

**SONLU ELEMANLAR METODUNUN  
DİKDÖRTGEN KESİTLİ DALGA KILAVUZLARINA  
UYGULANMASI**

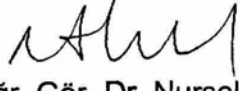
**Berna GÜNEŞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**


**MAYIS 2006  
ANKARA**

Berna GÜNEŞ tarafından hazırlanan SONLU ELEMENLAR METODUNUN DİKDÖRTGEN KESİTLİ DALGA KILAVUZLARINA UYGULANMASI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

  
Öğr. Gör. Dr. Nursel AKÇAM  
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. M. Cengiz TAPLAMACIOĞLU



Üye : Doç. Dr. Osman GÜRDAL

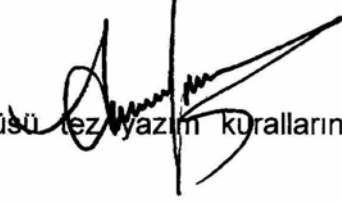


Üye : Öğr. Gör. Dr. Nursel AKÇAM



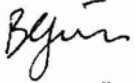
Tarih : 27 / 04 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

  
Berna GÜNEŞ

**SONLU ELEMANLAR METODUNUN  
DİKDÖRTGEN KESİTLİ DALGA KILAVUZLARINA UYGULANMASI  
(Yüksek Lisans Tezi)**

**Berna GÜNEŞ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
Mayıs 2006**

**ÖZET**

**Bu çalışmada öncelikle sonlu elemanlar metodu tanımlanmış, özellikleri ve temel kavramları ele alınmıştır. Çalışmanın ikinci kısmında dalga kılavuzu yapıları incelenip, dikdörtgen yapılar için alan ifadeleri ile kesim frekansı, kesim dalga sayısı, empedans gibi çeşitli parametrelerin elde edilmesi gösterilmiştir. Ayrıca homojen dalga kılavuzları ile homojen olmayan ve dielektrik maddelerle doldurulmuş kılavuzlar için skaler ifadeler üretilmiştir. Bu ifadelerden yola çıkılarak, çözüm yöntemi için bilgisayar programları geliştirilerek uygulanmış; elde edilen değerler, analitik değerler ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, nümerik ve analitik değerlerin belirli bir hata oranı dahilinde uyumlu olduğu gözlenmiştir.**

**Bilim Kodu : 905.1.034  
Anahtar Kelimeler : Sonlu elemanlar metodu, dalga kılavuzları  
Sayfa Adedi : 93  
Tez Yöneticisi : Öğr. Gör. Dr. Nursel AKÇAM**

**APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD  
TO RECTANGULAR WAVEGUIDES**

**(M.Sc. Thesis)**

**Berna GÜNEŞ**

**GAZİ UNIVERSITY  
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**May 2006**

**ABSTRACT**

In this study, first of all finite element method has been described. Properties and the basic concept of the method has been examined. In the second part of the study, the structure of the waveguides has been expressed and for rectangular structures derivation of field expressions, cut off frequency, wave number and the impedance has been pointed out. Also scalar formulation for homogeneous and inhomogeneous and waveguides have been produced. The computer programmes have been applied for the expressions and the obtained values were compared with analytical values. As a result of this comparison, the numerical values and the analytical values are close to each other.

**Science Code : 905.1.034**  
**Key Words : Finite elements mehod, waveguides**  
**Page Number : 93**  
**Adviser : Öğr. Dr. Nursel AKÇAM**

## TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla ben yönlendiren Hocam Dr. Nursel AKÇAM'a yine kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Yrd. Doç. Dr. Cem NAKİBOĞLU'na ve Dr. Cevat GÖKÇEK'e, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli arkadaşım Yasemin ANAYURT'a teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. SONLU ELEMANLAR METODU.....	3
2.1. Sonlu Elemanlar Metodunun Özellikleri.....	3
2.1.1. Sonlu elemanlara ayırmak.....	5
2.2. Metodun Problemlere Uygulanması.....	7
2.2.1. Bir boyutlu elektrostatik problemi.....	7
2.2.2. Elemanlara ayırma.....	8
2.3. 2 Boyutlu Sonlu Elemanlar Analizi.....	12
2.4. Tüm Elemanların Birleştirilmesi.....	17
3. DALGA KILAVUZLARI.....	28
3.1. Dalga Kılavuzlarına Giriş.....	28
3.2. Dikdörtgen Kesitli Dalga Kılavuzları .....	29
3.2.1. TM (enine manyetik) modlar .....	33
3.2.2. TE (enine elektrik) modlar.....	44
4. DALGA KILAVUZLARI İÇİN SKALER İFADELER.....	50

	<b>Sayfa</b>
4.1. Homojen Dalga Kılavuzları.....	50
4.2. Homojen Olmayan Dalga Kılavuzları.....	61
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	77
KAYNAKLAR.....	79
EKLER.....	81
EK-1 Bilgisayar programlarının açıklaması.....	82
EK-2 Green Fonksiyonları.....	83
EK-3 Varyasyonel formülasyon.....	90
ÖZGEÇMİŞ.....	93

## ÇİZELGELERİN LİSTESİ

<b>Çizelge</b>	<b>Sayfa</b>
Çizelge 4.1. Eleman nokta bağlantısı.....	55
Çizelge 4.2. Kare dalga kılavuzu $TM_{11}$ modunda en küçük dalga sayısı.....	56
Çizelge 4.3. Dikdörtgen dalga kılavuzu için en küçük dalga sayısı.....	56
Çizelge 4.4. Dikdörtgen dalga kılavuzu için çeşitli modlarda en küçük dalga sayısı.....	58
Çizelge 4.5. Program 2 kullanılarak $b/a=0.45$ $d/b=0.5$ $\epsilon_r=2.45$ değerleri ile elde edilen sonuçlar.....	67
Çizelge 4.6 $b/a=0.45$ $d/b=0.5$ $\epsilon_r=2.45$ giriş değerlerinin çeşitli $k_z/k_0$ değerleri için 800 elemanla hesaplanması.....	68
Çizelge 4.7. Parametreler değiştirilerek $a/\lambda_0$ değerlerinin hesaplanması.....	69
Çizelge 4.8. Parametreler değiştirilerek $a/\lambda_0$ değerlerinin hesaplanması.....	69
Çizelge 4.9. Parametreler değiştirilerek $a/\lambda_0$ değerlerinin hesaplanması.....	70
Çizelge 4.10. $d/a$ değerleri değiştirilerek $a>b$ için yapılan hesaplamalar.....	74

## ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Sonlu eleman örnekleri.....	4
Şekil 2.2. Çözüm alanı, bölgenin sonlu elemanlara bölünmesi.....	5
Şekil 2.3. Paralel levha kapasitörü.....	7
Şekil 2.4. 2 boyutlu eleman. ....	12
Şekil 2.5. Üçgensel eleman için $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ şekil fonksiyonları.....	15
Şekil 2.6. Lokal-global numaralandırma.....	18
Şekil 2.7. İterasyon metodu bağlantı örneği.....	22
Şekil 2.8. 2 elemanlı ağ örneği.....	24
Şekil 3.1. Dikdörtgen dalga kılavuzu.....	29
Şekil 4.1. Homojen olarak doldurulmuş dalga kılavuzu.....	51
Şekil 4.2. 18 elemana ayrılmış dikdörtgen dalga kılavuzu.....	54
Şekil 4.3. Kare dalga kılavuzu için eleman sayısı – % hata grafiği.....	57
Şekil 4.4. Dikdörtgen dalga kılavuzu için eleman sayısı – % hata grafiği.....	57
Şekil 4.5. $TM_{11}$ modu için 12 GHz için eleman sayısına bağlı olarak elde edilen elektrik alan (x bileşeni) grafiği.....	59
Şekil 4.6. $TM_{11}$ modu için 12 GHz için eleman sayısına bağlı olarak elde edilen manyetik alan (x bileşeni) grafiği.....	59
Şekil 4.7. $TE_{11}$ modu için 5 GHz için eleman sayısına bağlı olarak elde edilen elektrik alan (x bileşeni) grafiği.....	60
Şekil 4.8. $TE_{11}$ modu için 5 GHz için eleman sayısına bağlı olarak elde edilen manyetik alan (x bileşeni) grafiği.....	60

<b>Şekil</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 4.9. Birçok homojen madde ile doldurulmuş dalga kılavuzu.....	64
Şekil 4.10. $b/a=0.45$ $d/b=0.5$ $\epsilon_r=2.45$ değerleri ile yarım dikdörtgen doldurulmuş kılavuz.....	67
Şekil 4.11. $b/a=0.45$ $d/b=0.5$ $\epsilon_r=2.45$ değerleri için $k_z/k_0 - a/\lambda_0$ grafiği.....	68
Şekil 4.12. $\epsilon_{r1}=2.45$ ve $b/a=0.45$ sabitken $d/a$ oranı değişimine göre $\beta/k_0 - a/\lambda_0$ değişim grafiği.....	70
Şekil 4.13. $d/b=0.5$ , $\epsilon_1=2.45$ için $b/a$ oranı değişimine göre $\beta/k_0 - a/\lambda_0$ grafiği.....	71
Şekil 4.14. $d/b=0.5$ $b/a=0.45$ için $\epsilon_1$ değişimine göre $\beta/k_0 - a/\lambda_0$ grafiği .....	71
Şekil 4.15. $b=2a$ , $\epsilon_r=2$ kayıpsız ortamda elektrik alan grafiği.....	72
Şekil 4.16. $b=2a$ , $\epsilon_r=3$ kayıplı ortamda elektrik alan grafiği.....	72
Şekil 4.17. $d/b=0.5, b/a=1/0.45$ , $\epsilon_{r1}=2.45$ için $\beta/k_0 - a/\lambda_0$ grafiği.....	75
Şekil 4.18. Eleman sayısı-zaman bağlantısı.....	76

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

### Simgeler

### Açıklama

<b>E</b>	Elektrik alan şiddeti
<b>H</b>	Manyetik alan şiddeti
<b>Y</b>	Yayılm sabiti
<b><math>\alpha</math></b>	Zayıflama sabiti
<b><math>\beta</math></b>	Faz sabiti
<b><math>\mu</math></b>	Manyetik geçirgenlik
<b><math>\epsilon</math></b>	Elektrik geçirgenlik
<b><math>\eta</math></b>	Empedans

### Kısaltmalar

### Açıklama

<b>SEM</b>	Sonlu elemanlar metodu
<b>TE</b>	Enine elektrik dalgalara ait modlar
<b>TM</b>	Enine manyetik dalgalara ait modlar

## 1.GİRİŞ

Sonlu elemanlar metodu sürekli fonksiyonları, polinomlara veya diğer parça yaklaşımlara ayıran bilgisayar destekli bir matematik tekniğidir.

Metot, yapı analiziyle kullanılmaya başlamış, mühendisliğin, fenin ve matematiğin birçok dalında uygulama alanı bulmuştur. Katı maddeler ve bunlara ilişkin ayırık elemanlar arasındaki kıyaslama ilk olarak 1941' de Hrenikoff ve 1943' de McHenry tarafından uçak tasarımında denenmiş fakat yüksek hızlı uçakların gelişimiyle kullanılamamıştır [1]. 1943 yılında Courant, üçgenel elemanların birleştirilmesi ve minimum toplam potansiyel enerji prensibini bükülme (torsion) problemlerinde ele almıştır. Metodun anahtar özellikleri Hrenikoff ve Courant tarafından bulunmasına rağmen resmi olarak Argyris, Kelsey (1960) ve Turner, Clough, Martin, Topp (1956) tarafından sunulmuştur. 1960 yılında Dough tarafından düzlem esnekliği konulu bir makalenin yayınlanmasıyla birlikte ilk kez 'sonlu elemalar' terimi kullanılmıştır. Metodla ilgili ilk kitap, 1967 yılında Zienkiewicz ve Cheung tarafından yayınlanmıştır.

1960 yılından itibaren stres analizi, ısı akışı, denge analizi, metal eğimi, plastiklik gibi birçok mühendislik alanında kullanılmaya başlanmış olan SEM'in (Sonlu elemanlar metodu) elektrik mühendisliğine ilk uygulaması Winslow tarafından kullanılan hızlandırıcı mıknatıstır. Metot ilerledikçe transformatör, burgaçlı akım ve elektrostatik problemlerinde kullanılmıştır.

1968 yılına kadar elektromanyetik problemlere uygulanmamış olup, 1968'den sonra dalga kılavuzu problemleri, elektrik makineleri, elektromanyetik radyasyonun biyolojik vücutlar tarafından emilmesi gibi pek çok konuda uygulama alanı bulmuştur. 1970'den itibaren SEM için birçok yazılım paketi geliştirilmiştir ve bunlardan en çok tercih edilenleri Abaqus, Ansys, Sdr-Ideas, Rasna, Msc/Nastran'dır.

Metodun çok yönlülüğü; elemanların çeşitli şekillerde olabilmesi ve verilen alanın her noktasında çözümün bilinmesinden ileri gelmektedir.

Bu esneklik, SEM'in kapalı alanlar ve düzenli olmayan sınır problemlerine uygun olmasını sağlamaktadır ve dalga kılavuzu problemlerini inceleyen bu çalışmada tercih edilmesinin başlıca nedenidir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, sonlu elemanlar metodunun temel kavramları ve yapısı ele alınmıştır. Verilen bir yapı için fonksiyonun minimize edilmesi, yapının elemanlara ayrılması, her eleman için lokal matrislerin elde edilmesi ve lokal matrislerin birleştirilmesiyle sistem eşitliğinin çözümünün elde edilmesi gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, dalga kılavuzu yapılarının teorisi verilmiş olup, elektromanyetik alanlara ait çözümlerde kullanılan mod tipleri belirtilmiştir. Ayrıca dalga kılavuzu çeşitleri içinde en çok uygulama alanı bulan dikdörtgen ve dairesel kılavuzlar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, dalga kılavuzları homojen ve homojen olmayan yapılar olmak üzere iki ana kısma ayrılmıştır. Dalga denklemi baz alınarak her iki durum için sonlu elemanlar metodu uygulanıp çeşitli hesaplamalar yapılmıştır. Hesaplamalarla elde edilen matrislerin çözümü analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Sonuç ve öneriler bölümünde sonlu elemanlar metodunun, elektromanyetik problemlerin çözümünde vazgeçilmez olduğu bir kez daha vurgulanmış, çalışmanın sonuçları kısaca özetlenmiştir.

## 2. SONLU ELEMANLAR METODU

### 2.1 Sonlu Elemanlar Metodunun Özellikleri

Elektromanyetik problemlerin büyük bir kısmı, kısmi diferansiyel denklemler veya integral denklemleriyle ilgilidir. Bunlardan kısmi diferansiyel denklemler genellikle sonlu farklar ya da sonlu elemanlar metoduyla çözülürken, integral denklemleri moment metoduyla çözülür.

Sonlu elemanlar yönteminin günümüzdeki uygulamaları oldukça fazladır ve diferansiyel denklemlerle düzenlenen fiziksel tüm problemleri kapsar. Sonlu elemanlar yönteminin yararları, metodun geniş bir alanda kullanılmasına yardımcı olmaktadır [2]. Bunların bazıları :

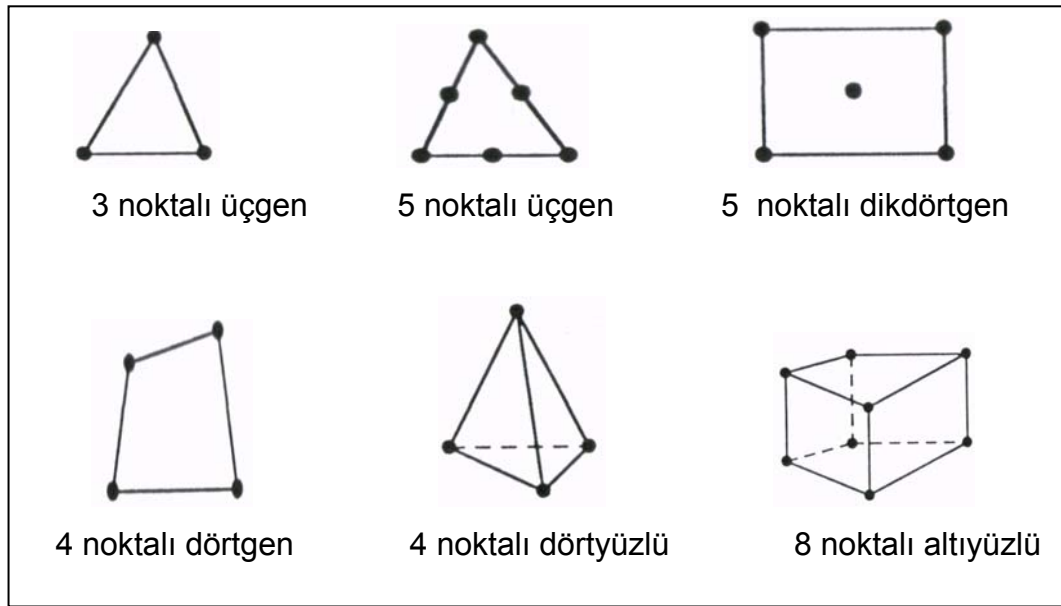
- 1) Bitişik elemanlardaki malzeme özellikleri aynı olmayabilir. Bu özellik, birkaç malzemenin birleştirildiği cisimlerde uygulanabilmesine imkan verir.
- 2) Karışık geometride modelleme için uygundur.
- 3) Genel amaçlı bilgisayar programları yapılabilir.
- 4) Kararlı ve kesin sonuçlar elde edilir. Düzgün olmayan sınırlara sahip şekiller, eğri kenarlı elemanlar kullanılarak analiz edilebilirler.
- 5) Eleman boyutları kullanıcı tarafından değiştirilebilir. Böylece önemli değişiklikler beklenen bölgelerde, daha küçük elemanlar kullanılarak hassas işlemler yapılabilirken; aynı parçanın diğer bölgeleri büyük elemanlara bölünerek işlem hızı artırılabilir.
- 6) Süreksiz yüzey yüklemeleri gibi sınır durumları yöntem için zorluk oluşturmaz. Karışık sınır durumları kolaylıkla ele alınabilir.

Bugün sonlu elemanlar metodu, bilim adamları tarafından analize en uygun yöntem olarak düşünölmektedir.

Herhangi bir problemde sonlu elemanlar analizinde kullanılan aşamalar, aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- 1) Sınır değeri problemi kısmi diferansiyel denklemlerle tanımlanır.
- 2) Çözüm bölgesi sonlu sayıda alt bölgelere veya elemanlara bölünür.
- 3) Elemanlar için denklemler elde edilir.
- 4) Tüm elemanlar çözüm bölgesinde birleştirilir.
- 5) Elde edilen denklemler çözölmür.

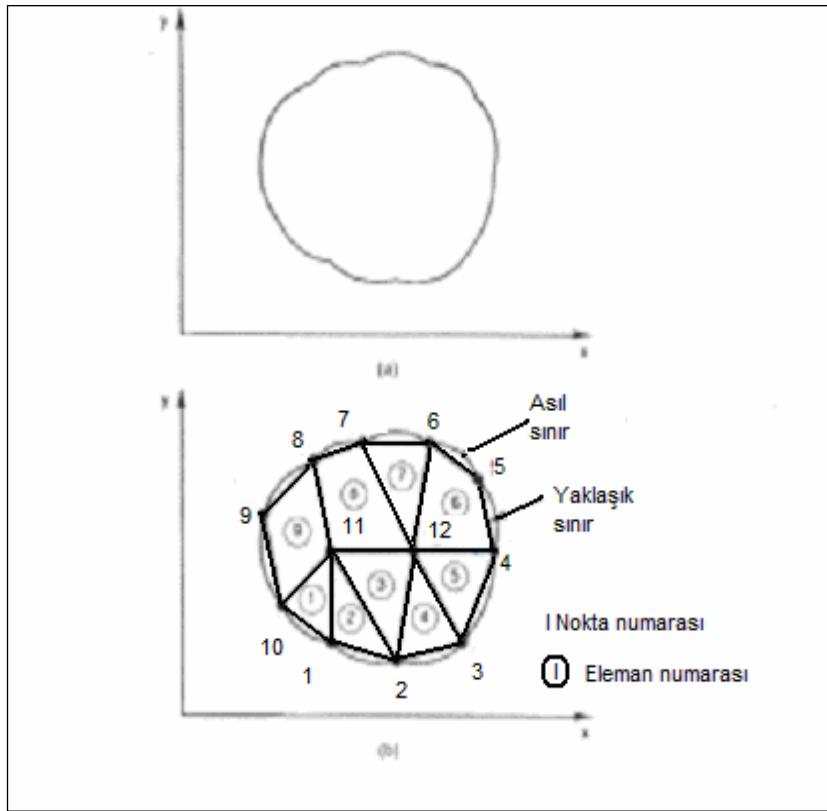
Şekil 2.1' de sonlu eleman örnekleri gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Sonlu eleman örnekleri

### 2.1.1 Sonlu elemanlara ayırmak

Sonlu elemanlar metodunun mantığı, 1 boyutlu ve 2 boyutlu problemlerde verilen bir yapıda potansiyelin bulunması esasına göre anlatılacaktır. Şekil 2.2' deki gibi çözüm bölgesi ilk etapta sonlu sayıda elemanlara bölünür. (Şekildeki alan 2 si üçgensel, 2 si dörtgensel olmak üzere 4 elemana ve 7 noktaya ayrılmıştır.)



Şekil 2.2. (a) Çözüm alanı (b) Bölgenin sonlu elemanlara bölünmesi

$V_e$  potansiyeli için, içerisinde e elemanı bulunan ve eleman sınır bölgelerinde potansiyelin sürekli olduğu bir dağılım aranır.

Tüm alan için yaklaşık çözüm,

$$V(x, y) = \sum_{e=1}^N V_e(x, y) \quad (2.1)$$

biçiminde verilir.

N, çözüm bölgesinin üçgensel elemanlara bölünme sayısıdır.  $V_e$  'nin polinomsal yaklaşımının üçgensel eleman için genel ifadesi;

$$\vec{E}_e = -\nabla V_e = -\left(\hat{a}_x \frac{\partial V_e}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial V_e}{\partial y}\right) = -b \hat{a}_x - c \hat{a}_y$$

$$V_e(x, y) = a + bx + cy \quad (2.2)$$

biçiminde verilir.

Dörtgensel eleman için genel ifadesi;

$$\vec{E}_e = -\nabla V_e = -\left(\hat{a}_x \frac{\partial V_e}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial V_e}{\partial y}\right) = -\hat{a}_x (b + dy) - \hat{a}_y (c + dx)$$

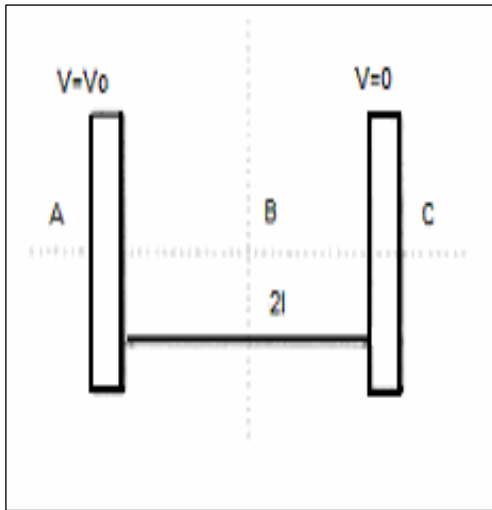
$$V_e(x, y) = a + bx + cy + dxy \quad (2.3)$$

biçimindedir.  $V_e$  potansiyeli e elemanının içinde çoğu zaman 0'dan farklıdır ama dışında 0'dır. Genellikle uygulamada dörtgensel elemanlar yerine üçgensel elemanlar tercih edilir.

## 2.2. Metodun Problemlere Uygulanması

### 2.2.1 Bir boyutlu elektrostatik problemi

Şekil 2.3'deki paralel levha kapasitörü, bir boyutlu elektrostatik probleme örnek olarak verilmiştir [3].



Şekil 2.3. Paralel levha kapasitörü

Elektrostatik alan problemi için denklemler :

$$\nabla \vec{D} = \rho_v \quad (2.5)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.6)$$

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (2.7)$$

$\vec{D}$  : Elektrik akı vektörü

$\rho_v$  : Hacimsel yük yoğunluğu

$\epsilon$  : geçirgenlik

$\vec{E}$  : Elektrik alan şiddeti vektörü

$V$  : Potansiyel

Hacimsel yük yoğunluğunun 0 olduğu kabul edilip Eş. 2.6 ve Eş. 2.7, Eş. 2.5'de yerine konulursa, elektrostatik alanda Laplace eşitliği elde edilir.

$$\nabla \cdot \nabla V = 0 \quad (2.8)$$

Sınır koşulları gereğince;

$$V = V_0 \rightarrow A' \text{ da}$$

$$V = 0 \rightarrow C' \text{ de} \quad (2.9)$$

olduğunda verilen örnek.

Problem için fonksiyon aşağıdaki gibidir.

$$F = \int \frac{\epsilon}{2} (\nabla V)^2 dx \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Elemanlara ayırma

$V$  potansiyelinin çözülmesi için polinom yaklaşımı kullanılırsa;

$$V = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.11)$$

Şekil 2.3'e göre ;

$$V_A = a_1 + 0 + 0$$

$$V_B = a_1 + a_2 l + a_3 l^2 \quad (2.12)$$

$V_C = a_1 + 2a_2 l + 4a_3 l^2$  elde edilir.

Eş. 2.12'den  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  katsayıları bulunur.

Ayrıca,

$$V = V_A \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{2l}\right) + V_B \left(\frac{x}{l}\right) \left(2 - \frac{x}{l}\right) - V_C \left(\frac{x}{2l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (2.13)$$

eşitliği elde edilir. Burada ( ) içindeki terimler  $\epsilon_A$ ,  $\epsilon_B$ ,  $\epsilon_C$  şekil fonksiyonu olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$\epsilon_A = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{2l}\right)$$

$$\epsilon_B = \left(\frac{x}{l}\right) \left(2 - \frac{x}{l}\right) \quad (2.14)$$

$$\epsilon_C = -\left(\frac{x}{2l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Bu durumda genel ifade,

$$V = \epsilon_A V_A + \epsilon_B V_B + \epsilon_C V_C \quad (2.15)$$

olarak elde edilir.

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d\epsilon_A}{dx} V_A + \frac{d\epsilon_B}{dx} V_B + \frac{d\epsilon_C}{dx} V_C \quad (2.16)$$

$$\frac{dV}{dx} = \left( \frac{-3}{2l} + \frac{x}{l^2} \right) V_A + \left( \frac{2}{l} - \frac{2x}{l^2} \right) V_B + \left( \frac{-1}{2l} + \frac{x}{l^2} \right) V_C \quad (2.17)$$

Eş. 2.10'da yukarıdaki diferansiyel eşitlik kullanıldığında,

$$F = \int \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 dx \quad (2.18)$$

her iki tarafın  $V_A$ ' ya göre türevi alınarak fonksiyonun minimum değeri elde edilir.

$$\frac{dF}{dV_A} = \epsilon \int \frac{dV}{dx} \frac{d}{dV_A} \frac{dV}{dx} dx = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{d}{dV_A} \left( \frac{dV}{dx} dx \right) = \frac{-3}{2l} + \frac{x}{l^2} \quad (2.20)$$

sonucuna ulaştırır.

Bu nedenle,

$$\frac{dF}{dV_A} = \epsilon \int_0^{2l} \left[ \left( \frac{-3}{2l} + \frac{x}{l^2} \right)^2 V_A + \left( \frac{-3}{2l} + \frac{x}{l^2} \right) \left( \frac{2}{l} - \frac{2x}{l^2} \right) V_B + \left( \frac{-3}{2l} + \frac{x}{l^2} \right) \left( \frac{-1}{2l} + \frac{x}{l^2} \right) V_C \right] dx \quad (2.21)$$

veya aşağıdaki ifadeler elde edilebilir.

$$\frac{dF}{dV_A} = \frac{\epsilon}{6l} (7V_A - 8V_B + V_C) = \frac{\epsilon}{6l} (7, -8, 1) \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\frac{dF}{dV_B} = \frac{\epsilon}{6l} (-8, 16, -8) \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

$$\frac{dF}{dV_C} = \frac{\epsilon}{6l} (1, -8, 7) \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} \text{ bulunur.} \quad (2.24)$$

Eş. 2.22'den Eş. 2.24'e kadar olan eşitlikler birleştirilirse

$$\begin{pmatrix} \frac{dF}{dV_A} \\ \frac{dF}{dV_B} \\ \frac{dF}{dV_C} \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{6l} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & 7 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} = 0 \text{ sonucuna ulaşılır.} \quad (2.25)$$

$$\text{Sınır koşulları: } V_A = V_0 \text{ ve } V_C = 0 \text{ 'dır.} \quad (2.26)$$

Eş. 2.25, Eş. 2.26 ile birleştirilip, sonuç matrisi ve transpoze terimleri genişletilirse

$$\frac{\epsilon}{6l} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{6l} \begin{pmatrix} -7V_0 \\ 8V_0 \\ -V_0 \end{pmatrix} \text{ elde edilir.} \quad (2.27)$$

1. ve 3. satırdan  $V_A$  ve  $V_C$  çekilebilir.

$$V_A = V_0, V_B = \frac{V_0}{2}, V_C = 0 \quad (2.28)$$

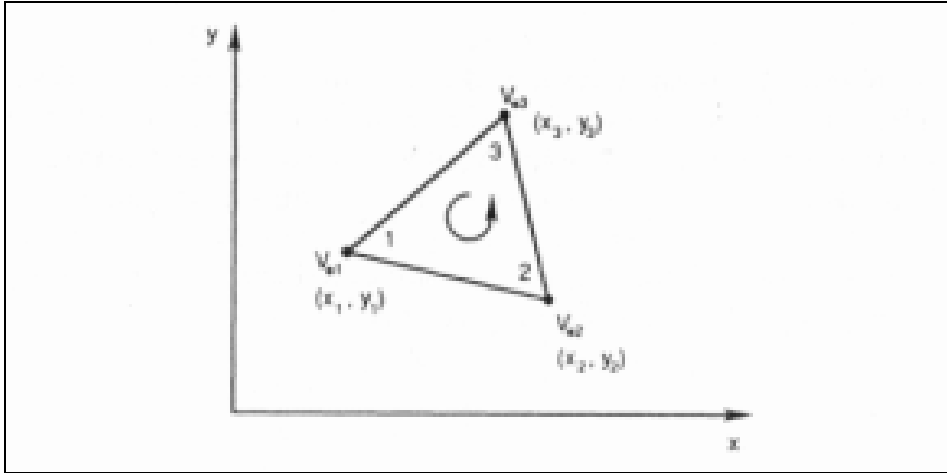
Eş. 2.28' in sonucunu daha düzenli bir yoldan elde etmenin yolu, Eş. 2.25'deki matriste  $V_A$  ve  $V_C$  ' ye karşılık gelen köşegen terimlerini 1'e, köşegen dışındaki terimleri 0' a eşitlemektir.

$$\frac{\epsilon}{6l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{6l} \begin{pmatrix} V_0 \\ 8V_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$\text{Eş. 2.29 çözümlenerek } V_A = V_0, V_B = \frac{V_0}{2}, V_C = 0 \text{ elde edilir.} \quad (2.30)$$

### 2.3. 2 Boyutlu Sonlu Elemanlar Analizi

2 Boyutlu eleman örneği olarak aşağıdaki üçgensel eleman verilmiştir. 1, 2, 3 noktalarındaki  $V_{e1}, V_{e2}, V_{e3}$  potansiyelleri, Eş. 2.2 (  $V_e ( x, y ) = a + bx + cy$  ) kullanılarak bulunacaktır.



Şekil 2.4. 2 boyutlu eleman

Yukarıdaki eşitlik Eş. 2.31 formuna getirilip a, b, c bulunur.

$$\begin{pmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Eş. 2.2'de yerine konulursa

$$V_e = [1 \ x \ y] \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

$$V_e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) V_{ei} \text{ 'dir.} \quad (2.33)$$

$\alpha$  ifadesinin açılımı aşağıda verilmiştir [4].

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (2.34a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (2.34b)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (2.34c)$$

A, elemanın alanını göstermektedir.

$$2A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

Yukarıdaki gibi veya Eş. 2.35 ile gösterilebilir.

$$A = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (2.35)$$

Herhangi bir noktadan başlanarak, noktalar saatin tersi yönünde numaralandırılırsa A pozitif olur.

$\alpha_i$  lineer interpolasyon fonksiyonlarıdır. Eleman şekil fonksiyonları olarak da adlandırılırlar ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\alpha_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) = 1 \quad (2.37)$$

2 boyutlu çözüm alanında ortamda yük yoğunluğu olmadığı ( $p_s = 0$ ) kabul edildiğinden e elementi için enerji,

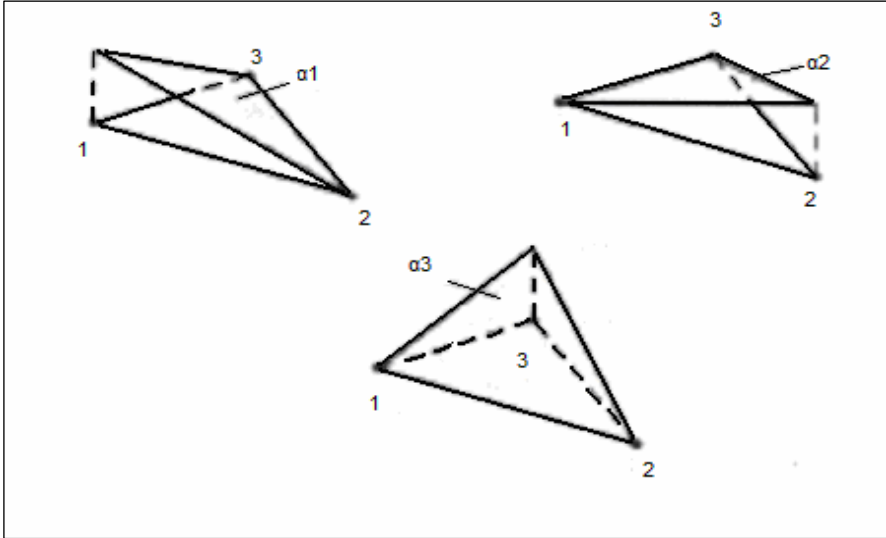
$$W_e = \frac{1}{2} \int \epsilon |\vec{E}|^2 ds = \frac{1}{2} \int \epsilon |\nabla V_e|^2 ds \text{ 'dir.} \quad (2.38)$$

Eş. 2.5'den

$$V_e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i (x,y) V_{ei} \text{ olduğundan}$$

$$\nabla V_e = \sum_{i=1}^3 V_{ei} \nabla \alpha_i \quad (2.39)$$

elde edilir. Aşağıda  $\alpha_i$  şekil fonksiyonları gösterilmiştir.



Şekil 2.5. Üçgenel eleman için  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  şekil fonksiyonları

Eş.2.39 ve Eş. 2.38'den

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \in V_{ei} \left[ \int \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j ds \right] V_{ej} \quad (2.40)$$

elde edilir. Parantez içindeki ifade aşağıdaki gibi tanımlanarak T transpozeyi göstermek üzere matris formu elde edilebilir.

$$C_{ij}^{(e)} = \int \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j ds \quad (2.41)$$

$$V_e = \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \quad (2.42a)$$

$$[C^{(e)}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(e)} & C_{12}^{(e)} & C_{13}^{(e)} \\ C_{21}^{(e)} & C_{22}^{(e)} & C_{23}^{(e)} \\ C_{31}^{(e)} & C_{32}^{(e)} & C_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.42b)$$

Eş. 2.40 ise gerekli düzenlemeler yapıldığında Eş. 2.43'deki gibi yazılabilir.

$$W_e = \frac{1}{2} \in [V_e]^T [C^{(e)}] [V_e] \quad (2.43)$$

$[C^{(e)}]$  matrisi genellikle eleman katsayı matrisi olarak adlandırılır.  $C_{ij}^{(e)}$  katsayı matrisi  $i, j$  noktalarındaki bileşenlerden oluşur ve  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  yerine konulduğunda eleman değerleri bulunur.

$$\begin{aligned} C_{12}^{(e)} &= \int \nabla \alpha_1 \nabla \alpha_2 ds \\ &= \frac{1}{4A^2} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \int ds \\ &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \end{aligned} \quad (2.44a)$$

Benzer şekilde,

$$C_{13}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)] \quad (2.44b)$$

$$C_{23}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \right] \quad (2.44c)$$

$$C_{11}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right] \quad (2.44d)$$

$$C_{22}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2 \right] \quad (2.44e)$$

$$C_{33}^{(e)} = \frac{1}{4A} \left[ (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right] \quad (2.44f)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$C_{21}^{(e)} = C_{12}^{(e)}, C_{31}^{(e)} = C_{13}^{(e)}, C_{32}^{(e)} = C_{23}^{(e)} \text{ 'dir.} \quad (2.45)$$

## 2.4 Tüm Elemanların Birleştirilmesi

Tipik eleman ele alındıktan sonraki adım bu şekildeki elemanları çözüm bölgesinde toplamaktır.

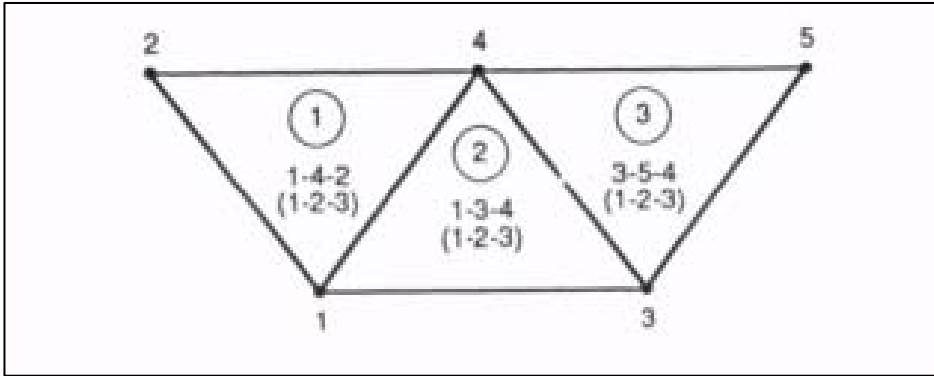
$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \dots \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

n nokta sayısı, N eleman sayısı, [C] global katsayı matrisi (Her bir elemanın katsayı matrislerinin birleşmesinden oluşan matris) olmak üzere elemanların birleştirilmesiyle oluşan enerji;

$$W = \sum_{e=1}^N W_e = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T [\mathbf{C}] \mathbf{V} \quad (2.47)$$

şeklindedir.

Aşağıdaki örnekte global katsayı matrisinin elde edilmesi için her elemanın katsayı matrislerinin birleştirilmesi gösterilmiştir.



Şekil 2.6. Lokal-global numaralandırma

Sonlu eleman ağının (mesh) Şekil 2.6' daki gibi 3 sonlu eleman içerdiği varsayıp, numaralandırılmanın 1,2,3,4,5 serisi şeklinde yapılması global numaralandırma değildir.

i, j, k şeklindeki numaralandırma ise lokal numaralandırma ve Şekil 2.4' deki elemanda 1,2,3 numaralandırmasına karşılık gelir. Örneğin Şekil 2.6'daki elemanda 3-5-4 lokal numaralardır. Bu, Şekil 2.4' de 1-2-3' e karşılık gelir. Lokal numaralandırma herhangi bir noktadan başlayarak saat yönünün tersi yönde artmak zorundadır. Şekil 2.4'deki 1-2-3'e karşılık olarak, 3. elemanda 4-3-5 yerine 3-5-4 seçilebilir.

Yani Şekil 2.6'daki numaralandırma birden fazla olabilir. Aşağıda ele aldığımız numaralandırmaya göre global katsayı matrisinin

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

formunda olması beklenir.

Burada  $n=5$  nokta olduğu için  $5 \times 5$  lik matris elde edilir.  $C_{ij}$  yine  $i$  ve  $j$  noktaları arasındaki birleşmelerdir.

Elemanlar arasındaki sınırlarda potansiyel farkın sürekli olmak zorunda olduğu gerçeği kullanılarak  $C_{ij}$  nin bulunması sağlanır.

Şekil 2.6'da 1 ve 2 elemanlarında 1 noktası ortaktır. Bu nedenle;

$$C_{11} = C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} \quad (2.49a)$$

2 noktası sadece 1 elemanına ait olduğundan;

$$C_{22} = C_{33}^{(1)} \quad (2.49b)$$

4 noktası 1,2,3 elemanlarından oluştuğundan;

$$C_{44} = C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)} \quad (2.49c)$$

Ifadeleri elde edilir. 1 ve 2 noktası 1 ve 2 elemanlarında ortaktır.

$$C_{14} = C_{21} = C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)} \quad (2.49d)$$

2 ve 3 noktaları arasında doğrudan bağlantı bulunmadığından Eş. 2.49e bulunur.

$$C_{23} = C_{32} = 0 \quad (2.49e)$$

Bu mantıkla devam edildiğinde global katsayı matrisinin tüm elemanları elde edilir.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} & C_{13}^{(1)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)} & 0 \\ C_{31}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 & C_{32}^{(1)} & 0 \\ C_{21}^{(2)} & 0 & C_{22}^{(2)} + C_{11}^{(3)} & C_{23}^{(2)} + C_{13}^{(3)} & C_{12}^{(3)} \\ C_{21}^{(1)} + C_{31}^{(2)} & C_{23}^{(1)} & C_{32}^{(2)} + C_{31}^{(3)} & C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)} & C_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & C_{21}^{(3)} & C_{23}^{(3)} & C_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

[ C ] matrisinin özellikleri :

- 1) Eleman katsayı matrisi gibi simetriktir. ( $C_{ij} = C_{ji}$ )
- 2) i ve j noktaları arasında eşleşme yoksa  $C_{ij}=0$ ' dir.
- 3) Tekildir. Bu durum, 3.16b'deki katsayı matrisi kullanılırsa 2. ve 3. kolonu 1. kolona eklemek 1. kolonda 0' lar oluşturmasıyla açıklanabilir.

## 2.5 Sonuç Denklemlerinin Çözümü

Çözüm bölgesindeki toplam enerji minimum iken Laplace veya Poisson denklemlerinin sağlandığı gösterilebilir.

Her noktadaki potansiyele göre  $W'$  nin kısmi türevlerinin 0 olması gerekir.

$$\frac{dW}{dV_1} = \frac{dW}{dV_2} = \dots = \frac{dW}{dV_n} = 0$$

veya

$$\frac{dW}{dV_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$
(2.51)

Örneğin Şekil 2.6 için  $\frac{dW}{dV_1} = 0$  kullanılarak ; Eş. 2.48 ve Eş. 2.47'den ;

$$0 = \frac{dW}{dV_1} = 2V_1C_{11} + V_2C_{12} + V_3C_{13} + V_4C_{14} + V_5C_{15} + V_2C_{21} + V_3C_{21} + V_4C_{41} + V_5C_{51}$$

$$V_1C_{11} + V_2C_{12} + V_3C_{13} + V_4C_{14} + V_5C_{15} = 0$$
(2.52)

elde edilir.

Genel olarak bakıldığında;

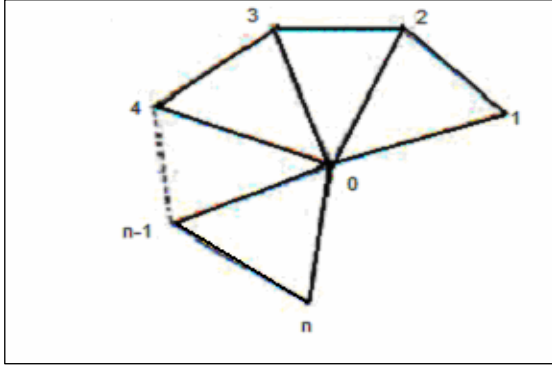
$$\frac{dW}{dV_k} = 0, \quad \sum_{i=1}^n V_i C_{ik} = 0$$
(2.53)

sonucuna ulaştırır.

Burada n nokta sayısını vermektedir.

Eş. 2.53'de bütün noktalar  $k=1,2,\dots,n$  için yazılırsa  $[V]^T = [V_1, V_2, V_3, \dots, V_n]$   $V_n$  tane çözümü olan eşitlik bulunabilir. Bu 2 yöntemle yapılabilir.

A) İterasyon metodu 0 noktasının m tane noktaya Şekil 2.7' deki gibi bağlandığı farzedilirse;



Şekil 2.7. İterasyon metodu bağlantı örneği

$0 = V_0 C_{00} + V_1 C_{01} + V_2 C_{02} + \dots + V_m C_{0m}$  veya aşağıdaki ifade bulunur.

$$V_0 = \frac{-1}{C_{00}} \sum_{k=1}^m V_k C_{0k} \quad (2.54)$$

0'a bağlanan noktalardaki gerilimler bilinirse Eş. 2.54 kullanılarak  $V_0$  elde edilebilir. İterasyon yöntemi serbest noktalardaki (potansiyelleri bilinmeyen) potansiyelleri 0'a ya da ortalama potansiyele eşitlemekle başlar.

$$V_{ave} = \frac{1}{2} (V_{min} + V_{max}) \quad (2.55)$$

$V_{min}$  ve  $V_{max}$  sırasıyla potansiyelin bilindiği noktalardaki minimum ve maksimum değerlerini gösterir.

Bu başlangıç değerleriyle, Eş. 2.54 kullanılarak serbest noktalardaki potansiyeller hesaplanabilir.

Her serbest nokta (potansiyelin bilinmediği nokta) için yeni değerler hesaplandıkça, 2.iterasyonda bu değerler eski değerler şeklini alır. Bu prosedür iterasyon sonuçlarındaki değerler önemsiz olana kadar devam eder.

B) Band matrix metod Eğer bütün serbest noktalar önce ve belirlenmiş noktalar sonra numaralandırılırsa Eş. 2.47 şu şekilde yazılabilir.

$$W = \frac{1}{2} \in \begin{bmatrix} V_f & V_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ff} & C_{fp} \\ C_{pf} & C_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_p \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

f ve p sırasıyla free (potansiyelin bilinmediği nokta) ve fixed noktaları (potansiyelin bilindiği nokta) göstermektedir.  $V_p$  sabit olduğundan Eş. 2.51'den Eş. 2.56'ya kadar ifadeler uygulanarak  $V_f$  ayırt edilecektir.

$$\begin{bmatrix} C_{ff} & C_{fp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_p \end{bmatrix} = 0 \text{ veya}$$

$$[C_{ff} V_f] = -[C_{fp}] [V_p] \quad (2.57)$$

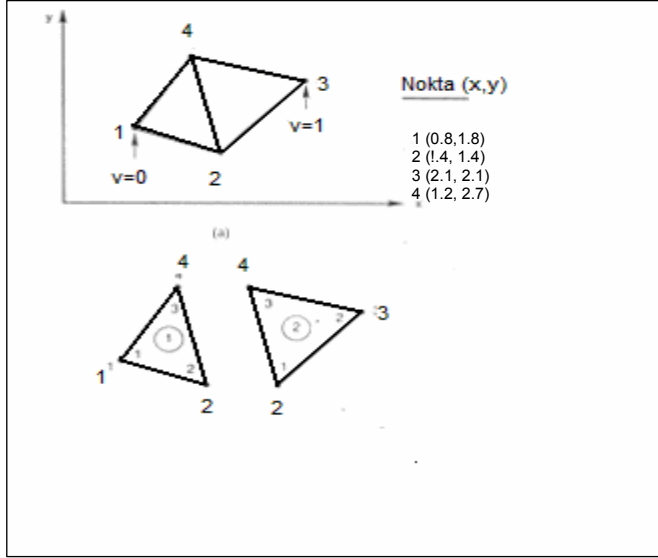
$$\text{Bu eşitlik } [A] [V] = [B] \text{ veya} \quad (2.58a)$$

$$[V] = [A]^{-1} [B] \text{ şeklinde yazılabilir.} \quad (2.58b)$$

$$\text{Burada } [V] = [V_f], [A] = [C_{ff}], [B] = [C_{fp}] [V_p]$$

[A] genellikle tekil olmadığından serbest noktalardaki potansiyel Eş. 2.58 kullanılarak çözülebilir. [V], Eş. 2.58a kullanıldığında Gaussian eliminasyon metoduyla çözülebilir. Aynı şekilde [V], Eş. 2.58b'de tersi alınacak matrisin boyutu çok büyük değilse, matris tersi alınarak da çözülebilir.

Yukarıda anlatılanlara örnek olarak şekildeki 2 elemanlı ağ ( mesh ) ele alındığında, sonlu elemanlar metoduyla potansiyellerin bulunması verilebilir.



Şekil 2.8. 2 elemanlı ağ örneği

Eleman katsayı matrisi bulunurken kolaylık olması açısından

$$P_1 = (y_2 - y_3), P_2 = (y_3 - y_1), P_3 = (y_1 - y_2)$$

$$Q_1 = (x_2 - x_3), Q_2 = (x_1 - x_3), Q_3 = (x_2 - x_1) \quad (2.59)$$

olarak tanımlanır. Lokal nokta numaraları  $i = 1, 2, 3$  olmak üzere eleman katsayı matrisindeki her terim,

$$C_{ij} = \frac{1}{4A} [P_i P_j + Q_i Q_j] \text{ eşitliğiyle bulunur.} \quad (2.60)$$

Burada  $A = \frac{1}{2} (P_2 Q_3 - P_3 Q_2)$  değeri alanı göstermektedir. 1,2,4 noktalarını içeren 1. eleman için lokal numaralandırma karşılığı 1,2,3' tür.

Hesaplamalar yapıldığında;

$$P_1 = -1.3, \quad P_2 = 0.9, \quad P_3 = 0.4, \quad Q_1 = -0.2, \quad Q_2 = -0.4, \quad Q_3 = 0.6$$

$A = (1/2) (0.54 + 0.10) = 0.35$  olarak elde edilir. Tümü Eş. 2.60'da kullanılırsa,

$$[C^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1.236 & -0.7786 & -0.4571 \\ -0.7786 & 0.6929 & 0.0857 \\ -0.4571 & 0.0857 & 0.3714 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

1. eleman için lokal matris elde edilmiş olur.

2,3,4 noktalarına sahip 2. elemanın lokal numaralandırması 1,2,3' tür.

$$P_1 = -0.6, \quad P_2 = 1.3, \quad P_3 = -0.7, \quad Q_1 = -0.9, \quad Q_2 = 0.2, \quad Q_3 = 0.7$$

$$A = (1/2) (0.91 + 0.14) = 0.525$$

$$[C^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0.5571 & -0.4571 & -0.1 \\ -0.4571 & 0.8238 & 0.3667 \\ -0.1 & 0.3667 & 0.4667 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Eş. 2.57 uygulanırsa,

$$\begin{bmatrix} C_{22} & C_{24} \\ C_{42} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{21} & C_{23} \\ C_{41} & C_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitlik daha uygun bir formda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & C_{42} & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C_{21} & -C_{23} \\ 0 & 1 \\ -C_{41} & -C_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (2.64a)$$

Genel olarak  $[C][V] = [B]$  şeklinde ifade edilebilir. (2.64b)

Global katsayı matrisinin terimleri şu şekilde üretilir.

$$\begin{aligned} C_{22} &= C_{22}^{(1)} + C_{11}^{(2)} = 0.6929 + 0.5571 = 1.25 \\ C_{24} &= C_{23}^{(1)} + C_{13}^{(2)} = 0.0857 - 0.1 = -0.0143 \\ C_{44} &= C_{33}^{(1)} + C_{33}^{(2)} = 0.3714 + 0.4667 = 0.8381 \\ C_{21} &= C_{21}^{(1)} = -0.7786 \\ C_{23} &= C_{12}^{(2)} = -0.4571 \\ C_{41} &= C_{31}^{(1)} = -0.4571 \\ C_{43} &= C_{32}^{(2)} = -0.3667 \end{aligned}$$

Eleman katsayı matrisi için lokal numaralandırma, global katsayı matrisi için global numaralandırma takip edilmelidir.  $[C]$  kare matrisi aşağıdaki şekilde oluşur.

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 & -0.0143 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.0143 & 0 & 0.8381 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Eş. 2.64'de sağ tarafta kalan B matrisi ;

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.571 \\ 10.0 \\ 3.667 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

formundadır.

[ C ]' nin tersi alınarak;

$$[V] = [C]^{-1} [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.378 \\ 10.0 \\ 4.438 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Burada  $V_1 = 0$  ,  $V_2 = 3.708$  ,  $V_3 = 10$  ,  $V_4 = 4.438$  sonucuna ulaşılır.

Noktalardaki potansiyeller bilinirse, bilinmeyen bir noktadaki potansiyel genel olarak,

$$V_e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i (x,y) V_{ei} \text{ kullanılarak bulunabilir.}$$

### 3. DALGA KILAVUZLARI

#### 3.1. Dalga Kılavuzlarına Giriş

Dalga kılavuzu, dalgaların yayıldığı tek biçimli yapılardır. Frekans 2 KHz veya daha yüksek olduğunda uygulamalarda genellikle koaksiyel kablolar, mikroşerit hatlar, sandviç hatlar ve ortaları boş dikdörtgen veya dairesel kesitli metalik dalga kılavuzları kullanılmaktadır. Bu yapılardaki elektromanyetik dalgalara ait çözümleri elde etmek için Maxwell eşitliklerinden türetilen dalga denklemlerinden yararlanılır.

Eş eksene (koaksiyel) hatlar ile ortası boş dalga kılavuzları içindeki elektromanyetik alanlara ait çözümler dalgaların uyarım biçimleri, uyarım frekansı ve sınır koşulları tarafından belirlenen modlardan oluşur. Modlar, yayılan dalganın  $E_z$  ve  $H_z$  bileşenlerinin bulunup bulunmamasına göre sınıflandırılırlar.

- a) Enine elektrik dalgalarına ait modlar (TE) Elektrik alanın yayılım yönündeki (yayılım yönü z olarak alındığında) bileşeni sıfır olur. Yani  $E_z = 0$ 'dır.
- b) Enine Magnetik Dalgalara Ait Modlar (TM) Manyetik alanın yayılım yönündeki (yayılım yönü z olarak alındığında) bileşeni sıfır olur. Yani  $H_z = 0$  'dır.
- c) Enine Elektromagnetik Dalgalara Ait Modlar (TEM) TEM modlarında, ne  $E_z$  ne de  $H_z$  mevcuttur.

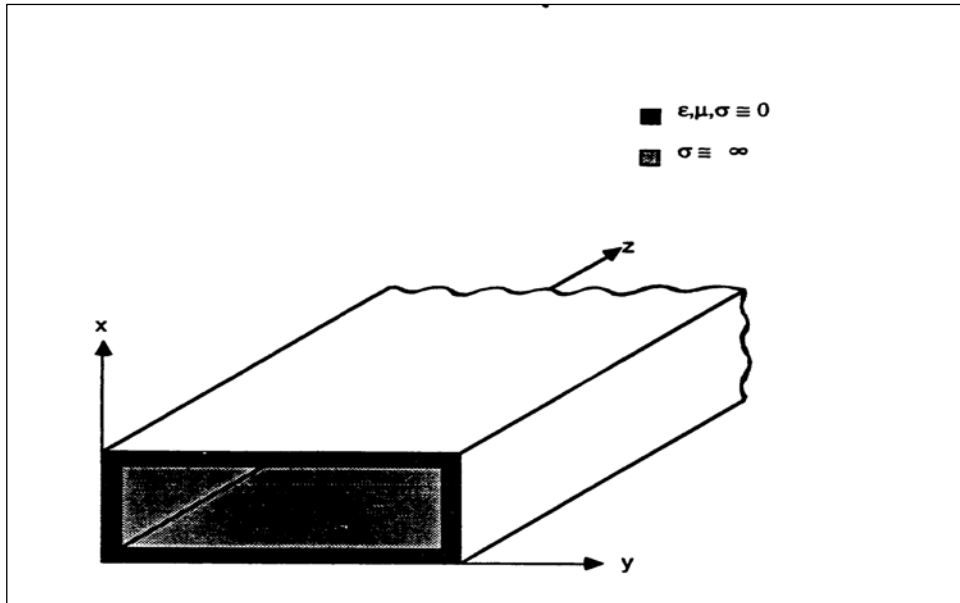
Dalga kılavuzları içindeki çözümler sadece TE veya TM türü modlardan veya bu tür modların her ikisinden oluşabilir.

TM ve TE modlarında karakteristik kesim frekansı vardır.

Kesim frekansı altındaki frekanslarda dalga yayılımı olmaz. Aynı şekilde güç ve sinyal iletimi kesim frekansının üstündeki frekanslarda gerçekleşir. Bu nedenle TE ve TM modlarındaki dalga kılavuzları yüksek geçiren filtre gibi görev yapmaktadırlar.

### 3.2. Dikdörtgen Kesitli Dalga Kılavuzları

Dikdörtgen kesitli dalga kılavuzları mikrodalga sinyallerini iletmede kullanılan ilk iletim hattı tiplerinden biridir ve bugün hala birçok uygulamada kullanılmaktadır. Dedektör, izolatör, zayıflatıcılar gibi birçok parça çeşidinde 1 GHz'den 220 GHz'e kadar standart dalga kılavuzu bandı mevcuttur. Dikdörtgen dalga kılavuzları bir iletken maddeye sahip olduğundan TE ve TM modlarının yayılımına izin verir ancak TEM modları için yayılım mümkün değildir. TEM modlarının yayılımı koaksiyel hatlarda mümkün olmaktadır [5].



Şekil 3.1. Dikdörtgen dalga kılavuzu

Harmonik alanlar için Faraday Kanununun noktasal formdaki ifadesi:

$$\nabla \times \vec{E}(x, y, z) = -j\omega\mu \vec{H}(x, y, z) \quad (3.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\rightarrow$  sembolü alanların vektör olduğunu işaret etmektedir. Yayılımın z yönünde olduğu kabul edildiğinde elektrik alanın bileşenleri,

$$\vec{E}_x(x, y, z) = E_x^0(x, y) e^{-\gamma z} \quad (3.2a)$$

$$\vec{E}_y(x, y, z) = E_y^0(x, y) e^{-\gamma z} \quad (3.2b)$$

$$\vec{E}_z(x, y, z) = E_z^0(x, y) e^{-\gamma z} \quad (3.2c)$$

biçiminde elde edilir.

Eş. 3.1 'den aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{a}_x \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{a}_y \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{a}_z \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (3.3)$$

Eş. 3.2 ve Eş. 3.3 kullanıldığında;

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\gamma E_y^0 e^{-\gamma z} = -\gamma E_y \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma E_x = j\omega\mu H_y \quad (3.4c)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{dE_x}{dy} = -j\omega\mu H_z \quad (3.4d)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tamamen benzer biçimde harmonik alanlar için Ampere kanunun noktasal formdaki ifadesi,

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E}(x, y, z) \quad (3.5)$$

biçimindedir. Eş. 3.5, Maxwell denklemlerine göre düzenlenirse,

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega \epsilon E_x \quad (3.6a)$$

$$\frac{dH_z}{dx} + \gamma H_x = -j\omega \epsilon E_y \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \epsilon E_z \quad (3.6c)$$

$$E_y = -\frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{j\omega \epsilon} H_x \quad (3.7)$$

eşitlikleri elde edilir. Eş. 2.2 ve Eş. 2.7'den aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{j\omega \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{-\gamma^2}{j\omega \epsilon} H_x = -j\omega\mu H_x \quad (3.8)$$

$$\frac{\gamma^2}{j\omega \epsilon} - j\omega\mu = \frac{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon}{j\omega \epsilon} \text{ olduğundan;}$$

$$(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_x = j\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.9)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.10a)$$

Burada  $h^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$ 'dir.

Benzer biçimde ;

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3.10b)$$

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (3.10c)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (3.10d)$$

Bu eşitliklerden görüldüğü üzere  $E_z$  ve  $H_z$  alan bileşenlerinin 0'a eşit olması halinde dalga kılavuzu içindeki bütün alanlar 0 olur.

Dalga kılavuzu içindeki alan konfigürasyonu TE ve TM dalga şeklinde iki kısma ayrılabilir. Dikdörtgen kesitli dalga kılavuzunun duvarlarının mükemmel iletken olduğu kabul edilirse, sınır koşullarından

$$y=0 \text{ ve } y=b' \text{ de } E_x = E_z = 0 \quad x=0 \text{ ve } x=a' \text{ da } E_y = E_z = 0$$

olur.

### 3.2.1. TM (enine manyetik) modlar

Maxwell denklemlerinden

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \quad (3.11a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\mu \epsilon \vec{E} \quad (3.11b)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.11c)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3.11d)$$

eşitlikleri yazılabilir. Eş. 3.11a'da her iki tarafının curl'u alındığında

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \nabla \times \vec{H} = -j\omega\mu (j\omega \epsilon \vec{E}) \quad (3.12)$$

elde edilir.

$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$  olduğundan Eş. 3.11c'den

$\nabla^2 \vec{E}(x, y, z) = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}(x, y, z)$  göz önüne alınırsa,

Elektrik alanının sadece z bileşeni düşünülürse,

$$\nabla^2 \vec{E}(x, y, z) = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}_z(x, y, z) \quad (3.13)$$

olur.

$\vec{E}_z(x, y, z) = \vec{E}_z^0(x, y, z)e^{-\gamma z}$  biçiminde ifade edilirse aşağıdaki düzenleme yapılabilir. Burada  $E_0$  üst indisi ile elektrik alanının genliği ifade edilmektedir.

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\gamma E_z^0 e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \gamma^2 E_z^0 e^{-\gamma z} = \gamma^2 E_z \quad (3.14)$$

Böylece,

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \gamma^2 E_z = -\omega^2 \mu \epsilon E_z \quad (3.15)$$

elde edilir. Manyetik alan için de

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \gamma^2 H_z = -\omega^2 \mu \epsilon H_z$$

eşitliği elde edilir. İkinci dereceden kısmi türevli diferansiyel denklem 3.15'in çözümü için değişkenlerine ayırma metodu kullanılır [6].

$$E_z^0(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$E_z = XYe^{-\gamma z}$$

Burada  $\gamma$  kompleks yayılma sabitidir ve  $\gamma = \alpha + j\beta$  biçiminde ifade edilir. Bu eşitlikte ise;  $\alpha$  zayıflama  $\beta$  faz sabitidir.

Yukarıdaki eşitlikler Eş. 3.14'de kullanıldığında

$$\frac{dE_z}{dx} = \frac{YdX}{dx} e^{-\gamma z} \text{ olduğundan;}$$

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} = Y \frac{d^2 X}{dx^2} e^{-\gamma z}$$

$$\frac{d^2 E_z}{dy^2} = X \frac{d^2 Y}{dy^2} e^{-\gamma z}$$

$$\frac{dE_z}{dz} = -\gamma XY e^{-\gamma z}$$

$$\frac{d^2 E_z}{dz^2} = \gamma^2 XY e^{-\gamma z}$$

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + \gamma^2 XY = -\omega^2 \mu \in XY$$

$$h^2 = \omega^2 \mu \in + \gamma^2$$

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + h^2 XY = 0 \quad (3.16)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı XY ile bölünüp, düzenlendiğinde

$$\frac{Y}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + h^2 = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + h^2 = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (3.17)$$

ifadesi elde edilir.

Bu eşitliğin sol tarafı sadece  $x'$  in bir fonksiyonu ve sağ tarafı da sadece  $y'$  nin bir fonksiyonudur. Eşitliğin bütün  $x, y$  değerleri için geçerli olması için her iki tarafın bir sabite eşit olmasıyla mümkündür. A bir sabit olmak üzere,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + h^2 = A^2 \text{ ise}$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -A^2 \text{ olur. Bu durumda } \frac{d^2 X}{dx^2} + (h^2 - A^2)X = 0 \text{ elde edilir.}$$

Burada  $(h^2 - A^2) = B^2$  olarak ifade edilirse,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + B^2 X = 0 \quad (3.18)$$

olur. Yukarıdaki ikinci dereceden diferansiyel denklemin çözümünden,

$$m^2 + B^2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm jB \text{ olur.}$$

$$X = C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx \quad (3.19)$$

X için çözümü elde edilir.

Benzer biçimde Y için çözüm,

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + A^2 Y = 0 \quad (3.20)$$

$$Y = C_3 \cos Ay + C_4 \sin By \quad (3.21)$$

olarak elde edilir.

Bulunan çözümler  $E_z^0(x, y) = X(x)Y(y)$  eşitliğinden

$$E_z^0 = XY = (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)(C_3 \cos Ay + C_4 \sin Ay) \quad (3.22)$$

$$E_z = C_1 C_3 \cos Bx \cos Ay + C_1 C_4 \cos Bx \sin Ay + C_2 C_3 \sin Bx \cos Ay + C_2 C_4 \sin Bx \sin Ay$$

Genel çözüm olarak elektrik alanınının z bileşeni için elde edilir.

Genel çözüme sınır koşulları uygulanarak A ve B katsayıları aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$E_z^0 = 0 \quad x=0, x=a, y=0 \text{ ve } y=b$$

$$x=0 \text{ için } E_z^0 = C_1 C_3 \cos Ay + C_1 C_4 \sin Ay = 0$$

$$C_1 (C_3 \cos Ay + C_4 \sin Ay) = 0$$

$C_1 = 0$  olması halinde mümkündür. O halde;

$$E_z^0 = C_2 C_3 \sin Bx \cos Ay + C_2 C_4 \sin Bx \sin Ay \text{ olur.}$$

$$y=0 \text{ için } E_z^0 = C_2 C_3 \sin Bx = 0$$

TM modu için  $E_z \neq 0, H_z = 0 \Rightarrow B \neq 0$  olmalıdır.

O halde  $C_2 = 0$  veya  $C_3 = 0$  olmalıdır.  $C_2 = 0$  olduğunda  $E_z^0 = 0$  olacağından  $C_3 = 0$  olmalıdır.

$$E_z^0 = C_2 C_4 \sin Bx \sin Ay \text{ olur. Burada } C_2 C_4 = C \text{ olarak alınırsa,}$$

$E_z^o = C \sin Bx \sin Ay$  biçiminde yazılabilir.

$x = a$  için  $E_z = C \sin Ba \sin Ay = 0$

$A \neq 0$  olması gerektiğinden her  $y$  değeri için bu eşitliğin sağlanması ancak  $\sin Ba = 0 \Rightarrow Ba = m\pi$   $m = 1, 2, 3, \dots$  olması halinde mümkündür.

$B = \frac{m\pi}{a}$  olacağından aşağıdaki ifade bulunur.

$$E_z = C \sin \frac{m\pi}{a} x \sin Ay \quad (3.23)$$

$y = b$  için  $C \sin \frac{m\pi}{a} x \sin Ab = 0$  olmalıdır.

Bu eşitliğin tüm  $x$  değerlerini sağlaması  $\sin Ab = 0 \Rightarrow Ab = n\pi$   $n = 1, 2, 3, \dots$  olması ile mümkündür.

O halde;

$$E_z^o = C \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{y} y$$

$$E_z = E_z^o e^{-\gamma z}$$

$$E_z = C \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{y} y e^{-\gamma z} \quad (3.24)$$

eşitliği elde edilir.

Buradan da görüleceği gibi  $m$  ve  $n$ 'nin her değer çifti için dalga kılavuzu içinde bir alan yapısı elde edilir. Buna  $TM_{mn}$  modu adı verilir.

Ayrıca Eş. 3.4'de görüldüğü üzere mümkün olan en küçük mertebeden mod TM için  $TM_{11}$  modudur.

Yayılm sabiti  $\gamma$ ,

$$h^2 = A^2 + B^2, \quad A = \frac{n\pi}{b}, \quad B = \frac{m\pi}{a}, \quad h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\gamma^2 = h^2 - \omega^2 \mu \epsilon \quad (3.25a)$$

$$\gamma^2 = A^2 + B^2 - \omega^2 \mu \epsilon \quad (3.25b)$$

$$\gamma^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon \quad (3.25c)$$

$$\gamma = \sqrt{\left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad (3.25d)$$

olarak bulunur. Dalga kılavuzu içinde dalga yayılımının oluşması için  $\gamma$ 'nın sanal bir sayı (kompleks bir sayı)  $\gamma = j\beta$  veya en azından sanal kısmının sıfırdan farklı olması gerekir.

Eğer  $\gamma$  kompleks bir sayı ise,

$$\gamma = j\beta_{mn} = j\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2} \text{ olmalıdır.}$$

Gerçekten de;

i)  $\gamma = j\beta_{mn}$  olması halinde alan bileşeni aşağıdaki gibi olur.

$$E_z(x, y, z, t) = \text{Re}\{E_z(x, y, z)e^{j\omega t}\} \quad (3.26)$$

$$E_z(x, y, z, t) = C \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos(\omega t - \beta_{mn} z) \quad (3.27)$$

Bu ise pozitif z eksenini doğrultusunda ilerleyen bir dalgayı gösterir.

ii)  $\gamma$  yayılım sabitinin gerçekte olması durumunda,  $\gamma = \alpha_{mn}$  olur.

$$E_z(x, y, z, t) = C e^{-\alpha_{mn} z} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos \omega t \quad (3.28)$$

Bu ise z eksenini boyunca  $e^{-\alpha_{mn} z}$  faktörü ile zayıflayan bir dalgayı gösterir.

Öte yandan  $\gamma$  yayılım sabitinin kompleks olması için,

$$\omega \mu \epsilon > \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (3.29)$$

koşulunu sağlaması gerekir. Başka bir deyişle dalga kılavuzu içinde dalga yayılımının oluşması için uyarma frekansı ve kılavuzun a,b boyutları Eş. 3.29'daki koşulu sağlamalıdır.

Dalga kılavuzu içinde dalga yayılımının oluşması için mümkün olan en küçük uyarma frekansı  $\omega_c$  ile gösterilirse Eş. 3.30 grubu elde edilir. Buna bağlı olarak kesim frekansı Eş. 3.31'deki gibidir.

$$\omega_c^2 \mu \epsilon = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (3.30a)$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2} \quad (3.30b)$$

$$fc_{mn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (3.31)$$

O halde  $f > fc_{mn}$  koşulunu sağlayan frekanslar için  $\gamma$  yayılım sabiti kompleks olur.

$$\gamma = j\beta_{mn}$$

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$\beta_{mn} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{1 - \frac{1}{(2\pi f)^2 \sqrt{\mu\varepsilon}} \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]} \quad (3.32)$$

Burada,

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \mu\varepsilon(2\pi fc_{mn})^2$$

olduğundan faz sabiti  $\beta_{mn}$  aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\beta_{mn} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{fc_{mn}}{f}\right)^2} \quad (3.33)$$

Dalga yayılımının hızı  $Vp_{mn} = \frac{\omega}{\beta_{mn}}$  bağıntısı ile verilir.

$$V_{p_{mn}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{V_p}{\sqrt{1 - \left(\frac{fc_{mn}}{f}\right)^2}} \quad (3.34)$$

Burada  $V_p$  aynı ortamda yayılan bir düzlemsel dalganın faz hızıdır. (Elektriksel özellikleri  $\mu, \varepsilon$  olan ortam)  $f > fc_{mn}$  için  $V_{p_{mn}} = V_p$  ifadesi geçerlidir.

Dalga kılavuzu içindeki  $TM_{mn}$  modunun dalga boyu, aşağıdaki bağıntı ile verilir.

$$\lambda_{mn} = \frac{V_{p_{mn}}}{f} \Rightarrow \lambda_{mn} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{fc_{mn}}{f}\right)^2}} \quad (3.35)$$

Burada  $\lambda$  aynı ortamda yayılan bir düzgün düzlemsel dalganın dalga boyudur.

Bu durumda  $E_z$  olan bileşeni, Eş. 3.36'daki bağıntıyla verilir.

$$E_z = C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_{mn}z} \quad (3.36)$$

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \text{ve TM modu için } H_z = 0 \text{ olduğundan;}$$

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = C \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_{mn}z} \quad \text{şeklindedir.}$$

Ayrıca  $h^2 = A^2 + B^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$  olduğundan aşağıdaki ifade bulunur.

$$H_x = \frac{j\omega \left(\frac{n\pi}{b}\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_{mn}z} \quad (3.37a)$$

Benzer şekilde diğer bileşenler de elde edilir.

$$E_y = \frac{-j\beta_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_{mn}z} \quad (3.37b)$$

$$E_x = \frac{-j\beta_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_{mn}z} \quad (3.37c)$$

$$H_y = \frac{-j\omega \left(\frac{m\pi}{a}\right)}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_{mn}z} \quad (3.37d)$$

Bu eşitliklerden görüleceği üzere;

$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\beta_{mn}}{\omega\epsilon}$  ve  $\beta_{mn} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{fc_{mn}}{f}\right)^2}$  olduğundan aşağıdaki ifade bulunur.

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{fc_{mn}}{f}\right)^2} = \eta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{fc_{mn}}{f}\right)^2} \quad (3.38a)$$

Bura  $\eta_0$  , elektriksel özellikleri  $\varepsilon, \mu$  olan sınırsız bir ortamda yayılan bir düzlemsel dalganın dalga empedansıdır.

Benzer şekilde;

$$\frac{E_y}{H_x} = -\frac{\beta_{mn}}{\omega\varepsilon} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{fc_{mn}}{f}\right)^2} \quad (3.38b)$$

elde edilir.

TM<sub>mn</sub> modunun dalga empedansı, Eş. 3.39'daki gibidir.

$$\eta_{TM_{mn}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{fc_{mn}}{f}\right)^2} \quad \text{veya} \quad (3.39a)$$

$$\eta_{TM_{mn}} = \eta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{fc_{mn}}{f}\right)^2} \quad (3.39b)$$

### 3.2.2. TE (enine elektrik) modlar

Manyetik alana ait dalga denklemi,

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \gamma^2 H_z = -\omega^2 \mu \varepsilon H_z \quad (3.40)$$

biçiminde verilir. Enine manyetik (TM) moduna benzer biçimde alanlara ait ifadeler elde edilir.

$$H_z(x, y, z) = H_z^0(x, y)e^{-\gamma z} \quad (3.41)$$

$$H_z^0(x, y) = X(x)Y(y) \Rightarrow H_z(x, y, z) = X(x)Y(y)e^{-\gamma z} \quad (3.42)$$

$$H_z^0 = (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)(C_3 \cos Ay + C_4 \sin Ay) \quad (3.43)$$

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (3.44)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (3.45)$$

$$h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (3.46)$$

TE modu için  $E_z = 0$  olacağından Eş.3.47 ve Eş. 3.48 elde edilir.

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3.47a)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.47b)$$

$$H_z = (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)(C_3 \cos Ay + C_4 \sin Ay)e^{-\gamma z} \quad (3.48a)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = (C_1 \cos Bx + C_2 \sin Bx)(-C_3 A \sin Ay + C_4 A \cos Ay)e^{-\gamma z} \quad (3.48b)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = (-C_1 B \sin Bx + C_2 B \cos Bx)(C_3 \cos Ay + C_4 \sin Ay)e^{-\gamma z} \quad (3.48c)$$

Sınır koşulları;

$$E_x|_{y=0} = 0 \quad E_x|_{y=b} = 0 \quad E_y|_{x=0} = 0 \quad E_y|_{x=a} = 0 \text{ şeklindedir.}$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{h^2} (-C_1 B \sin Bx + C_2 B \cos Bx)(C_3 \cos Ay + C_4 \sin Ay)e^{-\gamma z} \quad (3.49)$$

Eş. 3.49'da sınır koşullarından  $x=0$  konulursa Eş. 3.50 bulunur.

$$\frac{j\omega\mu}{h^2} C_2 B (C_3 \cos Ay + C_4 \sin Ay) e^{-\gamma z} = 0 \quad (3.50)$$

Buradan da  $B \neq 0$  olması gerektiğinden  $C_2 = 0$  elde edilir.

$$H_z = (C_1 \cos Bx)(C_3 \cos Ay + C_4 \sin Ay)e^{-\gamma z} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = (C_1 \cos Bx)(-C_3 A \cos Ay + C_4 A \sin Ay)e^{-\gamma z} \quad (3.52)$$

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{h^2} (C_1 \cos Bx)(-C_3 A \sin Ay + C_4 A \cos Ay)e^{-\gamma z} \quad (3.53)$$

$$y = 0 \text{ sınır koşulu için } -\frac{j\omega\mu}{h^2} (C_1 \cos Bx) C_4 A = 0$$

$C_1 \neq 0$  ve  $A \neq 0$  olması gerektiğinden  $C_4 = 0$  olmalı.

O halde ;

$$H_z = C \cos Bx \cos Ay e^{-\gamma z} \quad C = C_1 C_3$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -C B \sin Bx \cos Ay e^{-\gamma z} \quad (3.54a)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{h^2} \left(-C \frac{m\pi}{a}\right) \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \quad (3.54b)$$

$$x=a \text{ sınır koşulu için } \frac{j\omega\mu}{h^2}(-CB)\sin Ba \cos Aye^{-\gamma z} = 0$$

$B \neq 0$  olması gerektiğinden  $\sin Ba = 0$  olmalıdır.

$$Ba = m\pi \quad m=1,2,3,\dots \quad B = \frac{m\pi}{a}$$

$$H_z = C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos Aye^{-\gamma z} \quad (3.55a)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -CA \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin Aye^{-\gamma z} \quad (3.55b)$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{h^2} \left(C \frac{n\pi}{b}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin \frac{n\pi}{b} ye^{-\gamma z} \quad (3.55c)$$

$$y=b \text{ sınır koşulu için } \frac{j\omega\mu}{h^2}(CA)\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin Ab e^{-\gamma z} = 0$$

$A \neq 0, C \neq 0 \Rightarrow \sin Ab = 0$  olması gerektiğinden  $Ab = n\pi, n = 1,2,3\dots$

$$A = \frac{n\pi}{b}$$

$$H_z = C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-\gamma z} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (3.56)$$

Dalga kılavuzu içinde dalga yayılımının oluşması için  $\gamma$  yayılım sabitinin kompleks veya en azından sanal kısmının sıfırdan farklı olması gerekir.

$h^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu \in$  ifadesi aşağıdaki şekle dönüştürülebilir.

$h^2 = A^2 + B^2$  Burada  $A = \frac{n\pi}{b}$ ,  $B = \frac{m\pi}{a}$ . Böylece ;

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad (3.57)$$

elde edilir.

$\gamma$ 'nin kompleks olması için,  $\omega^2 \mu \epsilon > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$  koşulunun sağlanması gerekir. Bu koşulu sağlayan en küçük uyarma frekansı  $\omega_c$  ve kesim frekansı  $f_c$  aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (3.58)$$

$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (3.59)$$

TM modunda mümkün olan en küçük mertebeden mod  $TM_{11}$ 'dir.

Öte yandan

$$H_z = C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (3.60)$$

eşitliğinden görüleceği üzere TE modunda  $m=0$ ,  $n=0$  müsaade edilebilir değerlerdir. Her ne kadar  $TE_{00}$  matematiksel olarak geçerli bir çözüm ise de ; bu durumda  $H_z = Ce^{-\gamma z}$  ve dolayısıyla  $E_x = 0$ ,  $E_y = 0$ ,  $H_x = 0$  ve  $H_y = 0$  olur. Bu ise fiziksel bir mod değildir. O halde TE modunda mümkün olan en küçük mertebeden mod  $TE_{01}$  veya  $TE_{10}$  modu olur. Bu da dalga kılavuzunun arakesit boyutlarına bağlıdır.

$b < a$  olduğu kabul edilirse;

TE<sub>01</sub> modu için kesim frekansı :

$$fc_{01} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2} = \frac{Vp}{2b} \quad (3.61)$$

TE<sub>10</sub> modu için kesim frekansı:

$$fc_{10} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{Vp}{2a} \quad (3.62)$$

$b < a$  için  $fc_{01} > fc_{10}$  olur. O halde en küçük mertebeden mod TE<sub>10</sub>'dır.

$$H_z = C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\beta_{mn}z} \quad (3.63)$$

Buradan empedans aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\eta_{TE_{mn}} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{fc_{mn}}{f}\right)^2}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{fc_{mn}}{f}\right)^2}} \quad (3.64)$$

#### 4. DALGA KILAVUZLARI İÇİN SKALER İFADELER

Dalga kılavuzları için skaler ifadeler elde edilirken sınır değer problemlerinin bir sınıfı olan karakteristik denklem problemleri kullanılacaktır. Karakteristik denklem problemlerinde hem diferansiyel denklemler hem de sınır koşulları homojendir. Fiziksel bakış açısıyla karakteristik denklem problemlerinde kaynak yoktur denilebilir. Genel karakteristik denklem formu, aşağıdaki eşitlikle gösterilebilir [7].

$$[A]\{\phi\} - \lambda[B]\{\phi\} = 0 \quad (4.1)$$

$[A]$  ve  $[B]$  bilinen matrisler,  $\lambda$  ve  $\{\phi\}$  bulunması gereken değerlerdir. Çözümde kullanılan yol;  $\lambda$  için sistemi tekil yapan değerleri bulmaktır. Başka bir deyişle  $|A - \lambda B|$  determinatını 0 yapan  $\lambda$  değerleri bulunmalıdır. Bu tip denklemlerde  $\lambda$  değerleri öz değerler,  $\{\phi\}$  ise öz vektörler olarak adlandırılır.

##### 4.1 Homojen Dalga Kılavuzları

Sonlu elemanlar metodunun, içi boş dalga kılavuzlarına veya homojen izotropik maddelerle doldurulmuş kılavuzlara uygulanması 1960'lı yılların sonlarına doğrudur ve elektromanyetikte ilk uygulamaları olarak kabul edilir. Boş dalga kılavuzlarının seçilmesi basit yapıda olmalarından ve mikrodalga mühendisliğinde öneminin büyük olmasındandır [8].

Homojen kılavuzlarda iki tip modun bulunduğu önceki bölümde belirtilmişti. Buna göre  $E_z$  ve  $H_z'$  in homojen Helmholtz denklemini sağladığı gösterilebilir.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_c^2 \Phi = 0 \quad (4.2)$$

Burada  $\Phi$  TE modu için  $H_z$ , TM modu için  $E_z$  değerine karşılık gelen ve saptanması gereken alan yoğunluk miktarıdır.  $k_c^2 = \omega^2 \epsilon - \mu - \beta^2$  ise kesimdeki dalga sayısıdır.

TM modu için homojen Dirichlet sınır koşulları dalga kılavuzu duvarında sağlanır.

$$\phi = 0 \quad \Gamma \quad de \quad (4.3)$$

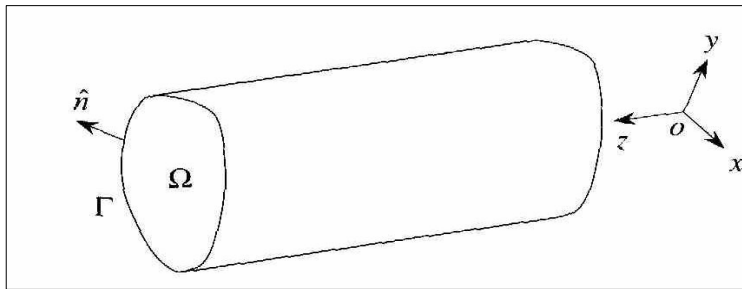
TE modu için ise homojen Neumann sınır koşulları dalga kılavuzu duvarında sağlanır.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \Gamma \quad de \quad (4.4)$$

Problem için kullanılacak fonksiyon,  $\Omega$  kılavuzun kesit yüzey alanını göstermek üzere aşağıdaki gibidir.

$$F(\Phi) = \frac{1}{2} \iint \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k_c^2 \Phi^2 \right] d\Omega \quad (4.5)$$

Homojen olarak doldurulmuş dalga kılavuzu Şekil 4.1'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Homojen olarak doldurulmuş dalga kılavuzu

Sistem eşitliklerinin çözümü Eş. 4.6 ile mümkündür [9].

$$[K]\{\phi\} = \{0\} \quad (4.6)$$

Bölüm 2 ' de potansiyel için elde edilen eşitlikler  $\phi$  için düzenlenebilir.

$$\phi^e(x, y) = a^e + b^e x + c^e y \quad (4.7a)$$

$$\phi_1^e = a^e + b^e x_1^e + c^e y_1^e \quad (4.7b)$$

$$\phi_2^e = a^e + b^e x_2^e + c^e y_2^e \quad (4.7c)$$

$$\phi_3^e = a^e + b^e x_3^e + c^e y_3^e \quad (4.7d)$$

Burada üst indis e, eleman sayısını ifade etmektedir.

Eş. 4.7 genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^e \phi_j^e \quad (4.8)$$

Burada  $\alpha_j^e$  şekil fonksiyonlarıdır ve

$$\alpha_j^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_j^e e + b_j^e x + c_j^e y) \quad j=1,2,3 \quad (4.9)$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca  $a_j^e, b_j^e, c_j^e$  de j değerleri için

$$a_1^e = x_2^e y_3^e - y_2^e x_3^e \quad b_1^e = y_2^e - y_3^e \quad c_1^e = x_3^e - x_2^e \quad (4.10a)$$

$$a_2^e = x_3^e y_1^e - y_3^e x_1^e \quad b_2^e = y_3^e - y_1^e \quad c_2^e = x_1^e - x_3^e \quad (4.10b)$$

$$a_3^e = x_1^e y_2^e - y_1^e x_2^e \quad b_3^e = y_1^e - y_2^e \quad c_3^e = x_2^e - x_1^e \quad (4.10c)$$

olarak elde edilir.

$$\text{Burada } \Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e) \quad \text{e. elemanın alanını}$$

göstermektedir.

K matrisi, eleman matrislerinin birleştirilmesiyle oluşur. Her bir eleman için K matrisi  $[K^e]$  ile ifade edilebilir ve aşağıdaki formdadır.

$$K_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial y} - k_c^2 \alpha_i^e \alpha_j^e \right) d\Omega \quad (4.11)$$

Bilinmeyen  $k_c$  olduğundan eşitlik basitleştirilerek 2 parça halinde yazılabilir

$$K_{ij}^e = A_{ij}^e - k_c^2 B_{ij}^e \quad (4.12)$$

$$A_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad (4.13)$$

$$B_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \alpha_i^e \alpha_j^e d\Omega \quad (4.14)$$

Düzenlemeler yapıldığında Eş. 4.1'e uygun yapıda bir eşitlik elde edilir.

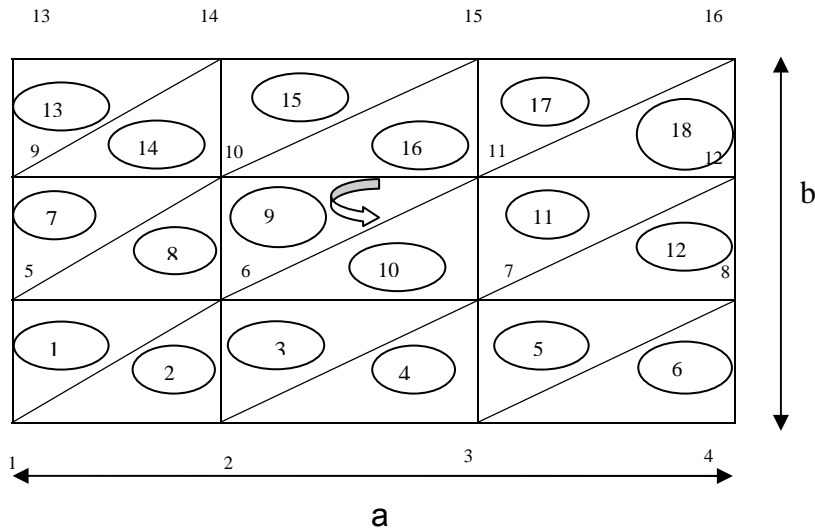
$$[A]\{\phi\} = k_c^2 [B]\{\phi\} \quad (4.15)$$

Eş. 4.15'deki matrisler , bölüm 2' deki matrislerle karşılaştırıldığında A matrisi C matrisi ile aynıdır. B matrisi eleman bazında hesaplanınca, S alanı göstermek üzere aşağıdaki gibi basit bir ifadeye dönüşür.

$$B_{ij}^e = \begin{cases} S/12, & i \neq j \\ S/6, & i = j \end{cases} \quad (4.16)$$

Aşağıdaki şekilde homojen dikdörtgen kılavuzun x yönünde 3 birim, y yönünde 3 birime; toplam 18 elemana ayrılması gösterilmiştir. Buna bağlı olarak her eleman için noktalar tespit edilmiştir.

Kullanılan bilgisayar programı ile (Program I) alanın bölümlendirilmesi ve koordinatların belirlenmesi otomatik yapılarak, yukarıdaki matrisler hesaplatılmıştır. Buna göre homojen bir kılavuz için kesimdeki dalga sayısı bulunabilmektedir.



Şekil 4.2. 18 elemana ayrılmış dikdörtgen dalga kılavuzu

Şekil 4.2'deki eleman bazında nokta numaralandırılması, ok yönüne göre yapılmaktadır. Örneğin 1. eleman ele alınırsa lokal numaralandırma 1 - 2- 3' e karşılık, global numaralandırma 1- 5- 6 şeklindedir.

Eleman sayısının ve nokta sayısının hesaplanabilmesi için x ve yönündeki bölme sayısını bilmek yeterlidir.

Buna göre, bölme sayılarının çarpımının iki katı eleman sayısını; bölme sayılarının birer fazlaları ile çarpımları, toplam nokta sayısını vermektedir.

Çizelge 4.1'de yukarıda anlatılanlara göre eleman – nokta bağlantısı verilmiştir. Çizelge 4.2'de  $TM_{11}$  modunda kare dalga kılavuzu için eleman sayısı artırılarak kesimdeki en küçük dalga sayısı SEM ile hesaplanıp, analitik değere göre hata değeri incelenmiştir. Kare dalga kılavuzu için yapılan işlemler dikdörtgen kılavuz için Çizelge 4.3'de tekrarlanmıştır. Eleman sayısı arttıkça analitik değerler ile SEM değerleri arasındaki hata oranının azaldığı belirlenerek, dikdörtgen kılavuz için x yönündeki bölme sayısı 40, y yönündeki bölme sayısı 20 alınarak çeşitli modlar için kesimdeki dalga sayısı hesaplanmıştır ve Çizelge 4.4'de elde edilen değerler gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. Eleman - nokta bağlantısı

Eleman	Lokal			Eleman	Lokal		
	1	2	3		1	2	3
1	1	6	5	14	9	10	14
2	1	2	6	15	10	15	14
3	2	7	6	16	10	11	15
4	2	3	7	17	11	16	15
5	3	8	7	18	11	12	16
6	3	4	8				
7	5	10	9				
8	5	6	10				
9	6	11	10				
10	6	7	11				
11	7	12	11				
12	7	8	12				
13	9	14	13				

Çizelge 4.2 Kare dalga kılavuzu için  $TM_{11}$  modunda en küçük dalga sayısı ( $b=a$ ) analitik değer : 4,4429

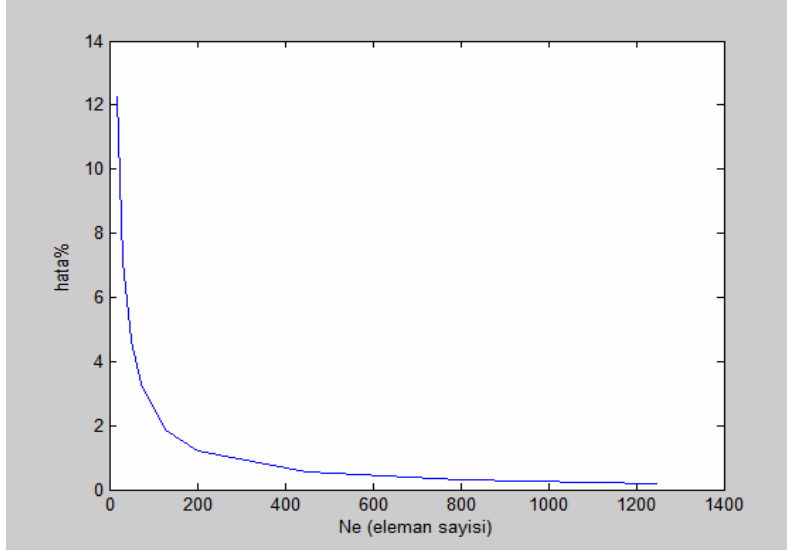
$N_x$	$N_y$	$N_e$	$N_p$	SEM $k_c.a$	%hata
3	3	18	16	4,9877	12,2623
4	4	32	25	4,7599	7,1359
5	5	50	36	4,6501	4,6631
6	6	72	49	4,5887	3,2823
8	8	128	81	4,5262	1,8755
10	10	200	121	4,4967	1,2105
15	15	450	256	4,4670	0,5431
20	20	800	441	4,4565	0,3066
25	25	1250	676	4,4516	0,1966

Çizelge 4.3. Dikdörtgen dalga kılavuzu için en küçük dalga sayısı ( $b=2a$ ) analitik değer : 3,5124

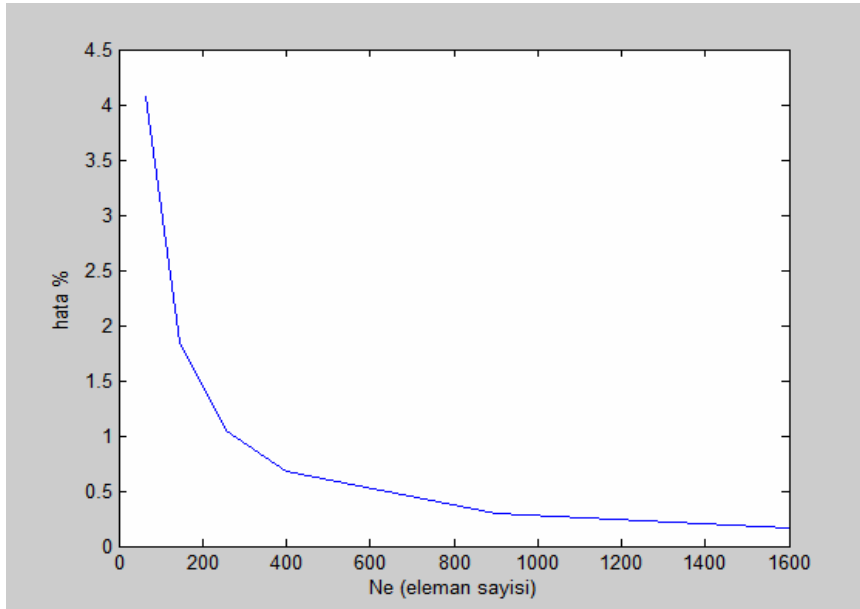
$N_x$	$N_y$	$N_e$	$N_p$	$k_c.a$	%hata
4	8	64	45	3,65557	4,0784
6	12	144	91	3,5772	1,8446
8	16	256	153	3,5491	1,0457
10	20	400	231	3,5360	0,6721
15	30	900	496	3,5229	0,3
20	40	1600	861	3,5183	0,1691

Burada,  $N_x$  x yönündeki bölme sayısını,  $N_y$  y yönündeki nokta sayısını,  $N_p$  toplam nokta sayısını,  $k_c$  kesimdeki dalga sayısını,  $a$  dikdörtgenin uzun kenarını, % hata analitik değerle hesaplanan  $k_c.a$  değeri arasındaki hata oranını ifade etmektedir.

Aşağıdaki şekillerde kare ve dikdörtgen kılavuzlar için eleman sayısına bağlı olarak hatanın değişim yüzdesi verilmiştir.



Şekil 4.3. Kare dalga kılavuzu için eleman sayısı – % hata grafiği



Şekil 4.4. Dikdörtgen dalga kılavuzu için eleman sayısı – % hata grafiği

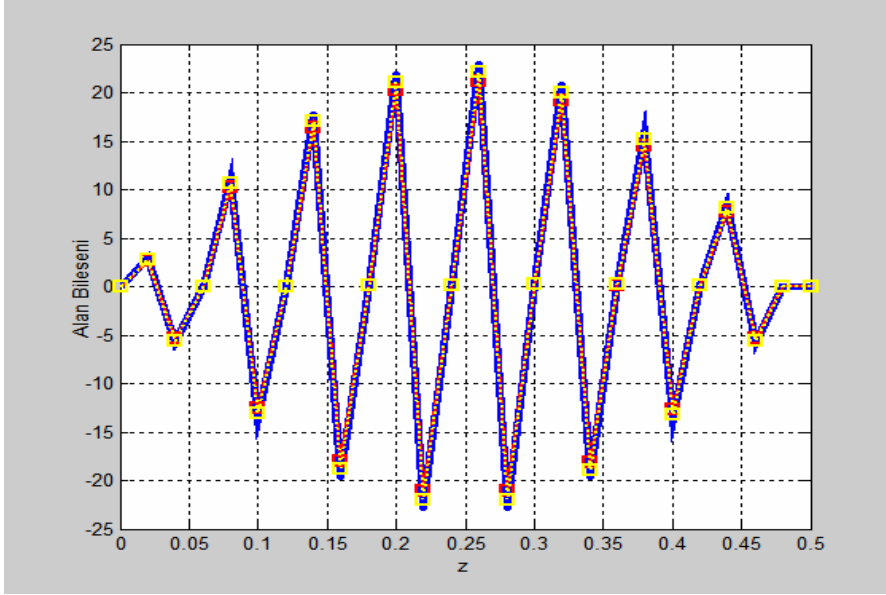
Çizelge 4.4. Dikdörtgen dalga kılavuzu için çeşitli modlarda en küçük dalga sayısı. x yönündeki bölme sayısı=40, y yönündeki bölme sayısı=20,  $a=2b$ , eleman sayısı =1600

Mod	Analitik $k_c.a$	SEM $k_c.a$	%hata
TE <sub>10</sub>	3,1416	3,1424	0,0256
TE <sub>20</sub>	6,2832	6,2896	0,1025
TE <sub>30</sub>	9,4248	9,4466	0,2311
TE <sub>01</sub>	6,2832	6,2896	0,1025
TE <sub>11</sub>	7,0248	7,0367	0,1691
TE <sub>21</sub>	8,858	8,9130	0,3069
TE <sub>31</sub>	11,3272	11,3808	0,4731
TE <sub>02</sub>	12,5664	12,6179	0,4104
TM <sub>11</sub>	7,027	7,0367	0,1691
TM <sub>12</sub>	12,9531	3,0157	0,4834
TM <sub>21</sub>	8,858	8,9130	0,3069
TM <sub>22</sub>	14,0496	14,1438	0,6705
TM <sub>23</sub>	19,8692	20,0921	1,1222
TM <sub>32</sub>	15,7080	15,8087	0,6414

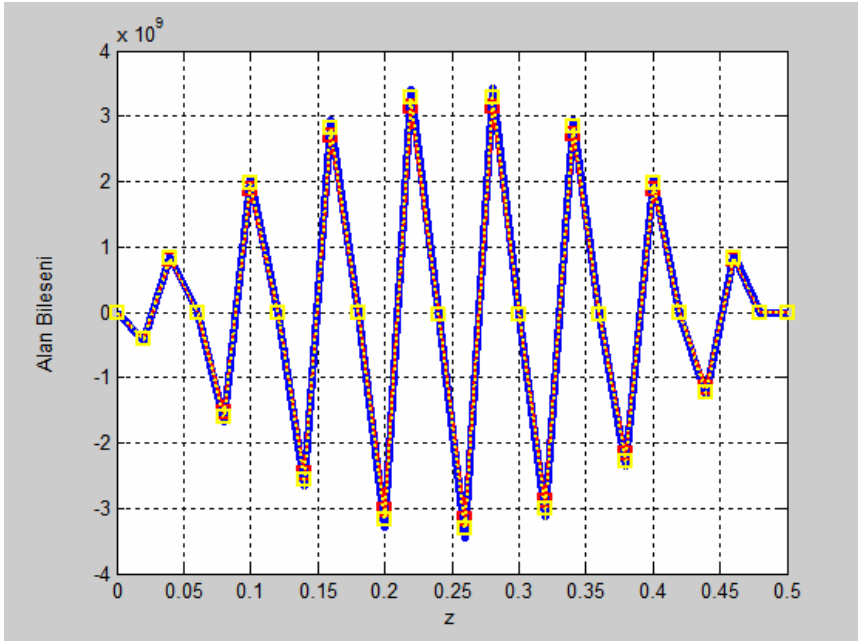
Aşağıdaki şekillerde  $a=4$ ,  $b=8$  için homojen dalga kılavuzunda alan grafikleri  $z$  değerine bağımlı olarak verilmiştir. Alan bileşenleri, Eş. 3.37- 3.55 ifadeleri kullanılarak hesaplanmıştır.  $\gamma = \alpha + j\beta$  yayılım sabitinde  $\alpha$  değeri 0 kabul edilip işlemler gerçekleştirilmiştir. Her iki mod için de  $m=1$   $n=1$  olarak belirlenerek kesim frekansından büyük frekans değerlerine göre grafikler elde edilmiştir.

Buna göre Şekil 4.5 ve 4.6'da TM<sub>11</sub> modu için 10 GHz'de, Şekil 4.7 ve 4.8 için ise TE<sub>11</sub> modu için 5GHz'de alan bileşenlerinin normalize edilmiş değerleri gösterilmiştir. Ayrıca grafiklerin üzerinde noktalarla işaretlenmiş değerler SEM ile elde edilen sonuçlardır.

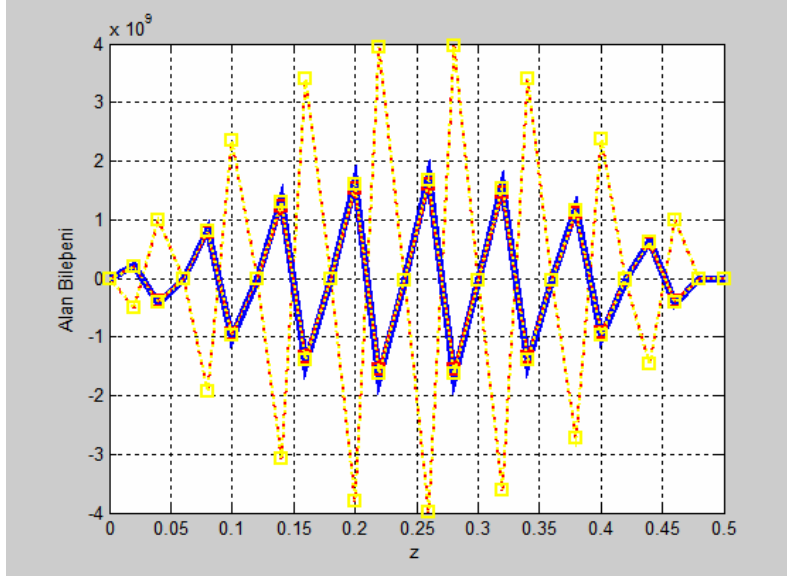
Buna göre, SEM ile eleman sayısı artırıldıkça elde edilen elektrik ve manyetik alan değerlerinin analitik değerlere yakınsadığı gözlemlenmiştir.



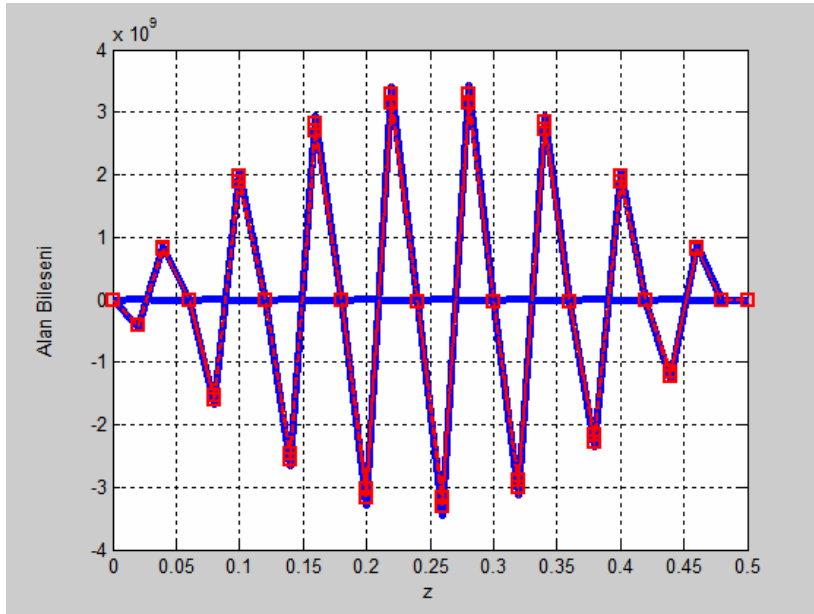
Şekil 4.5.  $TM_{11}$  modu için 10 GHz için eleman sayısına bağlı olarak elde edilen elektrik alan (x bileşeni) grafiği



Şekil 4.6.  $TM_{11}$  modu için 10 GHz için eleman sayısına bağlı olarak elde edilen manyetik alan (x bileşeni) grafiği



Şekil 4.7. TE<sub>11</sub> modu için 5 GHz için eleman sayısına bağlı olarak elde edilen elektrik alan (x bileşeni) grafiği



Şekil 4.8. TE<sub>11</sub> modu için 5 GHz için eleman sayısına bağlı olarak elde edilen manyetik alan (x bileşeni) grafiği

## 4.2 Homojen Olmayan Dalga Kılavuzları

Dalga kılavuzu homojen olmayan biçimde veya kısmen dielektrik maddelerle doldurulduğunda saf TM veya TE modları bulunmayacağından  $E_z$  ve  $H_z$  alan bileşenleri aynı anda bulunabilirler [10]. Bu nedenle yayılım modları doğada hibrittir. Bu durumda alanlar Maxwell denklemlerini yine doğrular.(4.11-4.16)

3. bölümde  $\gamma$  için verilen denklem grubu, aşağıda  $\gamma = jB$  için tekrarlanmıştır.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\beta E_y - j\omega\mu H_x \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\beta E_x + j\omega\mu H_y \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -j\beta H_y + j\omega \epsilon E_x \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -j\beta H_x - j\omega \epsilon E_y \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -j\omega \epsilon E_z \quad (4.22)$$

Alanların tamamının elde edilmesi sınır koşullarını sağlayan  $E_z$  ve  $H_z$  bileşenlerini bulmakla mümkündür. Sınır koşulları;

TM için  $\phi = E_z$ ,  $\phi$  homojen Dirichlet sınır koşullarını kılavuz duvarında sağlar.(  $\Gamma'$  de  $\phi = 0$  dir.)

TE için  $\phi = H_z$ ,  $\phi$  homojen Neumann sınır koşullarını kılavuz duvarında sağlar.(  $\Gamma'$  de  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  dir.)

$E_z$  ve  $H_z$ 'e ait diferansiyel denklemlerin elde edilmesi için dalga denklemi kullanılabilir.

$$\nabla_x \left( \frac{1}{\mu} \nabla_x E \right) - \omega^2 \epsilon E = -j\omega J \quad (4.23)$$

Bu eşitliğin z bileşeni alındığında 4.24 no'lu ifade elde edilir.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - j\beta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} E_z \right) - j\beta \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} E_y \right) - \omega^2 \epsilon E_z = 0 \quad (4.24)$$

Eş. 4.18 ve Eş. 4.20 'de  $H_y$ , Eş. 4.17 ve Eş. 4.21'de  $H_x$  çıkarılırsa Eş. 4.25 ve Eş. 4.26 elde edilir.

$$E_x = -\frac{j}{k_c^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (4.25)$$

$$E_y = -\frac{j}{k_c^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (4.26)$$

Eş. 4.25 ve Eş. 4.26, Eş. 4.24' de yerine konulup bazı düzenlemeler yapıldığında Eş. 4.27 ve aynı mantıkla eşitlik çifti olan Eş. 4.28 elde edilir.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - \frac{k_z}{\omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \right] - \epsilon E_z = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + \frac{k_z}{\omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right] - \mu H_z = 0$$

Eş. 4.27 ve Eş. 4.28'nin yukarıda belirtilen sınır koşullarına göre çözülmesi gerekmektedir.

$E_z$  ve  $H_z$  alanları arasındaki bağlantı,  $k_c$  parametresinin konuma bağlı değişken olmasından kaynaklanmaktadır.

Eş. 4.27 ve Eş. 4.28 ifadeleri sonlu elemanlar yöntemiyle çözüme uygun olabilecek şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir [11].

$$(T - M)\phi = 0 \quad (4.29)$$

Eş. 4.29'daki T ve M ifadeleri matris biçiminde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) & \frac{k_c}{\omega} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \\ \frac{k_c}{\omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] & -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \phi = \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix}$$

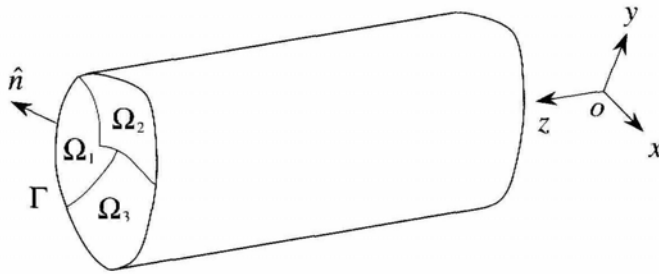
Eş. 4.29, T transpozeyi göstermek üzere Eş. 4.30'daki gibi ifade edilebilir.

$$F = \frac{1}{2} \langle \phi^T, T\phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \phi^T, M\phi \rangle \quad (4.30)$$

T, M,  $\phi$  için ifadeler birleştirilip ortak özellikleri kullanılırsa Eş. 4.31 elde edilir.

$$\begin{aligned}
F = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{1}{k_c^2} \left[ \epsilon \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)^2 + \epsilon \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)^2 \right. \\
& + 2 \frac{k_c}{\omega} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - k_c^2 \epsilon E_z^2 - k_c^2 \mu H_z^2 \left. \right] d\Omega \\
& - \frac{j}{2\omega} \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (E_z H_y + H_z E_y) - \frac{\partial}{\partial y} (E_z H_x + H_z E_x) \right] d\Omega \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Burada ikinci integral,  $F_b$  olarak adlandırılırsa  $\epsilon, \mu$  gibi sürekli olmayan parametreleri içeren  $\Omega$ , birçok alt parçaya Şekil 4.5'deki gibi ayrılabilir. Green teoreminin her bir alt parça için uygulanması,  $K$  parça sayısını,  $\Gamma_i$  her bir  $\Omega_i$  için sınırı göstermek üzere Eş. 4.32 elde edilir.



Şekil 4.9. Birçok homojen madde ile doldurulmuş dalga kılavuzu

$$\begin{aligned}
F_b = & -\frac{j}{2\omega} \sum_{i=1}^K \oint_{\Gamma_i} \left[ (E_z (H_y \hat{x} - H_x \hat{y}) + H_z (E_y \hat{x} - E_x \hat{y})) \right] \hat{n} d\Gamma \\
F_b = & -\frac{j}{2\omega} \sum_{i=1}^K \oint_{\Gamma_i} (E_z H_\tau - H_z E_\tau) d\Gamma \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Bir iç sınırdaki veya 2 dielektrik arasındaki arakesitte integral zıt yönlere çaprazlama bağ oluşturur, bu nedenle  $E_z, H_z, E_\tau, H_\tau$  sürekli olmak zorundadır. Bu nedenle Eş. 4.32, Eş. 4.33' e indirgenebilir.

$$F_b = -\frac{j}{2\omega} \oint_{\Gamma_i} (E_z H_\tau - H_z E_\tau) d\Gamma \quad (4.33)$$

Bu durum , elektrik duvarında  $E_z = E_\tau = 0$  ve magnetik duvarda  $H_z = H_\tau = 0$  şeklinde sıfırlanır. Böylece F fonksiyonu Eş. 4.34'deki gibi yazılabilir.

Buna bağlı olarak sonlu elemanlara göre bölümlene yapılabilmesi için Eş. 4.35'deki matrisler bulunur.

$$F = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{1}{k_c^2} \left[ \epsilon \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)^2 + \epsilon \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{k_c}{\omega} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - k_c^2 \epsilon E_z^2 - k_c^2 \mu H_z^2 \right] d\Omega \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C' & A' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Burada  $[A], [A'], [B], [B'], [C], [C']$  matrisleri eleman matrislerinin birleştirildiği matrislerdir. Eleman matrisleri aşağıdaki eşitliklerden elde edilir.

$$A_{ij}^e = \frac{1}{2} \iint_{\Omega^e} \frac{\epsilon}{k_c^2} \left( \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad (4.36)$$

$$A_{ij}'^e = \frac{1}{2} \iint_{\Omega^e} \frac{\mu}{k_c^2} \left( \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad (4.37)$$

$$B_{ij}^e = \frac{1}{2} \iint_{\Omega^e} \epsilon \alpha_i^e \alpha_j^e d\Omega \quad (4.38)$$

$$B_{ij}^{\prime e} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega^e} \mu \alpha_i^e \alpha_j^e d\Omega \quad (4.39)$$

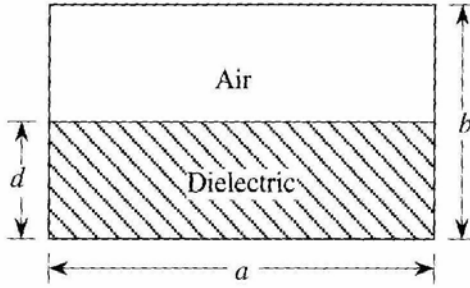
$$C_{ij}^e = \frac{\beta}{\omega} \iint_{\Omega^e} \frac{1}{k_c^2} \left( \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_i^e}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j^e}{\partial x} \right) d\Omega \quad (4.40)$$

$$C_{ij}^{\prime e} = \frac{\beta}{\omega} \iint_{\Omega^e} \frac{1}{k_c^2} \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} - \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad (4.41)$$

Burada  $[A^e]$ ,  $[A^{\prime e}]$ ,  $[B^e]$ ,  $[B^{\prime e}]$  simetrik ve  $[C^e]$ ,  $[C^{\prime e}]$  birbirinin transpozese olan matrislerdir. Eş. 4.35'in çözümü  $[A]$ ,  $[A']$ ,  $[C]$ ,  $[C']$  matrisleri  $\beta$  ve  $w$  gibi 2 bilinmeyen içerdiğinden zordur. Bu durumu ortadan kaldırmak için her iki taraf  $k_0^2$  ile çarpılır.

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C^T & A' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = k_0^2 \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

$k_c^2$ ,  $k^2 = \mu_r \epsilon_r - \delta^2$  ( $\delta = \beta/k_0$  olmak üzere) ifadesiyle değiştirilmek şartıyla matrislerin içeriği değişmez; böylece bilinmeyen tek parametre  $\delta$  olur. Verilen  $\delta$  değeri için  $k_0^2$  nin özdeğerleri ve  $[E_z, H_z]^T$  özdeğer vektörleri elde edilebilir.



Şekil 4.10.  $b/a=0.45$   $d/b=0.5$   $\epsilon_{r1}=2.45$  değerleri ile yarım doldurulmuş dikdörtgen kılavuz

Yukarıdaki şekil için çeşitli  $\beta/k_0$  değerlerinde elde edilen  $a/\lambda_0$  değerleri aşağıda gösterilmiştir.

$b/a=0.45$   $d/b=0.5$   $\epsilon_{r1}=2.45$   $\beta/k_0=0.48$  olduğunda hata oranının kaç elemanda en aza indiği aşağıdaki çizelgede incelenmiştir. Bu değerler için analitik değer 0.2'dir. [12]

Çizelge 4.5. Program 2 kullanılarak  $b/a=0.45$   $d/b=0.5$   $\epsilon_{r1}=2.45$   $\beta/k_0=0.48$  değerleri ile elde edilen sonuçlar (analitik değer 0,2)

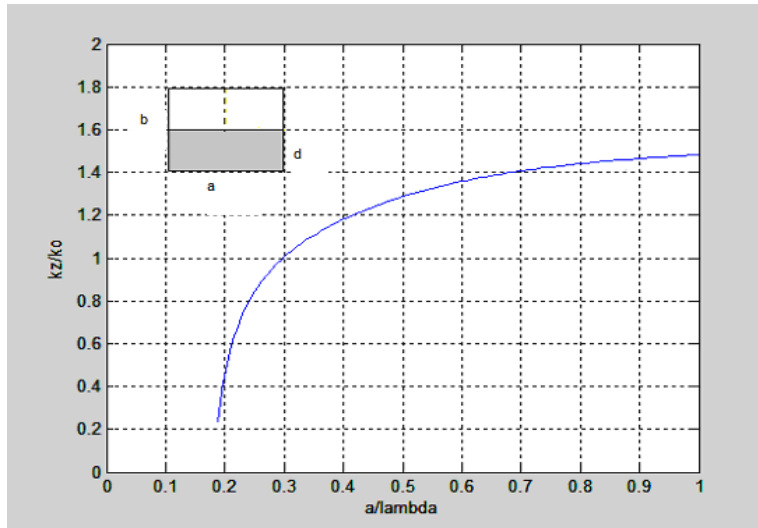
Eleman Sayısı	SEM $a/\lambda_0$	Hata Oranı %
50	0,2345	17,25
128	0,2321	16,05
200	0,2298	14,9
450	0,2221	11,05
800	0,2052	2,6

800 elemanla yaklaşık sonuç elde edildiğinden çeşitli  $\beta/k_0$  değerleri için  $a/\lambda_0$  değerleri aşağıda 800 elemanla hesaplanmıştır.

Çizelge 4.6.  $b/a=0.45$   $d/b=0.5$   $\epsilon_{r1}=2.45$  giriş değerlerinin çeşitli  $\beta/k_0$  değerleri için 800 elemanla hesaplanması

$\beta/k_0$	Analitik $a/\lambda_0$	SEM $a/\lambda_0$	Hata Oranı %
0.48	0,2	0,2052	2,6
1.00	0,3	0,2953	1,56
1.18	0,4	0,4018	0,45
1.26	0,5	0,4674	6,52
1.30	0,6	0,5166	13,9

Programda  $\beta/k_0$  değerleri daha küçük aralıklarla verildiğinde aşağıdaki grafik elde edilir



Şekil 4.11.  $d/b=0.5$   $\epsilon_{r1}=2.45$  değerleri için  $\beta/k_0$ -  $a/\lambda_0$  grafiği ( $\beta = k_z$ )

Çizelge 4.7'de  $\epsilon_{r1}=2.45$  ve  $b/a=0.45$  sabit tutularak,  $d/b$  oranı değiştiğinde elde edilen  $a/\lambda_0$  değerleri gösterilmiştir. Buna göre,  $\beta/k_0$  değeriyle  $a/\lambda_0$  değerinin doğru orantılı olduğu belirlenmiştir. Ayrıca  $\epsilon_{r1}$  ve  $b/a$  sabitken  $d/b$  oranı azaldıkça  $a/\lambda_0$  değerinin arttığı gözlemlenmiştir.

Çizelge 4.7. Parametreler değiştirilerek  $a/\lambda_0$  değerlerinin hesaplanması

$\beta/k_0$	SEM $a/\lambda_0$ $d/b=0.7, b/a=0.45$ $\epsilon_{r1}=2.45$	SEM $a/\lambda_0$ $d/b=0.7, b/a=0.45,$ $\epsilon_{r1}=2.45$	SEMa/ $\lambda_0$ $d/b=0.3, b/a=0.45,$ $\epsilon_{r1}=2.45$
0,4	0,1806	0,1970	0,2201
0,6	0,1889	0,2134	0,2362
0,8	0,2056	0,2380	0,2844
1	0,2475	0,2953	0,3970
1,2	0,3227	0,4182	0,6141
1,4	0,5317	0,6804	1

Çizelge 4.8'de  $\epsilon_{r1}=2.45$  değeri ve  $d/b=0.5$  oranı sabit tutularak,  $b/a$  oranı değiştirilmiştir.  $b/a$  oranı azaldıkça  $a/\lambda_0$  oranının arttığı gözlemlenmiştir.

Çizelge 4.8. Parametreler değiştirilerek  $a/\lambda_0$  değerlerinin hesaplanması

$\beta/k_0$	SEM $a/\lambda_0$ $d/b=0.5, b/a=0.45$ $\epsilon_{r1}=2.45$	SEM $a/\lambda_0$ $d/b=0.5, b/a=0.35,$ $\epsilon_{r1}=2.45$	SEMa/ $\lambda_0$ $d/b=0.5, b/a=0.2,$ $\epsilon_{r1}=2.45$
0,4	0,1970	0,1555	0,1139
0,6	0,2134	0,1641	0,1230
0,8	0,2380	0,1899	0,1411
1	0,2953	0,2416	0,1863
1,2	0,4182	0,3709	0,3219
1,4	0,6804	0,6467	0,6112

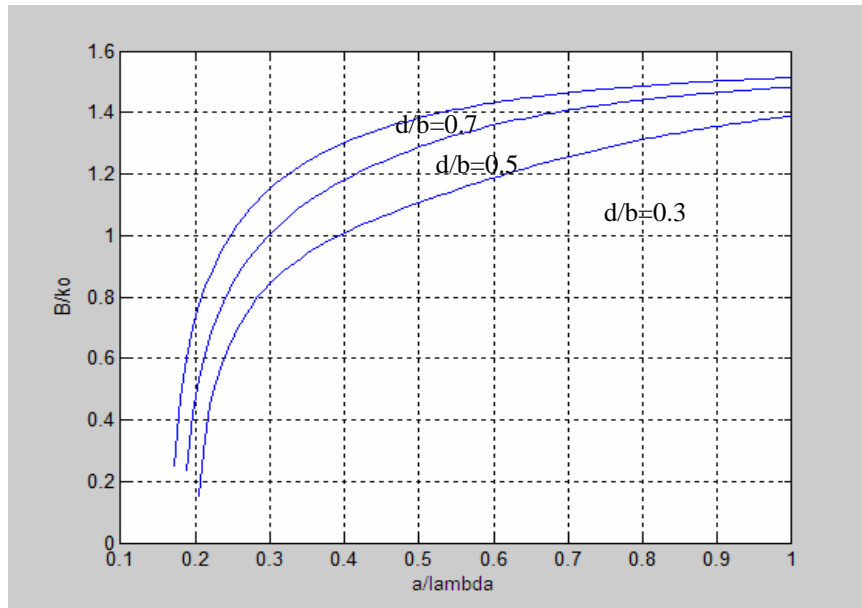
Çizelge 4.9'da ise  $d/b=0.5$ ,  $b/a=0.45$  oranları sabit tutulup  $\epsilon_{r1}$  değeri değiştirilmiştir.  $\epsilon_{r1}$  değeri azaldıkça  $a/\lambda_0$  oranının arttığı gözlemlenmiştir.

Çizelge 4.9. Parametreler değiştirilerek  $a/\lambda_0$  değerlerinin hesaplanması

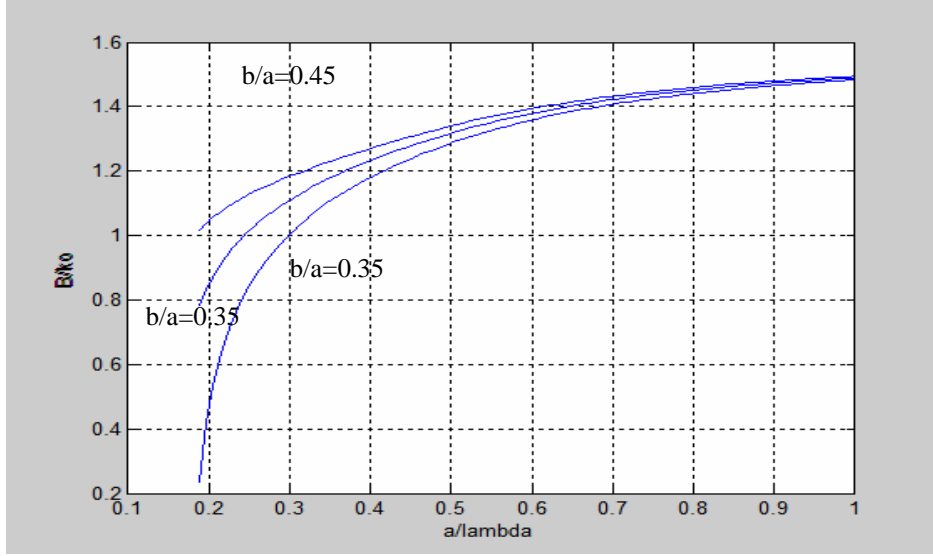
$\beta/k_0$	SEM $a/\lambda_0$ $d/b=0.5, b/a=0.4$ $\epsilon_{r1}=2.6$	SEM $a/\lambda_0$ $d/b=0.5, b/a=0.45,$ $\epsilon_{r1}=2.45$	SEMa/ $\lambda_0$ $d/b=0.5, b/a=0.45,$ $\epsilon_{r1}=2.3$
0,4	0,1954	0,1970	0,1987
0,6	0,2118	0,2134	0,2151
0,8	0,2365	0,2380	0,2478
1	0,2857	0,2953	0,3132
1,2	0,3843	0,4182	0,4522
1,4	0,5895	0,6804	0,8365

Elde edilen çizelgelere göre; herhangi iki değer sabit tutulursa değiştirilen parametre ile  $a/\lambda_0$  değerinin ters orantılı olduğu tespit edilmiştir.

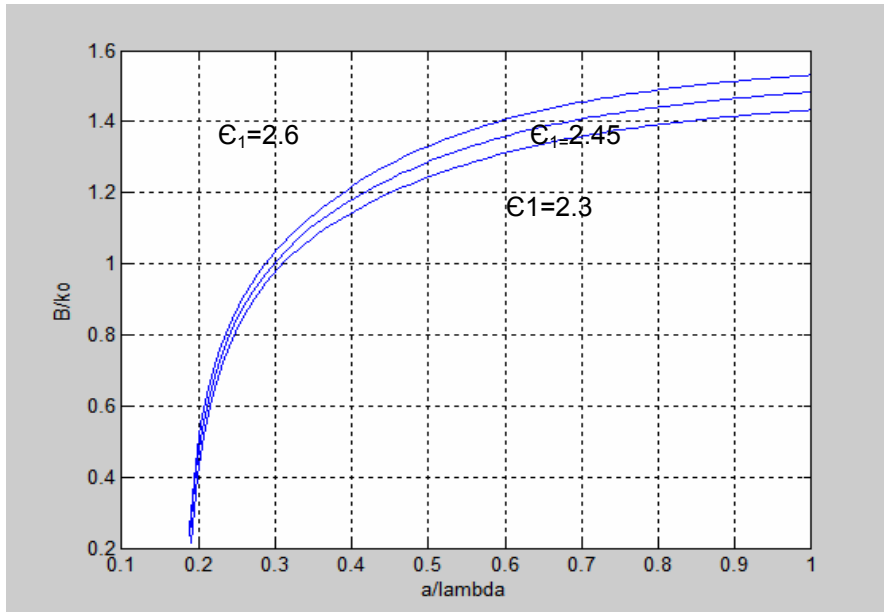
$\beta/k_0$  değerleri küçük aralıklarla alınırsa girilen değerlere göre aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 4.12.  $\epsilon_{r1}=2.45$  ve  $b/a=0.45$  sabitken  $d/a$  oranı değişimine göre  $\beta/k_0$ -  $a/\lambda_0$  grafiği değişim grafiği

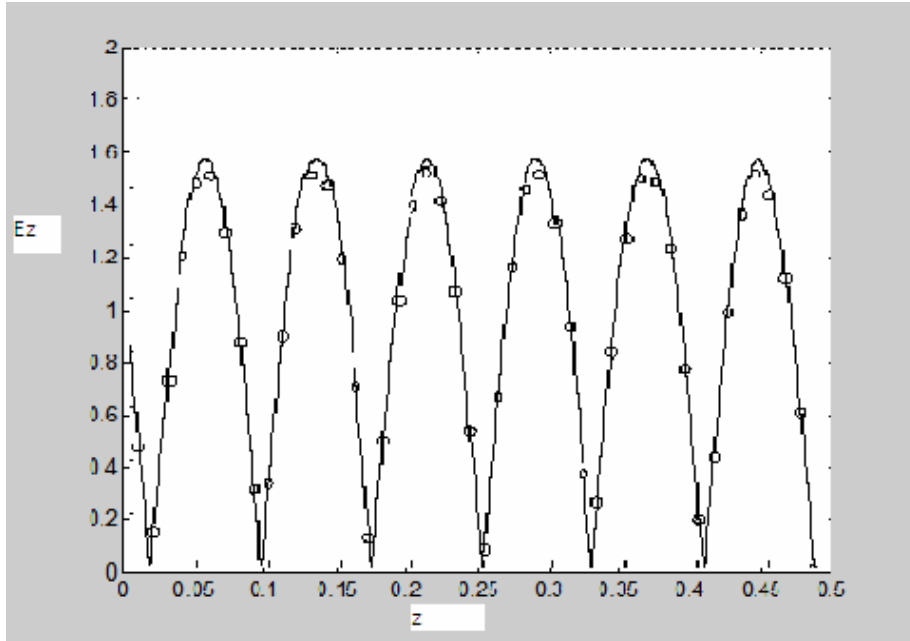


Şekil 4.13.  $d/b=0.5$ ,  $\epsilon_1=2.45$  için  $b/a$  oranı değişimine göre  $\beta/k_0 - a/\lambda_0$  grafiği

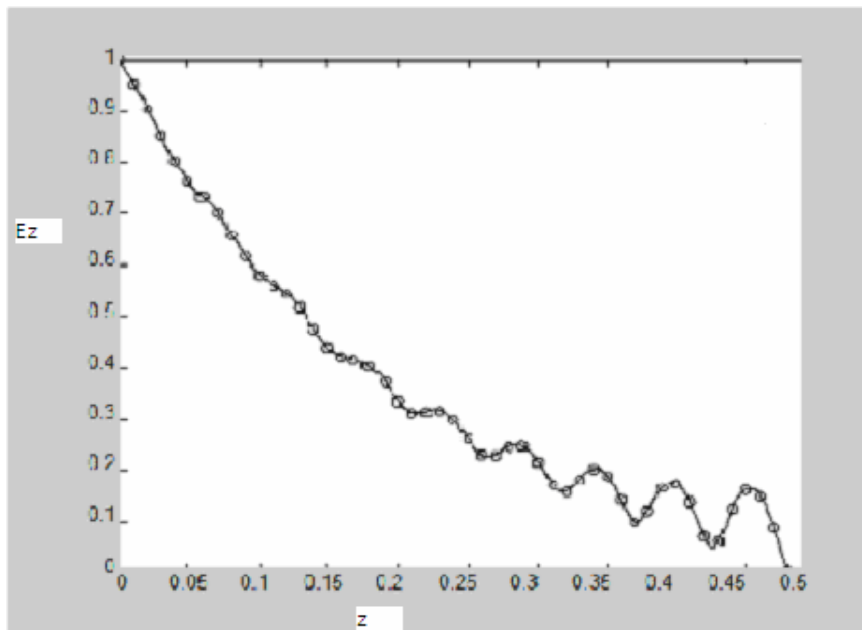


Şekil 4.14.  $d/b=0.5$   $b/a=0.45$  için  $\epsilon_1$  değişimine göre  $\beta/k_0 - a/\lambda_0$  grafiği

Yukarıda anlatılan durumlar  $a > b$  için geçerlidir. Aynı işlemler  $b > a$  durumu için de yapılabilir.



Şekil 4.15.  $b=2a$ ,  $\epsilon_r=2$  kayıpsız ortamda elektrik alan grafiği



Şekil 4.16.  $b=2a$ ,  $\epsilon_r=3$  kayıplı ortamda elektrik alan grafiği

Alan grafikleri incelendiğinde noktalı değerler sonlu elemanlar metoduyla elde edilen değerleri göstermek üzere, analitik değerler üzerinde işaretlenmiştir. Buna göre kayıpsız dielektrik ortamda alan bileşenlerinde homojen ortama oranla çok büyük değişiklikler olmamakla beraber, kayıplı ortamda  $z$  değerine bağımlı olarak alan değerinin azalarak sönümlendiği tespit edilmiştir.

Çizelge 4.10'da  $b > a$  olması durumundaki değerler incelenmiştir. Hata oranını en aza indirebilmek için yine 800 eleman kullanılmıştır.

Çizelge 4.10.  $d/a$  değerleri değiştirilerek  $b > a$  için yapılan hesaplamalar

$\beta/k_0$	Analitik $a/\lambda_0$	SEM $a/\lambda_0$	Hata %
$d/a=0.1$			
0.03	0.5	0.5	0
0.52	0.6	0.5848	2.5
0.7	0.7	0.6909	1.3
0.79	0.8	0.8040	0.5
0.83	0.9	0.8818	2
0.88	1	1.0232	2.32
$d/a=0.167$			
0.21	0.5	0.4965	0.7
0.60	0.6	0.6053	0.88
0.72	0.7	0.6851	2.12
0.82	0.8	0.8011	0.1375
0.88	0.9	0.9244	2.71
0.91	1	1.0042	0.42

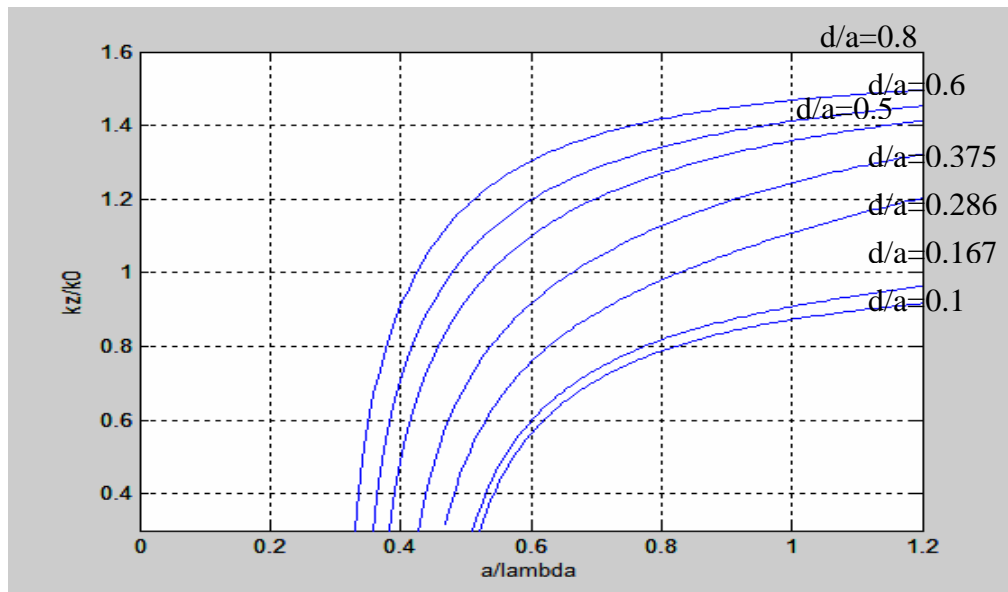
Çizelge 4.10. (Devam)  $d/a$  değerleri değiştirilerek  $b>a$  için yapılan hesaplamalar

$d/a=0.286$			
0.51	0.5	0.5035	0.7
0.78	0.6	0.6171	2.85
0.9	0.7	0.7079	1.12
0.99	0.8	0.8139	1.73
1.03	0.9	0.8745	2.83
1.10	1	0.9880	1.2
$d/a=0.375$			
0.68	0.5	0.4982	0.36
0.91	0.6	0.5996	0.06
1.05	0.7	0.7087	1.24
1.13	0.8	0.8023	0.28
1.20	0.9	0.9115	1.27
1.25	1	1.0128	1.28
$d/a=0.5$			
0.40	0.4	0.4046	1.15
0.90	0.5	0.4939	1.2
1.10	0.6	0.5994	0.1
1.20	0.7	0.6968	0.45
1.25	0.8	0.7698	3.77
1.30	0.9	0.8591	4.54
1.35	1	0.9727	2.73
$d/a=0.6$			
0.7	0.4	0.3947	1.32
1.02	0.5	0.4869	2.62
1.18	0.6	0.5876	2.06
1.23	0.7	0.6296	10
1.31	0.8	0.7386	7.6

Çizelge 4.10. (Devam)  $d/a$  değerleri değiştirilerek  $b>a$  için yapılan hesaplamalar

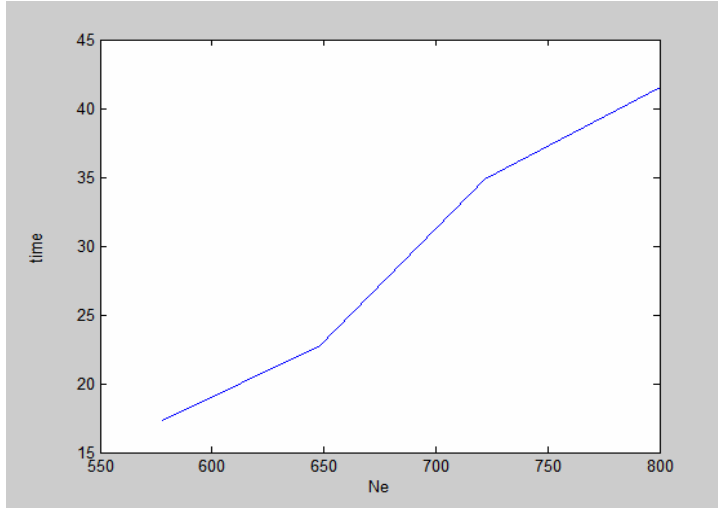
$d/a=0.6$			
1.38	0.9	0.8980	0.22
1.41	1	0.9987	0.13
$d/a=0.8$			
0.90	0.4	0.400	0
1.18	0.5	0.4978	0.44
1.29	0.6	0.5867	2.21
1.38	0.7	0.7111	1.58
1.41	0.8	0.7822	2.22
1.43	0.9	0.8356	7.15
1.44	1	0.8711	12.89

Çizelge 4.10 incelendiğinde, verilen bir  $B/k_0$  değerinde  $d/a$  oranı arttırıldıkça üretilen  $a/\lambda_0$  oranının azaldığı saptanmıştır. Bu durum Şekil 4.11'de grafiksel olarak verilmiştir.



Şekil 4.17.  $d/b=0.5, b/a=1/0.45, \epsilon_{r1}=2.45$  için  $\beta/k_0 - a/\lambda_0$  grafiği ( $\beta = k_z$ )

Ayrıca programın çalışması incelendiğinde eleman sayısı arttıkça hızın azaldığı saptanmıştır. Dolayısıyla eleman sayısı ile zaman arasında doğrusal olmayan bir grafik elde edilmiştir.



Şekil 4.18. Eleman sayısı-zaman bağlantısı

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonlu elemanlar metodu elektromanyetik problemlerin nümerik analizinde popöler bir metot haline gelmiştir. Bu popöleritenin nedeni problemi basit hale indirgemesinden ve kesin sonuçlar elde etmesinden kaynaklanmaktadır. Metodun sonlu farklar gibi diğer bir nümerik metoda göre üstünlüğü lineer olmayan, homojen olmayan ve kapalı sınır problemlerinde iyi sonuçlar vermesi ve matematiksel hata değerlerini döndürebilmesidir. Bunun yanında açık sınır ve uzak alan problemlerinde sonlu farklar metodu kadar kullanılamamaktadır. Bu nedenle problemin spesifik özelliklerine bağlı olarak uygun metot belirlenmelidir. Sonlu elemanlar metodunun diğer yöntemlere göre dalga kılavuzu problemlerine uygulanabilirliği dikkate alınarak çalışma konusu belirlenmiştir.

Çalışmada, homojen ve homojen olmayan dalga kılavuzları için çeşitli parametrelerin tespitinde kullanılan yöntemle; eleman sayısı arttıkça gerçek değerlere yakın sonuçlar üretildiği gösterilmiştir.

Boş kılavuzlar için kare ve dikdörtgen dalga kılavuzları kullanılıp, çeşitli modlarda kesimdeki dalga sayıları elde edilmiştir. Buna göre dikdörtgen kılavuzda kare kılavuza oranla kesimdeki dalga sayısı daha az olduğundan; belli bir yayılım hızında boş dikdörtgen kılavuzlarda dalga boyu daha yüksek dolayısıyla kesim frekansı daha düşük olacaktır. Daha küçük frekanslarda güç ve sinyal üretiminin sağlanabilmesi için dikdörtgen kılavuzun kullanılması daha uygundur.

Dalga kılavuzu dielektrik madde ile doldurulduğunda; sabit bir yayılım hızında dielektrik madde miktarının artırılmasıyla kesim frekansının azalacağı tespit edilmiştir. Yine daha düşük frekanslarda iletim sağlanabileceğinden dielektrik maddenin artırılması avantaj sağlar.

Belli bir oranda dielektrik madde ile doldurulmuş dikdörtgen kılavuzun boyu ve eni parametrelerinden biri sabit tutulup diğeri değiştirilerek işlemler devam ettirilmiştir. Buna göre boy/en oranının mümkün olduğu kadar küçük seçilmesine dikkat edilmelidir.

Dielektrik maddenin elektriksel geçirgenliğin azaltılmasıyla kesim frekansının arttığı saptanmıştır. Tasarım aşamasında elektrik alan geçirgenliği büyük maddelerin seçilmesi uygundur.

Bu değerlendirmelerle beraber; bir bölgenin daha çok elemana bölünmesiyle, sonucun elde edilmesindeki sürenin arttığı gözlemlenmiştir.

Günümüzde fen ve mühendislik alanında kompleks problemlerin çözümünde bilgisayar destekli programların kullanılması kaçınılmazdır. Sonlu elemanlar için de birçok yazılım paketi geliştirilerek özellikle tasarım aşamasında yöntemin rolü arttırılmıştır.

## KAYNAKLAR

1. Felippa, C.A., "A Historical Outline of MSA History" , **Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado, Boulder, CO 80309-0429, USA**, 20-30 (2000).
2. Matthew, N.O.Sadiku, "Numerical Techniques in Electromagnetics 2<sup>nd</sup> ed." **CRC Press**, Florida, 407-445 (1992).
3. Hoburg, J. F., Davis J. L., " A student-oriented finite element program for electrostatic potential problems", **IEEE Trans. Educ**, E-26:138-142 (1983).
4. J. L. Volakis, A. Chatterjee and L.C. Kempel, "Finite Element Method for Electromagnetics, " **IEEE Press**, 110-140 (1998).
5. Pozar, David M., "Microwave Engineering 2<sup>nd</sup> ed.", **John Wiley & Sons**, NewYork, 104-125 (1998).
6. Hayt, W. H., "Engineering Electromagnetics 2<sup>nd</sup> ed", **McGraw-Hill**, New York, 184-192 (1981).
7. J. L. Volakis, A. Chatterjee and L.C. Kempel, "Finite Element Method for Electromagnetics", **IEEE Press**, 150-170 (1998).
8. Lu, Yiong, Fernandez, F. Anibal, "Microwave and Optical Waveguide Analysis By The Finite Element Method 1<sup>st</sup> ed.", **Research Studies**, New-York, 135-150 (1996).
9. Ahmed, S., Dally, P, "Waveguide solutions by the finite element method" , **Radio Electron. Eng**, E38: 217-213 (1969).
10. Ahmed, S., Dally, P, "Finite element method for inhomogeneous waveguides " , **IEE Proc**, H116: 1661-1664 (1969).
11. J.Cendes, Z., Silvester, P., "Numerical solution of dielectric loaded waveguides: I. Finite-element analysis", **IEEE Trans. Microwave Theory Tech**, E18: 1124-1131 (1970).
12. Harrington, R.F, "Time-Harmonic Electromagnetic Fields 2<sup>nd</sup> ed " , **McGraHill**, NewYork, 158-165 (1961).
13. Hoole, S.R.H., Hoole, P.R.P., "Finite element programs for teaching electromagnetics" , **IEEE Trans. Educ**, E-29:15-30 (1986).

14. Jianming, Jin, "The Finite Element Method in Electromagnetics 2<sup>nd</sup> ed.", **JohnWiley & Sons**, New York, 233- 246 (2002).
15. Owen, D.R.J., Hinton,E. , "A Simple Guide to Finite Elements 4<sup>th</sup> ed", **Pineridge Press**, 47-79 (1980).
16. Bayrak, M., "Eliptik Tip Sınır Değer Problemleri İçin Sonlu Elemanlar ve Sonlu Farklar Yöntemlerinin Karşılıklı Analizi" , Doktora Tezi, **Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Kocaeli, 14-20 (1998).
17. Reddy, C.J., Deshpande, D., Beck, F.,"Finite Element Method for Eigenvalue Problems in Electromagnetics" , **Nasa Langley Research Center, Hampton**, 5-30 (1994).
18. Silvester, P.P., Ferrari, R. L.,"Finite Elements for Electrical 2<sup>nd</sup> ed", **Cambridge Univ. Press**, 25-50 (1990).
19. Koshiba, M., Kazuya, H., Suzuki, M.,"Improved Finite-Element Formulation in Terms of the Magnetic Field Vector for Dielectric Waveguides" , **IEEE Trans**, MTT-33: 227-233 (1985).
20. Johns,P., "The Solution of Inhomogeneous Waveguide Problems Using a Transmission – Line Matrix ", **IEEE Trans. Microwave Theory Tech**, E22: 209-214 (1974).

**EKLER**

## EK-1 Bilgisayar programlarının açıklaması

Çözümün üretilmesinde kullanılan bilgisayar programları Matlab kullanılarak yapılmış olup, “Program1” ve “Program2” olarak adlandırılmıştır. Program1’de homojen dalga kılavuzları için kesimdeki dalga sayısı Program2’de ise dielektrikle doldurulmuş dalga kılavuzları için  $\beta/k_0$ -  $a/\lambda_0$  oranları bulunmuştur.

Ağ üretimi için çözüm bölgesinin x ve y yönünde bölümlendirilmesi gerektiğinden kullanıcıdan x ve yönlerindeki bölme sayıları ve kılavuzun boyutlarının girilmesi istenir. Bölme sayılarının birer fazlalarıyla çarpımı nokta sayısını, bölme sayılarının çarpımının iki katı ise eleman sayısını verecektir. İlk olarak her noktanın koordinatları bulunur.Üçgensel eleman baz alındığından her elemanın hangi 3 noktadan oluştuğu belirlenir. Buna bağlı olarak elemanlar için eleman katsayı matrisleri hesaplanır. Eleman katsayı matrislerinin hesabında Eş. 3.41 esas alınır.

Elemanların ortak noktaları baz alınarak global katsayı matrisleri hesaplanır. C ve T matrislerinin öz değerleri içinden  $k_0$  değeri bulunur. Bu değer gerçek değer ile karşılaştırılarak hata oranı da programda hesaplatılmaktadır. Program2’ için Program1’den faydalanılmaktadır; fakat Eş. 3.41 ile verilen C ve C’ matrisleri için Eş. 4.36 - 4.41’deki verildiği gibi aradaki işaret değişerek veya elemanların sırası değişerek hesaplatılmıştır. Ayrıca yapı 2 ayrı bölüme ayrıldığından her bölümde  $\epsilon$  ve  $\mu$  değerleri ayrı ele alınmıştır.  $a>b$  iken d değeri y yönünde ilerleyeceğinden global matrisler, Y(L) matrisine göre hesaplanırken;  $a<b$  iken d değeri x yönünde ilerleyeceğinden X(L) matrisi esas alınır. Program 1’deki gibi lokal katsayı matrislerinden global değerler elde edilerek verilen  $\beta/k_0$  için  $k_0$  değerini; dolayısıyla  $a/\lambda_0$  değeri hesaplanır.

## EK-2 Green fonksiyonları

### Green Fonksiyonları

Green Fonksiyonları sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan etkili bir metottur. Fonksiyonlar, ismini potansiyel teoride Poisson eşitliklerine çözüm getiren metodu geliştiren George Green (1793-1841)' den almıştır.

Green fonksiyonu metodunu açıklamak için homojen bir ortama  $r_1$  noktasında konulan  $q_1$  yükü tarafından üretilen elektriksel potansiyel ele alınabilir.  $r$  noktasındaki potansiyel Eş. 2.1'deki gibidir.

$$\phi_1(r) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon |r - r_1|} \quad (2.1)$$

$r - r_1$   $r$  ve  $r_1$  noktaları arasındaki uzaklık,  $\epsilon$  ortamın geçirgenliğini göstermektedir.  $r_2$  noktasına  $q_2$  yükü konulursa, yük tarafından oluşturulan potansiyel aşağıdaki gibidir.

$$\phi_2(r) = \frac{q_2}{4\pi \epsilon |r - r_2|} \quad (2.2)$$

$q_1$  ve  $q_2$  tarafından üretilen toplam potansiyel Eş. 2.3'deki gibidir.

$$\phi(r) = \phi_1(r) + \phi_2(r) = \frac{q_1}{4\pi \epsilon |r - r_1|} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon |r - r_2|} \quad (2.3)$$

Boşlukta N tane yük olduğu kabul edilirse toplam potansiyel aşağıdaki gibi elde edilir.

EK-2 (Devam) Green fonksiyonları

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^N \phi_i(r) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi \epsilon |r - r_i|} \quad (2.4)$$

$\rho(r)$  yük yoğunluğu ile ifade edilen elektrik yükü hacmi ele alındığında; potansiyeli elde etmek için yükün hacmi küçük küplere ayrılabilir.

Her küp için yük,  $r_i$  i. küpün merkezi ve  $\Delta V_i$  küpün hacmini göstermek üzere Eş. 2.5' deki gibidir.

$$q_i \approx \rho(r_i) \Delta V_i \quad (2.5)$$

Her küp çok küçük olduğundan noktasal yük olarak kabul edilerek potansiyel ve lineer süperpozisyon kuralına göre toplam potansiyel bulunabilir.

$$\phi_i(r) \approx \frac{q_i}{4\pi \epsilon |r - r_i|} \approx \frac{\rho(r_i) \Delta V_i}{4\pi \epsilon |r - r_i|} \quad (2.6)$$

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^N \phi_i(r) \approx \sum_{i=1}^N \frac{\rho(r_i) \Delta V_i}{4\pi \epsilon |r - r_i|} \quad (2.7)$$

$\Delta V_i$ 'nin 0 olması durumunda Eş. 2.7 aşağıdaki ifadeye dönüşür.

$$\phi(r) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho(r_i) \Delta V_i}{4\pi \epsilon |r - r_i|} \quad (2.8)$$

Eş. 2.8 integral formunda,  $V$  hacmi göstermek üzere Eş. 2.9'daki gibi yazılır.

## EK-2 (Devam) Green fonksiyonları

$$\phi(r) = \iiint_V \frac{\rho(r') dV'}{4\pi \epsilon |r - r'|} \quad (2.9)$$

Birim gücün noktasal kaynağından üretilen potansiyele Green fonksiyonu denir. Burada Green fonksiyonu Eş. 2.10'daki gibidir ve toplam potansiyel Eş. 2.11' deki gibi ifade edilebilir.

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi \epsilon |r - r'|} \quad (2.10)$$

$$\phi(r) = \iiint_V \rho(r') G(r, r') dV' \quad (2.11)$$

## 2. Skaler Green Fonsiyonları

### 2.1. Delta fonksiyonu

Green fonksiyonu metodu, noktasal kaynakların süperpozisyonuyla oluşan kaynak temeline dayandığından ilk olarak noktasal kaynak tanımlanmalıdır.  $r'$  noktasına yerleştirilmiş birim güçteki elektrik yükü ele alınırsa yük yoğunluğu bir fonksiyon ile gösterilebilir.

$$\delta(r - r') = \begin{cases} \infty & r = r' \\ 0 & r \neq r' \end{cases} \quad (2.12)$$

Toplam yük 2.13 ifadesindeki gibi elde edilir.

$$\iiint_V \delta(r - r') dV = \begin{cases} 1 & r', V \text{ içinde} \\ 0 & r', V \text{ içinde değil} \end{cases} \quad (2.13)$$

EK-2 (Devam) Green fonksiyonları

$r=r'$  değerinde sürekli olan keyfi  $f(r')$  fonksiyonu ele alındığında Eş. 2.14 bulunur.

$$\iiint_V f(r) \delta(r-r') dV = \begin{cases} f(r'), V \text{ içinde} \\ 0, V \text{ içinde de\u011fer\u0131} \end{cases} \quad (2.14)$$

Bu ifade hacimsel kaynak olan  $f(r')$ 'nin sonsuz sayıdaki noktasal kaynak olan  $\delta(r-r')$ 'lerin lineer süperpozisyonundan oluştuğunu gösterir. Bir boyutta delta fonksiyonu bir fonksiyonun limiti olarak düşünülebilir.

$$\delta(x-x') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x-x') \quad (2.15)$$

Burada  $u_\epsilon(x-x')$  delta ailesi olarak adlandırılır.  $\epsilon$  genişliğinde ve  $1/\epsilon$  boyunda dikdörtgensel fonksiyon veya  $2/\epsilon$  genişliğinde  $1/\epsilon$  boyunda üçgensel fonksiyon veya  $e^{-(x-x')^2/2\epsilon^2} / \epsilon \sqrt{2\pi}$  şeklinde Gaussian fonksiyon olabilir. Delta fonksiyonun önemi şekil değil, alanı birim kalırken eni 0'a yaklaşmaktadır.

$$\int_b^a \delta(x-x') dx = \begin{cases} 1 & x' (a,b) \text{ içinde} \\ 0 & x' (a,b) \text{ içinde de\u011fer\u0131} \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\int_b^a f(x) \delta(x-x') dx = \begin{cases} f(x') & x' (a,b) \text{ içinde} \\ 0 & x' (a,b) \text{ içinde de\u011fer\u0131} \end{cases} \quad (2.17)$$

Delta fonksiyonu simetrik fonksiyondur.

$$\delta(x-x') = \delta(x'-x) \quad (2.18)$$

EK-2 (Devam) Green fonksiyonları

## 2.2. Serbest Uzayda Green fonksiyonları

Homojen olmayan Helmholtz denklemini sağlayan  $\phi$  dalga fonksiyonu için ;

$$\nabla^2 \phi(r) + k^2 \phi(r) = -f(r) \quad (2.19)$$

$\phi(r)$  boşlukta yayıldığında, yansıyan dalga olmayacağından ışınma şartını sağlayacaktır.

$$r \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} + jk\phi \right) = 0 \quad r \rightarrow \infty \quad (2.20)$$

Öncelikle kısmi diferansiyel denklemin çözümü olan Green fonksiyonu bulunabilir.

$$\nabla^2 G_0(r, r') + k^2 G_0(r, r') = -\delta(r - r') \quad (2.21)$$

Lineer süperpozisyon prensibi kullanılarak  $G_0$  bulunabilir

$$\phi(r) = \iiint_V G_0(r, r') f(r') dV' \quad (2.22)$$

$G_0$ ' in bulunabilmesi için orijini  $r'$  olan yeni bir koordinat sistemi tanımlanır.

Bu noktaya göre küresel simetrik bir yapı elde edilir. ( $r_1 = r - r'$ )

$$\frac{1}{r_1^2} \frac{d}{dr_1} \left[ r_1^2 \frac{dG_0(r_1, 0)}{dr_1} \right] + k^2 G_0(r_1, 0) = -\delta(r_1 - 0) \quad (2.23)$$

$r_1, 0$ ' dan farklı iken Eş. 2.24 elde edilir.

EK-2 (Devam) Green fonksiyonları

$$\frac{d^2[r_1 G_0(r_1, 0)]}{dr_1^2} + k^2 r_1 G_0(r_1, 0) = 0 \quad (2.24)$$

Çözümü  $r_1 G_0(r_1, 0) = A e^{-jk r_1}$  şeklindedir. A'nın bulunabilmesi için çözüm Eş. 2.23 ile birleştirilir ve  $r_1=0$ ' da  $\mathcal{E}$ 'nin 0' a yakınsadığı (yarıçap) küçük bir küre üzerinde integrali alınır.  $A=(4\pi)^{-1}$  bulunur. Bu nedenle orijinal koordinatlar hesaba katıldığında Eş. 2.25 elde edilir.

$$G_0(r, r') = \frac{e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \quad (2.25)$$

Aynı prosedür takip edilerek Helmholtz ve Poisson eşitlikleri için 2 boyutlu Green fonksiyonu elde edilir.

$$G_0(r, r') = \frac{1}{4\pi|r-r'|} \quad (2.26)$$

$$G_0(\rho, \rho') = -\frac{1}{2\pi} \ln|\rho - \rho'| \quad (2.27)$$

### 2.3 Karakteristik Denklem Açılımı

Eş. 2.21'in çözümü ele alındığında,  $h = h_x \hat{x} + h_y \hat{y} + h_z \hat{z}$  olmak üzere  $G_0(r, r')$ , Fourier integallerinin terimi olarak Eş. 2.28'deki gibi düşünülürse  $\nabla^2 \psi(r) + h^2 \psi(r) = 0$  eşitliğinin çözümü olan  $e^{jh \cdot r}$  karakteristik denklem ve  $h^2 = |h|^2$  özdeğer olarak adlandırılır.

## EK-2 (Devam) Green fonksiyonları

$$G_0(r, r') = \int_{-\infty}^{\infty} A(h) e^{jh.r} dh \quad (2.28)$$

Eş. 2.28 'de  $G_0(r, r')$  ifadesinin karakteristik denklemi olarak kabul edilebilir.

Eş. 2.28 ve Eş. 2.21 leri birleştirilerek aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$A(h) = \frac{e^{-jh.r}}{(2\pi)^3 (h^2 - k^2)} \quad (2.29)$$

$$G_0(r, r') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jh.(r-r')}}{(h^2 - k^2)} dh \quad (2.30)$$

$$G_0(r, r') = \frac{e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \quad (2.31)$$

## EK-3 Varyasyonel formülasyon

### 3.1 Sınır Değer Problemi

Sınır değer problemi 2. dereceden diferansiyel denklemlerle tanımlanabilir.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi = f \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.1)$$

Laplace, Poisson ve Helmholtz eşitlikleri Eş. 3.1 formundadır. Sınır koşulları aşağıdaki gibi verilir.

$$\phi = p \quad (3.2)$$

$$\left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} x + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} y \right) \cdot n + \gamma \phi = q \quad (3.3)$$

$\Omega$  sınır bölgesi,  $n$  normal birim vektör olmak üzere  $r (=r_1 + r_2)$  ile tanımlanır.  $\gamma$ ,  $p$ ,  $q$  parametreleri sınırın fiziksel özellikleri ile ilgili bilinen değerlerdir.  $P$  ve  $q$  sınır kaynağı olarak da adlandırılabilir. Neumann sınır koşulu Eş. 3.3'ün özel bir durumudur.

Eğer  $\alpha_x$  ve  $\alpha_y$  için süreksizlik veya ani değişiklikler varsa ve süreksizliğin olduğu ara yüzde yüzey kaynağı yoksa  $\phi$  yine süreklilik koşullarını sağlar.

$$\phi^+ = \phi^- \quad (3.4)$$

$$\left( \alpha_x^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial x} x + \alpha_y^+ \frac{\partial \phi^+}{\partial y} y \right) \cdot n = \left( \alpha_x^- \frac{\partial \phi^-}{\partial x} x + \alpha_y^- \frac{\partial \phi^-}{\partial y} y \right) \cdot n \quad (3.5)$$

### EK-3 (Devam) Varyasyonel formülasyon

$\Gamma_d$  süreksizlik ara yüzü olmak üzere + ve – bileşenlerinden oluşur. Normal birim vektörü ise  $n$  ile gösterilir.

### 3.2 Varyasyonel Formülasyon

Sınır değer problemlerinde varyasyonel eşitlikler Eş. 3.6 ve Eş.3.7 'deki gibi elde edilir.

$$\begin{cases} \delta F(\phi) = 0 \\ \phi = p \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} F(\phi) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \alpha_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \alpha_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \beta \phi^2 \right] d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\gamma}{2} \phi^2 - q\phi \right) d\Gamma - \iint_{\Omega} f \phi d\Omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$\alpha_x$  ve  $\alpha_y$  'de süreksizlikler varsa Eş. 3.6, Eş. 3.4' deki süreklilik koşulunu sağlamalıdır. Formülasyonun ispatı için  $\alpha_x$  ve  $\alpha_y$  'nin sürekli olduğu kabul edilip öncelikle  $F(\phi)$ 'nin  $\phi$ 'ye göre birinci varyasyonu alınır.

$$\begin{aligned} \delta F(\phi) = & \iint_{\Omega} \left[ \alpha_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) + \alpha_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi \delta \phi \right] d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_2} (\gamma \phi - q) \delta \phi d\Gamma - \iint_{\Omega} f \delta \phi d\Omega. \end{aligned} \quad (3.8)$$

## EK-3 (Devam) Varyasyonel formülasyon

$$\begin{aligned}
\alpha_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \delta \phi \\
\alpha_y \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \phi \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \delta \phi
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Diverjans teoreminin uygulanmasıyla Eş. 3.10 elde edilir.

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\Gamma} (U \hat{x} + V \hat{y}) \cdot \hat{n} d\Gamma \tag{3.10}$$

Eş. 3.8 aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\delta F(\phi) &= \iint_{\Omega} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \phi - f \right] \delta \phi d\Omega \\
&\quad + \oint_{\Gamma} \left[ \left( \alpha_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \alpha_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y} \right) \cdot \hat{n} \right] \delta \phi d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} (\gamma \phi - q) \delta \phi d\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$\phi$ 'nin  $\Gamma_1$  üzerinde sabit değeri olduğundan  $\delta \phi$ ,  $\Gamma_1$  üzerinde yok olur. Bu nedenle  $\Gamma_1$  üzerindeki integral sıfırlanır. Sonuç olarak fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
F(\phi) &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \alpha_x \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^2 + \alpha_y \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|^2 + \beta |\phi|^2 \right] d\Omega \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\gamma |\phi|^2 - q^* \phi - q \phi^*) d\Gamma \\
&\quad - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (f^* \phi + f \phi^*) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.12}$$

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GÜNEŞ, Berna  
Uyruğu : T.C.  
Doğum tarihi ve yeri : 10.05.1980 Kars  
Medeni hali : Bekar  
Telefon : 0 (312) 255 27 93  
e-mail : [bergun03@hotmail.com](mailto:bergun03@hotmail.com).

Eğitim	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Kırıkkale Üniversitesi Elektrik-Elektronik Müh.	2002
Lise	Arı Fen Lisesi	1998

### İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2003-2006	Maliye Bakanlığı Muhasebat Gnl. Müd.	Programcı

### Yabancı Dil

İngilizce

### Hobiler

Masa tenisi, Bilgisayar teknolojileri, Voleybol