ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fadime DEMİRALP

DÜZLEM EĞRİLERİNİN CİNS SAYILARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2006

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZLEM EĞRİLERİNİN CİNS SAYILARI

Fadime DEMİRALP

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ..../......../2006 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

İmza............................
Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
DANIŞMAN

İmza........................
Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
ÜYE

İmza.............................
Yrd. Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof.Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Bu Çalışma TÜBİTAK Tarafından Desteklenmiştir.

Sevgili Anne ve Babama

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÜZLEM EĞRİLERİNİN CİNS SAYILARI

Fadime DEMİRALP

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
Yıl: 2006, Sayfa: 43
Jüri: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
Yrd. Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

Esas grup ve örtü uzayı tanımı yapılarak yükseltme kriteri teoremi verilmiştir. Singüler homoloji incelenmiş ve buradan yola çıkılarak Euler karakteristiği tanımlanmıştır. Manifoldların yönlendirilmesi tanımlanmıştır.

Cebirsel varyete tanımı verilmiştir ve bazı özellikleri incelenmiştir.
Özellikle $\mathfrak{D}$ diskriminant polinomu olmak üzere $(V(p) \setminus \pi^{-1}(\mathfrak{D}), \mathbb{C} \setminus \mathfrak{D}, \pi_Y)$ örtüsünü ele alınarak $P^2(\mathbb{C})$ de bir kompleks cebirsel eğrinin bağlantılı olduğu ispatlanmıştır.

2-boyutlu kompakt, yönlendirilebilir manifoldlar cins sayılarıyla sınıflandırılmaktadır. Bu şekilde, verilen bir polinom incelenerek tanımladığı varyetenin cinsini hesaplayarak hangi yüzeye homeomorfik olduğu bulunabilir. $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $p(X,Y,Z)$ homojen, indirgenemez polinomuyla tanımlı, singüler olmayan bir projektif eğri olsun. $deg\, p = n$ ise C nin cinsinin $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ olduğu ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Esas Grup, Örtü Uzayı, Singüler Homoloji, Cebirsel Varyete, Cins Sayısı

ABSTRACT

MSc THESIS

GENUS OF PLANE CURVES

Fadime DEMİRALP

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
Year: 2006, Pages: 43
Jury: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ
Asst. Prof. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

Definitions, theorems concerning fundamental group, covering space and the lifting criterion are given. Singular homology has been studied and the Euler characteristic of any space has been defined. Orientation of manifolds have been defined.

Algebraic variety has been defined and some properties have been investigated. Let $\mathfrak{D}$ be discriminant polynomial of p . In particular connectedness of any complex algebraic curve in $P^2(\mathbb{C})$ has been proved using the covering space $(V(p)\setminus\pi^{-1}(\mathfrak{D}),\mathbb{C}\setminus\mathfrak{D},\pi_Y)$.

Compact connected orientable 2 -manifolds are classified by their genus. The surface, homeomorphic to the given curve, can be determined by studying the polynomial and by calculating genus of the variety defined by the polynomial. Let $C\subset\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $p(X,Y,Z)$ be a nonsingular projective curve defined by the irreducible homogeneous polynomial $p(X,Y,Z)$. It has been proved that if $\deg p=n$, then the genus of C is $g=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Key Words: Fundamental Group, Covering Space,Singular Homology, Algebraic Variety, Genus

TEŞEKKÜR

Daha lisans son sınıf öğrencisiyken , cebirsel topoloji alanında verdiği yüksek lisans dersine katılmama izin vererek bu çalışmanın temellerini erkence atmamı sağlayan, sorularıma çözüm üretmeme sabırla yön vererek bu çalışmanın başından sonuna kadar bilgi ve tecrübesiyle yanımda olan, bu süreçte benden manevi desteğini ve mesleki emeğini esirgemeyen, danışmanım Prof. Dr. Doğan Dönmez'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Cebirsel Topoloji alanından haberdar olmamı sağlayan ve desteğini hiç esirgemeyen, çok yönlülüğüyle de kendisini örnek aldığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Yusuf Ünlü'ye, katkılarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT'a ve bu çalışmada bana kaynak sağlayan, sorularımı geri çevirmeyen Öğretim Görevlisi Dr. Ali Arslan Özkurt'a ve tüm Matematik Bölümü akademik personeline bu çalışmanın oluşmasındaki yardımlarından ötürü çok teşekkür ederim. TÜBİTAK 'a sağladığı maddi destekten dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olmalarının beni güçlü kıldığı aileme, özellikle annem Selvi Demiralp ve manevi ablam Seçil Dinçgez Akarpınar'a sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

1. GİRİŞ

Tezin ikinci bölümünde, elemanları homotopi denklik bağıntısı ile kapalı yolların denklik sınıfları olan ve işlemine kısaca yolların uç uca eklenmesi diyebileceğimiz esas grup tanımlanmakta ve ilgili teoremleri verilmektedir. Ayrıca beşinci bölümde yeniden değineceğimiz örtü uzayı tanımı burada genel olarak yapılmakta ve bazı özelliklerine, özellikle yükseltme kriteri özelliği, değinilmektedir. Ayrıca Manifold tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde homolojinin, bir R değişmeli halkası için, aşağıdaki özelliklere (Eilenberg-McLane aksiyomları) sahip , topolojik uzay ikilileri kategorisinden R modüller kategorisine (her $q \geq 0$ için) H_q funktorları ve bunlar arasında (her $q \geq 1$ için) $\partial_q : H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$, $(H_q(A) = H_q(A,\emptyset))$ doğal dönüşümleri topluluğu olduğu verilmektedir:

1. H_q, homotopi invaryanttır. Yani $f,\ g : X \to Y$ homotopik dönüşümler ise her $q \geq 0$ için $H_q(f) = H_q(g)$ dir. (Homotopi Aksiyomu)
2. $\ldots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(A) \to \ldots$ homoloji dizisi tamdır.
3. $\overline{U} \subset intA$ ise $H_q(X-U, A-U) \to H_q(X,A)$ bir izomorfizmdir. (Kesme Aksiyomu)
4. Eğer X, bir tek nokta uzayı ise her $q \geq 0$ için $H_q(X) = 0$ ve $H_0(X) \cong R$ dir. (Boyut Aksiyomu)

Projektif n -uzay tanımı yapılmıştır. Bir uzayın Betti sayıları kullanılarak hesaplanan, uzayın Euler karakteristiğinin formülü verilmiştir ve bazı uzayların Euler karakteristiği hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde manifoldların yönlendirilmesi üzerinde durulmuştur.

Beşinci bölümde ise kompleks projektif düzlemdeki cebirsel varyete (cebirsel eğri) tanımı yapılarak örnekleri verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir. $p(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ indirgenemez polinomların çarpımıyken, p polinomunun $\mathbb{C}_{XY}$ de tanımladığı $C = V(p)$

eğrisinin tek şekilde belirli olduğunun ve yine $\mathbb{C}^2$ de indirgenemez bir eğrinin boş kümeden farklı bir öz alt varyetesinin sonlu sayıda nokta içerdiğinin ispatları yapılmıştır. Ayrıca singüler ve nonsingüler olma tanımı verilerek $C_1,\ C_2 \subset \mathbb{C}_{XY},$ ortak bileşenleri olamayan eğriler olmak üzere $C_1 \cap C_2$ deki her noktanın $C_1 \cup C_2$ de singüler olduğu ve $P^2(\mathbb{C})$ de nonsingüler bir eğrinin $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ de indirgenemez homojen bir polinomca tanımlanabileceği ispatlanmıştır. Bu bölümde ayrıca bağlantılılıkla ilgili bazı topolojik temel tanım ve teoremler verilmiş olup $P^2(\mathbb{C})$ de bir kompleks cebirsel eğrinin bağlantılı olduğu, örtü uzayı fikri kullanılarak, ispatlanmıştır. Daha sonra derecesi n olan indirgenemez bir polinomla tanımlı nonsingüler bir projektif eğrinin cins sayısının

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

olduğu hesaplanmıştır.

2. ESAS GRUPLAR VE ÖRTÜ UZAYLARI

Bu bölüm için [Greenberg, M. J., Harper, J. R., Algebraic Topology: A First Course, Part I] ve [Rotman, J. J., An Introduction to Algebraic Topology, Chapter 1, Chapter 2, Chapter 3, Chapter 10] bakınız.

Tanım 2.1 Bir $\mathbb{k}$ kategorisi, $obj\mathbb{k}$ ile gösterilen nesneler sınıfı, $\forall A,B \in obj\mathbb{k}$ çifti için $Hom(A,B)$ morfizmler kümesi ve $\forall A,B,C \in obj\mathbb{k}$ için

$$Hom(A,B) \times Hom(B,C) \rightarrow Hom(A,C), (f,g) \rightarrow gf$$

aşağıdaki özellikleri sağlayan bileşke işleminden meydana gelir:

i) Bileşke işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

ii) $\forall A \in obj\mathbb{k}$ için
$\forall B \in obj\mathbb{k}$ ve $\forall f \in Hom(B,A)$ için $1_A f = f$ ve
$\forall C \in obj\mathbb{k}$ ve $\forall g \in Hom(A,C)$ için $g1_A = g$
olacak şekilde bir $1_A \in Hom(A,A)$ vardır.

Tanım 2.2 $\mathbb{k}_1$ ve $\mathbb{k}_2$ kategoriler olsun. $F : \mathbb{k}_1 \rightarrow \mathbb{k}_2$ (kovaryant) funktoru bu kategorilerin nesneleri ve morfizmaları arasında aşağıdaki özelliklere sahip bir eşlemedir :

i) $\forall A \in obj\mathbb{k}_1$ için $F(A) = FA \in obj\mathbb{k}_2$ dir.

ii) $\forall A,B \in obj\mathbb{k}_1$ ve $\forall f \in Hom(A,B)$ için $Ff \in Hom(FA,FB)$ dir ; $g \in Hom(B,C)$ için $Fgf = FgFf$ dir ve $1_A \in Hom(A,A)$ için $F1_A = 1_{FA}$ dir.

Tanım 2.3 X,Y topolojik uzaylar, $f,g : X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer $H : X \times I \rightarrow Y$ sürekli ve $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x), \forall x \in X$ olacak şekilde H sürekli fonksiyonu varsa H , f den g ye bir homotopidir denir. $f \sim g$ ile gösterilir ve f ile g homotopiktir denir.

Nesneleri (X,A) (X topolojik uzay, $A \subset X$) , morfizmaları $U=(X,A)$,$V=(Y,B)$ için

$$f \in Hom(U,V) \Leftrightarrow f: X \to Y \text{ sürekli ve } f(A) \subset B$$

ile ve fonksiyonların bileşkesi işlemiyle bir kategoridir. Bu kategori Top^2 ile gösterilir. Benzer şekilde nesneleri (X,x_0) (X topolojik uzay $x_0 \in X$) ve morfizmaları $U=(X,x_0)$,$V=(Y,y_0)$,$f: X \to Y$,$f(x_0)=y_0$ olacak şekildeki kategoriye noktalı uzaylar kategorisi denir ve $pTop$ ile gösterilir.

X bir topolojik uzay olsun. X de bir eğri $\alpha: I \to X$ sürekli fonksiyonudur. $\alpha(0)=\alpha(1)$ ise α ya kapalı eğri denir.

$I=[0,1]$, $\mathbb{R}$ nin alt uzay topolojisi ve $\partial I=\{0,1\}$ olmak üzere Top^2 de $Hom((I,\partial I),(X,x_0))$, x_0 da başlayan ve biten X deki tüm kapalı eğrilerin kümesidir.

$\alpha,\beta: I \to X$ sürekli fonksiyonlar ve $\alpha(1)=\beta(0)$ olsun. $\alpha*\beta: I \to X$ sürekli fonksiyondur ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\alpha*\beta)(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2}\\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1\end{cases}$$

Teorem 2.4 X,Y topolojik uzaylar, $f: X \to Y$ bir fonksiyon, $X=A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ (sonlu tane) ve her A_i kapalı olsun. Eğer her $i=1,2,\ldots,n$ için $f_i=f|_{A_i}: A_i \to Y$ sürekli ve her $1 \le i,j \le n$ için $f_i|_{A_i \cap A_j}=f_j|_{A_i \cap A_j}$ ise $f: X \to Y$ süreklidir.

Tanım 2.5 $\alpha,\beta:(I,\partial I) \to (X,x_0)$ kapalı eğriler olsun. Eğer $H: I \times I \to X$, $\forall s,t \in I$ için

$$\begin{aligned} H(s,0) &= \alpha(s)\\ H(s,1) &= \beta(s)\\ H(0,t) &= H(1,t)=x_0 \end{aligned}$$

olacak şekilde H sürekli fonksiyonu varsa, H α dan β ya bir relatif homotopidir denir. α ile β relatif homotopiktir denir ve $\alpha \sim \beta$ $(rel\ \partial I)$ ile gösterilir.

" $\sim$ " bağıntısının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolayca gösterilebilir:

i) $\alpha \sim \alpha \quad (rel\, \partial I)$

ii) $\alpha \sim \beta \quad (rel\, \partial I)$ ise $\beta \sim \alpha \quad (rel\, \partial I)$ dir.

iii) $\alpha \sim \beta \quad (rel\, \partial I)$ ve $\beta \sim \gamma \quad (rel\, \partial I)$ ise $\alpha \sim \gamma \quad (rel\, \partial I)$ dir.

iv) $\alpha \sim \alpha^{'}\, (rel\, \partial I)$ ve $\beta \sim \beta^{'}\, (rel\, \partial I)$ ise $\alpha * \beta \sim \alpha^{'} * \beta^{'}\, (rel\, \partial I)$

"$\sim$" denklik bağıntısı altında x_0 dan başlayıp biten eğrilerin denklik sınıflarını düşünelim. " $*$ " işlemini kullanırsak;

(iv) özelliğinden dolayı $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$ olarak tanımlanabilir. Böylece relatif homotopi denklik bağıntısına göre denklik sınıfları üzerinde "$*$" işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $[\alpha * (\beta * \gamma)] = [(\alpha * \beta) * \gamma]$, birleşme özelliği

ii) $s : I \to X$, her $x \in I$ için , $s(x) = x_0$ olsun.$[\alpha] * [s] = [\alpha]$ ve $[s] * [\alpha] = [\alpha]$, birim eleman özelliği

iii) $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t), 0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $[\alpha] * [\alpha^{-1}] = [x_0]$ ve $[\alpha^{-1}] * [\alpha] = [x_0]$, ters eleman özelliği

Tanım 2.6 (X, x_0) bir noktalı topolojik uzay olsun. x_o da başlayıp biten eğrilerin denklik sınıflarının kümesi "$*$" işlemiyle bir gruptur. Bu gruba X uzayının x_0 tabanlı esas grubu denir ve $\pi(X, x_0)$ ile gösterilir.

$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ bir fonksiyon olsun ($f : X \to Y$ sürekli ve $f(x_o) = y_o$).
$f_* = \pi f : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$ kovaryant funktoru $f_*([\alpha]) = [f\alpha]$ olarak tanımlanır.

Teorem 2.7 π noktalı topolojik uzaylar kategorisinden gruplar kategorisine kovaryant bir funktordur.

Tanım 2.8 $f : I \to X$ sürekli, $f(0) = a,\ f(1) = b$ ise f , a dan b ye bir yoldur denir. Her $a, b \in X$ için X de a dan b ye bir yol varsa X yol bağlantılıdır denir.

Teorem 2.9 Eğer $x_0, x_1 \in X$ için x_0 dan x_1 e bir yol varsa $\pi(X, x_0) \simeq \pi(X, x_1)$ dir.

Tanım 2.10 $X \subset \mathbb{R}^m$ olsun. Her $x, y \in X$ ve her $t \in I$ için $tx + (1-t)y \in X$ oluyorsa X konveks bir kümedir denir.

Örnek 2.11 I^n, $\mathbb{R}^n$ konveks kümelerdir.

Tanım 2.12 X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $s : X \to X$ her $x \in X$ için $s(x) = x_o$ olsun. $1_X \sim s$ ise X uzayına büzülebilir uzay denir.

Teorem 2.13 Her konveks küme büzülebilirdir.

Tanım 2.14 X uzayı yol bağlantılı ve bir $x_0 \in X$ için $\pi(X, x_0) = \{1\}$ ise, X basit bağlantılıdır denir

Teorem 2.15 X büzülebilir bir uzay olsun. X basit bağlantılıdır.

Tanım 2.16 X ve Y topolojik uzaylar olsun. Eğer bir $f : X \to Y$ ve $g : Y \to X$ için $gf \sim 1_X$ ve $fg \sim 1_Y$ ise X ile Y homotopik uzaylardır ya da aynı homotopi sınıfındandır denir. $f : X \to Y$ için böyle bir g varsa f ye bir homotopi denkliği denir.

Sonuç 2.17 X ile Y homotopik ve $f : X \to Y$ homotopi denkliği olsun. $\forall x_0 \in X$ için $f_* : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, f(x_0))$ bir izomorfizmadır.

Sonuç 2.18 X büzülebilir ise $\pi(X, x_0) = \{1\}$ $(\forall\, x_0 \in X)$ olur.

Teorem 2.19 $\pi(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ dir.

Tanım 2.20 G bir grup ve bir topolojik uzay olsun. Eğer, $G \times G \to G,\ (x, y) \to xy^{-1}$ sürekli ise G bir topolojik gruptur denir.

Teorem 2.21 G basit bağlantılı topolojik grup ve H, G nin normal ve ayrık alt grubu ise $\pi(G/H, 1) \simeq H$ dir.

Teorem 2.22 X, Y iki topolojik uzay, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ olsun. O zaman
$\pi(X \times Y, \{x_0, y_0\}) \simeq \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$ olur.

Sonuç 2.23

$$\pi(S^1 \times S^1) \simeq \pi(S^1) \times \pi(S^1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

ve

$$\pi(S^1 \times \mathbb{R}) \simeq \pi(S^1) \times \pi(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$$

dir.

Tanım 2.24 A, X in alt uzayı olsun. $i : A \to X$ içerme dönüşümü olsun. $ri = 1_A$ olacak şekilde $r : X \to A$ sürekli dönüşümü varsa A, X in geri çekilimi (retract) dir denir. $ri = 1_A$ ve $ir \sim 1_X$ olacak şekilde $r : X \to A$ sürekli dönüşümü varsa A, X in deforme geri çekilimi (deformation retract) dir denir.

Teorem 2.25 Çember, kapalı birim diskin geri çekilimi değildir.

Sonuç 2.26 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi, 2 boyut için) Kapalı birim diskten kapalı birim diske sürekli dönüşümün sabit bir noktası vardır.

Tanım 2.27 A ve M topolojik uzaylar, $p : A \to M$ sürekli dönüşüm olsun. $\forall x \in M$ için $\Delta_\alpha(x) \to \Delta(x)$ homeomorfizma olacak şekilde $\Delta(x)$ açık komşuluğu varsa ve $p^{-1}(\Delta(x))$, A da $\Delta_\alpha(x)$ açık kümelerinin ayrık bir birleşimi ise (A, M, p) bir örtü uzayıdır denir. $\Delta(x)$ e düzgün örtülmüş (evenly covered) denir. $\Delta_\alpha(x)$ e $\Delta(x)$ üzerinde tabaka denir.

Teorem 2.28 $\forall x \in M$ için $p^{-1}(x)$ ayrık uzaydır.

Teorem 2.29 (A, M, p) bir örtü uzayı olsun. p açık, sürekli, örtendir ve böylece bir özdeşleştirme (identification) dir.

Örnek 2.30 $(\mathbb{R}, S^1, p)$ örtü uzayıdır. $(p(x) = e^{2\pi i x})$

Örnek 2.31 $(G, G/H, p)$ örtü uzayıdır. (Burada G bir topolojik grup ve $H \subset G$ ayrık, normal alt grup)

Teorem 2.32 (Yükseltmenin Tekliği) (A,M,p) bir örtü uzayı , $a_0 \in A$, $p(a_0) = m_0$ olsun. X bağlantılı bir topolojik uzay olmak üzere, $f : (X,x_0) \to (M,m_0)$ sürekli dönüşüm olsun. $pf' = f$ olacak şekilde $f' : (X,x_0) \to (A,a_0)$ sürekli dönüşümü varsa tektir.

Teorem 2.33 (Homotopi Yükseltme Özelliği) (A,M,p) bir örtü uzayı $f : (X,x_0) \to (M,m_0)$ bir sürekli dönüsüm ve her $x \in X$ için $F : X \times I \to M$, $F(x,0) = f(x)$, $f' : X \to A$, $pf' = f$ $\quad (f'(x_0) = a_0)$ olsun. O zaman her $x \in X$ için $F'(x,0) = f'(x)$ olacak şekilde $F' : X \times I \to A$ homotopisi vardır.

Sonuç 2.34 (A,M,p) bir örtü uzayı olsun. $p_* : \pi(A,a_0) \to \pi(M,m_0)$ birebirdir.

Teorem 2.35 (A,M,p) bir örtü uzayı ve M yol bağlantılı olsun. Her m_1, $m_2 \in M$ için $p^{-1}(m_1)$ ve $p^{-1}(m_2)$ aynı kardinalitededir.

Sonuç 2.36 (A,M,p) bir örtü uzayı ,$a_0 \in A$ için $m_0 = p(a_0)$ olsun ve A yol bağlantılı olsun. $\pi(M,m_0)/p_*(A,a_0)$ ile $p^{-1}(m_0)$ aynı kardinalitededir.

Tanım 2.37 (A,M,p) bir örtü uzayı olsun. Eğer bir $\Phi : A \to A$ homeomorfizması için $p\Phi = p$ ise Φ bir örtü dönüşümüdür denir.

Örnek 2.38 $(\mathbb{R},S^1,p)$ örtüsü verilsin. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $\Phi(x) = x+n$ bir örtü dönüşümüdür.

Teorem 2.39 (A,M,p) bir örtü uzayı ve A basit bağlantılı ve yerel yol bağlantılı olsun. O zaman örtü dönüşümleri grubu, M nin esas grubuna izomorfiktir

A bir Hausdorff uzay, G, A nın homeomorfizmalarının

$$\forall a \in A \text{ için } \exists a \in U \subset A \ (U \text{ açık}),\ \forall g \in G \text{ için } gU \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow g = 1$$

koşullarını sağlayan bir alt grubu olsun. G,A ya düzgün süreksizce (properly discontinuously) etkir denir. O zaman $(A, A/G, p)$ bir örtüdür.

Örnek 2.40 $G = \{+1, -1\} = \mathbb{Z}_2$ ve her $x \in S^n$ için $\phi : G \times S^n \to S^n$
$\phi(i,x) = x$, $\phi(-i,x) = -x$ olsun. $(S^n, S^n/G, p)$ bir örtüdür.

Sonuç 2.41 $\pi(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}_2$ dir.

Teorem 2.42 (Yükseltme Kriteri) (A,M,p) bir örtü uzayı, A bağlantılı ve yerel yol bağlantılı, (X,x_0) bağlantılı bir topolojik uzay ve $f : (X,x_0) \to (M,m_0)$ sürekli dönüşüm olsun. $pf' = f$ olacak şekilde bir $f' : (X,x_0) \to (A,a_0)$ sürekli dönüşümünün var olması için gerek ve yeter koşul $f_*(\pi(X,x_0)) \subset p_*(\pi(A,a_0))$ olmasıdır.

Sonuç 2.43 X basit bağlantılı ise f' yükseltmesi daima vardır.

Tanım 2.44 M bir topolojik uzay ve A_1, A_2 bağlantılı ve yerel yol bağlantılı uzaylar olsun. (A_1, M, p_1) ve $(A_2, M, p_2), (M, m_0)$ ın iki örtü uzayı olsun. $p_2\Phi = p_1$ olacak şekilde bir Φ homeomorfizması varsa (A_1, M, p_1) ile (A_2, M, p_2) örtü uzayları denktir denir. Eğer A_1 ve A_2 basit bağlantılı ise (A_1, M, p_1) ile (A_2, M, p_2) örtü uzayları denktir. Böyle bir örtüye evrensel örtü denir.

Tanım 2.45 Her $x \in M$ için $i_* : \pi(\Delta(x), x) \to \pi(M, x)$ sıfır homomorfizması olacak şekilde p nin bir $\Delta(p)$ komşuluğu varsa M ye yerel yarı-basit bağlantılıdır denir.

Teorem 2.46 M bağlantılı, yerel yol bağlantılı bir topolojik uzay olsun. O zaman M nin bir evrensel örtüsü vardır ancak ve ancak M yerel yarı-basit bağlantılıdır.

Tanım 2.47 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, X bir Hausdorff uzay olsun. $U \simeq \mathbb{R}^n$(homeomorf) olacak şekilde her $x \in X$ için $x \in U \subset X$ (U açık) varsa X , n boyutlu topolojik manifolddur.

Sonuç 2.48 Her n boyutlu bağlantılı manifoldun evrensel örtüsü vardır.

3. SİNGÜLER HOMOLOJİ TEORİ

Bu bölüm için [Greenberg, M. J., Harper, J. R., Algebraic Topology: A First Course, Part II] ve [Rotman, J. J., An Introduction to Algebraic Topology, Chapter 4, Chapter 5, Chapter 6, Chapter 7, Chapter 9] bakınız.

Tanım 3.1 $E_0 = (0,0,\ldots), E_1 = (1,0,\ldots), E_2 = (0,1,0,\ldots), \ldots,$
$E_q = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ vektörlerini ele alalım. $E_0, E_1, \ldots, E_q$ nun gerdiği konveks kümeye, Δ^q ya, standart q -simpleks denir. ($q \geq 0$)

Tanım 3.2 X bir topolojik uzay olsun. $\sigma : \Delta^q \to X$ sürekli dönüşümüne X de bir singüler q -simpleks denir.

Tanım 3.3 X bir topolojik uzay , R değişmeli bir halka olsun. $q \geq 0$ için $S_q(X)$, X deki tüm singüler q -simpleksler tarafından üretilen , serbest R modüldür. $S_{-1}(X) = 0$ olarak tanımlanır. $S_q(X)$ in elemanlarına X de singüler n -zincirler denir.

$q > 0$ için

$$F_q^i : \Delta^{q-1} \to \Delta^q,\ (E_0, \ldots, E_i, E_{i+1}, \ldots, E_{q-1}) \to (E_0, \ldots, \widehat{E_i}, \ldots, E_q)$$

($\widehat{E_i}, E_i$ atılıyor demek) olarak tanımlayalım. Yani

$$F_q^i(E_j) = \begin{cases} E_j & j < i \\ E_{j+1} & j \geq i \end{cases}$$

σ, X de bir singüler q-simpleks olsun. Her $0 \leq i \leq q$ için $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_q^i$ olarak tanımlayalım.

$$\partial\sigma = \begin{cases} 0 & q = 0 \\ \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma^{(i)} & q > 0 \end{cases}$$

ile tanımlı $\partial\sigma$ ya σ nın sınırı denir. $\partial : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$, R modül homomorfizması tanımlar ve sınır operatörü olarak adlandırılır.

$$\cdots \to S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \to 0$$

serbest R -modüllerin, R modül homomorfizmleriyle bu dizisine X in singüler kompleksi denir ve $(S(X),\partial)$ ile gösterilir.

$j<i$ olmak üzere $F_q^i F_{q-1}^j = F_q^j F_{q-1}^{i-1}$ olduğundan $\partial\partial = 0$ olduğunu kolayca görülür.

z bir singüler q -zincir olsun. $\partial z = 0$ ise z ye bir q -devir denir. z' , $(q+1)$ -zincir olmak üzere $z = \partial z'$ ise z ye bir q -sınır denir. q -devirlerin modülünü Z_q ve q -sınırların modülünü B_q ile gösterelim. B_q, Z_q nun alt modülüdür böylece bölüm modülü Z_q/B_q, q -inci singüler homoloji modülü olarak adlandırılır ve $H_q(X;R)$ ile ya da kısaca $H_q(X)$ ile gösterilir. $q \geq 0$ için $H_q(X) = Z_q(X)/B_q(X)$ yazarız.
$\bar{z} \in H_q(X)$ için $\bar{z} = z + B_q(X),\ z$ nin homoloji sınıfıdır.

Teorem 3.4 $\{X_k : k \in \wedge\}$, X in yol bağlantılı bileşenlerinin ailesi olsun. Her $q \geq 0$ için $H_q(X) \cong \oplus_k H_q(X_k)$ dir.

Teorem 3.5 X yol bağlantılı ise her R halkası için $H_0(X;R) \cong R$ dir.

Tanım 3.6 $p,$ singüler sıfır simpleksler ve $r_p \in R$ olmak üzere
$\varepsilon : S_0(X;R) \to R$, $\varepsilon(\sum r_p p) = \sum r_p$ olsun. $H_0^\sharp(X;R) = ker\varepsilon/B_o(X;R)$ olarak tanımlı $H_0^\sharp(X;R)$ ye indirgenmiş homoloji denir (kısaca $H_0^\sharp(X)$ yazılır) ve $q>0$ için $H_q^\sharp(X) = H_q(X)$ olarak tanımlanır.

Sonuç 3.7 X yol bağlantılıdır $\Longleftrightarrow H_0^\sharp(X) = 0$

X ve Y topolojik uzaylar olsun. $f : X \to Y$ sürekli dönüşüm ve $\sigma : \Delta_q \to X$ bir singüler q -simpleks olsun. $S_q(f)(\sigma) = f\sigma$ olarak tanımlayalım. Her $q \geq 0$ için

$$\begin{array}{ccccc} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial} & S_{q-1}(X) & \\ S_q(f) & \downarrow & & \downarrow & S_{q-1}(f) \\ & S_q(Y) & \xrightarrow[\partial]{} & S_{q-1}(Y) & \end{array}$$

diyagramının değişmeli olduğu yani $\partial S_q(f) = S_{q-1}(f)\partial$ olduğu görülür.
Ayrıca $S_q(f)(Z_q(X)) \subset Z_q(Y)$ ve $S_q(f)(B_q(X)) \subset B_q(Y)$ dir.

Teorem 3.8 Her $q \geq 0$ ve her R halkası için $H_q,$ topolojik uzaylar kategorisinden R -modüller kategorisine kovaryant bir funktordur.

Sonuç 3.9 Eğer X ve Y topolojik uzayları homeomorfik ise her $q \geq 0$ için $H_q(X) \cong H_q(Y)$ dir.

Teorem 3.10 (Boyut Aksiyomu) Eğer X, bir tek nokta uzay ise her $q > 0$ için $H_q(X) = 0$ ve $H_0(X) \cong R$ dir.

Tanım 3.11 R bir değişmeli halka olsun.

i) Her C_q bir R -modül

ii) Her $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$, R-modül homomorfizması

iii) $\partial_q \partial_{q+1} = 0$

sağlanıyorsa $C = \{C_q, \partial_q\}$ bir zincir kompleksidir denir.

$$C : \cdots \to C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0$$

şeklinde gösterebiliriz. Çoğu durumda $q < 0$ ise $C_q = 0$ kabul edilir.

Tanım 3.12

$$\begin{array}{ccccc} & C_q & \xrightarrow{f_q} & C'_q & \\ \partial_q & \downarrow & & \downarrow & \partial'_q \\ & C_{q-1} & \underset{f_{q-1}}{\longrightarrow} & C'_{q-1} & \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan

$f_q : C_q \to C'_q$ ile $\{f_q\}$ homomorfizmlerinin dizisine bir zincir dönüşümü denir.

$f = \{f_q : C_q \to C'_q\}$ ile gösterilir.

Tanım 3.13 C bir zincir kompleksi olsun. $Z_q(C) = ker\partial_q$ elemanlarına devirler, $B_q(C) = Im\partial_{q+1}$ elemanlarına sınırlar denir. Her $q \geq 0$ için $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$ bölüm modülüne C nin q -inci homoloji modülü denir.

C ve C' iki zincir kompleksi olsun. $f : C \to C'$ zincir dönüşümü verilsin.
$f_q(Z_q) \subset Z'_q$ ve $f_q(B_q) \subset B'_q$ olur.
$H_q(f) : H_q(C) \to H_q(C^{'}), H_q(f)(\bar{z}) = \overline{f_q(z)}$ olarak tanımlanır.

Sonuç 3.14 Her q için, H_q , R üzerindeki zincir kompleksleri kategorisinden, R -modüller kategorisine kovaryant bir funktordur.

Tanım 3.15 C ve C' iki zincir kompleksi ve
$f = \{f_q : C_q \to C'_q\}$ ve $g = \{g_q : C_q \to C'_q\}$ iki zincir dönüşümü olsun.

$$\begin{array}{ccccc}
C_{q+1} & \overset{\partial_{q+1}}{\longrightarrow} & C_q & \overset{\partial_q}{\longrightarrow} & C_{q-1} \\
 & \overset{h_q}{\swarrow} & f_q \downarrow g_q & \overset{h_{q-1}}{\swarrow} & \\
C'_{q+1} & \underset{\partial'_{q+1}}{\longrightarrow} & C'_q & \underset{\partial'_q}{\longrightarrow} & C'_{q-1}
\end{array}$$

$\partial^{'}_{q+1}h_q + h_{q-1}\partial_q = f_q - g_q$ sağlayan $h = \{h_q : C_q \to C'_{q+1}\}$ homomorfizmleri dizisine bir zincir homotopisi denir ve $f \sim g$ yazılır, f ile g zincir homotopiktir denir.

Teorem 3.16 f ve g zincir dönüşümleri zincir homotopik olsun.
$H_q(f) = H_q(g)$ dir.

Teorem 3.17 $f, g : X \to Y$ homotopik dönüşümler ise
$S(f), S(g) : S(X) \to S(Y)$ zincir homotopik dönüşümlerdir.

Sonuç 3.18 (Homotopi Aksiyomu) $f, g : X \to Y$ homotopik dönüşümler ise her $q \geq 0$ için $H_q(f) = H_q(g)$ dir.

Sonuç 3.19 $X \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olsun.

$$H_q(X) = \begin{cases} R & q = 0 \\ 0 & q > 0 \end{cases}$$

$f : \Delta^1 \to I$, her $t \in I$ için $(1-t)E_0 + tE_1 \to t$ şeklinde tanımlı homeomorfizm olsun. $\varphi : \pi(X, x_0) \to H_1(X)$ fonksiyonu $\alpha : I \to X$, x_o da kapalı bir eğri olmak üzere, $[\alpha] \to \overline{\alpha f}$ ile iyi tanımlıdır. Bu φ fonksiyonuna Hurewicz dönüşümü denir. φ bir homomorfizmadır.

Teorem 3.20 (Hurewicz Teoremi)X yol bağlantılı ise Hurewicz dönüşümü $\varphi : \pi(X,x_0) \to H_1(X)$ örtendir ve çekirdeği, $\pi(X,x_0)$ ın komütatör alt grubu $\pi'(X,x_0)$ dır. Böylece (1-inci izomorfizm teoreminden)
$\pi(X,x_0)/\pi'(X,x_0) \cong H_1(X)$ dir. (Burada $H_1(X) = H_1(X;\mathbb{Z})$ dir.)

Sonuç 3.21 $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Sonuç 3.22 X basit bağlantılı ise $H_1(X) = 0$ dir.

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $S_q(A)$, $S_q(X)$ in alt modülüdür. $S_q(X)/S_q(A)$ bölüm modülünü oluşturabiliriz.

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \to & S_q(X)/S_q(A) \\ \partial_q \downarrow & & \downarrow \overline{\partial_q} \\ S_{q-1}(X) & \to & S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A) \end{array}$$

$z \in S_q(X)$ için $\overline{\partial_q}(z + S_q(A)) = \partial_q z + S_{q-1}(A)$ ile tanımlayacağımız $\overline{\partial_q}$, üstteki diyagramı değişmeli yapar. Kısaca $\overline{\partial}$ ile gösterelim.

$\overline{\partial}\,\overline{\partial} = 0$ ve $Im\overline{\partial_{q+1}} \subset ker\overline{\partial_q}$ (alt modül) olduğu kolayca görülür.

Tanım 3.23 $ker\overline{\partial_q}/Im\overline{\partial_{q+1}}$ bölüm modülüne X in A ya göre q -inci relatif homoloji modülü denir ve $H_q(X,A)$ ile gösterilir. $z \in S_q(X)$ olsun. $\partial z \in S_{q-1}(A)$ ise z , relatif q -devir olarak adlandırılır ve bu relatif q -devirler $Z_q(X,A)$ alt modülünü oluşturur. Bir $w \in S_{q+1}$ için $\partial w - z \in S_q(A)$ ise z , relatif q -sınır olarak adlandırılır ve relatif q -sınırlar $B_q(X,A)$ alt modülünü oluşturur.

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olduğunda kısaca (X,A) çifti diyelim. Relatif homoloji modülü , (X,A) çiftinde funktoriyeldir. Yani (X,A) ve (Y,B) çiftleri verilsin.
$f : (X,A) \to (Y,B)$ olsun (f, $f(A) \subset B$ olacak şekilde $f : X \to Y$) .
$H_q(f) : H_q(X,A) \to H_q(Y,B)$ homomorfizmi, $H_q(1_X) = 1_{H_q(X,A)}$ ve $H_q(gf) = H_q(g)H_q(f)$ sağlar. Ayrıca,

$$\begin{array}{ccccc} H_q(A) & \to & H_q(X) & \to & H_q(X,A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_q(B) & \to & H_q(Y) & \to & H_q(Y,B) \end{array}$$

diyagramında her bir dikdörtgen değişmeli olur ($i : A \to X$ içerme, $j : (X,\emptyset) \to (X,A)$ birim dönüşüm).

Önerme 3.24 $\{X_k : k \in \Lambda\}$, X in yol bağlantılı bileşenlerinin ailesi ve $A_k = X_k \cap A$ olsun. Her $q \geq 0$ için $H_q(X,A) \cong \oplus_k H_q(X_k,A_k)$ dır.

Önerme 3.25 (X,A) çifti için $A \neq \emptyset$ ve X yol bağlantılı ise $H_0(X,A) = 0$ dır.

Önerme 3.26 $f,g : (X,A) \to (Y,B)$ homotopik ise $H_q(f)$ ve $H_q(g)$ homomorfizmaları eşittir.

Tanım 3.27 $\cdots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \to \cdots$ homoloji modülleri ve morfizmaların dizisine (X,A) çiftinin uzun homoloji dizisi denir. z bir relatif q -devir olmak üzere $\partial\overline{z} = \overline{\partial z}$ ile tanımlı ∂ , bağlayan homomorfizma olarak adlandırılır. ($\overline{z} : z$ nin relatif homoloji sınıfını gösterir , yani $\overline{z} \in H_q(X,A)$, $\overline{z} = z + B_q(X,A)$, $z \in Z_q(X,A)$ dır.)

Tanım 3.28 M_n modülleri ve $f_n : M_{n+1} \to M_n$ modül homomorfizmleri verilsin(n ler sonlu ya da sonsuz tane olabilirler). Eğer her m için $M_{m+1} \xrightarrow{f_{m+1}} M_m \xrightarrow{f_m} M_{m-1}$ iken $ker f_m = Im f_{m+1}$ oluyorsa M_n modülleri ve f_n modül homomorfizmlerinin oluşturduğu diziye tam dizi denir.

Teorem 3.29 (X,A) çiftinin homoloji dizisi tamdır.

Örnek 3.30 (X,x_0) çiftini ele alalım. $H_q(X) \cong H_q(X,x_0)$, $\forall q > 0$

Örnek 3.31 (E^n,S^{n-1}) çifti için $H_q(E^n,S^{n-1}) \cong H_{q-1}(S^{n-1})$, $\forall q \geq 1$

Önerme 3.32 Homoloji dizisi , (X,A) çiftinde funktoriyeldir.

Örnek 3.33 $A \subset X \subset Y$ uzayları verilsin .

$$\cdots \to H_q(X,A) \to H_q(Y,A) \to H_q(Y,X) \to H_{q-1}(X,A) \to \cdots$$

homoloji dizisi tamdır.

Tanım 3.34 $U \subset A \subset X$ uzayları verilsin. Her q için $H_q(X-U,A-U) \to H_q(X,A)$ bir izomorfizm ise $(X-U,A-U) \to (X,A)$ içerme dönüşümüne bir kesme (excision) denir. Bu durumda U kesilebilirdir deriz.

Teorem 3.35 $\overline{U} \subset intA$ ise U kesilebilirdir.

Teorem 3.36 $V \subset U \subset A$ olsun. V kesilebilir ve $(X-U,A-U)$, $(X-V,A-V)$ nin deforme geri çekilimi (deformation retract) olsun. O zaman U kesilebilirdir.

Teorem 3.37 $(E_n^+,S^{n-1}) \to (S^n,E_n^-)$ bir kesmedir. $(E_n^+,E_n^-$ sırayla S^n nin kapalı kuzey ve güney yarımküreleri ve $S^{n-1} = E_n^+ \cap E_n^-$ ekvator olmak üzere)

Örnek 3.38 Teorem 3.36 ve Teorem 3.37 den

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} R & q=n \\ 0 & q \neq n \end{cases} \quad H_q(E^n,S^{n-1}) \cong \begin{cases} R & q=0 \\ 0 & q>0 \end{cases}$$

Sonuç 3.39 S^{n-1}, E^n nin bir geri çekilimi (retract) değildir.

Sonuç 3.40 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi) Her $E^n \to E^n$ dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

Tanım 3.41 Homoloji, bir R değişmeli halkası için aşağıdaki özelliklere (Eilenberg-McLane aksiyomları) sahip , topolojik uzay ikilileri kategorisinden, R modüller kategorisine her $q \geq 0$ için H_q funktorları ve bunlar arasında her $q \geq 1$ için $\partial_q : H_q(X,A) \to H_{q-1}(A)$ $(H_q(A) = H_q(A,\emptyset))$ doğal dönüşümleri topluluğudur:

1. H_q, homotopi invaryanttır.Yani f, $g : X \to Y$ homotopik dönüşümler ise her $q \geq 0$ için $H_q(f) = H_q(g)$ dir. (Homotopi Aksiyomu)

2. $\cdots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(A) \to \cdots$ homoloji dizisi tamdır.
3. $\overline{U} \subset intA$ ise $H_q(X-U, A-U) \to H_q(X,A)$ bir izomorfizmdir. (Kesme Aksiyomu)
4. Eğer X, bir tek nokta uzayı ise her $q \geq 0$ için $H_q(X) = 0$ ve $H_0(X) \cong R$ dir. (Boyut Aksiyomu)

Tanım 3.42 F bir cisim olsun. $n \geq 0$, F^{n+1}, F üzerinde vektör uzayı olsun. $x_i \in F$ için $x \in F^{n+1}, x = (x_0, \ldots, x_n)$ ile gösterelim . $F^{n+1} \backslash \{0\}$ üzerinde,

$$x, y \in F^{n+1} \backslash \{0\} \text{ } için \text{ } x \sim y \text{ dir eğer bir } \lambda \in F \backslash \{0\} \text{ için } x = \lambda y \text{ } oluyorsa$$

şeklinde " $\sim$ " denklik bağıntısını tanımlayalım.
$F^{n+1} \backslash \{0\} / \sim$ bölüm kümesine projektif n -uzay denir ve $\mathbb{P}^n(F)$ ya da $\mathbb{P}^n$ ile gösterilir. $x \in F^{n+1} \backslash \{0\}$, $x = (x_0, \ldots, x_n)$ iken $[x] = [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}(F)$ dir. Her $n \geq 0$ için $\mathbb{P}^n(F) \to \mathbb{P}^{n+1}(F)$, $[x_0, \ldots, x_n] \hookrightarrow [x_0, \ldots, x_n, 0]$ gömülmesi vardır.

$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ üzerinde sırasıyla $\mathbb{P}^n$(ya da $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$) ve $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ile göstereceğimiz reel projektif n -uzay ve kompleks projektif n -uzay ile ilgileneceğiz.

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \approx S^1$ ve $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \approx S^2$

Tanım 3.43 $H_q(X;\mathbb{Z})$ nin rankına X uzayının q -inci Betti sayısı denir ve β_q ile gösterilir.Her bir β_q sonlu ve $q > k$ için $\beta_q = 0$ olacak şekilde bir k varsa Euler karakteristiği, $\chi(X) = \sum_q (-1)^q \beta_q$ formülü ile tanımlanır.

Örnek 3.44 S^n için $\beta_0 = \beta_n = 1$, diğer q için $\beta_q = 0$ olduğundan

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{n tek} \\ 2 & \text{n çift} \end{cases}$$

Örnek 3.45 r -yapraklı gül G_r için $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = r$, diğer $\beta_q = 0$ olduğundan

$$\chi(G_r) = 1 - r$$

Örnek 3.46 $\chi(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = n+1$

Örnek 3.47

$$\chi(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} 0 & \text{n tek} \\ 1 & \text{n çift} \end{cases}$$

3 -boyutlu bir uzayda (S^2 ye homeomorf) bir kompakt yüzey alalım . Bu yüzeyi herhangi ikisi bir ortak kenar ya da köşede kesişen üçgenlere (ya da çokgenlere) bölelim . F yüzlerin, E kenarların ve V köşelerin sayısı olmak üzere daima $V-E+F=2$ dir. Bu eşitliğe Euler formülü de denir.

4. MANİFOLDLARIN YÖNLENDİRİLMESİ

Bu bölüm için [Greenberg, M. J., Harper, J. R., Algebraic Topology: A First Course, Part III] bakınız.

$X, n \geq 1$ olmak üzere bir n -manifold olsun.

Lemma 4.1 Her $x \in X$ ve her R değişmeli halkası için $H_n(X, X-x) \cong R$ olur.

Tanım 4.2 $H_n(X, X-x)$ R -modülünün bir üretecine x noktasında X in bir yerel R -yönlendirmesi denir.

$n = 2$, $R = \mathbb{Z}$ alalım. $H_2(X, X-x) \cong \mathbb{Z}$ olur. Böylece $H_2(X, X-x)$ nin iki üreteci vardır ve bunlar x etrafında zıt yönlerde dönen çemberlere karşılık gelir. Bu üreteçlerden birini seçmek, x noktası etrafında bir yön seçmeye karşılık gelecektir.

Lemma 4.3 (Devam (Continuation) Lemması) $\alpha_x \in H_n(X, X-x)$ verilsin. x in $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$ olacak şekilde bir açık U komşuluğu ve $\alpha \in H_n(X, X-U)$ vardır. ($j_x^U : H_n(X, X-U) \to H_n(X, X-x)$ içermenin neden olduğu homomorfizmdir.)

Lemma 4.4 (Tutarlılık (Coherence) Lemması) α_x, $H_n(X, X-x)$ i üretiyorsa, α_y, $H_n(X, X-y)$ yi her $y \in U$ için üretecek şekilde U açık komşuluğu ve α_y seçilebilir.

Lemma 4.5 (Yerel Sabitlik Lemması) x in her W komşuluğu, her $y \in U$ için j_y^U bir izomorfizm olacak şekilde x in bir U komşuluğunu içerir.(Yani α_x, U da bir tek α devamına sahiptir.)

Tanım 4.6 $U \in X$ alt uzayı verilsin. Her $y \in U$ için $j_y^U, H_n(X, X-y)$ yi üretecek şekildeki $\alpha \in H_n(X, X-U)$ ya U boyunca X in bir yerel R -yönlendirmesi denir.

Tanım 4.7 X i örten, U_i açık alt kümelerinin bir ailesi ve her i için U_i boyunca X in bir yerel R -yönlendirmesi $\alpha_i \in H_n(X, X-U_i)$ verilsin. Eğer $\forall x \in X$, $x \in U_i \cap U_j$ iken $j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U_j}(\alpha_j)$ (uyum(compatibility) koşulu) sağlanıyorsa (U_i, α_i) sistemine, X in bir R -yönlendirme sistemi denir. Bu durumda bir yerel R -yönlendirmesi, belli olarak

$\alpha_x = j_x^{U_i}(\alpha_i)$, $x \in U_i$ şeklinde tanımlanır. (V_k, β_k) , X in başka bir R -yönlendirme sistemi verilsin. Eğer her x için $\alpha_x = \beta_x$ ise bu aynı R -yönlendirmesini tanımlar veya bu iki yönlendirme sistemi denktir deriz. Böylece X in bir global R -yönlendirmesi, R -yönlendirme sistemlerinin bir denklik sınıfı olarak tanımlanır.

Eğer X in bir R -yönlendirmesi varsa, X, R -yönlendirilebilirdir deriz .

Önerme 4.8 X, R -yönlendirilebilirdir $\Longleftrightarrow$ Her bir bağlantılı bileşeni R -yönlendirilebilirdir.

Önerme 4.9 X bağlantılı olsun. Bir noktada aynı olan iki yönlendirmesi aynıdır (yani bir noktada aynı ise her noktada aynıdır.)

Önerme 4.10 Bağlantılı, yönlendirilebilir manifoldun tam olarak iki farklı $\mathbb{Z}$-yönlendirmesi vardır.

Örnek 4.11 Her R halkası için S^n ve $\mathbb{R}^n$, R -yönlendirilebilirdir.

Önerme 4.12 Her manifoldun bir tek $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -yönlendirmesi vardır.

Teorem 4.13 X bağlantılı ve yönlendirilemeyen bir manifold olsun. A yönlendirilebilir olacak şekilde X in 2 -katlı bir (A, X, π) bağlantılı örtüsü vardır.

Sonuç 4.14 Her basit bağlantılı manifold yönlendirilebilirdir.

Sonuç 4.15 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, n tek iken yönlendirilebilirdir , n çift iken yönlendirilemezdir.
Her n için $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ yönlendirilebilirdir.

5. DÜZLEM EĞRİLERİ

Bu bölüm için [Kendig, K., Elemantary Algebraic Geometry, Chapter I, Chapter II] bakınız.

Tanım 5.1 k bir cisim olsun. $\{(x_1,\dots,x_n)|x_i \in k)\}$ kümesine , k üzerinde afin n -uzay denir ve k^n ile gösterilir. Her $x=(x_1,\dots,x_n)$ bir noktadır denir. $k[X_1,\dots,X_n]=k[X]$ polinomlar halkası, $p(x)\in k[X]\setminus k$ (p sabit olmayan bir polinom) olsun.
$V(p)=\{(x)\in k^n|p(x)=0\}$ kümesine k^n nin hiperyüzeyi ya da afin hiperyüzeyi denir. $\{p_\alpha(X)\}$, $k[X]$ de polinomların bir topluluğu ise $V(p_\alpha)=\{(x)\in k^n|\forall p_\alpha(x)=0\}$ kümesine k^n de bir cebirsel varyete ya da afin cebirsel varyete ya da kısaca varyete denir. k^2 ye afin düzlem, $p\in k[X_1,X_2]\setminus k$ iken $V(p)$ ye afin düzlem eğrisi ya da düzlem eğrisi ya da kısaca eğri denir.

Örnek 5.2 $V(aX^2+bXY+cY^2+dX+eY+f)$, $a,\dots,f\in\mathbb{R}$, yani bütün çemberler, elipsler, paraboller, hiperboller afin cebirsel varyetelerdir. Özel olarak $V(X^2+Y^2)$, $\mathbb{C}^2$ de topolojik olarak iki düzlemin tek nokta birleşimidir. $\mathbb{R}^2$ de ise tek noktadır.

Örnek 5.3 Cusp eğrisi $V(Y^2-X^3)$, alfa eğrisi $V(Y^2-X^2(X+1))$, kübik $V(Y^2-X(X^2-1))$ cebirsel eğrilerdir.

Tanım 5.4 k bir cisim olsun. k^{n+1} vektör uzayının bütün 1 -alt uzaylarının kümesine n -boyutlu projektif uzay (k üzerinde) denir ve $\mathbb{P}^n(k)$ ile gösterilir. Her bir 1 -alt uzayına $\mathbb{P}^n(k)$ nın bir noktası denir. k^{n+1} in $(r+1)$ -alt uzayındaki tüm 1 -alt uzaylarının kümesine $\mathbb{P}^n(k)$ projektif uzayının r -boyutlu projektif alt uzayı denir ve $\mathbb{P}^r(k)$ ile gösterilir. $\mathbb{P}^r(k)$ nın $\mathbb{P}^n(k)$ daki koboyutu (codimension) $n-r$ dir. $cod(\mathbb{P}^r(k))=n-r$ yazılır.

Teorem 5.5 S_1 ve S_2 ,$\mathbb{P}^n(k)$ nın herhangi iki projektif alt uzayı olsun.

$$cod(S_1\cap S_2)\leq codS_1+codS_2$$

dir.

Tanım 5.6 P, $\mathbb{P}^n(k)$ nın bir noktası olsun. L_P, k^{n+1} in 1 -alt uzaylarına karşılık gelsin. L_P de sıfırdan farklı bir noktanın $(a_1,\ldots,a_{n+1})$ koordinatlarına P nin bir koordinat kümesi denir.

P nin koordinat kümesi (eğer k iki elemanlı cisim değilse) asla tek şekilde belirli değildir.

Tanım 5.7 k^{n+1} de , eğer bir $c \in k$ için $(b_1,\ldots,b_{n+1}) = (ca_1,\ldots,ca_{n+1})$ oluyorsa $(a_1,\ldots,a_{n+1})$ ve $(b_1,\ldots,b_{n+1})$ denktir denir.

W, k^{n+1} in n -boyutlu projektif alt uzayı,$\mathbb{P}^n(k)$ nın $(n-1)$ -boyutlu projektif alt uzayı $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ tanımlar ve $\mathbb{P}^{n-1}(k)$, sonsuzdaki hiper düzlem olarak adlandırılır. W alt uzayını, $k^{n+1} \setminus W$ da bir v_0 sabit vektöründen geçirerek $v_0 + W = \{v_o + w | w \in W\}$ elde edilirken, $k^{n+1} \setminus W$ daki her bir 1 -alt uzay, $v_0 + W$ ile tam olarak bir noktada kesişir (bu işleme paralel taşıma diyelim).

Tanım 5.8 $\mathbb{P}^{n-1}_\infty(k)$, seçtiğimiz W projektif alt uzay olmak üzere, $\mathbb{P}^n(k) \setminus \mathbb{P}^{n-1}_\infty(k)$ kümesine sonsuzdaki hiper düzleme göre $\mathbb{P}^n(k)$ nın afin parçası denir.

$W \in k^{n+1}$ n -boyutlu alt uzayını P noktasına paralel taşıyıp, P den geçen 1 -uzaylarla bu paralel taşımanın her bir P noktasını özdeşleştirerek, n -boyutlu bir afin uzayı, sonsuzdaki bir hiper düzleme göre $\mathbb{P}^n(k)$ nın bir afin parçası olarak ele alabiliriz.

Sonsuzdaki hiper düzlem, $\mathbb{P}^{n-1}_\infty(k)$ yı , özel olarak basitçe $i = 1,2,\ldots,(n+1)$ olmak üzere $X_i = 0$ hiperdüzlemleriyle tanımlı projektif hiper düzlemler olarak alabiliriz.

Tanım 5.9 $S \in k^n$ olsun. $x \in S$ iken $\forall c \in k$ için $cx \in S$ oluyorsa S ye k^n nin homojen alt kümesi denir. Bir kümenin homejen olması için gerek ve yeter koşul $\emptyset$, $\{0\}$ ya da k^n nin 1 -alt uzaylarının boş küme olmayan bir birleşimini içermesidir. Homojen bir alt küme $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ da bir kümeyi temsil eder. $0 \neq q \in k[X]$ polinomunun her bir teriminin toplam derecesi aynı ise q polinomu homojendir denir. Bu derece d ise d -inci dereceden homojendir deriz. Cebirsel varyete homojen bir küme ise buna homojen varyete denir.

Teorem 5.10 k sonsuz olsun. k^n de bir V cebirsel varyetesinin homojen olması için gerek ve yeter koşul homojen polinomların bir kümesiyle tanımlanmış olmasıdır.

Tanım 5.11 k^{n+1} de homojen bir varyete ile temsil edilen $\mathbb{P}^n(k)$ nın bir alt kümesine bir projektif varyete denir. $k^n \subset \mathbb{P}^n(k)$ ve V, k^n de bir varyete olsun. $\mathbb{P}^n(k)$ da V yi içeren en küçük projektif varyeteye, V nin projektif kapanışı (completion) denir. V^c ile ya da $H(V)$ ile gösterilir.

Tanım 5.12 $p(X_1,\ldots,X_n) \in k[X_1,\ldots,X_n]$ nin derecesi d olsun. Her bir p_i, i -inci dereceden homojen terimler olmak üzere $p = p_0 + p_1 + \ldots + p_d$ olarak yazalım.
$p_0X_{n+1}^d + p_1X_{n+1}^{d-1} + \ldots + p_d \in k[X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}]$, d -inci dereceden homojendir ve p nin homojenizasyonu (homogenization) olarak adlandırılır . $H_{X_{n+1}}(p)$, $H_{n+1}(p)$ ya da $H(p)$ ile gösterilir.

$k = \mathbb{C}$ olsun. $V(p_1,\ldots,p_r) \in \mathbb{C}^n$ ise $V^c = V(H_{n+1}(p_1),\ldots,H_{n+1}(p_r)) \in \mathbb{C}^{n+1}$ dir ve V^c, V nin $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ deki topolojik kapanışıdır. Fakat $k = \mathbb{R}$ alırsak bu doğru olmayabilir.

Tanım 5.13 $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ bir projektif varyete ve $\mathbb{P}^{n-1}_\infty(k)$ da seçtiğimiz sonsuzdaki hiper düzlem olsun. V nin $\mathbb{P}^n(k) \setminus \mathbb{P}^{n-1}_\infty(k)$ daki parçasına V nin $\mathbb{P}^{n-1}_\infty(k)$ ya göre afin parçası denir. $D(V)$ ile gösterilir.

Tanım 5.14 $q(X_1,\ldots,X_n) \in k[X_1,\ldots,X_n]$ homojen bir polinom olsun.
$q(X_1,\ldots,X_{i-1},1,X_{i+1},\ldots,X_n)$ polinomuna q polinomunun X_i ile dehomojenizasyonu denir ve $D_{X_i}(q)$, $D_i(q)$ ya da $D(q)$ ile gösterilir.

Lemma 5.15 $q_1,\ldots,q_r \in k[X_1,\ldots,X_{n+1}]$ homojen polinomları ve $V(q_1,\ldots,q_r) \subset \mathbb{P}^n(k)$ varyetesi verilsin. $D_i(V(q_1,\ldots,q_r)) = V(D_i(q_1),\ldots,D_i(q_r))$ dir.

Lemma 5.16 $p \in k[X_1,\ldots,X_n]$ homojen bir polinom olsun. $i = 1,\ldots,n$ olmak üzere $H_i(D_i(q)) \neq q$ olabilir.

Lemma 5.17 $\mathbb{P}^{n-1}_\infty(k)$, $\mathbb{P}^n(k)$ nın sonsuzda bir hiper düzlemi, $V \in k^n = \mathbb{P}^n(k) \setminus \mathbb{P}^{n-1}_\infty(k)$ olsun. $D(H(V)) = V$ dir. Fakat V, $\mathbb{P}^n(k)$ de bir varyete iken $H(D(V)) \neq V$ olabilir.

Tanım 5.18 $U^{\text{açık}} \in \mathbb{R}_{X_1,\ldots,X_n}$, $(a) = (a_1,\ldots,a_n) \in U$ ve $f : U \to \mathbb{R}_Y$ olsun.

$$\lim_{(x)\to(a)} \frac{f(x) - [f(a) + c_1(x_1 - a_1) + \ldots + c_n(x_n - a_n)]}{|x_1 - a_1| + \ldots + |x_n - a_n|} = 0$$

olacak şekilde $(a_1,\ldots,a_n, f(a))$ dan geçen bir $Y = f(a) + c_1(x_1 - a_1) + \ldots + c_n(x_n - a_n)$ reel n -düzlemi varsa f fonksiyonu (a) da diferansiyellenebilirdir denir. U nun her noktasında diferansiyellenebiliyorsa, U üzerinde diferansiyellenebilirdir denir.
$f = (f_1,\ldots,f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer her f_i, U nun o noktasında (U üzerinde) diferansiyellenebiliyor ise f, U nun bir noktasında (U üzerinde) diferansiyellenebilirdir denir.

Tanım 5.19 Eğer f_i nin tüm kısmi türevleri, $\frac{\partial^n f_i}{\partial X_{j_1} \ldots \partial X_{j_n}}$ var ve (a) da ya da U üzerinde sürekli ise, f, (a) da ya da U üzerinde düzgündür (smooth) denir.

Teorem 5.20 (Kapalı Kompleks Analitik Fonksiyon Teoremi)

i) kompleks değerli $f_1,\ldots,f_q$ fonksiyonları $(0) \in \mathbb{C}_{X_1,\ldots,X_n} = \mathbb{C}_X$ in bir komşuluğunda kompleks analitik

ii) $f_1(0) = \ldots = f_q(0) = 0$

iii)

$$J(f)_X = J(f_1,\ldots,f_q)_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

$q \times n$ Jakobiyen matrisinin (0) ın bir $\mathbb{C}^n$ -açık komşuluğunda rankı sabit r

olsun. (0) ın $U^{n-r} \subset \mathbb{C}^{n-r}$ ve $U^r \subset \mathbb{C}^r$ komşulukları vardır ve $U^{n-r} \times U^r$ de, grafiği, $\{f_1,\ldots,f_q\}$ nun sıfır kümesiyle çakışacak şekilde bir tek $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_r) : U^{n-r} \to U^r$ kompleks analitik fonksiyonu vardır.

Sonuç 5.21 $p(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ olsun. $p(0,0) = 0$ ve $p_Y(0,0) \neq 0$ sağlasın. $(0,0)$ ın bir komşuluğunda $p(x,y) = 0$ sağlayan noktalar $(0) \in \mathbb{C}_X$ de analitik bir $Y = \phi(X)$ fonksiyonun grafiği şeklindedir.

Sonuç 5.22 $C = V(p(X,Y))$ nin ya $p_X(x_0,y_0) \neq 0$ ya da $p_Y(x_0,y_0) \neq 0$ sağlayan bir (x_0,y_0) noktasında $C,$ analitik bir fonksiyonun yerel grafiğidir.

Lemma 5.23 $p(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y] \setminus \mathbb{C}$ olsun. $C = V(p(X,Y))$, $p_X(x_0,y_0) \neq 0$ ya da $p_Y(x_0,y_0) \neq 0$ sağlayan bir (x_0,y_0) noktasında bir reel analitik manifolddur.

Sonlu sayıdaki açık diskin her birinden bir nokta seçip, seçilen noktaları özdeşleştirerek topolojik uzay elde edebiliriz. Bu uzaya sonlu sayıdaki açık diskin tek nokta birleşimi denir.

Lemma 5.24 C, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de bir cebirsel eğri olsun.

i) C kompakttır.

ii) U_p, $P \in C$ nin bir komşuluğu olsun. Sonlu sayıdaki $P \in C$ hariç tüm P ler için yeterince küçük U_p için $C \cap U_p,$ topolojik olarak bir açık disktir.

iii) C nin geriye kalan noktalarında, yeterince küçük bir U_p için $C \cap U_p,$ sonlu sayıda açık diskin tek nokta birleşimidir.

(X,Y), $\mathbb{C}_{XY}$ de koordinatlar, $deg p(X,Y) = n$ ise
$p(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \ldots + a_n(X)$, $a_i(X) \in \mathbb{C}$ ve $deg a_i(X) \leq i$ ya da $a_i(X) = 0$ formunda olduğunu kabul ederek, bundan sonra aksi belirtilmedikçe bu şekilde kullanalım.

Lemma 5.25 D, UFD (Unique Factorization Domain) (Tek Şekilde Çarpanlara Ayrılabilen Bölge) olsun. $D[X]$ de iki polinom, $f(X) = a_0X^m + \cdots + a_m$, $g(X) = b_0X^n + \cdots + b_n$ ve a_0, b_0 dan en az birinin sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. $f(X)$ ve $g(X)$ in, sabit olmayan bir ortak çarpana sahip olması için gerek ve yeter koşul $fG = gF$, $deg F < m$ ve $deg G < n$ olmak üzere $F(X)$, $G(X) \in D[X]$ polinomlarının var olmasıdır.

Teorem 5.26 D, UFD olsun. $f(X) = a_0X^m + \cdots + a_m,$ $g(X) = b_0X^n + \cdots + b_n$, $D[X]$ de iki polinom ve $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ olsun. $f(X)$ ve $g(X)$ in sabit olmayan bir ortak çarpana sahip olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki determinantın sıfır olmasıdır.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & \\ & a_0 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \\ & \vdots & & & \vdots & \\ & & a_0 & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & \\ & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \\ & \vdots & & & \vdots & \\ & & b_0 & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Tanım 5.27 Yukarıdaki determinanta, f ve g nin resultantı denir, $\mathfrak{R}(f,g)$ ile gösterilir. $f' = \frac{df}{dX}$ olmak üzere $\mathfrak{R}(f,f')$ ye, f nin diskriminantı denir, $\mathfrak{D}(f)$ ile gösterilir. $\mathfrak{R}_{x_i}(f,g)$, f ve g nin X_i ye bağlı resultantını gösterir. $f \in D[X_1,\dots,X_t]$ olmak üzere $\mathfrak{R}_{X_i}(f,\frac{\partial f}{\partial X_i})$, f nin X_i ye bağlı diskriminantıdır ve $\mathfrak{D}_{X_i}(f)$ ile gösterilir. $f \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_t]$ ise $V(\mathfrak{D}_{X_i}(f)) \subset \mathbb{C}_{X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_t} = \mathbb{C}^{t-1}$ ye $\mathfrak{D}_{X_i}(f)$ nin diskriminant varyetesi denir.

Lemma 5.28 D, karakteristiği sıfır olan UFD olsun. $f \in D[X]$ sabit olmayan bir tekrarlayan çarpana sahip olması için gerek ve yeter koşul f ve f' nün ortak bir çarpanı olmasıdır. Böylece,

$$f\, nin\; bir\; tekrarlayan\; \text{çarpan}ı\; vardır \Leftrightarrow \mathfrak{D}(f) = 0$$

Lemma 5.29 $p(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ verilsin. $degp = n$ olsun. $p(x_0,y)$ nin n den daha az sıfırının olduğu $x_0 \in \mathbb{C}_X$ noktaları, tam olarak $\mathfrak{D}_Y(p) \in \mathbb{C}[X]$ polinomunun sıfırlarıdır.

Teorem 5.30 $p(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X)$, $a_i(X) \in \mathbb{C}$ $(n > 0)$, tekrarlayan çarpanı olmayan bir polinom olsun. $(x_0,y_0) \in C = V(p(X,Y)) \subset \mathbb{C}_{XY}$ ve U, (x_0,y_0) ın yeterince küçük bir komşuluğu olsun. C nin bu alt kümesi, N farklı nokta kümesi için S_j lerin birleşimidir. S_j ler, $Y_j = y_0 + a_{j1}(X-x_0)^{1/m_j} + a_{j2}(X-x_0)^{2/m_j} + \cdots$ kesirli kuvvet serisini sağlayan U daki noktaların kümesidir. ($m_1 + \cdots + m_N = r = p(x_0,Y)$ de y_0 sıfırının katlılığı) Yeterince küçük U için $i \neq j$ ise $S_i \cap S_j = \{(x_0,y_0)\}$ dir. (x_0,y_0) daki bazı U komşulukları için, her bir S_j bir diske homeomorftur.

Teorem 5.31 $a_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere tüm $\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i X^{i/n}$ kesirli kuvvet serilerinin kümesi $\mathbb{C}^*(X)$, cebirsel olarak kapalıdır.($i_0 \in \mathbb{Z}$ ve n rastgele fakat sabit bir pozitif tamsayı)

Sonuç 5.32 $p(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$, $degp = n$ ve p, Y de monik bir polinom olsun. Sabit bir $x_0 \in \mathbb{C}_X$ için,

$$p(X,Y) = \prod_{k=1}^{n}(Y - (\sum_{i}^{\infty} a_{ik}(X - x_0)^{i/m_k})) \tag{5.1}$$

dır.

Sonuç 5.33 $x_0 \in \mathbb{C}_X$ olsun. 5.1 deki her bir n serisi x_0 ın bir komuşuluğunda yakınsar.

Uygulama 1 $p(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ *indirgenemez polinomların çarpımı olsun.* $C = V(p) \in \mathbb{C}_{XY}$ *tek şekilde belirlidir.*

İspat: $p = p_1 \cdots p_r$ ve $q = q_1 \cdots q_s$ ve $p \neq q$ iken $C = V(p)$ ve $C = V(q)$ olduğunu kabul edelim. $V(p) = \bigcup_{i=1}^{r} V(p_i)$ ve $V(q) = \bigcup_{j=1}^{s} V(q_j)$ şeklinde yazılabilir. O zaman $\bigcup_{i=1}^{r} V(p_i) = V(q) = \bigcup_{j=1}^{s} V(q_j)$ olur , bu da $V(p_1) \subset V(q) = \bigcup_{j=1}^{s} V(q_j)$ olmasını gerektirir. $V(p_1) = \bigcup_{j=1}^{s}(V(p_1) \cap V(q_j))$ olduğundan, $V(p_1) \cap V(q_j)$ nin sonlu olduğu gösterilirse, $V(p_1)$ sonsuz olduğundan bir çelişki doğacak böylece C nin tek şekilde belli olduğu gösterilmiş olunacaktır.

$$p(X,Y) = a_0X^n + \cdots + a_n, \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in k[Y]$$

$$q(X,Y) = b_0X^n + \cdots + b_m, \qquad b_0, b_1, \ldots b_m \in k[Y]$$

indirgenemez iki farklı polinom olsun. $\Re(p,q) \neq 0$ dır. Öncelikle $V(p) \cap V(q)$ sonsuz ise $\Re(p,q) = 0$ olduğunu gösterelim. $V(p) \cap V(q)$ sonsuz olsun. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x_k, y_k) \in V(p) \cap V(q)$ farklı ikilileri vardır. $k \neq l$ iken $y_k \neq y_l$ varsayabiliriz. Bir $k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, y_k) \in V(p) \cap V(q)$ olsun.

$$
\begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\
 & a_0 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
 & & a_0 & \cdots & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & \\
 & b_0 & \cdots & b_{m-1} & b_m & \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
 & & b_0 & \cdots & \cdots & b_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U^{m+n-1} \\ U^{m+n-2} \\ \\ \vdots \\ \\ U^2 \\ U^1 \\ 1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
U^{m-1}p(U,Y) \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \\ q(U,Y)
\end{bmatrix}
$$

$$a_0U^{m+n-1}+a_1U^{m+n-2}+\cdots+a_nU^{m-1}=U^{m-1}(a_0U^n+a_1U^{n-1}+\cdots+a_n)$$

$$b_0U^{m+n-1}+b_1U^{m+n-2}+\cdots+b_mU^{n-1}=U^{n-1}(b_0U^m+b_1U^{m-1}+\cdots+b_m)$$

$P(U,Y)=a_0U^n+\cdots+a_n$ ve $q(U,Y)=b_0U^m+\cdots+b_m$ diyelim. $U=x_k$ varsayabiliriz.

$$
\begin{vmatrix}
a_0(y_k) & a_1(y_k) & \cdots & a_n(y_k) & & \\
 & a_0(y_k) & \cdots & a_{n-1}(y_k) & a_n(y_k) & \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
 & & a_0(y_k) & \cdots & \cdots & a_n(y_k) \\
b_0(y_k) & b_1(y_k) & \cdots & b_m(y_k) & & \\
 & b_0(y_k) & \cdots & b_{m-1}(y_k) & b_m(y_k) & \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
 & & b_0(y_k) & \cdots & \cdots & b_m(y_k)
\end{vmatrix}
=\Re(p,q)(y_k)
$$

$$\left|\begin{array}{cccccc}
a_0(y_k) & a_1(y_k) & \cdots & a_n(y_k) & & \\
 & a_0(y_k) & \cdots & a_{n-1}(y_k) & a_n(y_k) & \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
 & & a_0(y_k) & \cdots & \cdots & a_n(y_k) \\
b_0(y_k) & b_1(y_k) & \cdots & b_m(y_k) & & \\
 & b_0(y_k) & \cdots & b_{m-1}(y_k) & b_m(y_k) & \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
 & & b_0(y_k) & \cdots & \cdots & b_m(y_k)
\end{array}\right.\left[\begin{bmatrix} U^{m+n-1} \\ U^{m+n-2} \\ \\ \vdots \\ \\ U^2 \\ U^1 \\ 1 \end{bmatrix}\right. = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Re(p,q)(y_k) = 0$ Yani $\Re(p,q) = 0$ Dolayısıyla $V(p) \cap V(q)$ sonludur.

Disk ile $\mathbb{R}^2$ de açık diskin topolojik görüntüsünü, bağlantılı bileşen ile, o topolojik uzayın maksimal bağlantılı alt kümesini, yerel kompaktlık ile, uzaydaki her noktanın, kapanışı kompakt olan bir açık komşuluğu olmasını, topolojik 2 -manifold ile de her noktada bir açık komşuluğu bir disk olan Hausdorf uzayı kastedeceğiz.

Tanım 5.34 M, topolojik 2 -manifold ve A yerel kompakt topolojik uzay olsun. (A, M, π) örtüsünü ele alalım. Burada daha önce yapılan örtü tanımına göre, $|\pi^{-1}(p)| = s, \forall p \in M$ ise (A, M, π) s -katlı örtüdür denir. $p_1, p_2, \ldots, p_r$, M nin sonlu sayıda noktaları olsun.
$f : A \to M$ dönüşümü verilsin.

$$(A \setminus f^{-1}(\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}), M \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}, f|A \setminus f^{-1}(\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}))$$

bir örtü oluyorsa (A, M, f) ye neredeyse örtü (near covering) denir.

$\pi_B : A \times B \to A$, her $(a,b) \in A \times B$ için $\pi_B((a,b)) = a$ olarak tanımlayalım. Bu projeksiyona $A \times B$ nin A üzerinde B boyunca projeksiyonu denir.

Lemma 5.35 $p(X,Y)$ tekrarlayan çarpanı olmayan bir polinom olsun.

$$p(X,Y) = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X),\ a_i(X) \in \mathbb{C}[X],\ a_0 \neq 0,\ n \geq 1 \quad (5.2)$$

ise $(V(p), \mathbb{C}_X, \pi_Y)$ bir neredeyse n -katlı örtüdür.

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ nin bir sabit projektif 1 -alt uzayı olsun. $P_\infty \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ olsun. $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de P_∞ dan geçen her hangi iki doğru tam olarak P_∞ da kesişir, böylece $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus P_\infty$ da kesişimleri boş kümedir. Bu doğrular, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ yi farklı noktalarda keser. Dolayısıyla $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus P_\infty \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus P_\infty$ olmak üzere $\pi(Q)$, Q ve P_∞ dan geçen doğrunun $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ile kesişimi olarak tanımlı π projeksiyonu iyi tanımlıdır.

C, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de bir eğri olsun. Genelliği kaybetmeksizin Z de dehomojenizasyon ile C nin C_{XY} deki 5.2 polinomu ile tanımlı kapanışını kullanalım. Lemma 5.35 dan $(C \setminus \{\mathbb{P}_\infty\}, \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \pi)$ neredeyse n -katlı örtüdür.

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ nin $\mathbb{C}_X \in \mathbb{C}_{XY}$ yi içeren projektif 1 -alt uzayı ve P_∞, $\mathbb{C}_Y$ nin kapanışı ise yukarıda iyi tanımlı olduğu gösterilen π ile $(C \setminus \mathbb{P}_\infty, \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \pi)$ neredeyse n -katlı örtüdür.

C, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de bir eğri olsun. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ise C, ya $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ nin bir neredeyse n -katlı örtüsüdür ya da böyle bir örtünün tek-nokta kompaktlamasıdır.

Lemma 5.36 $p \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_r]$, m -inci dereceden homojen (ya da sıfır polinomu) olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{C}[T, X_0, \ldots, X_r]$ de $p(TX_0, \ldots, TX_r) = T^m p(X_0, \ldots, X_r)$ olmasıdır.

Teorem 5.37 p ve q, $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_r]$ de $deg p = m > 0$ ve $deg q = n > 0$ ile $i \geq 1$ ve her bir p_i, $q_i \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{r-1}]$ ya sıfır ya da i -inci dereceden homojen olmak üzere,

$$p(X_0, \ldots, X_r) = p_0 X_r^m + \cdots + p_m, \; m > 0, \, p_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$q(X_0, \ldots, X_r) = q_0 X_r^n + \cdots + q_n, \; n > 0, \, q_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

homojen polinomlar olsun. $\Re_{X_r}$ ya sıfır polinomudur ya da mn -inci dereceden homojendir.

Lemma 5.38 $p, q \in C[X_0, \ldots, X_r]\,(r \geq 2)$ sabit olmayan homojen polinomlar olsun. p ve q, $(0, \ldots, 0)$ dan farklı bir ortak sıfıra sahiptir.

Teorem 5.39 C_1 ve C_2, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de cebirsel eğriler olsun. $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ dir.

Uygulama 2 $\mathbb{C}^2$ *de indirgenemez bir eğrinin boş kümeden farklı bir öz alt varyetesi sonlu sayıda nokta içerir.*

İspat: $V(q_1, q_2, \ldots, q_r)$, $V(p)$ nin öz alt varyetesi olsun ve sonsuz sayıda nokta içerdiğini kabul edelim. $V(q_1, q_2, \ldots, q_r) \subsetneqq V(p)$ yazarız. q_i, $i = 1, \ldots, r$ olmak üzere indirgenemez polinomların çarpımı olarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}
V(q_1, q_2, \ldots, q_r) &= (V(q_{11}) \cup \ldots \cup V(q_{1m})) \cap \ldots \cap (V(q_{r1}) \cup \ldots \cup V(q_{rn})) \\
&= \bigcup_{i=1}^{m} V(q_{1i}) \cap \ldots \cap \bigcup_{j=1}^{n} V(q_{rj}) \\
&= \bigcup_{i=1,\, j=1}^{m,n} V(q_{1i}) \cap \ldots \cap V(q_{rj})
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Varsayımımızdan $V(q_{1i}) \cap \ldots \cap V(q_{rj})$ sonsuz noktaya sahiptir. Dolayısıyla $q_{1i} = \ldots = q_{rj}$ olmak zorunda kalır.

$$V(q_1, q_2, \ldots, q_r) = V(q_1)$$

yazabiliriz. $V(q_1)$ sonsuz sayıda nokta içerir ve $V(q_1) = V(q_1) \cap V(p)$ elde ederiz. Böylece $V(q_1, q_2, \ldots, q_r) = V(p)$ çelişkisi öz alt varyetenin sonlu sayıda nokta içerdiğini verir.

Tanım 5.40 $M \subset \mathbb{R}^n$ ve $Q \in M$ olsun. M, Q nun bir komşuluğunda, bir lineer koordinat seçimiyle düzgün (smooth) bir fonksiyonun grafiği ise, M, Q da düzgündür denir. Her $Q \in M$ için düzgünse, M düzgündür denir.

Tanım 5.41 C, $\mathbb{C}_{XY}$ de bir eğri ve $p \in \mathbb{C}[X, Y]$ tekrarlayan çarpanı olmayan bir polinom olmak üzere $C = V(p)$ olsun. $\frac{\partial p}{\partial X}(Q) = \frac{\partial p}{\partial Y}(Q) = 0$ ise $V(p)$, Q noktasında singülerdir, aksi halde nonsingülerdir denir. Q ya, C nin singüler (ya da nonsingüler) noktası denir.

Teorem 5.42 $p(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ tekrarlayan çarpanı olmayan ve derecesi n olan bir polinom olsun. $V(p) \subset \mathbb{C}_{XY}$ nin $Q \in V(p)$ de düzgün olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial p}{\partial X}(Q) \neq 0$ ve $\frac{\partial p}{\partial Y}(Q) \neq 0$ dan en az birinin sağlanmasıdır.

Tanım 5.43 C, $\mathbb{C}_{XY}$ de bir eğri olsun. Her $Q \in C$ noktası, C nin bir nonsingüler noktası ise C nonsingülerdir denir. $C, \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de bir eğri olsun. Her $Q \in \mathbb{C}$ için , C nin Q yu içeren bir afin temsilinde nonsingüler ise, $C,$ nonsingülerdir denir.

Uygulama 3 C_1, $C_2 \subset \mathbb{C}_{XY}$ *ortak bileşenleri olmayan eğriler olsun.* $C_1 \cap C_2$ *deki her nokta* $C_1 \cup C_2$ *de singülerdir.*

İspat: $p(X,Y)$, $q(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ ortak çarpanları olmayan polinomlar ve $C_1 = V(p)$, $C_2 = V(q)$ olsun. $Q \in C_1 \cap C_2$ alalım ve Q nun $C_1 \cup C_2$ de singüler olduğunu gösterelim. $Q \in C_1 \cap C_2 = V(p,q)$ olduğundan $p(Q) = q(Q) = 0$ dır. $C_1 \cup C_2 = V(p.q)$ olduğunu göz önünde tutarsak,

$$\frac{\partial(p.q)}{\partial X}(Q) = \frac{\partial p}{\partial X}(Q).q(Q) + p(Q).\frac{\partial q}{\partial X}(Q) = 0$$
$$\frac{\partial(p.q)}{\partial Y}(Q) = \frac{\partial p}{\partial Y}(Q).q(Q) + p(Q).\frac{\partial q}{\partial Y}(Q) = 0$$

olduğundan $Q, C_1 \cup C_2$ de singülerdir.

Uygulama 4 $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *nonsingüler ise,* C, $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ *de indirgenemez homojen bir polinomca tanımlanabilir.*

İspat: C, $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ de indirgenebilir homojen bir polinomca tanımlanabiliyorsa, $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de singüler olduğunu gösterelim. $p[X,Y,Z] \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ indirgenebilir bir polinom olsun. $p = p_1 \cdots p_s$ şeklinde indirgenemez polinomların çarpımı şeklinde yazılabilir.
$V(p) = V(p_1) \cup V(p_2 \cdots p_s)$ olur. $C_1 = V(p_1)$ ve $C_2 = V(p_2 \cdots p_s)$ diyelim. $Q \in C_1 \cap C_2$ olsun ve $p(X,Y,Z)$ yi Y de dehomojenize edelim, böylece $Q = [Z_1, 1, Z_3]$ olur. Eğer $V(D(p_1)) \cap V(D(p_2)) \cap \cdots \cap V(D(p_s))$ nin sonlu olduğunu gösterebilirsek C nin singüler olduğu görülür. Sonsuz olduğunu kabul edelim.
O zaman $\Re(D(p_1), D(p_2) \cdots D(p_s)) = 0$ dır.

$\exists k(X,Z)$ vardır öyle ki $k(X,Z)|D(p_1)$ ve $k(X,Z)|D(p_2)\cdots D(p_s)$ dir.
$V(D(p_1)) \subset V(p_1)$ ve $V(D(p_2)\cdots D(p_s)) \subset V(p_1\cdots p_s)$ olduğundan
$H_Y(k(X,Z))|p_1$ ve $H_Y(k(X,Z))|p_2\cdots p_s$ dir. $H_Y(k(X,Z)) = p_1$ olur. $p_1|p_2\cdots p_s$ çelişkisi ispatı tamamlar.

Tanım 5.44 X topolojik uzayının bir alt kümesi A verilsin. $A,$ boş olmayan, ayrık, açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, $A,$ bağlantılıdır denir.

Lemma 5.45 Eğer X topolojik uzayı yol bağlantılı ise bağlantılıdır.

Lemma 5.46 $A \subset X$ bağlantılı ve $B \subset X$ bağlantılı olsun. $A \cap B \neq \emptyset$ ise $A \cup B$ bağlantılıdır.

Lemma 5.47 $A \subset X$ bağlantılı olsun. $\overline{A}$ da bağlantılıdır.

Teorem 5.48 Bir kompleks cebirsel eğri $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ bağlantılıdır.

$C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ cebirsel eğrisini $V(q(X,Y,Z)) \subset \mathbb{C}_{XYZ}$ homojen varyetesiyle tanımlayalım. Eğer $q = q_1^{r_1}\ldots q_k^{r_k}$ ise $V(q) = V(q_1)\cup\ldots V(q_k)$ olacağından $j = 1,2,\ldots,k$ olmak üzere $V(q_i)$ ile tanımlı her bir C_i projektif eğrisi bağlantılı ise Lemma 5.46 dan C nin bağlantılı olacağı görülür. Dolayısıyla C nin bağlantılı olduğunu göstermek için C_i nin bağlantılı olduğunu göstermek yeterlidir.

$q(X,Y,Z)$ polinomu indirgenemez polinom ve $C = V(q(X,Y,Z))$ olsun. Genelliği kaybetmeksizin Z de dehomojenize edersek, q indirgenemez polinom olduğundan Lemma 5.24 ten C nin izole noktası yoktur. $C = \overline{V(q(X,Y,1))}$ dir. Böylece Lemma 5.47 kullanarak, $V(q(X,Y,1)) \subseteq \mathbb{C}_{XY}$ bağlantılı ise C nin bağlantılı olduğunu söyleyebiliriz. $\mathbb{C}_{XY}$ de bir lineer koordinat değişikliğiyle q polinomunun Y de monik olduğunu varsayabiliriz. Böylece Teorem 5.48 ispatlamak için aşağıdaki teoremi ispatlamamız yeterlidir.

Teorem 5.49 $p(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) \in \mathbb{C}(X,Y),\ (n \geq 1)$ indirgenemez olsun. $V(p) \subset \mathbb{C}_{XY}$ bağlantılıdır.

İspat için stratejimiz, özel sonlu bir küme $\{P_i\}$ için $V(p)\setminus\{P_i\}$ nin bağlantılı olduğunu göstermek olacak. Böylece kapanış $V(p)\subset\mathbb{C}_{XY}$ de Lemma 5.47 den bağlantılı olacak. $V(p)\setminus\{P_i\}$ nin bağlantılı olmadığını varsayıp, yol bileşenlerinden elde edeceğimiz, p ile sabit olmayan bir ortak çarpanı olan ve Y ye göre derecesi n den az olan $\phi\in\mathbb{C}[X,Y]$ polinomunun, p ile sabit olmayan bir ortak çarpanı olmasının, p nin indirgenemez bir polinom olmasıyla çelişkisinden yararlanacağız.

Teorem 5.50 (Riemann Genişleme Teoremi) $\emptyset\neq\Omega\subset\mathbb{C}$, $c\in\Omega$ olsun. $h(X)$, $\Omega\setminus\{c\}$ nin her noktasında tek değerli ve analitik olsun. Eğer h, c de sınırlı ise, h, Ω üzerinde analitik bir foksiyona tek şekilde genişletilebilir.

Tanım 5.51 (A,M,π) bir örtü olsun. Eğer $i:\vartheta\to M$ içerme dönüşümü olmak üzere $\pi f=i$ olacak şekilde $f:\vartheta\to A$ döşümü varsa $\vartheta^{\text{açık}}\subset M$, A ya yükseltilebilirdir denir . $f(\vartheta)$ ya ϑ nın yükseltmesi denir. $Q\in f(\vartheta)$ ise $f(\vartheta)$ ya Q da bir yükseltme denir.

Tanım 5.52 $U^{\text{açık}}\subset\mathbb{C}$ olsun. U da bir poligon, $(P_0,\ldots,P_r)$ sıralı sonlu noktayı bağlayan $P_i\neq P_{i+1}$ olmak üzere $\overline{P_iP_{i+1}}\subset U$ kapalı doğru parçalarının birleşimidir.

Örnek 5.53 $\mathbb{C}$ basit bağlantılıdır. Φ, bir kendi kendini kesmeyen, $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ de sonsuza giden bir poligon olmak üzere $\mathbb{C}\setminus\Phi$ basit bağlantılıdır. $\mathbb{C}\setminus(negatif\ olmayan\ reel\ eksen)$ basit bağlantılıdır.

Lemma 5.54 $(V(p)\setminus\pi^{-1}(\mathfrak{D}),\mathbb{C}\setminus\mathfrak{D},\pi_Y)$ örtüsünü ele alalım. $W\subset\mathbb{C}\setminus\mathfrak{D}$ açık, basit bağlantılı alt küme olsun. W, $\pi^{-1}(W)$ nun her noktasına yükseltilebilirdir.

İspat: $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{D}$ manifold ve W basit bağlantılı ve açık alt kümesi olduğundan yerel yol bağlantılıdır böylece yükseltme kriterinden aşağıdaki diyagramdan da görülebileceği gibi $Q\in f(W)$ olacak şekilde f dönüşümü vardır. Dolayısıyla W, $\pi^{-1}(W)$ nun her noktasına yükseltilebilirdir.

$$\begin{tikzcd} & (V(p)\setminus\pi^{-1}(\mathfrak{D}),Q) \arrow[d, "\pi"] \\ (W,\pi(Q)) \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"'] & (\mathbb{C}\setminus\mathfrak{D},\pi(Q)) \end{tikzcd}$$

$\vartheta^{\text{açık}} \subset \mathbb{C} \setminus \mathfrak{D}$ iken ϑ nin yükseltmesini $\widetilde{\vartheta}$ ile gösterelim.
O zaman $x \in \vartheta$ için $f : \vartheta \to \mathbb{C},\ f(x) = \pi_X(\pi_Y^{-1}(x))$ ile tanımlı $f,$ analitik fonksiyondur ve $\widetilde{\vartheta},\ f$ nin grafiğidir.
İspat: Diskriminant varyetesi $\mathfrak{D} = V(\mathfrak{D}_Y(p(X,Y))) \subset \mathbb{C}_X$ olsun. $p(X,Y)$ indirgenemez olduğundan $\mathfrak{D},$ sıfırdan farklı bir polinomdur ve sonlu sayıda sıfırı vardır.
$(V(p) \setminus \pi^{-1}(\mathfrak{D}), \mathbb{C} \setminus \mathfrak{D}, \pi_Y)$ n -katlı örtüyü ele alalım. Böylece daha önce bahsedilen $\{P_i\}$ kümesi, $\pi^{-1}(\mathfrak{D})$ kümesi olacaktır.

$V(p) \setminus \pi^{-1}(\mathfrak{D})$ bağlantılı olmasın. $E_1, \ldots, E_k,\ V(p) \setminus \pi^{-1}(\mathfrak{D})$ nin boş kümeden farklı yol bileşenleri olmak üzere, $V(p) \setminus \pi^{-1}(\mathfrak{D}) = E_1 \cup \cdots \cup E_k$ dir. $Q \in V(p) \setminus \pi^{-1}(\mathfrak{D})$ alalım. Bu yol bileşenlerinden bir tanesi E olsun. $(E, \mathbb{C} \setminus \mathfrak{D}, \pi)$ katlılığı n den az olan bir örtüdür. Örtü olduğunu göstermek için π nin örten olduğunu göstermek yeterlidir. $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{D}$ de bir α eğrisi , $\alpha : I \to \mathbb{C} \setminus \mathfrak{D},\ \alpha(0) = x$ olsun. $(V(p) \setminus \pi^{-1}(\mathfrak{D}), \mathbb{C} \setminus \mathfrak{D}, \pi_Y)$ örtü ve E boş kümeden farklı bir yol bileşeni (bağlantılı) olduğundan α nın yükseltmesi E içinde kalmak zorundadır. Dolayısıyla π örtendir. $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{D}$ de bir düzgün örtülmüş (evenly covered), diske homeomorf bir komşuluk alırsak, ters görüntüsü $V(p) \setminus \pi^{-1}(\mathfrak{D})$ de n tane ayrık diskin birleşimidir ve E_i yol bileşenlerinin her biri boş kümeden farklı olduklarından bu disklerden en az birini içerir. Hatta $(E, \mathbb{C} \setminus \mathfrak{D}, \pi)$ nin katlılığı, n-den, tam olarak, diğer E_i yol bileşenlerindeki ters görüntü disklerinin sayısı kadar az olur.

$\mathfrak{D}$ nin sonlu sayıdaki noktaları ile $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ nin noktalarını birleştiren ve kendi kendini kesmeyen $\mathbb{C}$ de bir Φ poligonu seçelim. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \Phi$ basit bağlantılıdır. $\mathbb{C} \setminus \Phi$ basit bağlantılı olduğundan $(V(p) \setminus \pi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \Phi), \mathbb{C} \setminus \Phi, \pi),\ n$ -katlı bir örtüdür ve $\mathbb{C} \setminus \Phi$, $\pi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathfrak{D})$ nin her noktasına yükseltilebilirdir. $(V(p) \setminus \pi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \Phi), \mathbb{C} \setminus \Phi, \pi),\ n$ -katlı bir örtü olduğundan bu yükseltmeler, $i = 1, \ldots, n$ için $f_i : \mathbb{C} \setminus \Phi \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonlarının grafikleridir. Bunları F_i ler ile gösterelim. $V(p) \setminus \pi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \Phi) = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ olur, burada F_i ler açık ve bağlantılıdır.

$(E,\mathbb{C}\setminus\mathfrak{D},\pi)$ m -katlı örtüsü F_i lerden bazılarını kesecektir (Hepsini birden kesemez, öyle olsaydı $V(p)\setminus\pi^{-1}(\mathfrak{D})$ bağlantılı olurdu). $m<n$ olmak üzere m tanesini kestiğini varsayalım ve bunları $F_1,\dots,F_m$ ile gösterelim. $\phi\subset\mathbb{C}[X,Y]$, $m<n$ ile $F_1,\dots,F_m$ lerin tümü üzerinde sıfır olan bir polinom olsun. $\mathbb{C}\setminus\Phi$ nin her bir noktasında $\Re_Y(p,\phi)\in\mathbb{C}[X]$ sıfırdır. Böylece kendisi sıfır polinomu olmak zorunda kalır. Dolayısıyla p ve ϕ nin ortak, sabit olmayan çarpanı vardır. p indirgenemez olduğundan ϕ nin bir çarpanı olur ve Y de $deg\phi\geq n$ elde edilir. ϕ yi Y de $deg\phi<n$ olacak şekilde inşa ederek çelişki elde edeceğiz. Bunun için
$\mathbb{C}$ -değerli $(\mathbb{C}_X\setminus\Phi)\times\mathbb{C}_Y$ de tanımlı $(Y-f_1)\cdots(Y-f_m)$
fonksiyonunu düşünelim. Katsayıları $f_1,\dots,f_m$ nin simetrik fonksiyonlarıdır. Bu katsayılara,

$$\begin{aligned}
\sigma_0(X) &= 1\\
\sigma_1(X) &= -(f_1(X)+\cdots+f_m(X))\\
\sigma_2(X) &= f_1(X)\cdot f_2(X)+\cdots+f_{m-1}(X)\cdot f_m(X)\\
\vdots &= \vdots\\
\sigma_m(X) &= (-1)^m\cdot f_1(X)\cdots f_m(X)
\end{aligned}$$

diyelim. f_i ler analitik olduğundan σ_i ler $\mathbb{C}\setminus\Phi$ nin her noktasında analitiktir. $Q\in\mathbb{C}\setminus\mathfrak{D}$ olsun. Q nun üzerinde $\overline{F_1},\dots,\overline{F_m}$ nin m farklı noktası vardır ve bu noktalardan geçen yükseltmelerin grafiği oldukları analitik fonksiyonlarının simetrik fonksiyonları Q yakınlarında σ_i ile çakışır. Bu şekilde σ_i fonksiyonları $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{D}$ üzerinde analitik fonksiyonlara genişletilebilir. Her bir σ_i tek değerli ve $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{D}$ de analitiktir. $p(X,Y)=Y_n+a_1(X)Y^{n-1}+\cdots+a_n(X)$ idi. $Q\in\mathfrak{D}$ yakınlarındaki her x_0 için $p(x_0,Y)=Y^n+a_1(x_0)Y^{n-1}+\cdots+a_n(x_0)$ olur. $p(x_0,Y)=0$ iken $\sigma_1(x_0)=a_1(x_0)$, $\sigma_2(x_0)=a_2(x_0)\dots$ olduğundan σ_i, $\mathfrak{D}$ de sınırlıdır. σ_i, $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{D}$ de tek değerli, analitik ve $\mathfrak{D}$ de sınırlı olduğundan Riemann genişleme teoreminden $\mathbb{C}$ de analitiktir.

$$\sigma_i(X)=\sum_j c_{ij}X^j \tag{5.3}$$

kuvvet serisini yazalım. Sıfır olmayan X' için $X = \frac{1}{X'}$ yazalım. Sonsuzdaki singülerliği inceleyelim.

$$\sigma_i(\frac{1}{X'}) = \sum_j c_{ij} \frac{1}{(X')^j} \tag{5.4}$$

$\max_i(\deg a_i) = M$ olsun.

$$p(X',Y) = Y_n + a_1(\frac{1}{X'})Y^{n-1} + \cdots + a_n(\frac{1}{X'}) = 0$$

eşitliğinin her iki tarafını $(X')^{Mn}$ ile çarparsak,

$$P(X',X'^M Y) = (X'^M Y)^n + b_1(X')(X'^M Y)^{n-1} + \cdots + b_n(X') = 0$$

burada her b_i, X' nün bir polinomudur. $P(X',X'^M Y)$ polinomu, $X'^M Y$ ye göre monik bir polinom olduğundan Teorem 5.30 dan $(X' = 0, X'^M Y = 0)$ da çözümler, sonlu sayıda kesirli-kuvvet serilerince verilir. $(X'^M Y)_j = (X' \, de \, bir \, kesirli - kuvvet \, serisi)$ olur. teorem 5.30 ile

$$(X'^M Y)_j = a_{1j}(X')^{\frac{1}{m_j}} + a_{2j}(X')^{\frac{1}{m_j}} + \cdots$$

yazılır ve iki tarafı $(X')^{-M}$ ile çarpılırsa

$$(Y)_j = a_{1j}(X')^{\frac{1}{m_j}}.(X')^{-M} + \cdots$$

olur. Dolayısıyla her bir Y_j, sonlu sayıda negatif-kuvvetli terimle bir kesirli-kuvvet serisidir.

$$\begin{aligned} p(X',Y) &= \prod_{j=1}^{n}(Y - Y_j) \\ p(X',Y) &= (Y - (a_{11}(X')^{\frac{1}{m_1}})(X')^{-M} + \cdots) \cdots (Y - (a_{1n}(X')^{\frac{1}{m_n}})(X')^{-M} + \cdots) \end{aligned}$$

Böylece Y nin katsayıları olan σ_i ler de sadece sonlu sayıda negatif-kuvvetli terimlere sahiptir. Böylece 5.4 deki c_{ij} katsayılarının sonlu tanesi hariç sıfırdır. O halde 5.3 sonludur. $\sigma_i(X)$ ler, sonsuzda kutba sahip olduklarından her $\sigma_i(X)$, $\mathbb{C}[X]$ dedir ve

$$\phi(X,Y) = Y^m + \sigma_1(X)Y^{m-1} + \cdots + \sigma_m(X), \; deg\phi = m < n$$

ile birlikte $F_1 \cup \cdots \cup F_m$ de sıfır olan polinomu elde etmiş oluruz.

Tanım 5.55 $v_1 = (a_{11}, a_{12})$, $v_2 = (a_{21}, a_{22})$ ve $A = (a_{ij})$ olmak üzere (v_1, v_2), $\mathbb{R}^2$ nin sıralı bir bazı olsun. (v_1, v_2), $detA$ pozitif ise pozitif bir yönlendirme, $detA$ negatifse negatif bir yönlendirme tanımlar.

$(0,0) \in \mathbb{R}_{X_1X_2}$ noktasının açık komşulukları U, U' ve $\phi : U \to U'$, $i = 1,2$ için ϕ_i düzgün (smooth) ve $\phi_i(0,0) = 0$ olan, $X_i' = \phi_i(X_1, X_2)$ reel değerli fonksiyonunca verilen düzgün bir dönüşüm olsun. ϕ düzgün olduğundan

$$X_i' = 0 + \frac{\partial \phi_i}{\partial X_1}(0)X_1 + \frac{\partial \phi_i}{\partial X_2}(0)X_2$$

reel 2 -düzlemi vardır.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial X_2} \end{pmatrix}_{(X_1,X_2)=(0,0)} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = J_\phi(0,0) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = (X_1', X_2')$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım 5.56 U, U', $\mathbb{R}_{X_1X_2}$ de açık kümeler olsun. Eğer $det(\frac{\partial \phi_i}{\partial X_j})_{X=x} = det J_\phi(x) > 0$ ise düzgün $\phi = (\phi_1, \phi_2) : U \to U'$, $(x) = (x_1, x_2) \in U$ da yön koruyandır, eğer $det J_\phi(x) < 0$ ise ϕ yön değiştirendir. Her $x \in U$ için $det J_\phi(x) > 0$ ise ϕ yön koruyandır.

Tanım 5.57 M, reel 2 -manifold olsun. $\{U_\alpha\}, M$ nin açık örtüsü olsun. $\phi_\alpha : U \to U_\alpha$, ($U$, $\mathbb{R}^2$ nin açık alt kümesi) homeomorfizm olmak üzere her bir

$$\phi_\beta^{-1}\phi_\alpha : \phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

homeomorfizmi düzgün ise M ye düzgün reel 2 -manifold denir. Eğer her bir $\phi_\beta^{-1}\phi_\alpha$ yön koruyansa yani her $x \in \phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ için $det J_{\phi_\beta^{-1}\phi_\alpha}(x) > 0$ oluyorsa, M yönlendirilebilirdir denir.

Lemma 5.58 $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ve $\{P_i\}$, C nin (sonlu) singüler noktaları olsun. $C \setminus \{P_i\}$, bir yönlendirilebilir reel 2 -manifolddur.

Sonuç 5.59 $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ nonsingüler ise yönlendirilebilirdir.

Q, topolojik singüler nokta olsun. Diğer bir deyişle, sonlu sayıdaki diskin tek nokta birleşimi olsun. Q nun, $U(Q) \cap C$ en az iki diskin tek nokta birleşimi olacak şekilde $U(Q)$ komşuluğu vardır. Böylece $U(Q) \cap (C \setminus \{Q\})$, sonlu sayıda delinmiş disklerin ,$\Delta_i \setminus Q$, birleşiminden oluşur. Bu disklerin her birine P_i noktası ekleyelim. Bu işlem disklerin tek nokta birleşimini ayrık disklere ayırır ve bu yeni topolojik uzay bir manifolddur. Bu manifoldun, sonlu sayıda P_i noktaları dışında yönlendirilebilir olduğunu biliyoruz. Bu yönlendirmeyi M nin tamamına genişletebiliriz. Yani $M \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ yönlendirilebilir ise M yönlendirilebilirdir.

C nin sonlu sayıdaki noktaya sonlu sayıda nokta özdeşleştirerek bir kompakt bağlantılı yönlendirilebilir 2 -manifold elde edildiğini biliyoruz. M bağlantılı olduğundan yönlendirme bir P noktasında ne ise diğer noktalarda da aynıdır. Bu nedenle P_i lerden bir tanesi için bunu göstermek yeterli olacaktır. P_i lerden bir tanesini seçelim ve kısaca P ile gösterelim. M manifold olduğundan P nin bir Δ disk komşuluğunu düşünelim. Δ bir disk olduğundan yönlendirilebilirdir ve bağlantılı olduğundan iki farklı yönlendirmesi vardır. $M \setminus \{P\}$ yönlendirilebilirdir bağlantılı olduğundan ve iki farklı yönlendirmesi vardır. Δ nın bir yönlendirmesi $M \setminus \{P\}$ deki bu yönlendirme ile çakışır. Dolayısıyla $M \setminus \{P\}$ deki bu yönlendirme P ye de genişletilebilir.

İndirgenemez $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ eğrisi nonsingüler ise bir kompakt bağlantılı yönlendirilebilir 2 -manifolddur. Bu manifoldlar için temel bir sınıflandırma teoremi vardır.

$C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ nonsingüler olsun. $p(X,Y) \subset \mathbb{C}[X,Y]$ ile ya da homojenizasyonu $H_Z(p) = q(X,Y,Z)$ ile tanımlansın. C nin topolojisi p ya da q ile belirlidir.

$C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ nonsingüler ise C nin $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ de indirgenemez bir polinom ile tanımlanabilir olduğunu hatırlayalım.

Tanım 5.60 f, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}_{X_1,\ldots,X_n}$ de kompleks analitik bir fonksiyon olsun. Eğer a_i de, $f(a_1, \ldots a_{i-1}, X_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ nin derecesi s ise $(a_1, \ldots, a_n)$ noktasında X_i de f nin derecesi s dir deriz. $\Delta_i \subset \mathbb{C}_{X_i}$ disklerinin $\mathbb{C}_{X_1,\ldots,X_n}$ de bir çarpımı $\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$ ye bir polidisk denir.

Lemma 5.61 $f : \mathbb{C}_{X_1,\ldots,X_n} \to \mathbb{C}$ ye $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de kompleks analitik bir fonksiyon olsun ve a noktasında X_i de f nin derecesinin s olduğunu varsayalım. O zaman Δ_i ler $\mathbb{C}_{X_i}$ de a_i merkezli açık diskler ve f, Δ de analitik,

$(a'_1, \ldots, a'_{i-1}, a'_{i+1}, \ldots, a'_n) \in \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_{i-1} \times \Delta_{i+1} \times \cdots \times \Delta_n$
$f(a'_1, \ldots, a'_{i-1}, a'_{i+1}, \ldots, a'_n) : \mathbb{C}_{X_i} \to \mathbb{C}$
ye Δ_i de tam olarak s sıfırı olacak şekilde a da açık $\Delta(a) = \Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$ polidiski vardır.

Tanım 5.62 M kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilir reel 2 -manifold olsun. Sonlu sayıda kapalı kümeler $\{S_1, \ldots S_n\}$, M nin bir örtüsü olsun. Her bir T_i, $\mathbb{R}^2$ de kapalı üçgenler ve $S_i \leftrightarrow T_i$ homeomorfizm olsun. S_i nin T_i üçgeninin içine homeomorfik alt kümesine polihedronun yüzü, kenarlarına homeomorfik alt kümesine polihedronun kenarı ve köşelerine homeomorfik alt kümesine polihedronun köşesi denir. Her hangi farklı iki S_i, S_j ayrık olmalı ve tam olarak bir köşeleri ya da tam olarak bir kenarları (iki köşeyle beraber) ortak olmalı. Bu durumda köşe ve kenarlarının kümesi bağlantılıdır.

Lemma 5.63 M polihedronunun V tane köşesi, E tane kenarı ve F tane yüzü olsun. M nin cins sayısı (genus) g ($2g = rank(H_1(M,\mathbb{Z})$ dir) olsun. O zaman $V - E + F = 2 - 2g$ dir. Bu eşitlik $g = 1 - \frac{1}{2}(V - E + F))$ olarak da yazılır.

Teorem 5.64 (Cins Sayısı(Genus) Formülü)$C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $p(X,Y,Z)$ indirgenemez homojen polinomuyla tanımlı, nonsingüler bir projektif eğri olsun. $\deg p = n$ ise C nin cinsi
$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dir.

İspat: $(C \setminus P_\infty, \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \pi)$ neredeyse n -katlı örtüsününde $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ yi, örtünün diskriminant noktalarının kümesini köşe kabul eden bir polihedron olarak düşüneceğiz. Bu polihedronun her bir yüz, kenar ve köşesinin üstünde n tane yüz, n tane kenar ve (n tane köşeden daha az olan diskriminant noktaları üzerindekiler hariç) n tane köşe vardır. Diskriminantın bazı özelliklerini kullanarak köşe sayısının kaç tane eksildiğini tespit edip, g yi hesaplayacağız.

Örtünün diskriminant noktalarının, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ polihedronunun köşelerinin sonlu bir kümesince içerildiğini varsayabiliriz. (Eğer $\{a_1, a_2, \ldots\}$ yüzlerdeki diskriminant noktalarının kümesi ise, her bir a_i yi köşelere birleştirerek, oluşan yeni kenarların diğer a_i

lerden geçmemesini sağlayabiliriz ve bu işlemi her bir a_i için yaptığımızda tüm diskriminant noktalarını polihedronun birer köşesi yapmış oluruz.) $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ nin bir f yüzü ve bir e kenarı için $\pi_Y^{-1}(f)$ ve $\pi_Y^{-1}(e)$, sırasıyla n tane yüz ve n tane kenar içerir. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ nin bir köşesi v için, $\pi_Y^{-1}(v)$, v diskriminant noktası değilse, n tane, diskriminant noktası ise n den daha az köşe içerir. v nin üzerinde C deki ayrık noktaların sayısı $n-m$ ise bu, m nokta kaybettiğimizi gösterir. Eğer bu şekilde kaç nokta kaybettiğimizi bilirsek C nin cinsini hesaplayabiliriz.

V, E, F sırasıyla $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ nin köşe, kenar ve yüz sayısı olsun. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ için $g = 0$ olduğundan $V - E + F = 2$ dir. C nin kenarlarının sayısı nE ve yüzlerinin sayısı nF , köşelerinin sayısı $nV - n(n-1)$ dir. Böylece C nin cinsi;

$$\begin{aligned}
g &= 1 - \tfrac{1}{2}(nV - n(n-1) - nE + nF) \\
g &= \frac{2 - n(V - E + F) + n^2 - n}{2} \\
g &= \frac{n^2 - 3n + 2}{2} \\
g &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}
\end{aligned}$$

olur. Köşe sayısındaki azalmanın $n(n-1)$ olduğunun ispatı için [Kendig, Keith, Elementary Algebraic Geometry, Chapter II] bakınız.

KAYNAKLAR

DOLD, A., 1980. Lectures on Algebraic Topology. Springer-Verlag, New York, 377

GREENBERG, M. J., HARPER, J. R., 1981. Algebraic Topology:A First Course. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Canada,322

KENDIG, K., 1977. Elementary Algebraic Geometry. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin 301

ROTMAN, J. J., 1988. An Introduction to Algebraic Topology. Springer-Verlag, New York, 436

SPANIER, E., 1966 Algebraic Topology. McGraw-Hill,New York, 528

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Adana'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Adana'nın İmamoğlu ilçesinde, lise öğrenimimi Adana merkezde tamamladım. 1999 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdim. 1999-2000 eğitim-öğretim yılında İngilizce hazırlık sınıfının ardından Lisans öğrenimine başladım. 2004 yılında lisans öğrenimimi tamamlayıp aynı yıl Yüksek Lisans programına başladım. Y. Lisans eğitimim süresince TÜBİTAK yurt içi bursu ile desteklendim.