

**DIRICHLET PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONLARI
YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ**

Afşin Kürşat GAZANFER

**Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Bilim Uzmanlığı Tezi
Olarak Hazırlanmıştır**

ZONGULDAK

Eylül 2006

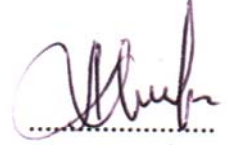
KABUL:

Afşin Kürşat GAZANFER tarafından hazırlanan "DIRICHLET PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONLARI YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi (ZKÜ) Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Bilim Uzmanlığı Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir.
21/09/2006

Başkan: Prof. Dr. Arif AMİROV (ZKÜ)


Üye : Prof. Dr. Mehmet KOPAÇ (ZKÜ)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sedat ÇEVİKEL (ZKÜ)



ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .../.../2006



Prof. Dr. İhsan TOROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Bilim Uzmanlığı Tezi

DIRICHLET PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONLARI YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

Afşin Kürşat GAZANFER

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Arif AMİROV

Eylül 2006, 41 sayfa

Bu çalışmada Green fonksiyonları kullanılarak çeşitli bölgelerde Dirichlet probleminin çözümü incelenmiştir. Birinci bölümde gerekli bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde Dirichlet probleminin tanımı verilmiştir. Üçüncü bölümde verilen bir bölgenin Green fonksiyonu, dördüncü bölümde ise Green fonksiyonları yardımıyla Dirichlet probleminin çözümü incelenmiştir. Son bölümde sınır-değer problemlerinin klasik ve genelleşmiş çözümleri üzerinde durulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Green fonksiyonu, Dirichlet problemi, Harmonik fonksiyon, Laplace denklemi

Bilim Kodu: 403.06.01

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM WITH GREEN FUNCTIONS

Afşin Kürşat GAZANFER

**Zonguldak Karaelmas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Prof. Dr. Arif AMİROV

September 2006, 41 pages

At this project, solution of the Dirichlet problem using Green functions on the in various domains is examined. In the first chapter, some fundamental definitions and theorems are given. In the second chapter, definition of the Dirichlet problem are given. In the third chapter, Green functions of the endowed domain, in the fourth chapter, solution of the Dirichlet problem with Green functions are explained. Finally, classical and generalized solution of boundary-value problems are examined.

Key Words: Green function, Dirichlet problem, Harmonic function, Laplace equation

Science Code: 403.06.01

TEŞEKKÜR

Tezin tüm aŐamalarında değerli vaktini esirgemeden bana ayıran, gürüŐ ve önerileriyle yardımcı olan değerli hocam sayın Prof. Dr. Arif AMİROV'a ve hayatımın tüm aŐamalarında olduğu gibi bu çalışma esnasında da manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim sevgili aileme ve her zaman benim yanımda olan eŐime teŐekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
BÖLÜM 1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	1
1.2. KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER VE SINIFLANDIRMA	4
BÖLÜM 2 DIRICHLET PROBLEMİNİN TANIMI.....	6
2.1. \mathfrak{R}^n İÇİNDE DIRICHLET PROBLEMİ.....	6
2.2. \mathfrak{R}^2 İÇİNDE KUTUPSAL KOORDİNATLARDA LAPLACE DENKLEMİ, DAİRE İÇİN DIRICHLET PROBLEMİ	6
BÖLÜM 3 BİR BÖLGENİN GREEN FONKSİYONU	18
3.1. BİR BÖLGENİN GREEN FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ	18
3.2. GREEN FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ.....	19
BÖLÜM 4 GREEN FONKSİYONU YARDIMIYLA DIRICHLET PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ	23

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
4.1. \mathfrak{R}^2 İÇİNDE YUVAR (DAİRE) İÇİM ÇÖZÜM	23
4.2. \mathfrak{R}^3 İÇİNDE YUVAR (CİSİM KÜRE) İÇİN ÇÖZÜM.....	27
4.3. \mathfrak{R}^3 İÇİNDE YARIM UZAY DIRICHLET PROBLEMİ.....	33
BÖLÜM 5 SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN GENELLEŞMİŞ ÇÖZÜMLERİ ...	36
5.1 SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN KLASİK VE GENELLEŞMİŞ ÇÖZÜMLERİ.....	36
KAYNAKLAR.....	40
ÖZGEÇMİŞ.....	41

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No:</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 Düzgün olmayan D bölgesi.....	20
4.1 \mathfrak{R}^2 'de D dairesi	24
4.2 \mathfrak{R}^3 'te yuvar.....	28
4.3 \mathfrak{R}^3 'te cisim yuvar	31
4.4 \mathfrak{R}^3 'te yarım uzay	34

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

∂D	:	D bölgesinin sınırı
Γ	:	Dairenin çemberi
\bar{D}	:	D bölgesinin kapanışı
$G(P, Q)$:	P ve Q noktalarında tanımlı Green fonksiyonu
ω_n	:	Tüm uzay açısı
$C^n(Q)$:	n . mertebeye kadar kısmi türevleri ve kendisi Q bölgesinde sürekli olan fonksiyonlar sınıfı

BÖLÜM I

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde Green fonksiyonları yardımıyla Dirichlet probleminin çözümü için gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1. (Bağlantılılık): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X boş olmayan ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa bu (X, τ) topolojik uzayına bağlantılıdır denir.

Tanım 1.2. (Kompaktlık): Bir X metrik uzayı verilmiş olsun. Eğer X 'deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse X uzayı kompaktır. [8]

Tanım 1.3. (Tam Uzay): Bir (X, d) metrik uzayında seçilen her Cauchy dizisinin limiti yine bu uzayda ise X tam uzaydır denir. [8]

Tanım 1.4. (Yarım Uzay): $D \subset \mathfrak{R}^n$ olmak üzere, $D = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid x_n > 0\}$ şeklinde tanımlanan uzaya yarım uzay denir. [1]

Tanım 1.5. (Ayrılabilir Uzay): Eğer X cümlesinin sayılabilir yoğun alt cümlesi varsa X cümlesine ayrılabilir uzay denir. [8]

Tanım 1.6. (İç Çarpım): $X \times X$ den X in bir K skaler cismi içine yapılan bir dönüşüm olsun. X in her x ve y vektör çiftini $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşlemeye iç çarpım denir.

a) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

b) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

d) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

X üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, X üzerinde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ile verilen bir norm tanımlar.

Tanım 1.7. (Diklik): Bir X iç çarpım uzayının x ve y gibi iki elemanı verildiğinde eğer

$$\langle x, y \rangle = 0$$

oluyorsa x elemanı y elemanına diktir.

Tanım 1.8. (Lineer Fonksiyonel): $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun. $f : X \rightarrow K$, $f(\lambda x + \beta y) = \lambda f(x) + \beta f(y)$ lineer operatörüne bir lineer fonksiyonel denir.

Tanım 1.9. (Genelleşmiş Fonksiyon): D , $C_0^\infty(\Omega)$ sınıfı üzerinde aşağıdaki topolojiyi vermekle elde edilen lineer topolojik uzay olsun, $k \rightarrow \infty$, $\varphi_k \xrightarrow{D} \varphi$ eğer

a) $\forall \alpha$ multi indis için

$$D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$$

yani φ_k fonksiyonlarının tüm türevleri φ fonksiyonunun uygun türevlerine Ω bölgesinde düzgün olarak yakınsar.

b) $\exists K \subset \Omega$ kompakt cümlesi vardır ki, $\forall K$ lar için $\text{supp } \varphi_k \subset K$ dır.

D topolojik uzayında tanımlı, sürekli, lineer fonksiyonellere genelleştirilmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı D' ile gösterilir.

Tanım 1.10. (Genelleştirilmiş Türev): $f \in D'$ olsun, (yani f genelleşmiş fonksiyon). Bu fonksiyonun türevi aşağıdaki gibi tanımlanır ve $D_{x_i} f$ ile gösterilir. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$D_{x_i}^m f : (D_{x_i}^m f, \varphi) = (-1)^m (f, D_{x_i}^m \varphi)$$

Kolayca gösterilebilir ki, $D_{x_i} f$ de bir genelleşmiş fonksiyondur.

Teorem 1.1. D , \mathfrak{R}^n nin bağlantılı, sınırlı bir açığı, f de ∂D üzerinde tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. D içinde harmonik, \overline{D} üzerinde sürekli, ∂D üzerinde f ye eşit olan bir fonksiyon, varsa ancak bir tanedir (ya da bu şekilde en çok bir fonksiyon vardır.)

Teorem 1.2. u fonksiyonu bağlantılı D içinde harmonik, \overline{D} üzerinde sürekli, ama sabit değilse, u nun minimumu D içinde değildir (∂D sınırı üzerinde olmalıdır.)

Teorem 1.3. u fonksiyonu bağlantılı D içinde harmonik, \overline{D} üzerinde sürekli, ama sabit değilse, u nun maksimumu D içinde değildir (∂D sınırı üzerinde olmalıdır.)

Teorem 1.4. u fonksiyonu D sınırlı açığı içinde harmonik ve \overline{D} içinde sürekli ise, u , ∂D sınırının en az bir noktasında maksimumuna erişir.

1.2 Kısmi Türevli Denklemler ve Sınıflandırma

Tanım 1.2.1. (Kısmi Türevli Denklem):

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u(x_1, x_2, \dots, x_n), u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^N u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \dots\right) = 0 \quad (1.2.1)$$

şeklindeki fonksiyonel denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir.

Burada $N = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ve $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere tam sayılardır. (1.2.1) denklemdeki türevlerin en yüksek basamağına (1.2.1) denkleminin basamağı veya mertebesi denir. (1.2.1) denklemi kısmi türevli denklemlerin en genel ifadesidir.

Şimdi ikinci dereceden kısmi türevli denklemleri sınıflandıralım:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0 \quad (1.2.2)$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Lineer denklemini ele alalım. Burada a, b, c x_1, x_2, \dots, x_n 'in fonksiyonlarıdır. (1.2.2) denkleminin $x_0 \in D$ noktasında hangi tipten olduğunu belirlemek için

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \xi_i \xi_j = I(\xi)$$

kuadratik formuna bakılır.

$n_0(x_0)$, $I(\xi)$ kuadratik formunun kanonik şeklindeki sıfırların sayısı

$n_+(x_0)$, $I(\xi)$ kuadratik formunun kanonik şeklindeki +1'lerin sayısı

$n_-(x_0)$, $I(\xi)$ kuadratik formunun kanonik şeklindeki -1'lerin sayısı

olsun. n, D bölgesinin boyutu olmak üzere $n_+ + n_- + n_0 = n$ dir.

Eğer $x_0 \in D$ de

- i. $n_{\pm} = n$ ise (1.2.2) denkleminde x_0 noktasında eliptik
- ii. $n_- = n - 1$ ve $n_+ = 1$ ise (1.2.2) denkleminde x_0 noktasında hiperbolik
- iii. $n_0 = 1$ ise (1.2.2) denkleminde x_0 noktasında parabolik
- iv. $n_+ > 1$ ve $n_- > 1$, $n_0 = 0$ ise (1.2.2) denkleminde x_0 noktasında ultrahiperbolik
- v. $n_0 > 1$ ise (1.2.2) denkleminde x_0 noktasında ultraparabolik

denir.

Eğer denklem D bölgesinin bütün noktalarında eliptik (parabolik, hiperbolik, ultra parabolik, ultra hiperbolik) tipten ise o denklem D bölgesinde eliptik (parabolik, hiperbolik, ultra parabolik, ultra hiperbolik) tiptendir diye adlandırılır.

BÖLÜM 2

DIRICHLET PROBLEMİNİN TANIMI

2.1. \mathfrak{R}^n İçinde Dirichlet Problemi

D , \mathfrak{R}^n nin bağlantılı bir açığı, f de D nin ∂D sınırı üzerinde bir fonksiyon olsun. D içinde harmonik, \bar{D} üzerinde sürekli $x \in \partial D$ iken $u(x) = f(x)$ olan bir u fonksiyonunu (varsa) bulmak. Varsa, Teorem 1.1'e göre bu fonksiyon ancak bir tanedir. ∂D üzerinde sürekli her f için çözümün mevcut olduğu bir bölgeye *Dirichlet bölgesi* denir.

Dirichlet problemine *birinci sınır değer problemi* de denir.

2.2. \mathfrak{R}^2 İçinde Kutupsal Koordinatlarda Laplace Denklemi, Daire için Dirichlet Problemi

Düzlemde merkezi O ve yarıçapı a olan bir dairenin ∂D (sınır) çemberini Γ ile gösterelim. D içinde harmonik, \bar{D} üzerinde sürekli ve $x \in \Gamma$ iken $u(r, \theta) = f(\theta)$ olan bir u fonksiyonunu (varsa) bulmak. [1]

Teorem 2.2.1. (Poisson Teoremi) O merkezli ve a yarıçaplı bir yuvar (daire), Γ da bunun çemberi (sınırı) olsun. Ox kutup eksenini seçelim ve kutup açısını θ ile gösterelim. $f(0) = f(2a)$ olan, $2a$ periyotlu uzantısına özdeş bulunan, ayrıca Γ üzerinde belirli ve sürekli olan bir $f(\theta)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $P(r, \theta)$ noktasının

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2} f(\psi) d\psi$$

fonksiyonu; ya da $a_n, b_n, f(\theta)$ nın Fourier katsayıları olmak üzere

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

ile verilen $u(r, \theta)$ fonksiyonu D içinde harmonik, \bar{D} içinde sürekli ve çember üzerinde $u(r, \theta) = f(\theta)$ olur. [1]

D dairesi $r \leq a$ olsun. \mathfrak{R}^2 de (x, y) kartezyen koordinat sisteminden, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ denklemleri yardımıyla (r, θ) kutupsal koordinatlara geçildiğinde

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ denklemindeki $(x, y) \mapsto f(x, y)$ fonksiyonu $(\rho, \theta) \mapsto u(\rho, \theta)$ ya dönüşür.

Kutupsal koordinat sistemindeki Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.2.1)$$

biçimini alır.

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilen bir çözüm arayalım. Gerekli türevler alınıp (2.2.1) de yerine yazılıp elde edilen denklem $\frac{R\Theta}{r^2} (\neq 0)$ ile bölüldüğünde

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0 \quad (2.2.2)$$

halini alır. Buradan

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\mu (\mu \in \mathfrak{R} \text{ bir sabit}) \quad (2.2.3)$$

ve (2.2.2) eşitliğinden

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = \mu \quad (2.2.4)$$

elde edilir.

Şimdi (2.2.3) denklemini

$$\Theta'' + \mu\Theta = 0$$

şeklinde yazalım. Bu denklemden aşağıdaki üç hal incelenmelidir:

i) $\mu < 0$ ise $\mu = -\omega^2$ yazmakla çözüm $\Theta(\theta) = A_\omega \cos(\omega\theta + \delta_\omega)$ ya da $\Theta = a_\omega \cos \omega\theta + b_\omega \sin \omega\theta$ halini alır.

ii) $\mu > 0$ ise çözüm $\Theta(\theta) = A_\omega \cos(\omega\theta + \delta_\omega)$ ya da $\Theta(\theta) = a_\omega \cos \omega\theta + b_\omega \sin \omega\theta$ dir;

iii) $\lambda = 0$ ise $\Theta(\theta) = c_1\theta + c_2$ dir.

Periyodik bir çözüm aranıyorsa ya i. halde $c_1 = 0$ alınmalı ya da ii. halde $\omega = n \in \mathbb{Z}$ olmalıdır.

(2.2.4) denklemini

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \mu R = 0 \quad (2.2.5)$$

şeklinde yazalım. (2.2.5) bir Euler denklemdir. $r = e^\tau$ olsun.

$$r \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\tau}, \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d^2 R}{d\tau^2} - \frac{dR}{d\tau}$$

olacağından (2.2.5) den

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} - \mu R = 0$$

bulunur. Karakteristik denklem $\lambda^2 - \mu = 0$, $\sqrt{\mu} = \nu$ demekle $\lambda = \mp \nu$ olur:

$$R(\tau) = C_\nu e^{\tau\nu} + D_\nu e^{-\tau\nu}, R(r) = C_\nu r^\nu + D_\nu r^{-\nu} \quad (2.2.6)$$

dır. $r \rightarrow 0$ için $D_\nu r^{-\nu} \rightarrow \infty$ olduğundan $r = 0$ da sürekli çözüm için $D_\nu = 0$ alınmalıdır; böylece $R(r) = C_\nu r^\nu$ olur. Öyleyse periyodik çözüm

$$u(r, \theta) = C_\nu r^\nu (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta), \nu = 0, 1, 2, \dots$$

dir. Bunu $\nu = n$, $\mu = n^2$ ($n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) alıp $C_\nu a_\nu$ yü A_n ve $C_\nu b_\nu$ yü de B_n ile göstermekle

$$u(r, \theta) = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), n \in \mathbb{N}_0$$

bulunur.

Öyleyse (2.2.1) denkleminin genel çözümü

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (2.2.7)$$

biçiminde yazılabilir; burada $\frac{a_0}{2} = A_0$, $\nu = 0$ a ait çözümü göstermektedir,

$$a_n = A_n a^n, b_n = B_n a^n \text{ de } n \in \mathbb{N} \text{ ye karşılık olan sabitlerdir; } (r \leq a)$$

Aynı biçimde dış Dirichlet probleminin çözümü de

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (2.2.7')$$

dir. ($r \geq a$)

Her iki seri de homojen formülde birleştirilebilir:

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (2.2.8)$$

İç problem: $\rho \leq 1$ ($r \leq a$).

Dış problem: $\rho \geq 1$ ($r \geq a$).

Şimdi a_n, b_n katsayılarını belirlemek için sınır şartlarını kullanalım:

$(a, \theta) \mapsto u(a, \theta) = f(\theta)$ olsun, (2.2.7) den:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (2.2.9)$$

elde edilir. (Burada f 'i θ ya bağlı olarak yazılabildiğini kabul ediyoruz.). f fonksiyonunun Fourier serisindeki katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi$$

dir. Öyleyse $A_n = \frac{a_n}{a^n}$, $B_n = \frac{b_n}{a^n}$ de $f(\theta)$ ya bağlı olarak belirlenmiş olur.

Şimdi (2.2.7) ve (2.2.8) için şunlar gösterilebilir:

i) $u(r, \theta)$, $B(0, a)$ yuvarı içinde yani $0 \leq r < a$ için harmoniktir;

ii) $u(r, \theta)$, $\overline{B}(0, a)$ kapanışı üzerinde yani $0 \leq r \leq a$ için süreklidir;

iii) ∂B sınırı üzerinde yani $r = a$ için $[0, 2\pi]$ aralığı üzerinde (2.2.7) Fourier açılımı (2.2.9) ile tanımlı $f(\theta)$ ya yaklaşır; yani $r = a$ iken $u(a, \theta) = f(\theta)$ dir:

i) **(2.2.8) serisinin harmonikliği.** Önce (2.2.8) serisinin terim terime türetilbildiğini gösterelim. (2.2.9) için de sonuç geçerlidir.

Fourier katsayıları a_0, a_n, b_n nin sınırları yani maksimum değerleri $M > 0$ olmak üzere

$$|a_0| < M, |a_n| < M, |b_n| < M, n \in \mathbb{N}$$

olsun. Şimdi (2.2.8) in ve türevinin düzgün yakınsaklığını gösterelim:

$$u_n(\rho, \theta) = \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (2.2.10)$$

ile tanımlı (u_n) fonksiyon dizisini göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} |u_n| &\leq \rho^n M |\cos n\theta + \sin n\theta| = \rho^n M \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right) + \sin n\theta \right| \\ &= 2\rho^n M \sin\frac{\pi}{4} \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - n\theta\right) \right| < 2M\rho^n < 2M\rho_0^n, \rho \leq \rho_0 < 1 \end{aligned}$$

Yani

$$|u_n| < 2\rho_0^n M, 0 \leq \rho \leq \rho_0 < 1$$

dir. Buna göre herhangi bir kapalı yuvar üzerinde (2.2.8) serisi düzgün yakınsaktır.

Şimdi u_n nin ρ ya göre k ncı türevini alalım. Böylece $0 \leq \rho \leq \rho_0 < 1$ için $n(n-1)\dots(n-k+1) < n^k$ olup

$$\left| \frac{\partial^k u_n}{\partial \rho^k} \right| = \left| \rho^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right| \leq 2\rho_0^{n-k} n^k M$$

dir. Böylece (2.2.8) i ρ ya göre terim terim türetilerek elde edilen seriler düzgün yakınsaktır.

Yine u_n nin θ ya göre k ncı türevi

$$\left| \frac{\partial^k u_n}{\partial \theta^k} \right| = \left| \rho^n n^k \left[a_n \cos \left(n\theta + \frac{k\pi}{2} \right) + b_n \sin \left(n\theta + \frac{k\pi}{2} \right) \right] \right| \leq 2\rho_0^n n^k M$$

olur. Böylece $0 \leq \rho \leq \rho_0 < 1$ için (2.2.8) i θ ya göre terim terime türetmekle elde edilen seriler de düzgün yakınsaktır. (Terim terime pozitif sayısal yakınsak serilerden mutlak değerce küçük kalıyorlar. Örneğin $\sum u_n$ yani (2.2.8) serisi terim olarak $2M \sum \rho_0^n$ serisinden küçük kalıyor. Öyleyse Weierstrass M kriterine göre mutlak ve düzgün yakınsaktır.) İç problem için $\rho_0 = \frac{r_0}{a} < 1$ ($r_0 < a$), dış problem için $\rho_0 = \frac{a}{r_0} < 1$ ($r_0 > a$) alınır.

Sonuç olarak $f(\theta)$ sınırlı bir fonksiyon olmak üzere (2.2.8) serisi, sırasıyla (2.2.7) ve (2.2.7') serileri $\rho < 1$ için Laplace denklemini sağlarlar, yani harmoniktirler. Örneğin $0 \leq r \leq r_0 < a$ için (2.2.7) nin harmonikliğini gösterelim:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

den

$$\Delta u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n-2}}{a^n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) [n(n-1) + n - n^2] = 0$$

dır. Şöyle de diyebilirdik: $\Delta u_n = 0$ olduğu gösterilir, $u_n(r, \theta)$ harmonik olur, öyleyse seri terim terime türetilbildiğinden ve her bir terim harmonik olduğundan $u(r, \theta)$, $0 \leq r < a$ bölgesinin bütün iç noktalarında harmoniktir.

ii) **(2.2.8) serisinin sürekliliği.** Γ üzerinde belirli ve sürekli $f(\theta)$ fonksiyonunun Fourier serisindeki katsayıları a_n, b_n olduğuna göre $\sum (|a_n| + |b_n|)$ serisi yakınsaktır. Ayrıca

$$|\rho^n a_n \cos n\theta| \leq |a_n|,$$

$$|\rho^n b_n \sin n\theta| \leq |b_n|$$

dir, öyleyse (2.2.7) serisi $\rho \leq 1$ için yakınsaktır. O halde bu serinin gösterdiği fonksiyon $\rho = 1$ çemberi üzerinde süreklidir. Ayrıca $\sum (|a_n| + |b_n|)$ e göre, dış problemin çözümü olarak (2.2.7') nün gösterdiği fonksiyon sonsuzda sınırlıdır.

iii) **(2.2.7) eşitliğinin $r = a$ çemberinde $f(\theta)$ değerini alması.** Şimdi u nun $f(\theta)$ sınır şartını sağladığını göstermeliyiz.

a_n, b_n Fourier katsayıları (2.2.8) denkleminde konursa:

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \quad (2.2.11)$$

$$\int_0^{2\pi} f(\psi) [\cos n\psi \cos n\theta + \sin n\psi \sin n\theta] d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta - \psi) \right] f(\psi) d\psi.$$

Toplama işlemiyle, terim terime integrasyonun sırası değiştirilir. Gerçekten

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\rho^n \cos n(\theta - \psi)] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\rho^n e^{in(\theta - \psi)} + \rho^n e^{-in(\theta - \psi)}]$$

$$= 1 + \frac{\rho e^{i(\theta-\psi)}}{1 - \rho e^{i(\theta-\psi)}} + \frac{\rho e^{-i(\theta-\psi)}}{1 - \rho e^{-i(\theta-\psi)}}$$

$$= \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2}$$

bulunur. Buna göre

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2} f(\psi) d\psi \quad (2.2.12)$$

ya da $\rho = \frac{r}{a}$ koymakla

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2} f(\psi) d\psi \quad (2.2.13)$$

elde edilir. (2.2.13) denkleminde *daire için Poisson integrali* ve $P(r, \theta; a, \psi)$ ye de *Poisson çekirdeği* denir.

Şimdi $f(\theta) \equiv 1$ ise (2.2.11) den $0 \leq \rho < 1$ için $u(\rho, \theta) \equiv 1$ bulunur. Gerçekten (2.2.11) de $f(\theta) \equiv 1$ olarak alınırsa düzgün yakınsaklıktan terim terime integrasyonla

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta - \psi) \right] d\psi$$

$$= 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta - \psi) \right] d\psi$$

$$= 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} \left| \sin n(\theta - \psi) \right|_0^{2\pi} = 1$$

bulunur. $0 \leq \rho < 1$ için (2.2.12) den

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2} d\psi$$

ya da $0 \leq r < a$ için (2.2.13) den

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi \quad (2.2.14)$$

bulunur, $r < a$ için kısaca $1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta; a, \psi) d\psi$ yazılır. Buradan $0 \leq r < a$ için

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2} f(\psi) d\psi \quad (2.2.15)$$

ve

$$u(r, \theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2)[f(\psi) - f(\theta)]}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi \quad (2.2.16)$$

çıkar. $f(\theta)$, $[0, 2\pi]$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta(\varepsilon)$ sayısı bulunur ki $|\theta - \psi| < \delta \Rightarrow |f(\theta) - f(\psi)| < \varepsilon$ olur. $|\theta - \psi| \geq \delta$ ve $\theta - \psi \neq 2n\pi, n \in \mathbb{N}_0$ olursa

$$\lim_{r \rightarrow a^-} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2} = 0$$

dır. Başka bir ifadeyle, öyle r_0 vardır ki $|\theta - \psi| \geq \delta$ iken $0 \leq r \leq r_0 < a$ için

$$\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2} < \varepsilon$$

olur. Buna göre (2.2.16) dan

$$|u(r, \theta) - f(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) |f(\theta) - f(\psi)|}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi \quad (2.2.17)$$

çıkar. Bu ifade de

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) |f(\theta) - f(\psi)|}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi$$

integralini $I = I_1 + I_2$ biçiminde iki parçaya ayıralım. I_1 integraline $|\theta - \psi| \geq \delta$ ve $0 \leq \psi \leq 2\pi$ olan ψ ler, I_2 ye $|\theta - \psi| < \delta$ olan $0 < \psi < 2\pi$ ler giriyor:

$$|\theta - \psi| \geq \delta \text{ için } I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) |f(\theta) - f(\psi)|}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(\theta)| + |f(\psi)|) P(r, \theta; a, \psi) d\psi$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} 2M \int_0^{2\pi} P(r, \theta; a, \psi) d\psi, M = \max_{0 \leq \psi \leq 2\pi} |f(\theta)|$$

dir. $0 \leq r \leq r_0 < a$ için $P < \varepsilon$ olacağından

$$I_1 < \frac{M}{\pi} 2\pi\varepsilon = 2M\varepsilon$$

bulunur. Aynı biçimde

$$|\theta - \psi| < \delta \text{ için } I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - f(\psi)| P(r, \theta; a, \psi) d\psi$$

ve $f(\theta)$ nın $[0, 2\pi]$ üzerinde sürekliliğinden $|f(\theta) - f(\psi)| < \varepsilon$ olacağından

$$I_2 < \frac{1}{2\pi} \varepsilon \int_0^{2\pi} P(r, \theta; a, \psi) d\psi$$

dir. Oysa (2.2.14) ten $\int_0^{2\pi} P(r, \theta; a, \psi) d\psi = 2\pi$ olduğundan

$$I_2 < \frac{\varepsilon}{2\pi} 2\pi = \varepsilon$$

dur. Böylece (2.2.17) den

$$|u(r, \theta) - f(\theta)| < \varepsilon[2M + 1]$$

elde edilir ki bu

$$\lim_{r \rightarrow a^-} u(r, \theta) = f(\theta)$$

eşitliğini gerektirir.

BÖLÜM 3

BİR BÖLGENİN GREEN FONKSİYONU

3.1. Bir Bölgenin Green Fonksiyonu ve Özellikleri

\mathfrak{R}^n nin sonlu, sınırlı, bağlantılı bir açığı D , kapanışı \bar{D} ve sınırı ∂D olsun. ($\bar{D} = D \cup \partial D$). $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ olmak üzere $P(x) \in D$ sabit, $Q(\xi) \in \bar{D}$ değişken noktalarını alalım. P ile Q arasındaki öklitsel uzaklık $r = d(P, Q) = \overline{PQ} = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}$ olmak üzere $D - \{P\}$ içinde

$$G(P, Q) = h(P, Q) + g(P, Q) \quad (3.1.1)$$

alıyoruz, burada h , Laplace denkleminin temel çözümüdür, yani $\mathfrak{R}^n - \{P\}$ içinde harmonik fonksiyondur: $n > 2$ için $1/r^{n-2}$, \mathfrak{R}^2 de ise $\log r$ olarak alınır. (3.1.1) yerine

$$G(x, \xi) = h(x, \xi) + g(x, \xi) \quad (3.1.2)$$

yazılır. Böylece tanımlanan $G : D \times D \rightarrow \mathfrak{R}$, $Q \mapsto G(P, Q)$ ya da $\xi \mapsto G(x, \xi)$ fonksiyonuna aşağıdaki şartlar koşulur:

- i) Sabit $P \in D$ için bu $Q \mapsto G(P, Q)$ fonksiyonu Q için $D - \{P\}$ içinde harmoniktir;
- ii) Oysa $Q \mapsto g(P, Q) = G(P, Q) - 1/PQ^{n-2}$ (\mathfrak{R}^2 de $G(P, Q) + \log \overline{PQ}$), P de dahil her $Q \in D$ için harmoniktir;
- iii) Q noktası sınıra yaklaşırsa G sifıra yaklaşır:

$$Q \rightarrow Q_0 \in \partial D \Rightarrow G(P, Q) \rightarrow 0 ;$$

iv) \bar{D} üzerinde Q nun sürekli fonksiyonu olur.

Bu şartlar dahilinde, $G(P, Q)$ ya D bölgesinin, bir $P \in D$ kutup noktasına göre Green fonksiyonu ya da kaynak fonksiyonu denir. [5]

3.2. Green Fonksiyonunun Özellikleri

Bir bölgenin Green fonksiyonunun birkaç özelliğini verelim.

i) *Green fonksiyonu (varsa) ancak bir tanedir:* Gerçekten D nin bu özelliği taşıyan $G_1 \neq G_2$ gibi ayrı iki Green fonksiyonu olsun. $G = G_2 - G_1$ farkı Teorem 1.3. ve Teorem 1.4. 'e göre sabit değilse (sabitse sıfıra eşit olmak zorundadır) ekstremumuna ∂D üzerinde erişir ki ekstremum burada sıfırdır; öyleyse $G = 0$ yani $G_1 = G_2$ olur.

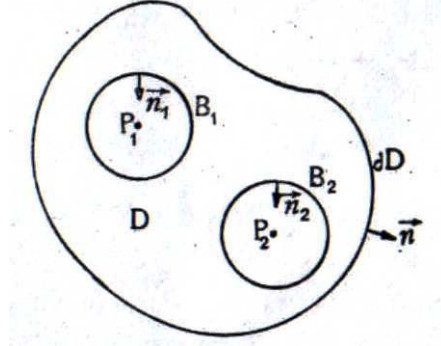
ii) *Green fonksiyonu negatif olamaz, geniş anlamda pozitiftir:* $G \geq 0$.

Bunu göstermek için P yi D içinde sabit tutalım. $Q \mapsto G(P, Q) = 1/r^{n-2} + g(P, Q)$ dır. $r = d(P, Q)$. Q, P ye yaklaşınca \mathbb{R}^n ($n > 2$) de $1/r^{n-2}$ (ve \mathbb{R}^2 içinde $\log \frac{1}{r} = -\log r$), P nin bulunduğu bölgede keyfi pozitif büyük değerler alır ve G pozitif olur. Bunun gibi $Q \rightarrow Q_0 \in \partial D$ sınırı üzerinde olunca G sıfıra eşit olur. Şimdi G , D içinde bazı noktalarda negatif olsaydı, G nin en az bir noktada minimumu bulunurdu. G , D içinde harmonik \bar{D} üzerinde sürekli ve de sabit olmadığından Teorem 1.2'ye göre minimum D içinde değil. ∂D üzerinde bulunmak zorunda olurdu ki, minimum burada 0 dır. Öyleyse D içinde $G(P, Q) \geq 0$ olur.

iii) *Green fonksiyonu P ve Q iç noktalarına göre simetriktir:*

$$G(Q, P) = G(P, Q) .$$

Gerçekten $P, Q \in D$ olsun. Merkezleri P_1, P_2 olan iki küçük yuvar sırayla B_1, B_2 olsun. $D^* = D - B_1 - B_2$ bölgesinde $Q \mapsto G(Q, P_1)$ ve $Q \mapsto G(Q, P_2)$, Q nun koordinatları için harmoniktir. (Şekil 3.1)



Şekil 3.1 Düzgün olmayan D bölgesi

$$Q \mapsto f(Q) = G(Q, P_1) \frac{\partial G(Q, P_2)}{\partial n} - G(Q, P_2) \frac{\partial G(Q, P_1)}{\partial n}$$

fonksiyonunun bölgenin bütün sınırı üzerindeki integrali sıfırdır. $Q, \partial D$ üzerinde iken

$$G(Q, P_1) = G(Q, P_2) = 0$$

olduğundan

$$\int_{\partial B_1} f dS + \int_{\partial B_2} f dS = 0 \quad (3.2.1)$$

olur. Yine $Q \mapsto G(Q, P_2)$, B_1 içinde harmonik ve normalı içeriye yönelmiş bulunduğundan, ikinci Green formülünde $\Delta u = \Delta v = 0$ yazıldığında

$$\int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (3.2.2)$$

elde edilir. (3.2.2) den

$$\int_{\partial B_1} \left[g(Q, P_1) \frac{\partial G(Q, P_2)}{\partial n} - G(Q, P_2) \frac{\partial g(Q, P_1)}{\partial n} \right] dS = 0$$

ve

$$\int_{\partial B_1} \left[\frac{1}{r_1^{n-2}} \frac{\partial}{\partial n} G(Q, P_2) - G(Q, P_2) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1^{n-2}} \right) \right] dS = -(n-2)\omega_n G(P_1, P_2)$$

elde edilir, burada $r_1 = d(Q, P_1)$, Q nun P_1 den olan öklitsel uzaklığıdır. Bu denklemler yan yana toplanırsa

$$\int_{\partial B_1} f dS = -(n-2)\omega_n G(P_1, P_2)$$

bulunur, burada ω_n , \mathfrak{R}^n de tüm uzay açıdır. Benzer biçimde

$$\int_{\partial B_2} f dS = (n-2)\omega_n G(P_2, P_1)$$

elde edilir. Öyleyse (3.2.1) den

$$G(P_1, P_2) = G(P_2, P_1)$$

bulunur, bu da gösterilmek istenendir. [1]

iv) Bir u fonksiyonu \bar{D} içinde harmonikse ve sürekli türevleri varsa D bölgesinin, D nin bir Q noktasına göre Green fonksiyonu

$$G(P, Q) = 1/r^{n-2} + g(P, Q), \quad r = d(P, Q)$$

olduğuna göre u nun $P \in D$ iç noktasındaki değeri sınır değerleri türünden

$$u(P) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial D} u(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS \quad (3.2.3)$$

dir, burada $\omega_n = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2)$, \mathfrak{R}^n ($n > 2$) de tüm uzay açığı göstermektedir. \mathfrak{R}^2 de ise $1/r^{n-2}$ ve $1/(n-2)\omega_n$ yerine sırayla $\log \frac{1}{r} = -\log r$ ve $1/2\pi$ gelir.

BÖLÜM 4

GREEN FONKSİYONU YARDIMIYLA DIRICHLET PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Şimdi Green fonksiyonu yardımıyla Dirichlet probleminin sırasıyla \mathfrak{R}^2 e, \mathfrak{R}^3 ve \mathfrak{R}^n de yuvar için çözümünü arayacağız.

4.1. \mathfrak{R}^2 İçinde Yuvar (daire) İçin Çözüm

Sınırı $\partial D = \Gamma$ olan bir D dairesinin bir Dirichlet bölgesi olduğunu ispatlayacağız.

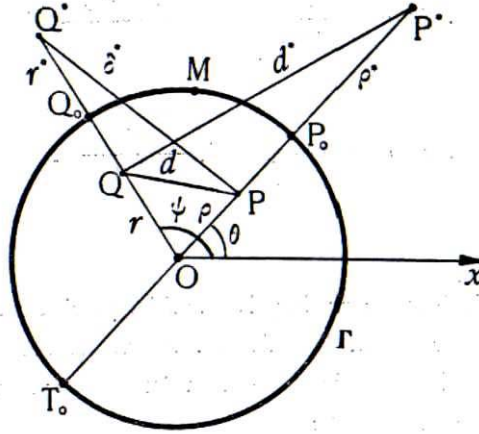
Teorem 4.1.1 (Poisson Teoremi) D , O merkezli ve a yarıçaplı bir daire, Γ da bunun sınırı olsun. Yine Ox kutup eksenini seçilsin, kutup açısı θ ile gösterilsin. $f(0) = f(2\pi)$ olan ve 2π periyotlu uzantısına özdeş bulunan, Γ üzerinde belirli ve sürekli bir $f(\theta)$ fonksiyonu göz önüne alalım. $P(\rho, \theta) \in \bar{D}$ noktasının

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2} f(\psi) d\psi$$

fonksiyonu D içinde harmonik, \bar{D} içinde sürekli ve çember üzerinde $u(a, \theta) = f(\theta)$ olur.

İspat. $P(\rho, \theta) \in \bar{D}$ ve $Q(r, \psi) \in D$ noktalarını alalım: bunların daireye göre tersleri de sırasıyla $P^*(\rho^*, \theta)$ ve $Q^*(r^*, \psi)$ olsun. (Şekil 4.1)

$$\rho\rho^* = rr^* = a^2 \tag{4.1.1}$$



Şekil 4.1 \mathbb{R}^2 de D dairesi

$M \in \Gamma$ se $\overline{MP^*} / \overline{MP}$ oranı sabit kalır, bu sabit oranın değeri örneğin $M = P_0 \in \Gamma$ alınarak hesap edilebilir. T_0, P, P_0, P^* harmonik noktalar olduğundan (4.1.1) den $\rho^* = a^2/\rho$ almakla

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MP^*}} = \frac{\overline{P_0P}}{\overline{P_0P^*}} = \frac{a - \rho}{(a^2/\rho^*) - a} = \frac{\rho}{a} \quad (4.1.2)$$

$G(P, Q)$ Green fonksiyonunda $h(P, Q) = -\log \overline{PQ} = -\log d$, $g(P, Q) = \log \left(\frac{\rho}{a} \overline{P^*Q} \right)$ alınıp

$d^* = \overline{P^*Q}$ koymakla

$$G(P, Q) = h(P, Q) + g(P, Q) = \log \left(\frac{\rho}{a} \frac{\overline{P^*Q}}{\overline{PQ}} \right) = \log \left(\frac{\rho}{a} \frac{d^*}{d} \right) \quad (4.1.3)$$

ya da

$$G(P, Q) = \log \frac{\rho}{a} - \log \frac{1}{d^*} + \log \frac{1}{d}$$

elde edilir. $G(P, Q)$, dairenin P kutuplu Green fonksiyonu adını alır. Daire için Green fonksiyonu olması için şu şartları gerçeklenmeli:

i) Sabit $P \in D$ için bu $Q \mapsto G(P, Q)$ fonksiyonu her $Q \neq P$ için \bar{D} içinde harmoniktir;

ii) $G(P, Q) = G(Q, P)$ dir, yani P ve Q nun fonksiyonu olarak göz önüne alınabilen $G(P, Q)$ fonksiyonu bu iki noktaya göre simetrik bir fonksiyondur;

iii) $Q \rightarrow Q_0 \in \Gamma$ için $G(P, Q) \rightarrow 0$ dir.

Önce (i) halini gösterelim. $Q(\xi, \eta)$ koordinatlarına göre $\log \rho/a$ sabit olup harmoniktir, $\log d = \log \overline{QP}$, $\log d^* = \log \overline{QP^*}$ öklitsel uzaklıkların başlangıçları (ya da bitimleri) Q olduğundan harmoniktir.

(ii) için (4.1.1) den $\frac{r}{\rho} = \frac{\rho^*}{r^*}$ olduğundan ve aralarında ortak α açıları bulunduğundan OPQ^* ve OP^*Q üçgenleri benzer olup

$$\frac{\rho}{r} = \frac{r^*}{\rho^*} = \frac{\delta^*}{d^*} \quad (4.1.4)$$

elde edilir. (4.1.4) ten

$$G(Q, P) = \log \left(\frac{a \overline{Q^*P}}{r \overline{QP}} \right) = \log \left(\frac{r \delta^*}{a d^*} \right) = \log \left(\frac{\rho d^*}{a d} \right) = \log \left(\frac{\rho \overline{P^*Q}}{a \overline{PQ}} \right) = G(P, Q).$$

(iii) durumunda, $Q \rightarrow Q_0 \in \Gamma$ için (4.1.2) de M yerine Q_0 alınmakla: $Q = Q_0$ için (4.1.3) den:

$$G(P, Q_0) = \log \left(\frac{\rho \overline{Q_0Q^*}}{a \overline{Q_0P}} \right) = \log \left(\frac{\rho a}{a \rho} \right) = 0.$$

$G(P, Q)$ nun hesabı

OPQ ve OP^*Q üçgenlerine kosinüs teoremi uygulanmakla Green fonksiyonunun kutupsal koordinatlarda ifadesi bulunur. $G(P, Q) = \log\left(\frac{\rho}{a} \frac{d^*}{d}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\rho^2}{a^2} \frac{d^{*2}}{d^2}\right)$ olup d^2 ile d^{*2} nin kosinüs teoreminden yazılan değerlerinde $\rho^* = a^2/\rho$ konursa

$$G(P, Q) = G(\rho, \theta; r, \psi) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2 - 2r\rho \cos(\theta - \psi) + r^2 \rho^2/a^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2}.$$

$$u(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} ds \quad (4.1.5)$$

formülünü uygulayalım. $ds = a d\psi$ ve

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right]_{Q=Q_0 \in \Gamma} &= \left[\frac{\partial G}{\partial r}(\rho, \theta; r, \psi) \right]_{r=a} \\ &= \frac{-(a^2 - \rho^2)}{a[a^2 - 2a\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2]} = -\frac{a^2 - \rho^2}{ad^2} \end{aligned}$$

olur.

$$P(\rho, \theta; a, \psi) = \frac{-(a^2 - \rho^2)}{2\pi[a^2 - 2a\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2]}$$

koyalım, buna *Poisson çekirdeği* denir. Böylece (4.1.5) den $\rho < a$ için

$$u(P) = u(\rho, \theta) = \frac{a^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\psi) d\psi}{a^2 - 2a\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2}$$

ya da kısaca

$$u(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} f(\psi)P(\rho, \theta; a, \psi)d\psi$$

elde edilir. $u(\rho, \theta)$ nın D içinde harmonik olduğu ve $\partial D = \Gamma$ üzerinde $f(\theta)$ ya yaklaştığı yani $\rho = a$ için $u(\rho, \theta) = f(\theta)$ olduğu daha önce gösterilmişti. [4]

Benzer biçimde dış Dirichlet Problemi için çözüm:

$$u(\rho, \theta) = \begin{cases} \frac{a^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\psi)d\psi}{a^2 - 2a\rho \cos(\theta - \psi) + \rho^2} & , \rho < a \\ f(\theta) & , \rho = a \end{cases}$$

4.2. \mathfrak{R}^3 İçinde Yuvar (Cisim Küre) İçin Çözüm

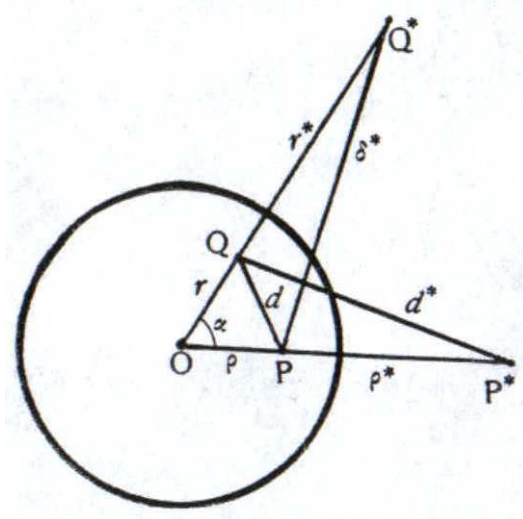
Yüzeyi $\partial D = S$ olan bir D yuvarının bir Dirichlet bölgesi olduğunu ispatlayacağız. [2], [3]

Teorem 4.2.1 *O merkezli ve a yarıçaplı bir yuvar, $\partial D = \Omega$ da bunun yüzeyi olsun. $P(\rho, \varphi, \theta) \in D$ sabit noktasının $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ yer vektörünün Oz eksenine açısı φ , \overrightarrow{OP} nin xOz üzerindeki izdüşümünün Ox eksenine açısı θ olsun. $f(\varphi, \theta)$, $\forall \varphi, \theta$ ve $k \in \mathbb{Z}$, $f(\varphi, \theta) = f(\varphi + 2k\pi, \theta + 2k\pi)$ olan bir fonksiyon ise $P(\rho, \varphi, \theta) \in D$ noktasının*

$$u(P) = u(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\pi \frac{a(a^2 - \rho^2)f(\phi, \Theta)}{(a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \alpha)^{3/2}} d\phi$$

fonksiyonu D içinde harmonik, \overline{D} içinde süreklidir ve yuvar yüzeyinde $u(a, \varphi, \theta) = f(\varphi, \theta)$ olur, burada α , gelişigüzel bir $Q(r, \phi, \Theta) \in \overline{D}$ değişen noktası için $\alpha = m \widehat{POQ}$ ile belirlenen niceliktir.

İspat. $P(\rho, \varphi, \theta) \in D$ ve $Q(r, \phi, \Theta) \in \overline{D}$ noktaları alınsın. Bunların yuvara göre tersleri de sırayla $P^*(\rho^*, \varphi, \theta) \in D$ ve $Q^*(r^*, \phi, \Theta) \in \overline{D}$ olsun. (Şekil 4.2)



Şekil 4.2 \mathfrak{R}^3 te yuvar

$$rr^* = \rho\rho^* = a^2 \quad (4.2.1)$$

dir. $M \in S$ ise dairede olduğu gibi

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MP^*}} = \frac{\rho}{a} \quad (4.2.2)$$

dir. $G(P, Q)$ Green fonksiyonunda

$$h(P, Q) = \frac{1}{PQ} = \frac{1}{d}, \quad g(P, Q) = -\frac{a}{\rho} \frac{1}{P^*Q} = -\frac{a}{\rho} \frac{1}{d^*}$$

alınmakla

$$G(P, Q) = h(P, Q) + g(P, Q) = \frac{1}{PQ} - \frac{a}{\rho} \frac{1}{P^*Q} = \frac{1}{d} - \frac{a}{\rho} \frac{1}{d^*} \quad (4.2.3)$$

elde edilir; buna *kürenin P kutuplu Green fonksiyonu* denir. Dairedeki gibi dört şart gerçekleşir. Bunlardan ikisini gösterelim.

ii) Dairede olduğu gibi

$$\frac{\rho}{r} = \frac{r^*}{\rho^*} = \frac{\delta^*}{d^*} \quad (4.2.4)$$

bulunur. (4.2.4) ten

$$G(Q, P) = \frac{1}{QP} - \frac{a}{\rho} \frac{1}{Q^*P} = \frac{1}{d} - \frac{a}{r} \frac{1}{\delta^*} = \frac{1}{d} - \frac{a}{\rho} \frac{1}{d^*} = \frac{1}{PQ} - \frac{a}{\rho} \frac{1}{P^*Q} = G(P, Q)$$

olur.

iii) $Q \rightarrow Q_0 \in \Omega$ için (2.6.2) den M yerine Q_0 alınmakla $\overline{Q_0P}/\overline{Q_0P^*} = \rho/a$ olup

$$\begin{aligned} G(P, Q_0) &= \frac{1}{PQ_0} - \frac{a}{\rho} \frac{1}{P^*Q_0} = \frac{1}{PQ_0} \left(1 - \frac{a}{r} \frac{\overline{Q_0P}}{\overline{Q_0P^*}} \right) \\ &= \frac{1}{PQ_0} \left(1 - \frac{a}{\rho} \frac{\rho}{a} \right) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$G(P, Q)$ nun hesabı

POQ ve OP^*Q üçgenlerine kosinüs teoremini uygulayalım. $\alpha = m \widehat{POQ}$ demekle

$$\overline{QP}^2 = d^2 = r^2 - 2r\rho \cos \alpha + \rho^2$$

ve

$$\overline{P^*Q}^2 = d^{*2} = \rho^{*2} - 2\rho^*r \cos \alpha + r^2 = \frac{a^4}{\rho^2} - 2\frac{a^2}{\rho}r \cos \alpha + r^2$$

dir. Böylece (4.2.3) den

$$G(P, Q) = G(\rho, \varphi, \theta; r, \phi, \Theta) = \frac{1}{(r^2 - 2r\rho \cos \alpha + \rho^2)^{1/2}} - \frac{a}{\rho} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{\rho^2} - 2\frac{a^2}{\rho} r \cos \alpha + \rho^2\right)^{1/2}}$$

bulunur.

Şimdi $\cos \alpha$ yı $\varphi, \phi; \theta, \Theta$ türünden hesaplayalım. Kartezyen koordinatlarda $P(x, y, z)$, $Q(\xi, \eta, \zeta)$ ise (Şekil 4.3), $Q \in \Omega$ için $r = a$ dır ve:

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi;$$

$$\xi = a \sin \phi \cos \Theta, \quad \eta = a \sin \phi \sin \Theta, \quad \zeta = a \cos \phi.$$

$$\overline{QP^2} = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

$$= (\rho \sin \varphi \cos \theta - a \sin \phi \cos \Theta)^2 + (\rho \sin \varphi \sin \theta - a \sin \phi \sin \Theta)^2 + (\rho \cos \varphi - a \cos \phi)^2$$

$$= \rho^2 + a^2 - 2a\rho[\sin \varphi \sin \phi \cos(\theta - \Theta) + \cos \varphi \cos \phi]$$

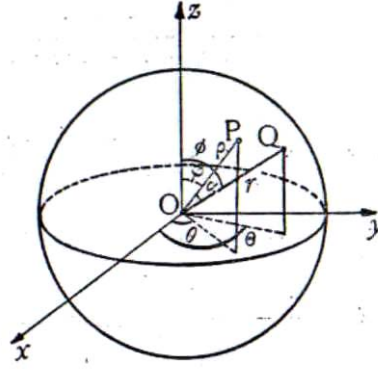
olup QPO üçgenine kosinüs teoremini uygulamakla ($Q \in \Omega$)

$$\overline{QP^2} = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \alpha$$

yazılır. Bu iki ifadeyi eşitlemekle

$$\cos \alpha = \cos \varphi \cos \phi + \sin \varphi \sin \phi \cos(\theta - \Theta) \quad (4.2.5)$$

elde edilir.



Şekil 4.3 \mathcal{R}^3 te cisim küre

$$u(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} u(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS \quad (4.2.6)$$

formülünü uygulayalım. Küre üzerinde

$$x = a \sin \phi \cos \Theta, \quad y = a \sin \phi \sin \Theta, \quad z = a \cos \phi$$

parametrik denklemlerini kullanalım. Bir f fonksiyonunun yüzey integrali formüllerinden biri

$$I = \iint_{\Omega} f dS = \iint_D f(x, y) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

dir; bir başkası da

$$I = \iint_{\Omega} f \sqrt{EG - F^2} d\phi d\Theta$$

dir. Burada $\Omega: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{z}$ dir. Küresel koordinatlara geçmekle

$$I = \iint_D f(\phi, \Theta) \frac{a}{z} |J| d\phi d\Theta$$

olur,

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\phi, \Theta)} = a^2 \sin \phi \cos \phi$$

dir. İkinisinden $E = a^2, F = 0, G = a^2 \sin^2 \phi$ olduğundan her ikincisinden de $I = a^2 \iint_{D'} f(\phi, \Theta) \sin \phi d\phi d\Theta$ sonucu çıkar. $0 \leq \phi \leq \pi$ dir.

Öte yandan

$$\left[\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right]_{Q \in Q_0 \in \Omega} = \left[\frac{\partial G}{\partial r}(\rho, \varphi, \theta; r, \phi, \Theta) \right]_{r=a} = -\frac{a^2 - \rho^2}{a(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \alpha)^{3/2}} = -\frac{a^2 - \rho^2}{ad_0^3}$$

tür.

$$P(\rho, \varphi, \theta; a, \phi, \Theta) = \frac{-(a^2 - \rho^2)}{4\pi a[a^2 - 2a\rho \cos \alpha + \rho^2]}$$

koyalım, buna *Poisson çekirdeği* denir. Böylece (4.2.6) dan

$$u(P) = u(\rho, \varphi, \theta) = \frac{a(a^2 - \rho^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\pi \frac{f(\phi, \Theta) \sin \phi}{(a^2 - 2a\rho \cos \alpha + \rho^2)^{3/2}} d\phi \quad (4.2.7)$$

elde edilir, burada $\cos \alpha$ (4.2.5) ile belirlidir.

Örnek 4.2.1 $f(\varphi)$ nın birim çember üzerinde $1 + x - y^2$ polinomunu değer olarak alması için u harmonik fonksiyonu nasıl belirlenmeli? [6]

Çözüm. Çember üzerinde $x = \cos \varphi, y = \sin \varphi$ olup $f(\varphi) = 1 + \cos \varphi - \sin^2 \varphi$ dir. İkinci dereceden harmonik polinom, birinci dereceden $\alpha + \beta x + \gamma y$ gibi keyfî bir parça içereceğinden

$$u = \alpha + \beta x + \gamma y + Ax^2 + By^2 + Cxy$$

biçimindedir. $\Delta u \equiv 0$ alınırsa $2A + 2B = 0$, $B = -A$ ulunur. $x^2 + y^2 = 1$ için $u = 1 + x - y^2$ olması isteniyor. u da $x^2 = 1 - y^2$ konursa

$$u = \alpha + \beta x + \gamma y + A(1 - 2y^2) + Cxy \equiv 1 + x - y^2$$

yazılır. Buradan

$$\alpha + A = 1, \beta = 1, \gamma = 0, -2A = -1, C = 0$$

ya da bunlardan $A = 1/2$, $\alpha = 1/2$ bulunur. Böylece:

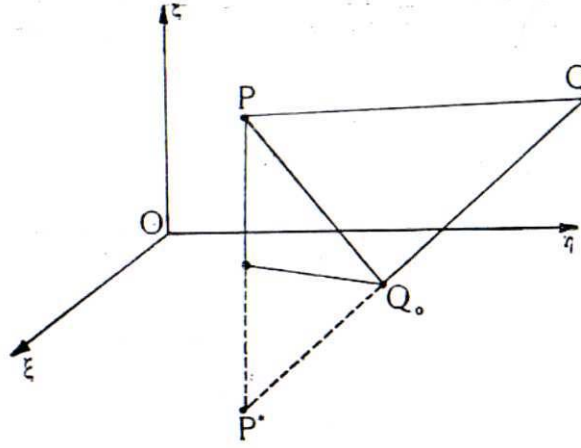
$$u = \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

$x^2 + y^2 = 1$ için $1 + x - y^2$ ile çakışan bir harmonik polinomdur. Çözüm tekse problem çözülmüş olur.

4.3. \mathfrak{R}^3 te Yarım Uzay İçin Dirichlet Problemi

$D\{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid z > 0\}$ yarım uzayından oluşan bölgeyi ele alalım. \bar{D} de harmonik, D de sürekli ve $z = 0$ üzerinde $u = f(x, y)$, sonsuzda da sifira eşit bir $u(x, y, z)$ fonksiyonu bulmak.

$D \subset \mathfrak{R}^3$ bölgesi $D\{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid z > 0\}$ yarım uzayı olsun. $P(x, y, z) \in D$, $Q(\xi, \eta, \zeta) \in \mathfrak{R}^3$, P nin $\zeta = 0$ düzlemine göre simetriği $P^*(x, y, z)$ olsun (Şekil 2.5)



Şekil 4.4 \mathfrak{R}^3 te yarım uzay

Bölgenin Green fonksiyonunu belirleyelim:

$$h(P, Q) = \frac{1}{d(P, Q)} = \frac{1}{PQ},$$

$$g(P, Q) = \frac{1}{d(P^*, Q)} = \frac{1}{P^*Q}$$

ve

$$G(P, Q) = h(P, Q) + g(P, Q) = \frac{1}{PQ} - \frac{1}{P^*Q}$$

bölgenin Green fonksiyonu olarak alınabilir. Harmoniklik basit şekilde bulunabilir, sınırda sıfır olma durumunu gösterelim:

$\zeta = 0$ için yani $Q = Q_0 \in \zeta O\eta$ düzlemi olunca $\overline{PQ_0} = \overline{P^*Q_0}$ ve $G(P, Q_0) = 0$ olur.

Koordinatlar türünden

$$G(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}}$$

dir.

$$\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\text{grad}}G = -\vec{k} \cdot \vec{\text{grad}}G = -\frac{\partial G}{\partial \zeta}$$

Olup

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right]_{Q=Q_0 \in S} &= \left[\frac{\partial G}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=0} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}} \right]_{\zeta=0} \\ &= -\frac{2z}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

bulunur. (4.1.5) formülünden

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi d\eta$$

elde edilir.

BÖLÜM 5

SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN GENELLEŞMİŞ ÇÖZÜMLERİ

5.1. Sınır Değer Problemlerinin Klasik ve Genelleşmiş Çözümleri

Farz edelim ki katsayıları reel değerli ve $\forall x \in Q$ için $a(x) \in C(\bar{Q})$, $k(x) \in C^1(\bar{Q})$, $k(x) \geq k_0 > 0$ koşullarını sağlayan

$$Lu \equiv \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f(x) \quad (5.1.1)$$

eliptik denklemini n boyutlu Q bölgesinde verilsin.

$u(x)$ fonksiyonu ve denklemin serbest terimi $f(x)$ genel olarak kompleks değerlidir.

$C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ 'ya ait $u(x)$ fonksiyonuna (5.1.1) denklemini için birinci sınır-değer probleminin klasik çözümü ya da (5.1.1) denklemini için Dirichlet problemi denir, eğer Q 'da (5.1.1) denklemini ve

$$u|_{\partial Q} = \varphi(x) \quad (5.1.2)$$

sınır koşulunu sağlıyorsa. Burada $\varphi(x)$ fonksiyonu ∂Q sınırında belirleyici fonksiyondur.

$u(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ fonksiyonuna (5.1.1) denklemini için üçüncü sınır-değer probleminin klasik çözümü denir, eğer Q 'da (5.1.1) denklemini ve ∂Q da

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u \right) \Big|_{\partial Q} = \varphi(x) \quad (5.1.3)$$

sınır koşulunu sağlıyorsa. Burada $\sigma(x) \in C(\partial Q)$ ve $\varphi(x)$ belirleyici fonksiyonlardır. ($\sigma(x) \geq 0$).

Eğer $\sigma(x) \equiv 0$ olursa üçüncü sınır-değer problemi ikinci sınır-değer problemine dönüşür.

$n = 1$ olduğunda, (5.1.1) denklemi

$$Lu \equiv (k(x)u')' - a(x)u = f(x) \quad (5.1.1')$$

adi diferansiyel denklemi halini alır. Bu durumda Q bölgesi (α, β) aralığıdır, öyle ki birinci ve üçüncü sınır-değer problemlerinin sınır koşulları sırasıyla şu formdadır:

$$u|_{x=\alpha} = \varphi_0, \quad u|_{x=\beta} = \varphi_1 \quad (5.1.2')$$

$$(-u' + \sigma_0 u)|_{x=\alpha} = \varphi_0, \quad (u' + \sigma_1 u)|_{x=\beta} = \varphi_1 \quad (5.1.3')$$

burada $\varphi_0, \varphi_1, \sigma_0, \sigma_1 \geq 0$ belirleyici sabitlerdir.

(5.1.1), (5.1.2) birinci sınır-değer probleminin Q bölgesindeki klasik çözümü $u(x)$ fonksiyonu olsun. (5.1.1) denklemini keyfi $\bar{v}(x) \in \dot{C}^1(Q)$ ile çarpıp, sonucu Q bölgesi üzerinde integre edelim. Ostrogradskii formülünden

$$\int_Q (k \nabla u \nabla \bar{v} + a u \bar{v}) dx = - \int_Q f \bar{v} dx \quad (5.1.4)$$

elde edilir.

(Burada ∂Q üzerinde elde edilen integral \bar{v} kompakt supportta sahip olduğundan ihmal edilmiştir.) [7]

Eğer, ek olarak $u_{x_i} \in L_2(Q)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) yani $u(x) \in H^1(Q)$ ise ve $f(x) \in L_2(Q)$ ise (5.1.3) özdeşliği sadece $\forall v(x) \in \dot{C}^1(Q)$ için değil $\forall v \in \overset{0}{H}^1(Q)$ için sağlanır.

Bunu göstermek için $\forall v \in \overset{0}{H}^1(Q)$ ve $H^1(Q)$ normundan v ye yakınsayan $\dot{C}^1(\bar{Q})$ 'ya ait $v_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ dizisinin ele alalım. (5.1.4) eşitliği her $v_k(x)$, için sağlanır. Eğer $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa (5.1.4) eşitliğinin v için de sağlandığı görülür.

Özetle, eğer $f(x) \in L_2(Q)$, (5.1.1), (5.1.2) probleminin u klasik çözümü $H^1(Q)$ ya ait olduğunda (5.1.4) integral özdeşliği $\forall v \in \overset{0}{H}^1(Q)$ için sağlanır.

Şu tanımla devam edelim:

$f(x) \in L_2(Q)$, $u \in H^1(Q)$ fonksiyonuna (5.1.1), (5.1.2) probleminin genelleşmiş çözümü denir, eğer $\forall v \in \overset{0}{H}^1(Q)$ için (5.1.4) özdeşliği ve (5.1.2) sınır koşulu sağlanıyorsa. ($u|_{\partial Q}$, u nun izidir.)

Özel olarak yukarıda verilen genelleşmiş çözüm tanımı $u(x)$ klasik çözümü tanımının tam bir genelleştirmesi değildir. Çünkü $u(x)$ klasik çözümü bazı ek şartları gerekir:

$$u \in H^1(Q)$$

$$Lu \in L_2(Q).$$

Bu hatırlatmadan sonra (5.1.1) denklemini için üçüncü (ikinci) sınır-değer probleminin genelleşmiş çözümünü verelim.

$u(x)$, (5.1.1), (5.1.3) sınır-değer probleminin klasik çözümü olsun. (5.1.1) denkleminin sağ taraflı fonksiyonu $L_2(Q)$ 'dan ve (5.1.3) sınır koşulundaki $\varphi(x)$ fonksiyonu $L(\partial Q)$ ya

aittir. (5.1.1) denklemini herhangi bir $\bar{v}(x) \in H^1(Q)$ ile çarpıp, sonuç Q bölgesi üzerinde integre edildiğinde

$$\int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v}) dx + \int_{\partial Q} k\sigma u \bar{v} dS = -\int_Q f \bar{v} dx + \int_{\partial Q} k\phi \bar{v} dS \quad (5.1.5)$$

elde edilir.

(5.1.1) denklemi için sınır-değer problemlerinin genelleşmiş çözüm tanımları bir boyutlu durum için de geçerlidir.

$u(x) \in H^1(\alpha, \beta)$, (5.1.2') koşullarını sağlayan (5.1.1') denklemi birinci sınır-değer probleminin genelleşmiş çözümüdür $\forall v \in H^1(\alpha, \beta)$ için

$$\int_{\alpha}^{\beta} (ku' \bar{v}' + au\bar{v}) dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f \bar{v} dx \quad (5.1.4')$$

olduğundan $u(x) \in H^1(\alpha, \beta)$, eğer $\forall v \in H^1(\alpha, \beta)$ için

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (ku' \bar{v}' + au\bar{v}) dx + k(\beta)\sigma_1 u(\beta)\bar{v}(\beta) + k(\alpha)\sigma_0 u(\alpha)\bar{v}(\alpha) = \\ = -\int_{\alpha}^{\beta} f \bar{v} dx + k(\beta)\phi_1 \bar{v}(\beta) + k(\alpha)\phi_0 \bar{v}(\alpha) \end{aligned} \quad (5.1.5')$$

sağlanıyorsa, (5.1.1) denklemi için üçüncü (ikinci) sınır-değer probleminin genelleşmiş çözümüdür. [7]

KAYNAKLAR

- [1] **Tuncer, T.** (1992) *Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler*, İstanbul, pp. 396-462.
- [2] **Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A.** (1963) *Equations of Mathematical Physics*, Dover Publications, New York, pp. 1-75.
- [3] **Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A.** (1964) *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, vol. 1, San Francisco, pp. 100-250.
- [4] **Petrovskii, I.G.** (1967) *Partial Differential Equations*, W.B. Saunders Company, Philadelphia, pp. 236-336.
- [5] **Duffy, D.G.** (2001) *Green's Functions with Applications*, Chapman and Hall, New York, pp. 1-59.
- [6] **Duffy, D.G.** (1956) *Partial Differential Equations*, Chapman and Hall, Toronto, pp. 78-226.
- [7] **Mikhailov, V.P.** (1978) *Partial Differential Equations*, Mir Publishers, Moscow, pp. 158-260.
- [8] **Kreyszig, E.** (1978) *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons. Inc., Canada, pp. 58-260.

ÖZGEÇMİŞ

Afşin Kürşat GAZANFER 1981'de İstanbul'da doğdu; ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı; İstanbul Kurtuluş Süper Lisesi'nden mezun olduktan sonra 1999 yılında ZKÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdi; 2003'te "iyi" derece ile mezun olduktan sonra Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı; halen 2003 yılında girdiği ZKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programını sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres: Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
67100 ZONGULDAK

Tel: (372) 257 4010-1659
Faks: (372) 257 4181
E-posta: afsinkursat@hotmail.com