

**T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SIKIŞTIRILAMAZ İKİ BOYUTLU DAİMİ  
NAVİER-STOKES DENKLEMLERİNİN  
GENEL EĞRİSEL KOORDİNATLARDA  
4.DERECEDEN SIKI FORMÜLASYONU**

**Hakan KAYKISIZLI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ENERJİ SİSTEMLERİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**GEBZE**

**2006**

**T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SIKIŞTIRILAMAZ İKİ BOYUTLU DAİMİ  
NAVİER-STOKES DENKLEMLERİNİN  
GENEL EĞRİSEL KOORDİNATLARDA  
4.DERECEDEN SIKI FORMÜLASYONU**

**Hakan KAYKISIZLI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ENERJİ SİSTEMLERİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**TEZ DANIŞMANI  
Yrd.Doç. Dr. Ercan ERTÜRK**

**GEBZE  
2006**

**Hakan KAYKISIZLI'nın** tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve .....sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından **ENERJİ SİSTEMLERİ MÜHENDİSLİĞİ** Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE :Yrd.Doç.Dr. Ercan ERTÜRK  
(Tez Danışmanı)

ÜYE :

ÜYE :

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
..... tarih ve ..... sayılı kararı.

İmza / Mühür

## ÖZET

**TEZİN BAŞLIĞI: Sıkıştırılmaz İki Boyutlu Daimi Navier-Stokes  
Denklemlerinin Genel Eğrisel Koordinatlarda 4.Dereceden  
Sıkı Formülasyonu**  
**YAZAR ADI: HAKAN KAYKISIZLI**

Bu tezin konusu sonlu fark metodunu kullanarak sıkıştırılmaz akışkanlarda daimi 2 boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin genel eğrisel koordinatlarda 4.dereceden sıkı formülasyonunu elde etmektir. 1.derece ve 2.derece çözümler oldukça doğru sonuçlar vermelerine rağmen sonuçlarda olmaması gereken bazı suni viskozite etkilerini de birlikte getirmektedir. Bu nedenle Navier-Stokes denklemlerinin yüksek dereceden çözümü son yıllarda ilgi odağı olmaya başlamış ve bu konuda yapılan çalışmalara bir katkı da genel koordinatlarda bu denklemlerinin sıkı formülasyonunu gerçekleştirerek bu çalışma ile yapılmıştır.

Navier-Stokes denklemlerinin çözümü için pek çok iterasyon yöntemi olmasına rağmen bu yöntemler formülasyonun ifade edilmiş şeklinden dolayı kolayca kullanılamamaktadır. Bu tez ile sunulan Navier-Stokes denklemlerinin yüksek mertebeden çözüm formülü nümerik yöntemlerin kolayca uygulanabilmesine imkan sağlayacaktır.

Bu tezde Navier-Stokes denklemlerini genel koordinatlarda 4.dereceden formülasyonu için akım fonksiyonu-çevrinti yaklaşımı kullanılmıştır. Sonuçların test edilmesi için ise kare kesitte sıkıştırılmaz kavite akışı problemi kullanılmış ve problemin 4.dereceden mevcut çözümleri ile karşılaştırma yapılmıştır.

## SUMMARY

**TITLE: Formulation of Incompressible Steady Two Dimensional Compact Forth Order Navier-Stokes Equations in General Curvilinear Coordinates**

**OUTHER: HAKAN KAYKISIZLI**

This thesis is concerned with solving the incompressible, steady two dimensional compact 4th order Navier-Stokes equations in general curvilinear coordinates using finite difference methods. Although first and second order approximations are highly accurate, the results exhibit the effects of artificial viscosity. As a result of this, there has been great interest in recent years to investigate high-order schemes and this thesis makes a contribution to these investigations by realizing the high-order formulation in general curvilinear coordinates.

Although it is possible to find numerous different type of iterative numerical methods for the Navier-Stokes equations, these numerical methods could not be easily used in High Order Compact (HOC) schemes because of the final form of the HOC formulations found in the literature. The final form of the high order compact Navier-Stokes equations presented in this thesis would be very useful for any iterative numerical method.

In this thesis, stream function – vorticity approximation is used for the 4th order compact formulation of Navier-Stokes equations. Incompressible two dimensional square cavity problem is chosen as a test problem and present forth order solutions of this problem is compared with the results of the new formulations.

## TEŞEKKÜR

Birlikte çalışmaktan büyük mutluluk duyduğum danışmanım Yrd.Doç.Dr. Ercan Ertürk'e daha önce başlatmış olduğu çalışmalarına bu tez ile beni de dahil ettiği için çok teşekkür ederim.

Sevgili eşim Gülin'e gerek yüksek lisansa başlamam için ısrarı gerekse bu çalışmanın tamamlanmasında da gösterdiği destek için çok teşekkür ediyorum.

Ve bu tezi 4 Ocak 2005 tarihinde dünyaya gözlerini açan oğlum Volkan'a ithaf ediyorum.

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

|  | <b><u>Sayfa</u></b> |
|--|---------------------|
| ÖZET   | (iv)                |
| SUMMARY  | (v)                 |
| TEŞEKKÜR   | (vi)                |
| İÇİNDEKİLER DİZİNİ   | (vii)               |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ                               | (ix)                |
| ŞEKİLLER DİZİNİ  | (x)                 |
| ÇİZELGELER DİZİNİ  | (xi)                |
| <br>   |                     |
| 1. GİRİŞ   | 1                   |
| <br>   |                     |
| 2. İLGİLİ DENKLEMLER VE ÇÖZÜM METODU                         | 3                   |
| 2.1. Akışkanlar Mekaniğinin İlgili Denklemleri               | 3                   |
| 2.1.1. Süreklilik İlkesi ve Korunum Yasaları                 | 3                   |
| 2.1.2. Sıkıştırılmaz Akış                                    | 4                   |
| 2.1.3. Boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklemleri         | 5                   |
| 2.1.4. İki boyutlu Akım Fonksiyonu ve Çevrinti Denklemleri   | 6                   |
| 2.2. Diferansiyel Analiz ve 4.Derece Çözüm Metodu            | 8                   |
| 2.2.1. Sonlu Fark Metodu                                     | 8                   |
| 2.2.2. Gauss-Seidel Metodu                                   | 8                   |
| 2.2.3. Koordinat Transformasyonu                             | 9                   |
| 2.2.4. Navier-Stokes Denklemlerinin 4.Dereceden Formülasyonu | 12                  |
| 2.2.5. Ağ Yapısı Oluşturma                                   | 22                  |
| 2.2.6. Katsayı Türevlerinin Analitik Çözümü                  | 26                  |
| <br>   |                     |
| 3. MODEL PROBLEM VE SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI           | 32                  |
| 3.1. Kavite Akışı  | 32                  |
| 3.1.1. Sınır Şartları  | 32                  |
| 3.1.2. Model Problem Sonuçları                               | 40                  |

|   |    |
|---|----|
| 3.2. Sonuçların Karşılaştırılması               | 46 |
| 3.2.1. Model Problem Mevcut özümü              | 46 |
| 3.2.2. Mevcut özüm Değerleri İle Karşılaştırma | 49 |
| 4. SONUÇLAR                                     | 51 |
| KAYNAKLAR                                       | 53 |
| EK-1  | 55 |
| ÖZGEÇMİŞ  | 58 |



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|          |   |
|----------|---|
| Re       | Reynolds sayısı                           |
| $\psi$   | Akım fonksiyonu                           |
| $\omega$ | Çevrinti                                  |
| $\varpi$ | Açısal hız                                |
| $\rho$   | Yoğunluk                                  |
| $\mu$    | Kinematik viskozite                       |
| $\nu$    | Dinamik viskozite                         |
| g        | Yerçekimi ivmesi                          |
| J        | Jacobian                                  |
| F        | Kuvvet                                    |
| P        | Basınç                                    |
| t        | Zaman                                     |
| dV       | Elemansal hacim                           |
| dS       | Elemansal yüzey alanı                     |
| BR       | Alt sağ kavite                            |
| BL       | Alt sol kavite                            |
| TL       | Üst sol kavite                            |
| $\xi$    | Genel koordinatlarda x eksenine karşılığı |
| $\eta$   | Genel koordinatlarda y eksenine karşılığı |
| $\zeta$  | Genel koordinatlarda z eksenine karşılığı |
| u        | x ekseninde hız bileşeni                  |
| v        | y ekseninde hız bileşeni                  |
| w        | z ekseninde hız bileşeni                  |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

| <b><u>Şekil</u></b> |   | <b><u>Sayfa</u></b> |
|---------------------|---|---------------------|
| 2.1                 | Fiziksel domain ve hesaplanabilir domain                              | 10                  |
| 3.1                 | Kare kesitte Kavite akışı   | 33                  |
| 3.2                 | Akım Fonksiyonunun Beta seçimine bağlı değişimi                       | 42                  |
| 3.3                 | $\alpha = 0.5$ ve $\beta = \infty$ için akım fonksiyonu çizgileri     | 42                  |
| 3.4                 | $\alpha = 0.5$ ve $\beta = \infty$ için çevrinti fonksiyonu çizgileri | 43                  |
| 3.5                 | $\alpha = 0.5$ ve $\beta = \infty$ için ağ yapısı                     | 43                  |
| 3.6                 | $\alpha = 0.5$ ve $\beta = 1.1$ için akım fonksiyonu çizgileri        | 44                  |
| 3.7                 | $\alpha = 0.5$ ve $\beta = 1.1$ için çevrinti fonksiyonu çizgileri    | 44                  |
| 3.8                 | $\alpha = 0.5$ ve $\beta = 1.1$ için ağ yapısı                        | 45                  |
| 3.9                 | $\alpha = 0.5$ ve $\beta = 1.02$ için akım fonksiyonu çizgileri       | 45                  |
| 3.10                | $\alpha = 0.5$ ve $\beta = 1.02$ için çevrinti fonksiyonu çizgileri   | 46                  |
| 3.11                | $\alpha = 0.5$ ve $\beta = 1.02$ için ağ yapısı                       | 46                  |
| 3.12                | Re=1000 için kavite akışı akım fonksiyonu ve çevrinti çizgileri       | 47                  |
| 3.13                | Akım Fonksiyonunun Beta seçimine bağlı değişimi                       | 49                  |
| 3.14                | Çevrinti değerlerinin Beta seçimine bağlı değişimi                    | 50                  |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

| <b><u>Çizelge</u></b>   | <b><u>Sayfa</u></b> |
|---|---------------------|
| 2.1 İkinci dereceden merkez fark açılımları                     | 8                   |
| 3.1 Maksimum akım fonksiyonu ve çevrinti değerleri              | 41                  |
| 3.2 $Re=1000$ için referans çözüm değerleri çizelgesi           | 47                  |
| 3.3 Yayınlanmış diğer mevcut referans çözüm değerleri çizelgesi | 48                  |

# 1.GİRİŞ

Hesaplmalı akışkanlar dinamiği, akışkanlar mekaniğindeki pek çok problem için sayısal metotlar geliştirilmesini mümkün kılan bir çalışma alanıdır.

Önce çözümü istenilen bölge küçük eleman ve noktalardan oluşmuş ağ yapısına ayrılır ve ilgili kısmi diferansiyel denklemler, başlangıç koşulları ve sınır şartları sonlu fark metodu gibi tekniklerle tekrar yazılır. Daha sonra da yazılan bu sonlu fark denklemleri bilgisayarda uygun programlar yazılarak sonuçların belli bir hata sınırına kadar yakınsaması ile çözümlenir.

İterasyon yöntemi olarak sıklıkla Gauss-Seidel, Newton veya SOR (Successive Over Relaxation) metodu kullanılır. Tabi ki her metodun kendine özgü avantajları ve dezavantajları bulunur. SOR uygulaması oldukça basit ve sonuca hızlı bir şekilde yakınsamak için tercih edilen bir metottur. Fakat yüksek Reynolds sayılarında yakınsama performansı, akış alanında tekil noktaların oluşması gibi dezavantajları da mevcuttur. Newton metodu SOR'la çözülemeyen problemlerde bile iyi sonuçlar vermesine rağmen en önemli dezavantajı Jacobian matrislerini çözmek için çok fazla hafızaya ve CPU zamanına ihtiyaç duymasıdır. Bu çalışmada Gauss-Seidel metodu sayılan dezavantajları içermeyeceği için uygun görülmüştür.

Akışkanlar mekaniğinde ilgili denklemlerin anlatılmasıyla başlayan 2.Bölüm boyutsuzlaştırılmış, sıkıştırılamaz, iki boyutlu, daimi Navier-Stokes denklemlerinin elde edilmesi ve bu denklemlerin akım fonksiyonu-çevrinti ikilisi ile ifade edilmesi şeklinde ilerlemektedir. Akım fonksiyonu-çevrinti denklemleri için sonlu fark metodunun uygulanışını Gauss-Seidel metodunun açıklaması ve kartezyen koordinatlardan genel koordinatlara transformasyonun sağlanması ile iki boyutlu sıkıştırılamaz, daimi akış için genel koordinatlarda 4.dereceden Navier Stokes denklemlerinin yeniden yazılması takip etmekte ve problem çözümü için gerekli ağ yapısının oluşturulması ve katsayı türevlerinin analitik çözümlerine ulaşılması ile bu bölüm son bulmaktadır.

Formülasyonu yapılan bu yeni formülün doğruluğunun test edilmesi 3.Bölümde kavite akışı ile yapılmaktadır. Kavite akışı akışkanlar mekaniğinde yeni çalışmaların test edilmesi için sıkça başvurulan bir test problemidir ve bu problemin dördüncü dereceden mevcut çözümü ile karşılaştırma yapılması formüllerin doğruluğunun test edilmesi anlamına gelmektedir [1].

Yapılan tüm bu çalışmaların ve karşılaştırma sonuçlarının değerlendirilmesinin kısa bir değerlendirmesi ise sonuçlar bölümünde sunulmaktadır.

## 2. İLGİLİ DENKLEMLER VE ÇÖZÜM METODU

### 2.1. Akışkanlar Mekaniğinin İlgili Denklemleri

Akışkanlar mekaniğindeki kısmi diferansiyel denklemleri süreklilik ilkesi ve fizikteki temel korunum yasalarını temel almaktadır. Bu bölümde akışkanlar mekaniğinin temel denklemlerinden; süreklilik ve momentum denklemleri kısaca anlatılacaktır.

#### 2.1.1 Süreklilik İlkesi Ve Korunum Yasaları

Temel diferansiyel denklemler ya elemansal denetim hacmi ya da elemansal sistem düşünülerek türetilebilirler. Sonsuz küçük bir sabit denetim hacmi seçildiğinde kütle korunumu ifadesi şu şekilde olur;

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho n \cdot u dS = 0 \quad (2.1)$$

Yüzey integrali hacim integraline dönüştürülürse [2];

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \right] dV = 0 \quad (2.2)$$

seçilecek denetim hacmi için

$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \right] = 0 \quad (2.3)$$

olur. Vektör analizi ile elde edilecek yeni ifade şu şekildedir;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot u = 0 \quad (2.4)$$

veya

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot u = 0 \quad (2.5)$$

burada  $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u.\nabla\rho$  ifadesi  $\rho$ 'un materyal türevi olarak bilinir ve

materyal türev akışla birlikte hareket ederken fiziksel bir niceliğin değişimi olarak tanımlanır.

Elde edilen kısmi diferansiyel denklemin açılımı şu şekildedir;

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.6)$$

Sonsuz küçük bir denetim hacmi için kütle korunumu, yoğunluk ve hızın sürekli fonksiyonlar olması dışında başka bir kabul gerektirmediği için bu denklem süreklilik denklemi olarak da adlandırılır.

Momentum denkleminin en genel ifadesi;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 u + f \quad (2.7)$$

şeklinde ve burada  $\nu = \mu / \rho$  kinematik viskozite olarak adlandırılır.

### 2.1.2. Sıkıştırılamaz Akış

Yoğunluk değişimlerinin ihmal edildiği akış sıkıştırılamaz akıştır. Akışın daimi olup olmamasından bağımsız olarak  $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$  olur ve sıkıştırılamaz akışlar için süreklilik ilkesinin yeni ifadesi  $\nabla.V = 0$  halini alır. Bu ifadenin kartezyen koordinatlardaki açık şekli ise;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

olur ve sıkıştırılamaz akış için Navier-Stokes denkleminin en genel hali;

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho F - \nabla p + \mu \nabla^2 u \quad (2.9)$$

şeklinde formüle edilir. Daha açık halde kartezyen koordinatlardaki ifadesi;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \omega \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

şeklinde olur.

### 2.1.3. Boyutsuzlaştırılmış Navier-Stokes Denklemleri

Akışkanlar mekaniğinde genellikle Navier-Stokes denklemlerinin boyutsuz halleri kullanılır. Uzunluk boyutu L ve hız boyutu U alındığında [3];

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{u} = \frac{u}{U}, \bar{t} = \frac{U}{L} t, \bar{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \bar{f} = \frac{L}{U^2} f, \bar{\nabla} = L \nabla \quad (2.13)$$

Bu eşitlikler (2.9) nolu denklemle verilen Navier-Stokes denkleminde yerlerine konulursa ve tüm terimler  $\frac{L}{U^2}$  ile çarpılırsa elde edilecek denklem şu şekildedir;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u + f \quad (2.14)$$

Reynolds sayısı,  $\text{Re} = \frac{LU}{\nu}$ , akışkanlar mekaniğinde temel boyutsuz sayılardan birisidir ve atalet kuvvetlerinin viskoz kuvvetlere oranı olarak tanımlanır.

İki boyutlu viskoz bir akışkan için dış kuvvetler hesaba katılmazsa süreklilik denkleminin ifadesi;



$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  ve boyutsuz Navier-Stokes denklemlerinin yeni ifadeleri;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.16)$$

şeklinde olur.

#### 2.1.4. İki Boyutlu Akım Fonksiyonu ve Çevrinti Denklemleri

Akışkan elemanının sıfır açısız hıza sahip olması kabulü ya da toplam dönmesinin sıfır olması akışkanlar mekaniğinde çok kullanışlı bir basitleştirmedir. Akış elemanının açısız hızı, akış alanında yersel hız vektörünün rotasyonun bir ölçüsüdür ve curl operatörünün hız vektörüne uygulanması sonucu elde edilir;

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\text{rot}V) \quad (2.17)$$

Açısız hızın, hız vektörünün rotasyonelinin yarısına eşit olacağı ayrıntılı olarak akışkanlar mekaniği kitaplarında anlatılmaktadır. 1/2 çarpanından kurtulmak için iki kat daha büyük bir vektör olarak tanımlanan çevrinti vektörü kullanılır. Genel koordinatlardaki ifadelerle karışmaması için çevrinti vektörü simgesi  $\zeta$  yerine tüm formüllerde  $\omega$  kullanılacaktır;

$$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega} = \text{rot}V \quad (2.18)$$

Sıkıştırılmaz akış için bu ifadeler Navier-Stokes denkleminde yerine konulursa

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \wedge \mathbf{f} \quad (2.19)$$

genel denklemine ve buradan iki boyutlu sıkıştırılamaz akış için;

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (2.20)$$

Çevrinti vektörünün x-y düzleminde ifadesi ;

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.21)$$

şeklinde ve hız vektörleri de süreklilik denklemlerini otomatik olarak sağlayan akım fonksiyonu ile ifade edilir [4];

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{ve} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.22)$$

Akım fonksiyonu ve çevrinti vektörünü birbirine bağlayan ifade;

$$\nabla^2 \psi + \omega = 0 \quad (2.23)$$

ve dolayısıyla (2.20) numaralı denklemin yeni ifadesi de şu şekilde olacaktır;

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (2.24)$$

Bu iki denklem (2.23) ve (2.24) sıkıştırılamaz Navier-Stokes denklemlerinin akım fonksiyonu-çevrinti denklemleri olarak bilinir.

## 2.2. Diferansiyel Analiz ve 4.Derece Çözüm Metodu

### 2.2.1 Sonlu Fark Metodu

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan metotlardan biri de sonlu fark metodudur. Birbirine dik çizgilerle bölünmüş ağ yapısında her bir nokta da akım fonksiyonu ve çevrinti değerlerini hesaplamak için Taylor Serisi açılımından faydalanılarak oluşturulan sonlu fark metodunun, x ve y koordinatlarındaki ikinci dereceden merkez fark hesaplamaları Çizelge.2.1'deki formüllere göre yapılır.

Çizelge 2.1 İkinci dereceden merkez fark açılımları

$$\begin{aligned}\phi_x &= \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \phi_y &= \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ \phi_{xx} &= \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \phi_{yy} &= \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \\ \phi_{xy} &= \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta y} \\ \phi_{xxy} &= \frac{\phi_{i+1,j+1} - 2\phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + 2\phi_{i,j-1} - \phi_{i-1,j-1}}{2\Delta x^2\Delta y} \\ \phi_{xyy} &= \frac{\phi_{i+1,j+1} - 2\phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} + 2\phi_{i-1,j} - \phi_{i-1,j-1}}{2\Delta x\Delta y^2} \\ \phi_{xyyy} &= \frac{\phi_{i+1,j+1} - 2\phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j+1} - 2\phi_{i+1,j} + 4\phi_{i,j} - 2\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j-1} - 2\phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j-1}}{\Delta x^2\Delta y^2}\end{aligned}$$

### 2.2.2. Gauss-Siedel İterasyon Metodu

Gauss-Seidel,  $Ax=b$  gibi doğrusal sistemlerin çözümü için tercih edilen bir iterasyon metodudur.

$x$ 'e yakınsayan  $x^{(k)}$  dizisi seçilir. Verilen  $x^{(0)}$  için,  $x^{(k)}$  dizisi oluşturulur ki  $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$  ve  $k \in \mathbb{N}$ 'dir.

$A = M - N$  olarak alınır ve burada  $M$  tersinir matrisdir.

$$Ax = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \\ = F(x)$$

$A$  matrisi şu şekilde ayrıştırılır :

$$A = D - E - F$$

- ▶  $D$  diagonal
- ▶  $-E$   $A$  matrisinin aşağı üçgensel parçası
- ▶  $-F$   $A$  matrisinin yukarı üçgensel parçası

Gauss-Seidel metodunda  $M = D - E$  ve  $N = F$  seçimini yaparak;

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} Fx^{(k)} + (D - E)^{-1} b$$

ve

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \quad (2.25)$$

iterasyon formülü elde edilir.

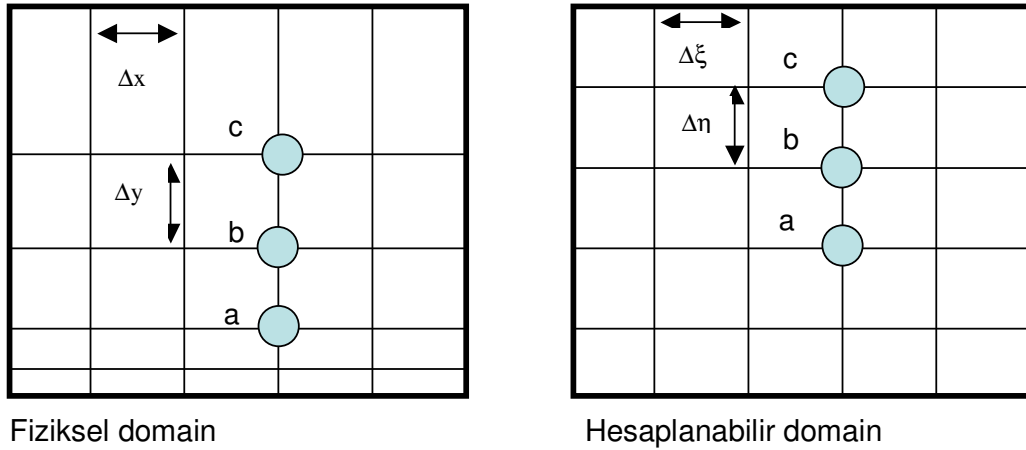
Yazılacak iterasyon programı içerisinde konulacak hata sınırına kadar bu iterasyon sonuca yaklaşılmaya devam edecektir.

$$\sum_{i,j} |\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n| < \epsilon \quad (2.26)$$

$\epsilon$  iterasyon hata toleransıdır.

### 2.2.3. Koordinat Transformasyonu

Fiziksel domainde ifade edilebilen bir olayı hesaplanabilir domainde de ifade edebilmek için kartezyen koordinatların;  $x, y, z$ , genel eğrisel koordinatlara;  $\xi, \eta, \zeta$  transformasyonu gerekmektedir [5]. Şekil 2.1 de bu transformasyon iki boyutlu daimi akış için gösterilmeye çalışılmıştır.



Şekil 2.1 Fiziksel domain ve hesaplanabilir domain

$$\xi = \xi(x,y) \quad (2.27)$$

$$\eta = \eta(x,y) \quad (2.28)$$

zincir kuralına göre kısmi diferansiyeller olarak bu dönüşümler 1.türevler olarak;

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.30)$$

ve 2. türevler olarak;

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \quad (2.32)$$

şeklinde formüle edilir.

1.türevler cinsinden yazılan ifadeyi matris olarak yazarsak;

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

ya da başka bir ifadeyle  $V_2=M_2*V_1$

aynı şekilde ters transformasyon matrisini yazarsak;

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$V_1=M_1*V_2$  eşitliğini elde ederiz. Görüldüğü gibi  $M_2$  matrisi  $M_1$  matrisinin tersine eşit olmak durumundadır. Burada

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

matrisi Jacobian olarak adlandırılır ve elde edilecek transformasyonlar şu şekilde sıralanır;

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (2.39)$$

#### 2.2.4. Navier-Stokes Denklemlerinin 4.Dereceden Formülasyonu

Kartezyen koordinatlarda akım fonksiyonu ve çevrinti denklemleri [6];

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (2.41)$$

(2.40) ve (2.41) nolu denklemlerin genel koordinatlarda ifadesi ;

$$\begin{aligned} & \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ & + \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + 2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = -\omega \end{aligned} \quad (2.42)$$

ve dik ağ yapısında;

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.43)$$

bu durumda (2.40) nolu formül ;

$$\begin{aligned} & \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ & + \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\omega \end{aligned} \quad (2.44)$$

sabit toplamları yeniden adlandırırsak;

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = A \quad (2.45)$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = B \quad (2.46)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) = C \quad (2.47)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) = D \quad (2.48)$$

(2.40) nolu formülün yeni ifadesi şu şekilde olur;

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + C \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + D \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\omega \quad (2.49)$$

(2.41) nolu formülü genel koordinatlarda yeniden yazarsak;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re}} 2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} \\ & = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.50)$$

ve tekrar dik ağ yapısı için [7];

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.51)$$



bu durumda formül;

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \\
& + \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\
& = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

ve sabit toplamları tekrar adlandırarak olursak;

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = A \tag{2.53}$$

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = B \tag{2.54}$$

$$\left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = C \tag{2.55}$$

$$\left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = D \tag{2.56}$$

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = E \tag{2.57}$$

(2.41) nolu formülün yeni ifadesi de şu şekilde olur;

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( A \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + B \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + C \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + D \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) = E \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - E \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \tag{2.58}$$

Sonlu fark metodunda birinci ve ikinci türevlerin Taylor serisi açılımlarından faydalanılarak elde edilen 4.dereceden ifadeleri;

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = f_{\xi} - \frac{\Delta \xi^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + O(\Delta \xi^4) \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = f_{\xi\xi} - \frac{\Delta \xi^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial \xi^4} + O(\Delta \xi^4) \quad (2.60)$$

$$f_{\xi} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta \xi} \quad (2.61)$$

$$f_{\xi\xi} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta \xi^2} \quad (2.62)$$

şeklindedir ve bu ifadeleri (2.49) nolu denklemde yerine koyarsak;

$$\begin{aligned} A\psi_{\xi\xi} + B\psi_{\eta\eta} + C\psi_{\xi} + D\psi_{\eta} = -\omega + A \frac{\Delta \xi^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} \\ + B \frac{\Delta \eta^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4} + C \frac{\Delta \xi^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + D \frac{\Delta \eta^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{\text{Re}} \omega_{\xi\xi} + \frac{B}{\text{Re}} \omega_{\eta\eta} + \frac{C}{\text{Re}} \omega_{\xi} + \frac{D}{\text{Re}} \omega_{\eta} = E(\psi_{\eta} \omega_{\xi} - \psi_{\xi} \omega_{\eta}) - E\psi_{\eta} \frac{\Delta \xi^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^3} \\ + E\omega_{\eta} \frac{\Delta \xi^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + \frac{C}{\text{Re}} \frac{\Delta \xi^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^3} + \frac{D}{\text{Re}} \frac{\Delta \eta^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^3} - E\omega_{\xi} \frac{\Delta \eta^2}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} \\ + E\psi_{\xi} \frac{\Delta \eta^2}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^3} + \frac{A}{\text{Re}} \frac{\Delta \xi^2}{12} \frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^4} + \frac{B}{\text{Re}} \frac{\Delta \eta^2}{12} \frac{\partial^4 \omega}{\partial \eta^4} \end{aligned} \quad (2.64)$$

elde edilir. Üçüncü ve dördüncü türevlerin karşılığını ise formülünün  $\xi$  ve  $\eta$ 'ye göre birinci ve ikinci türevlerini alarak ulaşılır.

Akım fonksiyonunun  $\xi$ 'ye göre 3.türevi şu şekilde bulunur;

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( A \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + C \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + D \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\omega \right) \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} = - \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + B \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi \partial \eta^2} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right. \\ \left. + \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + D \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

$\xi$ 'ye göre 4.türevini bulmak için 3.türevin tekrar türevi alınır;

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( A \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} \right) \Rightarrow \\ & A \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} = \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + 2 \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi \partial \eta^2} + B \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right. \\ & + 2 \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + C \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \\ & \left. + D \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

Aynı şekilde  $\eta$ 'ye göre akım fonksiyonun 3.türevi şu şekilde formülize edilir;

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left( A \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + C \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + D \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\omega \right) \\ & B \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + A \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta \partial \xi^2} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} \right. \\ & \left. + \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + D \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial D}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

$\eta$ 'ye göre 4.türevi ise;

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left( B \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} \right) \Rightarrow \\ & B \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4} = \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta \partial \xi^2} + A \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right. \\ & + 2 \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta \partial \eta^3} + 2 \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \eta \partial \xi} + C \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^2 \partial \xi} + \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial D}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \eta^2} \\ & \left. + D \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

Tekrar (2.63) nolu denklemde yerine konulan bu ifadeler  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$ , ve  $F$  katsayıları içerisinde yerleştirilir ve akım fonksiyonu formülün 4.dereceden en genel ifadesine ulaşılır;

$$A_2 \psi_{\xi\xi} + B_2 \psi_{\eta\eta} + C_2 \psi_{\xi} + D_2 \psi_{\eta} = -\omega + F \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= A + \frac{\Delta\xi^2}{12} A_{\xi\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{C^2}{A} - \frac{\Delta\xi^2}{12} A_{\xi} \frac{C}{A} - \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{A_{\xi}^2}{A} + \frac{\Delta\xi^2}{6} C_{\xi} \\ &\quad + \frac{\Delta\eta^2}{12} A_{\eta\eta} + \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{D}{B} A_{\eta} - \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{B_{\eta}}{B} A_{\eta} \\ B_2 &= B + \frac{\Delta\xi^2}{12} B_{\xi\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{C}{A} B_{\xi} + \frac{\Delta\eta^2}{12} B_{\eta\eta} - \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{A_{\xi}}{A} B_{\xi} \\ &\quad + \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{D^2}{B} - \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{B_{\eta}}{B} D - \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{B_{\eta}^2}{B} + \frac{\Delta\eta^2}{6} D_{\eta} \\ C_2 &= C + \frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{C}{A} C_{\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{12} C_{\xi\xi} - \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{A_{\xi}}{A} C_{\xi} \\ &\quad + \frac{\Delta\eta^2}{12} C_{\eta\eta} + \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{D}{B} C_{\eta} - \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{B_{\eta}}{B} C_{\eta} \\ D_2 &= D - \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{A_{\xi}}{A} D_{\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{C}{A} D_{\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{12} D_{\xi\xi} \\ &\quad + \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{D}{B} D_{\eta} + \frac{\Delta\eta^2}{12} D_{\eta\eta} - \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{B_{\eta}}{B} D_{\eta} \\ F &= -\frac{\Delta\xi^2}{12} \omega_{\xi\xi} - \frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{C}{A} \omega_{\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{A_{\xi}}{A} \omega_{\xi} - \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{D}{B} \omega_{\eta} - \frac{\Delta\eta^2}{12} \omega_{\eta\eta} + \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{B_{\eta}}{B} \omega_{\eta} \\ &\quad \left[ -\frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{C}{A} D - \frac{\Delta\xi^2}{6} D_{\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{A_{\xi}}{A} D - \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{D}{B} C + \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{B_{\eta}}{B} C - \frac{\Delta\eta^2}{6} C_{\eta} \right] \psi_{\xi\eta} \\ &\quad \left[ -\frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{C}{A} B + \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{A_{\xi}}{A} B - \frac{\Delta\eta^2}{12} C - \frac{\Delta\xi^2}{6} B_{\xi} \right] \psi_{\xi\eta\eta} \\ &\quad \left[ -\frac{\Delta\xi^2}{12} D - \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{D}{B} A + \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{B_{\eta}}{B} A - \frac{\Delta\eta^2}{6} A_{\eta} \right] \psi_{\eta\xi\xi} \\ &\quad \left[ -\frac{\Delta\eta^2}{12} A - \frac{\Delta\xi^2}{12} B \right] \psi_{\xi\xi\eta\eta} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Aynı işlemler çevrinti denkleminin en genel ifadesine ulaşmak için bu defa (2.64) nolu denklemdeki üçüncü ve dördüncü türevleri bulmak için tekrarlanır.

$\omega$ 'nin  $\xi$ 'ye göre 3. ve 4. türevlerine şu şekilde ulaşılır;

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\text{Re}} \left( A \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + B \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + C \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + D \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) = E \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - E \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^3} = & \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \text{Re} E \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \text{Re} E \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\ & - \text{Re} E \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \text{Re} E \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \\ & - B \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - C \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - D \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned} \quad (2.73)$$

4.türevini bulmak için;

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( A \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^3} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^4} = & \text{Re} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + 2 \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + 2 \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} \\ & + 2 \text{Re} E \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \text{Re} E \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^2 \partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \text{Re} E \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^3} \\ & - \text{Re} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2 \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2 \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} \\ & - \text{Re} E \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2 \text{Re} E \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} - \text{Re} E \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^2 \partial \eta} \\ & - \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi \partial \eta^2} \\ & - B \frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - C \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^3} \\ & - \frac{\partial^2 D}{\partial \xi^2} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} - D \frac{\partial^3 \omega}{\partial \xi^2 \partial \eta} \end{aligned} \quad (2.74)$$

$\eta$ 'ye göre 3.türevi bulmak için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\text{Re}} \left( A \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + B \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + C \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + D \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \right) &= E \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - E \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\
B \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^3} &= \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \text{Re} E \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \text{Re} E \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta \partial \xi} \\
&\quad - \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \text{Re} E \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \text{Re} E \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \\
&\quad - \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - A \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta \partial \xi^2} - \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} - \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \\
&\quad - C \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial D}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - D \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$\eta$ 'ye göre 4.türevini bulmak için;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \eta} \left( B \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^3} \right) &\Rightarrow \\
B \frac{\partial^4 \omega}{\partial \eta^4} &= \text{Re} \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + 2 \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + 2 \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta \partial \xi} \\
&\quad + \text{Re} E \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + 2 \text{Re} E \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta \partial \xi} + \text{Re} E \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^2 \partial \xi} \\
&\quad - \text{Re} \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2 \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2 \text{Re} \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \\
&\quad - \text{Re} E \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^2 \partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2 \text{Re} E \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} - \text{Re} E \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^3} \\
&\quad - \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta \partial \xi^2} - A \frac{\partial^4 \omega}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} \\
&\quad - \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta \partial \eta^3} - \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta \partial \eta \partial \xi} \\
&\quad - C \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^2 \partial \xi} - \frac{\partial^2 D}{\partial \eta^2} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - 2 \frac{\partial D}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} - D \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^3}
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Tekrar (2.64) nolu denklemde yerine konulan bu ifadeler  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$ ,  $D_3$ , ve  $G$  katsayıları içerisinde yerleştirilir ve çevrinti fonksiyonu formülünün 4.dereceden en genel ifadesine ulaşılır;

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( A_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + B_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + C_3 \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + D_3 \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) - G = 0 \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} A_3 = & A + \frac{\Delta \xi^2}{12} \frac{C^2}{A} + \frac{\Delta \xi^2}{6} C_\xi + \frac{\Delta \xi^2}{12} A_{\xi\xi} - \frac{\Delta \xi^2}{12} A_\xi \frac{C}{A} \\ & - \frac{\Delta \xi^2}{6} \frac{A_\xi^2}{A} + \frac{\Delta \eta^2}{12} A_{\eta\eta} + \frac{\Delta \eta^2}{12} \frac{D}{B} A_\eta - \frac{\Delta \eta^2}{6} \frac{B_\eta}{B} A_\eta \\ & \left[ + \frac{\Delta \eta^2}{12} \frac{E}{B} \text{Re} A_\eta \right] \psi_\xi \\ & \left[ + \frac{\Delta \xi^2}{12} \frac{\text{Re}^2}{A} E^2 \psi_\eta + \frac{\Delta \xi^2}{12} \text{Re} \frac{E}{A} A_\xi - \frac{\Delta \xi^2}{6} \text{Re} E_\xi - \frac{\Delta \xi^2}{6} \frac{EC}{A} \text{Re} \right] \psi_\eta \\ & \left[ - \frac{\Delta \xi^2}{6} \text{Re} E \right] \psi_{\xi\eta} \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} B_3 = & B + \frac{\Delta \eta^2}{12} \frac{D^2}{B} + \frac{\Delta \eta^2}{6} D_\eta + \frac{\Delta \eta^2}{12} B_{\eta\eta} - \frac{\Delta \eta^2}{12} \frac{D}{B} B_\eta \\ & - \frac{\Delta \eta^2}{6} \frac{B_\eta^2}{B} + \frac{\Delta \xi^2}{12} B_{\xi\xi} + \frac{\Delta \xi^2}{12} \frac{C}{A} B_\xi - \frac{\Delta \xi^2}{6} \frac{A_\xi}{A} B_\xi \\ & \left[ - \frac{\Delta \xi^2}{12} \text{Re} \frac{E}{A} B_\xi \right] \psi_\eta \\ & \left[ + \frac{\Delta \eta^2}{12} \text{Re}^2 \frac{E^2}{B} \psi_\xi - \frac{\Delta \eta^2}{12} \frac{E}{B} \text{Re} B_\eta + \frac{\Delta \eta^2}{6} \text{Re} E_\eta + \frac{\Delta \eta^2}{6} \frac{ED}{B} \text{Re} \right] \psi_\xi \\ & \left[ + \frac{\Delta \eta^2}{6} \text{Re} E \right] \psi_{\eta\xi} \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} C_3 = & C + \frac{\Delta \xi^2}{12} C_{\xi\xi} + \frac{\Delta \xi^2}{12} \frac{C}{A} C_\xi - \frac{\Delta \xi^2}{6} C_\xi \frac{A_\xi}{A} + \frac{\Delta \eta^2}{12} C_{\eta\eta} + \frac{\Delta \eta^2}{12} \frac{D}{B} C_\eta - \frac{\Delta \eta^2}{6} \frac{B_\eta}{B} C_\eta \\ & \left[ - E \text{Re} + \frac{\Delta \xi^2}{12} \text{Re}^2 \frac{E}{A} E_\xi \psi_\eta - \frac{\Delta \xi^2}{12} \frac{E}{A} \text{Re} C_\xi \right. \\ & \left. - \frac{\Delta \xi^2}{12} \text{Re} \frac{C}{A} E_\xi - \frac{\Delta \xi^2}{12} \text{Re} E_{\xi\xi} + \frac{\Delta \xi^2}{6} \text{Re} E_\xi \frac{A_\xi}{A} - \frac{\Delta \eta^2}{12} \text{Re}^2 \frac{E}{B} E_\eta \psi_\xi \right. \\ & \left. - \frac{\Delta \eta^2}{12} \text{Re} \frac{D_\eta}{B} E - \frac{\Delta \eta^2}{12} \text{Re} E_{\eta\eta} - \frac{\Delta \eta^2}{12} \text{Re} \frac{D}{B} E_\eta + \frac{\Delta \eta^2}{6} \text{Re} \frac{B_\eta}{B} E_\eta \right] \psi_\eta \\ & \left[ + \frac{\Delta \xi^2}{12} \text{Re}^2 \frac{E^2}{A} \psi_\eta - \frac{\Delta \xi^2}{12} \text{Re} \frac{CE}{A} + \frac{\Delta \xi^2}{6} \frac{E}{A} \text{Re} A_\xi - \frac{\Delta \xi^2}{6} \text{Re} E_\xi - \frac{\Delta \eta^2}{12} \text{Re} \frac{EC}{B} \right] \psi_{\xi\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ -\frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re} \frac{A_\eta}{B} E \right] \psi_{\xi\xi} \\
& \left[ +\frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re} \frac{B_\eta}{B} E - \frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re}^2 \frac{E^2}{B} \psi_\xi - \frac{\Delta\eta^2}{6} \operatorname{Re} E_\eta - \frac{\Delta\eta^2}{6} \operatorname{Re} \frac{ED}{B} \right] \psi_{\eta\eta} \\
& \left[ -\frac{\Delta\xi^2}{12} \operatorname{Re} E - \frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re} \frac{EA}{B} \right] \psi_{\eta\xi\xi} \tag{2.80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 = D & + \frac{\Delta\xi^2}{12} D_{\xi\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{C}{A} D_\xi - \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{A_\xi}{A} D_\xi + \frac{\Delta\eta^2}{12} D_{\eta\eta} + \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{D}{B} D_\eta - \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{B_\eta}{B} D_\eta \\
& \left[ +E \operatorname{Re} + \frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re}^2 \frac{E}{B} E_\eta \psi_\xi + \frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re} \frac{E}{B} D_\eta \right. \\
& \quad + \frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re} \frac{D}{B} E_\eta + \frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re} E_{\eta\eta} - \frac{\Delta\eta^2}{6} \operatorname{Re} \frac{B_\eta}{B} E_\eta - \frac{\Delta\xi^2}{12} \operatorname{Re}^2 \frac{E}{A} E_\xi \psi_\eta \\
& \quad \left. + \frac{\Delta\xi^2}{12} \operatorname{Re} \frac{E}{A} C_\xi + \frac{\Delta\xi^2}{12} \operatorname{Re} E_{\xi\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{12} \operatorname{Re} \frac{C}{A} E_\xi - \frac{\Delta\xi^2}{6} \operatorname{Re} \frac{A_\xi}{A} E_\xi \right] \psi_\xi \\
& \left[ +\frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re}^2 \frac{E^2}{B} \psi_\xi + \frac{\Delta\xi^2}{12} \operatorname{Re} \frac{ED}{A} - \frac{\Delta\eta^2}{6} \operatorname{Re} \frac{E}{B} B_\eta + \frac{\Delta\eta^2}{6} \operatorname{Re} E_\eta + \frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re} \frac{D}{B} E \right] \psi_{\eta\xi} \\
& \left[ +\frac{\Delta\xi^2}{12} \operatorname{Re} \frac{E}{A} B_\xi \right] \psi_{\eta\eta} \\
& \left[ -\frac{\Delta\xi^2}{12} \operatorname{Re} \frac{E}{A} A_\xi - \frac{\Delta\xi^2}{12} \operatorname{Re}^2 \frac{E^2}{A} \psi_\eta + \frac{\Delta\xi^2}{6} \operatorname{Re} E_\xi + \frac{\Delta\xi^2}{6} \operatorname{Re} \frac{EC}{A} \right] \psi_{\xi\xi} \\
& \left[ +\frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re} E + \frac{\Delta\xi^2}{12} \operatorname{Re} \frac{EB}{A} \right] \psi_{\eta\xi\xi} \tag{2.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G = & \left[ -\frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{E}{A} \omega_\xi + \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{E}{B} \omega_\xi \right] \omega_\eta \\
& \left[ +\frac{\Delta\xi^2}{12} \operatorname{Re} \frac{E^2}{A} \psi_\eta \psi_\xi + \frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{ED}{A} \psi_\eta \right. \\
& \quad - \frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{1}{\operatorname{Re} A} \frac{CD}{A} - \frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{CE}{A} \psi_\xi + \frac{\Delta\xi^2}{6} E \frac{A_\xi}{A} \psi_\xi - \frac{\Delta\xi^2}{6} E_\xi \psi_\xi - \frac{\Delta\xi^2}{6} E \psi_{\xi\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{1}{\operatorname{Re} A} \frac{A_\xi}{A} D \\
& \quad + \frac{\Delta\eta^2}{6} E_\eta \psi_\eta - \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{1}{\operatorname{Re} A} D_\xi + \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{DE}{B} \psi_\eta - \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{EC}{B} \psi_\xi - \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{1}{\operatorname{Re} B} \frac{DC}{B} \\
& \quad \left. + \frac{\Delta\eta^2}{6} E \psi_{\eta\eta} + \frac{\Delta\eta^2}{12} \operatorname{Re} \frac{E^2}{B} \psi_\xi \psi_\eta - \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{E}{B} B_\eta \psi_\eta + \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{1}{\operatorname{Re} B} \frac{C}{B_\eta} - \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{1}{\operatorname{Re} A} C_\eta \right] \omega_{\eta\xi} \\
& \left[ -\frac{\Delta\xi^2}{12} E \psi_\xi - \frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{1}{\operatorname{Re} A} D + \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{1}{\operatorname{Re} B} B_\eta - \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{1}{\operatorname{Re} B} \frac{DA}{B} - \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{EA}{B} \psi_\xi - \frac{\Delta\eta^2}{6} \frac{1}{\operatorname{Re} A} A_\eta \right] \omega_{\eta\xi\xi}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left[ -\frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{1}{\text{Re}} \frac{CB}{A} + \frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{EB}{A} \psi_\eta - \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{1}{\text{Re}} B_\xi + \frac{\Delta\xi^2}{6} \frac{1}{\text{Re}} \frac{A_\xi}{A} B + \frac{\Delta\eta^2}{12} E \psi_\eta - \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{1}{\text{Re}} C \right] \omega_{\eta\xi} \\
& \left[ -\frac{\Delta\xi^2}{12} \frac{1}{\text{Re}} B - \frac{\Delta\eta^2}{12} \frac{1}{\text{Re}} A \right] \omega_{\eta\xi\xi} \quad (2.82)
\end{aligned}$$

### 2.2.5. Ağ Yapısı Oluşturma

Problemin çözümü için önce bir ağ yapısı oluşturulması gerekir ve problem sonuçlandığında bu ağ yapısı üzerindeki noktalar bize akım fonksiyonu ve çevrinti değerlerinin çözümlerini verir. Bu çalışmada akım fonksiyonu ve çevrinti değerlerinin hesaplanacağı noktalar seçilen şu fonksiyon üzerinde aranacaktır [8];

$$\bar{y} = \alpha + \frac{(1-\alpha) \ln\{\beta + [y(2\alpha+1)]/h - 2\alpha\} / \{\beta - [y(2\alpha+1)/h] + 2\alpha\}}{\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]} \quad (2.83)$$

$\beta$ 'nin boyutsuz sınır tabakası kalınlığı ile ilişkilendirilmesi şu şekildedir;

$$\beta = \left(1 - \frac{\delta}{h}\right)^{-1/2} \quad 0 < \frac{\delta}{h} < 1 \quad (2.84)$$

Bu formüller kullanıldığında sınırlardaki veya merkezdeki ağ yapısında genişleme ve daralmalar sağlanabilmektedir. Çözümün önem taşıdığı bölgelerde ağ yapısının sıklaştırılması hesaplamalı akışkanlar dinamiğinde sıkça başvurulan bir yoldur.

Transformasyon fonksiyonuna ve ona ait ters transformasyon fonksiyonuna ait, bir, iki, üç ve dördüncü türevler aşağıdaki formüllerle hesaplanmıştır;

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{2\beta(1-\alpha)(2\alpha+1)}{h\{\beta^2 - [y(2\alpha+1)/h - 2\alpha]^2\} \ln[(\beta+1)/(\beta-1)]} \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2} = \frac{4\beta(1-\alpha)(2\alpha+1)^2 [y(2\alpha+1)/h - 2\alpha]}{h^2 \{\beta^2 - [y(2\alpha+1)/h - 2\alpha]^2\} \ln[(\beta+1)/(\beta-1)]} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial y^3} &= \frac{4\beta(1-\alpha)(2\alpha+1)^3}{h^3 \left\{ \beta^2 - [y(2\alpha+1)/h - 2\alpha]^2 \right\}^2 \ln[(\beta+1)/(\beta-1)]} \\ &+ \frac{16\beta(1-\alpha)(2\alpha+1)^3 [y(2\alpha+1)/h - 2\alpha]^2}{h^3 \left\{ \beta^2 - [y(2\alpha+1)/h - 2\alpha]^2 \right\}^3 \ln[(\beta+1)/(\beta-1)]} \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial y^4} &= \frac{48\beta(1-\alpha)(2\alpha+1)^4 [y(2\alpha+1)/h - 2\alpha]}{h^4 \left\{ \beta^2 - [y(2\alpha+1)/h - 2\alpha]^2 \right\}^3 \ln[(\beta+1)/(\beta-1)]} \\ &+ \frac{96\beta(1-\alpha)(2\alpha+1)^4 [y(2\alpha+1)/h - 2\alpha]^3}{h^4 \left\{ \beta^2 - [y(2\alpha+1)/h - 2\alpha]^2 \right\}^4 \ln[(\beta+1)/(\beta-1)]} \end{aligned} \quad (2.88)$$

ters transformasyon fonksiyonu ve türevleri aşağıdaki gibidir;

$$y = h \frac{(\beta+2\alpha)[(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} - \beta + 2\alpha}{(2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}} \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = h \frac{2\beta \ln[(\beta+1)/(\beta-1)] [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)(2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^2} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial \bar{y}^2} &= h \frac{2\beta [\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^2 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^2 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^4} \\ &- h \frac{2\beta [\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^2 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{3(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^2 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^4} \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 y}{\partial \bar{y}^3} &= h \frac{2\beta [\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^3 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^3 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^8} \\ &- h \frac{18\beta [\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^3 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{3(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^3 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h \frac{32\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^3 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{4(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^3 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^8} \\
& -h \frac{18\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^3 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{5(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^3 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^8} \\
& +h \frac{2\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^3 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{7(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^3 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^8}
\end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 y}{\partial \bar{y}^4} = & h \frac{2\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}} \\
& -h \frac{110\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{3(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}} \\
& -h \frac{640\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{4(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}} \\
& -h \frac{1782\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{5(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}} \\
& -h \frac{2816\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{6(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h \frac{2310\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{7(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}} \\
& + h \frac{2310\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{9(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}} \\
& + h \frac{2816\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{10(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}} \\
& + h \frac{1782\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{11(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}} \\
& + h \frac{640\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{12(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}} \\
& + h \frac{110\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{13(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}} \\
& - h \frac{2\beta[\ln[(\beta+1)/(\beta-1)]]^4 [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{15(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}}}{(1-\alpha)^4 (2\alpha+1) \left\{ 1 + [(\beta+1)/(\beta-1)]^{\frac{(\bar{y}-\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}^{16}}
\end{aligned}$$

(2.93)

### 2.2.6. Katsayı Türevlerinin Analitik Çözümü

Akım fonksiyonu ve çevrinti denklemlerinde bulunan katsayıların ifadeleri (2.53), (2.54), (2.55), (2.56) ve (2.57) numaralı formüllerle verilmişti.

A, B, C, D ve E katsayılarına ait  $A_{\xi}$ ,  $A_{\xi\xi}$ ,  $B_{\eta}$ ,  $B_{\eta\eta}$ ,  $C_{\xi}$ ,  $C_{\xi\xi}$ ,  $D_{\eta}$ ,  $D_{\eta\eta}$ ,  $E_{\xi}$ ,  $E_{\xi\xi}$ ,  $E_{\eta}$ ,  $E_{\eta\eta}$  türevlerinin analitik çözümleri ise şu şekilde yapılmıştır;

$$A = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \quad (2.94)$$

$$\frac{dA}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \quad (2.95)$$

$$\frac{dA}{d\xi} = 2 \frac{d^2 \xi}{dx^2} \quad (2.96)$$

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left[ 2 \frac{d^2 \xi}{dx^2} \right] = \frac{dx}{d\xi} \frac{d}{dx} \left[ 2 \frac{d^2 \xi}{dx^2} \right] \quad (2.97)$$

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} = \frac{dx}{d\xi} 2 \frac{d^3 \xi}{dx^3} \quad (2.98)$$

$$B = \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \quad (2.99)$$

$$\frac{dB}{d\eta} = \frac{dy}{d\eta} \frac{d}{dy} \left( \frac{d\eta}{dy} \right)^2 \quad (2.100)$$

$$\frac{dB}{d\eta} = 2 \frac{d^2 \eta}{dy^2} \quad (2.101)$$

$$\frac{d^2 B}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta} \left[ 2 \frac{d^2 \eta}{dy^2} \right] = \frac{dy}{d\eta} \frac{d}{dy} \left[ 2 \frac{d^2 \eta}{dy^2} \right] \quad (2.102)$$

$$\frac{d^2 B}{d\eta^2} = \frac{dy}{d\eta} 2 \frac{d^3 \eta}{dy^3} \quad (2.103)$$

$$C = \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \quad (2.104)$$

$$\frac{dC}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 \xi}{dx^2} \right) \quad (2.105)$$

$$\frac{dC}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi} \frac{d^3 \xi}{dx^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2 A}{d\xi^2} \quad (2.106)$$

$$\frac{d^2 C}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dC}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dx}{d\xi} \frac{d^3 \xi}{dx^3} \right) \quad (2.107)$$

$$= \frac{d^2 x}{d\xi^2} \frac{d^3 \xi}{dx^3} + \frac{dx}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d^3 \xi}{dx^3} \right) \quad (2.108)$$

$$= \frac{d^2 x}{d\xi^2} \frac{d^3 \xi}{dx^3} + \frac{dx}{d\xi} \frac{dx}{d\xi} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^3 \xi}{dx^3} \right) \quad (2.109)$$

$$\frac{d^2 C}{d\xi^2} = \frac{d^2 x}{d\xi^2} \frac{d^3 \xi}{dx^3} + \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^2 \left( \frac{d^4 \xi}{dx^4} \right) \quad (2.110)$$

$$D = \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \quad (2.111)$$

$$\frac{dD}{d\eta} = \frac{dy}{d\eta} \frac{d}{dy} \left( \frac{d^2 \eta}{dy^2} \right) \quad (2.112)$$

$$\frac{dD}{d\eta} = \frac{dy}{d\eta} \frac{d^3 \eta}{dy^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2 B}{d\eta^2} \quad (2.113)$$

$$\frac{d^2 D}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{dD}{d\eta} \right) = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{dy}{d\eta} \frac{d^3 \eta}{dy^3} \right) \quad (2.114)$$

$$= \frac{d^2 y}{d\eta^2} \frac{d^3 \eta}{dy^3} + \frac{dy}{d\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{d^3 \eta}{dy^3} \right) \quad (2.115)$$

$$= \frac{d^2 y}{d\eta^2} \frac{d^3 \eta}{dy^3} + \frac{dy}{d\eta} \frac{dy}{d\eta} \frac{d}{dy} \left( \frac{d^3 \eta}{dy^3} \right) \quad (2.116)$$

$$\frac{d^2 D}{d\eta^2} = \frac{d^2 y}{d\eta^2} \frac{d^3 \eta}{dy^3} + \left( \frac{dy}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{d^4 \eta}{dy^4} \right) \quad (2.117)$$

$$E = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (2.118)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (2.119)$$

$$= \frac{dx}{d\xi} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\xi}{dx} \frac{d\eta}{dy} \right) \quad (2.120)$$

$$= \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^{-1} \frac{d^2 \xi}{dx^2} \frac{d\eta}{dy} + \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^{-1} \frac{d\xi}{dx} \frac{d^2 \eta}{dx dy} \quad (2.121)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^{-1} \frac{d^2 \xi}{dx^2} \frac{d\eta}{dy} \quad (2.122)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^{-1} \frac{d^2 \xi}{dx^2} \frac{d\eta}{dy} \right) \quad (2.123)$$

$$= \frac{dx}{d\xi} \frac{d}{dx} \left( \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^{-1} \frac{d^2 \xi}{dx^2} \frac{d\eta}{dy} \right) \quad (2.124)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-1} (-1) \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-2} \frac{d^2\xi}{dx^2} \frac{d^2\xi}{dx^2} \frac{d\eta}{dy} + \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-1} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-1} \frac{d^3\xi}{dx^3} \frac{d\eta}{dy} \\
&+ \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-1} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-1} \frac{d^2\xi}{dx^2} \frac{d^2\eta}{dx dy}
\end{aligned} \tag{2.125}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = -\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-3} \left(\frac{d^2\xi}{dx^2}\right)^2 \frac{d\eta}{dy} + \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-2} \frac{d^3\xi}{dx^3} \frac{d\eta}{dy} \tag{2.126}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \tag{2.127}$$

$$= \frac{dy}{d\eta} \frac{d}{dy} \left( \frac{d\xi}{dx} \frac{d\eta}{dy} \right) \tag{2.128}$$

$$= \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-1} \frac{d^2\eta}{dy^2} \frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-1} \frac{d\eta}{dy} \frac{d^2\xi}{dy dx} \tag{2.129}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} = \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-1} \frac{d^2\eta}{dy^2} \frac{d\xi}{dx} \tag{2.130}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-1} \frac{d^2\eta}{dy^2} \frac{d\xi}{dx} \right) \tag{2.131}$$

$$= \frac{dy}{d\eta} \frac{d}{dy} \left( \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-1} \frac{d^2\eta}{dy^2} \frac{d\xi}{dx} \right) \tag{2.132}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-1} (-1) \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-2} \frac{d^2\eta}{dy^2} \frac{d^2\eta}{dy^2} \frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-1} \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-1} \frac{d^3\eta}{dy^3} \frac{d\xi}{dx} \\
&+ \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-1} \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-1} \frac{d^2\eta}{dy^2} \frac{d^2\xi}{dy dx}
\end{aligned} \tag{2.133}$$



$$\frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} = -\left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-3} \left(\frac{d^2\eta}{dy^2}\right)^2 \frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^{-2} \frac{d^3\eta}{dy^3} \frac{d\xi}{dx} \quad (2.134)$$

Katsayı hesaplamalarında kullanılacak  $\frac{d^2\xi}{\partial x^2}$ ,  $\frac{d^3\xi}{\partial x^3}$ ,  $\frac{d^4\xi}{\partial x^4}$  ve  $\frac{d^2\eta}{\partial y^2}$ ,  $\frac{d^3\eta}{\partial y^3}$ ,  $\frac{d^4\eta}{\partial y^4}$

türevleri ise aşağıdaki gibi formüle edilmiştir;

$$\frac{d^2\xi}{\partial x^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d\xi}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} \quad (2.135)$$

$$= \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} = \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} (-1) \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-2} \frac{d^2x}{d\xi^2} \quad (2.136)$$

$$\frac{d^2\xi}{\partial x^2} = -\left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-3} \frac{d^2x}{d\xi^2} \quad (2.137)$$

$$\frac{d^3\xi}{\partial x^3} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2\xi}{dx^2} \right) \quad (2.138)$$

$$= \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} \left( -\left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-3} \frac{d^2x}{d\xi^2} \right) \quad (2.139)$$

$$= \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} (-1)(-3) \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-4} \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right) \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right) + \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} (-1) \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-3} \left( \frac{d^3x}{d\xi^3} \right) \quad (2.140)$$

$$\frac{d^3\xi}{\partial x^3} = 3 \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-5} \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right)^2 - \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-4} \left( \frac{d^3x}{d\xi^3} \right) \quad (2.141)$$

$$\frac{d^4\xi}{\partial x^4} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^3\xi}{dx^3} \right) \quad (2.142)$$

$$= \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} \left( 3 \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-5} \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right)^2 - \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-4} \left( \frac{d^3x}{d\xi^3} \right) \right) \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} (3)(-5) \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-6} \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right) \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right)^2 + \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} (3) \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-5} (2) \left( \frac{d^3x}{d\xi^3} \right) \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right) \right) \\
&\quad - \left( \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} (-4) \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-5} \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right) \left( \frac{d^3x}{d\xi^3} \right) + \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-4} \left( \frac{d^4x}{d\xi^4} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.144}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-7} (-15) \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right)^3 + \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-6} (6) \left( \frac{d^3x}{d\xi^3} \right) \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right) \right) \\
&\quad + \left( \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-6} (4) \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right) \left( \frac{d^3x}{d\xi^3} \right) - \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-5} \left( \frac{d^4x}{d\xi^4} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.145}$$

$$\frac{d^4\xi}{\partial x^4} = (-15) \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-7} \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right)^3 + (10) \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-6} \left( \frac{d^3x}{d\xi^3} \right) \left( \frac{d^2x}{d\xi^2} \right) - \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^{-5} \left( \frac{d^4x}{d\xi^4} \right) \tag{2.146}$$

Aynı şekilde  $\frac{d^2\eta}{\partial y^2}, \frac{d^3\eta}{\partial y^3}, \frac{d^4\eta}{\partial y^4}$  formülleri ise;

$$\frac{d^2\eta}{\partial y^2} = - \left( \frac{dy}{d\eta} \right)^{-3} \frac{d^2y}{d\eta^2} \tag{2.147}$$

$$\frac{d^3\eta}{\partial y^3} = 3 \left( \frac{dy}{d\eta} \right)^{-5} \left( \frac{d^2y}{d\eta^2} \right)^2 - \left( \frac{dy}{d\eta} \right)^{-4} \left( \frac{d^3y}{d\eta^3} \right) \tag{2.148}$$

$$\frac{d^4\eta}{\partial y^4} = (-15) \left( \frac{dy}{d\eta} \right)^{-7} \left( \frac{d^2y}{d\eta^2} \right)^3 + (10) \left( \frac{dy}{d\eta} \right)^{-6} \left( \frac{d^3y}{d\eta^3} \right) \left( \frac{d^2y}{d\eta^2} \right) - \left( \frac{dy}{d\eta} \right)^{-5} \left( \frac{d^4y}{d\eta^4} \right) \tag{2.149}$$

şeklinde olur.

### 3. MODEL PROBLEM VE SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

#### 3.1. Kavite Akışı

Formüle dayalı yapılan bir çalışmanın sonuçlarını test etmenin en kolay yöntemlerinden birisi elde edilen formülleri oldukça iyi bir şekilde hesaplanabilen bir model problem üzerine uygulamaktır. Hesaplamalı akışkanlar dinamiğinde bu tür sonuçları iyi hesaplanabilmiş model problemlerden birisi de kare bir kesitte iki boyutlu sıkıştırılmaz kavite akışıdır.

##### 3.1.1. Sınır Şartları

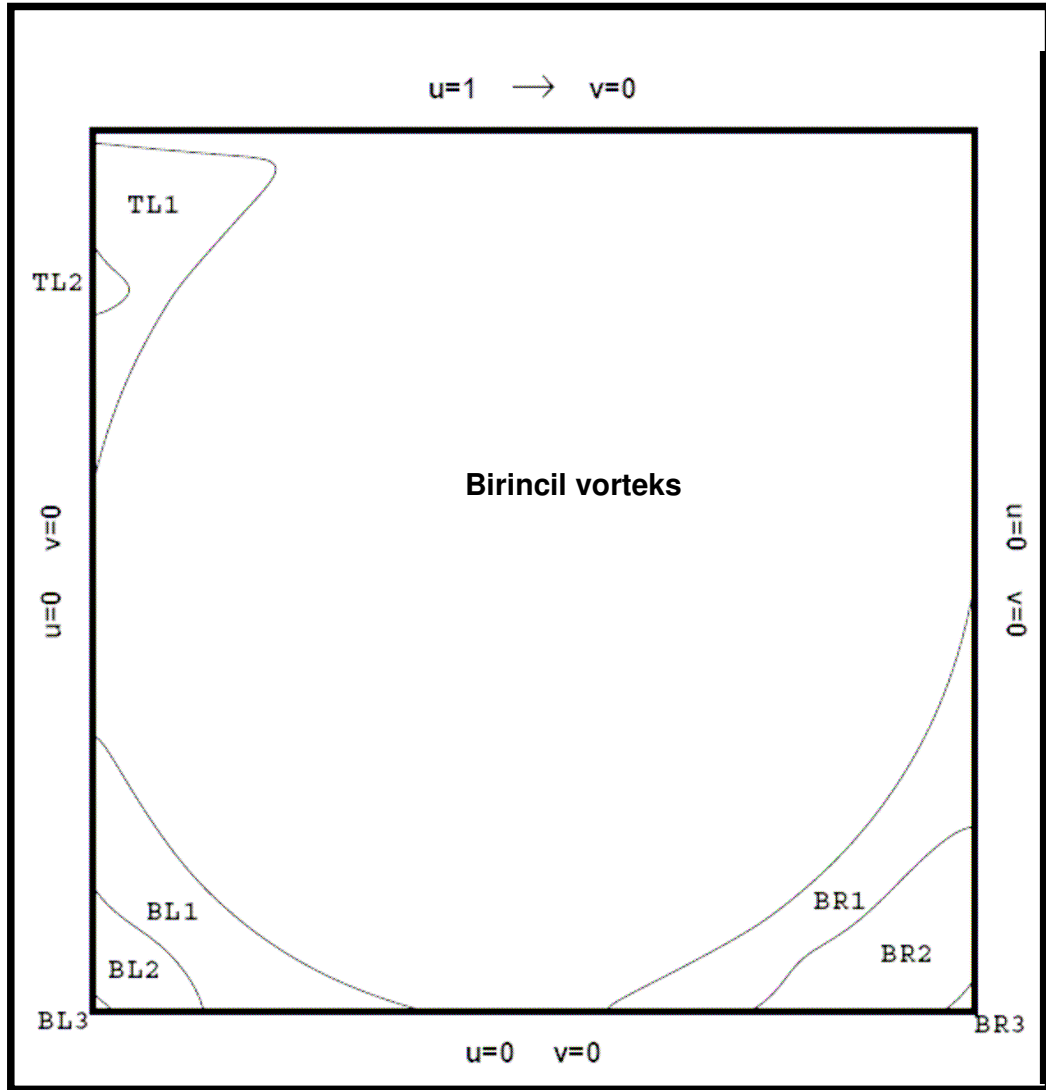
Bu problemde üstten hareketli bir bant kaydığı düşünülür ve içerdeki akışkanın da bu harekete bağlı olarak kesit içerisindeki hareketi incelenir. Şekil 3.1 de tipik kavite akışı çiziminde gösterildiği gibi üstteki bant hareket eder yan duvarlar ve alttaki sınır ise sabittir [9]. Sabit duvarlarda sınır şartları

$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$  ve  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ ; kayan banttaki sınır şartı ise  $u=1$  ve  $v=0$  'dır. Sınır

şartlarına ait denklemler çıkartılırken  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V$  alınmıştır ki burada  $V$  sabit

duvarlar için 0 ve hareketli üst taraf için 1 sayısal değerine sahiptir. Köşelerdeki tekil noktalara ise kullanılan sonlu fark metodunda hesaplanmasına ihtiyaç duyulmadığı için iç bölgelerdeki sonuçlara etki etmemektedir.

Sol, sağ, alt ve üst kenarlara ait sınır şartları aşağıdaki gibi oluşturulmuştur;



Şekil 3.1 Kare kesitte sıkıştırılmaz kavite akışı

Sol kenar için sınır şartı;

$$A \psi_{\xi\xi} + B \psi_{\eta\eta} + C \psi_{\xi} + D \psi_{\eta} = -\omega \quad (3.1)$$

$$\psi_1 = \psi_0 + \Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\Delta\xi^3}{6} \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} + \frac{\Delta\xi^4}{24} \frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^4} + \Delta\xi^5 \quad (3.2)$$

$$\psi_2 = \psi_0 + 2\Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{4\Delta\xi^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{8\Delta\xi^3}{6} \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} + \frac{16\Delta\xi^4}{24} \frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^4} + \Delta\xi^5 \quad (3.3)$$

$$\psi_3 = \psi_0 + 3\Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{9\Delta\xi^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{27\Delta\xi^3}{6} \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} + \frac{81\Delta\xi^4}{24} \frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^4} + \Delta\xi^5 \quad (3.4)$$

3.2 ve 3.3 denklemlerini toplanması sonucu  $\Delta\xi^4$ 'lü terimlerin birbirini götürmesi sağlanmış ve şu sonuç elde edilmiştir;

$$16\psi_1 - \psi_2 = 15\psi_0 + 14\Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + 12\frac{\Delta\xi^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + 8\frac{\Delta\xi^3}{6} \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} + \Delta\xi^5 \quad (3.5)$$

Elde edilen 3.5 nolu denklem ve 3.2 nolu denklem kullanılarak;

$$81\psi_1 - \psi_3 = 80\psi_0 + 78\Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + 36\frac{\Delta\xi^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + 9\Delta\xi^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} + \Delta\xi^5 \quad (3.6)$$

denklemleri elde edilir. 3.5 nolu denklem ve 3.6 nolu denklem kullanılarak  $\Delta\xi^3$ 'lü terimlerin birbirini götürmesi sağlanmış ve şu sonuç elde edilmiştir;

$$27\psi_1 - \frac{27}{4}\psi_2 + \psi_3 = \frac{85}{4}\psi_0 + \frac{33}{2}\Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{9}{2}\Delta\xi^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \Delta\xi^5 \quad (3.7)$$

bu denklemde  $\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$  yalnız bırakılacak olursa;

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \frac{54\psi_1 - \frac{27}{2}\psi_2 + 2\psi_3 - \frac{85}{2}\psi_0 - 9\Delta\xi^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}}{33\Delta\xi} + \Delta\xi^4 \quad (3.8)$$

3.1 nolu denklemde sol kenar için sonucu sıfır olan terimler çıkartıldığında elde edilecek sonuç;

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} = -\frac{\omega}{A} - \frac{C}{A} \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir. Sınırlardaki hıza bağlı şartlar ise;

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial\xi} = 0 \quad (3.10)$$

$$u = V \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = V \frac{\partial y}{\partial\eta} \quad (3.11)$$

ve 3.9 ve 3.11 nolu denklemler 3.7 nolu denklemde yerine konulduğunda;

$$\omega = \frac{\left(-54\psi_1 + \frac{27}{2}\psi_2 - 2\psi_3 + \frac{85}{2}\psi_0 + 33\Delta\xi V \frac{\partial y}{\partial\eta}\right)A_0}{9\Delta\xi^2} - CV \frac{\partial y}{\partial\eta} \quad (3.12)$$

elde edilir. Burada  $V = 0$  ve  $\psi_0 = 0$  şartında denkleme uygulandığında sol kenar için sınır şartı son halini alır;

$$\omega = \frac{\left(-54\psi_1 + \frac{27}{2}\psi_2 - 2\psi_3\right)A_0}{9\Delta\xi^2} \quad (3.13)$$

Sağ kenar için sınır şartı;

$$A \psi_{\xi\xi} + B \psi_{\eta\eta} + C \psi_{\xi} + D \psi_{\eta} = -\omega \quad (3.14)$$

$$\psi_{i_{\max-1}} = \psi_{i_{\max}} - \Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\Delta\xi^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - \frac{\Delta\xi^3}{6} \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} + \frac{\Delta\xi^4}{24} \frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^4} + \Delta\xi^5 \quad (3.15)$$

$$\psi_{i_{\max-2}} = \psi_{i_{\max}} - 2\Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{4\Delta\xi^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - \frac{8\Delta\xi^3}{6} \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} + \frac{16\Delta\xi^4}{24} \frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^4} + \Delta\xi^5 \quad (3.16)$$

$$\psi_{i_{\max-3}} = \psi_{i_{\max}} - 3\Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{9\Delta\xi^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - \frac{27\Delta\xi^3}{6} \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} + \frac{81\Delta\xi^4}{24} \frac{\partial^4\psi}{\partial\xi^4} + \Delta\xi^5 \quad (3.17)$$

3.15 ve 3.16 denklemlerini toplanması sonucu  $\Delta\xi^4$ 'lü terimlerin birbirini götürmesi sağlanmış ve şu sonuç elde edilmiştir;

$$16\psi_{i_{\max-1}} - \psi_{i_{\max-2}} = 15\psi_{i_{\max}} - 14\Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + 12\frac{\Delta\xi^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - 8\frac{\Delta\xi^3}{6} \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} + \Delta\xi^5 \quad (3.18)$$

Elde edilen 3.18 nolu denklem ve 3.15 nolu denklem kullanılarak;

$$81\psi_{i_{\max-1}} - \psi_{i_{\max-3}} = 80\psi_{i_{\max}} - 78\Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + 36\Delta\xi^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - 9\Delta\xi^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} + \Delta\xi^5 \quad (3.19)$$

denklemleri elde edilir. 3.18 nolu denklem ve 3.19 nolu denklem kullanılarak  $\Delta\xi^3$ 'lü terimlerin birbirini götürmesi sağlanmış ve şu sonuç elde edilmiştir;

$$27\psi_{i_{\max-1}} - \frac{27}{4}\psi_{i_{\max-2}} + \psi_{i_{\max-3}} = \frac{85}{4}\psi_{i_{\max}} - \frac{33}{2}\Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{9}{2}\Delta\xi^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \Delta\xi^5 \quad (3.20)$$

3.14 nolu denklemde sağ kenar için sonucu sıfır olan terimler çıkartıldığında elde edilecek sonuç;

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = -\frac{\omega}{A} - \frac{C}{A} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (3.21)$$

şeklinde yazılabilir. Sınırlardaki hıza bağlı şartlar ise;

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \quad (3.22)$$

$$u = V \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = V \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.23)$$

ve 3.21 ve 3.23 nolu denklemler 3.20 nolu denklemde yerine konulduğunda;

$$\omega = \frac{\left( -54\psi_{i_{\max-1}} + \frac{27}{2}\psi_{i_{\max-2}} - 2\psi_{i_{\max-3}} + \frac{85}{2}\psi_{i_{\max}} - 33\Delta\xi V \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) A_{i_{\max}}}{9\Delta\xi^2} - C_{i_{\max}} V \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.24)$$

elde edilir. Burada  $V = 0$  ve  $\psi_{i_{\max}} = 0$  şartıda denkleme uygulandığında sağ kenar için sınır şartı son halini alır;

$$\omega = \frac{\left( -54\psi_{i_{\max-1}} + \frac{27}{2}\psi_{i_{\max-2}} - 2\psi_{i_{\max-3}} \right) A_{i_{\max}}}{9\Delta\xi^2} \quad (3.25)$$

Alt kenar için sınır şartı;

$$A \psi_{\xi\xi} + B \psi_{\eta\eta} + C \psi_{\xi} + D \psi_{\eta} = -\omega \quad (3.26)$$

$$\psi_1 = \psi_0 + \Delta\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\Delta\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\Delta\eta^3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + \frac{\Delta\eta^4}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4} + \Delta\eta^5 \quad (3.27)$$

$$\psi_2 = \psi_0 + 2\Delta\eta \frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{4\Delta\eta^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \frac{8\Delta\eta^3}{6} \frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3} + \frac{16\Delta\eta^4}{24} \frac{\partial^4\psi}{\partial\eta^4} + \Delta\eta^5 \quad (3.28)$$

$$\psi_3 = \psi_0 + 3\Delta\eta \frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{9\Delta\eta^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \frac{27\Delta\eta^3}{6} \frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3} + \frac{81\Delta\eta^4}{24} \frac{\partial^4\psi}{\partial\eta^4} + \Delta\eta^5 \quad (3.29)$$

3.27 ve 3.28 nolu denklemlerin toplanması sonucu  $\Delta\eta^4$ 'lü terimlerin birbirini götürmesi sağlanmış ve şu sonuç elde edilmiştir;

$$16\psi_1 - \psi_2 = 15\psi_0 + 14\Delta\xi \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + 12 \frac{\Delta\xi^2}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + 8 \frac{\Delta\xi^3}{6} \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} + \Delta\xi^5 \quad (3.30)$$

Elde edilen 3.30 nolu denklem ve 3.29 nolu denklem kullanılarak  $\Delta\eta^3$ 'lü terimlerin birbirini götürmesi sağlanmış ve şu sonuç elde edilmiştir;

$$27\psi_1 - \frac{27}{4}\psi_2 + \psi_3 = \frac{85}{4}\psi_0 + \frac{33}{2}\Delta\eta \frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{9}{2}\Delta\eta^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \Delta\eta^5 \quad (3.31)$$

bu denklemde  $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$  yalnız bırakılacak olursa;

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \frac{54\psi_1 - \frac{27}{2}\psi_2 + 2\psi_3 - \frac{85}{2}\psi_0 - 9\Delta\eta^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}}{33\Delta\eta} + \Delta\eta^4 \quad (3.32)$$

3.26 nolu denklemde alt kenar için sonucu sıfır olan terimler çıkartıldığında elde edilecek sonuç;

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} = -\frac{\omega}{B} - \frac{D}{B} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \quad (3.33)$$

şeklinde yazılabilir. Sınırlardaki hıza bağlı şartlar ise;

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial\xi} = 0 \quad (3.34)$$

$$u = V \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = V \frac{\partial y}{\partial\eta} \quad (3.35)$$

ve 3.35 ve 3.33 nolu denklemler 3.32 nolu denklemde yerine konulduğunda;



$$\omega = \frac{\left(-54\psi_1 + \frac{27}{2}\psi_2 - 2\psi_3 + \frac{85}{2}\psi_0 + 33\Delta\xi V \frac{\partial y}{\partial \eta}\right)B_0}{9\Delta\eta^2} - DV \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.36)$$

elde edilir. Burada  $V = 0$  ve  $\psi_0 = 0$  şartında denkleme uygulandığında alt kenar için sınır şartı son halini alır;

$$\omega = \frac{\left(-54\psi_1 + \frac{27}{2}\psi_2 - 2\psi_3\right)B_0}{9\Delta\eta^2} \quad (3.37)$$

Üst kenar için sınır şartı;

$$A \psi_{\xi\xi} + B \psi_{\eta\eta} + C \psi_{\xi} + D \psi_{\eta} = -\omega \quad (3.38)$$

$$\psi_{j_{\max-1}} = \psi_{j_{\max}} - \Delta\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\Delta\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\Delta\eta^3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + \frac{\Delta\eta^4}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4} + \Delta\eta^5 \quad (3.39)$$

$$\psi_{j_{\max-2}} = \psi_{j_{\max}} - 2\Delta\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{4\Delta\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{8\Delta\eta^3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + \frac{16\Delta\eta^4}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4} + \Delta\eta^5 \quad (3.40)$$

$$\psi_{j_{\max-3}} = \psi_{j_{\max}} - 3\Delta\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{9\Delta\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{27\Delta\eta^3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + \frac{81\Delta\eta^4}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4} + \Delta\eta^5 \quad (3.41)$$

3.39 ve 3.40 nolu denklemler kullanılarak  $\Delta\eta^4$ 'lü terimlerin birbirini götürmesi sağlanmış ve şu sonuç elde edilmiştir;

$$16\psi_{j_{\max-1}} - \psi_{j_{\max-2}} = 15\psi_{j_{\max}} - 14\Delta\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + 12 \frac{\Delta\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - 8 \frac{\Delta\eta^3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + \Delta\eta^5 \quad (3.42)$$

Elde edilen 3.42 nolu denklem ve 3.39 nolu denklem kullanılarak;

$$81\psi_{j_{\max-1}} - \psi_{j_{\max-3}} = 80\psi_{j_{\max}} - 78\Delta\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + 36\Delta\eta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - 9\Delta\eta^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + \Delta\eta^5 \quad (3.43)$$

denklemleri elde edilir. 3.42 nolu denklem ve 3.43 nolu denklem kullanılarak  $\Delta\eta^3$ 'lü terimlerin birbirini götürmesi sağlanmış ve şu sonuç elde edilmiştir;

$$27\psi_{j_{\max-1}} - \frac{27}{4}\psi_{j_{\max-2}} + \psi_{j_{\max-3}} = \frac{85}{4}\psi_{j_{\max}} - \frac{33}{2}\Delta\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{9}{2}\Delta\eta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \Delta\eta^5 \quad (3.44)$$

3.38 nolu denklemde üst kenar için sonucu sıfır olan terimler çıkartıldığında elde edilecek sonuç;

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} = -\frac{\omega}{B} - \frac{D}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \quad (3.45)$$

şeklinde yazılabilir. Sınırlardaki hıza bağlı şartlar ise;

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial\xi} = 0 \quad (3.46)$$

$$u = V \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = V\frac{\partial y}{\partial\eta} \quad (3.47)$$

ve 3.45 ve 3.47 nolu denklemler 3.44 nolu denklemde yerine konulduğunda;

$$\omega = \frac{\left(-54\psi_{j_{\max-1}} + \frac{27}{2}\psi_{j_{\max-2}} - 2\psi_{j_{\max-3}} + \frac{85}{2}\psi_{j_{\max}} - 33\Delta\eta V\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)B_{j_{\max}}}{9\Delta\eta^2} - D_{j_{\max}}V\frac{\partial y}{\partial\eta} \quad (3.48)$$

elde edilir. Burada  $\psi_{j_{\max}} = 0$  şartı da denkleme uygulandığında üst kenar için sınır şartı son halini alır;

$$\omega = \frac{\left(-54\psi_{j_{\max-1}} + \frac{27}{2}\psi_{j_{\max-2}} - 2\psi_{j_{\max-3}} - 33\Delta\eta V\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)B_{j_{\max}}}{9\Delta\eta^2} - D_{j_{\max}}V\frac{\partial y}{\partial\eta} \quad (3.49)$$

### 3.1.2. Model Problem Sonuçları

Seçilen fonksiyon üzerinde oluşturulan 129x129'luk ağ yapısında, akım fonksiyonu ve çevrinti değerleri çözülmüş değişik Beta değerleri için bulunan maksimum akım fonksiyonu ve çevrinti değerleri Çizelge 3.1'de verilmiştir.

Hata takip parametlerinden RES1; birbirini takip eden iki iterasyonun mutlak maksimum farkı olarak tanımlanmış [1] ve akım fonksiyonu ve çevrinti değerleri için ayrı ayrı takip edilmiştir.

$$RES1_{\psi} = mak( | \psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n | ) \quad (3.50)$$

$$RES1_{\omega} = mak( | \omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n | ) \quad (3.51)$$

Diğer bir hata takip parametresi olarak kullanılan RES2; birbirini takip eden iki iterasyonun mutlak maksimum yüzde değişimi olarak tanımlanmış ve yine akım fonksiyonu ve çevrinti değerleri için ayrı ayrı takip edilmiştir.

$$RES2_{\psi} = mak( \left| \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\psi_{i,j}^n} \right| ) \quad (3.52)$$

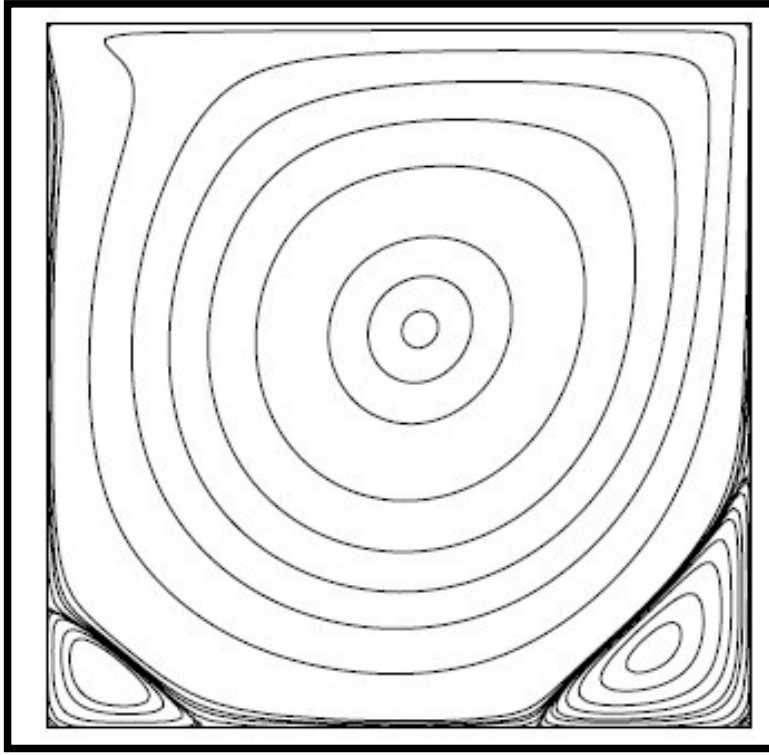
$$RES2_{\omega} = mak( \left| \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\omega_{i,j}^n} \right| ) \quad (3.53)$$

$RES1_{\psi} < 10^{-9}$  ve  $RES1_{\omega} < 10^{-9}$  mertebesine kadar iterasyon sürdürülmüştür.

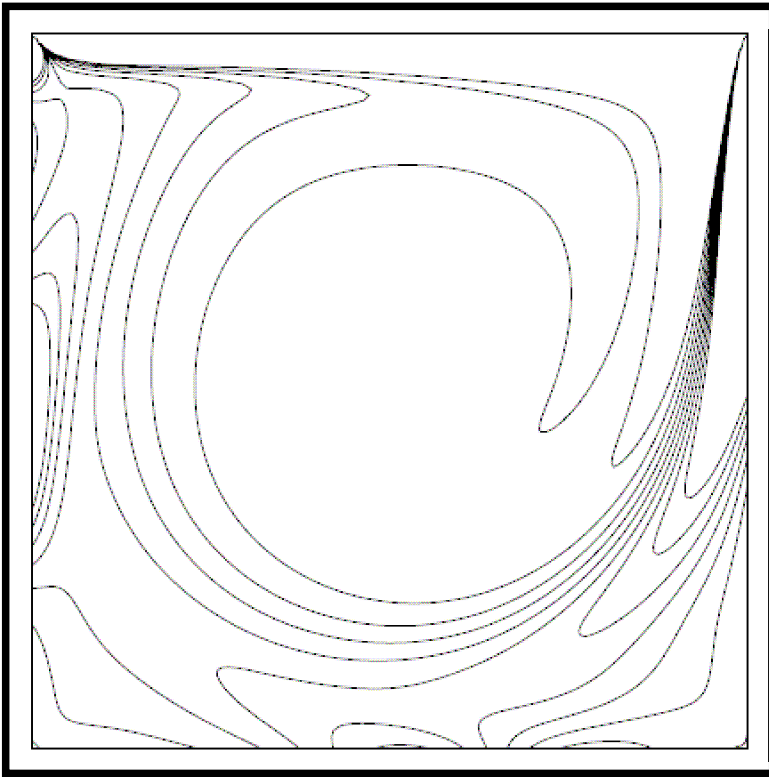
Bu demektir ki akım fonksiyonu ve çevrinti değerleri 9.basamağa kadar doğrudur.  $RES2_{\psi} < 10^{-9}$   $RES2_{\omega} < 10^{-9}$  olması ise iterasyonun akım fonksiyonu ve çevrinti değerlerinin  $10^{-9}\%$  oranında değişimine kadar sürdürülmesi anlamını taşımaktadır.

Çizelge 3.1 Maksimum Akım fonksiyonu ve çevrinti değerleri

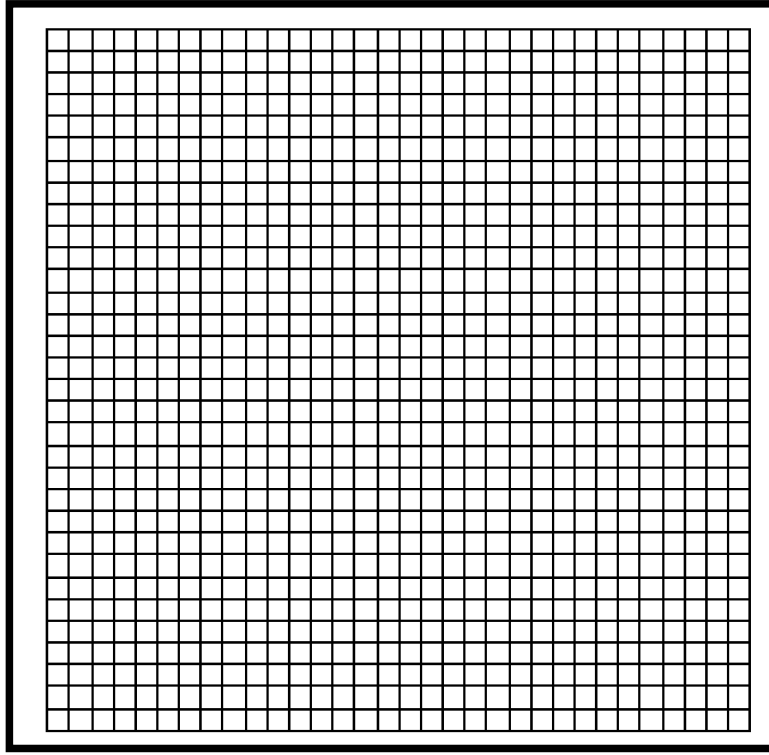
| Beta Değeri | Maksimum Akım Fonksiyonu Değeri | Çevrinti Değeri |
|-------------|---------------------------------|-----------------|
| 1,020       | 0,11871793                      | 2,06771555      |
| 1,025       | 0,11876700                      | 2,06777719      |
| 1,050       | 0,11882973                      | 2,06794297      |
| 1,075       | 0,11884880                      | 2,06750954      |
| 1,100       | 0,11886196                      | 2,06758898      |
| 1,150       | 0,11885579                      | 2,06763632      |
| 1,200       | 0,11888295                      | 2,06769461      |
| 1,250       | 0,11888840                      | 2,06773281      |
| 1,300       | 0,11888476                      | 2,06775735      |
| 1,350       | 0,11887921                      | 2,06740587      |
| 1,400       | 0,11888438                      | 2,06742317      |
| 1,450       | 0,11888594                      | 2,06743475      |
| 1,500       | 0,11888534                      | 2,06744205      |
| 1,550       | 0,11888342                      | 2,06744619      |
| 1,600       | 0,11888071                      | 2,06744797      |
| 1,650       | 0,11887753                      | 2,06744798      |
| 1,700       | 0,11887412                      | 2,06744669      |
| 1,750       | 0,11887060                      | 2,06744446      |
| 2,000       | 0,11886839                      | 2,06744153      |
| ∞           | 0,1188507                       | 2,06724802      |



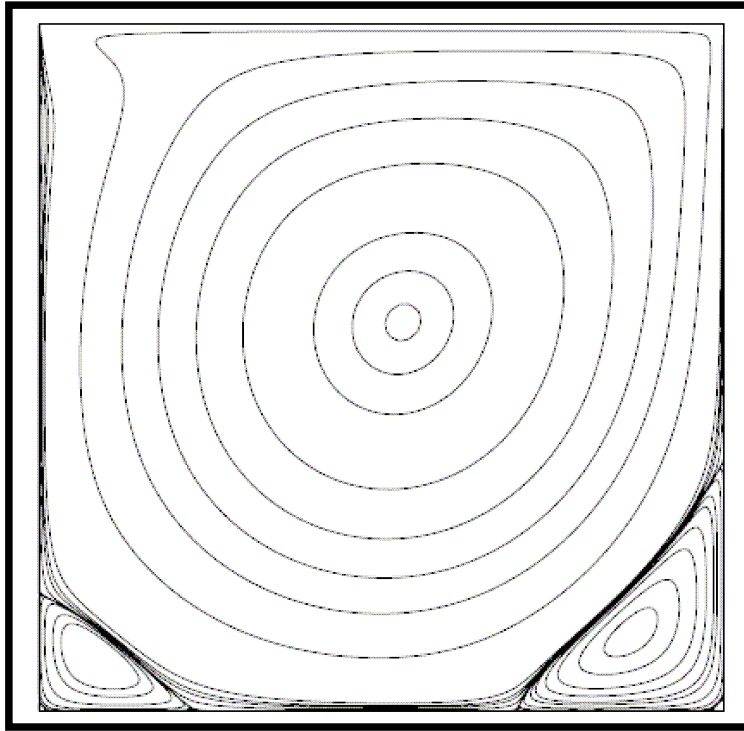
Şekil 3.3  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = \infty$  için akım fonksiyonu çizgileri



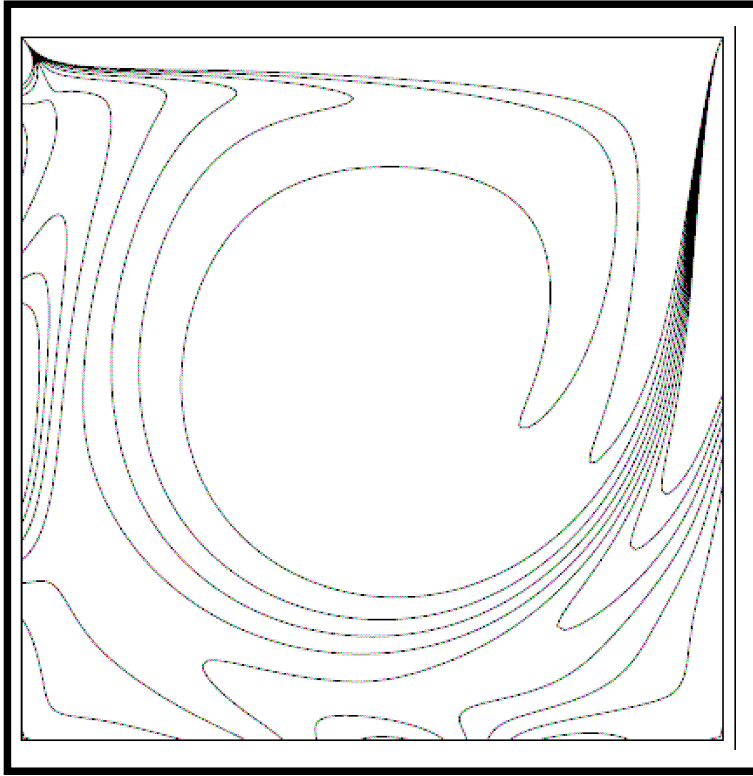
Şekil 3.4  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = \infty$  için çevrinti fonksiyonu çizgileri



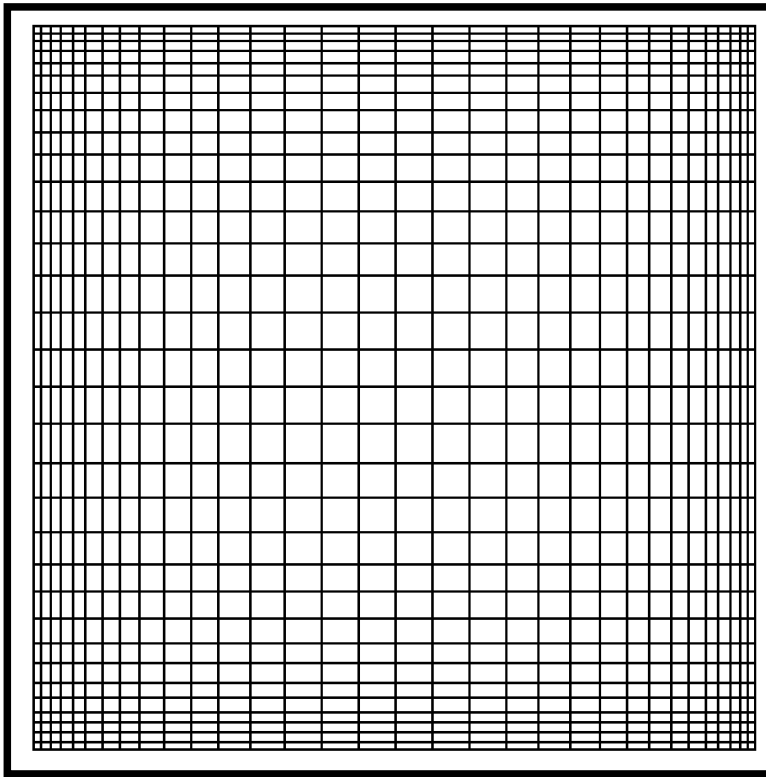
Şekil 3.5  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = \infty$  için ağ yapısı



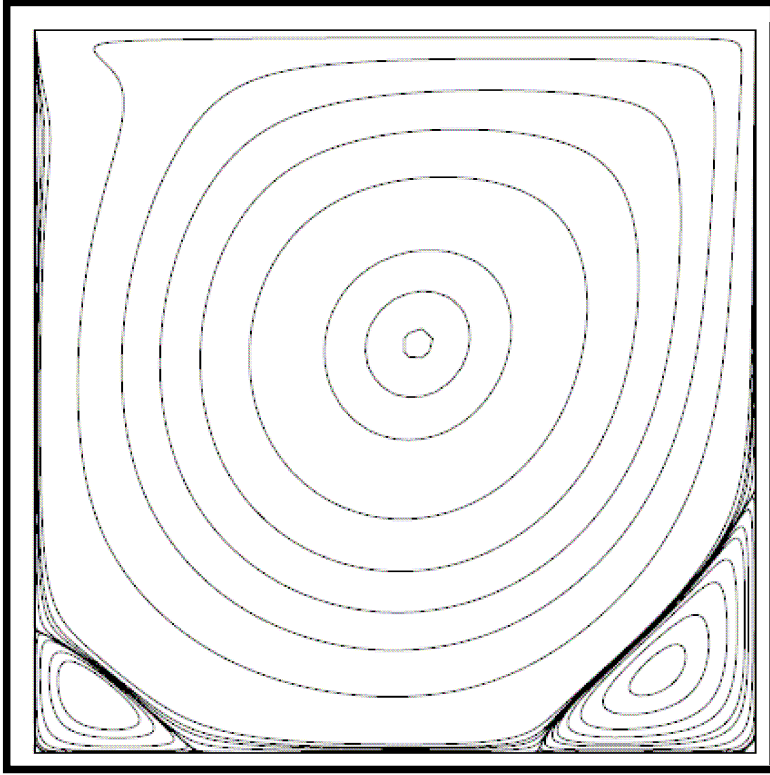
Şekil 3.6  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = 1.1$  için akım fonksiyonu çizgileri



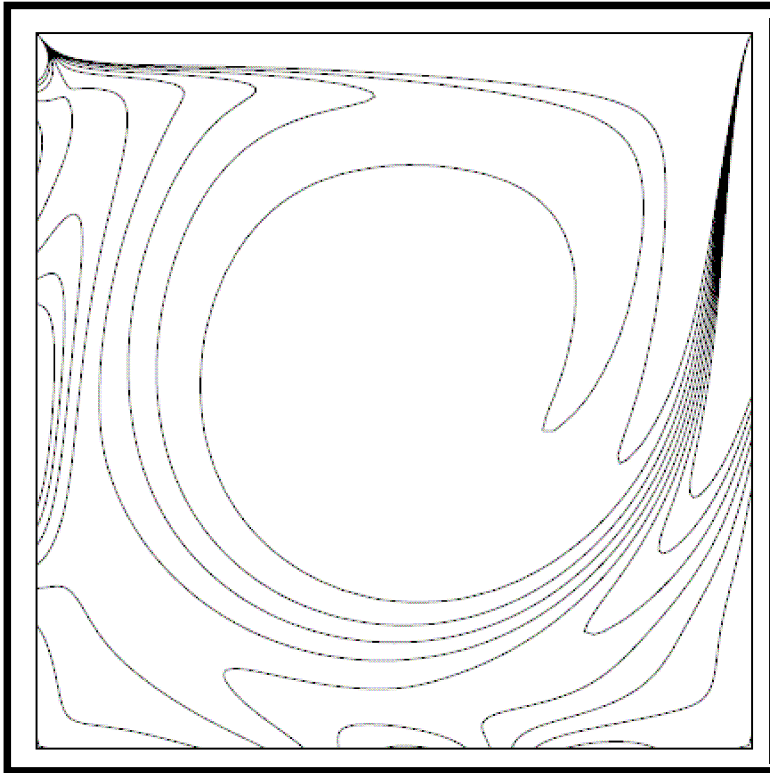
Şekil 3.7  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = 1.1$  için çevrinti fonksiyonu çizgileri



Şekil 3.8  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = 1.1$  için ağ yapısı

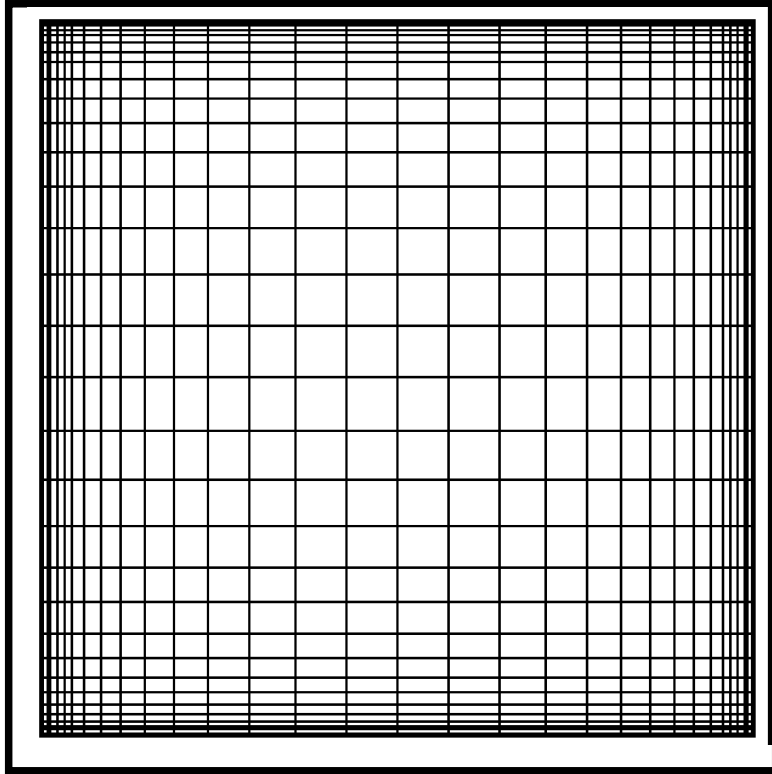


Şekil 3.9  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = 1.02$  için akım fonksiyonu çizgileri



Şekil 3.10  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = 1.02$  için çevrinti fonksiyonu çizgileri





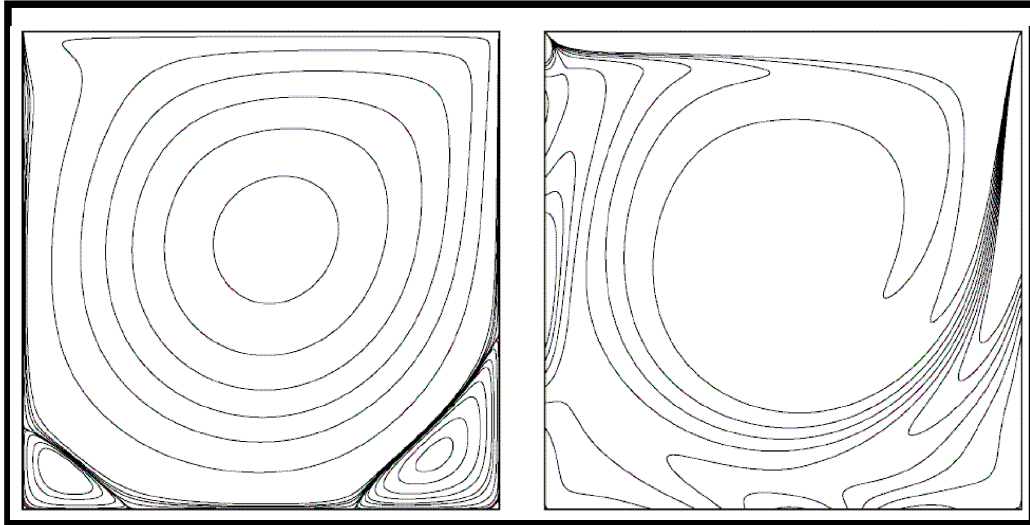
Şekil 3.11  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = 1.02$  için ağ yapısı

Problemin çözümü Fortran programlama dilinde yazılan program ile gerçekleştirilmiş ve program içerisindeki katsayı formüllerinin yazımı Ek-1'de verilmiştir.

## 3.2. Sonuçların Karşılaştırılması

### 3.2.1. Model Problem Mevcut Çözümü

İki boyutta sıkıştırılamaz akış için düzenlenmiş Navier-Stokes denklemleri sonuçları oldukça iyi bilinen kavite akışı problemine uygulanır. Bu çalışmada da sonuçları bilenen model problem olarak iki boyutta sıkıştırılamaz kavite akışı seçilmiş ve karşılaştırmaya konu olan problemin Reynolds=1000 için akım fonksiyonu ve çevrinti çizgilerini gösteren çözümleri Şekil 3.12'de verilmiştir.



Şekil 3.12  $Re=1000$  için kavite akışı akım fonksiyonu ve çevrinti çizgileri

Model problem dördüncü derece çözümleri ve yeni formüller kullanılarak elde edilen akım fonksiyonu ve çevrinti değerlerinin karşılaştırılması amacıyla Reynolds=1000 için Erturk & Gokcol [10] makalesinden alınmış  $601 \times 601$  ağ yapısında 4.derece akım fonksiyonu ve çevrinti değerleri kullanılmıştır. Ayrıca yayınlanmış ve kabul görmüş referans maksimum akım fonksiyonu ve çevrinti değerlerini içeren tablo [10] Çizelge 3.3'de gösterilmiştir

Çizelge 3.2  $Re=1000$  için referans çözüm değerleri çizelgesi

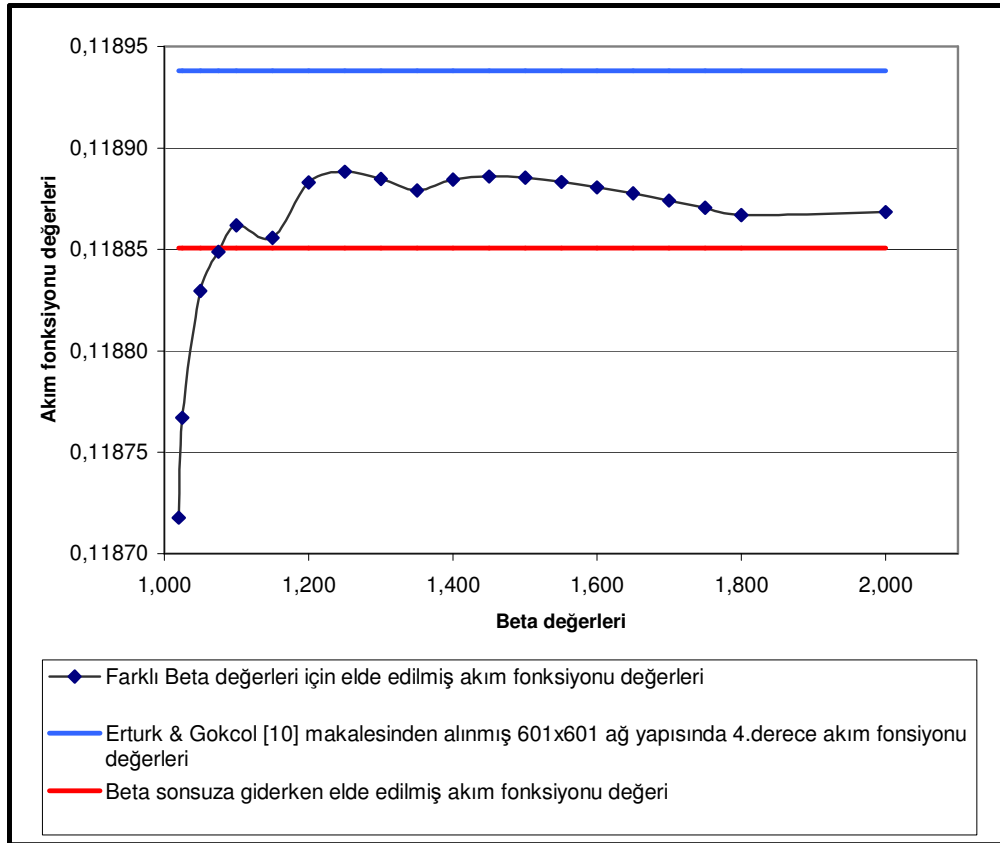
|   |  |
|---|--|
| Erturk & Gokcol [10] makalesinden $601 \times 601$ ağ yapısında 4.derece akım fonksiyonu değeri | Erturk & Gokcol [10] makalesinden $601 \times 601$ ağ yapısında 4.derece çevrinti değeri |
| 0,118938  | 2,06776  |

Çizelge 3.3 Yayınlanmış diğer mevcut referans çözüm değerleri çizelgesi

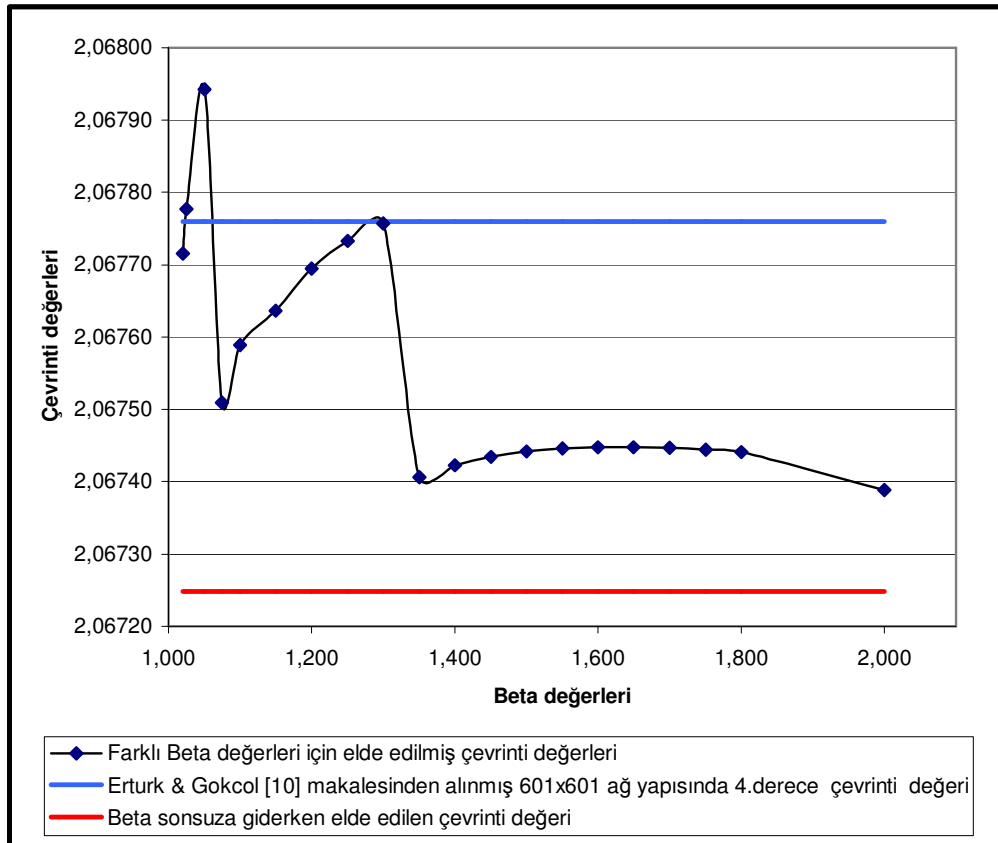
| Referans            | Ağ nokta sayısı | Derece        | $\psi_{\max}$ | $\omega$ |
|---------------------|-----------------|---------------|---------------|----------|
| Mevcut              | 401x401         | $\Delta h^2$  | 0.118585      | 2.062761 |
| Mevcut              | 513x513         | $\Delta h^2$  | 0.118722      | 2.064765 |
| Mevcut              | 601x601         | $\Delta h^2$  | 0.118781      | 2.065530 |
| Mevcut              | Ekstrapolasyon  | $\Delta h^6$  | 0.118942      | 2.067213 |
| Barragy & Carey     | 257x257         | p=8           | 0.118930      | ----     |
| Botella & Peyret    | N=128           | N=128         | 0.1189366     | 2.067750 |
| Botella & Peyret    | N=160           | N=160         | 0.1189366     | 2.067753 |
| Schreilber & Keller | 100x100         | $\Delta h^2$  | 0.11315       | 1.9863   |
| Schreilber & Keller | Ekstrapolasyon  | $\Delta h^6$  | 0.11894       | 2.0677   |
| Wright & Gaskell    | 1024x1024       | $\Delta h^2$  | 0.118821      | 2.06337  |
| Nishida & Satofuka  | 129x129         | $\Delta h^8$  | 0.118904      | 2.068546 |
| Benjamin & Denny    | 101x101         | $\Delta h^2$  | 0.1175        | 2.044    |
| Benjamin & Denny    | Ekstrapolasyon  | yüksek derece | 0.1193        | 2.078    |
| Goyon               | 129x129         | $\Delta h^2$  | 0.1157        | -----    |
| Vanka               | 321x321         | $\Delta h^2$  | 0.1173        | -----    |
| Gupta               | 41x41           | $\Delta h^4$  | 0.111492      | 2.02763  |
| Hou                 | 256x256         | $\Delta h^2$  | 0.1178        | 2.0760   |
| Liao & Zhu          | 129x129         | $\Delta h^2$  | 0.1160        | 2.0234   |
| Grigoriev & Dargush | -----           | -----         | 0.11925       | -----    |

### 3.2.2. Mevcut Çözüm Değerleri İle Karşılaştırma

Çizelge 3.1 ile verilen maksimum akım fonksiyonu ve çevrinti değerleri bu çalışma sonucunda elde edilmiş değerlerdir.  $\text{Beta}=\infty$  değeri düzgün dağılmış bir ağ yapısında ki çözümleri vermiştir. Beta değerlerine karşı akım fonksiyonu ve çevrinti grafiği çizilmiş ve karşılaştırma bakımından bu grafik üzerinde Çizelge 3.2 ile verilmiş olan Erturk & Gokcol [10] makalesinden alınmış 601x601 ağ yapısında 4.derece akım fonksiyonu ve çevrinti değerleri ile çizelge 3.1 de verilen problemin  $\text{Beta}=\infty$  için elde edilmiş çözümü de yer almıştır.



Şekil 3.13 Akım Fonksiyonunun Beta seçimine bağlı değişimi



Şekil 3.14 Çevrinti değerlerinin Beta seçimine bağlı değişimi

## 4.SONUÇLAR

Bu tez ile iki boyutlu Navier Stokes denklemlerinin sıkıştırılamaz daimi akış için 4. dereceden sıkı formülasyonu gerçekleştirildi ve elde edilen yeni formülasyon kavite akışı problemi çözümünde kullanılarak problemin mevcut çözümleri ile karşılaştırması yapıldı. Elde edilen akım ve çevrinti fonksiyonu değerlerinin referans değerlerle karşılaştırması gösteriyor ki yeni formülasyon amacına ulaşmıştır.

4.dereceden Navier Stokes denklemlerinin yeni formunun seçilen ağ yapısında doğru sonuçlar verip vermeyeceği sorusunun cevabı Roberts'in [8] daralma ve genişleme için verdiği fonksiyonlarda arandı. Formülasyonun kavite akışı problemine uygulanması için fiziksel domainden hesaplama domainine geçiş için seçilen transformasyon fonksiyonu ve ters transformasyon fonksiyonu ile varılan sonuçlar; akım fonksiyonu ve çevrinti değerlerinin hata değerlendirmelerine göre formülasyonun uygulanabilirliğini ortaya koymuştur.

Değişik beta sayılarına karşılık gelen akım fonksiyonu değerleri için bir değerlendirme yapılacak olursa görülmüştür ki beta değerleri küçüldükçe yani sınırlara yakın kısımlara doğru ağ yapısı sıklaştırıldıkça elde edilen sonuçlar arasındaki farklılıklarda giderek ortadan kalkmıştır. Bu ağ yapısı, çözümün önem kazandığı sınır tabakasında akım fonksiyonu ve çevrinti değerlerinin daha detaylı incelenebilmesine imkan vermektedir.

Gerek akım fonksiyonu gerekse çevrinti değerlerinin karşılaştırıldığı iki grafikte de görüldüğü gibi sıklaştırılan ağ yapısı ile elde edilen değerler problemin yeni formülasyonla düzgün ağ yapısındaki çözümü ile yine düzgün ağ yapısı için Erturk & Gokcol [10] makalesinden alınmış 4.derece çözümleri arasında değiştiği görülmektedir.

Bu tez ile sıkıştırılmaz iki boyutlu daimi Navier-Stokes denklemlerinin genel eğrisel koordinatlarda dördüncü dereceden formülasyonunda elde edilen katsayıların türevlerinin analitik çözümleri de çalışma içerisinde sunulmuştur.

## KAYNAKLAR

1. E. Erturk, T.C. Corke, C. Gokcol, Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 48 (2005) 747-774
2. Ming Li, Numerical Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations, Simon Fraser University, Doctorate Thesis, May 1998
3. William Frederick Spitz, High Order Compact Finite Difference Schemes for Computational Mechanics, The University of Texas at Austin Doctorate Thesis, December 1995
4. Allan Wittkopf, High Order Wide and Compact Schemes for the Steady Incompressible Navier-Stokes Equations, Simon Fraser University Master Thesis, May 1999
5. W. F. Spitz, G. F. Carey, High-Order Compact Scheme for the Steady Streamfunction Vorticity Equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38 (1995) 3497-3512.
6. S. C. Dennis, J. D. Hudson, Compact  $h^4$  Finite Difference Approximations to Operators of Navier-Stokes Type, Journal of Computational Physics, 85 (1989) 390-416.
7. M. M. Gupta, R. P. Manohar, B. Noble, Nature of Viscous Flows Near Sharp Corners, Computers and Fluids, 9 (1981) 379-388.
8. Roberts, B.O., Computational Meshes for Boundary Layer Problems, Lecture Notes in Physics, (1971) 171-177
9. M. Li, T. Tang, B. Fornberg, A Compact Fourth-Order Finite Difference Scheme for the Steady Incompressible Navier-Stokes Equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 20 (1995) 1137-1151.



10. Erturk, E., and Gokcol C., "Fourth Order Compact Formulation of Navier-Stokes Equations and Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 50, pp 421-436, 2006.

## EK-1

Yeni formülasyonun iterasyonla çözümü için Fortran program kodunda yazılmış sonlu fark açılımı yapılmış katsayı formülleri;

$$\begin{aligned} a2(i) &= a(i) \\ &+ (z^{**2}/12.d0) * (azz(i) + c(i)^{**2}/a(i) - az(i) * c(i)/a(i) \\ &- 2.d0 * az(i)^{**2}/a(i) + 2.d0 * cz(i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c2(i) &= c(i) + (z^{**2}/12.d0) * (czz(i) + cz(i) * c(i)/a(i) \\ &- 2.d0 * cz(i) * az(i)/a(i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b2(j) &= b(j) + (n^{**2}/12.d0) * (bnn(j) + d(j)^{**2}/b(j) \\ &- bn(j) * d(j)/b(j) - 2.d0 * bn(j)^{**2}/b(j) + 2.d0 * dn(j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d2(j) &= d(j) + (n^{**2}/12.d0) * (dnn(j) + dn(j) * d(j)/b(j) \\ &- 2.d0 * dn(j) * bn(j)/b(j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} frhs(i,j) &= \\ &- (z^{**2}/12.d0) * (v(i-1,j) - 2.d0 * v(i,j) + v(i+1,j)) / z^{**2} \\ &- (n^{**2}/12.d0) * (v(i,j-1) - 2.d0 * v(i,j) + v(i,j+1)) / n^{**2} \\ &- (z^{**2}/12.d0) * (c(i)/a(i)) * (v(i+1,j) - v(i-1,j)) / (2.d0 * z) \\ &+ (z^{**2}/6.d0) * (az(i)/a(i)) * (v(i+1,j) - v(i-1,j)) / (2.d0 * z) \\ &- (n^{**2}/12.d0) * (d(j)/b(j)) * (v(i,j+1) - v(i,j-1)) / (2.d0 * n) \\ &+ (n^{**2}/6.d0) * (bn(j)/b(j)) * (v(i,j+1) - v(i,j-1)) / (2.d0 * n) \\ &- ((z^{**2}/12.d0) * (c(i) * d(j)/a(i) - 2.d0 * az(i) * d(j)/a(i)) \\ &+ (n^{**2}/12.d0) * (d(j) * c(i)/b(j) - 2.d0 * bn(j) * c(i)/b(j))) * \\ &(s(i+1,j+1) + s(i-1,j-1) - s(i-1,j+1) - s(i+1,j-1)) / (4.d0 * z * n) \\ &- ((z^{**2}/12.d0) * (c(i) * b(j)/a(i) - 2.d0 * az(i) * b(j)/a(i)) \\ &+ (n^{**2}/12.d0) * c(i)) * \\ &(s(i+1,j+1) - 2.d0 * s(i+1,j) + s(i+1,j-1) \\ &- s(i-1,j+1) + 2.d0 * s(i-1,j) - s(i-1,j-1)) / (2.d0 * z * n^{**2}.)) \\ &- ((z^{**2}/12.d0) * d(j) \\ &+ (n^{**2}/12.d0) * (d(j) * a(i)/b(j) - 2.d0 * bn(j) * a(i)/b(j))) * \\ &(s(i+1,j+1) - 2.d0 * s(i,j+1) + s(i-1,j+1) \\ &- s(i+1,j-1) + 2.d0 * s(i,j-1) - s(i-1,j-1)) / (2.d0 * z^{**2} * n) \\ &- ((z^{**2}/12.d0) * b(j) + (n^{**2}/12.d0) * a(i)) * \\ &(s(i+1,j+1) - 2.d0 * s(i,j+1) + s(i-1,j+1) \\ &- 2.d0 * s(i+1,j) + 4.d0 * s(i,j) - 2.d0 * s(i-1,j) \\ &+ s(i+1,j-1) - 2.d0 * s(i,j-1) + s(i-1,j-1)) / (z^{**2} * n^{**2}.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a3(i,j) &= a(i) \\ &+ (z^{**2}/12.d0) * (azz(i) + 2.d0 * cz(i) + c(i)^{**2}/a(i) \\ &- c(i) * az(i)/a(i) - 2.d0 * az(i)^{**2}/a(i) \\ &+ re * (z^{**2}/12.d0) * (re * e(i,j))^{**2} \\ &* ((s(i,j+1) - s(i,j-1)) / (2.d0 * n)) / a(i) + e(i,j) * az(i)/a(i) \\ &- 2.d0 * ez(i,j) - 2.d0 * e(i,j) * c(i)/a(i) \\ &* (s(i,j+1) - s(i,j-1)) / (2.d0 * n) \\ &- re * (z^{**2}/6.d0) * e(i,j) * \end{aligned}$$

$$(s(i+1,j+1)+s(i-1,j-1)-s(i-1,j+1)-s(i+1,j-1))/(4.d0*z^n)/re$$

$$\begin{aligned} b3(i,j) &= (b(j) + (n^{**2}/12.d0) * (bnn(j) + 2.d0*dn(j) + d(j)**2./b(j) \\ &- d(j)*bn(j)/b(j) - 2.d0*bn(j)**2./b(j)) \\ &+ re*(n^{**2}/12.d0)*(re*e(i,j)**2. \\ &*((s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z))/b(j) \\ &- e(i,j)*bn(j)/b(j) + 2.d0*en(i,j) \\ &+ 2.d0*e(i,j)*d(j)/b(j))*(s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z) \\ &+ re*(n^{**2}/6.d0)*e(i,j)* \\ &(s(i+1,j+1)+s(i-1,j-1)-s(i-1,j+1)-s(i+1,j-1))/(4.d0*z^n)/re \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c3(i,j) &= (c(i) + (z^{**2}/12.d0) * (czz(i) + c(i)*cz(i)/a(i) \\ &- 2.d0*cz(i)*az(i)/a(i)) + re*(-e(i,j) + (z^{**2}/12.d0) * (re*e(i,j)*ez(i,j) \\ &*((s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0^n))/a(i) - e(i,j)*cz(i)/a(i) - c(i)*ez(i,j)/a(i) \\ &+ 2.d0*ez(i,j)*az(i)/a(i) - ezz(i,j)) + (n^{**2}/12.d0) * (-re*e(i,j)*en(i,j)* \\ &((s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z))/b(j) - dn(j)*e(i,j)/b(j) \\ &- enn(i,j) - d(j)*en(i,j)/b(j) + 2.d0*en(i,j)*bn(j)/b(j)) \\ &)*(s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0^n) \\ &+ re*(z^{**2}/12.d0)*(re*e(i,j)**2. \\ &*((s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0^n))/a(i) \\ &- c(i)*e(i,j)/a(i) + 2.d0*e(i,j)*az(i)/a(i) \\ &- 2.d0*ez(i,j) - (n^{**2}/12.d0)*e(i,j)*c(i)/b(j)) \\ &)*(s(i+1,j+1)+s(i-1,j-1)-s(i-1,j+1)-s(i+1,j-1))/(4.d0*z^n) \\ &+ re*(n^{**2}/12.d0)*(bn(j)*e(i,j)/b(j) \\ &- re*e(i,j)**2.*((s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z))/b(j) \\ &- 2.d0*en(i,j) - 2.d0*e(i,j)*d(j)/b(j) \\ &)*(s(i,j+1)-2.d0*s(i,j)+s(i,j-1))/n^{**2}. \\ &- ((z^{**2}/12.d0)*re*e(i,j) \\ &+ (n^{**2}/12.d0)*re*e(i,j)*a(i)/b(j) \\ &)*(s(i+1,j+1)-2.d0*s(i,j+1)+s(i-1,j+1) \\ &- s(i+1,j-1)+2.d0*s(i,j-1)-s(i-1,j-1))/(2.d0*z^{**2}.*n)/re \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d3(i,j) &= (d(j) \\ &+ (n^{**2}/12.d0) * (dnn(j) + d(j)*dn(j)/b(j) \\ &- 2.d0*dn(j)*bn(j)/b(j)) + re*(e(i,j) + (n^{**2}/12.d0) * ( \\ &re*e(i,j)*en(i,j)*((s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z))/b(j) \\ &+ e(i,j)*dn(j)/b(j) + d(j)*en(i,j)/b(j) \\ &- 2.d0*en(i,j)*bn(j)/b(j) + enn(i,j)) \\ &+ (z^{**2}/12.d0) * ( \\ &- re*e(i,j)*ez(i,j)*((s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0^n))/a(i) \\ &+ cz(i)*e(i,j)/a(i) + ezz(i,j) \\ &+ c(i)*ez(i,j)/a(i) - 2.d0*ez(i,j)*az(i)/a(i) \\ &)*(s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z) + re*((z^{**2}/12.d0) * ( \\ &e(i,j)*d(j)/a(i)) + (n^{**2}/12.d0) * ( \\ &re*e(i,j)**2.*((s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z))/b(j) \\ &- 2.d0*e(i,j)*bn(j)/b(j) + 2.d0*en(i,j) \\ &+ d(j)*e(i,j)/b(j) ) \\ &)*(s(i+1,j+1)+s(i-1,j-1)-s(i-1,j+1)-s(i+1,j-1))/(4.d0*z^n) \\ &+ re*(z^{**2}/12.d0) * (-az(i)*e(i,j)/a(i) \\ &- re*e(i,j)**2.*((s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0^n))/a(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+2.d0*ez(i,j)+2.d0*e(i,j)*c(i)/a(i) \\
&)*(s(i+1,j)-2.d0*s(i,j)+s(i-1,j))/z**2.+ \\
&(z**2./12.d0)*re*e(i,j)*b(j)/a(i) \\
&+(n**2./12.d0)*re*e(i,j) \\
&)*(s(i+1,j+1)-2.d0*s(i+1,j)+s(i+1,j-1) \\
&-s(i-1,j+1)+2.d0*s(i-1,j)-s(i-1,j-1))/(2.d0*z*n**2.)/re
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&grhs(i,j)= \\
&((z**2./12.d0)* \\
&re*e(i,j)**2.*((s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z)) \\
&*((s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0*n))/a(i) \\
&+e(i,j)*d(j)*((s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0*n))/a(i) \\
&-c(i)*d(j)/(re*a(i)) \\
&-c(i)*e(i,j)*((s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z))/a(i) \\
&+2.d0*e(i,j)*az(i)*((s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z))/a(i) \\
&-2.d0*ez(i,j)*(s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z) \\
&-2.d0*e(i,j)*(s(i+1,j)-2.d0*s(i,j)+s(i-1,j))/z**2. \\
&+2.d0*d(j)*az(i)/(re*a(i))) \\
&+(n**2./12.d0)* \\
&2.d0*en(i,j)*(s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0*n) \\
&+d(j)*e(i,j)*((s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0*n))/b(j) \\
&-e(i,j)*c(i)*((s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z))/b(j) \\
&-d(j)*c(i)/(re*b(j)) \\
&+2.d0*e(i,j)*(s(i,j+1)-2.d0*s(i,j)+s(i,j-1))/n**2. \\
&+re*e(i,j)**2.*((s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z)) \\
&*((s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0*n))/b(j) \\
&-2.d0*e(i,j)*bn(j)*((s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0*n))/b(j) \\
&+2.d0*c(i)*bn(j)/(re*b(j))) \\
&)*(v(i+1,j+1)+v(i-1,j-1)-v(i-1,j+1)-v(i+1,j-1))/(4.d0*z*n) \\
&+(z**2./12.d0)* \\
&-e(i,j)*(s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z)-d(j)/re \\
&+(n**2./12.d0)*(+2.d0*a(i)*bn(j)/(re*b(j)) \\
&-d(j)*a(i)/(re*b(j)) \\
&-e(i,j)*a(i)*((s(i+1,j)-s(i-1,j))/(2.d0*z))/b(j)) \\
&)*(v(i+1,j+1)-2.d0*v(i,j+1)+v(i-1,j+1) \\
&-v(i+1,j-1)+2.d0*v(i,j-1)-v(i-1,j-1))/(2.d0*z**2.*n) \\
&+((z**2./12.d0)*(-c(i)*b(j)/(re*a(i)) \\
&+e(i,j)*b(j)*((s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0*n))/a(i) \\
&+2.d0*b(j)*az(i)/(re*a(i))) \\
&+(n**2./12.d0)*e(i,j)*(s(i,j+1)-s(i,j-1))/(2.d0*n)-c(i)/re) \\
&)*(v(i+1,j+1)-2.d0*v(i+1,j)+v(i+1,j-1) \\
&-v(i-1,j+1)+2.d0*v(i-1,j)-v(i-1,j-1))/(2.d0*z*n**2.) \\
&+((z**2./12.d0)*(-e(i,j)/a(i)) \\
&+(n**2./12.d0)*e(i,j)/b(j)) \\
&)*((v(i+1,j)-v(i-1,j))/(2.d0*z)) \\
&*((v(i,j+1)-v(i,j-1))/(2.d0*n)) \\
&-((z**2./12.d0)*b(j)/re)+(n**2./12.d0)*a(i)/re) \\
&)*(v(i+1,j+1)-2.d0*v(i,j+1)+v(i-1,j+1) \\
&-2.d0*v(i+1,j)+4.d0*v(i,j)-2.d0*v(i-1,j) \\
&+v(i+1,j-1)-2.d0*v(i,j-1)+v(i-1,j-1))/(z**2.*n**2.)
\end{aligned}$$

## ÖZGEÇMİŞ

Hakan KAYKISIZLI  
 TÜBİTAK-UME P.K.54  
 41470 Gebze / KOCAELİ  
 Tel: +90(262) 6795000 / 5102

### Kişisel Bilgiler:

Doğum Tarihi/Yeri : 21.01.1974 / ANKARA  
Uyruğu : T.C.  
Medeni Hali : Evli  
Askerlik Hizmeti :Yapıldı

### Eğitim:

#### **Yüksek Lisans**

Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Enerji Sistemleri  
 Mühendisliği, Eylül 2004-.....

#### **Lisans**

ODTÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü 1992-1996

#### **Lise**

Koç Özel Lisesi 1988 – 1992

### İş Deneyimleri:

Ekim 1998 – ..... TÜBİTAK Ulusal Metroloji Enstitüsü  
 Akışkanlar Mekaniği Laboratuvarı, Araştırmacı  
 Haziran 1996-Ağustos 1997 Koç Özel Lisesi , Fizik Öğretmeni