

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR VE UYGULAMALARI

Oktay ÖLMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2006

Prof. Dr. Yusuf YAYLI danışmanlığında Oktay Ölmez tarafından hazırlanan bu çalışma 28 / 06 /2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisan tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. H. Hüseyin UĞURLU
(Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi)

Üye : Prof. Dr. A. Bülent EKİN
(Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI
(Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Tezin Adı : Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar ve Uygulamaları

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ülkü MEHMETOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR VE UYGULAMALARI

Oktay ÖLMEZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu çalışmada reel ve dual kuaterniyonların nasıl genelleştirildiği verilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş reel ve dual kuaterniyonların özellikleri verilerek genelleştirilmiş vida hareketleri incelenmiştir.

2006, 81 sayfa

Anahtar Kelimeler: Reel kuaterniyon, dual kuaterniyon , Lie grubu, Lie cebiri, genelleştirilmiş kuaterniyon, dual genelleştirilmiş kuaterniyon, Hamilton operatörü, Hamilton matrisi, vida hareketi.

ABSTRACT

Master Thesis

GENERALIZED QUATERNIONS AND APPLICATIONS.

Oktay ÖLMEZ

Ankara UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

In this study, how real and dual quaternions are generalized is shown. Besides, the properties of real and dual quaternions are given and the generalized screw motion have been examined.

2006, 81 pages

Key Words: Reel quaternions, dual quaternions, Lie group, Lie algebra, split quaternion, dual split quaternion, Hamilton operator, Hamilton matrix, generalized reel quaternion, generalized dual quaternion, screw motion

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, özenle çalışmalarımı takip eden ve her konuda yardımlarını esirgemeyen Levent KULA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımda manevi desteklerini her zaman hissettiğim sevgili annem Emine ÖLMEZ' e ve sevgili babam Mehmet ÖLMEZ' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarımda yanımda bulunan bütün arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Oktay ÖLMEZ

Ankara, Haziran 2006

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
3. REEL VE DUAL KUATERNİYONLAR	10
3.1 Operatörler.....	17
4.GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR.....	21
4.1 Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar.....	21
4.2 Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar Üzerinde Teme İşlemler.....	23
4.3 Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Lie Grubu ve Lie Cebiri.....	28
4.3.3 Bir Lie Grubu İçin Adjoint Dönüşümler.....	31
5. HAMILTON OPERATÖRLERİ ve ÖZELİKLERİ.....	46
6. DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR	57
6.1 Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar	57
6.2 Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler.....	61
6.3 Hamilton Operatörleri	64
7.GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR VE DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR ÜZERİNE UYGULAMAR	67
7.1 Birim genelleştirilmiş kuaterniyonların uygulaması.....	67
7.2.1 Birim genelleştirilmiş dual kuaterniyonların uygulaması.....	69
7.2.2 Genelleştirilmiş vida operatörü.....	72
7.3. Örnekler	73
KAYNAKLAR.....	80
ÖZGEÇMİŞ.....	81

SİMGELER DİZİNİ

E_2^4	Yarı Öklidiyen Uzay
G	Lie Grubu
$\chi_l G$	G Lie Grubunun Lie Cebiri
l_g	Sol Öteleme
r_g	Sağ Öteleme
ad_g	G Lie Grubu İçin Adjoint Gösterimi
Ad_g	G Lie Grubunun Lie Cebiri İçin Adjoint Gösterimi
D	Dual Sayılar Halkası
H^+, H^-	Hamilton Operatörleri
Θ	Dual Açığı
S^*	Dönme eksenini
$K_{\alpha, \beta}$	Genelleştirilmiş reel kuaterniyonlar
$D_{\alpha, \beta}$	Genelleştirilmiş dual kuaterniyonlar

1.GİRİŞ

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramlarını içermeyen mekaniğin bir dalıdır. Yani kinematik, sadece bir nokta veya nokta sistemi (cisim) nin zamana bağlı olarak yer değiştirmesini inceler (Müller 1963). Kuaterniyonlar 1843 yılında William Rowan Hamilton (1805 – 1865) tarafından tanımlanmış ve kinematikte hareketlerin incelenmesi bakımından önemli bir rol oynadığı bir çok çalışmada ifade edilmiştir.

Yang ve Freudenstein (1964) dual kuaterniyonların, uzay mekaniği analizine uygulanmasını ele almış ve detaylı bir çalışmayla, bir dönme çifti ve üç silindirik çift seçerek uzay 4 – link mekaniğini incelemiştir.

Veldkamp (1976) dual birim vektörler ve dual vektör çiftleri yardımıyla dual birim küreyi ifade etmiş ve dual küresel hareketleri vermiştir. Ayrıca dual hareket ve reel uzay hareketi arasındaki bağlantıyı göstermiştir.

Rooney (1977) sabit bir nokta etrafında bir cismin dönme hareketini metodlar hâlinde ifade etmiştir. 3×3 reel ortogonal matrisler, 2×2 üniter matrisler, Pauli spin matrisleri, 3×3 özel üniter matrisleri yardımıyla bir eksen etrafında dönme matrislerini sınıflandırmıştır.

Bottema ve Roth (1979) reel ve dual kuaterniyonların uzay kinematiğine uygulanmalarını ifade etmiştir. Hareket matrislerinin formlarını vermiştir.

Hacısalıhoğlu (1983) reel ve dual kuaterniyonları ve sağladıkları özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Birim dual kuaterniyonlar yardımıyla dönme ve kayma operatörlerini ifade etmiştir. Ayrıca vida operatörünün dönme ve kayma operatörlerinin

bileşkesi olarak yazılabileceğini göstermiştir. Vida hareketlerinin bileşimini ve Euler açılarının denklemlerini vermiştir.

Hiller ve Woernle (1984), Bir cismin genel vida hareketlerini noktalara ve doğrulara göre formülleştirmiştir. Her iki durum için de temel bağıntıları sağlayan ani vida hareketlerinin diferensiyel denklemlerini vermiş ve bu diferensiyel denklemlerin çözümlerinden de sonlu vida hareketini ifade etmiştir. Bir doğrunun vida hareketi için gerekli dual vida tensörleri, dual matrisleri, vida koordinatları ve dual kuaterniyonların denklemlerini vermiştir.

Karger ve Novak (1985) reel kuaterniyonlar yardımıyla E^3 Öklid uzayında bir eksen etrafında dönmeyi adjoint gösterimiyle ifade etmiştir.

Agrawal (1987) dual kuaterniyonları, Hamilton operatörleri ile formülleştirmiştir ve bu operatörlere karşılık gelen dual matrislerin özelliklerini ifade etmiştir. Bu özellikleri bir nokta ve bir doğrunun vida hareketinin kinematik denklemlerini geliştirmekte kullanmıştır.

Ward (1997) 3 ve 4 boyutlu Öklid uzaylarında dönme matrislerini, reel kuaterniyonları kullanarak vermiştir. Kuaterniyonların matris formlarını ifade etmiştir.

Kula (2003) split kuaterniyonları incelemiş ve Hamilton operatörlerini ve özelliklerini vermiştir. Ayrıca Minkowski-3 uzayında vida hareketini tanımlamıştır.

Pottmann “Computational Line Geometry” isimli kitabında kuaterniyonları genelleştirmiş ve birimleri i, j, k ile göstermiş ve bu birimler ise

$$i^2 = -\alpha, \quad j^2 = -\beta, \quad k^2 = -\alpha\beta$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = \beta i, \quad ki = -ik = \alpha j \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

özelliklerini sağlar. Burada $\alpha = \beta = 1$ alınması durumunda Hamilton tarafından belirlenen kuaterniyonlar elde edilir. Eğer $\alpha = 1, \beta = 0$ alınırsa Blaschke ve Grünwald'ın kinematik dönüşümleri sağlanır. Eğer $\alpha = 1, \beta = -1$ alınırsa hiperbolik düzlemdeki hareketlerin grubu için kinematik dönüşümler elde edilir.

Bu tezde geliştirilmiş reel kuaterniyonların özellikleri ve Hamilton operatörlerinden bahsedilecektir. Tezde verilen özelliklerin her birinin Hamilton ve split kuaterniyonlar ile olan ilişkisi gösterilecektir. Ayrıca geliştirilmiş dual kuaterniyonlar ve özellikleri verilecektir. Konuların daha anlaşılır olabilmesi için geliştirilmiş reel ve dual kuaterniyonların uygulamaları ve bunlara ait örnekler verilecektir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Lie grubu , Lie cebiri, adjoint gösterimi, skalar çarpım ve bize gerekli olan bazı tanımlar, teoremler ve notasyonlar hatırlatılacaktır.

Tanım 2.1.

Bir Lie grubu, diferensiyellenebilir grup operatörlerine sahip diferensiyellenebilir bir manifolddur; G diferensiyellenebilir bir manifold olsun.

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \quad \mu(a, b) = ab$$

ve G deki inversiyon operatörü olan

$$\xi : G \rightarrow G, \quad \xi(a) = a^{-1}$$

dönüşümlerinin her ikisi de diferensiyellenebilir ise G ye Lie grubu denir. (Boothby 1975, Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.2.

G Lie grubunun bir elemanı a olsun. Her $g \in G$ için $l_a(g) = ag$ olarak tanımlansın. $l_a : G \rightarrow G$ dönüşümüne G nin sol ötelemesi (sol çarpımı) denir. l_a bir diffeomorfizimdir. Her $g \in G$ için $r_a(g) = ga$ olarak tanımlansın. $r_a : G \rightarrow G$ dönüşümüne G nin sağ ötelemesi (sağ çarpımı) denir. r_a bir diffeomorfizimdir (Hacısalihoğlu 1983, Kobayashi ve Nomizu 1963).

Tanım 2.3.

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$$

$$(X, Y) \mapsto [X, Y]$$

biçimindeki bir dönüşüm her $X, Y, Z \in V$ için aşağıdaki üç önermeyi doğruluyorsa bu dönüşüme Bracket operatörü, $(V, [\cdot, \cdot])$ ikilisine de bir Lie cebiri denir.

(i) $[\cdot, \cdot]$ bilineerdir.

(ii) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anti-simetrik)

(iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jakobi özdeşliği)

dir (Chevally 1946, Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.4.

Eğer her $a, g \in G$ için $dl_a(X_g) = X_{ag}$ ise, G Lie grubu üzerindeki X vektör alanı sol-invaryanttır. Dolayısıyla

$$l_a : G \rightarrow G$$

$$g \rightarrow l_a(g) = ag$$

sol çarpımının

$$dl_a : T_G(g) \rightarrow T_G(g)$$

$$X_g \rightarrow dl_a(X_g) = X_{ag}$$

türev dönüşümü; X in oluşturduğu tanjant vektörleri yer değiştirir. Sol invariant vektör alanı diferensiyellenebilirdir.

G deki sol invariant vektör alanlarının cümlesi $\chi_l G$ olsun. Vektör alanlarının alışılmış toplama ve skalar ile çarpma işlemleri $\chi_l G$ yi bir vektör uzayı yapar. $\chi_l G$ de $[\cdot, \cdot]$ operatörü de tanımlanarak $\chi_l G$ bir Lie cebiri olur. $\text{boy } \chi_l G = n = \text{boy } G$ sonlu boyutuna sahiptir (O'Neil 1983, Howard 1991).

Lemma 2.5.

$X \in \chi_l G$ elemanını $X_e \in T_G(e)$ elemanına dönüştüren $f : \chi_l G \rightarrow T_G(e)$ fonksiyonu bir lineer izomorfizimdir. Burada e , G nin grup işlemine göre birim elemanıdır.

$\phi : G \rightarrow G$ bir otomorfizim olsun. $X \in \chi_l G$ ise $d\phi(X) \in \chi_l G$ dir ve

$$d\phi : \chi_l G \rightarrow \chi_l G$$

Lie cebiri izomorfizimine ϕ nin diferensiyeli denir.

$d\phi$ diferensiyeli

$$d\phi_e : T_G(e) \rightarrow T_G(e)$$

dönüşümü ile ifade edilir (O'Neil 1983).

Tanım 2.6.

$a \in G$ olmak üzere g elemanını aga^{-1} elemanına dönüştüren

$$C_a : G \rightarrow G$$

$$g \rightarrow C_a(g) = aga^{-1}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda C_a bir diffeomorfizim olup C_a nın diferensiyeli ad_a ile gösterilir. O halde $dC_a = ad_a$ dır. $a, b \in G$ olduğunda $C_{ab} = abg(ab)^{-1} = a(bgb^{-1})a^{-1}$ dir. Böylece $C_{ab} = C_a \circ C_b$ olur. Diferensiyel alındığında ise

$$ad_{ab} = ad_a \circ ad_b$$

elde edilir. Bu grup homomorfizimine G nin adjoint gösterimi denir (O'Neil 1983, Gürlebeck and Sprössing 1997).

Tanım 2.7.

V reel bir vektör uzayı üstünde $f : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$ iki lineer fonksiyonuna iki lineer form, eğer bu iki lineer form simetrik ise f ye simetrik iki lineer form denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.8.

$f : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$ iki lineer bir form olsun

- (i) $\forall v \in V, (v \neq 0)$ için $f(v, v) > 0$ önermesi doğru oluyorsa f ye pozitif tanımlı,
- (ii) $\forall v \in V, (v \neq 0)$ için $f(v, v) < 0$ önermesi doğru oluyorsa f ye negatif tanımlı,
- (iii) $\forall v \in V, (v \neq 0)$ için $f(v, v) \geq 0$ önermesi doğru oluyorsa f ye yarı pozitif tanımlı,
- (iv) $\forall v \in V, (v \neq 0) \Rightarrow f(v, v) \leq 0$ önermesi doğru oluyorsa f ye yarı negatif tanımlı,
- (v) $\forall w \in V$ için $f(v, w) = 0 \Rightarrow v = 0$ oluyorsa f ye nondejenere bir form denir (O'Neil 1983).

Tanım 2.9.

f, V üstünde simetrik iki lineer form olsun f nin W alt uzayına kısıtlaması $f|_W$ negatif tanımlı olacak biçimdeki W alt uzaylarının boyutlarının en büyüğüne f nin indeksi denir ve v ile gösterilir. $0 \leq v \leq \text{boy}V$ olduğu açıktır.

$$f : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$$

simetrik iki lineer form olsun.

$$\begin{aligned} q : V &\rightarrow \mathfrak{R} \\ v &\rightarrow q(v) = f(v, v) \end{aligned}$$

fonksiyonuna f den elde edilen kuadratik form denir. q kuadratik formu verildiğinde,

f simetrik iki lineer formu verilmiş demektir. Gerçekten;

$$f(v, v) = \frac{1}{2} [q(v + w) - q(v) - q(w)]$$

dır. V nin bir bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere $f_{ij} = f(e_i, e_j)$ diyelim.

$[f_{ij}]$ matrisine, f nin $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazına göre bileşenlerinin matrisi denir. f simetrik olduğundan $[f_{ij}]$ matrisi de simetriktir (O'Neil 1983).

Teorem 2.10.

f simetrik iki lineer formu nondejenere dir gerek ve yeter şart V nin bir bazına göre f ye karşılık gelen matrisin determinantının sıfırdan farklı olmalıdır (O'Neil 1983).

Tanım 2.11.

V üstünde simetrik, nondejenere bir f iki lineer formuna V üstünde bir skalar çarpım denir. f , V üstünde pozitif tanımlı bir skalar çarpım ise f ye V üstünde bir iç çarpım denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.12.

V sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere V üstünde bir skalar çarpım varsa V ye skalar çarpımlı vektör uzayı denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.13.

V skalar çarpımlı bir uzay ve $v \in V$ olsun.

$$\|v\| := \sqrt{|f(v, v)|}$$

eşitliğiyle belirli $\|v\|$ sayısına v nin normu denir. Normu 1 olan vektöre de birim vektör adı verilir (O'Neil 1983).

Tanım 2.14.

$\psi: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall p \in \psi^{-1}(q)$ için $d\psi_p$ örten ise $q \in N$ ye ψ diferensiyellenebilir fonksiyonunun bir regüler değeri denir.

Teorem 2.15.

$\psi: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon $q \in \psi(M)$ ψ fonksiyonunun bir regüler değeri olmak üzere $\psi^{-1}(q)$ M nin bir alt manifoldudur.

3. REEL VE DUAL KUATERNİYONLAR

Bu bölümde genelleştirilmiş kuaterniyonları daha iyi anlayabilmek, hem reel hemde dual kuaterniyonlar ile olan ilişkisini daha rahat görebilmek için reel ve dual kuaterniyonlardan bahsedeceğiz.

Tanım 3.1.

$$H = \{q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 / a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{R}\}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ birimlerinin çarpımları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	1	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
1	1	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	$\vec{e}_1$	-1	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	-1	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_3$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	-1

H nın her bir elemanına reel kuaterniyon denir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimleri 3- boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sistemi olarak alınabilir. Dolayısıyla $q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ kuaterniyonunun skalar kısmı S_q ve vektörel kısmı $\vec{V}_q$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$$q = S_q + \vec{V}_q$$

olmak üzere

$$S_q = a_0 \text{ ve } \vec{V}_q = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

dir.

Tanım 3.2.

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ ve $p = b_0 1 + b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$ reel kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = (S_q + S_p) + (\vec{V}_q + \vec{V}_p)$$

şeklinde tanımlıdır.

$\lambda \in \mathfrak{R}$ olmak üzere skalarla çarpma işlemi ise

$$\lambda q = (\lambda a_0)1 + (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Tanım 3.3.

Reel kuaterniyonların çarpımı;

$$\begin{aligned} \times: H \times H &\rightarrow H \\ (q, p) &\rightarrow q \times p = qp \end{aligned}$$

biçiminde bir işlem olup

$$qp = S_q S_p - \langle \vec{V}_q, \vec{V}_p \rangle + S_q \vec{V}_p + S_p \vec{V}_q + \vec{V}_q \wedge \vec{V}_p$$

olarak tanımlanır.

Burada $\mathfrak{R}^3$ teki iç çarpımı ifade etmek için “ $\langle, \rangle$ ” ve $\mathfrak{R}^3$ teki vektörel çarpımı ifade etmek için ise “ $\wedge$ ” sembolleri kullanılmıştır.

Tanım 3.4.

Bir kuaterniyonun eşleniği $\bar{q}$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \overline{(\cdot)} : H &\rightarrow H \\ q = S_q + \vec{V}_q &\rightarrow \bar{q} = S_q - \vec{V}_q \end{aligned}$$

olmak üzere

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ olmak üzere q reel kuaterniyonun eşleniği

$\bar{q} = a_0 1 - a_1 \vec{e}_1 - a_2 \vec{e}_2 - a_3 \vec{e}_3$ eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 3.5.

Bir reel kuaterniyonun normu

$$\begin{aligned} N : H &\rightarrow \mathfrak{R} \\ q &\rightarrow N(q) = N_q = q\bar{q} = \bar{q}q \end{aligned}$$

olmak üzere

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ olmak üzere q reel kuaterniyonunun normu

$$\begin{aligned} N_q &= q\bar{q} \\ &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{aligned}$$

dır.

Tanım 3.6.

$N_q = 1$ olan $q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ reel kuaterniyonuna birim reel kuaterniyon denir.

Tanım 3.7.

Bir reel kuaterniyonun inversi (tersi) q^{-1} ile gösterilir

$$(\cdot)^{-1} : H \rightarrow H$$

$$q \rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q}$$

$N_q \neq 0$ ve $q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ olmak üzere q reel kuaterniyonun inversi (tersi)

$$q^{-1} = \frac{a_0 1 - a_1 \vec{e}_1 - a_2 \vec{e}_2 - a_3 \vec{e}_3}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

dır.

Tanım 3.8.

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ olmak üzere

$$q_0 = \frac{q}{\sqrt{N_q}} = \frac{a_0 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

buradan;

$$q_0 = \frac{a_0 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \cos \theta + S_0 \sin \theta$$

olur. Burada ;

$$\cos \theta = a_0 \text{ ve } S_0 = \frac{a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

dir.

Tanım 3.9.

Bir A dual sayısı $A = a + \varepsilon a^*$ ile gösterilir. Burada $a, a^* \in \Re$ ve ε

$\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon^2 = 0$ kurallarıyla belirli bir sayıdır.

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ ve $q^* = a_0^* 1 + a_1^* \vec{e}_1 + a_2^* \vec{e}_2 + a_3^* \vec{e}_3$ olmak üzere

$Q = q + \varepsilon q^*$ şeklinde tanımlanan kuaterniyona dual kuaterniyon denir. Dual kuaterniyonlar cümlesini H_D ile göstereceğiz.

$Q = q + \varepsilon q^* = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ kuaterniyonunun skalar kısmı S_Q ve vektörel kısmı $\vec{V}_Q$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$$Q = S_Q + \vec{V}_Q$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_Q = A_0 \text{ ve } \vec{V}_Q = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$$

dir.

Tanım 3.10.

$Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ ve $P = B_0 1 + B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3$ dual kuaterniyonlarının toplamı

$$Q + P = (S_Q + S_P) + (\vec{V}_Q + \vec{V}_P)$$

şeklinde tanımlıdır.

$\lambda \in \Re$ olmak üzere skalarla çarpma işlemi ise

$$\lambda Q = (\lambda A_0) 1 + (\lambda A_1) \vec{e}_1 + (\lambda A_2) \vec{e}_2 + (\lambda A_3) \vec{e}_3$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.11.

Dual kuaterniyonların çarpımı;

$$\begin{aligned} \times: H_D \times H_D &\rightarrow H_D \\ (Q, P) &\rightarrow Q \times P = QP \end{aligned}$$

biçiminde bir işlem olup;

$$QP = qp + \varepsilon(qp^* + pq^*)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.12.

Bir dual kuaterniyonun eşleniği $\bar{Q}$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \overline{(\cdot)}: H_D &\rightarrow H_D \\ Q = S_Q + \vec{V}_Q &\rightarrow \bar{Q} = S_Q - \vec{V}_Q \end{aligned}$$

dir.

$Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ olmak üzere Q dual kuaterniyonun eşleniği

$\bar{Q} = A_0 1 - A_1 \vec{e}_1 - A_2 \vec{e}_2 - A_3 \vec{e}_3$ eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 3.13.

Bir dual kuaterniyonun normu

$$N : H_D \rightarrow \Re$$

$$Q \rightarrow N(Q) = N_Q = Q\bar{Q} = \bar{Q}Q$$

şeklinde tanımlanır.

$Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ olmak üzere Q dual kuaterniyonunun normu

$$N_Q = Q\bar{Q}$$

$$= A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

dır.

Tanım 3.14.

$N_Q = 1$ olan $Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ dual kuaterniyonuna birim dual kuaterniyon denir.

Tanım 3.15.

Bir dual kuaterniyonun inversi (tersi) Q^{-1} ile gösterilir

$$(\cdot)^{-1} : H_D \rightarrow H_D$$

$$Q \rightarrow Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{N_Q}$$

şeklinde tanımlanır.

$Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ olmak üzere Q dual kuaterniyonunun inversi (tersi)

$$Q^{-1} = \frac{A_0 1 - A_1 \vec{e}_1 - A_2 \vec{e}_2 - A_3 \vec{e}_3}{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

dır.

Tanım 3.16.

$Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ bir dual kuaterniyon olmak üzere

$$Q_0 = \frac{Q}{\sqrt{N_Q}} = \frac{A_0 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3}{\sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

buradan;

$$A_0 = \cos \Theta + S_0 \sin \Theta$$

olur. Burada ;

$$\cos \Theta = A_0 \text{ ve } S_0 = \frac{A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

dir.

Burada Θ dual açısı Q_0 birim dual kuaterniyonun açısı ve S_0 Q_0 in eksenini belirten dual bir vektördür. Ayrıca $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ ve $S_0 = \vec{S}_0 + \varepsilon \vec{S}_0^*$ eşitlikleri ile verilir

3.1 Operatörler

3.1.1 Kuaterniyon Operatörü

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ $\mathbb{R}^3$ te iki birim vektör ve aralarındaki açı θ olsun. $\vec{S} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$ alınırsa

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{S}\}$ sistemi bir sağ sistem olur.

$$\vec{b} \times (\vec{a})^{-1} = q$$

$$\vec{a} \times (\vec{b})^{-1} = q$$

olarak bulunur. Burada $q = \cos \theta + \vec{S} \sin \theta$ dır.

$$\begin{aligned}\mathfrak{K} &\rightarrow H \\ \theta &\rightarrow q\end{aligned}$$

operatörüne kuaterniyon operatörü denir.

$$\begin{aligned}\vec{b} &= q \times \vec{a} \\ \vec{a} &= q \times \vec{b}\end{aligned}$$

olur.

$\vec{b} = q \times \vec{a}$ eşitliğinden görülüyor ki $\vec{a}$ vektörünü soldan q ile çarpmak demek $\vec{a}$ vektörünü $\vec{S}$ eksenini etrafında θ kadar döndürüp $\vec{b}$ vektörünü elde etmektir.

3.1.2 Dönme Operatörü

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki birim dual vektör olsun. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ye karşılık gelen doğrular sırası ile d_1 ve d_2 olsun. $d_1 \cap d_2 = \{0\}$ ve d_1 ve d_2 arasındaki açı $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ olmak üzere $\theta^* = 0$ dır. $\vec{S}^* // \vec{A} \wedge \vec{B}$ ve $\vec{S}^*$ birim dual vektör olmak üzere;

$$\begin{aligned}\vec{B} \times (\vec{A})^{-1} &= Q^* \\ \vec{A} \times (\vec{B})^{-1} &= Q^*\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $Q^* = \cos \theta + \vec{S}^* \sin \theta$ dır.

operatörüne dönme operatörü denir.

$\vec{B} = Q^* \times \vec{A}$ eşitliğinden görülüyor ki $\vec{A}$ vektörünü soldan Q^* ile çarpmak demek $\vec{A}$ vektörüne karşılık gelen doğruyu normali $\vec{S}^*$ olan düzlemde θ kadar döndürmek demektir.

3.1.3 Kayma Operatörü

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki açı $\Theta = \theta + \theta^*$ olmak üzere $\theta = 0$ olsun. Bu durumda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ye karşılık gelen doğrular paraleldir.

$$\begin{aligned}\langle \vec{S}^*, \vec{A} \rangle &= 0 \\ \langle \vec{S}^*, \vec{B} \rangle &= 0\end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned}\vec{B} \times (\vec{A})^{-1} &= q_1^* = 1 + \varepsilon \theta^* \vec{S}^* \\ \vec{A} \times (\vec{B})^{-1} &= q_1^* = 1 + \varepsilon \theta^* \vec{S}^* \\ \Re &\rightarrow H_D \\ \theta^* &\rightarrow q_1^* = 1 + \varepsilon \theta^* \vec{S}^*\end{aligned}$$

operatörüne kayma operatörü denir.

3.1.4 Vida Operatörü

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki açı $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ $\theta \neq 0, \theta^* \neq 0$ dual açısı olan iki birim dual vektör olsun. Bu halde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ye kesişmeyen ve paralel olmayan iki doğru karşılık gelir. Bu iki vektöre karşılık gelen doğrular d_1 ve d_2 olsun. d_1 ve d_2 nin ortak dikme doğrusuna karşılık gelen $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ile sağ sistem oluşturan birim dual vektör $\vec{S}^*$ olsun. Bu durumda $Q^* = \cos \Theta + \vec{S}^* \sin \Theta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\vec{B} \times (\vec{A})^{-1} &= Q^* \\ \vec{A} \times (\vec{B})^{-1} &= Q^*\end{aligned}$$

yazabiliriz.

$Q^* = \cos \Theta + \vec{S}^* \sin \Theta$ birim dual kuaterniyonunu ile bir $\vec{A}$ birim dual vektörünü soldan çarpmak demek $\vec{A}$ ya karşılık gelen doğruyu $\vec{S}^*$ in doğrultu ve yönünde $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ açısının dual kısmı kadar kaydırmak hemen ardından da $\vec{S}^*$ etrafında $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ reel kısmı kadar döndürmektir.

Bu bölümde verilen bütün tanımlar ve teoremler bir sonraki bölümde genelleştirilerek genelleştirilmiş kuaterniyonlar için bir yapı taşı teşkil edecektir. Çalışmamızın asıl amacı bu bölümün sonunda verilen operatörlerin genelleştirilmiş ifadelerini vermektir .

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

Bu bölümde, kuaterniyonları genelleştirip bunların Lie grup ve Lie cebir yapılarını inceleyeceğiz. Ayrıca genelleştirilmiş kuaterniyonların reel ve bölünmüş (split) kuaterniyonlar ile olan ilişkisini göstereceğiz.

4.1 Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar

$$K_{\alpha,\beta} = \{q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta \in \mathfrak{R}\}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ birimlerinin çarpımı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}\vec{e}_1^2 &= -\alpha & \vec{e}_2^2 &= -\beta & \vec{e}_3^2 &= -\alpha\beta \\ \vec{e}_1 \vec{e}_2 &= -\vec{e}_2 \vec{e}_1 = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \vec{e}_3 &= -\vec{e}_3 \vec{e}_2 = \beta \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \vec{e}_1 &= -\vec{e}_1 \vec{e}_3 = \alpha \vec{e}_2\end{aligned}$$

$K_{\alpha,\beta}$ nın her bir elemanına bir genelleştirilmiş kuaterniyon adı verilir. Burada a_0, a_1, a_2, a_3 reel sayılarına q genelleştirilmiş kuaterniyonun bileşenleri denir. Bundan sonraki bölümlerde, bir genelleştirilmiş kuaterniyon için $q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ gösterimi kullanılacaktır. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimleri 3- boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sistemi olarak alınabilir. Dolayısıyla $q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ kuaterniyonun skalar kısmı S_q ve vektörel kısmı $\vec{V}_q$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$$q = S_q + \vec{V}_q$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_q = a_0 \text{ ve } \vec{V}_q = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

dir.

Burada bazı özel durumları inceleyim ;

(i) $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda reel kuaterniyonlar elde edilir.

(ii) $\alpha = 1$, $\beta = -1$ durumunda bölünmüş(split) kuaterniyonlar elde edilir.

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, $p = b_0 1 + b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$ iki genelleştirilmiş kuaterniyonunun toplamı

$$\begin{aligned} q + p &= (S_q + S_p) + (\vec{V}_q + \vec{V}_p) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

$\lambda \in \Re$ ve $q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ olmak üzere λq dış işlemi

$$\lambda q = (\lambda a_0)1 + (\lambda a_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3)\vec{e}_3$$

iletanımlıdır.

Bu iki işlem ile birlikte $K_{\alpha,\beta}$ cümlesi reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayı olur.

Ayrıca $q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ ve $p = b_0 1 + b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$ genelleştirilmiş kuaterniyonların çarpımı:

$$\begin{aligned} \times: K_{\alpha,\beta} \times K_{\alpha,\beta} &\rightarrow K_{\alpha,\beta} \\ (q, p) &\rightarrow q \times p = qp \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} qp &= (a_0 b_0 - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 - \alpha \beta a_3 b_3) + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + \beta a_2 b_3 - \beta a_3 b_2)\vec{e}_1 \\ &+ (a_0 b_2 + a_2 b_0 - \alpha a_1 b_3 + \alpha a_3 b_1)\vec{e}_2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

veya

$$qp = S_q S_p - f(\vec{V}_q, \vec{V}_p) + S_q \vec{V}_p + S_p \vec{V}_q + \vec{V}_q \Lambda \vec{V}_p$$

olarak tanımlanır.

Burada $im(K_{\alpha,\beta}) = \{a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 / a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{R}\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f : im(K_{\alpha,\beta}) \times im(K_{\alpha,\beta}) &\rightarrow \mathfrak{R} \\ (\vec{V}_q, \vec{V}_p) &\rightarrow f(\vec{V}_q, \vec{V}_p) = \alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \alpha \beta a_3 b_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Lambda : im(K_{\alpha,\beta}) \times im(K_{\alpha,\beta}) &\rightarrow im(K_{\alpha,\beta}) \\ (\vec{V}_q, \vec{V}_p) &\rightarrow \vec{V}_q \Lambda \vec{V}_p = \begin{vmatrix} \beta \vec{e}_1 & \alpha \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (\beta a_2 b_3 - \beta a_3 b_2) \vec{e}_1 + (\alpha a_3 b_1 - \alpha a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

dır. Bu çarpma işlemi ile birlikte $K_{\alpha,\beta}$ ya genelleştirilmiş kuaterniyon cebiri denir.

Burada $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda Öklid uzayındaki iç çarpım ve vektörel çarpım elde edilir. $\alpha = 1, \beta = -1$ seçilmesi durumunda E_2^4 yarı Öklidyen uzayındaki iç çarpım ve vektörel çarpım elde edilir.

4.2 Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

a) Eşlenik

$$\begin{aligned} \overline{(\cdot)} : K_{\alpha,\beta} &\rightarrow K_{\alpha,\beta} \\ q = S_q + \vec{V}_q &\rightarrow \bar{q} = S_q - \vec{V}_q \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır ve buna göre bir

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ olmak üzere q genelleştirilmiş kuaterniyonun eşleniği

$\bar{q} = a_0 1 - a_1 \vec{e}_1 - a_2 \vec{e}_2 - a_3 \vec{e}_3$ olur. Eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(i) \quad \overline{aq + bp} = \bar{a}\bar{q} + \bar{b}\bar{p}, \forall a, b \in \mathfrak{R}, q, p \in K_{\alpha, \beta}$$

$$(ii) \quad \overline{qp} = \overline{\bar{p}\bar{q}}, \forall q, p \in K_{\alpha, \beta}$$

$$(iii) \quad \bar{\bar{q}} = q, \forall q \in K_{\alpha, \beta}$$

b) Norm:

$$N : K_{\alpha, \beta} \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$q \rightarrow N(q) = N_q = q\bar{q} = \bar{q}q$$

biçiminde tanımlanan N işlemine $K_{\alpha, \beta}$ üzerinde norm denir.

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ olmak üzere q genelleştirilmiş kuaterniyonunun normu

$$\begin{aligned} N_q &= q\bar{q} \\ &= a_0^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2 \end{aligned}$$

reel sayısı ile tanımlıdır.

Norm işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(i) \quad N_{qp} = N_q N_p, \forall q, p \in K_{\alpha, \beta}$$

$$(ii) \quad N_{\lambda q} = \lambda^2 N_q, \forall \lambda \in \mathfrak{R}, \forall q \in K_{\alpha, \beta}$$

c) İnvrs:

$$\begin{aligned} (,)^{-1} : K_{\alpha, \beta} &\rightarrow K_{\alpha, \beta} \\ q &\rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q}, N_q \neq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan işleme $K_{\alpha, \beta}$ da invrs işlemi denir. $N_q \neq 0$ olmak üzere bir

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ genelleştirilmiş kuaterniyonun invrsi

$$q^{-1} = \frac{a_0 1 - a_1 \vec{e}_1 - a_2 \vec{e}_2 - a_3 \vec{e}_3}{a_0^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2}$$

dır.

İnvrs işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(i) \quad (qp)^{-1} = p^{-1} q^{-1}, \forall q, p \in K_{\alpha, \beta} \text{ ve } N_q \neq 0, N_p \neq 0$$

$$(ii) \quad (\lambda q)^{-1} = \frac{1}{\lambda} q^{-1}, \lambda \in \mathfrak{R}, q \in K_{\alpha, \beta} \text{ ve } N_q \neq 0, \lambda \neq 0$$

d) Birim genelleştirilmiş kuaterniyon:

$N_q = 1$ olan $q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ genelleştirilmiş kuaterniyonnuna birim genelleştirilmiş kuaterniyon denir.

e) İki genelleştirilmiş vektörün çarpımı:

Skalar kısmı sıfır olan genelleştirilmiş kuaterniyona genelleştirilmiş vektör adı verilir.

$q = \vec{V}_q = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ $p = \vec{V}_p = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$ genelleştirilmiş vektörlerin çarpımı

$$\begin{aligned} \times: K_{\alpha,\beta} \times K_{\alpha,\beta} &\rightarrow K_{\alpha,\beta} \\ (\vec{V}_q, \vec{V}_p) &\rightarrow \vec{V}_q \times \vec{V}_p = -f(\vec{V}_q, \vec{V}_p) + \vec{V}_q \wedge \vec{V}_p \\ &= -f(q, p) + q \wedge p \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu eşitlikten görülmektedir ki bu iki genelleştirilmiş vektör f skalar çarpımına göre dik iseler çarpımları vektörel çarpımlarına eşit olur. Eğer bu iki vektör paralel iseler çarpımları, bu iki genelleştirilmiş vektörün skalar çarpımına eşit olur.

e) İki genelleştirilmiş kuaterniyonun skalar çarpımı:

$q = S_q + \vec{V}_q$ ve $p = S_p + \vec{V}_p$ iki genelleştirilmiş kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle, \rangle: K_{\alpha,\beta} \times K_{\alpha,\beta} &\rightarrow \Re \\ \langle q, p \rangle &= S_q S_p + f(\vec{V}_q, \vec{V}_p) \\ &= a_0 b_0 + \alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \alpha \beta a_3 b_3 \\ &= S(p\bar{q}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işleme iki genelleştirilmiş kuaterniyonun skalar çarpımı denir.

Teorem 4.2.1

$K_{\alpha,\beta}$ da ki metrik aşağıdaki önermeleri gerçeğe çıkar.

$$(i) \langle pq_1, pq_2 \rangle = N_p \langle q_1, q_2 \rangle \quad \forall p, q_1, q_2 \in K_{\alpha,\beta}$$

$$(ii) \langle qp_1, qp_2 \rangle = N_p \langle q_1, q_2 \rangle \quad \forall p, q_1, q_2 \in K_{\alpha,\beta}$$

$$(iii) \langle pq_1, q_2 \rangle = \langle q_1, \overline{pq_2} \rangle \forall p, q_1, q_2 \in K_{\alpha, \beta}$$

$$(iv) \langle pq_1, q_2 \rangle = \langle p, q_2 \overline{q_1} \rangle \forall p, q_1, q_2 \in K_{\alpha, \beta}$$

ispat.

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ ve $p = b_0 1 + b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$ genelleştirilmiş kuaterniyon olmak üzere;

$$\begin{aligned} \langle q, p \rangle &= a_0 b_0 + \alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \alpha \beta a_3 b_3 \\ &= S(p \overline{q}) \end{aligned}$$

dır. Bu eşitliği kullanarak ispatlarımızı kolaylıkla yapabiliriz.

(i)

$$\begin{aligned} \langle pq_1, pq_2 \rangle &= S(pq_1 \overline{pq_2}) \\ &= S(pq_1 \overline{q_2} \overline{p}) \\ &= S(\overline{q_2} \overline{p} pq_1) \\ &= N_p S(\overline{q_2} q_1) \\ &= N_p S(q_1 \overline{q_2}) \\ &= N_p \langle q_1, q_2 \rangle \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \langle q_1 p, q_2 p \rangle &= S(q_1 p \overline{q_2 p}) \\ &= S(q_1 p \overline{p} \overline{q_2}) \\ &= N_p S(q_1 \overline{q_2}) \\ &= N_p \langle q_1, q_2 \rangle \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\langle pq_1, q_2 \rangle &= S(pq_1 \overline{q_2}) \\ &= S(q_1 \overline{q_2} p) \\ &= S(q_1 \overline{pq_2}) \\ &= \langle q_1, \overline{pq_2} \rangle\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\langle pq_1, q_2 \rangle &= S(pq_1 \overline{q_2}) \\ &= S(\overline{pq_2 q_1}) \\ &= \langle p, q_2 \overline{q_1} \rangle\end{aligned}$$

dır.

4.3 Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Lie Grubu ve Lie Cebiri

$G = \{q \in K_{\alpha, \beta} : N_q = 1\}$ cümlesini ele alalım.

Teorem 4.3.1.

$G = \{q \in K_{\alpha, \beta} : N_q = 1\}$ bir Lie grubudur.

İspat.

(i) G cümlesi genelleştirilmiş kuaterniyon çarpımına göre bir gruptur. Bu grubunun birim elemanı $e = 1$ dir.

(ii)

$$f : K_{\alpha,\beta} \rightarrow \mathfrak{R}$$
$$q \rightarrow f(q) = \langle q, q \rangle = a_0^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2$$

olarak tanımlayalım. f fonksiyonun kordinat fonksiyonları cinsinden $f = x_0^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \alpha \beta x_3^2$ şeklinde yazabiliriz. f nin jakobiye matrisi

$$J(f) = [2x_0, 2\alpha x_1, 2\beta x_2, 2\alpha\beta x_3]$$

dir. $J(f)$ matrisinin rankı 1 dir. Tanım 2.14. ve Teorem 2.15 den dolayı $f^{-1}(1) K_{\alpha,\beta}$ nın bir alt manifoldudur.

$$\mu : K_{\alpha,\beta} \times K_{\alpha,\beta} \rightarrow K_{\alpha,\beta}$$
$$(p, q) \rightarrow \mu(p, q) = pq$$

ve

$$\psi : G \rightarrow G$$
$$q \rightarrow \psi(q) = q^{-1} = \bar{q}$$

dönüşümlerinin diferensiyellenebilir olduğu gösterilebilir. Böylece $G = \{q \in K_{\alpha,\beta} : N_q = 1\}$ cümlesi bir Lie grubu olur.

Teorem 4.3.2

G Lie grubunun Lie cebiri $im(K_{\alpha,\beta})$ dır.

İspat.

$v_e \in T_G(e)$ olsun. G içinde v_e yi hız vektörü olarak kabul eden bir γ eğrisi alalım. Yani $\gamma(0) = 1$ ve $\gamma'(0) = v_e$ olacak biçimde G içinde en az bir

$$\gamma: I \rightarrow G, \gamma(s) = a_0(s) + a_1(s)\vec{e}_1 + a_2(s)\vec{e}_2 + a_3(s)\vec{e}_3$$

eğrisi vardır. $\gamma(s) \in G$ olduğundan.

$$a_0^2(s) + \alpha a_1^2(s) + \beta a_2^2(s) + \alpha \beta a_3^2(s) = 1$$

dir. Bu eşitliğin $s = 0$ noktasında türevini alınırsa,

$$2a'_0(s)a_0(s) + 2\alpha a'_1(s)a_1(s) + 2\beta a'_2(s)a_2(s) + 2\alpha \beta a'_3(s)a_3(s) = 0$$

eşitliği elde edilir. $a_0(0) = 1, a_1(0) = 0, a_2(0) = 0, a_3(0) = 0$ olduğundan

$a'_0(0) = 0$ olur. $T_G(e)$ e noktasından geçen eğrinin hız vektörlerinin kümesidir.

$T_G(e)$ deki her vektörü, $im(K_{\alpha,\beta})$ nin e noktasındaki teğet uzayının $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$

bazındaki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazabiliriz. Buna göre $a'_0(0) = 0$ hız vektörü

$$a'_0 = a'_0(0) \frac{\partial}{\partial x_0} + a'_1(0) \frac{\partial}{\partial x_1} + a'_2(0) \frac{\partial}{\partial x_2} + a'_3(0) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

dir. $a'_0(0) = 0$ olduğundan $T_G(e) \subset Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$ dir.

$boy G = boy T_G(e) = 3$ olduğundan $T_G(e) = Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$ bulunur. Öyle ise G nin

Lie cebiri $im(K_{\alpha,\beta})$ dir.

$$T_G(e) \cong im(K_{\alpha,\beta}) = \{a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 / a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{R}\}$$

olur.

4.3.3 Bir Lie Grubu ve Lie Cebiri İçin Adjoint Dönüşümler

a) G Lie Grubunun Matris Temsili

$$G = \{q \in K_{\alpha,\beta} : N_q = 1\} \text{ ve } g \in G \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \text{int } g : G &\rightarrow G \\ x &\rightarrow \text{int } g(x) = gxg^{-1} \end{aligned}$$

birebir, örten ve differensiyellenebilir olan $\text{int } g$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Bu fonksiyonun türev dönüşümünün grubun birim elemanı olan $e=1$ noktasına kısıtlamasına adjoint dönüşümü denir. Bir $q \in K_{\alpha,\beta}$ için

$$\begin{aligned} adq : T_G(e) &\rightarrow T_G(e) \\ p &\rightarrow qpq^{-1} \end{aligned}$$

dır. $T_G(e) = Sp\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ olduğundan $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bazına göre

$$adq(\vec{e}_1) = (a_0^2 + \alpha a_1^2 - \beta a_2^2 - \alpha \beta a_3^2) \vec{e}_1 + (2\alpha a_0 a_3 + 2\alpha a_1 a_2) \vec{e}_2 + (2\alpha a_1 a_3 - 2a_0 a_2) \vec{e}_3$$

$$adq(\vec{e}_2) = (2\beta a_1 a_2 - 2\beta a_0 a_3) \vec{e}_1 + (a_0^2 - \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 - \alpha \beta a_3^2) \vec{e}_2 + (2a_0 a_1 + 2\beta a_2 a_3) \vec{e}_3$$

$$adq(\vec{e}_3) = (2\beta \alpha a_1 a_3 + 2\beta a_0 a_2) \vec{e}_1 + (2\alpha \beta a_2 a_3 - 2\alpha a_0 a_1) \vec{e}_2 + (a_0^2 - \alpha a_1^2 - \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2) \vec{e}_3$$

eşitliklerinden;

$$adq = \begin{bmatrix} a_0^2 + \alpha a_1^2 - \beta a_2^2 - \alpha \beta a_3^2 & 2\beta a_1 a_2 - 2\beta a_0 a_3 & 2\beta \alpha a_1 a_3 + 2\beta a_0 a_2 \\ 2\alpha a_0 a_3 + 2\alpha a_1 a_2 & a_0^2 - \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 - \alpha \beta a_3^2 & 2\alpha \beta a_2 a_3 - 2\alpha a_0 a_1 \\ 2\alpha a_1 a_3 - 2a_0 a_2 & 2a_0 a_1 + 2\beta a_2 a_3 & a_0^2 - \alpha a_1^2 - \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Burada $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ seçilmesi durumunda reel kuaterniyonlar elde edilir. Böylelikle;

$$adq = M = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2a_1 a_2 - 2a_0 a_3 & 2a_1 a_3 + 2a_0 a_2 \\ 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2a_2 a_3 - 2a_0 a_1 \\ 2a_1 a_3 - 2a_0 a_2 & 2a_0 a_1 + 2a_2 a_3 & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$MM^T = I_3$ ve $\det M = 1$ olduğundan M ortogonal olup adq dönüşümü $\mathfrak{R}^3$ te dönmelere karşılık gelir. Dönme eksenini $\vec{S} = (s_1, s_2, s_3)$ olmak üzere ;

$$M = I_3 + \sin \theta S + (1 - \cos \theta) S^2$$

şeklinde yazılabilir.

Burada θ dönme açısı S anti-simetrik bir matris olup

$$S = \begin{bmatrix} 0 & s_3 & s_2 \\ -s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. Aynı şekilde $\alpha = 1$ ve $\beta = -1$ seçilmesi durumunda bölünmüş (split) kuaterniyonlar elde edilir.

$$adq = N = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & -2a_1a_2 + 2a_0a_3 & -2a_1a_3 - 2a_0a_2 \\ 2a_0a_3 + 2a_1a_2 & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & -2a_2a_3 - 2a_0a_1 \\ 2a_1a_3 - 2a_0a_2 & 2a_0a_1 - 2a_2a_3 & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } N^T \varepsilon N = I_3 \text{ dır. Ayrıca } \det N = 1 \text{ olduğundan } N \text{ yarı}$$

ortogonal olup adq dönüşümü Minkowski 3 uzayında dönmelere karşılık gelir. Dönme eksenini $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ olmak üzere ;

$$N = I_3 + \sinh \gamma C + (-1 + \cosh \gamma) C^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada γ dönme açısı $C^T = -\varepsilon C \varepsilon$ eşitliğini sağlayan C anti-simetrik matrisi;

$$C = \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 4.3.4.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } adq^T \varepsilon adq = \varepsilon \text{ dır.}$$

İspat.

$$adq^T \varepsilon$$

$$= \begin{bmatrix} a_0^2 + \alpha a_1^2 - \beta a_2^2 - \alpha \beta a_3^2 & 2\beta a_1 a_2 - 2\beta a_0 a_3 & 2\alpha \beta a_1 a_3 + 2\beta a_0 a_2 \\ 2\alpha a_0 a_3 + 2\alpha a_1 a_2 & a_0^2 - \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 - \alpha \beta a_3^2 & 2\alpha \beta a_2 a_3 - 2\alpha a_0 a_1 \\ 2\alpha a_1 a_3 - 2a_0 a_2 & 2a_0 a_1 + 2\beta a_2 a_3 & a_0^2 - \alpha a_1^2 - \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_0^2 + \alpha^2 a_1^2 - \alpha \beta a_2^2 - \alpha^2 \beta a_3^2 & 2\alpha \beta a_0 a_3 + 2\alpha \beta a_1 a_2 & 2\alpha^2 \beta a_1 a_3 - 2\alpha \beta a_0 a_2 \\ 2\alpha \beta a_1 a_2 - 2\alpha \beta a_0 a_3 & \beta a_0^2 - \alpha \beta a_1^2 + \beta^2 a_2^2 - \alpha \beta^2 a_3^2 & 2\alpha \beta a_0 a_1 + 2\alpha \beta^2 a_2 a_3 \\ 2\beta \alpha^2 a_1 a_3 + 2\alpha \beta a_0 a_2 & 2\alpha \beta^2 a_2 a_3 - 2\alpha \beta a_0 a_1 & \alpha \beta a_0^2 - \alpha^2 \beta a_1^2 - \alpha \beta^2 a_2^2 + \alpha^2 \beta^2 a_3^2 \end{bmatrix}$$

Buradan da;

$$adq^T \varepsilon adq = (N_q)^2 \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \beta \end{bmatrix}$$

$$= \varepsilon$$

bulunur.

adq ortogonal dir. Ayrıca

$$\det adq = (a_0^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2)^3$$

$$= 1$$

olduğundan adq lineer dönüşümü $T_G(e) = im(K_{\alpha, \beta})$ de izometridir.

Teorem 4.3.5.

$q \in K_{\alpha, \beta}$ $N_q = 1$, $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere $adq = I + \sin \varphi S + (1 - \cos \varphi) S^2$ dir.

İspat.

$$\alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0 \text{ için } \forall \vec{V}_q \in \text{im}(K_{\alpha, \beta}), \vec{V}_q \neq 0 \Rightarrow f(\vec{V}_q, \vec{V}_q) = \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2 > 0$$

önermesi doğru olur bu durumda f ye pozitif tanımlı denir.

$$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \text{ ve } N_q = 1 \text{ olmak üzere ;}$$

$$q = a_0 + \sqrt{\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2} \frac{a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3}{\sqrt{\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2}}$$

$$q = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \vec{S}$$

$$\text{Burada } \cos \frac{\varphi}{2} = a_0, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2} \text{ ve } \vec{S} = \frac{a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3}{\sqrt{\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2}}$$

dir.

Öncelikle $\vec{S}$ vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matrisi bulalım.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \beta \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } S^T \varepsilon = -\varepsilon S \text{ önermesi sağlanıyorsa } S \text{ matrisine anti}$$

simetrik matris denir.

$$\text{Bura da gerekli işlemler yapılırsa } S = \begin{bmatrix} 0 & -\beta s_3 & \beta s_2 \\ \alpha s_3 & 0 & -\alpha s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\beta s_3 & \beta s_2 \\ \alpha s_3 & 0 & -\alpha s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \cong \vec{S} = (s_1, s_2, s_3)$$

S ve M iki anti-simetrik matris olmak üzere $SM - MS \cong \vec{S} \wedge \vec{M}$ dir. Gerçekten de

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\beta s_3 & \beta s_2 \\ \alpha s_3 & 0 & -\alpha s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } M = \begin{bmatrix} 0 & -\beta m_3 & \beta m_2 \\ \alpha m_3 & 0 & -\alpha m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$SM - MS = \begin{bmatrix} 0 & \beta s_2 m_1 - \beta s_1 m_2 & \alpha \beta s_3 m_1 - \alpha \beta s_1 m_3 \\ \alpha s_1 m_2 - \alpha s_2 m_1 & 0 & \alpha \beta s_3 m_2 - \alpha \beta s_2 m_3 \\ \alpha s_1 m_3 - \alpha s_3 m_1 & \beta s_2 m_3 - \beta s_3 m_2 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} SM - MS &\cong (\beta s_2 m_3 - \beta s_3 m_2, \alpha s_3 m_1 - \alpha \beta s_1 m_3, s_2 m_1 - \beta s_1 m_2) \\ &= \vec{S} \wedge \vec{M} \end{aligned}$$

dir.

$$\cos \frac{\varphi}{2} = a_0, s_1 \sin \frac{\varphi}{2} = a_1, s_2 \sin \frac{\varphi}{2} = a_2 \text{ ve } s_3 \sin \frac{\varphi}{2} = a_3 \text{ olmak üzere}$$

$$adq = \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + (\alpha s_1^2 - \beta s_2^2 - \alpha \beta s_3^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2} & 2\beta s_1 s_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2\beta s_3 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} & 2\beta s_1 s_3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2\beta s_2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ 2\alpha s_3 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + 2\alpha s_1 s_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} & \cos^2 \frac{\varphi}{2} + (-\alpha s_1^2 + \beta s_2^2 - \alpha \beta s_3^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2} & 2\alpha \beta s_2 s_3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2\alpha s_1 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \\ 2\alpha s_1 s_3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2s_2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} & 2s_1 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + 2\beta s_2 s_3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} & \cos^2 \frac{\varphi}{2} + (-\alpha s_1^2 - \beta s_2^2 + \alpha \beta s_3^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

$$adq = I + \begin{bmatrix} (\alpha s_1^2 - \beta s_2^2 - \alpha \beta s_3^2 - 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} & 2\beta s_1 s_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \beta s_3 \sin \varphi & 2\alpha \beta s_1 s_3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \beta s_2 \sin \varphi \\ \alpha s_3 \sin \varphi + 2\alpha s_1 s_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} & (-\alpha s_1^2 + \beta s_2^2 - \alpha \beta s_3^2 - 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} & 2\alpha \beta s_2 s_3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \alpha s_1 \sin \varphi \\ 2\alpha s_1 s_3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - s_2 \sin \varphi & s_1 \sin \varphi + 2\beta s_2 s_3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} & (-\alpha s_1^2 - \beta s_2^2 + \alpha \beta s_3^2 - 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

Bura da $2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \cos \varphi$ ve $\alpha s_1^2 + \beta s_2^2 + \alpha \beta s_3^2 = 1$ eşitlikleri kullanılırsa

$$adq = I + \sin \varphi \begin{bmatrix} 0 & -\beta s_3 & \beta s_2 \\ \alpha s_3 & 0 & -\alpha s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} + (1 - \cos \varphi) \begin{bmatrix} -\alpha \beta s_3^2 - \beta s_2^2 & \beta s_1 s_2 & \alpha \beta s_1 s_3 \\ \alpha s_1 s_2 & -\alpha s_1^2 - \alpha \beta s_3^2 & \alpha \beta s_2 s_3 \\ \alpha s_1 s_3 & \beta s_2 s_3 & -\alpha s_1^2 - \beta s_2^2 \end{bmatrix}$$

$adq = I + \sin \varphi S + (1 - \cos \varphi) S^2$ eşitliği elde edilmiş olur.

$\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ seçilmesi özel halin de bize $\mathfrak{R}^3$ te bir eksen etrafında φ açısı karlık dönme yaptıran matrisi verir

b) Lie Çarpımı

$G = \{q \in K_{\alpha, \beta} : N_q = 1\}$ Lie grubunun e noktasındaki sol invaryant vektör alanlarının cümlesini; $\chi_l(G) = \{X \in \chi(G) / (l_g)_*(X) = X\}$ cümlesi ile gösterelim. Bu cümle e noktasındaki tanjant uzay ile izomorftur yani $\chi_l(G) \cong T_G(e)$ dır.

$$[\cdot] : T_G(e) \times T_G(e) \rightarrow T_G(e) \\ (X, Y) \rightarrow [\cdot](X, Y) = [X, Y] = D_X Y - D_Y X$$

şeklinde tanımlanan çarpım bir Lie çarpımı olur ve $(T_G(e), [\cdot])$ ikilisi $G = \{q \in K_{\alpha, \beta} : N_q = 1\}$ Lie grubunun Lie cebiridir. Şimdi Lie çarpımının kuralını bulalım.

$s = 0$ da e noktasından geçen ve $\gamma'_1(0) = \bar{e}_1$ olan bir

$$\begin{aligned}\gamma_1 : I &\rightarrow G \\ s &\rightarrow \gamma_1(s)\end{aligned}$$

eğrisi alalım. $g \in G$ olmak üzere $(l_g)(\gamma_1(s)) = \mu_1(s)$ olacak şekilde

$$\begin{aligned}\mu_1 : I &\rightarrow G \\ s &\rightarrow \mu_1(s)\end{aligned}$$

eğrisi vardır.

Öyle ki $(l_g)_*(\gamma'_1(0)) = \mu'_1(0)$ dır.

$(l_g)_*(\gamma'_1(0)) = \mu'_1(0)$ eşitliğinde $g = g_0 + g_1\vec{e}_1 + g_2\vec{e}_2 + g_3\vec{e}_3$ alınırsa

$$\begin{aligned}\mu'_1(0) &= g \times \vec{e}_1 = -\alpha g_1 + g_0\vec{e}_1 + \alpha g_3\vec{e}_2 - g_2\vec{e}_3 \\ &= \vec{X}_1\end{aligned}$$

Aynı şekilde $s = 0$ da e noktasından geçen ve $\gamma'_2(0) = \vec{e}_2$ olan bir

$$\begin{aligned}\gamma_2 : I &\rightarrow G \\ s &\rightarrow \gamma_2(s)\end{aligned}$$

eğrisi alalım. $g \in G$ olmak üzere $(l_g)(\gamma_2(s)) = \mu_2(s)$ olacak şekilde

$$\begin{aligned}\mu_2 : I &\rightarrow G \\ s &\rightarrow \mu_2(s)\end{aligned}$$

eğrisi vardır. Öyle ki $(l_g)_*(\gamma'_2(0)) = \mu'_2(0)$ dır.

$$\begin{aligned}\mu'_2(0) &= g \times \vec{e}_2 = -\beta g_2 - \beta g_3\vec{e}_1 + g_0\vec{e}_2 + g_1\vec{e}_3 \\ &= \vec{X}_2\end{aligned}$$

ve

$s = 0$ da e noktasından geçen ve $\gamma'_3(0) = \vec{e}_3$ olan bir

$$\begin{aligned}\gamma_3 : I &\rightarrow G \\ s &\rightarrow \gamma_3(s)\end{aligned}$$

eğrisi alalım. $g \in G$ olmak üzere $(l_g)(\gamma_3(s)) = \mu_3(s)$ olacak şekilde

$$\begin{aligned}\mu_3 : I &\rightarrow G \\ s &\rightarrow \mu_3(s)\end{aligned}$$

eğrisi vardır. Öyle ki $(l_g)_*(\gamma'_3(0)) = \mu'_3(0)$ dır.

$$\begin{aligned}\mu'_3(0) &= g \times \vec{e}_3 = -\alpha \beta g_3 + \beta g_2 \vec{e}_1 - \alpha g_1 \vec{e}_2 + g_0 \vec{e}_3 \\ &= \vec{X}_3\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Dolayısıyla $\chi_l(G)$ nin bir bazı $\{X_1, X_2, X_3\}$ dir Baz

vektörlerini $\chi(E^4)$ ün baz vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazabiliriz.

$$\vec{X}_1 = -\alpha g_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + g_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha g_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - g_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\vec{X}_2 = -\beta g_2 \frac{\partial}{\partial x_0} - \beta g_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + g_0 \frac{\partial}{\partial x_2} + g_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\vec{X}_3 = -\alpha \beta g_3 \frac{\partial}{\partial x_0} + \beta g_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha g_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + g_0 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

yazabiliriz

Böylece $\chi_l(G)$ üzerinde braket operatörünü tanımlayabiliriz. Bunun için $\chi_l(G)$ nin bazlarının çarpım kuralını vermek yeterlidir.

$$D_{\vec{X}_1} \vec{X}_2 = (-\alpha \beta g_3, \beta g_2, -\alpha g_1, g_0)$$

$$D_{\vec{X}_2} \vec{X}_1 = (\alpha\beta g_3, -\beta g_2, \alpha g_1, -g_0)$$

bulunur.

$$[\vec{X}_1, \vec{X}_2] = D_{\vec{X}_1} \vec{X}_2 - D_{\vec{X}_2} \vec{X}_1 \text{ eşitliğini kullanırsak ;}$$

$$[\vec{X}_1, \vec{X}_2] = 2\vec{X}_3 \text{ olur. Aynı şekilde}$$

$$D_{\vec{X}_2} \vec{X}_3 = (\alpha\beta g_1, -\beta g_0, -\alpha\beta g_3, \beta g_2)$$

$$D_{\vec{X}_3} \vec{X}_2 = (-\alpha\beta g_1, \beta g_0, \alpha\beta g_3, -\beta g_2)$$

bu eşitliklerden $[\vec{X}_2, \vec{X}_3] = 2\beta \vec{X}_1$ bulunur. Son olarak

$$D_{\vec{X}_1} \vec{X}_3 = (-\alpha\beta g_2, -\alpha\beta g_3, -\alpha\beta g_0, \alpha g_1)$$

$$D_{\vec{X}_3} \vec{X}_1 = (\alpha\beta g_2, \alpha\beta g_3, \alpha\beta g_0, -\alpha g_1)$$

eşitliklerinden $[\vec{X}_3, \vec{X}_1] = 2\alpha \vec{X}_2$ bulunur.

$\chi_l(G) \cong T_G(e)$ olduğundan $T_G(e)$ üzerindeki braket çarpım kuralını verebiliriz. Burada

$$\vec{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_e \quad (i = 1, 2, 3) \text{ olmak üzere}$$

$$[\vec{X}_1, \vec{X}_2] \Big|_e = 2(\vec{X}_3) \Big|_e \text{ olur.}$$

$$[(\vec{X}_1) \Big|_e, (\vec{X}_2) \Big|_e] = 2\vec{e}_3 \text{ buradan da}$$

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = 2\vec{e}_3 \text{ bulunur. Aynı şekilde}$$

$$[\vec{e}_2, \vec{e}_3] = 2\beta \vec{e}_1$$

$$[\vec{e}_3, \vec{e}_1] = 2\alpha \vec{e}_2$$

eşitlikleri elde edilir.

Burada $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda reel kuaterniyonlar için Braket çarpımının kuralları elde edilir. $\alpha = 1, \beta = -1$ seçilmesi durumunda ise split kuaterniyonlar için braket çarpımının kuralları elde edilir.

c) G in Lie Cebirinin Matris Gösterimi

$\vec{X} \in T_G(e)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Ad_{\vec{X}} : T_G(e) &\rightarrow T_G(e) \\ \vec{Y} &\rightarrow Ad_{\vec{X}}(\vec{Y}) = [\vec{X}, \vec{Y}] \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu lineer dönüşüme karşılık gelen matris Lie cebirinin matris temsilidir.

Teorem 4.3.5

$$\vec{X} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \text{ olmak üzere } Ad_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta x_3 & 2\beta x_2 \\ 2\alpha x_3 & 0 & -2\alpha x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

İspat.

$\vec{X} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$ olmak üzere lineer dönüşüme karşılık gelen matrisi bulalım.

$$\begin{aligned} Ad_{\vec{X}}(\vec{e}_1) &= [\vec{X}, \vec{e}_1] \\ &= [x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \vec{e}_1] \end{aligned}$$

$[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = 2\vec{e}_3, [\vec{e}_2, \vec{e}_3] = 2\beta \vec{e}_1, [\vec{e}_3, \vec{e}_1] = 2\alpha \vec{e}_2$, $[\vec{e}_1, \vec{e}_1] = [\vec{e}_2, \vec{e}_2] = [\vec{e}_3, \vec{e}_3] = 0$ ve Lie çarpımı lineer olduğundan;

$$[x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \vec{e}_1] = 0\vec{e}_1 + 2\alpha x_3 \vec{e}_2 - 2\beta x_2 \vec{e}_3$$

olarak bulunur. Ayrıca;

$$\begin{aligned} Ad_{\vec{X}}(\vec{e}_2) &= [\vec{X}, \vec{e}_2] \\ &= [x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \vec{e}_2] \\ &= -2\beta x_3 \vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - 2\alpha x_1 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Ad_{\vec{X}}(\vec{e}_3) &= [\vec{X}, \vec{e}_3] \\ &= [x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \vec{e}_3] \\ &= -2\beta x_2 \vec{e}_1 + -2\alpha x_1 \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \end{aligned}$$

O halde $Ad_{\vec{X}}$ lineer dönüşüme karşılık gelen matris Lie cebirinin matris olup

$$Ad_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta x_3 & 2\beta x_2 \\ 2\alpha x_3 & 0 & -2\alpha x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

Burada $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda reel kuaterniyonlar cebirinin matris temsili elde edilir. $\alpha = 1, \beta = -1$ seçilmesi durumunda ise split kuaterniyonlar cebirinin matris temsili

d) Killing Bi-lineer Formu

$$\begin{aligned} K : T_G(e) \times T_G(e) &\rightarrow T_G(e) \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &\rightarrow K(\vec{X}, \vec{Y}) = \text{iz}(Ad_{\vec{X}} Ad_{\vec{Y}}) \end{aligned}$$

böyle tanımlanan K dönüşümüne G Lie grubunun Killing bi-lineer formu denir. K dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) K bi-lineerdir

(ii) $K(\vec{X}, \vec{Y}) = K(\vec{Y}, \vec{X})$

(iii) $K(\vec{X}, \vec{Y}) = K(\text{adg}\vec{X}, \text{adg}\vec{Y})$

Teorem 4.3.6

$$f : \text{im}(K_{\alpha, \beta}) \times \text{im}(K_{\alpha, \beta}) \rightarrow \Re$$

$$(\vec{X}, \vec{Y}) \rightarrow f(\vec{X}, \vec{Y}) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2 + \alpha \beta x_3 y_3$$

olmak üzere

$$K(\vec{X}, \vec{Y}) = -8f(\vec{X}, \vec{Y})$$

dir.

İspat.

$\vec{X} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$ ve $\vec{Y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3$ olmak üzere;

$$\text{Ad}_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta x_3 & 2\beta x_2 \\ 2\alpha x_3 & 0 & -2\alpha x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\text{Ad}_{\vec{Y}} = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta y_3 & 2\beta y_2 \\ 2\alpha y_3 & 0 & -2\alpha y_1 \\ 2y_2 & 2y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ad_{\vec{X}} Ad_{\vec{Y}} = \begin{bmatrix} 0 & -2\beta x_3 & 2\beta x_2 \\ 2\alpha x_3 & 0 & -2\alpha x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2\beta y_3 & 2\beta y_2 \\ 2\alpha y_3 & 0 & -2\alpha y_1 \\ 2y_2 & 2y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

$$= \begin{bmatrix} -4\alpha\beta x_3 y_3 - 4\beta x_2 y_2 & 4\beta x_2 y_1 & 4\alpha\beta x_3 y_1 \\ 4\alpha x_1 y_1 & -4\alpha\beta x_3 y_3 - 4\alpha x_1 y_1 & 4\alpha\beta x_3 y_2 \\ 4\alpha x_1 y_3 & 4\beta x_2 y_3 & -4\beta x_2 y_2 - 4\alpha x_1 y_1 \end{bmatrix}$$

bu matrisin köşegen elemanlarının toplamı ;

$$iz(Ad_{\vec{X}} Ad_{\vec{Y}}) = -8(\alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2 + \alpha\beta x_3 y_3) \text{ böylelikle}$$

$$iz(Ad_{\vec{X}} Ad_{\vec{Y}}) = -8f(\vec{X}, \vec{Y}) \text{ bulunur.}$$

Teorem 4.3.7

α ve β iki pozitif reel sayı olsun. Bu durumda $G = \{q \in K_{\alpha, \beta} : N_q = 1\}$ kompakt olur.

İspat.

$K(\vec{X}, \vec{X}) < 0$ ise Lie grubu kompakt olur. Burada α ve β iki pozitif reel sayı olduğundan $f(\vec{X}, \vec{X}) > 0$ dolayısıyla da $K(\vec{X}, \vec{X}) < 0$ olur bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.8

G Lie grubunun Killing bi-lineer formuna karşılık gelen matris K ve

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$K = -8\varepsilon \text{ dır}$$

İspat.

G Lie grubunun Killing bi-lineer formuna

$$\begin{aligned} K : T_G(e) \times T_G(e) &\rightarrow T_G(e) \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &\rightarrow K(\vec{X}, \vec{Y}) = -8f(\vec{X}, \vec{Y}) \end{aligned}$$

şeklinde bir lineer dönüşümün olup $T_G(e) \cong Sp\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ olduğundan

$$K = \begin{bmatrix} K(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & K(\vec{e}_1, \vec{e}_2) & K(\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ K(\vec{e}_2, \vec{e}_1) & K(\vec{e}_2, \vec{e}_2) & K(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ K(\vec{e}_3, \vec{e}_1) & K(\vec{e}_3, \vec{e}_2) & K(\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan

$$K = \begin{bmatrix} -8\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -8\beta & 0 \\ 0 & 0 & -8\alpha\beta \end{bmatrix}$$

$$= -8\varepsilon \text{ bulunur.}$$

5. HAMILTON OPERATÖRLERİ ve ÖZELİKLERİ

Bu bölümde $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrisleri tanımlanacak ve özellikleri ifade edilecektir. Bu bölümdeki çalışmalarımızda $\alpha = \beta = 1$ seçilmesi durumunda reel kuaterniyonlar için $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrisleri elde edilir. $\alpha = 1, \beta = -1$ seçilmesi durumunda ise split kuaterniyonlar için $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrisleri elde edilir.

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ genelleştirilmiş bir kuaterniyon olsun.

$$\begin{aligned} \overset{+}{h}_q : K_{\alpha, \beta} &\rightarrow K_{\alpha, \beta} \\ p &\rightarrow \overset{+}{h}_q(p) = qp \end{aligned}$$

lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\overset{+}{h}_q(1) = (a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3)1 = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

$$\overset{+}{h}_q(\vec{e}_1) = (a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3)\vec{e}_1 = -\alpha a_1 + a_0 \vec{e}_1 + \alpha a_3 \vec{e}_2 - a_2 \vec{e}_3$$

$$\overset{+}{h}_q(\vec{e}_2) = (a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3)\vec{e}_2 = -\beta a_2 - \beta a_3 \vec{e}_1 + a_0 \vec{e}_2 + a_1 \vec{e}_3$$

$$\overset{+}{h}_q(\vec{e}_3) = (a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3)\vec{e}_3 = -\alpha \beta a_3 + \beta a_2 \vec{e}_1 - \alpha a_0 \vec{e}_1 + a_0 \vec{e}_3$$

eşitliklerinden;

$$\overset{+}{H}(q) = \begin{bmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_0 & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\bar{h}_q : K_{\alpha,\beta} &\rightarrow K_{\alpha,\beta} \\ p &\rightarrow \bar{h}_q(p) = pq\end{aligned}$$

lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\bar{h}_q(1) = 1(a_0 1 + a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3) = a_0 1 + a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3$$

$$\bar{h}_q(\bar{e}_1) = \bar{e}_1(a_0 1 + a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3) = -\alpha a_1 + a_0 \bar{e}_1 - \alpha a_3 \bar{e}_2 + a_2 \bar{e}_3$$

$$\bar{h}_q(\bar{e}_2) = \bar{e}_2(a_0 1 + a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3) = -\beta a_2 + \beta a_3 \bar{e}_1 + a_0 \bar{e}_2 - a_1 \bar{e}_3$$

$$\bar{h}_q(\bar{e}_3) = \bar{e}_3(a_0 1 + a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3) = -\alpha \beta a_3 - \beta a_2 \bar{e}_1 + \alpha a_0 \bar{e}_1 + a_0 \bar{e}_3$$

eşitliklerinden;

$$\bar{H}(q) = \begin{bmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & \beta a_3 & -\beta a_2 \\ a_2 & -\alpha a_3 & a_0 & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada $\bar{H}^+(q)$ ve $\bar{H}(q)$ matrislerine q genelleştirilmiş kuaterniyonuna karşılık gelen Hamilton matrisleri denir.

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & \beta a_3 & -\beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_0 & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} / a_0, a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta \in \Re \right\} \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}\overset{+}{H} : K_{\alpha,\beta} &\rightarrow M \\ p &\rightarrow \overset{+}{H}(p) = qp\end{aligned}$$

dönüşümü lineer izomorfizimdir. Ayrıca $\overset{+}{H}(qp) = \overset{+}{H}(q)\overset{+}{H}(p)$ eşitliği sağlanır.

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & \beta a_3 & -\beta a_2 \\ a_2 & -\alpha a_3 & a_0 & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} / a_0, a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta \in \Re \right\} \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}\bar{H} : K_{\alpha,\beta} &\rightarrow N \\ p &\rightarrow \bar{H}(p) = pq\end{aligned}$$

dönüşümü lineer izomorfizimdir. Ayrıca $\bar{H}(qp) = \bar{H}(p)\bar{H}(q)$ eşitliği sağlanır.

$\overset{+}{H}$ ve $\bar{H}$ tanımlarından aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz.

$$\overset{+}{H}(\vec{e}_1) = \bar{H}(\vec{e}_1) = I_4$$

$$\overset{+}{H}(\vec{e}_1) = E_1 : \overset{+}{H}(\vec{e}_2) = E_2 : \overset{+}{H}(\vec{e}_3) = E_3$$

$$\bar{H}(\vec{e}_1) = F_1 : \bar{H}(\vec{e}_2) = F_2 : \bar{H}(\vec{e}_3) = F_3 \text{ olmak üzere;}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri 4×4 reel matrislerdir. Ayrıca

$$E_1 E_1 = -\alpha I_4, E_2 E_2 = -\beta I_4, E_3 E_3 = -\alpha \beta I_4$$

$$E_1 E_2 = -E_2 E_1 = E_3$$

$$E_2 E_3 = -E_3 E_2 = \beta E_1$$

$$E_3 E_1 = -E_1 E_3 = \alpha E_2$$

ve

$$F_1 F_1 = -\alpha I_4, F_2 F_2 = -\beta I_4, F_3 F_3 = -\alpha \beta I_4$$

$$F_1 F_2 = -F_2 F_1 = -F_3$$

$$F_2 F_3 = -F_3 F_2 = -\beta F_1$$

$$F_3 F_1 = -F_1 F_3 = -\alpha F_2$$

eşitlikleri sağlanır. E_1, E_2, E_3 ve F_1, F_2, F_3 matrislerinin özellikleri $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ genelleştirilmiş kuaterniyon birimleri ile özdeşdir. $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ lineer olduğundan

$$\overset{+}{H}(q) = a_0 I_4 + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$$

$$\overset{-}{H}(q) = a_0 I_4 + a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3$$

yazabiliriz.

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, $p = b_0 1 + b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$ olmak üzere

$$\overset{+}{H}(q)p = \begin{bmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_0 & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 b_0 - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 - \alpha \beta a_3 b_3 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 - \beta a_3 b_2 + \beta a_2 b_3 \\ a_2 b_0 + \alpha a_3 b_1 + a_0 b_2 - \alpha a_2 b_3 \\ a_3 b_0 - a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 \end{bmatrix}$$

olduğundan $\overset{+}{H}(q)p = qp$ eşitliği elde edilir.

$$\bar{H}(p)q = \begin{bmatrix} b_0 & -\alpha b_1 & -\beta b_2 & -\alpha\beta b_3 \\ b_1 & b_0 & \beta b_3 & -\beta b_2 \\ b_2 & -\alpha b_3 & b_0 & \alpha b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 b_0 - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 - \alpha\beta a_3 b_3 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 - \beta a_3 b_2 + \beta a_2 b_3 \\ a_2 b_0 + \alpha a_3 b_1 + a_0 b_2 - \alpha a_2 b_3 \\ a_3 b_0 - a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 \end{bmatrix}$$

olduğundan $\bar{H}(p)q = qp$ eşitliği elde edilir.

Teorem 5.1.1

q birim kuaterniyon olmak üzere

$\bar{H}^+$ ve $\bar{H}$ operatörlerinden üretilen matrisler ortogonaldır.

İspat.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} \text{ olmak üzere eğer } \left(\bar{H}^+(q) \right)^T \varepsilon \bar{H}^+(q) = \varepsilon \text{ eşitliği sağlanıyorsa}$$

$\bar{H}^+$ operatörüne karşılık gelen matris ortogonaldır.

$$\left(\bar{H}(q)\right)^T \varepsilon \bar{H}(q)$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & \alpha a_1 & \beta a_2 & \alpha \beta a_3 \\ -\alpha a_1 & \alpha a_0 & \alpha \beta a_3 & -\alpha \beta a_2 \\ -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 & \beta a_0 & \alpha \beta a_1 \\ -\alpha \beta a_3 & \alpha \beta a_2 & -\alpha \beta a_1 & \alpha \beta a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_0 & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \beta \end{bmatrix}$$

$$= \varepsilon$$

Aynı şekilde $\bar{H}$ operatörüne karşılık gelen matrisin ortogonal olabilmesi için

$$\left(\bar{H}(q)\right)^T \varepsilon \bar{H}(q) = \varepsilon \text{ eşitliğinin sağlanması gerekir.}$$

$$\left(\bar{H}(q)\right)^T \varepsilon \bar{H}(q)$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & \alpha a_1 & \beta a_2 & \alpha \beta a_3 \\ -\alpha a_1 & \alpha a_0 & -\alpha \beta a_3 & \alpha \beta a_2 \\ -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 & \beta a_0 & -\alpha \beta a_1 \\ -\alpha \beta a_3 & -\alpha \beta a_2 & \alpha \beta a_1 & \alpha \beta a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & \beta a_3 & -\beta a_2 \\ a_2 & -\alpha a_3 & a_0 & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix}$$

$$= \mathcal{E}$$

$$\text{ve } \det \begin{bmatrix} {}^+H(q) \end{bmatrix} = (N_q)^2 \text{ dir.}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.2

q ve p iki genelleştirilmiş kuaterniyon ve λ reel bir sayı olmak üzere ${}^+H$ ve $\bar{H}$ operatörleri aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

$$(i) \quad q = p \Leftrightarrow {}^+H(q) = {}^+H(p) \Leftrightarrow \bar{H}(q) = \bar{H}(p)$$

$$(ii) \quad {}^+H(q + p) = {}^+H(q) + {}^+H(p), \quad \bar{H}(q + p) = \bar{H}(q) + \bar{H}(p)$$

$$(iii) \quad {}^+H(\lambda q) = \lambda {}^+H(q), \quad \bar{H}(\lambda q) = \lambda \bar{H}(q)$$

$$(iv) \quad iz \begin{bmatrix} {}^+H(q) \end{bmatrix} = 4a_0, \quad iz \begin{bmatrix} \bar{H}(q) \end{bmatrix} = 4a_0$$

$$(v) \quad \det \begin{bmatrix} {}^+H(q) \end{bmatrix} = (N_q)^2, \quad \det \begin{bmatrix} \bar{H}(q) \end{bmatrix} = (N_q)^2$$

$$(vi) \quad \overset{+}{H}(qp) = \overset{+}{H}(q) \overset{+}{H}(p), \quad \overset{-}{H}(qp) = \overset{-}{H}(p) \overset{-}{H}(q)$$

$$(vii) \quad \overset{+}{H}(q^{-1}) = \overset{+}{H}(q)^{-1}, \quad \overset{-}{H}(q^{-1}) = \overset{-}{H}(q)^{-1}, \quad (N_q)^2 \neq 0$$

İspat.

(i) (ii) (iii) (iv) özellikleri $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörlerinin tanımından yararlanarak rahatlıkla ispat edilir.

(v)

$$\begin{vmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_0 & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2)^2$$

ve

$$\begin{vmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & \beta a_3 & -\beta a_2 \\ a_2 & -\alpha a_3 & a_0 & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0^2 + \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2)^2$$

eşitliklerinden (v) özeliği ispatlanmış olur.

(vi)

$${}^+H(q){}^+H(p) = \begin{bmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_0 & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & -\alpha b_1 & -\beta b_2 & -\alpha \beta b_3 \\ b_1 & b_0 & -\beta b_3 & \beta b_2 \\ b_2 & \alpha b_3 & b_0 & -\alpha b_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_0 & -\alpha c_1 & -\beta c_2 & -\alpha \beta c_3 \\ c_1 & c_0 & -\beta c_3 & \beta c_2 \\ c_2 & \alpha c_3 & c_0 & -\alpha c_1 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = a_0 b_0 - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 - \alpha \beta a_3 b_3$$

$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 - \beta a_3 b_2 + \beta a_2 b_3$$

$$c_2 = a_2 b_0 + \alpha a_3 b_1 + a_0 b_2 - \alpha a_2 b_3$$

$$c_3 = a_3 b_0 - a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da ${}^+H(q){}^+H(p) = {}^+H(qp)$ denklemi elde edilmiş olur. Aynı şekilde

$$\bar{H}(p)\bar{H}(q)=\begin{bmatrix} b_0 & -\alpha b_1 & -\beta b_2 & -\alpha\beta b_3 \\ b_1 & b_0 & \beta b_3 & -\beta b_2 \\ b_2 & -\alpha b_3 & b_0 & \alpha b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha\beta a_3 \\ a_1 & a_0 & \beta a_3 & -\beta a_2 \\ a_2 & -\alpha a_3 & a_0 & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_0 & -\alpha c_1 & -\beta c_2 & -\alpha\beta c_3 \\ c_1 & c_0 & -\beta c_3 & \beta c_2 \\ c_2 & \alpha c_3 & c_0 & -\alpha c_1 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = a_0 b_0 - \alpha a_1 b_1 - \beta a_2 b_2 - \alpha \beta a_3 b_3$$

$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 - \beta a_3 b_2 + \beta a_2 b_3$$

$$c_2 = a_2 b_0 + \alpha a_3 b_1 + a_0 b_2 - \alpha a_2 b_3$$

$$c_3 = a_3 b_0 - a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da $\bar{H}(p)\bar{H}(q) = \bar{H}(qp)$ denklemi elde edilmiş olur.

(vii)

$$qq^{-1} = q^{-1}q = I$$

eşitliğini kullanırsak

$${}^+H(qq^{-1}) = {}^+H(q) {}^+H(q^{-1}) = {}^+H(I) = I$$

$${}^+H(q^{-1}q) = {}^+H(q^{-1}) {}^+H(q) = {}^+H(I) = I$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da

$${}^+H(q^{-1}) = {}^+H(q)^{-1}$$

elde edilir. Aynı şekilde ${}^-H(q^{-1}) = {}^-H(q)^{-1}$ eşitliği kolayca elde edilir.

Teorem 5.1.3

${}^+H$ ve ${}^-H$ dönüşümlerine karşılık gelen matrisler değişmelidir.

İspat.

Her hangi r, q ve p genelleştirilmiş kuaterniyonunu ele alalım.

$$(pr)q = {}^+H(pr)q$$

$$= {}^+H(p) {}^+H(r)q$$

$$= \overset{+}{H}(p) \overset{-}{H}(q) r$$

şimdi de

$$p(rq) = \overset{-}{H}(rq) p$$

$$= \overset{-}{H}(q) \overset{-}{H}(r) p$$

$$= \overset{-}{H}(q) \overset{+}{H}(p) r$$

r keyfi olduğundan $\overset{+}{H}(p) \overset{-}{H}(q) = \overset{-}{H}(q) \overset{+}{H}(p)$ eşitliği elde edilir.

Buda ispatımızı tamamlar.

6. DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

Bu bölümde daha önce tanımladığımız ve mekanikte kayma ve vida operatörleri gibi uygulamaları olan dual kuaterniyonları genelleştireceğiz.

6.1 Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar

Bir A dual sayısı $A = a + \varepsilon a^*$ ile gösterilir. Burada $a, a^* \in \Re$ ve $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon^2 = 0$ kurallarıyla belirli bir sayıdır.

$$q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \text{ ve } q^* = a_0^* 1 + a_1^* \vec{e}_1 + a_2^* \vec{e}_2 + a_3^* \vec{e}_3 \quad (q, q^* \in K_{\alpha, \beta})$$

olmak üzere

$Q = q + q^*$ şeklinde tanımlanan kuaterniyona dual genelleştirilmiş kuaterniyon denir. Dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar cümlesini $D_{\alpha, \beta}$ ile göstereceğiz.

$$D_{\alpha, \beta} = \{Q = q + q^* = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 / A_0, A_1, A_2, A_3 \in D\}$$

Burada $\{1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ birimlerinin çarpımı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^2 &= -\alpha & \vec{e}_2^2 &= -\beta & \vec{e}_3^2 &= -\alpha\beta \\ \vec{e}_1 \vec{e}_2 &= -\vec{e}_2 \vec{e}_1 = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \vec{e}_3 &= -\vec{e}_3 \vec{e}_2 = \beta \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \vec{e}_1 &= -\vec{e}_1 \vec{e}_3 = \alpha \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$Q = q + \varepsilon q^* = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ dual genelleştirilmiş kuaterniyonunun skalar kısmı S_Q ve vektörel kısmı $\vec{V}_Q$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$$Q = S_Q + \vec{V}_Q$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_Q = A_0 \text{ ve } \vec{V}_Q = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$$

dir.

$Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ ve $P = B_0 1 + B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3$ dual genelleştirilmiş kuaterniyonlarının toplamı

$$Q + P = (S_Q + S_P) + (\vec{V}_Q + \vec{V}_P)$$

şeklinde tanımlıdır.

$\lambda \in \Re$ olmak üzere skalarla çarpma işlemi ise

$$\lambda Q = (\lambda A_0)1 + (\lambda A_1)\vec{e}_1 + (\lambda A_2)\vec{e}_2 + (\lambda A_3)\vec{e}_3$$

şeklinde tanımlıdır.

Ayrıca dual genelleştirilmiş kuaterniyonların çarpımı;

$$\begin{aligned} \times: D_{\alpha,\beta} \times D_{\alpha,\beta} &\rightarrow D_{\alpha,\beta} \\ (Q, P) &\rightarrow Q \times P = QP \end{aligned}$$

olmak üzere

$$QP = qp + \varepsilon(qp^* + pq^*)$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned} QP &= (A_0 B_0 - \alpha A_1 B_1 - \beta A_2 B_2 - \alpha\beta A_3 B_3) + (A_0 B_1 + A_1 B_0 + \beta A_2 B_3 - \beta A_3 B_2)\vec{e}_1 \\ &+ (A_0 B_2 + A_2 B_0 - \alpha A_1 B_3 + \alpha A_3 B_1)\vec{e}_2 + (A_0 B_3 + A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_3 B_0)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

veya

$$QP = S_Q S_P - f(\vec{V}_Q, \vec{V}_P) + S_Q \vec{V}_P + S_P \vec{V}_Q + \vec{V}_Q \wedge \vec{V}_P$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Burada

$$f : im(D_{\alpha,\beta}) \times im(D_{\alpha,\beta}) \rightarrow \Re$$

$$(\vec{V}_Q, \vec{V}_P) \rightarrow f(\vec{V}_Q, \vec{V}_P) = \alpha A_1 B_1 + \beta A_2 B_2 + \alpha \beta A_3 B_3$$

ve

$$\Lambda : im(D_{\alpha,\beta}) \times im(D_{\alpha,\beta}) \rightarrow im(D_{\alpha,\beta})$$

$$(\vec{V}_Q, \vec{V}_P) \rightarrow \vec{V}_Q \Lambda \vec{V}_P = \begin{vmatrix} \beta \vec{e}_1 & \alpha \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta A_2 B_3 - \beta A_3 B_2) \vec{e}_1 + (\alpha B_3 B_1 - \alpha A_1 B_3) \vec{e}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \vec{e}_3$$

dır. $D_{\alpha,\beta} = \{Q = q + q^* = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 / A_0, A_1, A_2, A_3 \in D\}$ Bu çarpma işlemi ile birlikte $D_{\alpha,\beta}$ ya dual genelleştirilmiş kuaterniyon cebiri denir.

6.2 Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

a) Eşlenik

$$\overline{(\cdot)} : D_{\alpha,\beta} \rightarrow D_{\alpha,\beta}$$

$$Q = S_Q + \vec{V}_Q \rightarrow \overline{Q} = S_Q - \vec{V}_Q$$

biçiminde tanımlanır ve buna göre bir

$Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ olmak üzere q genelleştirilmiş kuaterniyonun eşleniği

$Q = A_0 1 - A_1 \vec{e}_1 - A_2 \vec{e}_2 - A_3 \vec{e}_3$ olur. Eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(i) \quad \overline{aQ + bP} = a\overline{Q} + b\overline{P}, \forall a, b \in \mathfrak{R}, Q, P \in D_{\alpha, \beta}$$

$$(ii) \quad \overline{QP} = \overline{P}\overline{Q}, \forall q, p \in D_{\alpha, \beta}$$

$$(iii) \quad \overline{\overline{Q}} = Q, \forall Q \in D_{\alpha, \beta}$$

b) Norm:

$$N : D_{\alpha, \beta} \rightarrow D$$

$$Q \rightarrow N(Q) = N_Q = Q\overline{Q} = \overline{Q}Q$$

biçiminde tanımlanan N işlemine $Q_{\alpha, \beta}$ üzerinde norm denir.

$Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ olmak üzere Q dual genelleştirilmiş kuaterniyonunun normu

$$\begin{aligned} N_Q &= Q\overline{Q} \\ &= A_0^2 + \alpha A_1^2 + \beta A_2^2 + \alpha \beta A_3^2 \end{aligned}$$

dual sayısı ile tanımlıdır.

Norm işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(i) \quad N_{QP} = N_Q N_P, \forall Q, P \in D_{\alpha, \beta}$$

$$(ii) \quad N_{\lambda Q} = \lambda^2 N_Q, \forall \lambda \in \mathfrak{R}, \forall Q \in D_{\alpha, \beta}$$

c) İvers:

$$(\cdot)^{-1} : D_{\alpha,\beta} \rightarrow D_{\alpha,\beta}$$

$$q \rightarrow Q^{-1} = \frac{\overline{Q}}{N_Q}, N_Q \neq 0$$

biçiminde tanımlanan işleme $D_{\alpha,\beta}$ de invers işlemi denir $N_Q \neq 0$ olmak üzere bir

$Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ genelleştirilmiş kuaterniyonun inversi

$$Q^{-1} = \frac{A_0 1 - A_1 \vec{e}_1 - A_2 \vec{e}_2 - A_3 \vec{e}_3}{A_0^2 + \alpha A_1^2 + \beta A_2^2 + \alpha \beta A_3^2}$$

dır.

İvers işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(i) (QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}, \forall Q, P \in D_{\alpha,\beta} \text{ ve } N_Q \neq 0, N_P \neq 0$$

$$(ii) (\lambda Q)^{-1} = \frac{1}{\lambda} Q^{-1}, \lambda \in \mathfrak{R}, Q \in D_{\alpha,\beta} \text{ ve } N_Q \neq 0, \lambda \neq 0$$

d) Birim dual genelleştirilmiş kuaterniyon:

$N_Q = 1$ olan $Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ genelleştirilmiş kuaterniyonuna birim genelleştirilmiş kuaterniyon denir.

e) İki genelleştirilmiş vektörün vetörel çarpımı:

Skalar kısmı sıfır olan genelleştirilmiş kuaterniyona genelleştirilmiş vektör adı verilir.

$Q = \vec{V}_Q = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ $P = \vec{V}_P = B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3$ genelleştirilmiş vektörlerin vetörel çarpımı

$$Q \wedge P = \frac{1}{2}(QP - PQ)$$

olarak tanımlanır.

f) Q ve P dual genelleştirilmiş kuaterniyonlarının skalar çarpımı

$$\begin{aligned}\langle Q, P \rangle &= \langle P, Q \rangle \\ &= A_0^2 + \alpha A_1^2 + \beta A_2^2 + \alpha \beta A_3^2 \\ &= \langle q, p \rangle + \varepsilon(\langle q, p^* \rangle + \langle q^*, p \rangle)\end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

6.3 Hamilton Operatörleri

Daha önceki bölümde $q = a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ genelleştirilmiş bir kuaterniyon olmak üzere

$${}^+H(q) = \begin{bmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & -\beta a_3 & \beta a_2 \\ a_2 & \alpha a_3 & a_0 & -\alpha a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad {}^-H(q) = \begin{bmatrix} a_0 & -\alpha a_1 & -\beta a_2 & -\alpha \beta a_3 \\ a_1 & a_0 & \beta a_3 & -\beta a_2 \\ a_2 & -\alpha a_3 & a_0 & \alpha a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

matrisleri hesaplamıştık. Benzer şekilde $Q = A_0 1 + A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ olmak üzere Q

dual genelleştirilmiş kuaterniyonu için

$${}^+H(Q) = \begin{bmatrix} A_0 & -\alpha A_1 & -\beta A_2 & -\alpha \beta A_3 \\ A_1 & A_0 & -\beta A_3 & \beta A_2 \\ A_2 & \alpha A_3 & A_0 & -\alpha A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix}$$

ve

$${}^-H(Q) = \begin{bmatrix} A_0 & -\alpha A_1 & -\beta A_2 & -\alpha \beta A_3 \\ A_1 & A_0 & \beta A_3 & -\beta A_2 \\ A_2 & -\alpha A_3 & A_0 & \alpha A_1 \\ A_3 & A_2 & -A_1 & A_0 \end{bmatrix}$$

Ayrıca

$Q = q + \varepsilon q^*$, ${}^+H$ ve ${}^-H$ operatörleri lineer olduklarından

$${}^+H(Q) = {}^+H(q) + \varepsilon {}^+H(q^*)$$

$${}^-H(Q) = {}^-H(q) + \varepsilon {}^-H(q^*)$$

olarak ifade edilebilir.

Genelleştirilmiş kuaterniyonlar için ispat ettiğimiz özellikler burada da rahatlıkla

gösterebiliriz. Q ve P iki dual genelleştirilmiş kuaterniyon ve λ reel bir sayı olmak

üzere ${}^+H$ ve ${}^-H$ operatörleri aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

$$(i) \quad Q = P \Leftrightarrow \overset{+}{H}(Q) = \overset{+}{H}(P) \Leftrightarrow \overset{-}{H}(Q) = \overset{-}{H}(P)$$

$$(ii) \quad \overset{+}{H}(Q + P) = \overset{+}{H}(Q) + \overset{+}{H}(P), \quad \overset{-}{H}(Q + P) = \overset{-}{H}(Q) + \overset{-}{H}(P)$$

$$(iii) \quad \overset{+}{H}(\lambda Q) = \lambda \overset{+}{H}(Q), \quad \overset{-}{H}(\lambda Q) = \lambda \overset{-}{H}(Q)$$

$$(iv) \quad i\mathbf{z} \begin{bmatrix} \overset{+}{H}(Q) \end{bmatrix} = 4a_0, \quad i\mathbf{z} \begin{bmatrix} \overset{-}{H}(Q) \end{bmatrix} = 4a_0$$

$$(v) \quad \det \begin{bmatrix} \overset{+}{H}(Q) \end{bmatrix} = (N_Q)^2, \quad \det \begin{bmatrix} \overset{-}{H}(Q) \end{bmatrix} = (N_Q)^2$$

$$(vi) \quad \overset{+}{H}(QP) = \overset{+}{H}(Q)\overset{+}{H}(Q), \quad \overset{-}{H}(QP) = \overset{-}{H}(P)\overset{-}{H}(Q)$$

$$(vii) \quad \overset{+}{H}(Q^{-1}) = \overset{+}{H}(Q)^{-1}, \quad \overset{-}{H}(Q^{-1}) = \overset{-}{H}(Q)^{-1}, \quad (N_Q)^2 \neq 0$$

$$(viii) \quad \left(\overset{+}{H}(Q) \right)^T \varepsilon \overset{+}{H}(Q) = \varepsilon \quad \text{ve} \quad \left(\overset{-}{H}(Q) \right)^T \varepsilon \overset{-}{H}(Q) = \varepsilon$$

$$(ix) \quad \overset{+}{H}(Q)P = QP \quad \text{ve} \quad \overset{-}{H}(P)Q = QP$$

$$(x) \quad \overset{+}{H}(P)\overset{-}{H}(Q) = \overset{-}{H}(Q)\overset{+}{H}(P)$$

7.GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR VE DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR ÜZERİNE UYGULAMALAR

Bu bölümde genelleştirilmiş reel ve dual kuaterniyonlara ait bazı uygulamalar ve vektör operatörlerinden bahsedeceğiz

7.1 Birim Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Uygulaması

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki genelleştirilmiş vektör kuaterniyon olsun. $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\| &= \sqrt{\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|\vec{b}\| &= \sqrt{\alpha b_1^2 + \beta b_2^2 + \alpha \beta b_3^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

alalım. Bu durumda $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki birim genelleştirilmiş vektör kuaterniyon olur. İki vektör

arasındaki θ açısı için

$$\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \Pi$$

dır.

$$\begin{aligned}\vec{b} \times \vec{a} &= -\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \vec{b} \wedge \vec{a} \\ &= -(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \vec{a} \wedge \vec{b})\end{aligned}$$

$$= -(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\}})$$

burada

$\cos \theta = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ alırsak

$$\cos \theta = \alpha a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 + \alpha \beta a_3 b_3$$

olur.

$$\cos^2 \theta = \alpha^2 a_1^2 b_1^2 + 2\alpha \beta a_1 a_2 b_1 b_2 + \beta^2 a_2^2 b_2^2 + \alpha^2 \beta^2 a_3^2 b_3^2 + 2\alpha^2 \beta a_1 a_3 b_1 b_3 + 2\alpha \beta^2 a_2 a_3 b_2 b_3$$

$$\begin{aligned} 1 &= (\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2)(\alpha b_1^2 + \beta b_2^2 + \alpha \beta b_3^2) \\ &= \alpha^2 a_1^2 b_1^2 + \beta^2 a_2^2 b_2^2 + \alpha^2 \beta^2 a_3^2 b_3^2 + \alpha \beta a_1^2 b_2^2 + \alpha^2 \beta a_1^2 b_3^2 + \alpha \beta a_2^2 b_1^2 + \alpha \beta^2 a_2^2 b_3^2 + \alpha^2 \beta a_3^2 b_1^2 \\ &\quad + \alpha \beta^2 a_3^2 b_2^2 \end{aligned}$$

şimdi bu eşitliklerden yararlanırsak

$$1 - \cos^2 \theta = (\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|)^2 \text{ elde edilir.}$$

O halde

$$\sin \theta = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{a} &= -(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \vec{a} \wedge \vec{b}) \\ &= -(\cos \theta + \sin \theta \vec{S}) \end{aligned}$$

$$= -Q$$

$$\Rightarrow \vec{b} = -Q \times (\vec{a})^{-1}$$

$$\vec{b} = Q \times \vec{a}$$

Yani Q kuaterniyonu $\vec{a}$ vektörünü $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ her ikisine de dik olan $\vec{S}$ eksen etrafında hareket ettirerek $\vec{b}$ vektörüne dönüştürmektedir.

Şimdi de her hangi bir eksen etrafında hareketin ifadesini verelim.

$$adq : T_G(e) \rightarrow T_G(e)$$

$$\vec{a} \rightarrow \vec{b} = q \vec{a} q^{-1}$$

dönüşümünü ele alalım burada $q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \vec{S}$ olup birim genelleştirilmiş kuaterniyondur. O halde

$q^{-1} = \bar{q}$ olup $q^{-1} = \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \vec{S}$ dir. adq lineer dönüşümü $T_G(e) = im(K_{\alpha, \beta})$ de izometri olduğundan bir harekete karşılık gelir. Burada $\vec{a}$ vektörünün hareketi sonucu elde edilen $\vec{b}$ vektörü $\vec{b} = q \vec{a} q^{-1}$ eşitliği ile yada adq lineer dönüşümüne karşılık gelen matris ile $\vec{a}$ vektörüne karşılık gelen sütun matrisin çarpımı ile bulunur. Bura da $adq = I + \sin \varphi S + (1 - \cos \varphi) S^2$ eşitliğini kullanırız.

7.2.1 Birim genelleştirilmiş dual kuaterniyonların uygulaması

$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ ve $\vec{B} = B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3$ iki genelleştirilmiş birim dual vektör olsun..Yani

$$N_{\vec{A}} = \alpha A_1^2 + \beta A_2^2 + \alpha \beta A_3^2 = 1, A_1, A_2, A_3 \in D$$

ve

$$N_{\vec{B}} = \alpha B_1^2 + \beta B_2^2 + \alpha \beta B_3^2 = 1, \quad B_1, B_2, B_3 \in D$$

olsun.

$N_{\vec{A}} = 1$ olması aşağıdaki kısıtlamaları getirir.

$$A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, \quad A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^* \text{ ve } A_3 = a_3 + \varepsilon a_3^*$$

olsun

$$N_{\vec{A}} = (\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2) + 2\varepsilon(\alpha a_1 a_1^* + \beta a_2 a_2^* + \alpha \beta a_3 a_3^*) = 1 + \varepsilon 0$$

olduğundan

$$\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2 = 1$$

$$\alpha a_1 a_1^* + \beta a_2 a_2^* + \alpha \beta a_3 a_3^* = 0$$

dir. Eğer $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ eşitliği ile verirsek

$$N_q = \alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + \alpha \beta a_3^2 = 1$$

ve

$$f(\vec{a}, \vec{a}^*) = \alpha a_1 a_1^* + \beta a_2 a_2^* + \alpha \beta a_3 a_3^* = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*$ iki birim genelleştirilmiş dual kuaterniyon için

$$\begin{aligned}
f(\vec{A}, \vec{B}) &= \alpha A_1 B_1 + \beta A_2 B_2 + \alpha \beta A_3 B_3 \\
&= f(\vec{a}, \vec{b}) + \varepsilon \left(f(\vec{a}, \vec{b}^*) + f(\vec{a}^*, \vec{b}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A} \wedge \vec{B} &= \begin{vmatrix} \beta \vec{e}_1 & \alpha \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\
&= (\beta A_2 B_3 - \beta A_3 B_2) \vec{e}_1 + (\alpha B_3 B_1 - \alpha A_1 B_3) \vec{e}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \vec{e}_3 \\
&= \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon \left(\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b} \right)
\end{aligned}$$

eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{B} &= -f(\vec{A}, \vec{B}) + \vec{A} \wedge \vec{B} \\
&= \vec{a} \times \vec{b} + \varepsilon \left(\vec{a} \times \vec{b}^* + \vec{a}^* \times \vec{b} \right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi

$$\begin{aligned}
\vec{B} \times \vec{A} &= -(f(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{a} \wedge \vec{b}) \\
&= -(\cos \Theta + \sin \Theta \vec{S}^*)
\end{aligned}$$

$$= -Q^*$$

$$\Rightarrow B = -Q \times (\vec{A})^{-1}$$

$$\vec{B} = Q \times \vec{A}$$

eşitliğini inceleyelim. Burada $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ye karşılık gelen doğrular sırası ile d_1 ve d_2 olsun. $d_1 \cap d_2 = \{0\}$ ve d_1 ve d_2 olmak üzere arasındaki açı $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual açısı kadardır. Eğer $\theta^* = 0$ alınırsa $\vec{B} = Q^* \times \vec{A}$ eşitliğinden görülüyor ki $\vec{A}$ vektörünü soldan Q^* ile çarpmak demek hem $\vec{A}$ vektörüne hem de $\vec{B}$ vektörüne karşılık gelen doğrulara dik olan $\vec{S}^*$ eksenini etrafında θ kadar hareket ettirmektir demektir. Eğer $\theta = 0$ olsun. Bu durumda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ye karşılık gelen doğrular paraleldir. $Q^* = 1 + \varepsilon \theta^* \vec{S}^*$ ve bu operatör kayma operatörünün bir genelleştirilmesidir.

7.2.2 Genelleştirilmiş Vida Operatörü

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki açı $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ $\theta \neq 0, \theta^* \neq 0$ dual açısı olan iki genelleştirilmiş birim dual vektör olsun. Bu halde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ye kesişmeyen ve paralel olmayan iki doğru karşılık gelir. Bu iki vektöre karşılık gelen doğrular d_1 ve d_2 olsun. d_1 ve d_2 nin ortak dikme doğrusuna karşılık gelen $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ile sağ sistem oluşturan genelleştirilmiş birim dual vektör $\vec{S}^*$ olsun. Bu durumda $Q^* = \cos \Theta + \vec{S}^* \sin \Theta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\vec{B} \times (\vec{A})^{-1} &= Q^* \\ \vec{A} \times (\vec{B})^{-1} &= Q^*\end{aligned}$$

yazabiliriz.

$Q^* = \cos \Theta + \vec{S}^* \sin \Theta$ genelleştirilmiş birim dual kuaterniyonunu ile bir $\vec{A}$ birim dual vektörünü soldan çarpmak demek $\vec{A}$ ya karşılık gelen doğruyu $\vec{S}^*$ in doğrultu ve yönünde $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ açısının dual kısmı kadar hareket ettirip hemen ardından da $\vec{S}^*$ etrafında $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ reel kısmı kadar harekete devam etmektir

Bu bölümde reel kuaterniyonların mekanikte uygulamaları olan dönme, kayma ve vida operatörlerini genelleştirdik .

7.3. Örnekler

Bu bölümde genelleştirilmiş reel ve dual kuaterniyonların uygulamalarına örnekler vererek bu uygulamaları daha iyi anlamaya çalışacağız.

Örnek 7.3.1

$\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta + \alpha\beta}}(1, 1, -1)$ eksenini etrafında θ açısı kadar hareket yaptıran Q

genelleştirilmiş reel kuaterniyonunu bulalım. Burada $\vec{S}$ vektörü birim bir vektör olduğu için dönme hareket yaptıran kuaterniyon $Q = \cos \theta + \sin \theta \vec{S}$ eşitliği ile verilir. Yani

verilen $\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta + \alpha\beta}}(1, 1, -1)$ eksenini için $Q = \cos \theta + \sin \theta \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta + \alpha\beta}}(1, 1, -1) \right]$

bulunur. Q kuaterniyonunu bir $\vec{S}$ e dik olan bir $\vec{a}$ vektörü ile soldan çarparsak

$$Q \times \vec{a} = \vec{b}$$

eşitliği elde edilir ki bu eşitlikten $\vec{a}$ vektörünün θ açısı kadar hareket ettirilerek $\vec{b}$ vektörünün elde edildiği görülür.

Örnek 7.3.2

$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta + \alpha\beta}}(1, 1, 1)$ ve $\vec{a} = \left(-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta^2 + \alpha^2 \beta}}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta^2 + \alpha^2 \beta}}, 0 \right)$ olmak

üzere

$$Q \times \vec{a}$$

işleminin sonucunu bulalım.

$$Q \times \vec{a} = -f(\vec{V}_Q, \vec{a}) + S_Q \vec{a} + \vec{V}_Q \wedge \vec{a}$$

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta+\alpha\beta}} (1,1,1), \left(-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta^2+\alpha^2} \beta}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta^2+\alpha^2} \beta}, 0\right)\right) \\ &= -\alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta+\alpha\beta}} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta^2+\alpha^2} \beta} + \beta \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta+\alpha\beta}} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta^2+\alpha^2} \beta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$S_Q \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta^2+\alpha^2} \beta}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta^2+\alpha^2} \beta}, 0\right)$$

$$\vec{V}_Q \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \beta \vec{e}_1 & \alpha \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta+\alpha\beta}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta+\alpha\beta}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta+\alpha\beta}} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta^2+\alpha^2} \beta} & \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta^2+\alpha^2} \beta} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\beta \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta+\alpha\beta}} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta^2+\alpha^2} \beta}, -\alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta+\alpha\beta}} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta^2+\alpha^2} \beta}, \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta+\alpha\beta}} \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta^2+\alpha^2} \beta} (\alpha+\beta)\right)$$

$Q \times \vec{a} = \vec{b}$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere yukarıda ki eşitliklerden kolaylıkla

$$b_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta^2 + \alpha^2 \beta}} - \beta \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta + \alpha\beta}} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta^2 + \alpha^2 \beta}}$$

$$b_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta^2 + \alpha^2 \beta}} - \alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta + \alpha\beta}} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta^2 + \alpha^2 \beta}}$$

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta + \alpha\beta}} \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta^2 + \alpha^2 \beta}} (\alpha + \beta)$$

eşitlikleri bulunur. Burada

$f(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduğu kolaylıkla görülür. Buda bize $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ arasındaki açı θ olmak üzere;

$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ eşitliklerini sağlayan θ açısı kadar $\vec{a}$ vektörünün hareket ettirilerek $\vec{b}$ vektörünün elde edildiği gösterir.

Örnek 7.3.3

$\{x = t, y = z = 0\}$ doğrusunu $\left\{ \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}}, z = 2 \right\}$ doğrusuna dönüştüren vida

operatörünü bulalım.

Doğrulara sırası ile d_1 ve d_2 diyelim.

d_1 doğrusu için $M = (0,0,0)$ ve $\vec{a} = (1,0,0)$ olmak üzere

$$\vec{a}^* = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}$$

$$= \begin{vmatrix} \beta \vec{e}_1 & \alpha \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0,0,0)$$

ve d_2 doğrusu için $N = (0,0,2)$ ve $\vec{b} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ olmak üzere

$$\vec{b}^* = \overrightarrow{ON} \wedge \vec{b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \beta \vec{e}_1 & \alpha \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} (-\beta, \alpha, 0)$$

dir.

$\vec{A} = (1,0,0) + \varepsilon(0,0,0)$ ve $\vec{B} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) + \varepsilon(\frac{-2\beta}{\sqrt{2}}, \frac{2\alpha}{\sqrt{2}}, 0)$ olmak üzere bu iki dual

vektörü birimleştirelim .

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(1,0,0)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}}}(\frac{-2\beta}{\sqrt{2}}, \frac{2\alpha}{\sqrt{2}}, 0)$$

O halde d_1 doğrusuna karşılık gelen genelleştirilmiş dual vektör $\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(1,0,0)$

ve d_2 doğrusuna karşılık gelen genelleştirilmiş dual vektör

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}}}(\frac{-2\beta}{\sqrt{2}}, \frac{2\alpha}{\sqrt{2}}, 0) \text{ dir.}$$

Şimdi de vida operatörünü hesaplayalım

$$\vec{B}_0 = Q^* \times \vec{A}_0$$

$$\vec{B}_0 \times (\vec{A}_0)^{-1} = Q^*$$

buradan da

$$-\vec{B}_0 \times \vec{A}_0 = Q^*$$

o halde

$$Q^* = f(\vec{B}_0, \vec{A}_0) - \vec{B}_0 \wedge \vec{A}_0 \text{ eşitliği elde edilir.}$$

$$f(\vec{B}_0, \vec{A}_0) = \alpha \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon \alpha \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{-2\beta}{\sqrt{2}}$$

$\vec{B}_0 \wedge \vec{A}_0 = \vec{b} \wedge \vec{a} + \varepsilon (\vec{b} \wedge \vec{a}^* + \vec{b}^* \wedge \vec{a})$ eşitliğini kullanırsak,

$$\vec{b} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \beta \vec{e}_1 & \alpha \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}} & \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}})$$

$$\vec{b}^* \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \beta \vec{e}_1 & \alpha \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{-2\beta}{\sqrt{\alpha+\beta}} & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{-2\alpha}{\sqrt{\alpha+\beta}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{-2\alpha}{\sqrt{\alpha+\beta}})$$

olduğundan

$$\vec{B}_0 \wedge \vec{A}_0 = (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}}) + \varepsilon (0, 0, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{-2\alpha}{\sqrt{\alpha+\beta}})$$

Artık Q^* vida operatörümüzü verebiliriz.

$$Q^* = \alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \varepsilon \alpha \frac{-2\beta}{\sqrt{\alpha+\beta}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta}} + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{-2\alpha}{\sqrt{\alpha+\beta}})$$

buradan görülür ki α ve β seçimlerine göre d_1 doğrusunu d_2 doğrusu üzerine getiren değişik vida operatörleri bulunabilir.

KAYNAKLAR:

- Agrawal O. P. 1987. *Hamilton Operators and Dual Number Quaternions in Spectral Kinematic*, Mech. Mach. Theory Vol . 22, no. 6 , pp. 569-575.
- Hacısalıhoğlu H. H. 1971. *On The Rolling Of One Curve On Surface Upon Another*, Royal Irish Academy Volume 71, Section A , Number 2 , Duplin pp.13-16.
- Hacısalıhoğlu H. H. 1983. *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*, Gazi Üniversitesi Fen-Fakültesi Yayınları Mat. No. 2.
- Kula L. 2003. *Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları*, Doktora Tezi.
- Pottmann H. 2000. *Computational Line Geometry*, Mathematics Subject Classification, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York a Member of BertelsmannSpringer Science+Business Media GmbH.
- Yaylı Y. 1992. *Homothetic Motions at E^4* , Mech. Mach. Theory Vol. 27, No.3, pp. 303-305.
- Ward J. P. 1997. *Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications*, Published by Kluwer Academic Publishers, 250 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Oktay ÖLMEZ

Doğum Yeri : Silifke / MERSİN

Doğum Tarihi : 19 / 06 / 1982

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve yıl)

Lise : Silifke Anadolu Lisesi (1997-2000)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
(2000-2004)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı (2004-2006)