ve amaca uydurulmuş (ad hoc) bularak itibar etmemiş, bunun yerine, problemi tersine çevirmiştir : sınır koşulları ileri sürmek yerine tamamen ortadan kaldırmak. Bu ise, kapalı bir evren tasarlamak ile mümkün olabiliyordu. Öte yandan, evren için, Einstein'ın kafasındaki model, o günlerin anlayışı çerçevesinde, madde içeren statik bir modeldi (Hubble genişlemesi 1926'larda keşfedilecekti).

O hâlde gerek Mach'ın düşüncelerine, gerek sınır koşulları sorununa ve gerek de madde dolu statik evren tasarımına cevap verebilmek için Einstein EAD'ne kozmolojik sâbit adını verdiği Λ gibi bir parametre ithâl etmeye karar vermiş ve (2.1)'i

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = \kappa T_{ab} \quad (2.2)$$

biçiminde yazmıştır.

2.2 KOZMOLOJİK SÂBİT PROBLEMİ

Einstein'in evren modeli (Einstein evreni): kapalı (eliptik), madde dolu ve statiktir. Evrenin; R “yarıçapı”, μ madde yoğunluğu ve M kütlesi arasında

$$R^2 = \frac{1}{\Lambda} \quad (2.3)$$

$$\mu = \frac{c^2 \Lambda}{4\pi G} \quad (2.4)$$

$$M = 2\pi^2 R^3 \mu = \frac{\pi R^2 c^2}{2G} \quad (2.5)$$

bağıntıları bulunmaktadır [6]. Eğer evrendeki gözlenen madde için $\mu \approx 10^{-30}$ g/cm³ alınırsa

$$\begin{aligned} \Lambda &\approx 10^{-58} \text{ cm}^{-2} \\ R &\approx 10^{27} \text{ cm} \approx 10^9 \text{ ışık yılı} \\ M &\approx 10^{54} \text{ g} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, Λ 'nın “çok küçük” bir değere sahip olduğu görülmektedir.

Einstein'in modelinin hemen sonrasında 1917'de de Sitter, yine Λ 'lı ama bu sefer maddesiz bir evren modeli teklif etti. Model maddesiz olmasına karşılık statik değildi! Evrenin “yarıçapı”

$$R(t) \approx \exp \left(\sqrt{\frac{\Lambda c}{3}} t \right) \quad (2.6)$$

ifâdesi uyarınca genişliyordu! Üstelik de de Sitter çözümü Mach görüşünü yansıtan bir model değildi. Bu “tuhaf” çözümü, 1922'de Friedmann'ın maddesiz (veya maddeli), ama, Λ 'sız çözümleri izledi. Boş bir evren bile dinamik özellik (genişleme veya büzülme) gösteriyordu! Einstein, Friedmann'ın çözümlerine başlarda inanmadı. Ama, 1926'da Hubble, galaksilerin kırmızıya kaymalarından hareketle evrenin genişlemekte

olduğunu ortaya koyunca Einstein hem Friedmann'dan özür diledi; hem de Λ sâbitinden vazgeçti. Einstein bu Λ hakkındaki tutumunu: “Hayattaki en büyük yanılığım” biçiminde ifade etmiştir [8]. Bununla beraber, Eddington ve Lemaître 1927’lerde Λ ’nın önemini ortaya koyacak ve vazgeçilmez olduğunu gösterecek çalışmalar yaptılar. Λ sâbiti o günlerden bugüne kadar sayısız tartışmanın odağı olmuştur. Özellikle günümüzde Λ meselesi: Yüksek Enerji Fiziği, Birleştirilmiş Alan teorileri, Şişmeli Evren Teorileri gibi alanlarda gerekliliği ya da gereksizliliği bakımından ilgi çekmeye devam etmektedir. Biz bu çalışmamızda bunlara hiç değinmeyeceğiz. Bu çerçevede, Λ ’nın klâsik rolü, yorumu ve önemi için, [9] nolu kaynağa; Alan Teorileriyle ilişkisi için de [10] nolu kaynağa bakılabilir.

Λ sâbitinin neden bir sorun oluşturduğunu bir örnek olmak üzere yalnızca şuna değinelim [8]. Bilindiği gibi GRT, biri ÖRT (gravitasyon olmaması hâli) diğeri de Newton’un gravitasyon teorisi (zayıf alan ve rölativist olmayan hızlar) olmak üzere iki farklı limit durum ile uygunluk hâindedir. Newtonsal limitte, (2.2) alan denklemlerinin Newtonsal benzeri

$$\nabla^2\Phi + \Lambda c^2 = 4\pi G\mu \quad (2.7)$$

dür. Burada, Φ : Newtonsal gravitasyon potansiyelini ve μ de evrendeki madde yoğunluğunu göstermektedir. Eğer evrenin homojen olduğu varsayılırsa, bu taktirde Φ ’nin uzaysal türevleri sıfır olur ve denklem

$$\mu = \frac{c^2\Lambda}{4\pi G}$$

verir. Bu, Einstein statik evrenindeki ifâdedir. Öte yandan, şimdi ÖRT limitine bakalım. Metrik:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.8)$$

ve

$$d\tau = dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad (2.9)$$

öz zaman olmak üzere, 4-lü hız vektörü

$$u^i = \left(\frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) \quad (2.10)$$

dur. Evreni dolduran akışkanın, p basınç olmak üzere,

$$T_{ij} = \left(\mu + \frac{p}{c^2} \right) u_i u_j + p g_{ij} \quad (2.11)$$

enerji-momentumlu bir mükemmel akışkan olduğu varsayılırsa, bu takdirde (2.8-11) denklemleri (2.2) denkleminde yerleştirildiğinde

$$\mu = -\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad p = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (2.12)$$

elde edilir. Bu iki ifâdeden, Λ sıfır olmadığı sürece μ ve p 'nin ters işaretli olduğu görülmektedir. Öte yandan, yine Λ sıfır olmadığı sürece (2.4) ve (2.12) denklemlerinde elde edilen μ madde yoğunlukları ters işaretlidir. Başka bir deyişle, GRT'nin iki limit hâli $\Lambda \neq 0$ için çelişen sonuçlar vermektedir! (daha fazla ayrıntı ve yorum için bkz. [8])

Son olarak şunu belirtelim: Her ne kadar Λ sâbiti küçük bir değere sahip görünüyorsa da, $\Lambda=0$ almak, ele alınan problemde bir yaklaşıklık yapılması anlamına her zaman gelmemektedir. Güneş sistemimizdeki olayların tasvirinde bu böyledir ama evren ölçeği çapında Λ sâbiti, değeri küçük olmasına rağmen, etkisini hissettirebilmektedir. Aslında, $\Lambda=0$ yerine $\Lambda \neq 0$ almak problemin mahiyetini değiştirmek demektir. Meselâ $\Lambda=0$ için evren “açık” iken, $\Lambda \neq 0$ için evren pekâla “kapalı” olabilmektedir. Bu bakımdan, “ Λ 'nın etkisi” deyiminden bu nokta anlaşılmalıdır. Bu durum, Kuantum Mekaniğindeki

h Planck sâbitinin rolüyle benzerlik göstermektedir. $h=0$ almak bir yaklaşıklık değil fakat Klasik Fiziğe dönmek demektir!

3.MALZEME VE YÖNTEM:

3.1.KILLING DENKLEMLERİ VE EŞÖLÇÜM GRUPLARI [11]:

Bir V_n varyetesinde, $\{x^i, i=1,2,\dots,n\}$ bir koordinat sistemi ve t bir parametre olmak üzere

$$x'^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n; t) \quad (3.1)$$

dönüşümleri V_n 'nin bir $P(x^k)$ noktasını V_n 'nin bir başka $P'(x^k)$ noktasına tasvir eder. Eğer (3.1) dönüşümleri bir grup oluşturuyorsa, buna tek-parametrelilikli sürekli dönüşüm grubu denir ve G_1 ile gösterilir. (3.1) sonlu dönüşümleri

$$x'^i = x^i + \xi^i \delta t \quad \delta t \ll 1 \quad (3.2)$$

ile gösterilen sonsuz küçük (infinitesimal) dönüşümlerin peşpeşe uygulanması suretiyle de elde edilebilir. $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ vektörüne, G_1 grubunun doğurganı (jeneratörü) denir. Benzer düşüncelerle a^1, a^2, \dots, a^r gibi r parametreye bağlı

$$x'^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n; a^1, a^2, \dots, a^r) \quad (3.3)$$

sonlu dönüşümleri, eğer bir grup oluşturuyorsa, buna r parametrelilikli sürekli dönüşüm grubu denir ve G_r ile gösterilir. Grubun sonsuz küçük dönüşümleri

$$x'^i = x^i + \xi^i_{\alpha} \delta a^{\alpha} \quad \alpha=1,2,\dots,r \quad (3.4)$$

biçiminde olup,

$$X_{\alpha} = \xi^i_{\alpha} \delta_i \quad \alpha=1,2,\dots,r \quad (3.5)$$

doğurganları (grubun sembolleri veya operatörleri de denir)

$$[X_\alpha, X_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma \quad (3.6)$$

komütatör bağıntılarını sağlar. Burada $C^\gamma_{\alpha\beta}$ 'lara grubun yapı sâbitleri denir ve komütatörlerin

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (\text{antisimetri}) \quad (3.7)$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\text{Jacobi özdeşlikleri}) \quad (3.8)$$

özelliklerinden dolayı

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = -C^\gamma_{\beta\alpha} \quad (3.9)$$

$$C^\alpha_{\beta\gamma} C^\beta_{\delta\epsilon} + C^\alpha_{\beta\delta} C^\beta_{\epsilon\gamma} + C^\alpha_{\beta\epsilon} C^\beta_{\gamma\delta} = 0 \quad (3.10)$$

bağıntılarını sağlar.

Eğer bir G_r grubu

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.11)$$

metriğini invariant bırakıyorsa, yâni, her bir doğurgan için

$$X_\alpha (ds^2) = 0 \quad (3.12)$$

ise G_r 'ye bir hareket grubu ya da eşölçüm grubu denir. Bu takdirde ξ_α^i vektörlerinin (yani $\xi_\alpha = \xi_\alpha^i \partial_i$)

$$\xi^k_\alpha \partial_k g_{ij} + g_{ik} \partial_j \xi^k_\alpha + g_{kj} \partial_i \xi^k_\alpha = 0 \quad (3.13)$$

denklemlerini sağlaması gerektiği gösterilebilir. (3.13)'e Killing Denklemleri ve ξ_α vektörlerine de Killing Vektörleri denir. Bu takdirde (3.6) bağıntısı

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} \xi_\gamma \quad (3.14)$$

biçiminde gösterilir.

(3.12) koşulu, g_{ij} metriğinin Lie türevinin sıfır, yâni

$$L_{\xi_\alpha} g_{ij} = 0 \quad (3.15)$$

olmasına denktir (g_{ij} metriğinin Lie ötelemesi altında invaryant kalması).

Şimdi daha fazla ilerlemek için aşağıdaki şu kavramlara kısaca değinmek gerekecektir. Bir G_r grubunda, bir P noktasını invaryant bırakan dönüşümler G_r 'nin s -boyutlu ($s \leq r$) alt grubunu oluşturur. G_r 'nin bir eşölçüm grubu olması hâlinde, G_s 'ye eşyönlülük grubu denir. Öte yandan G_r altında, bir P noktasının dönüştüğü noktaların kümesinin oluşturduğu varyetenin boyutu m ile gösterilsin. P 'ye eşdeğer noktaları (birbirlerine dönüştürülebilir noktalar) içeren bu en küçük boyutlu varyeteye minimum invaryant varyete denir. Göstermek mümkündür ki, r, s , ve m birbirlerine

$$r = m + s \quad (3.16)$$

bağıntısıyla bağlıdır [12].

3.2.BIANCHI-TİP MODELLER [11,12]:

Bir uzay-zaman, eğer uzay-cinsinden hiperyüzeyle geçişli (transitif) olarak etkiyen bir G_r ($r \geq 3$) eşölçüm grubuna sahipse, bu uzay-zamana uzayca homojen denir. Eğer (3.16) bağıntısında $m=3$ (3-boyutlu hiperyüzeyler) alınırsa,

$$r = 3 + s \quad (3.17)$$

olur. Öte yandan, bu aşamada şu iki teoremi verelim:

Teorem 1:Eğer m boyutlu bir Riemansal bir varyeteye r boyutlu bir G_r hareket grubu etkiliyorsa, bu takdirde

$$r \leq \frac{m(m+1)}{2} \quad (3.18)$$

dır. ($m=3$ için $r \leq 6$ olur)

Teorem 2: $m > 2$ boyutlu bir Riemansal varyete

$$r = \frac{m(m+1)}{2} - 1 \quad (3.19)$$

boyutlu bir maksimal gruba sahip olamaz. ($m=3$ için $r=5$ olamaz)

O halde yalnızca şu olasılıklar söz konusudur:

$m=3$	$r=6$	$s=3$	Robertson-Walker Modeli
$m=3$	$r=4$	$s=1$	Kantowski-Sachs Modeli
$m=3$	$r=3$	$s=0$	Bianchi Modelleri

Son duruma ($r=3$) Bianchi-tip modeller denir. Yâni açık bir biçimde tanımlarsak: bir Bianchi-tip model, 3-boyutlu bir eşölçüm G_3 grubunun homojenlik yüzeylerine (uzay cinsinden yüzeyler) basitçe-geçişli olarak etkidiği uzayca homojen modeldir. 3-boyutlu ($r=3$) bir G_r eşölçüm grubuna bağlanan reel Lie cebirinin sınıflandırılması Bianchi tarafından yapılmıştır. Bianchi [1,11,12] birbirlerine izomorf olmayan I,II,.....IX olarak adlandırdığı dokuz sınıf inşa etmiş ve her bir sınıf için 3-boyutlu uzaysal metriğin koordinatsal formunu belirlemiştir. Bianchi-tip metrikler olarak adlandırılan bu modeller homojen ama eşyönsüzdürler. Bianchi modellerin kozmolojik modeller olarak kullanımı Taub (1951) [2], Raychaudhuri (1958) [13], ve Heckmann ile Schücking (1962) [14] çalışmalarıyla başlamıştır.

Bianchi-tip modeller en genel modeller olmamakla birlikte eşyönsüzlüğün etkilerinin incelenmesi bakımından uygun ve basit bir çalışma varsayımı oluşturmaktadırlar ve günümüze değin yoğun bir biçimde kullanılmaktadırlar.

3.3. İNVARİYANT TABAN İNŞASI:

“Uzay-cinsinden hiperyüzey” teriminden; zaman cinsinden bir vektöre dik (ki buna normal vektör denilmektedir) 3-boyutlu hiperyüzeyler anlaşılmaktadır. Eğer $x^0 \equiv t$ ile zaman koordinatı, ve $x^\mu = (x^1, x^2, x^3)$ ile uzay koordinatları gösterilirse, uzay-zamanın bir $x^i = (x^0, x^\mu)$ noktasında hiperyüzeylerin denklemi $x^0 = t = \text{sâbit}$ olur. Bunlar $S_3(t)$ ile gösterilsin. Bir noktaya bağlanan $\{x^i\}$ yerel koordinat sisteminin koordinat eğrilerinin ∂_i ile gösterilen teğet vektörleri söz konusu noktada bir taban oluşturular. Buna yerel koordinatsal taban ya da kanonik taban denir ve $\{\partial_i\}$ ile gösterilir. Söz konusu noktada

$$dx^i(\partial_j) = \delta^i_j \quad (3.20)$$

bağıntısıyla $\{dx^i\}$ düal tabanı tanımlanabilir. $\{\partial_i\}$ ve düal $\{dx^i\}$ tabanlarında V_4 'ün metriği

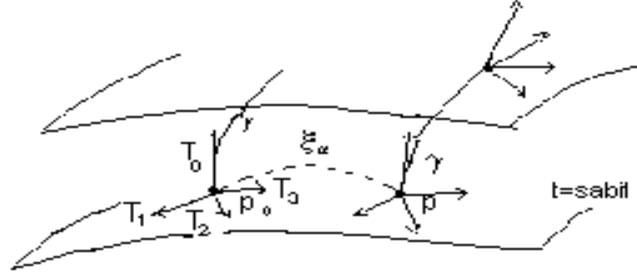
$$g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j \quad (3.21a)$$

veya

$$ds^2 = g_{ij}(x^k) dx^i dx^j \quad (3.21b)$$

biçiminde ifade edilir. Yerel koordinatsal taban metriğin simetri özelliklerini ifade etmek için uygun değildir. Bu bakımdan, yani grup simetri özelliklerini dikkate alan daha genel taban tanımı göz önüne alma zorunluluğu doğmaktadır. O hâlde, mesele; bir G_r ($r=3$) eşölçüm grubu altında invariant kalan 4 adet bağımsız $T_a = (T_0, T_1, T_2, T_3)$ vektör alanının nasıl inşa edilebileceğidir. Killing denklemleri bir $\{\partial_i, dx^i\}$ koordinatsal taban verildiğinde metrik katsayılarının uyması gereken fonksiyonel formu belirlemektedir. Yukarıda bahsedilen yaklaşımda ise taban vektörleri grubun simetri özelliklerine uyacak biçimde inşa edilmektedir.

Şimdi $S_3(t)$ üzerinde belirli (peşinen belirlenmiş) bir p_0 noktası (olayı) seçilmiş olsun. (Bakınız Şekil 3.1). $p_0(x^i)$ noktasında (olayında), $S_3(t)$ 'ye teğet $T_\alpha=(T_1, T_2, T_3)$ bağımsız vektörleriyle (bunlar p_0 'da vektör alanı değil, vektördürler) birlikte $S_3(t)$ üzerinde olmayan bit T_0 vektörü göz önüne alınsın. p_0 'dan geçen ve T_0 vektörünü teğet olarak kabul eden eğri (γ) ile gösterilsin.



Şekil3.1: t =sabit hiperyüzeylerinde Killing ötelenmesinin ve dörtlü taban vektörlerinin gösterimi.

$T_\alpha=(T_0, T_1, T_2, T_3)$ vektör kümesine tetrad tabanı denir. $\{T_\alpha\}$ ise $S_3(t)$ yüzeyini geren vektörlerin bir tabanıdır (triad). Yukarıda yapılan: $\{T_\alpha\}=\{T_0, T_\alpha\}$ tabanını tamamlamak için bir $T_0 \notin S_3(t)$ vektörünü eklemektir. Bu aşamada T_α 'ların birbirleriyle diklikleri hakkında herhangi bir koşul ileri sürülmektedir. Şimdi T_0 ile birlikte (γ) ve de T_α 'lar, G_3 'ün ξ_α Killing vektörleri aracılığıyla bir $p \in S_3(t)$ noktasına Lie ötelenmesiyle taşınınsın. Böylece G_3 'ün V_4 'deki orbitinin her bir noktasında teğet uzayını geren 4 adet T_α vektör alanları tanımlanmış olur. Bu

$$L_{\xi_\alpha} T_\alpha = [\xi_\alpha, T_\alpha] = 0 \quad (3.22a)$$

yani

$$L_{\xi_\alpha} T_0 = [\xi_\alpha, T_0] = 0 \quad (3.22b)$$

$$L_{\xi_\alpha} T_\beta = [\xi_\alpha, T_\beta] = 0 \quad (3.22c)$$

dır. Bu bağıntılar bir $S_3(t)$ hiperyüzeyinde T_0 ve T_α 'ların invaryantlığını ifade eder. Bu işlemden sonra ulaşılan p noktasında T_α 'ların üçü de T_0 teğet vektörü doğrultusunda Lie

türevine göre ötelensin; böylece başka bir $S_3(t)$ hiperyüzeyinde bir q noktasına geçilmiş olur. Söz konusu T_0 invaryant olduğundan bu işlem

$$L_{T_0} T_\alpha = [T_0, T_\alpha] = 0 \quad (3.23)$$

bağıntısını verir.

Böylece, geçilen $S_3(t)$ yüzeyinde $T_a = (T_0, T_1, T_2, T_3)$ invaryant taban elde edilmiş olur. L_{ξ_α} operatörü skaler çarpımları invaryant bıraktığından, eğer $\{T_\alpha\}$ başlangıçta dik bir taban idiyse yüzeyin her noktasında dik bir taban olur.

ξ_α, ξ_β , ve T_α vektörlerine (3.8) Jacobi özdeşliği uygulanırsa

$$[\xi_\alpha, [\xi_\beta, T_\gamma]] + [\xi_\beta, [T_\gamma, \xi_\alpha]] + [T_\gamma, [\xi_\alpha, \xi_\beta]] = 0 \quad (3.24)$$

ve buradan da (3.14) ve (3.22c)'den dolayı

$$[T_\gamma, C^{\theta}_{\alpha\beta} \xi_\theta] = C^{\theta}_{\alpha\beta} [T_\gamma, \xi_\theta] = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.22c) bağıntısı Jacobi özdeşliğiyle tutarlıdır ve bu da taban inşasının Killing vektör tabanının seçiminden bağımsız olduğu anlamına gelir. (3.22c)'ye, p_0 'da başlangıç koşulları verildiğinde, T_α 'ların değerini başka p noktalarında tanımlayan diferansiyel denklemler gözüyle bakılabilir. Başlangıç koşulları için genellikle yapılan doğal seçim

$$T_\alpha(p_0) = e^{\xi_\alpha}(p_0) \quad (\text{her } \alpha \text{ için}) \quad (3.26)$$

şeklindedir. Burada $e = \pm 1$ olan bir parametredir ve seçimi keyfidir. Biz ileride $e = +1$ seçeceğiz ama şimdilik denklemlerde e 'yi tutuyoruz. O halde invaryant bir $\{T_\alpha\}$ tabanı oluşturmak için, yalnızca, T_α 'nın ξ_α 'lara göre bileşenlerini belirlemek yeterli olacaktır.

Şimdi

$$T_\alpha = \chi_\alpha^\beta(x) \xi_\beta \Leftrightarrow \xi_\beta = \tilde{\chi}_\beta^\alpha(x) T_\alpha \quad (3.27)$$

bağıntılarıyla bir $\chi_\alpha^\beta(x)$ fonksiyonu ve tersi $\tilde{\chi}_\beta^\alpha(x)$ tanımlansın. (3.26)'dan dolayı bunlar

$$\chi_\alpha^\beta(p_0) = e \delta_\alpha^\beta \Leftrightarrow \tilde{\chi}_\beta^\alpha(p_0) = e \delta_\beta^\alpha \quad (3.28)$$

başlangıç koşullarını sağlar. Öte yandan

$$[T_\alpha, T_\beta] = T^\gamma_{\alpha\beta}(x) T_\gamma \quad (3.29)$$

bağıntılarıyla da $T^\gamma_{\alpha\beta}(x)$ fonksiyonları tanımlansın. $T^\gamma_{\alpha\beta}$ 'lara komütasyon fonksiyonları denir. Eğer (3.27) (3.29)'a yerleştirilirse

$$\begin{aligned} 0 &= [\xi_\alpha, T_\beta] \\ &= [\xi_\alpha, \chi_\beta^\gamma \xi_\gamma] \\ &= (\xi_\alpha \chi_\beta^\gamma) \xi_\gamma + \chi_\beta^\gamma [\xi_\alpha, \xi_\gamma] \\ &= (\xi_\alpha \chi_\beta^\gamma) \xi_\gamma + \chi_\beta^\gamma C^\varepsilon_{\alpha\gamma} \xi_\varepsilon \\ &= (\xi_\alpha \chi_\beta^\varepsilon + \chi_\beta^\gamma C^\varepsilon_{\alpha\gamma}) \xi_\varepsilon \end{aligned}$$

ve buradan da

$$(\xi_\alpha \chi_\beta^\varepsilon + \chi_\beta^\gamma C^\varepsilon_{\alpha\gamma}) = 0 \quad (3.30)$$

elde edilir. Bu bağıntı p_0 noktasında değerlendirilirse, (3.28)'den dolayı

$$\xi_\alpha \chi_\beta^\varepsilon(p_0) = -C^\varepsilon_{\alpha\gamma} \quad (3.31)$$

elde edilir. Bu bağıntı, (3.27)'nin (3.29)'a yerleştirilmesiyle bulunacak denklemde kullanılırsa, gerekli düzenlemelerden sonra

$$\chi_\alpha^\delta (\xi_\delta \chi_\beta^\gamma) - \chi_\beta^\delta (\xi_\delta \chi_\alpha^\theta) + \chi_\alpha^\delta \chi_\beta^\epsilon C_{\delta\epsilon}^\theta = T^\gamma{}_{\alpha\beta} \chi_\gamma^\theta \quad (3.32)$$

bulunur. Bu bağıntı p_0 'da değerlendirilirse sonuçta

$$T^\theta{}_{\alpha\beta}(p_0) = -e C^\theta{}_{\alpha\beta} \quad (3.33)$$

ifadesine varılır. Buradan da, bir p_0 noktasında, $\{T_\alpha\}$ 'ların Lie cebirinin cebirsel yapısının Killing vektörlerinin cebirsel yapısıyla “aynı” olduğu sonucu çıkar. Bu sonucun ışığında (3.29) bağıntısı bir p_0 noktasında

$$[T_\alpha, T_\beta] = -e C^\gamma{}_{\alpha\beta} T_\gamma \quad (3.34)$$

biçiminde ifade edilir. Bundan sonraki hesaplamalarda $e=+1$ seçeceğiz.

3.4.TETRAD FORMALİZMİ:

Uzay-zamanın herhangi bir noktasında birbirlerinden bağımsız 4 adet vektör, uzay-zamanın vektörleri için bir taban oluşturur. e_a ($a=0,1,2,3$) ile gösterilecek olan bu $\{e_a\}$ kümesine genel taban veya tetrad tabanı veyahut da kısaca tetrad denir. e_a taban vektörleri, yerel koordinat sisteminin $\{\partial_i\}$ koordinat tabanı vektörlerinin

$$e_a = e_a^i(x^k) \partial_i \Leftrightarrow \partial_i = e^a{}_i(x^k) e_a \quad (3.35)$$

biçiminde lineer kombinezonu olarak ifade edilirler. e_a^i 'lere taban vektörlerinin tetrad bileşenleri denir. (3.35)'de $e^a{}_i$ matrisi e_a^i 'nin tersi olup,

$$e_a^i e^a{}_j = \delta^i{}_j \Leftrightarrow e_a^i e^b{}_i = \delta^b{}_a \quad (3.36)$$

bağıntısıyla tanımlanmıştır.

∂_i 'lerin düali

$$dx^i(\partial_j) = \delta^i_j \quad (3.37)$$

düalite bağıntısıyla tanımlanan dx^i 'lerdir. Benzer şekilde, e_a 'ların düali

$$e^a(e_b) = \delta^a_b \quad (3.38)$$

bağıntısıyla tanımlanan e^a 'lardır. Bunları yeri geldiğinde ω^a veya σ^a ile göstereceğiz. O halde, uzay-zamanda, vektörler ve 1-formlar için, dolayısıyla tüm tansörler için: biri $\{\partial_i, dx^i\}$, diğeri de $\{e_a, e^a\}$ olmak üzere iki tip taban gözönüne almak mümkündür. Herhangi bir vektör yada tansör bu tabanlarda ve bunlardan türeyenlerde

$$X = X^i \partial_i = X^a e_a = X_i dx^i = X_a e^a \quad (3.39)$$

$$\tau = \tau^{ij\dots kl\dots} \partial_i \otimes \partial_j \otimes \dots \otimes dx^k \otimes dx^l \otimes \dots \quad (3.40a)$$

$$= \tau^{ab\dots cd\dots} e_a \otimes e_b \otimes \dots \otimes e^c \otimes e^d \otimes \dots \quad (3.40b)$$

biçiminde ifade edilirler. Dolayısıyla tetrad ve tansör bileşenleri birbirlerine

$$\tau^{ij\dots kl\dots} = e_a^i e_b^j \dots e_c^k e_d^l \dots \tau^{ab\dots cd\dots} \quad (3.41a)$$

$$\tau^{ab\dots cd\dots} = e^a_i e^b_j \dots e^k_c e^l_d \dots \tau^{ij\dots kl\dots} \quad (3.41b)$$

bağıntıları aracılığıyla dönüşeceklerdir. Özel olarak, metrik tansör

$$g = g_{ij} dx^i dx^j = g_{ab} e^a \otimes e^b \quad (3.42)$$

olup bileşenleri

$$g_{ab} = e_a^i e_b^j g_{ij} \Leftrightarrow g_{ij} = e^a_i e^b_j g_{ab} \quad (3.43)$$

dir.

$$g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c \quad (3.44)$$

bağıntısı ile de g^{ab} tetrad bileşenleri tanımlanır. Nasıl ki, g_{ij} ve g^{ij} tansör indislerini indirip kaldırıyorsa, tetrad bileşenleri için aynı işi g_{ab} ve g^{ab} yapar.

e_a taban vektörlerinin komütatörü, f keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$[e_a, e_b]f \equiv e_a(e_b f) - e_b(e_a f) = \gamma^c_{ab}(x^k) e_c \quad (3.45)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, γ^c_{ab} 'lere komütasyon fonksiyonları veya yapı katsayıları denir. Bir koordinatsal taban için

$$[\partial_i, \partial_j] = 0 \Leftrightarrow \gamma^k_{ij} = 0 \quad (3.46)$$

dır.

$$[e_a, e_b] = -[e_b, e_a] \quad (3.47)$$

$$[e_a, [e_b, e_c]] + [e_b, [e_c, e_a]] + [e_c, [e_a, e_b]] = 0 \quad (3.48)$$

komütatör özelliklerinden γ^c_{ab} 'lerin

$$\gamma^c_{ab} = -\gamma^c_{ba} \quad (3.49)$$

$$e_a \gamma^e_{bc} + e_b \gamma^e_{ca} + e_c \gamma^e_{ab} + \gamma^d_{ab} \gamma^e_{cd} + \gamma^d_{bc} \gamma^e_{ad} + \gamma^d_{ca} \gamma^e_{bd} = 0 \quad (3.50)$$

bağıntılarını sağlamaları gerektiği görülür. İkinciye Jacobi özdeşlikleri denir. e ile a 'nın büzülmesinden

$$e_a \gamma^a_{bc} + e_b \gamma^a_{ca} + e_c \gamma^a_{ab} + \gamma^d_{bc} \gamma^a_{ad} = 0 \quad (3.51)$$

büzülmüş Jacobi özdeşlikleri elde edilir. Eğer (3.45) bağıntısına (3.35) taşınırsa, (3.36)'nın da kullanılmasıyla, tetrad taban vektörlerinin bileşenleri cinsinden komütasyon fonksiyonlarının ifadesi için

$$\gamma^c_{ab} = -e_a^i e_b^j (\partial_i e^c_j - \partial_j e^c_i) \quad (3.52)$$

bulunur.

Şimdi, e_a 'ların düali olan e^a 1-formları göz önüne alınsın. Bunlar dx^i koordinatsal 1-formların lineer kombinezonu olarak

$$\omega^c = e^c_j dx^j \quad (3.53)$$

olarak ifade edilirler. Dış türev olarak

$$\begin{aligned} de^c &= de^c_j \wedge dx^j \\ &= \partial_i e^c_j dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i e^c_j - \partial_j e^c_i) dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i e^c_j - \partial_j e^c_i) e_a^i e^a \wedge e_b^j e^b \\ &= \frac{1}{2} e_a^i e_b^j (\partial_i e^c_j - \partial_j e^c_i) e^a \wedge e^b \end{aligned}$$

ve (3.52)'yi de kullanarak

$$de^c = -\frac{1}{2} \gamma^c_{ab} (e^a \wedge e^b) \quad (3.54)$$

bulunur. Her ne kadar ispat, bir koordinatsal 1-form tabanında yapıldıysa da varılan sonuç genel bir sonuçtur. Bu şöyle de söylenebilir: e_c 'nin düali olan e^c 1-formunun dış türevi bir 2-formdur. Dolayısıyla $e_a \wedge e_b$ ($a < b$) taban 1-formlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Antisimetrik çarpımın antisimetri özelliğini kullanarak

$$de^c = \Omega^c_{ab} (e^a \wedge e^b) \quad (\text{tüm indisler üzerinden toplam}) \quad \Omega^c_{ab} = -\Omega^c_{ba} \quad (3.55a)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, (3.38) düalite bağıntısının

$$\Omega^c_{ab} = -\frac{1}{2} \gamma^c_{ab} \quad (3.55b)$$

bağıntısına götürdüğünü göstermek mümkündür.

Kovaryant türevin tetrad bileşenleri için (3.41b)'dekine benzer tarzda

$$\nabla_c \tau^{b\dots a\dots} = e_a^i e^b_j \dots e_c^k \nabla_k \tau^{i\dots j\dots} \quad (3.56)$$

yazılabilir. Eğer

$$e_a^i (\nabla_i e_b^k) e^c_k = \Gamma^c_{ab} \quad (3.57)$$

denirse (3.56)'dan

$$\nabla_c \tau^{b\dots a\dots} = e_c^b \tau^{b\dots a\dots} + \Gamma^b_{cd} \tau^{d\dots} \dots - \Gamma^d_{ca} \tau^{b\dots d\dots} \dots \quad (3.58)$$

yazılabileceğini görmek kolaydır. Özel olarak; bir skaler, bir vektör ve bir 2-tansör için

$$\nabla_a f = e_a f \equiv \partial_a f = e_a^i \partial_i f \quad (3.59a)$$

$$\nabla_a \tau_b = e_a \tau_b - \Gamma^c_{ab} \tau_c \quad (3.59b)$$

$$\nabla_a \tau^b_c = e_a \tau^b_c + \Gamma^b_{ad} \tau^d_c - \Gamma^d_{ac} \tau^b_d \quad (3.59c)$$

şeklindedir. Γ^c_{ab} sembollerine Ricci Dönme katsayıları denir. Bunlar (3.57)'ye alternatif olarak

$$\nabla_a e_b \equiv \nabla_{e_a} e_b = \Gamma^c_{ab} e_c \quad (3.60)$$

biçiminde de tanımlanabilirler. Γ^c_{ab} 'ler bir $\{\partial_i\}$ koordinat tabanında

$$\nabla_i \partial_j \equiv \nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k \quad (3.61)$$

biçiminde tanımlanan Christoffel sembollerinin $\{e_a\}$ tetrad tabanındaki benzerleridir. Ancak, burulmasız bir uzayda $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ olmasına karşılık bir tetrad tabanında genel olarak $\Gamma^c_{ab} \neq \Gamma^c_{ba}$ 'dır.

γ^c_{ab} komütasyon fonksiyonlarını, Γ^c_{ab} Ricci dönme katsayıları cinsinden ifade etmek için (3.52) ve (3.57) bağıntıları kullanılabilir. Ancak, daha kestirme bir yol için burulma ve Riemann eğrilik operatörünün sırasıyla

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (3.62)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (3.63)$$

tanımlarını göz önüne alalım ve bunları taban vektörlerine uygulayalım.

$$\begin{aligned} T(e_a, e_b) &\equiv T^c_{ab} e_c = \nabla_{e_a} e_b - \nabla_{e_b} e_a - [e_a, e_b] \\ &= (\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} - \gamma^c_{ab}) e_c \end{aligned} \quad (3.64)$$

ve buradan, burulmasız ($T=0$) bir uzay-zaman için

$$\gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} \quad (3.65)$$

bulunur. (3.63)'ten ise

$$R(e_a, e_b)e_c \equiv R^d{}_{cab}e_d = \nabla_{e_a} \nabla_{e_b} e_c - \nabla_{e_b} \nabla_{e_a} e_c - \nabla_{[e_a, e_b]} e_c \quad (3.66)$$

yazılır. (3.45) ve (3.60) kullanılır ve gerekli işlemler ile indis düzenlemeleri yapılırsa, Riemann eğrilik tansörünün tetrad bileşenleri için

$$R^a{}_{bcd} = e_c \Gamma^a{}_{db} - e_d \Gamma^a{}_{cb} + \Gamma^f{}_{db} \Gamma^a{}_{cf} - \Gamma^f{}_{cb} \Gamma^a{}_{df} - \Gamma^a{}_{fb} \gamma^f{}_{cd} \quad (3.67)$$

ifadesi elde edilir. $a=c$ büzülmesiyle Ricci tansörü için

$$R_{ab} = e_c \Gamma^c{}_{ba} - e_b \Gamma^c{}_{ca} + \Gamma^d{}_{ba} \Gamma^c{}_{cd} - \Gamma^d{}_{ca} \Gamma^c{}_{db} \quad (3.68)$$

bulunur. Bu aşamaya kadar, tetrad taban vektörlerinin doğrultuları hakkında herhangi bir varsayım yapılmamıştır. Dolayısıyla yukarıdaki ifadeler tamamen geneldir ve herhangi bir tetrad için geçerlidir. Şimdi ise, çalışmamızın çerçevesi için yeterli olacak dik (ortonormal) tetrad kabulü ile devam edeceğiz. Buna göre e_a 'lar birbirlerine dik ve dolayısıyla

$$g_{ab} = \eta_{ab} = \text{köş}(-1, +1, +1, +1) \quad (3.69)$$

olacaktır. (3.65) bağıntısı $\Gamma^c{}_{ab}$ 'leri $\gamma^c{}_{ab}$ komütasyon fonksiyonları cinsinden ifade etmeye olanak vermektedir. Bir ikinci bağıntı olarak η_{ab} 'nin kovaryant türevinin sıfır olmasından yola çıkılsın. Buna göre

$$0 = \nabla_f \eta_{ab} = e_f \eta_{ab} - \Gamma^d{}_{fa} \eta_{db} - \Gamma^d{}_{fb} \eta_{ad} \quad (3.70)$$

ve buradan da

$$\eta_{bd} \Gamma^d{}_{fa} + \eta_{ad} \Gamma^d{}_{fb} = e_f \eta_{ab} = 0 \quad (3.71)$$

elde edilir. Şimdi,

$$\Gamma_{abc} = \eta_{af} \Gamma^f_{bc} \Leftrightarrow \Gamma^a_{bc} = \eta^{af} \Gamma_{fbc} \quad (3.72)$$

$$\gamma_{abc} = \eta_{af} \gamma^f_{bc} \Leftrightarrow \gamma^a_{bc} = \eta^{af} \gamma_{fbc} \quad (3.73)$$

sembolleri tanımlansın. Bu takdirde (3.71)

$$\Gamma_{bfa} + \Gamma_{afb} = 0 \quad (3.74)$$

olarak yazılabilir. (3.73) ve (3.74)'den, bu sembollerin

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{acb} \quad (\text{son iki indise göre antisimetrik}) \quad (3.75)$$

$$\Gamma_{abc} = -\Gamma_{cba} \quad (\text{birinci ve üçüncü indislere göre antisimetrik}) \quad (3.76)$$

simetri özelliklerini taşıdıkları görülür. Şimdi, eğer (3.74), indisleri değiştirilerek iki kere daha yazılır ve birbirleriyle uygun bir şekilde toplanıp çıkarılırsa sonuçta Γ^c_{ab} 'leri γ^c_{ab} 'lere bağlayan

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\gamma_{abc} + \gamma_{bac} - \gamma_{cba}) \quad (3.77)$$

ifadesine ulaşılır. Bu konuyu kapamadan önce, eğrilik hesabını dış diferansiyel formlar aracılığıyla Cartan'ın yapı denklemlerini kullanarak nasıl yapıldığını gösterelim. Burulmasız bir uzay için

I. Cartan denklemi:

$$de^c = -\Gamma^c_b \wedge e^b \quad (3.78)$$

dir. Burada Γ^c_b 'lere bağlantı (koneksiyon) 1-formları denilmekte olup, Ricci dönme katsayıları cinsinden

$$\Gamma^c_b = \Gamma^c_{ab} e^a \quad (3.79)$$

bağıntısıyla tanımlanır.

II. Cartan denklemi:

$$\mathfrak{R}^a_b \equiv d\Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} e^c \wedge e^d \quad (3.80)$$

dir. \mathfrak{R}^a_b 'ye eğrilik 2-formu denir.

(3.79)'da önce (3.80) ve daha sonra (3.65) kullanılırsa

$$\begin{aligned} de^c &= -\Gamma^c_{ab} e^a \wedge e^b \\ &= -\frac{1}{2} (\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}) e^a \wedge e^b \\ &= -\frac{1}{2} \gamma^c_{ab} e^a \wedge e^b \end{aligned}$$

yani, (3.54) bağıntısı elde edilir. II: Cartan denklemi için Γ^a_b 'nin dış türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} d\Gamma^a_b &= d(\Gamma^a_{fb} e^f) \\ &= d\Gamma^a_{fb} \wedge e^f + (-1)^0 \Gamma^a_{fb} \wedge de^f \\ &= e_d \Gamma^a_{fb} e^d \wedge e^f + \Gamma^a_{fb} (-\Gamma^f_{gh} e^g \wedge e^h) \\ &= \frac{1}{2} (e^d \Gamma^a_{fb} - e^f \Gamma^a_{db}) e^d \wedge e^f + \Gamma^a_{fb} \left[-\frac{1}{2} (\Gamma^f_{gh} - \Gamma^f_{hg}) \right] e^g \wedge e^h \end{aligned}$$

olur Öte yandan,

$$\begin{aligned} \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b &= \Gamma^a_{gc} e^g \wedge \Gamma^c_{hb} e^h \\ &= \Gamma^a_{gc} \Gamma^c_{hb} e^g \wedge e^h \\ &= \frac{1}{2} (\Gamma^a_{gc} \Gamma^c_{hb} - \Gamma^a_{hc} \Gamma^c_{gb}) e^g \wedge e^h \end{aligned}$$

dir.

Bu iki ifade (3.80)'e yerleştirilir, bileşenleri özdeşleştirilir ve indis adları değiştirilirse (3.67) ifadesi elde edilmiş olur.

3.5.BIANCHI-TİP MODELLERİN ELLİS-MACCALLUM SINIFLANDIRMASI:

Ellis ve MacCallum, Bianchi-tip modellerin $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ yapı sâbitlerini kendi içlerinde alt-gruplara ayırarak yeni bir sınıflandırma oluşturmuşlardır [15,16,17]. Herkesçe benimsenen bu sınıflandırmaya göre yapı sâbitleri bir simetrik matris ve bir de vektör cinsinden

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} \hat{n}^{\lambda\gamma} + \hat{a}_{\alpha} \delta^{\gamma}_{\beta} - \hat{a}_{\beta} \delta^{\gamma}_{\alpha} \quad (3.81)$$

biçiminde yazılmaktadırlar. Burada $\varepsilon_{\alpha\beta\lambda}$, 3-boyutlu uzayın permütasyon sembolü (Levi-Civita sembolü) ve $\hat{n}_{\alpha\beta}$ ve \hat{a}_{α} da $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 'lar cinsinden

$$\hat{n}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} C^{(\alpha}_{\lambda\theta} \varepsilon^{\beta)\lambda\theta} \quad (3.82a)$$

$$\hat{a}_{\alpha} = \frac{1}{2} C^{\beta}_{\alpha\beta} \quad (3.82b)$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Simetrik $\hat{n}_{\alpha\beta}$ matrisi ile \hat{a}_{α} vektörünün görünüşte dokuz bağımsız elemanı bulunmaktadır. Ancak, $\{T_{\alpha}\}$ üçlüsünün 3-boyutlu uzayda dönmesel serbestliğini kullanmak, eksenlerinin sırasını ve yönünü değiştirmek gibi işlemlerle bu sayı indirgenebilir ve sonuçta da

$$\hat{n}_{\alpha\beta} = \text{köş}(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3) \quad (3.83a)$$

$$\hat{a}_{\alpha} = (\hat{a}_1, 0, 0) \quad (3.83b)$$

seçilebilir. Öte yandan, $\hat{n}_{\alpha\beta}$ ve \hat{a}_{α} birbirlerinden bağımsız olmayıp (3.9) ve (3.10) özdeşliklerinden dolayı

$$\hat{n}^{\alpha\beta} \hat{a}_\beta = 0 \quad (3.84)$$

koşuluna uymak zorundadırlar. Bu koşul (3.83) bağıntılarının ışığında

$$\hat{n}_1 \hat{a}_1 = 0 \quad (3.85)$$

bağıntısına indirgenir. Bu da, Ellis ve MacCallum'a, Bianchi modellerini iki ana grupta sınıflandırma olanağı vermektedir. Buna göre, $\hat{a}_1 = 0$ A, sınıfı, $\hat{a}_1 \neq 0$ olduğunda ise B sınıfı denir. Bu sınıflandırma Tablo 3.1'de gösterilmiştir. Daha fazla ayrıntı için [15-17] bakılabilir. Bazı Bianchi-tip modelleri daha yüksek dereceden simetrik modelleri de içermektedir. Bunlar da Tablo3.1'de gösterilmiştir.

Tablo 3.1: Bianchi modellerinin Ellis ve MacCallum sınıflandırması. Tabloda görünmeyen III modeli VI₁'e karşılık gelir. Burada $\hat{a}_1^2 = h n_1 n_2$. Kapalı bir evreni yansıtan tek model, kapalı FLRW evreninin geliştirilmiş olan IX tiptir. I ile VI₀ düz ve V ile VII_h açık olup FLRW benzerlerinin geliştirilmesini oluştururlar [18].

Grup Sınıfı	Grup Tipi	\hat{n}_1	\hat{n}_2	\hat{n}_3	FLRW içeriyor mu?
$\hat{a}_1=0$	I	0	0	0	k=0
	II	1	0	0	
	VI ₀	0	1	-1	
	VII ₀	0	1	1	k=0
	VIII	1	1	-1	
	IX	1	1	1	k=+1
$\hat{a}_1 \neq 0$	V	0	0	0	k=-1
	IV	0	0	1	
	VI _h	0	1	-1	
	VII _h	0	1	1	k=-1

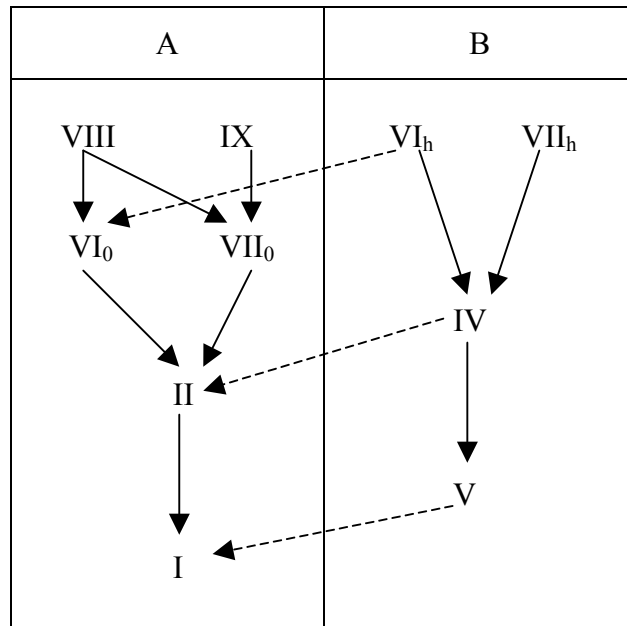
Aynı sınıflandırma $\gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ komütasyon fonksiyonlarına göre de yapılabilmektedir.

Bu durum için

$$\gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} n^{\lambda\gamma} + a_\alpha \delta^\gamma_\beta - a_\beta \delta^\gamma_\alpha \quad (3.86)$$

yazılır. Ancak burada $n_{\alpha\beta}$ ve a_α bileşenleri artık ± 1 'e normlanmış sabitler değil fakat zamanın fonksiyonudurlar. Öncekilerle farkı vurgulamak için bu büyüklükler “şapkasız” olarak gösterilmektedir. Bu durum için Tablo 3.1’de ± 1 yerine yalnızca \pm yazılmalıdır.

Öte yandan Şekil 3.2’de Bianchi-tip modellerin hiyerarşisi gösterilmiştir. Kolayca görüleceği üzere Bianchi I ve V, diğer modellerin sınırını oluşturur (yani bazı parametre değerlerine sıfır vermekle bu modeller elde edilir)



Şekil 3.2: Sıfırdan farklı parametrelerin sıfır alınmasıyla elde edilebilen grup tiplerinin özelliğini gösteren diyagram. (Not:Bu diyagram dinamik evrimi ifade etmez.)[19].

3.6.EAD'NE METRİK VE TETRAD FORMALİZMİ YAKLAŞIMLARI:

Bianchi-tip ya da genel olarak homojen modeller söz konusu olduğunda alan denklemlerini hesaplamanın başlıca iki yolu vardır. Bunlardan birincisi zamana bağlı olmayan taban vektör veya 1-formları kullanmaktır. Bu durumda metrik bileşenleri zamanın fonksiyonları olur. Bu yaklaşım ışığında tüm Bianchi-tip modeller, senkron (eşzamanlı) bir koordinat sisteminde

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{\alpha\beta}(t)\omega^\alpha\omega^\beta \quad (3.87)$$

metriği ile gösterilirler. Burada $\gamma_{\alpha\beta}$ 'lar 3-boyutlu t =sabit $S_3(t)$ homojenlik yüzeylerinin metrik bileşenleridir. ω^α 'lar taban 1-formları olup zamandan bağımsız ve yalnızca koordinatların fonksiyonudur. Bunların düalleri yine zamandan bağımsız E_α taban vektörleridir. (Taban vektörlerinin ve taban 1-formlarının zamandan bağımsızlığını belirtmek için e^α yerine ω^α , e_α yerine de E_α yazılışı kullanmaktayız.) Buna göre önceki bağıntıları

$$[E_\alpha, E_\beta] = E^\gamma{}_{\alpha\beta} E_\gamma, \quad E^\gamma{}_{\alpha\beta} = -E^\gamma{}_{\beta\alpha} \quad (3.88a)$$

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta] = C^\gamma{}_{\alpha\beta} \xi_\gamma, \quad C^\gamma{}_{\alpha\beta} = -C^\gamma{}_{\beta\alpha} \quad (3.88b)$$

$$\omega^\alpha(E_\beta) = \delta^\alpha{}_\beta \quad (3.89)$$

$$d\omega^\gamma = \Omega^\gamma{}_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad \Omega^\gamma{}_{\alpha\beta} = -\Omega^\gamma{}_{\beta\alpha} \quad (3.90)$$

yazılışlarıyla değiştirmeliyiz. Düalite özelliğinden

$$\Omega^\gamma{}_{\alpha\beta} = -E^\gamma{}_{\alpha\beta} / 2 \quad (3.91)$$

ve tabanın invaryantlığından da

$$E^\gamma{}_{\alpha\beta} = -C^\gamma{}_{\alpha\beta} \quad (3.92)$$

bağıntıları geçerli olur. Bu son iki bağıntıdan

$$\Omega^{\gamma}_{\alpha\beta} = +C^{\gamma}_{\alpha\beta} / 2 \quad (3.93)$$

dolayısıyla da

$$d\omega^{\gamma} = +\frac{1}{2}C^{\gamma}_{\alpha\beta}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \quad (3.94)$$

elde edilir.

Bianchi-tip modellerin ξ_{α} , E_{α} , ω^{α} büyüklüklerinin kanonik formları literatürde eşdeğer ama değişik şekillerde verilmiştir. Biz MacCallum tarafından verilen ve Tablo 3.2’de gösterilen değerleri kullanacağız [20]. $\Omega^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ katsayıları, her Bianchi modeli için Tablo 3.2 den hareketle Tablo 3.3’deki gibi hesaplanabilir.

Alan denklemlerini hesaplamanın bir ikinci yöntemi de dik (ortogonal) bir tetrad seçmektir. Tetrad, yine eşölçüm grubu altında invaryant seçilir ama bu sefer e_a taban vektörleri zamanın fonksiyonu alınır. Bunun sonucunda, komütasyon fonksiyonları da zamanın fonksiyonu olur, fakat t =sabit homojenlik yüzeyinin her bir noktasında simetri grubunun yapı sabitlerine eşit olur. Dinamik değişkenler artık metrik bileşenleri değil fakat komütasyon fonksiyonlarıdır. Zaman değişkeninden arındırılmış metriğin tetrad bileşenleri artık uzay-zaman sabitleridir: $g_{ab}=\eta_{ab}$.

Birinci yöntem, metrik bileşenlerinin zamana göre ikinci mertebeden âdi türevlerini içeren alan denklemlerine yol açar. İkincisi ise, komütasyon fonksiyonlarının birinci mertebeden âdi türevli denklemlerini verir. Ancak, bunun bedeli, ikincisinde birinciye göre daha fazla denklem bulunmasıdır.

Wald bu yöntemle varılan denklemleri kullanmaktadır. Biz Wald’ın iddialarını birinci yöntemle varılan denklemlerden hareketle ele alacağız.

Tablo 3.2: Bianchi Modellerinin taban vektörlerinin, taban 1-formlarının ve Killing vektörlerinin ifadeleri [20].

TİP	ξ_α	E_α	ω^α
I	∂_1 ∂_2 ∂_3	∂_1 ∂_2 ∂_3	dx^1 dx^2 dx^3
II	∂_1 ∂_2 $\partial_3 + x^2\partial_1$	∂_1 $\partial_2 + x^3\partial_1$ ∂_3	$dx^1 - x^3 dx^2$ dx^2 dx^3
IV	$\partial_1 - x^2\partial_2 - (x^2 + x^3)\partial_3$ ∂_2 ∂_3	∂_1 $e^{-x^1}(\partial_2 - x^1\partial_3)$ $e^{-x^1}\partial_3$	dx^1 $e^{x^1} dx^2$ $e^{x^1}(x^1 dx^2 + dx^3)$
V	$\partial_1 - x^2\partial_2 - x^3\partial_3$ ∂_2 ∂_3	∂_1 $e^{-x^1}\partial_2$ $e^{-x^1}\partial_3$	dx^1 $e^{x^1} dx^2$ $e^{x^1} dx^3$
VI _h	$\partial_1 + (x^3 - hx^2)\partial_2 + (x^3 - hx^3)\partial_3$ ∂_2 ∂_3	∂_1 $e^{-hx^1}(\cosh x^1\partial_2 + \sinh x^1\partial_3)$ $e^{-hx^1}(\sinh x^1\partial_2 + \cosh x^1\partial_3)$	dx^1 $e^{hx^1}(\cosh x^1 dx^2 - \sinh x^1 dx^3)$ $e^{hx^1}(-\sinh x^1 dx^2 + \cosh x^1 dx^3)$
VII _h	$\partial_1 + (x^3 - hx^2)\partial_2 - (x^3 - hx^3)\partial_3$ ∂_2 ∂_3	∂_1 $e^{-hx^1}(\cos x^1\partial_2 - \sin x^1\partial_3)$ $e^{-hx^1}(\sin x^1\partial_2 + \cos x^1\partial_3)$	dx^1 $e^{hx^1}(\cos x^1 dx^2 - \sin x^1 dx^3)$ $e^{hx^1}(\sin x^1 dx^2 + \cos x^1 dx^3)$

	VIII	IX
ξ_α	∂_1 $-\sinh x^1 \tanh x^2 \partial_1 + \cosh x^1 \partial_2 - \sinh x^1 \operatorname{sech} x^2 \partial_3$ $\cosh x^1 \tanh x^2 \partial_1 - \sinh x^1 \partial_2 - \cosh x^1 \operatorname{sech} x^2 \partial_3$	∂_1 $-\sin x^1 \tan x^2 \partial_1 + \cos x^1 \partial_2 + \sin x^1 \operatorname{sec} x^2 \partial_3$ $\cos x^1 \tan x^2 \partial_1 - \sin x^1 \partial_2 + \cos x^1 \operatorname{sec} x^2 \partial_3$
E_α	$\operatorname{sech} x^2 \cos x^3 \partial_1 - \sin x^3 \partial_2 - \tanh x^2 \cos x^3 \partial_3$ $\operatorname{sech} x^2 \sin x^3 \partial_1 + \cos x^3 \partial_2 - \tanh x^2 \sin x^3 \partial_3$ ∂_3	$\operatorname{sec} x^2 \cos x^3 \partial_1 - \sin x^3 \partial_2 + \tan x^2 \cos x^3 \partial_3$ $\operatorname{sec} x^2 \sin x^3 \partial_1 + \cos x^3 \partial_2 - \tan x^2 \sin x^3 \partial_3$ ∂_3
ω^α	$\cosh x^2 \cos x^3 dx^1 - \sin x^3 dx^2$ $\cosh x^2 \sin x^3 dx^1 + \cos x^3 dx^2$ $\sinh x^2 dx^1 + dx^3$	$\cos x^2 \cos x^3 dx^1 - \sin x^3 dx^2$ $\cos x^2 \sin x^3 dx^1 + \cos x^3 dx^2$ $-\sin x^2 dx^1 + dx^3$

Tablo 3.3: Bianchi Modelleri için $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $E^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\Omega^{\gamma}_{\alpha\beta}$ katsayılarının toplu gösterimi

I	II	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$	$C^1_{23} = 1$	$C^2_{12} = 1$ $C^3_{13} = 1$ $C^3_{12} = 1$	$C^2_{12} = 1$ $C^3_{13} = 1$	$C^2_{12} = h$ $C^2_{13} = -1$ $C^3_{12} = -1$ $C^3_{13} = h$	$C^2_{12} = h$ $C^2_{13} = -1$ $C^3_{12} = 1$ $C^3_{13} = h$	$C^1_{23} = 1$ $C^2_{13} = 1$ $C^3_{12} = -1$	$C^1_{23} = 1$ $C^2_{13} = -1$ $C^3_{12} = 1$
$E^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$	$E^1_{23} = 1$	$E^2_{12} = -1$ $E^3_{13} = -1$ $E^3_{12} = -1$	$E^2_{12} = -1$ $E^3_{13} = -1$	$E^2_{12} = -h$ $E^2_{13} = 1$ $E^3_{12} = 1$ $E^3_{13} = -h$	$E^2_{12} = h$ $E^2_{13} = -1$ $E^3_{12} = 1$ $E^3_{13} = h$	$E^1_{23} = -1$ $E^2_{13} = -1$ $E^3_{12} = 1$	$E^1_{23} = -1$ $E^2_{13} = 1$ $E^3_{12} = -1$
$\Omega^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$	$\Omega^1_{23} = 1/2$	$\Omega^2_{12} = 1/2$ $\Omega^3_{13} = 1/2$ $\Omega^3_{12} = 1/2$	$\Omega^2_{12} = 1/2$ $\Omega^3_{13} = 1/2$	$\Omega^2_{12} = h/2$ $\Omega^2_{13} = -1/2$ $\Omega^3_{12} = -1/2$ $\Omega^3_{13} = h/2$	$\Omega^2_{12} = h/2$ $\Omega^2_{13} = -1/2$ $\Omega^3_{12} = 1/2$ $\Omega^3_{13} = h/2$	$\Omega^1_{23} = 1/2$ $\Omega^2_{13} = 1/2$ $\Omega^3_{12} = -1/2$	$\Omega^1_{23} = 1/2$ $\Omega^2_{13} = -1/2$ $\Omega^3_{12} = 1/2$

3.7.EVRENİN MADDE-ENERJİ İÇERİĞİ:

Evreni dolduran madde-enerji içeriği

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \quad (3.95)$$

korunum kanununa uyan T_{ab} enerji-momentum tansörüyle tasvir edilir. Bu tansör madde-enerjinin bütün şekillerini: salt madde, elektromagnetik alan, skaler alan vb...kapsar. Kozmolojide çok sık kullanılan bir model olarak, madde-enerji ayrıcalıklı bir u^a ortalama 4-lü hız vektörüne sahip bir akışkan gibi tasarlanır. Bu takdirde T_{ab}

$$T_{ab} = (\mu + p)u_a u_b + pg_{ab} + q_a u_b + q_b u_a + \pi_{ab} \quad (3.96)$$

biçiminde gösterilir. Burada; μ : madde-enerji yoğunluğu, p : eşyönlü basınç, q_a : enerji akışı, π_{ab} : eşyönsüz basınç tansörü olup tüm bu büyüklükler u_a 4-lü vektörüyle hareket eden gözlemciye göre ölçülmüş büyüklüklerdir. Akışkanın fiziğini, bu dinamik

büyüklikler arasında termodinamiğe ve istatistiksel mekaniğe dayalı bir takım bağıntılar belirler. Bunlar hal denklemi olarak anılırlar. Özel olarak

$$q_a = \pi_{ab} = 0 \quad (3.97)$$

haline yani,

$$T_{ab} = (\mu + p)u_a u_b + p g_{ab} \quad (3.98)$$

haline mükemmel akışkan modeli denir. Basıncı madde-enerji yoğunluğuna bağlayan

$$p = p(\mu) \quad (3.99)$$

biçimindeki hal denkleminin barotropik hal denkleminin

$$p = (\gamma - 1)\mu \quad (3.100)$$

biçiminde lineer olması haline de lineer barotropik hal denkleminin denir. Burada γ =sâbit olup değer aralığı

$$0 \leq \gamma \leq 2 \quad (3.101)$$

dir. γ 'nın mümkün özel durumlarını yansıtan değerleri şunlardır:

$\gamma = 0$	üstel şişmeli model, efektif olarak bir kozmolojik sabit rolü görür
$0 < \gamma < 2/3$	kuvvet kanunlu şişmeli model
$\gamma = 4/3$	Radyasyon
$\gamma = 1$	basıncısız madde (toz)
$\gamma = 2$	katı (stiff) akışkan

T_{ab} enerji-momentum tansörünün fizikselliğini enerji koşulları denilen bir takım eşitsizlikler belirler. Bunlar;

$$T_{ab} u^a u^b \geq 0 \quad (\text{baskın enerji koşulu}) \quad (3.102)$$

$$(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T) u^a u^b \geq 0 \quad (\text{kuvvetli enerji koşulu}) \quad (3.103)$$

dir. Birinci bölümde (2.1) ile gösterilen EAD,

$$R^a{}_a = R = -T + 4\Lambda \quad (3.104)$$

olduğu göz önüne alınarak

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T + \Lambda g_{ab} \quad (3.105)$$

biçiminde yazılabilirler. Mükemmel bir akışkan için

$$T = -\mu + 3p \quad (3.106)$$

olacağından (3.105) denklemi

$$R_{ab} = (\mu + 3p) u_a u_b + \frac{1}{2} (\mu - p + 2\Lambda) g_{ab} \quad (3.107)$$

olur.

Biz bu çalışmamızda, akışkanın u_a 4-lü hız vektörünün, homojenlik yüzeylerinin n doğrultusuyla çakıştığını varsayacağız (dik akış). Tetradın e_0 zamansal taban vektörü normal olarak alınır, bu varsayım

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} = e_0 \quad (3.108)$$

demektir ($\mathbf{u} \neq \mathbf{n}$ olmasına eğik akış denir). Bu takdirde \mathbf{u} 'nun bileşenleri

$$u^0 = 1 \Leftrightarrow u_0 = -1$$

$$u^\alpha=0 \Leftrightarrow u_\alpha=0$$

olur. Dolayısıyla (3.105) denklemi bileşenlerinin açık yazılışıyla

$$R_{00}=\frac{1}{2}(\mu+3p)-\Lambda \quad (3.109a)$$

$$R_{\alpha 0}=0 \quad (3.110a)$$

$$R_{\alpha\alpha}=\frac{1}{2}(\mu-p)+\Lambda \quad (3.111a)$$

biçimini alır. Eğer bir de (3.100) varsayılırsa

$$R_{00}=\frac{1}{2}(3\gamma-2)\mu-\Lambda \quad (3.109b)$$

$$R_{\alpha 0}=0 \quad (3.110b)$$

$$R_{\alpha\alpha}=\frac{1}{2}(2-\gamma)\mu+\Lambda \quad (3.111b)$$

olur.

3.8.WALD'IN HESABI:

Bianchi kozmolojilerinin dinamik evrimlerini incelemek için kozmolojik sabitli Einstein denklemlerinde kuvvetli ve baskın enerji koşullarını kullanarak başlangıç değer bağ denklemleri (Friedmann denklemi) ve Raychaudhuri denklemi:

$$\left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) u^a u^b - \Lambda - T_{ab} u^a u^b = 0 \quad (3.112)$$

$$R_{ab} u^a u^b + \Lambda - \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) u^a u^b = 0 \quad (3.113)$$

şeklindedir. Burada u^a homojen hiperyüzele normal birim vektördür. Bu denklemler homojen hiperyüzeylerin üçlü-geometrisi ve bu yüzeylerin dış eğriliği θ_{ab} cinsinden

ifade edilebilir. Öncelikle kolaylık için genişleme parametresi θ_{ab} , θ izine ve σ_{ab} izsiz kısmına ayrılınsın.

$$\theta_{ab} = \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} \quad (3.114)$$

burada

$$\theta = \theta_{ab} h^{ab} \quad (3.115)$$

dir. h_{ab} uzaysal metrik olmak üzere

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad (3.116)$$

ve tersi h^{ab} dir. σ_{ab} homojen hiperyüzeyle dik zamansal jeodezik kongüransının kaymasıdır. Ancak T_{ab} bir akışkan formunda olsaydı, akışkan homojen hiperyüzeyle dik olarak hareket etmiyor ise, σ_{ab} ' nin akışkanın kayması olması zorunlu değildir. Üçlü geometri, σ_{ab} ve θ terimleri cinsinden (3.112) ve (3.113) denklemleri

$$\theta^2 = 3\Lambda + \frac{3}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab} - \frac{3}{2}({}^3R) + T_{ab}u^a u^b \quad (3.117)$$

$$\dot{\theta} = \Lambda - \frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - (T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)u^a u^b \quad (3.118)$$

burada 3R homojen hiperyüzeylerin skaler eğriliği ve $\dot{\theta}$, θ 'nin öz zamana göre türevidir. 3R skaler eğriliği $\gamma^\alpha_{\beta\lambda}$ komütasyon fonksiyonları terimleri cinsinden yazılabilir:

$${}^3R = -\gamma^\alpha_{\alpha\beta}\gamma^\lambda_{\lambda\beta} + \frac{1}{2}\gamma^\alpha_{\beta\lambda}\gamma^\lambda_{\beta\beta} - \frac{1}{4}\gamma_{\alpha\beta\lambda}\gamma^{\alpha\beta\lambda} \quad (3.119)$$

Burada indisler h_{ab} ve h^{ab} ile indirilip kaldırılır. (3.81)'i Jacobi özdeşliklerine koyarak ve (3.84) eşitliğini kullanarak 3R skaler eğriliği için

$${}^{(3)}R = -\frac{3}{2} a_\beta a^\beta - \frac{1}{2} (n_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} n^\alpha_\alpha n^\beta_\beta) \quad (3.120)$$

bulunur. (3.120) ifadesinden derhal 3R ' nin pozitif olması için bir gerek koşul olarak $n_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} < n^\alpha_\alpha n^\beta_\beta / 2$ olması gerektiği görülür. Ancak bu koşul $n_{\alpha\beta}$ ' nin pozitif (veya negatif) tanımlı olmasıyla mümkündür. Bu durumda ise (3.84)'ten $a_\beta = 0$ olmalıdır ve bu koşullar Bianchi modellerinden sadece IX-tipe karşılık gelir. Dolayısıyla IX-tip hariç bütün Bianchi modelleri için

$${}^3R \leq 0 \quad (3.121)$$

dır. Şimdi IX-tip hariç diğer tipleri göz önüne alalım. (3.102),(3.103) koşulları ve (3.121) eşitsizliği kullanılarak (3.117) ve (3.118) denklemlerinde $\theta = 3H$ ilişkisinden Hubble parametresi için

$$\dot{H} \leq \frac{\Lambda}{3} - H^2 \leq 0 \quad (3.122)$$

elde edilir. Buna göre $H^2 \geq \Lambda/3$ olacağından H hiçbir zaman sıfırdan geçemeyecektir. Dolayısıyla keyfi seçilmiş herhangi bir $t = 0$ başlangıç anında $H > 0$ olduğundan, bütün zamanlar için

$$H \geq (\Lambda/3)^{1/2} \quad (3.123)$$

ile belirlenecek olan H , daima sıfırdan büyük olacak ve evren sonsuza kadar genişleyecektir. Ayrıca (3.122) eşitsizliğinin sol tarafının integrasyonu sonucunda

$$H \leq \frac{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}{\tanh \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \tau} \quad (3.124)$$

elde edilir. Sonuçta H 'in $(\Lambda/3)^{1/2}$ alt limitiyle, $(\Lambda/3)^{1/2}$ değerine eksponansiyel olarak yaklaşan (3.124) üst limiti arasına sıkıştırılmış olduğu görülür. Dolayısıyla H Hubble parametresinin oranının $(\Lambda/3)^{1/2}$ değerine hızlıca yaklaştığı bulunur. (3.117) denkleminde dönülerek (3.124) üst limitinden

$$\sigma^{ab}\sigma_{ab} \leq 6H^2 - 2\Lambda \leq \frac{2\Lambda}{\sinh^2 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\tau} \quad (3.125)$$

elde edilir. Buradan homojen hiperyüzeylerin kayma parametresinin sıfıra gittiği görülür. Benzer şekilde (3.117) ve (3.125) ifadeleri, ayrıca, madde enerji yoğunluğu için bir sınır verir:

$$T_{ab}u^a u^b \leq \frac{\Lambda}{\sinh^2 \left(\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\tau \right)} \quad (3.126)$$

Üstelik baskın enerji koşulu, $T_{ab}u^a u^b$ nin, u^a nin zamansal vektör olarak alındığı tabanda T_{ab} ' nin herhangi bir dik sistem bileşenleri kadar büyük olmasını sağlar. Bu yüzden bütün T_{ab} bileşenleri hızlıca sıfıra yaklaşır. Sonuçta $\sigma^{ab} \rightarrow 0$ iken $H \rightarrow (\Lambda/3)^{1/2}$ olması geç zamanlarda uzaysal metriğin zamana bağlılığının

$$h_{ab}(\tau) = e^{2(\tau-\tau_0)/\alpha} h_{ab}(\tau_0) \quad (3.127)$$

şeklinde yazılabildiğini sağlar. Ancak metrikte yapılan böyle bir ayarlama altında ${}^{(3)}R$ uzaysal eğriliği sıfırdan uzaklaşır ve başlangıçta genişleyen IX haricindeki tüm modellerin, $\tau \gg (3/\Lambda)^{1/2}$ için, eşyönlü olarak $H=(\Lambda/3)^{1/2}$ sabit oranında genişleyen neredeyse düz uzaysal kısımlara sahip madde içermeyen bir evren olarak görünecekleri sonucuna varılmış olur. Yani evren $\tau \gg (3/\Lambda)^{1/2}$ zamanları için yerel olarak de Sitter uzay-zamanından ayırt edilemez görünecektir. Ancak, evrenin global özelliklerinin de Sitter' inkilere yaklaşmasının gerekmediği vurgulanmalıdır.

IX-tip Bianchi modeli durumunda ${}^{(3)}R$ skaler eğriliği pozitif olabilir. Fakat IX-tip model için benzer davranışın, 3-lü skaler eğrilik için bir üst limit ayarlanarak elde edilecek olan, yeteri kadar büyük bir kozmolojik sabit durumunda mümkün olabileceği yukarıdaki işlemlerle gösterilebilir.

4.BULGULAR:

4.1.GENEL BIANCHI-TİP METRİK İÇİN ALAN DENKLEMLERİNİN HESABI:

Tüm Bianchi-tip modellerin sahip olduğu (3.87) ile verilen

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{\alpha\beta}(t)\omega^\alpha\omega^\beta \quad (4.1)$$

metrik ifadesinden hareket ediyoruz. Burada $dt=\omega^0$ ve ω^α 'lar da zamana bağlı olmayan taban 1-formlarıdır. Bunların bir koordinat tabanındaki ifadeleri her bir Bianchi-tip model için Tablo 3.2'de verilmişti. Bunları kullanarak alan denklemlerini her tip için ayrı ayrı hesaplamak yerine, tüm tipleri kapsayacak biçimde genel bir hesap yapacağız. Bu iş için ω^γ taban 1-formlarının dış türevini kısıtlayarak (4.1) metriğine Bianchi-tip olma koşulu getiren

$$d\omega^\gamma = \frac{1}{2}C_{\alpha\beta}^\gamma\omega^\alpha \wedge \omega^\beta \quad (4.2)$$

bağıntısının bilinmesi yeterli olacaktır. (3.81) de göz önünde bulundurulursa, buradan sonuçları, Bianchi-tipleri tanımlayan $\hat{n}_{\alpha\beta}$ ve \hat{a}_1 'ler cinsinden ifade etmek mümkün olacaktır. Bu hesap daha önce gerçekleştirilmemiş olmamakla birlikte, literatürde genel ve sistematik olanına ve de ayrıntısına rastlayamadık. O bakımdan aşağıda kendi çıkarımımızı sunuyoruz.

(4.1) metriğinin

$$ds^2 = \eta_{ab}\sigma^a\sigma^b = -\sigma^0\sigma^0 + \eta_{\alpha\beta}\sigma^\alpha\sigma^\beta \quad (4.3)$$

biçiminde yazılabileceği bir $\{\sigma^a\} \equiv \{\sigma^0, \sigma^\alpha\}$ dik (ortonormal) 1-form tabanı seçelim.

Bunun için

$$\sigma^0 = \omega^0 = dt \quad (4.4a)$$

$$\sigma^\gamma = l^\gamma_\lambda(t) \omega^\lambda \Leftrightarrow \omega^\gamma = \tilde{l}^\gamma_\lambda(t) \sigma^\lambda \quad (4.4b)$$

biçiminde 1-form dönüşümlerini göz önüne alıyoruz. Burada $\tilde{l}^\gamma_\lambda(t)$ matrisi $l^\gamma_\lambda(t)$ matrisinin tersi olup

$$l^\gamma_\theta \tilde{l}^\theta_\lambda = \delta^\gamma_\lambda \quad (4.5)$$

bağıntısıyla tanımlanmıştır. (4.3) koşulu için l^γ_λ matrisleri

$$\gamma_{\alpha\beta} \tilde{l}^\alpha_\epsilon \tilde{l}^\beta_\delta = \eta_{\epsilon\delta} \Leftrightarrow \eta_{\epsilon\delta} l^\epsilon_\alpha l^\delta_\beta = \gamma_{\alpha\beta} \quad (4.6)$$

denklemlerini sağlamalıdır. Bu son bağıntı $(l_{\alpha\beta})$ matrisi ile transpozisinin $(\gamma_{\alpha\beta})$ matrisine eşit olduğu anlamına gelmektedir. (4.4) dönüşümü yeni $\{\sigma^a\}$ taban 1-formlarının zamanın fonksiyonu olduklarını söylemektedir. $\{\sigma^a\} \equiv \{\sigma^0, \sigma^\alpha\}$ tabanının düal tabanı $\{e_a\} \equiv \{e_0, e_\alpha\}$ ile gösterilsin. Yani, e_a 'lar zamana bağlı ve

$$\sigma^a(e_b) = \delta^a_b \quad (4.7)$$

bağıntısını sağlayan dört adet dik taban vektörü olsun. Bu düal tabanlar §3.4 de gösterildiği gibi

$$[e_a, e_b] = \gamma^c_{ab}(t) e_c \quad (4.8)$$

$$d\sigma^c = -\frac{1}{2} \gamma^c_{ab} \sigma^a \wedge \sigma^b \quad (4.9)$$

bağıntılarına uyarlar. γ^a_{bc} 'leri l^γ_λ ve C^a_{bc} 'ler cinsinden ifade etmek istiyoruz. (4.4)'den σ^a 'ların $d\sigma^a$ dış türevleri hesaplanırsa, (4.2) ifadesi de kullanılarak

$$d\sigma^0 = d\omega^0 = d(dt) = 0 \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned}
d\sigma^\gamma &= dl^\gamma{}_\lambda \wedge \omega^\lambda + (-1)^0 l^\gamma{}_\lambda \wedge d\omega^\lambda \\
&= \frac{dl^\gamma{}_\lambda}{dt} dt \wedge \omega^\lambda + l^\gamma{}_\lambda \frac{1}{2} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \\
&= i^\gamma{}_\lambda \sigma^0 \wedge \tilde{l}^\lambda{}_\epsilon \sigma^\epsilon + \frac{1}{2} l^\gamma{}_\lambda C^\lambda{}_{\alpha\beta} \tilde{l}^\alpha{}_\delta \tilde{l}^\beta{}_\epsilon \sigma^\delta \wedge \sigma^\epsilon \\
&= i^\gamma{}_\lambda \tilde{l}^\lambda{}_\epsilon \sigma^0 \wedge \sigma^\epsilon + \frac{1}{2} l^\gamma{}_\lambda C^\lambda{}_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (\tilde{l}^\alpha{}_\delta \tilde{l}^\beta{}_\epsilon - \tilde{l}^\alpha{}_\epsilon \tilde{l}^\beta{}_\delta) \sigma^\delta \wedge \sigma^\epsilon \\
&= i^\gamma{}_\lambda \tilde{l}^\lambda{}_\epsilon \sigma^0 \wedge \sigma^\epsilon + \frac{1}{4} l^\gamma{}_\lambda C^\lambda{}_{\alpha\beta} (\tilde{l}^\alpha{}_\delta \tilde{l}^\beta{}_\epsilon - \tilde{l}^\alpha{}_\epsilon \tilde{l}^\beta{}_\delta) \sigma^\delta \wedge \sigma^\epsilon
\end{aligned} \tag{4.10b}$$

bulunur. Bu ifadeler (4.9)'un açık yazılışlarıyla karşılaştırılırsa

$$\gamma^0{}_{ab} = 0, \quad \gamma^\gamma{}_{0\epsilon} = -i^\gamma{}_\lambda \tilde{l}^\lambda{}_\epsilon \tag{4.11a}$$

$$\gamma^\gamma{}_{\delta\epsilon} = -\frac{1}{2} l^\gamma{}_\lambda C^\lambda{}_{\alpha\beta} (\tilde{l}^\alpha{}_\delta \tilde{l}^\beta{}_\epsilon - \tilde{l}^\alpha{}_\epsilon \tilde{l}^\beta{}_\delta) \tag{4.11b}$$

diğerleri = 0

elde edilir, ya da son ifâdede $C^\lambda{}_{\alpha\beta}$ 'nin antisimetri özelliği kullanılırsa

$$\gamma^\gamma{}_{\delta\epsilon} = -l^\gamma{}_\lambda C^\lambda{}_{\alpha\beta} \tilde{l}^\alpha{}_\delta \tilde{l}^\beta{}_\epsilon \tag{4.11c}$$

olur. Bunlardan hareketle, özel olarak

$$\gamma^\gamma{}_{0\gamma} = -i^\gamma{}_\lambda \tilde{l}^\lambda{}_\gamma \tag{4.11d}$$

$$\gamma^\gamma{}_{\delta\gamma} = -C^\gamma{}_{\lambda\gamma} \tilde{l}^\lambda{}_\delta \tag{4.11e}$$

bağıntıları yazılabilir.

Şimdi, (3.68) ile verilen Ricci Tansörü'nü $\gamma^a{}_{bc}$ 'ler cinsinden ifade etmek istiyoruz. (3.77)'nin

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} \left(\gamma^a{}_{bc} + \eta^{ag} \eta_{bf} \gamma^f{}_{gc} - \eta^{ag} \eta_{cf} \gamma^f{}_{bg} \right) \quad (4.12)$$

$$\Gamma^a{}_{ac} = \gamma^a{}_{ac} \quad (4.13)$$

biçimine yazılabilecek ifadeleri (3.68)'e taşınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} R_{ab} = & \frac{1}{2} \{ \eta_{af} \dot{\gamma}^f{}_{b0} + \eta_{bf} \dot{\gamma}^f{}_{a0} - 2\delta^0{}_b \dot{\gamma}^c{}_{ca} - \gamma^d{}_{ab} \gamma^c{}_{cd} - \gamma^d{}_{ac} \gamma^c{}_{bd} - \eta^{dg} \eta_{af} \gamma^f{}_{bg} \gamma^c{}_{cd} \\ & - \eta^{dg} \eta_{bf} \gamma^f{}_{ag} \gamma^c{}_{cd} - \eta^{dg} \eta_{cf} \gamma^f{}_{ag} \gamma^c{}_{bd} \} + \frac{1}{4} \eta_{af} \eta_{bh} \eta^{gc} \eta^{de} \gamma^f{}_{gd} \gamma^h{}_{ce} \end{aligned} \quad (4.14)$$

bulunur. Bu ifadede dördüncü terimdeki $\gamma^d{}_{ab}$ antisimetriden dolayı R_{ab} 'nin simetrik olma özelliğini maskeleymektedir. Bu terimden kurtulmak için yukarıdaki ifadede $a \rightarrow b \rightarrow a$ yazıp bulunanlar taraf tarafa toplanırsa sonuçta R_{ab} 'nin simetrisini yansıtan şu ifade bulunur:

$$\begin{aligned} R_{ab} = & \frac{1}{2} \{ \delta^0{}_a \dot{\gamma}^c{}_{bc} + \delta^0{}_b \dot{\gamma}^c{}_{ac} + \eta_{af} \dot{\gamma}^f{}_{b0} + \eta_{bf} \dot{\gamma}^f{}_{a0} - \gamma^d{}_{ac} \gamma^c{}_{bd} - \eta^{dg} \eta_{af} \gamma^f{}_{bg} \gamma^c{}_{cd} \\ & - \eta^{dg} \eta_{bf} \gamma^f{}_{ag} \gamma^c{}_{cd} - \eta^{dg} \eta_{cf} \gamma^f{}_{ag} \gamma^c{}_{bd} \} + \frac{1}{4} \eta_{af} \eta_{bh} \eta^{gc} \eta^{de} \gamma^f{}_{gd} \gamma^h{}_{ce} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Bileşenleri açıkça yazarak,

$$R_{00} = -\dot{\gamma}^\epsilon{}_{\epsilon 0} - \frac{1}{2} \left(\gamma^\delta{}_{\epsilon 0} \gamma^\epsilon{}_{\delta 0} + \eta^{\gamma\theta} \eta_{\delta\epsilon} \gamma^\delta{}_{\gamma 0} \gamma^\epsilon{}_{\theta 0} \right) \quad (4.16)$$

$$R_{\alpha 0} = -\frac{1}{2} \left(\gamma^\delta{}_{\alpha 0} \gamma^\gamma{}_{\delta\gamma} + \gamma^\delta{}_{\alpha\gamma} \gamma^\gamma{}_{0\delta} + \eta^{\delta\epsilon} \eta_{\alpha\theta} \gamma^\theta{}_{0\delta} \gamma^\gamma{}_{\gamma\epsilon} + \eta^{\delta\epsilon} \eta_{\gamma\theta} \gamma^\theta{}_{\alpha\delta} \gamma^\gamma{}_{0\epsilon} \right) \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \{ \dot{\gamma}^\alpha{}_{\beta 0} + \dot{\gamma}^\beta{}_{\alpha 0} - \gamma^\delta{}_{\alpha\theta} \gamma^\theta{}_{\beta\delta} + \gamma^\alpha{}_{\beta 0} \gamma^\theta{}_{\theta 0} + \gamma^\beta{}_{\alpha 0} \gamma^\theta{}_{\theta 0} - \eta^{\delta\epsilon} \gamma^\alpha{}_{\beta\epsilon} \gamma^\theta{}_{\theta\delta} - \eta^{\delta\epsilon} \gamma^\beta{}_{\alpha\epsilon} \gamma^\theta{}_{\theta\delta} \\ & + \eta_{\gamma\theta} \gamma^\gamma{}_{\alpha 0} \gamma^\theta{}_{\beta 0} - \eta^{\delta\epsilon} \eta_{\gamma\theta} \gamma^\theta{}_{\alpha\epsilon} \gamma^\gamma{}_{\beta\delta} - \eta^{\delta\epsilon} \gamma^\alpha{}_{0\delta} \gamma^\beta{}_{0\epsilon} \} + \frac{1}{4} \eta^{\phi\eta} \eta^{\delta\epsilon} \gamma^\alpha{}_{\phi\delta} \gamma^\beta{}_{\eta\epsilon} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ayrıca bu son ifadede $\alpha=\beta$ yapılırsa köşegen terimler için

$$R_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \{ 2\dot{\gamma}^{\alpha}_{\alpha 0} - \gamma^{\delta}_{\alpha\theta} \gamma^{\theta}_{\alpha\delta} + 2\gamma^{\alpha}_{\alpha 0} \gamma^{\theta}_{\theta 0} - 2\eta^{\delta\epsilon} \gamma^{\alpha}_{\alpha\epsilon} \gamma^{\theta}_{\theta\delta} + \eta_{\gamma\theta} \gamma^{\gamma}_{\alpha 0} \gamma^{\theta}_{\alpha 0} - \eta^{\delta\epsilon} \eta_{\gamma\theta} \gamma^{\theta}_{\alpha\epsilon} \gamma^{\gamma}_{\alpha\delta} - \eta^{\delta\epsilon} \gamma^{\alpha}_{0\delta} \gamma^{\alpha}_{0\epsilon} \} + \frac{1}{4} \eta^{\phi\varphi} \eta^{\delta\epsilon} \gamma^{\alpha}_{\phi\delta} \gamma^{\alpha}_{\varphi\epsilon} \quad (4.19)$$

elde edilir (α üzerinden toplam yok).

Öte yandan 3-boyutlu uzayın Riemann eğrilik tansörü olan

$${}^3R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\epsilon}_{\delta\beta} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\epsilon} - \Gamma^{\epsilon}_{\gamma\beta} \Gamma^{\alpha}_{\delta\epsilon} - \Gamma^{\alpha}_{\epsilon\beta} \Gamma^{\epsilon}_{\gamma\delta} \quad (4.20)$$

ifadesine (4.12)'den hareketle yazılacak

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \eta^{\alpha\epsilon} \eta_{\beta\theta} \gamma^{\theta}_{\epsilon\gamma} - \eta^{\alpha\epsilon} \eta_{\gamma\theta} \gamma^{\theta}_{\beta\epsilon} \right) \quad (4.21)$$

ifadeleri yerleştirildikten sonra $\alpha=\gamma$ büzülmesi yapılırsa 3-boyutlu uzayın ${}^3R_{\beta\delta} \equiv {}^3R^{\alpha}_{\beta\alpha\delta}$ 3-lü Ricci tansörü elde edilir. Yeniden adlandırılmış indislerle bu:

$${}^3R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \{ \gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} \gamma^{\gamma}_{\beta\delta} + \eta^{\delta\epsilon} \eta_{\alpha\gamma} \gamma^{\gamma}_{\beta\delta} \gamma^{\theta}_{\theta\epsilon} + \eta^{\delta\epsilon} \eta_{\beta\gamma} \gamma^{\gamma}_{\alpha\delta} \gamma^{\theta}_{\theta\epsilon} + \eta^{\delta\epsilon} \eta_{\gamma\theta} \gamma^{\gamma}_{\alpha\delta} \gamma^{\theta}_{\beta\epsilon} \} + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\theta} \eta^{\delta\epsilon} \eta^{\phi\varphi} \gamma^{\gamma}_{\phi\delta} \gamma^{\theta}_{\varphi\epsilon} \quad (4.22)$$

dır. 3-boyutlu uzayın 3-lü skaler eğriliği için de

$${}^3R = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha}_{\alpha} = -\frac{1}{2} \{ \eta^{\alpha\beta} \gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} \gamma^{\gamma}_{\beta\delta} + 2\eta^{\delta\epsilon} \gamma^{\gamma}_{\gamma\delta} \gamma^{\theta}_{\theta\epsilon} + \frac{1}{2} \eta^{\delta\epsilon} \eta_{\gamma\theta} \eta^{\alpha\beta} \gamma^{\gamma}_{\alpha\delta} \gamma^{\theta}_{\beta\epsilon} \} \quad (4.23)$$

bulunur.

(3.51)'deki büzülmüş Jacobi özdeşlikleri ise $\gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 'lar için

$$\dot{\gamma}^{\gamma}_{\alpha\gamma} = -\gamma^{\delta}_{\alpha 0}\gamma^{\gamma}_{\delta\gamma} \quad (4.24)$$

$$\gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\gamma^{\gamma}_{\delta\gamma} = 0 \quad (4.25)$$

denklemlerini verir.

Ricci tansörünün (4.16-18)'deki ifadeleri (3.109-111)'e taşındığında tüm Bianchi-tipler için alan denklemleri γ^c_{ab} 'ler ve dolayısıyla da yapı sâbitleri ve $l'_{\lambda}(t)$ matrisinin bileşenleri cinsinden tesis edilmiş olur.

4.2.KÖŞEGEN BIANCHI-TİP METRİK İÇİN ALAN DENKLEMLERİ:

(4.11) bağıntılarından anlaşılacağı üzere, γ^c_{ab} 'lerin, yapı sâbitleri ve $l'_{\lambda}(t)$ matrisinin bileşenleri cinsinden ifadeleri bir hayli karışıktır. Mamafih, $l'_{\lambda}(t)$ matrisini özel seçmekle γ^c_{ab} ifadelerini ve dolayısıyla da alan denklemlerini nispeten basit bir şekle indirgemek mümkündür. Sıklıkla başvurulan bir seçim $l'_{\lambda}(t)$ 'yi, R_{α} 'lar ($\alpha=1,2,3$) üç keyfi fonksiyon olmak üzere

$$l^{\alpha}_{\beta}(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & R_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & R_3(t) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

biçiminde köşegensel almaktır. Bu takdirde (4.1) metriği

$$ds^2 = -dt^2 + R_1^2(t)(\omega^1)^2 + R_2^2(t)(\omega^2)^2 + R_3^2(t)(\omega^3)^2 \quad (4.27)$$

biçiminde köşegensel şekle indirgenir. Metriği böyle gösterilebilen modellere köşegen Bianchi modeller denir. Ancak her Bianchi-tip modeli böyle yazmak mümkün değildir. Tetrad eksenlerinin dönmesi nedeniyle köşegen dışı bileşenlere de gerek vardır. Bununla beraber tüm A sınıfı modeller ve B sınıfından V modeli köşegen alınabilir.

O halde, bu köşegenlik özelliğinden hareketle, alan denklemlerinin ne kadar sadeleştiğine bakalım.

Tablo 3.1 ve Tablo 3.3'ün karşılaştırılmasından yapı sâbitlerinin

$$\begin{aligned} C^{1}_{23} &= \hat{n}_1, C^{2}_{31} = \hat{n}_2, C^{3}_{12} = \hat{n}_3 \\ C^{2}_{12} &= \hat{a}_1, C^{3}_{13} = \hat{a}_1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

biçiminde alınabileceği görülmektedir. (4.26) ve (4.28), (4.11) de kullanılırsa

$$H_\alpha = \frac{\dot{R}_\alpha}{R_\alpha} \quad (4.29)$$

tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma^{1}_{10} &= H_1 & \gamma^{2}_{20} &= H_2 & \gamma^{3}_{30} &= H_3 \\ \gamma^{2}_{12} &= -\frac{\hat{a}_1}{R_1} & \gamma^{3}_{13} &= -\frac{\hat{a}_1}{R_1} \\ \gamma^{1}_{23} &= -\frac{R_1^2}{R_1 R_2 R_3} \hat{n}_1 & \gamma^{2}_{31} &= -\frac{R_2^2}{R_1 R_2 R_3} \hat{n}_2 & \gamma^{3}_{12} &= -\frac{R_3^2}{R_1 R_2 R_3} \hat{n}_3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

bulunur. Bunlar (4.16)-(4.18)'e taşınırsa

$$R_{00} = -(\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3) - (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) \quad (4.31)$$

$$R_{01} = -\frac{\hat{a}_1}{R_1} (2H_1 - H_2 - H_3) \quad (4.32)$$

$$R_{11} = \dot{H}_1 + H_1(H_1 + H_2 + H_3) - \frac{2\hat{a}_1^2}{R_1^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(R_1 R_2 R_3)^2} \left\{ (\hat{n}_2 R_2^2 - \hat{n}_3 R_3^2)^2 - (\hat{n}_1 R_1^2)^2 \right\}$$

$$R_{22} = \dot{H}_2 + H_2(H_1 + H_2 + H_3) - \frac{2\hat{a}_1^2}{R_1^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(R_1 R_2 R_3)^2} \left\{ (\hat{n}_3 R_3^2 - \hat{n}_1 R_1^2)^2 - (\hat{n}_2 R_2^2)^2 \right\}$$

$$R_{33} = \dot{H}_3 + H_3(H_1 + H_2 + H_3) - \frac{2\hat{a}_1^2}{R_1^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(R_1 R_2 R_3)^2} \left\{ (\hat{n}_1 R_1^2 - \hat{n}_2 R_2^2)^2 - (\hat{n}_3 R_3^2)^2 \right\} \quad (4.33)$$

ifadeleri elde edilir. (4.23) den 3-lü skaler eğrilik için ve

$${}^4R = \eta^{ab} R_{ab} \equiv -R^0_0 + R^\alpha_\alpha \quad (4.34)$$

tanımından 4-lü skaler eğrilik için sırasıyla

$$\begin{aligned} {}^3R &= -\frac{6\hat{a}_1^2}{R_1^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(R_1 R_2 R_3)^2} \left\{ \hat{n}_1^2 R_1^4 + \hat{n}_2^2 R_2^4 + \hat{n}_3^2 R_3^4 \right\} \\ &+ \frac{1}{(R_1 R_2 R_3)^2} \left\{ \hat{n}_1 \hat{n}_2 R_1^2 R_2^2 + \hat{n}_1 \hat{n}_3 R_1^2 R_3^2 + \hat{n}_2 \hat{n}_3 R_2^2 R_3^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$${}^4R = 2(\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3) + (H_1 + H_2 + H_3)^2 + (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) + {}^3R \quad (4.36)$$

bulunur.

R_α 'lara doğrultusal ölçek çarpanları denir. Bunlara, evrenin farklı doğrultulardaki "yarıçapları" gözüyle bakılabilir. $R_1 \neq R_2 \neq R_3$ olması metriğin eşyönsüz olduğunu belirtir. Herhangi ikisinin mesela $R_1 \neq R_2 = R_3$ alınması kısmi bir eşyönlülüğe işaret eder. Bu özelliği gösteren modellere Yerel Dönmesel Simetrik (YDS) modeller denir. $R_1 = R_2 = R_3$ olması durumu ise eşyönlü Robertson-Walker haline karşılık düşer. (4.29) ile tanımlanan H_α 'lara doğrultusal Hubble parametreleri denir. Eşyönlü haldeki Hubble parametresinin, eşyönsüz hâle genellemesini oluştururlar. Bunlardan hareketle

$$H = \frac{1}{3} (H_1 + H_2 + H_3) \quad (4.37)$$

İle ortalama Hubble parametresi tanımlanır. Evren genişleyen bir görünüm gösterdiğinden $H > 0$ varsaymak gerekmektedir. Genişlemenin ivmesini

$$q = \frac{d}{dt}(H^{-1}) - 1 \quad (4.38)$$

biçiminde tanımlanan q yavaşlama parametresi belirler. Buna göre $q > 0$ yavaşlayan $q < 0$ hali de ivmelenen (şişen) bir evren hâline karşılık düşer. Yavaşlama parametresi q boyutsuz olup, değişim aralığı $-1 \leq q \leq 2$ dir.

4.3.ALAN DENKLEMLERİNİN İNTEGRASYONU:

(3.109-111) denklemlerine (4.31-33) ifadeleri yerleştirilirse (4.37)'yi de kullanarak dik akışlı mükemmel akışkan için alan denklemleri,

$$-3\dot{H} - (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) = \frac{1}{2}(\mu + 3p) - \Lambda \quad (4.39)$$

$$\frac{3\hat{a}_1}{R_1}(H_1 - H) = 0 \quad (4.40)$$

$$\dot{H}_1 + 3HH_1 - \frac{2\hat{a}_1^2}{R_1^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(R_1 R_2 R_3)^2} \left\{ (\hat{n}_2 R_2^2 - \hat{n}_3 R_3^2)^2 - (\hat{n}_1 R_1^2)^2 \right\} = \frac{1}{2}(\mu - p) + \Lambda$$

$$\dot{H}_2 + 3HH_2 - \frac{2\hat{a}_1^2}{R_1^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(R_1 R_2 R_3)^2} \left\{ (\hat{n}_3 R_3^2 - \hat{n}_1 R_1^2)^2 - (\hat{n}_2 R_2^2)^2 \right\} = \frac{1}{2}(\mu - p) + \Lambda$$

$$\dot{H}_3 + 3HH_3 - \frac{2\hat{a}_1^2}{R_1^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(R_1 R_2 R_3)^2} \left\{ (\hat{n}_1 R_1^2 - \hat{n}_2 R_2^2)^2 - (\hat{n}_3 R_3^2)^2 \right\} = \frac{1}{2}(\mu - p) + \Lambda \quad (4.41)$$

olur. Bunların integrasyonu için Harko, ve diğerlerinin [21] “zarevren kozmolojisi”nde kullandığı yöntemi izleyeceğiz. Harko ve diğerleri , kozmolojik büyüklükleri, tanımı aşağıda verilecek bir V hacim parametresi cinsinden ifade edip Bianchi I ve V modellerini ele almaktadırlar. Biz, aşağıda köşegenleştirilebilir tüm Bianchi modelleri için yöntemin sistematik bir genelleştirmesini ele alacağız. Önce, (3.95) korunum denkleminin bir mükemmel akışkan için

$$\dot{\mu} + 3(\mu + p)H = 0 \quad (4.42)$$

denklemine yol açtığına işaret edelim. Barotropik bir $p=p(\mu)$ hâl denklemi için bunun integrasyonu

$$\int \frac{d\mu}{\mu + p(\mu)} = -3 \int H dt + sâbit \quad (4.43)$$

olur. Eğer $H = H(t)$ biliniyor olsaydı, buradan $\mu = \mu(t)$ fonksiyonunu belirlemek mümkün olabilirdi; lineer hal denklemi için $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \mu_0 \exp\left[-3\gamma \int H(t) dt\right] \quad \mu_0 = \text{sabit} \quad (4.44)$$

çözümü elde edilebilirdi. Ancak, $H(t)$ 'yi bilmek, zaten $\mu(t)$ 'yi bilmek olduğundan (4.43) ya da (4.44) bir formel çözümden öte fazla bir anlam taşımamaktadır.

Yukarıdaki denklem sisteminin integrasyonuna girişmeden önce, sistemi yapı bakımından analiz etmek iyi olacaktır. (4.38 – 4.41) sistemine, $H_\alpha = \frac{\dot{R}_\alpha}{R_\alpha}$ tanımını göz önünde bulundurarak, $R_\alpha(t)$ 'lerin zamana göre ikinci mertebeden düz türevlerini içeren sistem gözüyle bakılabilir. Diğer bilinmeyenler $\mu(t)$ ve $p(t)$ fonksiyonlarıdır. Ancak, barotropik bir hal denklemi varsayılırsa yegane bilinmeyenler $\mu(t)$ ve 3 adet $R_\alpha(t)$ fonksiyonları olur. (4.42) korunum denklemi bağımsız olmayıp sistemin denklemlerinin bir sonucudur. Bunun çözümü olan (4.43) veya (4.44), $\mu(t)$ bilinmeyenini elemek için kullanılabilir. (4.40) denklemi, denklem sisteminin böyle (2. mertebeden türevli) bir yorumu ışığında B sınıfı ($\hat{a}_1 \neq 0$) modeller söz konusu olduğunda diğer denklemlerin bir ilk integralini oluşturur. A sınıfı ($\hat{a}_1 = 0$) modeller için ise özdeş olarak sıfırdır. Denklem sayısı; artık 3'e düşmüş olan bilinmeyenleri ($R_\alpha(t)$ 'ler) bulmak için yeterliyse de, denklemlerin nonlinear ve kuple olmaları ve hatta integrodiferansiyel olmaları nedeniyle çözüm tesis etmek son derece güçtür.

Öte yandan, ikinci bir yorum olarak yukarıdaki denklem sistemine, H_α 'ların birinci mertebeden türevlerini içeren sistem gözüyle bakarsak, bu taktirde (4.40) denklemi B sınıfı modeller için bir bağ denklemini görevi görür. Buradan, H_α 'lardan biri, diğer ikisi tarafından ifade edilse bile, yine, nonlineerlikten ve kuplelikten kurtulmak zor görünmektedir.

Bir başka çözüm yöntemi ise, değişken dönüşümü diye nitelendirebileceğimiz yöntemdir. Yöntem, R_α 'ların özel bir kombinasyonundan

$$V(t) = R_1(t)R_2(t)R_3(t) \quad (4.45)$$

biçiminde bir $V(t)$ değişkeni tanımlamaktır. $V(t)$ 'ye hacim denir. Gerçekten de bu, 3-boyutlu uzayın hacminin ifadesinden başka bir şey değildir. (4.45)'in zamana göre türetilmesinden

$$\frac{\dot{V}}{V} = H_1 + H_2 + H_3 \equiv 3H \quad (4.46)$$

yazılabileceği kolayca görülür.

$$V = V_0 \exp \int \frac{d\mu}{p + p(\mu)} \quad (4.47)$$

veya, lineer hâl denklemini için buradan ya da (4.44) den

$$\mu(V) = \mu_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} \quad (4.48)$$

elde edilir. Burada μ_0 ve V_0 birer sâbittirler. Bu sonuç bize, alan denklemlerinde bilinmeyenlerin V cinsinden bulunabileceğini telkin etmektedir.

Bu amaç doğrultusunda (4.41) denklemlerini tıkız bir biçimde

$$\dot{H}_\alpha + 3HH_\alpha = f_\alpha(R_1, R_2, R_3) + \frac{1}{2}(\mu - p) + \Lambda \quad (4.49)$$

biçiminde yazalım. Burada f_α fonksiyonları:

$$f_1(R_1, R_2, R_3) = \frac{2\hat{a}_1^2}{R_1^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(R_1 R_2 R_3)^2} \left\{ (\hat{n}_2 R_2^2 - \hat{n}_3 R_3^2)^2 - (\hat{n}_1 R_1^2)^2 \right\} \quad (4.50)$$

Ve f_2 ile f_3 de, son terimde indislerin dairesel permütasyonu yapılarak elde edilebilecek ifadelerdir. Bu konuda şuna işaret edelim: A sınıfı modeller için f_α 'ların şekli yukarıdaki gibidir. B sınıfı modeller için ise f_α 'lar biraz değişikdir [22,23,24]. V ve VI_h için

$$f_1(R_1, R_2, R_3) = -\frac{2(a_0^2 + q_0^2)}{R_1^2} + \frac{2b^2}{R_2^4 R_3^2} \quad (4.51a)$$

$$f_2(R_1, R_2, R_3) = -\frac{2(a_0^2 + a_0 q_0)}{R_1^2} - \frac{2b^2}{R_2^4 R_3^2} \quad (4.51b)$$

$$f_3(R_1, R_2, R_3) = -\frac{2(a_0^2 - a_0 q_0)}{R_1^2} \quad (4.51c)$$

biçimindedir. $q_0=b=0$ iken V tip $q_0, b \neq 0$ olduğunda VI_h ve $q_0 = -1$ alındığında ise III-tip modeller elde edilir.

Bianchi IV için

$$f_1(R_1, R_2, R_3) = \frac{2}{R_1^2} + \frac{R_3^2}{R_1^2 R_2^2} \quad (4.52a)$$

$$f_2(R_1, R_2, R_3) = \frac{2}{R_1^2} + \frac{R_3^2}{R_1^2 R_2^2} + \frac{R_3^2}{2R_2^2} \dot{f}^2 \quad (4.52b)$$

$$f_3(R_1, R_2, R_3) = \frac{2}{R_1^2} - \frac{R_3^2}{R_1^2 R_2^2} + \frac{R_3^2}{2R_2^2} \dot{f}^2 \quad (4.52c)$$

VII_h için ise Δ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere:

$$f_1(R_1, R_2, R_3) = 2\Delta^2 R_1^2 R_2^2 \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(2 \frac{\dot{R}_3}{R_3} - \frac{\dot{R}_1}{R_1} - \frac{\dot{R}_2}{R_2} \right) \quad (4.53a)$$

$$f_2(R_1, R_2, R_3) = -f_1(R_1, R_2, R_3) \quad (4.53b)$$

$$f_3(R_1, R_2, R_3) \equiv 0 \quad (4.53c)$$

Şimdi, (4.46) bağıntısını kullanarak, (4.49) u

$$\dot{H}_\alpha + 3HH_\alpha = f_\alpha(R_1, R_2, R_3) + \frac{1}{2}(\mu - p) + \Lambda \quad (4.54)$$

biçiminde yazabiliriz. $\alpha=1,2,3$ için söz konusu bu üç denklem taraf tarafa toplanırsa ve

$$f = (f_1 + f_2 + f_3)/3 \quad (4.55)$$

tanımlanırsa

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} (VH_\alpha) = f_\alpha(R_1, R_2, R_3) + \frac{1}{2}(\mu - p) + \Lambda \quad (4.56)$$

bulunur. (4.54) den (4.56) çıkarılırsa

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} [V(H_\alpha - H)] = f_\alpha - f = \Delta f_\alpha \quad (4.57)$$

bulunur.

$$H_\alpha - H = \Delta H_\alpha \quad (4.58)$$

ile Hubble parametresinin ortalamadan sapması gösterilirse, (4.57) denklemi

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} [V \Delta H_{\alpha}] = \Delta f_{\alpha} \quad (4.59)$$

biçimini alır. Şimdi

$$\frac{d}{dt} = \frac{dV}{dt} \frac{d}{dV} = \dot{V} \frac{d}{dV} = 3HV \frac{d}{dV} \quad (4.60)$$

Yazılabileceğini göz önünde bulundurarak, t 'ye göre türevleri V cinsinden ifade edelim. Bu takdirde, (4.59)

$$\frac{d}{dV} (V \Delta H_{\alpha}) = \frac{\Delta f_{\alpha}}{3H} \quad (4.61)$$

olur. Buradan da C_{α} integrasyon sabitlerini göstermek üzere

$$\Delta H_{\alpha} = \frac{1}{3V} \int \frac{\Delta f_{\alpha} [R_1(V), R_2(V), R_3(V)]}{H(V)} dV + \frac{C_{\alpha}}{V} \quad (4.62)$$

sonucuna varılır. Tutarlılık için

$$\sum_{\alpha} \Delta H_{\alpha} = 0 \text{ olduğundan } \sum_{\alpha} \Delta C_{\alpha} = 0 \text{ ve } \sum_{\alpha} \Delta f_{\alpha} = 0 \quad (4.63)$$

olmalıdır.

Öte yandan kolaylık için, (4.54) ve (4.56) denklemlerinin sağ taraflarına sırasıyla χ_{α} ve χ diyerek bunları

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} (V H_{\alpha}) = \chi_{\alpha} \quad (4.64)$$

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dt} (V H) = \chi \quad (4.65)$$

biçiminde yazalım. (4.60) kullanılırsa (4.65)

$$\frac{1}{3V} \frac{d\dot{V}}{dt} = \chi \quad (4.66)$$

olur. (4.60) kullanılırsa (4.66) dan

$$\dot{V} = \pm \left\{ \int 6V\chi(V)dV + K_1 \right\}^{1/2} \equiv \phi^{1/2} \quad (4.67)$$

ifadesine varılır. Burada K_1 integrasyon sabitidir. (4.67) yi tekrar düzenleyerek

$$t - t_0 = \int \frac{dV}{\phi^{1/2}} \quad (4.68)$$

elde edilir. Böylelikle hacmin zamanla değişimi için bir bağıntı bulunmuş olur.

İlk olarak genişleme parametresi ve onunla ilişkili Hubble parametresinin hacme bağlı fonksiyonları, $\theta = 3H = \dot{V} / V$ olduğundan V cinsinden

$$\theta = \frac{\phi^{1/2}}{V} \quad (4.69)$$

$$H = \frac{\phi^{1/2}}{3V} \quad (4.70)$$

olarak elde edilir. (4.29) ve (4.46) dan hareketle (4.60) ve (4.70) ifadelerini kullanarak

$$R_\alpha = R_{\alpha 0} V^{1/3} \exp \left\{ \int \frac{1}{\phi^{1/2} V} \left(C_\alpha + \int \frac{\Delta f_\alpha}{\phi^{1/2}} V dV \right) dV \right\} \quad (4.71)$$

belirlenir. Buradaki $R_{\alpha 0}$ evrenin başlangıçtaki durumuna karşılık gelir ve $R_{10} R_{20} R_{30} = 1$ dir. Şimdi A ile ortalama eşyönsüzlük parametresini göstererek

$$A = \frac{1}{3} \sum_{\alpha} \left(\frac{\Delta H_{\alpha}}{H} \right)^2 \quad (4.72)$$

tanımından hareketle

$$A = \frac{1}{H^2 V^2} \left\{ \frac{1}{27} \sum_{\alpha} \left(\int \frac{\Delta f_{\alpha}}{H} dV \right)^2 + \frac{2}{9} \sum_{\alpha} C_{\alpha} \int \frac{\Delta f_{\alpha}}{H} dV + \frac{1}{3} \sum_{\alpha} C_{\alpha}^2 \right\} \quad (4.73)$$

elde edilir. Buradaki terimler

$$C^2 = \frac{1}{3} \sum_{\alpha} C_{\alpha}^2 \quad (4.74)$$

$$D^2 = \frac{1}{27} \sum_{\alpha} \left(\int \frac{\Delta f_{\alpha}}{H} dV \right)^2 \quad (4.75)$$

$$E = \frac{2}{9} \sum_{\alpha} C_{\alpha} \int \frac{\Delta f_{\alpha}}{H} dV \quad (4.76)$$

olarak adlandırılırsa eşyönsüzleşme parametresi kısaca

$$A(V) = \frac{C^2 + D^2 + E}{H^2 V^2} = \frac{9(C^2 + D^2 + E)}{\phi} \quad (4.77)$$

yazılabilir.

Akışkanın $\sigma^2 = (\sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta})/2$ kayma parametresi de

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} H_{\alpha}^2 - 3H^2 \right) \quad (4.78)$$

olduğundan (4.72) ifadesiyle tanımlı eşyönsüzlük parametresini kullanarak kayma parametresi

$$\sigma^2 = \frac{3}{2} H^2 A \quad (4.79)$$

olur ve o da V cinsinden

$$\sigma^2(V) = \frac{3}{2} \frac{C^2 + D^2 + E}{V^2} \quad (4.80)$$

biçiminde elde edilir. Öte yandan, yavaşlama parametresi q 'nun (4.38) ifadesinden hareketle

$$q = 2 - \frac{9V^2 \chi}{\phi} \quad (4.81)$$

bulunur.

Böylelikle kinematik değişkenler için hacmi bağlı genel denklemler elde edilmiş olur. (4.68) integralinin çözülmesi durumunda hacmin zamanla nasıl değiştiği bulunduğu yukarıdaki parametrelerin zamanla değişimleri incelenebilir. İntegralin çözümü her Bianchi-tip model için kolay değildir. Bir sonraki bölümde I ve V tip model için bu parametrelerin hacme bağlı ifadeleri çıkarılarak davranışları incelenecektir.

4.4. I VE V MODELLERİ İÇİN DENKLEMLERİN ANALİZİ:

Tezde Wald'ın pozitif kozmolojik sabit durumunda ve enerji-momentum tansörünün özel bir formuna ihtiyaç duymaksızın yaptığı analiz, bir önceki kısımda elde ettiğimiz alan denklemlerini kullanarak kozmolojik sabitin etkisini incelemek için pozitif, sıfır ve negatif olduğu durumlar için tekrar yapılmıştır.

(3.112-113) alan denklemlerinde sol tarafa(4.31) sağ tarafa (3.109a) yazılırsa

$$\left(R_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} R \right) + \Lambda - \frac{1}{2} (\mu + 3p) = 0 \quad (4.91)$$

$$R_{00} + \Lambda - \frac{1}{2}(\mu + 3p) = 0 \quad (4.92)$$

olur. Bianchi modelleri için daha önce hesapladığımız Ricci tansörünün R_{00} bileşeni

$$R_{00} = -(\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3) - (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) \quad (4.93)$$

ve buradan hareketle

$$R_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}R = \frac{1}{2}(H_1 + H_2 + H_3)^2 - \frac{1}{2}(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) + \frac{1}{2}{}^3R \quad (4.94)$$

bulunur. (4.93) ve (4.94) denklemlerinde (4.35),(4.37) ve (4.78)'deki 3-lü uzaysal eğrilik, Hubble parametresi ve kayma skaleri cinsinden yazınca çok iyi bilinen Friedmann ve Raychaudhuri denklemleri elde edilir:

$${}^3R = 2\Lambda + 2\sigma^2 - 6H^2 + 2\mu \quad (4.95)$$

$$\dot{H} = \frac{\Lambda}{3} - H^2 - \frac{2}{3}\sigma^2 - \frac{1}{6}(\mu + 3p) \quad (4.96)$$

(4.35)'de şapkalı parametrelerin

$$n_1 = \frac{R_1^2}{R_1 R_2 R_3} \hat{n}_1, \quad n_2 = \frac{R_2^2}{R_1 R_2 R_3} \hat{n}_2, \quad n_3 = \frac{R_3^2}{R_1 R_2 R_3} \hat{n}_3, \quad a_1 = \frac{\hat{a}_1}{R_1} \quad (4.97)$$

şeklindeki şapkasız karşılıkları yazılınca Ellis'in

$${}^3R = -6a_\alpha a^\alpha - \frac{1}{2}(2n_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - n^\alpha{}_\alpha n^\beta{}_\beta) \quad (4.98)$$

ifadesine varılır. Buna göre Tablo 3.1'e bakılarak 3-lü skaler eğriliğin IX hariç bütün modeller için negatif olduğu kolayca görülebilir. Bundan sonra (4.95) ve (4.96) dan

hareketle Wald'ın analizi $\Lambda=+\lambda^2, 0, -\lambda^2$ değerleri için yapıldığında Tablo 4.1'de gösterilmiş olan limitlere varılır.

Tablo 4.1: Kozmolojik sabitin $+, 0, -$ olması durumlarında asimptotik davranışlar.

$\Lambda=+\lambda^2$	$\frac{\lambda^2}{3} \leq H^2 \leq \frac{\lambda^2}{\tanh^2 \sqrt{\frac{\lambda^2}{3}t}}$	$\sigma^2 \leq \frac{\lambda^2}{\sinh^2 \sqrt{\frac{\lambda^2}{3}t}}$	$\mu \leq \frac{\lambda^2}{\sinh^2 \sqrt{\frac{\lambda^2}{3}t}}$
$\Lambda=0$	$0 \leq H^2 \leq \frac{1}{t^2}$	$\sigma^2 \leq \frac{3}{t^2}$	$\mu \leq \frac{3}{t^2}$
$\Lambda=-\lambda^2$	$-\frac{\lambda^2}{3} \leq H^2 \leq \frac{\lambda^2}{\tan^2 \sqrt{\frac{\lambda^2}{3}t}}$	$\sigma^2 \leq \frac{\lambda^2}{\sin^2 \sqrt{\frac{\lambda^2}{3}t}}$	$\mu \leq \frac{\lambda^2}{\sin^2 \sqrt{\frac{\lambda^2}{3}t}}$

Şimdi 4.3.bölümünde genel denklemlerini verdiğimiz kinematik değişkenlerinin I ve V tip Bianchi modelleri için hacme bağlı fonksiyonlarını yazalım.

Bianchi I-tip modelin alan denklemlerindeki f_α fonksiyonlarının belirlenmesi için Tablo 3.1'e bakıldığında

$$\hat{a}_1 = 0, \quad \hat{n}_1 = 0, \quad \hat{n}_2 = 0, \quad \hat{n}_3 = 0, \quad (4.99)$$

olduğu görülür. Buna göre (4.50) ifadesinden

$$f_\alpha=0 \Rightarrow f=0 \text{ ve } \Delta f_\alpha=0 \quad (4.100)$$

olur. (4.62) formülünden ΔH_α için

$$\Delta H_\alpha = \frac{C_\alpha}{V} \quad (4.101)$$

ilişkinine varılır. $\Delta f_a = 0$ olduğunu göz önünde bulundurup (4.65) ten χ

$$\chi = \frac{1}{2}(2-\gamma)\mu + \Lambda = \frac{1}{2}(2-\gamma)\mu_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} + \Lambda \quad (4.102)$$

olarak yazılır. ϕ fonksiyonu da

$$\phi = \int 6V\chi dV = 3\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 3\Lambda V^2 + K_1 \quad (4.103)$$

elde edilir. Şimdi hacmin zamana bağlı ifadesini veren integral

$$t - t_0 = \int \frac{dV}{\left(3\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 3\Lambda V^2 + K_1\right)^{1/2}} \quad (4.104)$$

haline gelir. ϕ 'nin bilinmesiyle artık diğer parametreler kolayca tesis edilebilir: Buradan analitik çözüme imkan veren γ değerleri için V 'nin ve bu parametrelerin ifadeleri Tablo 4.2-6'da gösterilmiştir.

$$\theta(V) = \left(3\mu_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} + 3\Lambda + \frac{K_1}{V^2}\right)^{1/2} \quad (4.105)$$

$$R_\alpha(V) = R_{\alpha 0} V^{1/3} \exp\left\{C_\alpha \int \frac{dV}{\left(3\mu_0 V_0^\gamma V^{4-\gamma} + 3\Lambda V^4 + K_1 V^2\right)^{1/2}}\right\} \quad (4.106)$$

$$A(V) = \frac{9C^2}{3\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 3\Lambda V^2 + K_1} \quad (4.107)$$

$$\sigma^2(V) = \frac{3C^2}{2V^2} \quad (4.108)$$

$$q(V) = 2 - \frac{9(2-\gamma)\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 18\Lambda V^2}{6\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 6\Lambda V^2 + 2K_1} \quad (4.109)$$

Yukarıdaki ifadelerde yer alan iki sabit K_1 ve C^2 arasında bir ilişki vardır. Bu bağıntı (4.39) ile verilen R_{00} denkleminde (4.101) ve (4.105) kullanılarak

$$C^2 = \frac{2}{9} K_1 \quad (4.110)$$

bulunur.

Benzer şekilde Bianchi V-tip için ifadeler aşağıdaki şekildedir.

$$t - t_0 = \int \frac{dV}{\left(9V^{4/3} + 3\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 3\Lambda V^2 + K_1\right)^{1/2}} \quad (4.111)$$

$$\theta(V) = \left(9V^{-2/3} + 3\mu_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} + 3\Lambda + \frac{K_1}{V^2}\right)^{1/2} \quad (4.112)$$

$$R_\alpha(V) = R_{\alpha 0} V^{1/3} \exp \left\{ C_\alpha \int \frac{dV}{\left(9V^{10/3} + 3\mu_0 V_0^\gamma V^{4-\gamma} + 3\Lambda V^4 + K_1 V^2\right)^{1/2}} \right\} \quad (4.113)$$

$$A(V) = \frac{9C^2}{9V^{4/3} + 3\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 3\Lambda V^2 + K_1} \quad (4.114)$$

$$\sigma^2(V) = \frac{3C^2}{2V^2} \quad (4.115)$$

$$q(V) = 2 - \frac{36V^{4/3} + 9(2-\gamma)\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 18\Lambda V^2}{18V^{4/3} + 6\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 6\Lambda V^2 + 2K_1} \quad (4.116)$$

Sâbitler arasındaki (4.110) ilişkisi Bianchi V model için de geçerlidir.

Tablo 3.1' de ayrıca bazı Bianchi-tip modellerin FLRW evrenlerinin genelleştirmesini oluşturduğu gösterilmişti. Buna göre I ve V tiplerinde $R_1=R_2=R_3$ alındığında sırasıyla $k=0$ 'lı ve $k=-1$ 'li eşyönlü FLRW evrenlerine geçilir. Bu modeller için söz konusu parametrelerin ifadeleri, yukarıda I ve V için gösterilen bağımtılardan elde edilebilir. (4.58)'de $R_1=R_2=R_3$ yazılmasıyla (4.58)'den $\Delta H_\alpha \equiv 0$ bulunur. Bunu kullanarak (4.101) eşitliği C_α sâbitlerinin, (4.74) ve (4.110) da K_1 'in sıfır olmasını gerektirir.

Şimdi (4.104-109) bağıntılarında $K_1=0$ yazıldığında $k=0$ 'lı FLRW modeli için

$$t - t_0 = \int \frac{dV}{\left(3\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 3\Lambda V^2\right)^{1/2}} \quad (4.117)$$

$$\theta(V) = \left(3\mu_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} + 3\Lambda\right)^{1/2} \quad (4.118)$$

$$R_\alpha(V) = R_{\alpha 0} V^{1/3} \quad (4.119)$$

$$A(V) = 0 \quad (4.120)$$

$$\sigma^2(V) = 0 \quad (4.121)$$

$$q(V) = 2 - \frac{9(2-\gamma)\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 18\Lambda V^2}{6\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 6\Lambda V^2} \quad (4.122)$$

ve (4.111-116)'da $K_1 = 0$ yazıldığında $k = -1$ 'li FLRW için

$$t - t_0 = \int \frac{dV}{\left(9V^{4/3} + 3\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 3\Lambda V^2\right)^{1/2}} \quad (4.123)$$

$$\theta(V) = \left(9V^{-2/3} + 3\mu_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} + 3\Lambda\right)^{1/2} \quad (4.124)$$

$$R_\alpha(V) = R_{\alpha 0} V^{1/3} \quad (4.125)$$

$$A(V) = 0 \quad (4.126)$$

$$\sigma^2(V) = 0 \quad (4.127)$$

$$q(V) = 2 - \frac{36V^{4/3} + 9(2-\gamma)\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 18\Lambda V^2}{18V^{4/3} + 6\mu_0 V_0^\gamma V^{2-\gamma} + 6\Lambda V^2} \quad (4.128)$$

bulunur. Yukarıdaki parametrelerin zamanla değişimlerini analitik olarak bulmak tüm modeller için mümkün değildir. Yalnızca Bianchi I için yapılabilen analitik çözümler Tablo 4.2-6'da verilmiştir. Şekil 4.1-16'da ise Bianchi I ve V-tipi ile $k=0$ ve $k=-1$ eğrilikli FLRW modelleri için nümerik hesapla çizilen grafikler gösterilmiştir.

Tablo.4.2 : Bianchi I modeli için hacim parametresinin zamana bağlı ifadeleri.

		V(t)
$\Lambda=0$	$\gamma=2$	$(3\mu_0 V_0^2 + K_1)(t - t_0)$
	$\gamma=1$	$3\mu_0 V_0 \left(\frac{t-t_0}{2}\right)^2 - \frac{K_1}{3\mu_0 V_0}$
	$\gamma=0$	$\sqrt{\frac{K_1}{3\mu_0}} \sinh(\sqrt{3\mu_0}(t - t_0))$
$\Lambda>0$	$\gamma=2$	$\left(\frac{3\mu_0 V_0^2 + K_1}{3\lambda^2}\right)^{1/2} \sinh(\sqrt{3\lambda^2}(t - t_0))$
	$\gamma=1$	$\frac{(12\lambda^2 K_1 - 9\mu_0^2 V_0^2)^{1/2} \sinh(\sqrt{3\lambda^2}(t - t_0)) - 3\mu_0 V_0}{6\lambda^2}$
	$\gamma=0$	$\sqrt{\frac{K_1}{3(\lambda^2 + \mu_0)}} \sinh(\sqrt{3(\lambda^2 + \mu_0)}(t - t_0))$
$\Lambda<0$	$\gamma=2$	$\left(\frac{3\mu_0 V_0^2 + K_1}{3\lambda^2}\right)^{1/2} \sin(\sqrt{3\lambda^2}(t - t_0))$
	$\gamma=1$	$\frac{(12\lambda^2 K_1 + 9\mu_0^2 V_0^2)^{1/2} \sin(\sqrt{3\lambda^2}(t - t_0)) + 3\mu_0 V_0}{6\lambda^2}$
	$\gamma=0$	$\sqrt{\frac{K_1}{3(\lambda^2 - \mu_0)}} \sin(\sqrt{3(\lambda^2 - \mu_0)}(t - t_0))$

Tablo.4.3 : Bianchi I modeli için genişleme parametresinin zamana bağlı ifadeleri

		$\theta(t)$
$\Lambda=0$	$\gamma=2$	$\frac{1}{(t-t_0)}$
	$\gamma=1$	$\frac{2(3\mu_0 V_0)^2 (t-t_0)}{(3\mu_0 V_0)^2 (t-t_0)^2 - 4K_1}$
	$\gamma=0$	$\frac{\sqrt{3\mu_0}}{\tanh(\sqrt{3\mu_0}(t-t_0))}$
$\Lambda>0$	$\gamma=2$	$\frac{\sqrt{3\lambda^2}}{\tanh(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0))}$
	$\gamma=1$	$\frac{(36\lambda^4 K_1 - 27\mu_0^2 V_0^2)^{1/2} \cosh(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0))}{(12\lambda^2 K_1 - 9\mu_0^2 V_0^2)^{1/2} \sinh(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0)) - 3\mu_0 V_0}$
	$\gamma=0$	$\frac{\sqrt{3(\lambda^2 + \mu_0)}}{\tanh(\sqrt{3(\lambda^2 + \mu_0)}(t-t_0))}$
$\Lambda<0$	$\gamma=2$	$\frac{\sqrt{3\lambda^2}}{\tan(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0))}$
	$\gamma=1$	$\frac{(36\lambda^4 K_1 - 27\mu_0^2 V_0^2)^{1/2} \cosh(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0))}{(12\lambda^2 K_1 + 9\mu_0^2 V_0^2)^{1/2} \sin(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0)) + 3\mu_0 V_0}$
	$\gamma=0$	$\frac{\sqrt{3(\lambda^2 - \mu_0)}}{\tan(\sqrt{3(\lambda^2 - \mu_0)}(t-t_0))}$

Tablo.4.4 : Bianchi I modeli için eşyönsüzlük parametresinin zamana bağlı ifadeleri

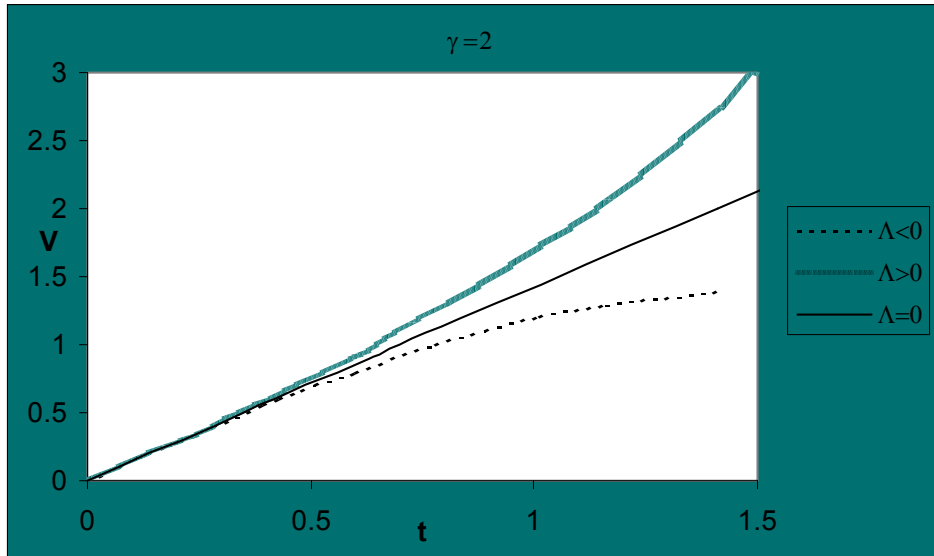
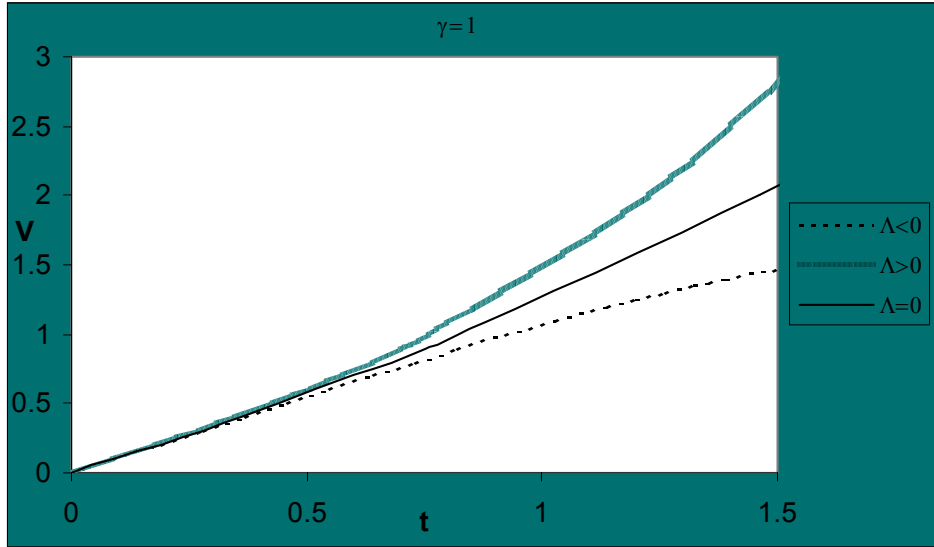
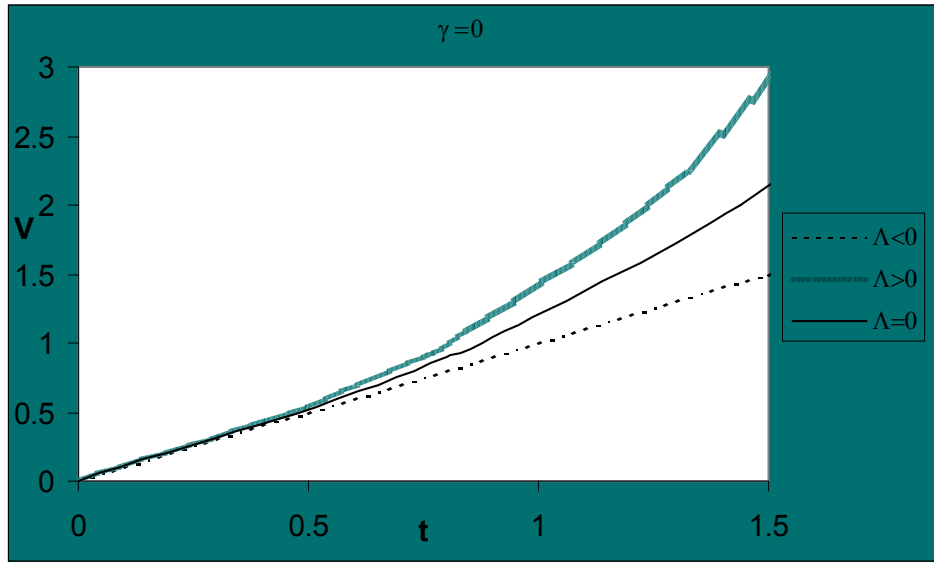
		A(t)
$\Lambda=0$	$\gamma=2$	$\frac{2K_1}{(3\mu_0 V_0^2 + K_1) \cosh^2(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0))}$
	$\gamma=1$	$\frac{28K_1}{\{(3\mu_0 V_0(t-t_0))\}^2}$
	$\gamma=0$	$\frac{2}{\cosh^2(\sqrt{3\mu_0}(t-t_0))}$
$\Lambda>0$	$\gamma=2$	$\frac{2K_1}{(3\mu_0 V_0^2 + K_1) \cosh^2(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0))}$
	$\gamma=1$	$\frac{24\lambda^2 K_1}{(12K_1\lambda^2 - 9\mu_0^2 V_0^2) \cosh^2(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0))}$
	$\gamma=0$	$\frac{2}{\cosh^2(\sqrt{3\lambda^2 + \mu_0}(t-t_0))}$
$\Lambda<0$	$\gamma=2$	$\frac{2K_1}{(3\mu_0 V_0^2 + K_1) \cos^2(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0))}$
	$\gamma=1$	$\frac{24\lambda^2 K_1}{(12K_1\lambda^2 - 9\mu_0^2 V_0^2) \cos^2(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0))}$
	$\gamma=0$	$\frac{2}{\cosh^2(\sqrt{3\lambda^2 - \mu_0}(t-t_0))}$

Tablo.4.5 : Bianchi I modeli için kayma parametresinin zamana bağlı ifadeleri

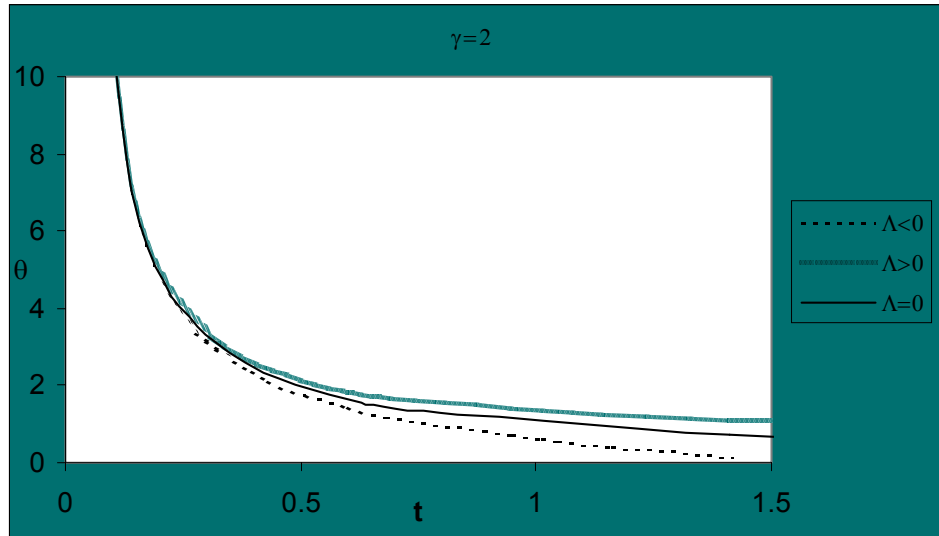
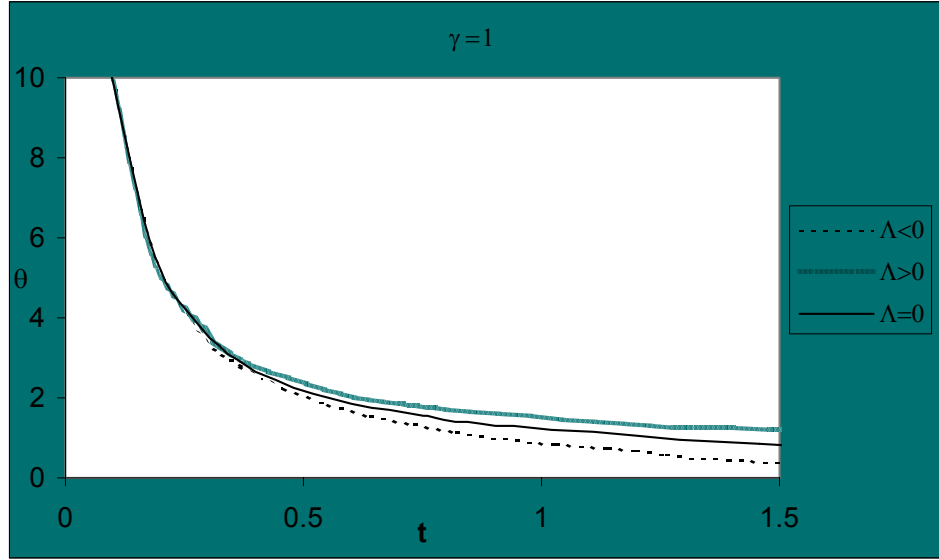
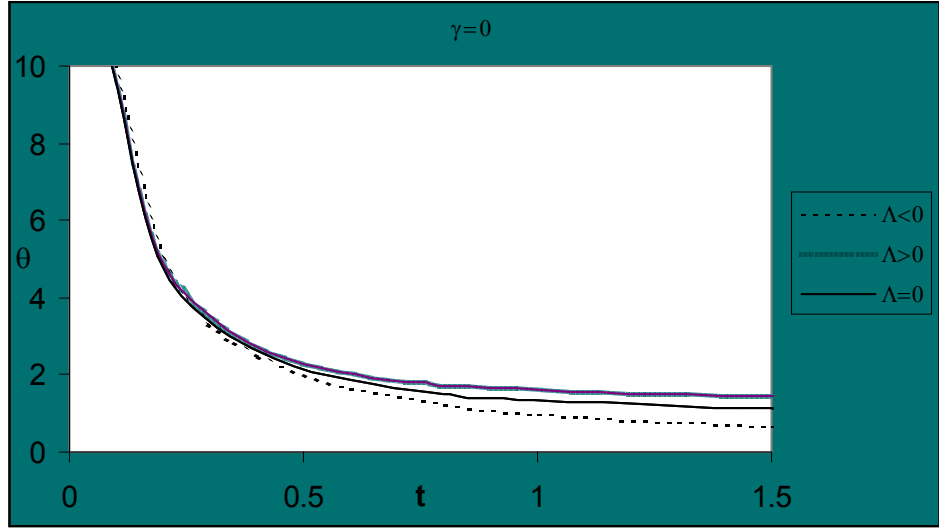
		$\sigma^2(t)$
$\Lambda=0$	$\gamma=2$	$\frac{K_1}{3(3\mu_0 V_0^2 + K_1)(t-t_0)^2}$
	$\gamma=1$	$\frac{2K_1}{3\{9\mu_0^2 V_0^2 (t-t_0)^2 - 4K_1\}^2}$
	$\gamma=0$	$\frac{\mu_0}{\sinh^2(\sqrt{3\mu_0}(t-t_0))}$
$\Lambda>0$	$\gamma=2$	$\frac{K_1 \lambda}{(3\mu_0 V_0^2 + K_1) \sinh^2(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0))}$
	$\gamma=1$	$\frac{2\lambda^2 K_1}{\{12K_1 \lambda^2 - 9\mu_0^2 V_0^2\} \sinh^2(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0)) - 3\mu_0 V_0\}^2}$
	$\gamma=0$	$\frac{\mu_0 + \lambda^2}{\sinh^2(\sqrt{3\lambda^2 + \mu_0}(t-t_0))}$
$\Lambda<0$	$\gamma=2$	$\frac{2\lambda^2 K_1}{(3\mu_0 V_0^2 + K_1) \cos^2(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0))}$
	$\gamma=1$	$\frac{2\lambda^2 K_1}{\{12K_1 \lambda^2 + 9\mu_0^2 V_0^2\} \sin^2(\sqrt{3\lambda^2}(t-t_0)) + 3\mu_0 V_0\}^2}$
	$\gamma=0$	$\frac{\lambda^2 - \mu_0}{\sin^2(\sqrt{3\lambda^2 - \mu_0}(t-t_0))}$

Tablo.4.6 : Bianchi I modeli için yavaşlama parametresinin zamana bağlı ifadeleri

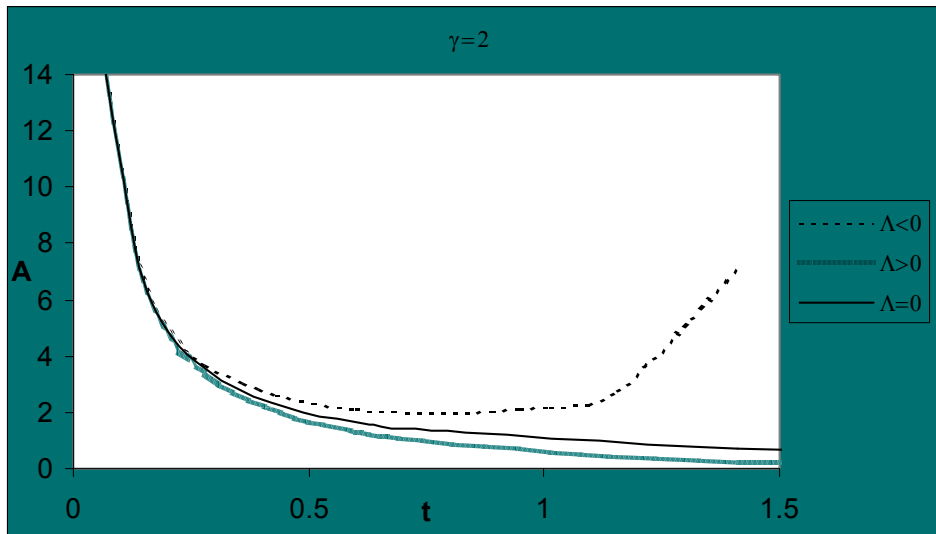
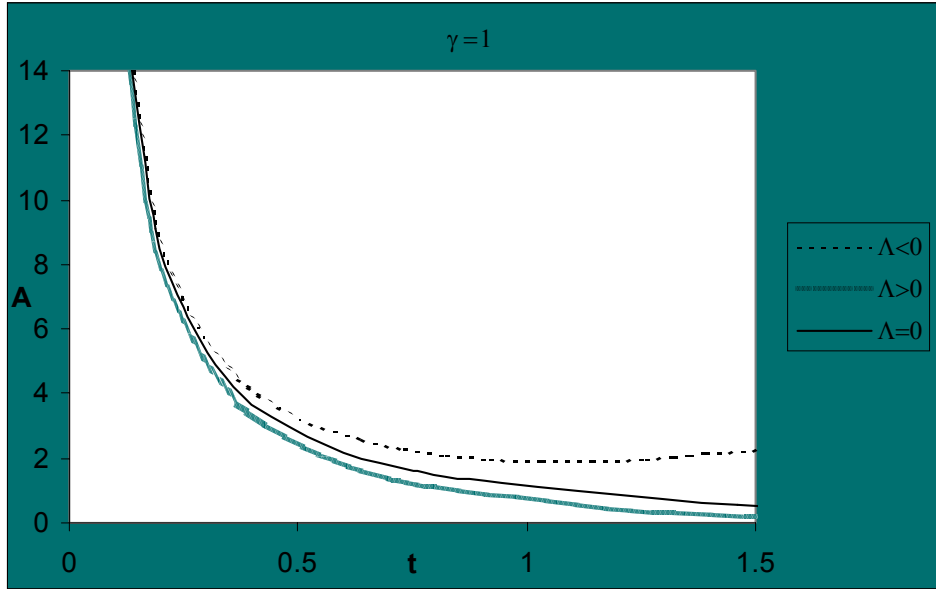
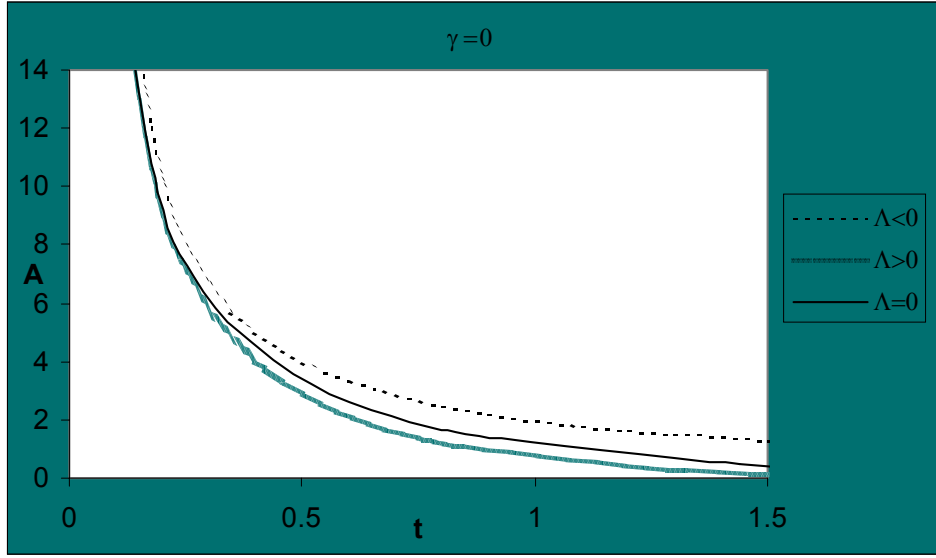
		$q(t)$
$\Lambda=0$	$\gamma=2$	$\frac{q(t)}{2}$
	$\gamma=1$	$2 - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4K_1}{(3\mu_0 V_{01})(t-t_0)^2} \right)$
	$\gamma=0$	$2 - 3 \tanh^2 \left(\sqrt{3\mu_0} (t-t_0) \right) - \frac{1}{2 \cosh^2 \left(\sqrt{3\mu_0} (t-t_0) \right)}$
$\Lambda>0$	$\gamma=2$	$2 - 3 \tanh^2 \left(\sqrt{3\lambda^2} (t-t_0) \right)$
	$\gamma=1$	$2 - 3 \tanh^2 \left(\sqrt{3\lambda^2} (t-t_0) \right) + \frac{3\mu_0 V_{01}}{\left\{ (12K_1 \lambda^2 - 9\mu_0^2 V_0^2)^{1/2} \sinh \left(\sqrt{3\lambda^2} (t-t_0) \right) \right\}}$
	$\gamma=0$	$2 - 3 \tanh^2 \left(\sqrt{3\lambda^2 + \mu_0} (t-t_0) \right)$
$\Lambda<0$	$\gamma=2$	$2 + 3 \tan^2 \left(\sqrt{3\lambda^2} (t-t_0) \right)$
	$\gamma=1$	$2 + 3 \tan^2 \left(\sqrt{3\lambda^2} (t-t_0) \right) + \frac{3\mu_0 V_{01}}{\left\{ (12K_1 \lambda^2 + 9\mu_0^2 V_0^2)^{1/2} \sin \left(\sqrt{3\lambda^2} (t-t_0) \right) \right\}}$
	$\gamma=0$	$2 + 3 \tan^2 \left(\sqrt{3\lambda^2 - \mu_0} (t-t_0) \right)$



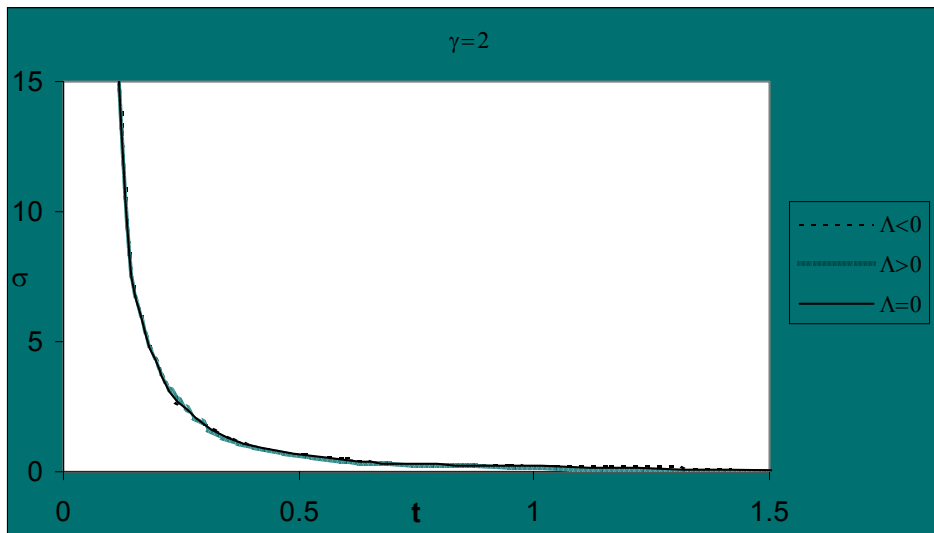
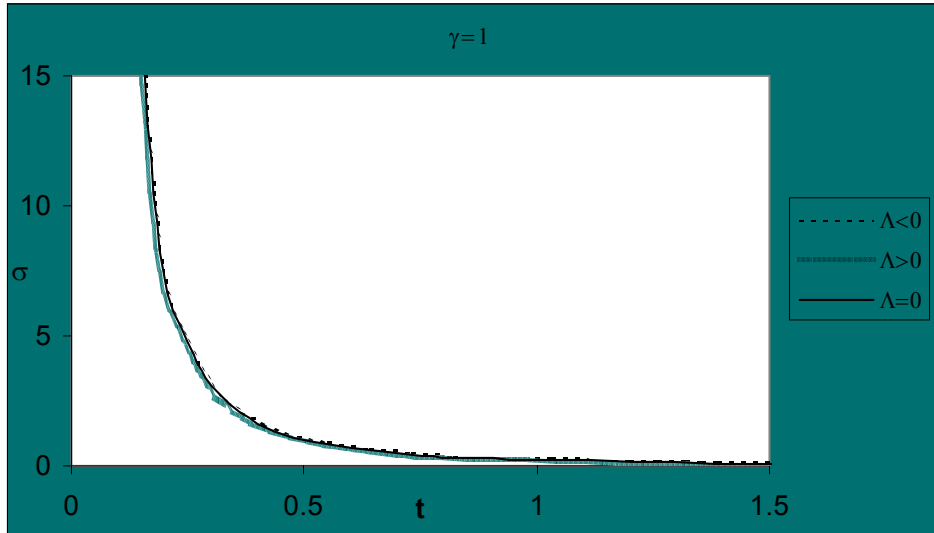
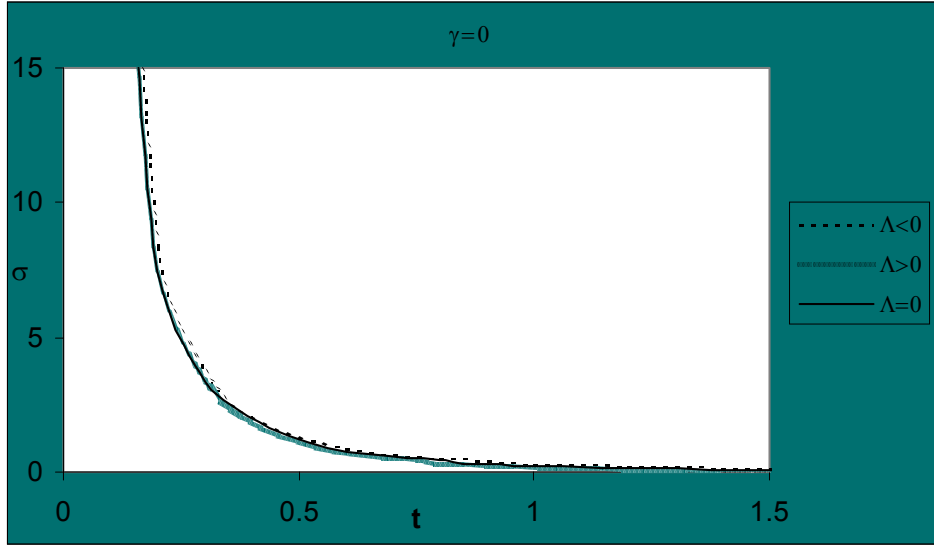
Şekil 4.1: Bianchi I tip için (V-t) grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 1$ alınmıştır



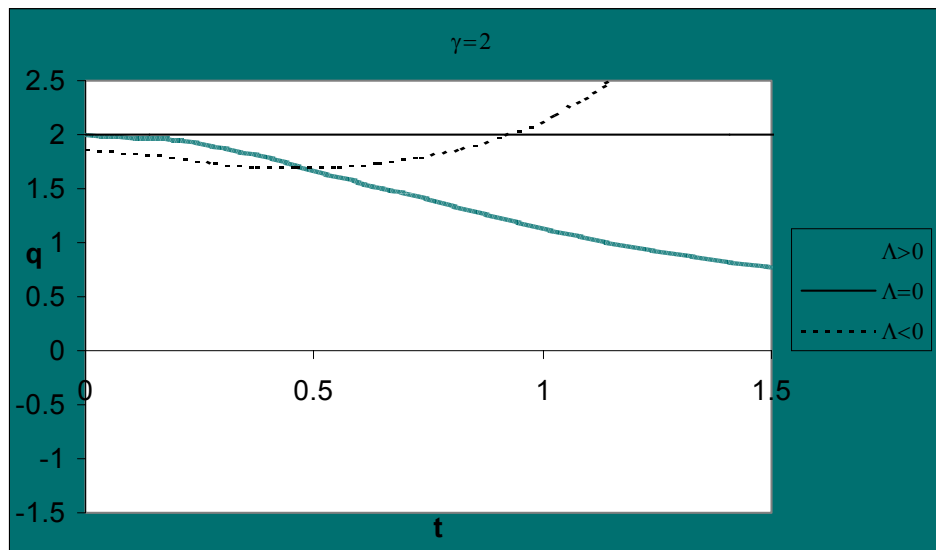
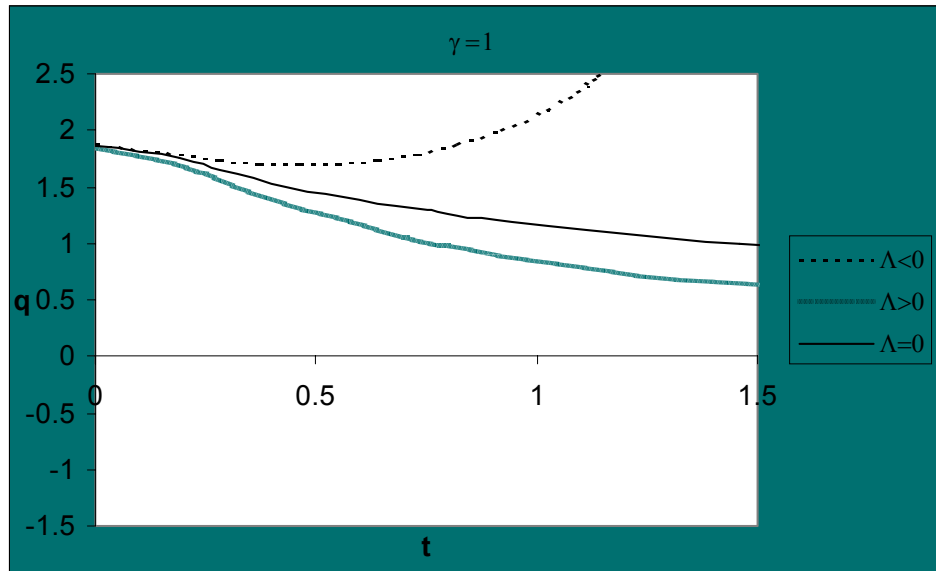
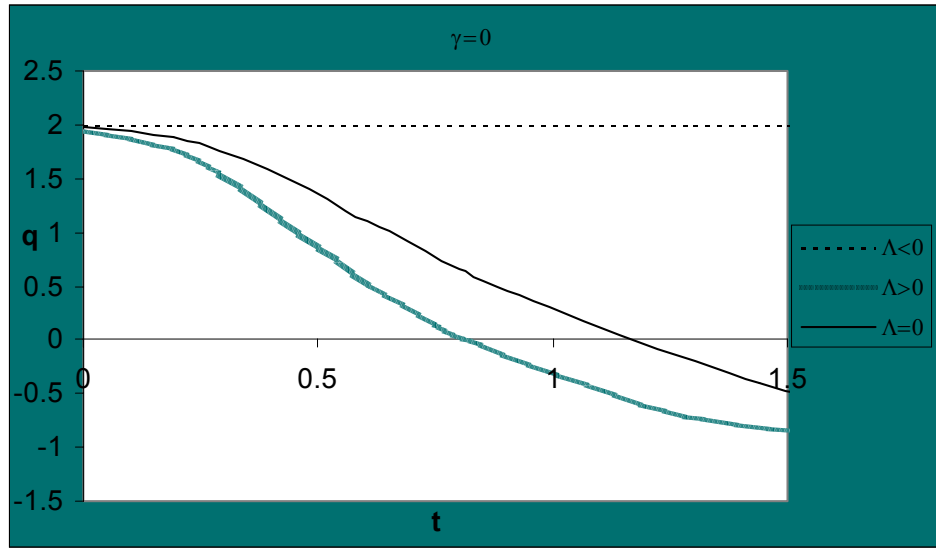
Şekil 4.2: Bianchi I tip için $(\theta-t)$ grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 1$ alınmıştır



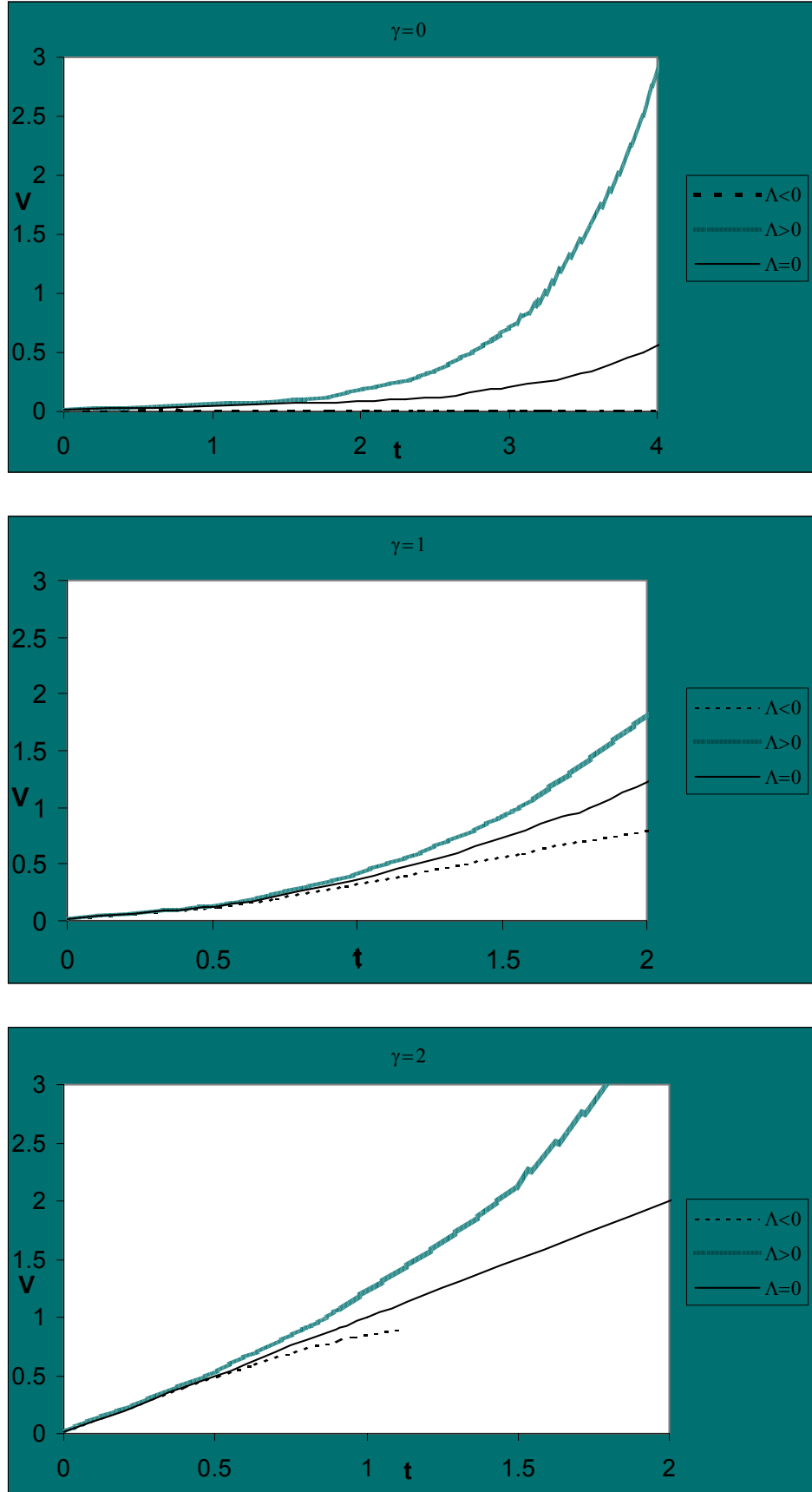
Şekil 4.3: Bianchi I tip için (A-t) grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 1$ alınmıştır



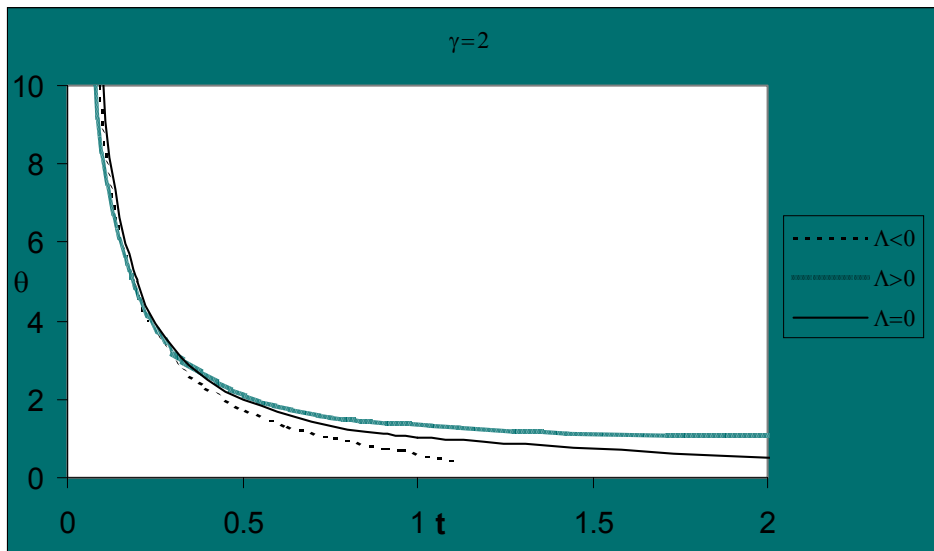
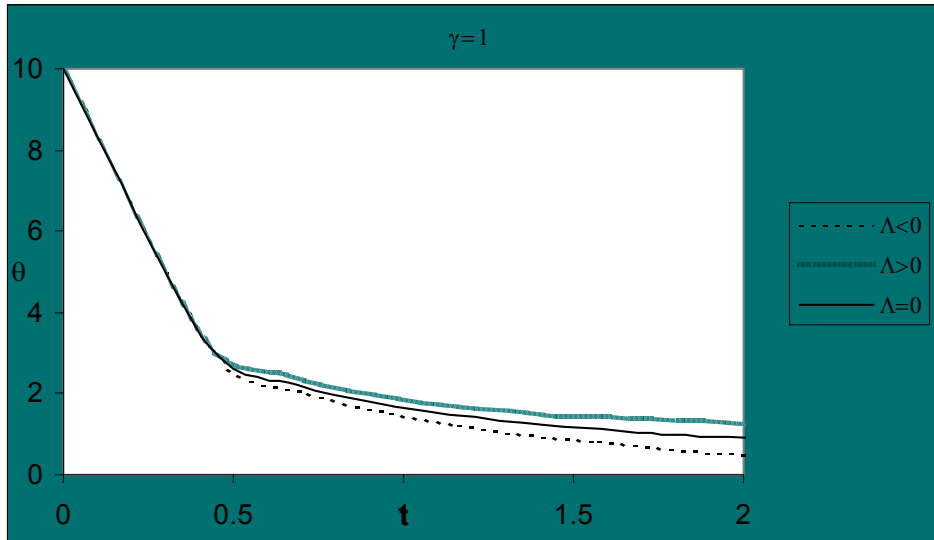
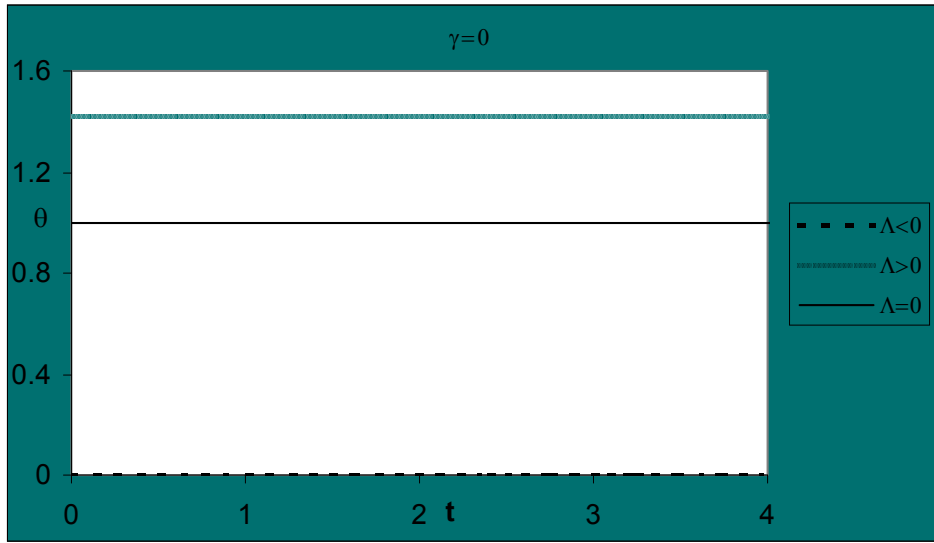
Şekil 4.4: Bianchi I tip için (σ^2-t) grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 1$ alınmıştır



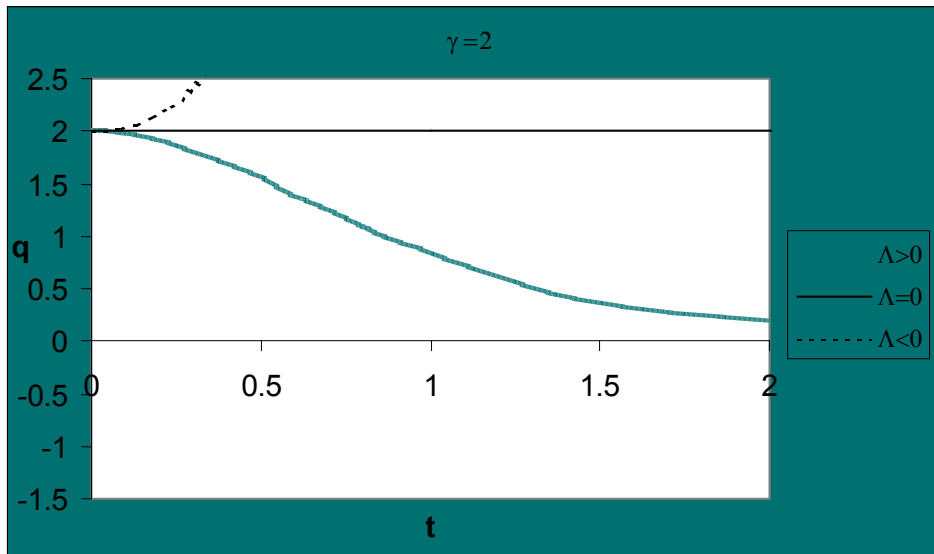
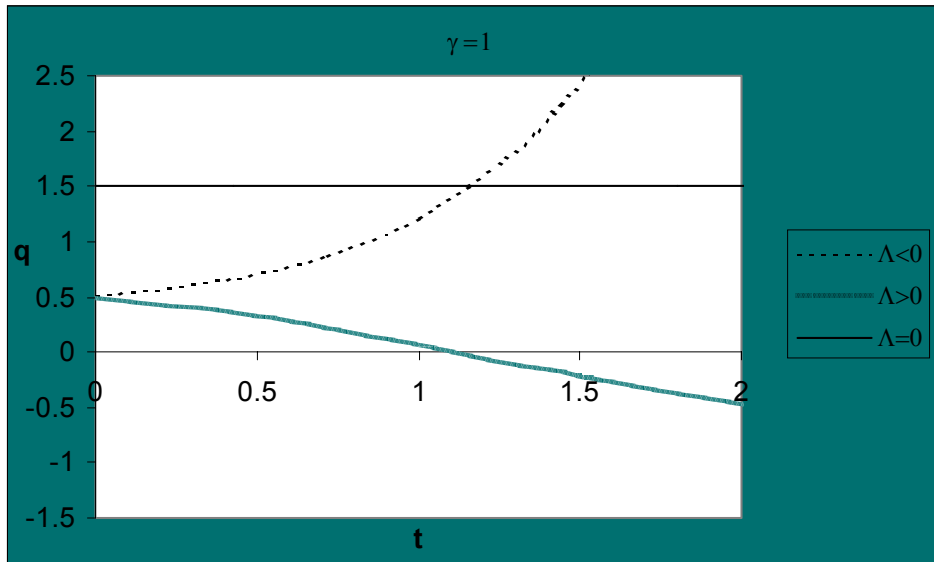
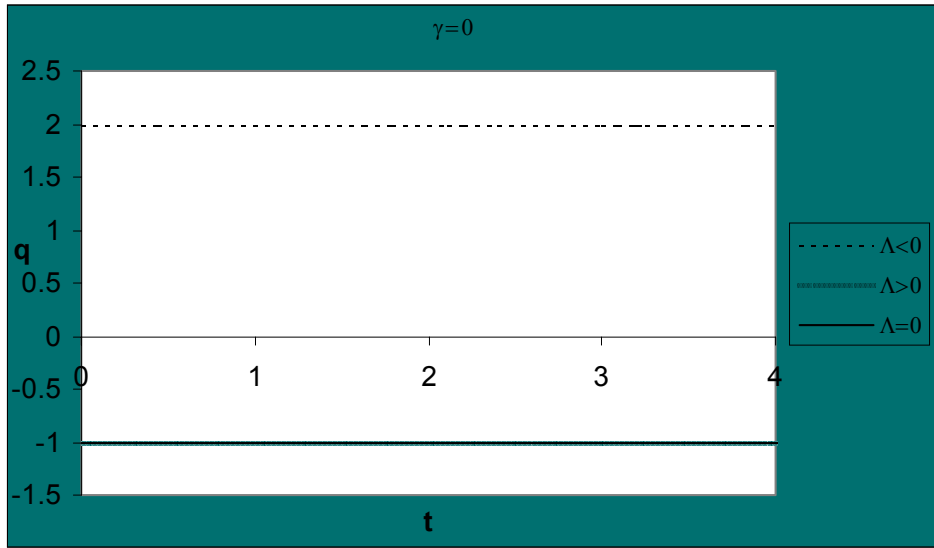
Şekil 4.5: Bianchi I tip için (q-t) grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_I = 1$ alınmıştır



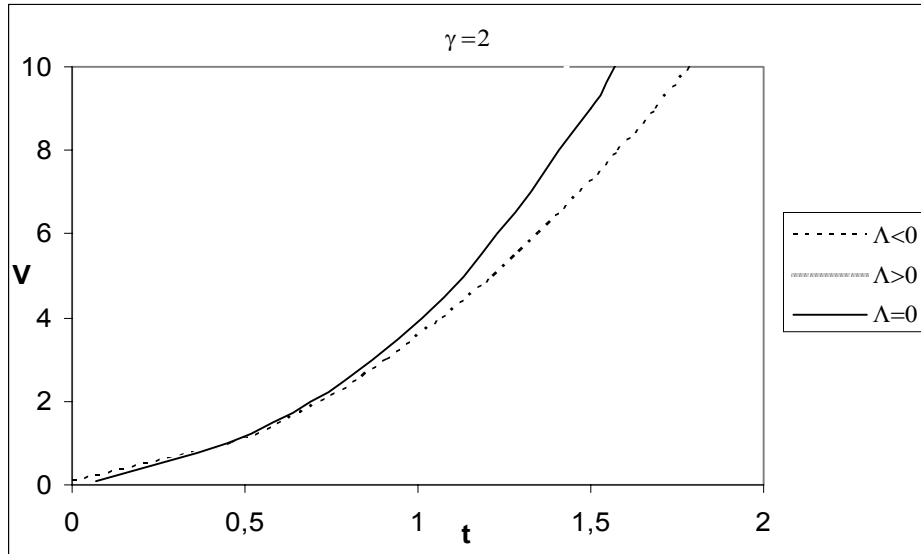
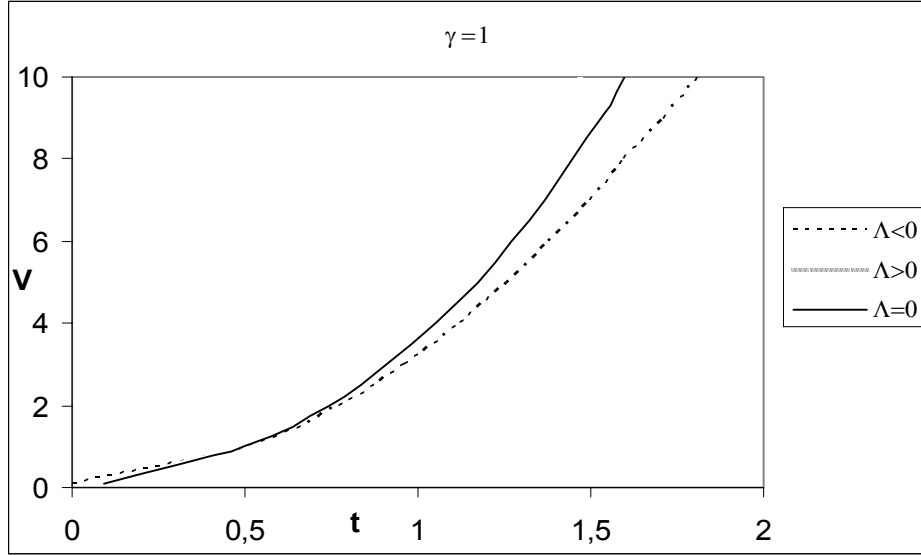
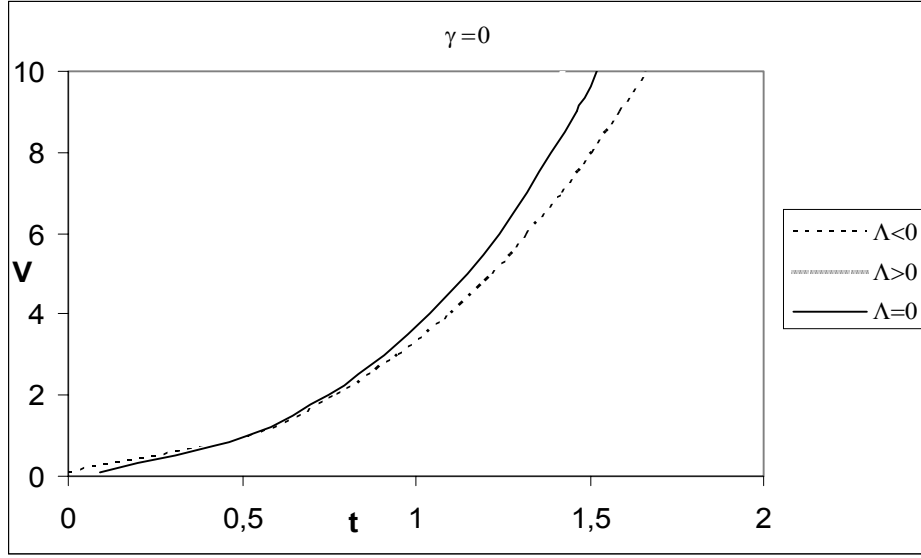
Şekil 4.6: FLRW modelinin $k=0$ durumu için $(V-t)$ grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$ $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 0$ alınmıştır



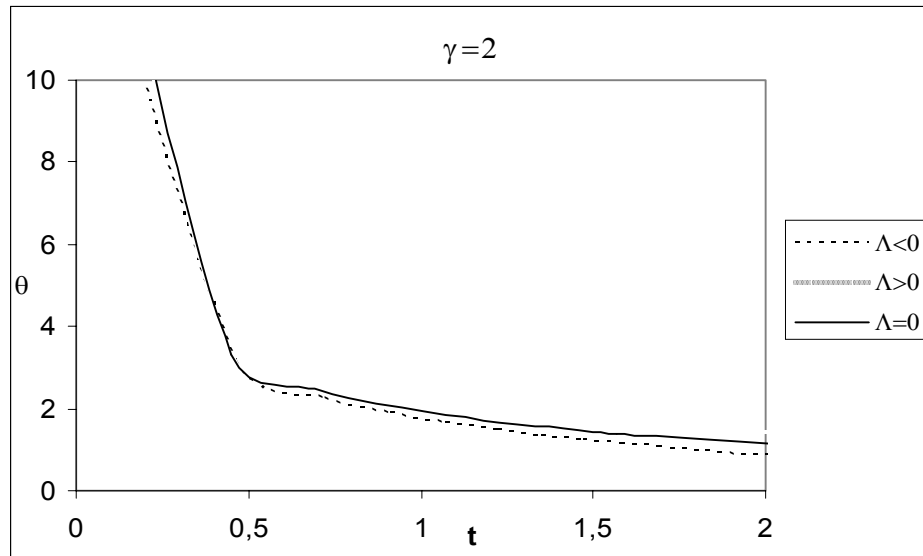
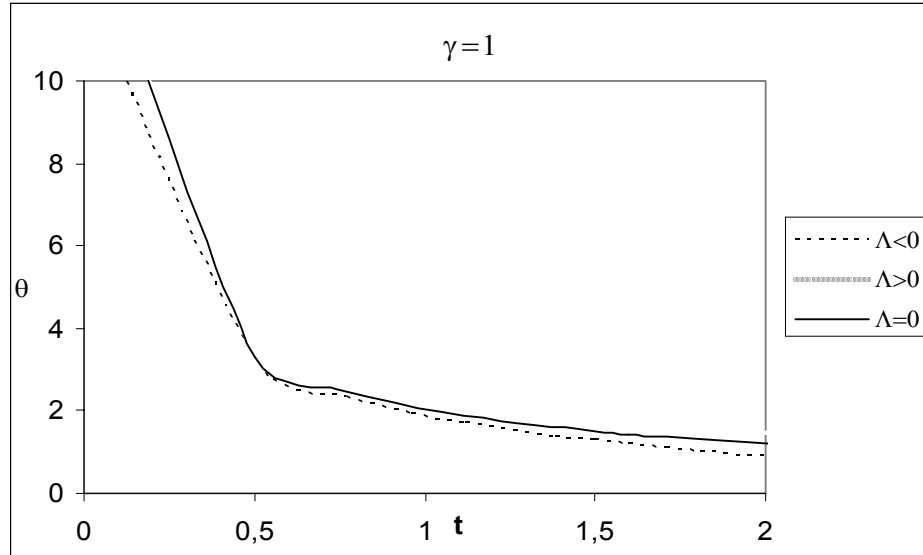
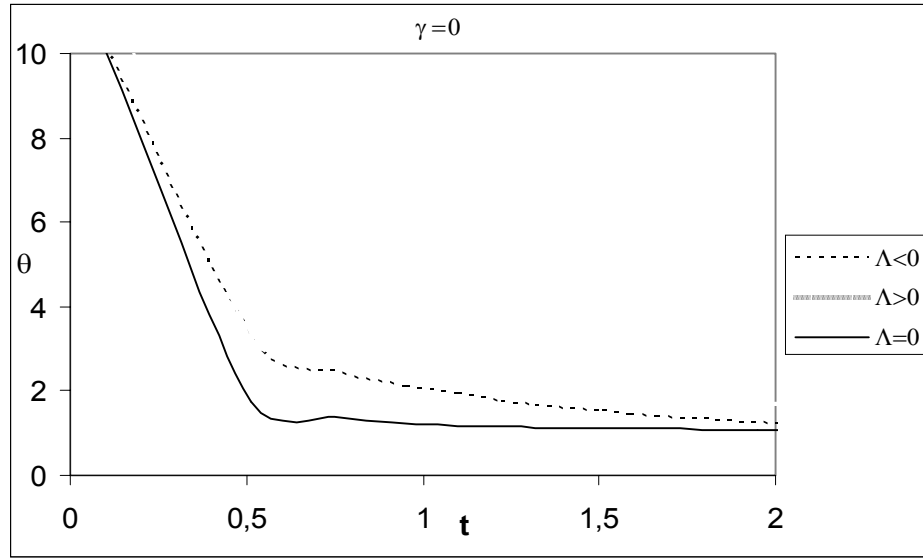
Şekil 4.7: FLRW modelinin $k=0$ durumu için $(\theta-t)$ grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma=1$ $3\lambda^2=1$ ve $K_1=0$ alınmıştır



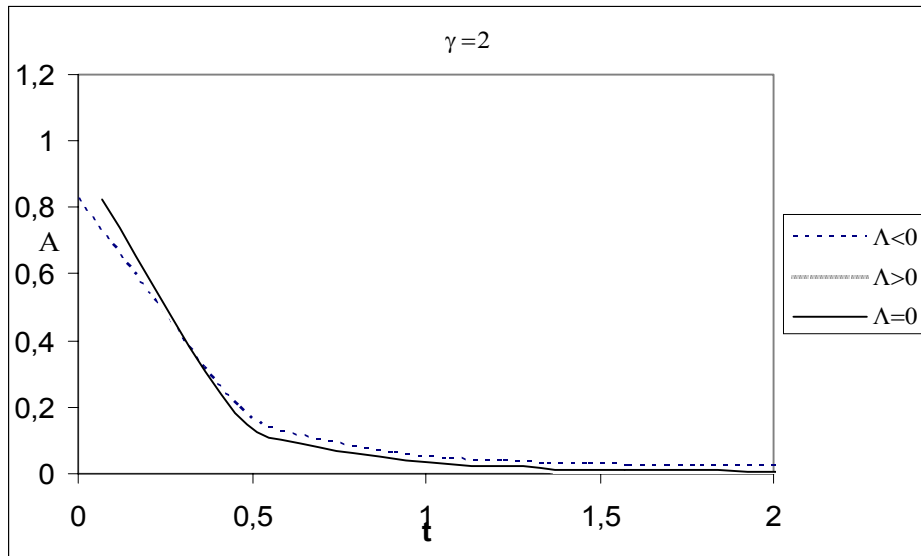
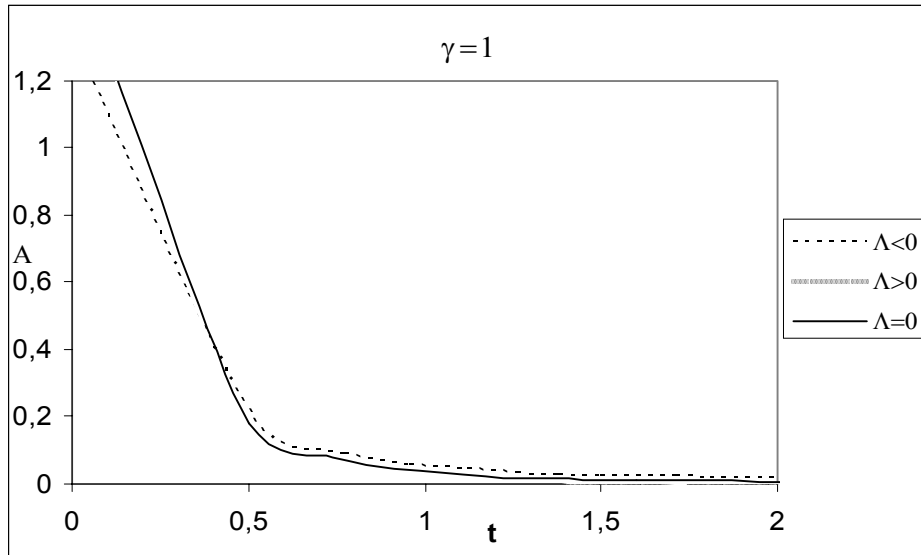
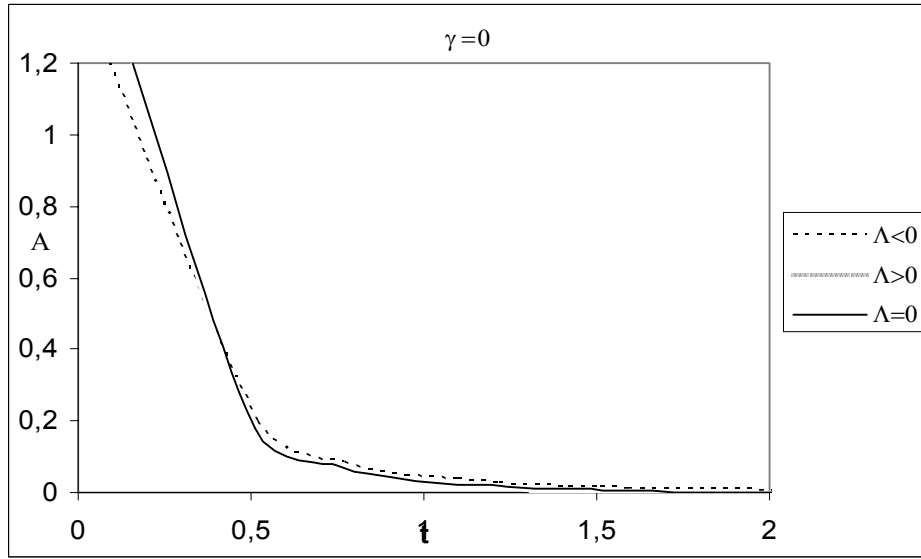
Şekil 4.8: FLRW modelinin $k=0$ durumu için $(q-t)$ grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 0$ alınmıştır



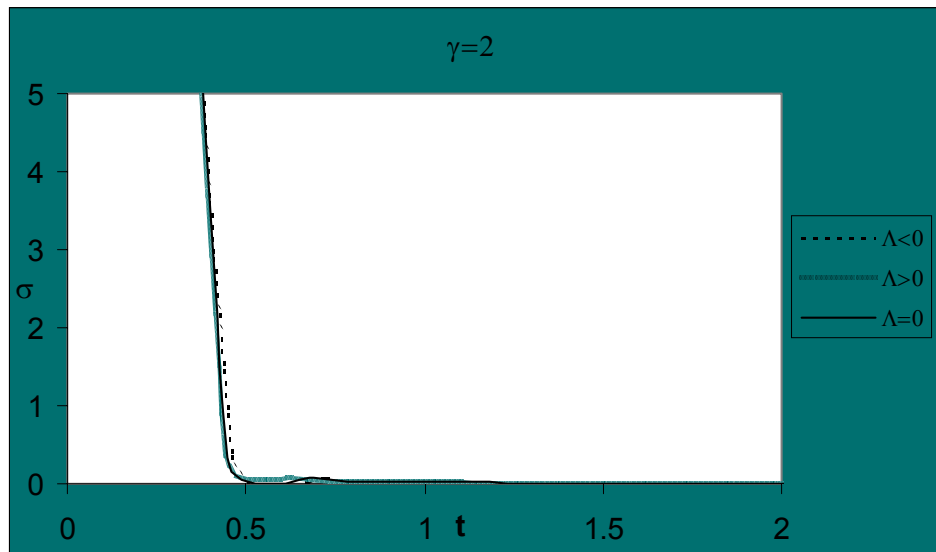
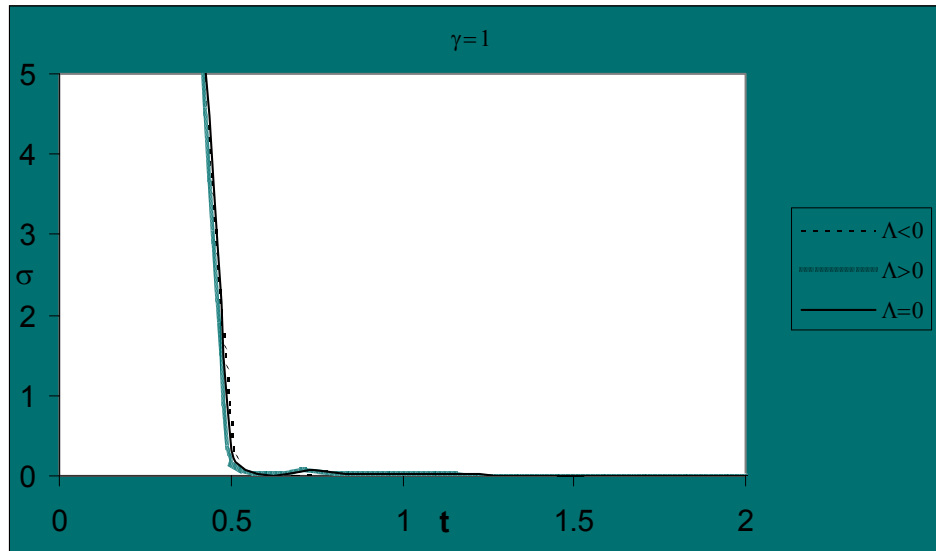
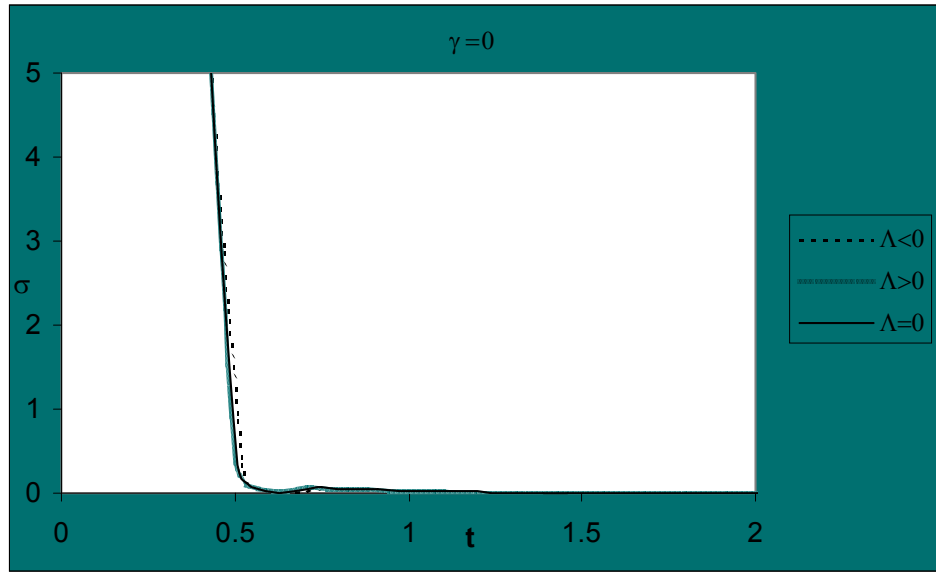
Şekil 4.9: Bianchi V tip için (V-t) grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$ $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 1$ alınmıştır



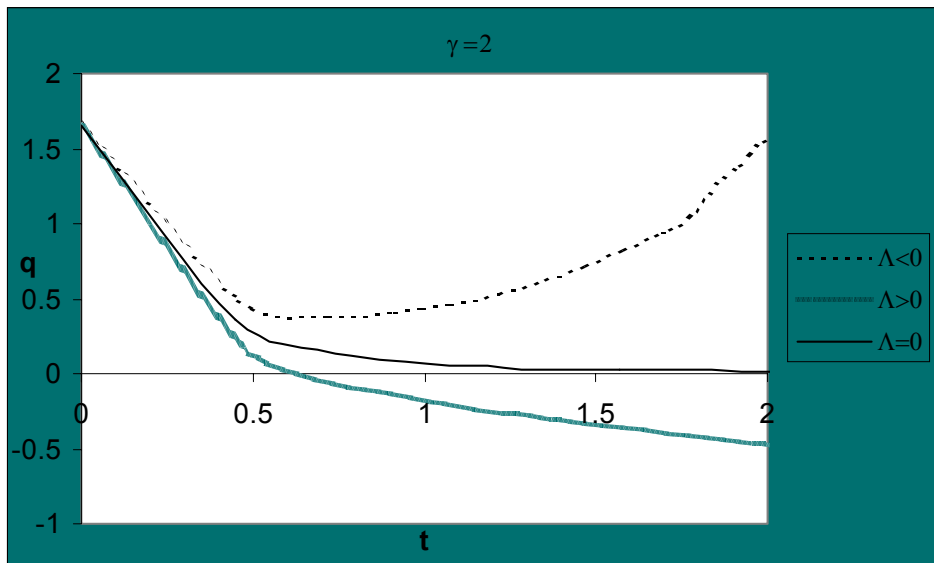
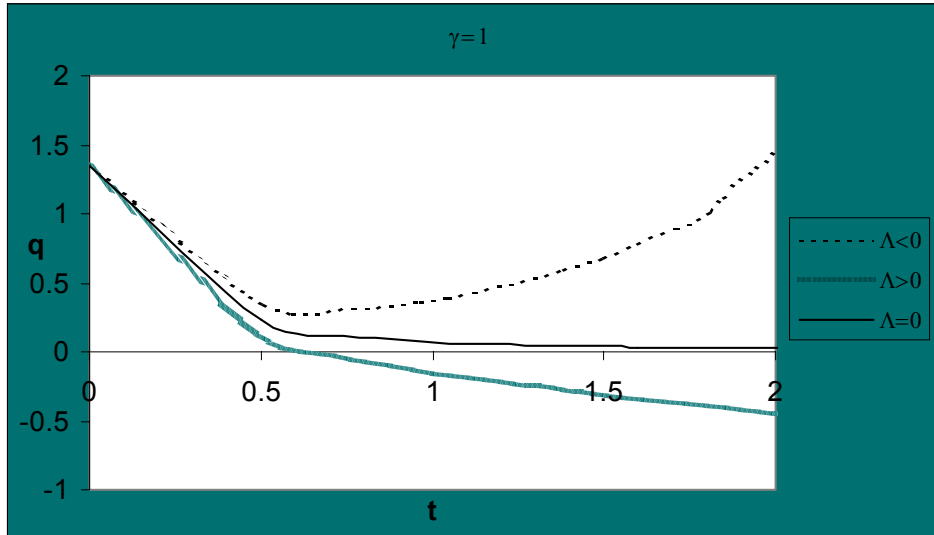
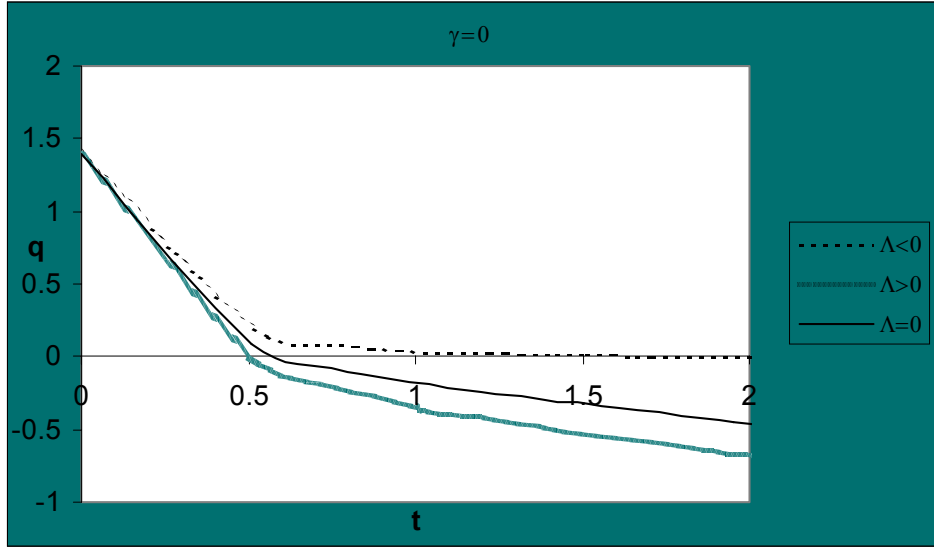
Şekil 4.10: Bianchi V tip için $(\theta-t)$ grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 1$ alınmıştır



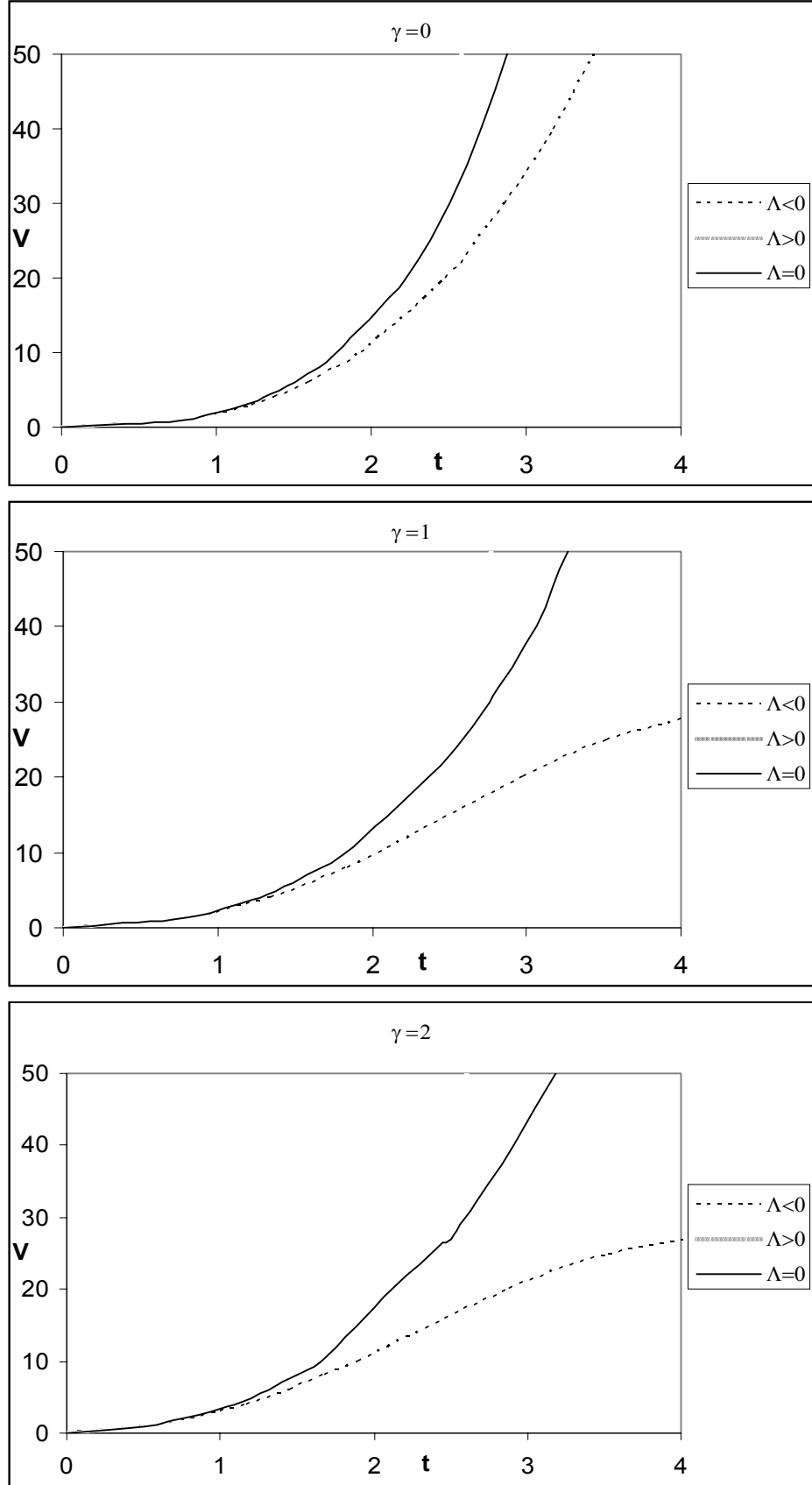
Şekil 4.11: Bianchi V tip için (A-t) grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$ $3\lambda^2 = 1$ ve $K_I = 1$ alınmıştır



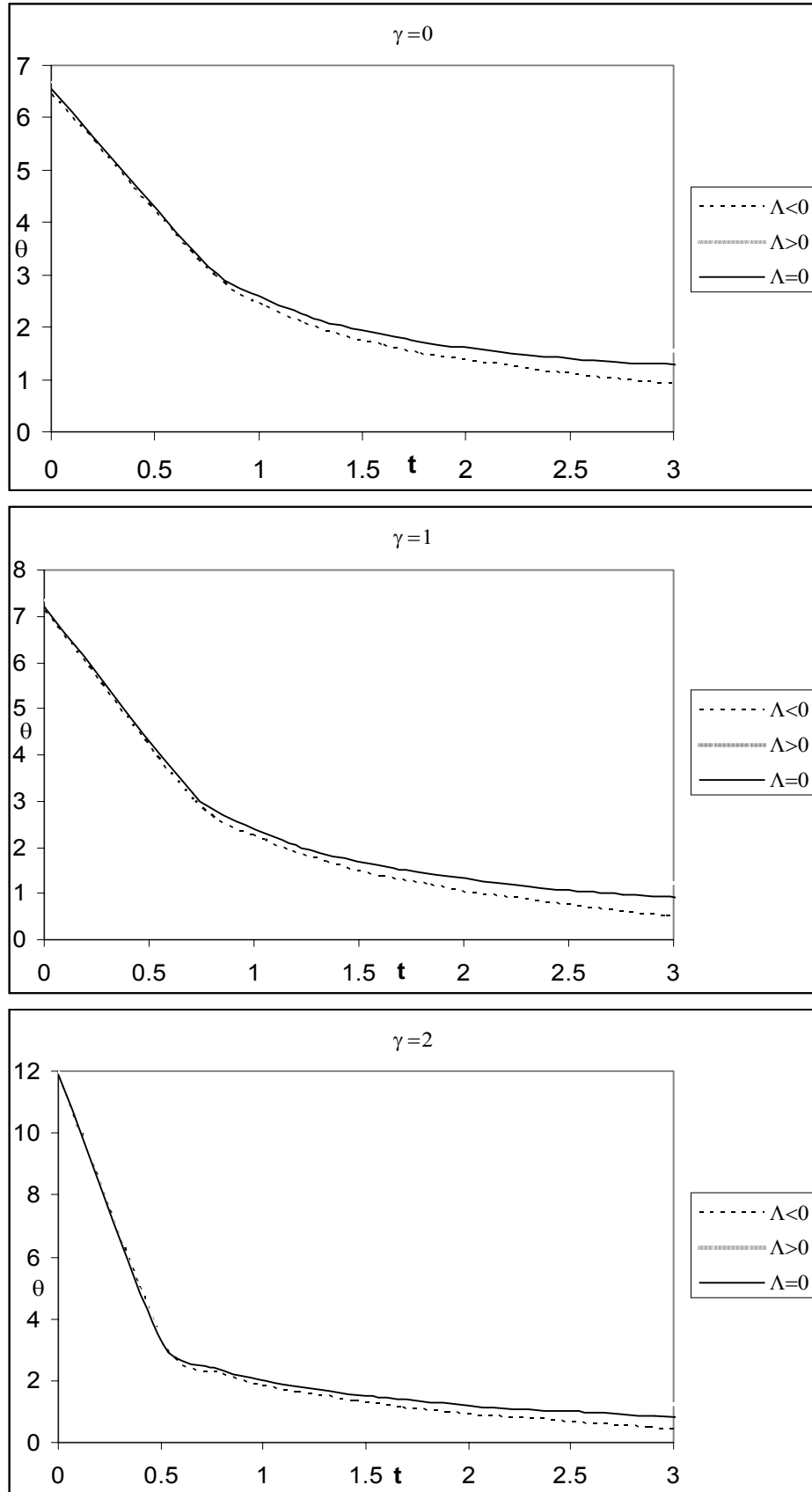
Şekil 4.12: Bianchi V tip için (σ^2-t) grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 1$ alınmıştır



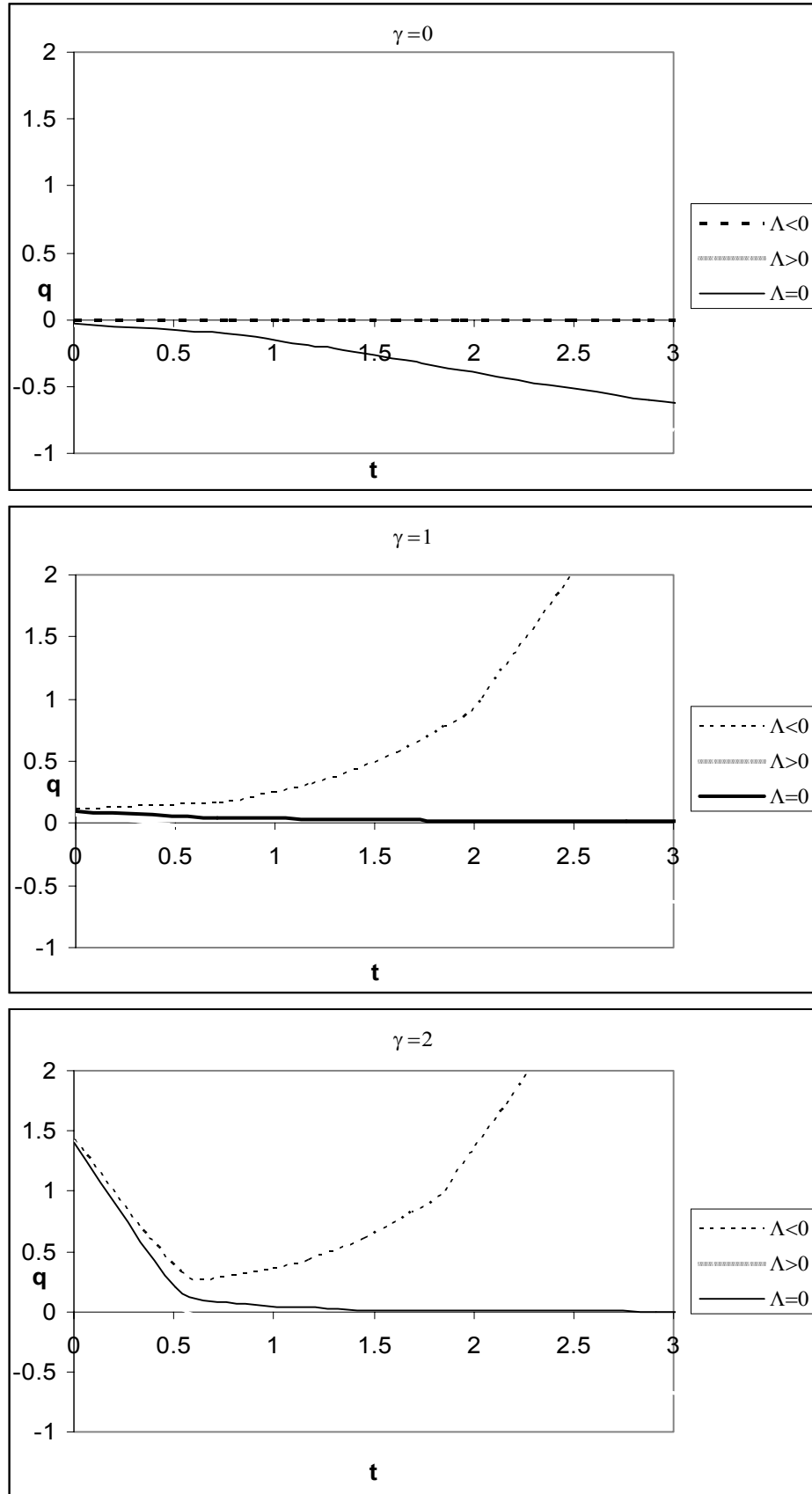
Şekil 4.13: Bianchi V tip için $(q-t)$ grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 1$ alınmıştır



Şekil 4.14: FLRW modelinin $k=-1$ durumu için $(V-t)$ grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 0$ alınmıştır



Şekil 4.15: FLRW modelinin $k=-1$ durumu için $(\theta-t)$ grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_1 = 0$ alınmıştır



Şekil 4.16: FLRW modelinin $k=-1$ durumu için $(q-t)$ grafikleri. $3\mu_0 V_0^\gamma = 1$, $3\lambda^2 = 1$ ve $K_I = 0$ alınmıştır

5. TARTIŞMA VE SONUÇ:

Tezde, günümüzde oldukça ilgi çekici olan Bianchi-tip modellerin evrimleri, kozmolojik sabitin pozitif, sıfır, negatif değerlere sahip olması durumlarında incelendi. Bunun için birbirinden farklı iki yol kullanılarak bulunan sonuçların karşılaştırılabilmesi amaçlandı. Birinci yol Wald'ın göstermiş olduğu evrenin hareketini tasvir eden bazı büyüklüklerin limitlerini belirleme yöntemidir. İkinci yol ise modellerin EAD'nin hesaplanarak bunların çözümlerini elde edilmesine dayanan metrik yaklaşımı yöntemidir.

Wald Bianchi-tip modellerin evrimlerinde pozitif kozmolojik sabitin etkisini inceledi. Buna göre 3-lü uzaysal eğriliği sıfırdan küçük olan modeller (IX tip hariç diğer Bianchi modelleri), $(3/\Lambda)^{1/2}$ değerinden çok büyük kozmolojik zamanlarda, de Sitter evrenine yaklaşacaktır. Yani evreninin Hubble parametresi (H) sabit bir değere, kayma parametresi (σ^2) sıfıra, enerji yoğunluğu (μ) da sıfıra yaklaşacaktır. Bu analiz aynı zamanda sıfır ve negatif kozmolojik sabit değerleri için yapıldığında evrenin daha farklı davranışlar sergileyeceği görülür. Tablo 4.1'de gösterilen sonuçlara göre $\Lambda=0$ iken H , σ^2 , μ sıfıra gidecek, evren genişlemenin giderek azaldığı ve en sonunda durduğu boş bir hal alacaktır. $\Lambda<0$ halinde ise belli bir değere kadar genişleyip büzülen bir davranış sergileyecektir.

İkinci yöntem olarak kullandığımız metrik yaklaşımında, tüm Bianchi- modelleri için denklemleri yazmak kolay olmasına rağmen, çözümlerin elde edilmesi denklemler kuple olduğundan mümkün değildir. Evrenin akışkan yapısının mükemmel akışkan formunda alınması bile çözümleri kolaylaştırmamaktadır. Nitekim ikinci mertebeden denklemleri birinci mertebeye indirgeyecek bir değişken dönüşümü (denklemleri V hacim parametresine cinsinden yazarak yapılan bir dönüşüm) kullanılarak, evrenin davranışını betimleyecek parametrelerin (hacim, genişleme, eşyönsüzlük, kayma ve yavaşlama parametreleri) ifadeleri elde edilebilir. Fakat bu parametreler artık hacme bağlıdır ve bu yüzden hacmin zamanla değişiminin bilinmesi gerekir. Tezde hacmin zamanla değişimini veren integral Bianchi I ve V tipleri için çözülmüştür. Yine kozmolojik sabitin üç farklı durumu ele alınarak, parametrelerin zamana bağlı grafikleri

çizilmiştir.. Ayrıca çözümlerin farklılaşmasına sebep olan γ sabitinin üç farklı değeri için grafikler ayrı ayrı gösterilmiştir.

Grafikler ve Tablo 4.2-6'da Bianchi I tip için açıkça yazılan analitik çözümlerden elde edilen sonuçların asimptotik formları, Wald'ın analiziyle bulunan asimptotik formlara karşılık gelmektedir. Genişleme parametresinin $\Lambda > 0$ 'da sabit bir değere, $\Lambda = 0$ 'da sıfıra gittiği görülmektedir. Grafiklerde yalnızca bir maksimum noktaya kadar genişlediği gösterilen $\Lambda < 0$ halinde ise genişleme parametresi, o değere yaklaşırken sıfıra gitmekte, ve tüm haller için kayma parametresi sıfıra yaklaşmaktadır. Bianchi modellerinin şu anda gözlediğimiz evreni yansıtmadığının test edilmesine imkan verecek bir diğer parametre de eşyönsüzlük parametresidir. Şekil 4.3 ve 4.11'den modellerin başlangıçta yüksek dereceli eşyönsüzlükten, eşyönlü hale geldiği görülmektedir. Bu da, Bianchi modellerinin, gözlediğimiz kadarıyla şimdiki evreni yansıtabilen bir model olarak alınabileceğini gösterir. Ancak sadece $\Lambda < 0$ iken Bianchi-I tip model tamamen eşyönlü olamamaktadır.

Tezde yapılan bir diğer inceleme de Bianchi Modellerinin özel hali olan, homojen ve eşyönlü FLRW modellerinin grafikleridir. Böylelikle söz konusu parametrelerin, FLRW modelleri ile Bianchi modelleri arasında bir karşılaştırma yapılabilir. Genel olarak davranışlar aynı olmakla birlikte, farklılık zamanda ortaya çıkmaktadır.

Kozmolojik sabitin bütün olarak evrenin davranışını etkilemesi yanında, grafiklerde ortaya çıkan bir diğer etki de hareketi hızını etkilemesidir. $\Lambda > 0$ durumunda evrenin genişlemesi en hızlı olmaktadır ve bu da pozitif kozmolojik sabitin itici etkisi olduğunu tasdikler.

Bu çalışmada metrik yaklaşımıyla Bianchi modellerinden sadece ikisi incelendiğinden, daha ileri bir çalışma olarak diğer modellerin (ayrı ayrı veya topluca) grafiksel veya analitik incelemeleri yapılabilir. Ayrıca henüz yeni bir çalışma alanı olan zar evren kozmolojilerinde kozmolojik sabitin etkileri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] BIANCHI, L., 1897, Sugli Spazii a Tre Dimensioni Che Ammettono un Gruppo Continuo di Movimenti, *Soc. Ital. Mem. Di Mat.*, 11, 267.
- [2] TAUB, A. H., 1951, Empty Space-times Admitting a Three-parameter Group of Motions, *Ann. Math.*, 53, 472-490.
- [3] WALD, R. M., 1983, Asymptotic Behaviour of Homogeneous Models in the Presence of Positive Cosmological Constant, *Rapid Communications*, Physical Review D, V 28, N8.
- [4] MUTUŞ, H., 1979, *Mach İlkesi ve Teorik Gelişmeleri*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Teorik Fizik Kürsüsü.
- [5] ÖZEMRE, A.Y., 1982, *Gravitasyonun Rölativist Teorileri*, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi.
- [6] ÖZEMRE, A.Y., 1981, *Kozmolojiye Giriş*, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi.
- [7] EINSTEIN, A., 1970, quoted by Gamov, G., in *My World Line*, Viking Press, New York.
- [8] CHANDRA, R., 1977, *on the Cosmical Constant, General Relativity and Gravitation*, Vol. 8, No.9, 787-793.
- [9] McCREA, W.H., 1971, *The Cosmological Constant*, Q.J.I. R.astr.Soc. 12, 140-153.
- [10] DOLGOV, A.D., 1989, *The Cosmological Constant Problem*, Fermilab-Conf-89/112-A.
- [11] GÜDEKLİ, E., 1997, *Homojen Evren Modellerinin Matematiksel Temelleri*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [12] MACCALLUM, M.A.H., 1979, *Anisotropic and Inhomogeneous Relativistic Cosmologies, General Relativity*, An Einstein Centenary Survey, ed. by. S.W. Hawking, W. Israel, Cambridge University Press.
- [13] RAYCHAUDRI, A., 1955, Relativistic Cosmology I, *Phys. Rev.*, 98, 1123-1126.
- [14] HECKMANN, O. and SCHÜKING, E., 1962, *Gravitation; An Introduction to Current research*, Wiley, New York.
- [15] ELLIS, G.F.R., and MACCALLUM, M.A.H., 1969, A Class of Homogeneous Cosmological Model, *Commun. Math. Phys.*, 12, 108-141.
- [16] ELLIS, G.F.R., 1973, *Relativistic Cosmology, in Cargèse Lectures in Physics*, Vol 6., ed. by E. Schatzmann, Gordon and Breach-Science Publishers, New York.

- [17] MACCALLUM, M.A.H., 1973, *Cosmological Models from a geometric point of view*, in *Cargèse Lectures in Physics*, ed.by. E. Schatzmann, p.61-174, Gordon and Breach-Science Publishers, New York.
- [18] WAINRIGHT J., ELLIS, G.F.R., 1997, *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, 0 521 55457 8.
- [19] MACCALLUM, M.A.H., 1971, A Class of Homogeneous Cosmological Models III: Asymptotic Behaviour, *Comm. Math. Phys.*, 20, 57-84.
- [20] MACCALLUM, M.A.H., 1979, *The Mathematics of Anisotropic Spatially-Homogeneous Cosmologies*, *Physics of the Expanding Universe, Lecture notes in Physics*, ed.by M. Demianski, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [21] CHEN, C.M., HARKO T., MAK, M.K., 2001, Exact Anisotropic Brane Cosmologies, *Phys. Rev. D*, V 64, 044013.
- [22] JENSEN, L.G., STEIN-SHABES, J.A., 1986, Effect of Inflation on Anisotropic Cosmologies, *Phys. Rev. D*, V 34, N4.
- [23] HARVEY A., TSOUBELIS D., 1977, Exact Bianchi IV Cosmological Model, *Phys. Rev. D*, V 15, N10.
- [24] HARKO T., MAK M.K., 2004, Anisotropy in Bianchi-type Brane Cosmologies, gr-qc/0401069

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Gülçin Berköz
Doğum tarihi ve yeri : 30/03/1979 – İstanbul
E-posta : berkozg@yahoo.com
berkozg@hotmail.com
Eğitim : 1985-1990 Gaziosmanpaşa İlkokulu
1990-1993 Üçşehitler İlköğretim Okulu
1993-1996 Plevne Lisesi
1996-2000 İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü
Yabancı dil : Fransızca, İngilizce