HARDY UZAYLARI

Ahmet AYDEMİR

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Bilim Uzmanlığı Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK
Eylül 2006

KABUL:

Ahmet AYDEMİR tarafından hazırlanan "HARDY UZAYLARI" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Karaelmas Üniversitesi (ZKÜ) Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Bilim Uzmanlığı Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 25/09/2006

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Yüksel SOYKAN (ZKÜ)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN (ZKÜ) Dikmen

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin AYTEKİN (ZKÜ) H. Aytekin

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. 10/10/2006

Prof. Dr. İhsan TOROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Bilim Uzmanlığı Tezi

HARDY UZAYLARI

Ahmet AYDEMİR

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yüksel Soykan
Eylül 2006, 81 Sayfa

Bu tezde H^p uzayları içindeki harmonik (ve özellikle analitik) fonksiyonlar üzerinde çalışılmıştır. Birinci bölümde tez için gerekli olan tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde; Fourier serileriyle ilgili bilgiler verilmiş ve Fourier serisinden Cesaro ortalamaları yardımıyla fonksiyonun ne şekilde elde edilebileceği üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde birim yuvarda analitik ve harmonik fonksiyonlar üzerinde durulmuş Fatou teoremi ve ispatı verilmiştir. Son bölümde ise sağ yarı düzlemdeki H^p uzayı üzerinde çalışılmıştır. Açık sağ yarı düzlemde verilen bir analitik fonksiyonun sınır davranışları incelenmiş, birim yuvardaki H^p uzayı ile yarı düzlemdeki H^p uzayı arasındaki ilişkinin doğrusal kesir dönüşümüyle nasıl kurulduğu verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hardy uzayı, Cesaro ortalamaları, Fourier serileri, Yarı düzlemin H^p uzayı, Birim yuvarın H^p uzayı.

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

HARDY SPACES

Ahmet AYDEMİR

Zonguldak Karaelmas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asst. Prof. Yüksel Soykan
September 2006, 81 Pages

In this thesis, the harmonic (and specifically analitic) functions on H^p spaces studied. In first chapter, some essential definitions and theorems are given. In second chapter, the information about Fourier series is given and how a function can be reconsturucted from its Fourier series by Cesaro means is explained. In third chapter, the functions which are analitic and harmonic in unit disc are studied and Fatou theorem is given with its proof. Finally, H^p space of right half plane is concidered. Boundary behaviour of an analitic function which is defined on the open right half plane is studied and how the relation between H^p of unit disc and H^p of half plane is constructed by the linear fraction transformation is given.

Key Words: Hardy space, Cesaro means, Fourier series, H^p space of half plane, H^p spaces of unit disc.
Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçiminden itibaren değerli vaktini esirgemeden bana ayıran, tüm çalışmalarımı titizlikle inceleyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Yüksel SOYKAN'a, lisansüstü eğitim yapmam için beni teşvik eden hocam sayın Prof. Dr. Arif AMİROV' a, tezin hazırlanmasında bana yardımcı olan sevgili arkadaşlarım Emine AYSEL' e, Zekeriya USTAOĞLU' na ve Yıldıray TANYERİ' ye ve manevi desteklerinden dolayı sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

D	:	$\{ z \in C : \lvert z \rvert < 1 \}$
C	:	$\{ z \in C : \lvert z \rvert = 1 \}$
C	:	karmaşık sayılar kümesi
F	:	skaler bir cisim (*F*=*R* veya *F*=*C*)
$O(h)$	:	$f(h) = O(g(h))$, $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = c$, $c \in C$

BÖLÜM 1

ÖN BİLGİLER

1.1 VEKTÖR UZAYLAR

Tanım 1.1.1 V boş olmayan bir küme olsun. Her x, $y \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) için $V \times V$ den V ye tanımlı

$$+ : (x, y) \to x + y$$

fonksiyonu ve $\mathbb{F} \times V$ den V ye tanımlı

$$. : (\alpha, x) \to \alpha.x$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa V kümesine $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı denir. Her α, $\beta \in \mathbb{F}$ ve x, y, $z \in V$ için

(a) $x + y = y + x, x + (y + z) = (x + y) + z;$

(b) $x + 0 = x$ olacak biçimde bir tek $0 \in V$ vardır;

(c) $x + (-x) = 0$ bir tek $-x \in V$ vardır;

(d) $1x = x, \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$

(e) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$

Tanım 1.1.2 V bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\varnothing \neq U \subset V$olsun. U nun kendisi bir vektör uzayı ise U ya V nin bir altuzayı denir ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve x,$y \in U$ için bu tanım

$$\alpha x + \beta y \in U$$

olma koşulu ile denktir.

Tanım 1.1.3 V bir vektör uzayı olmak üzere boş olmayan bir $M \subset V$ kümesi için M 'nin vektörlerinin tüm sonlu lineer birleşimlerinin kümesine M'nin gereni (spanı) denir ve spM ile gösterilir. $k \geq 1$ için

$$\mathbf{v} = \{v_1, ..., v_k\} \subset V$$

sonlu bir küme, $\mathbf{v}$ lineer bağımsız ve

$$sp\mathbf{v} = V$$

ise $\mathbf{v}$ ye V nin bir tabanı denir. V böyle (sonlu) bir tabana sahipse o zaman V nin her tabanı aynı sayıda elemana sahiptir. Eğer bu sayı k ise o zaman V 'nin k-boyutlu (yada daha genel olarak, sonlu-boyutlu) olduğu söylenir ve

$$\dim V = k$$

yazılır. Eğer V böyle sonlu bir tabana sahip değilse yani V sonlu tane elemanla gerilemezse V ye sonsuz-boyutludur denir.

Tanım 1.1.4 B, $\mathbb{C}$ içinde bir bölge olmak üzere $f : B \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ görüntü eğrileride $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında konform dönüşümdür denir. Eğer her $z_0 \in B$ noktasında f fonksiyonu konform ise f, B bölgesinde konformdur denir.

Tanım 1.1.5 $ad - bc \neq 0$ koşulu (bu T nin sabit olmaması için gerek ve yeter koşuldur) ile

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

biçimindeki fonksiyona bir lineer kesir dönüşümü denir.

Tanım 1.1.6 Boş olmayan bir X kümesi ve bir $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$,

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

fonksiyonu verilsin. Eğer bu d fonksiyonu $\forall\ x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, y) \geq 0$

(M2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde bir metrik adını alır, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 1.1.7 Bir X vektör uzayı üzerinde tanımlı olup, bir $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen ve x, y, X de keyfi vektörler ve α bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel değerli fonksiyona bir norm denir:

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tanım 1.1.8 X üzerindeki bir norm, X üzerinde

$$d\,(x, y) = \|x - y\| \qquad\qquad (x, y \in X)$$

ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik, norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır. Üzerinde bir norm tanımlanmış bir X vektör uzayına bir normlu uzay adı verilir. Normlu uzaylar $(X, \|.\|)$ ya da kısaca X ile gösterilir.

Tanım 1.1.9 (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X uzayında bir dizi olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde ε na bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine X içinde bir Cauchy dizisi adı verilir.

Tanım 1.1.10 Bir X metrik uzayında her Cauchy dizisi, X içinde bir limite yakınsıyorsa X uzayına tam uzay denir.

Tanım 1.1.11 Normun indirgediği metriğe göre tam olan bir normlu vektör uzayına bir Banach Uzayıdır denir.

Tanım 1.1.12 $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ normlu uzayları ve $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X$$

ise T'ye izometri (norm koruyan dönüşüm) denir.

X normlu lineer uzayı üzerinde I birim operatörü bir izometridir.

Tanım 1.1.13 X ve Y normlu vektör uzayları, $T : X \to Y$ üzerine (örten) bir izometri ise T'ye izometrik izomorfizm, X ve Y uzaylarına da izomorfik uzaylardır denir.

1.2 HİLBERT UZAYLARI

Tanım 1.2.1 H reel ya da karmaşık vektör uzayında tanımlı $(.,.)$ fonksiyonu
(a) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
(b) $(\lambda x, y) = \lambda\,(x, y)$
(c) $(y, x) = \overline{(x, y)}$
(d) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ ancak ve ancak $x = 0$
şartlarını sağlarsa $(.,.)$ fonksiyonuna iç çarpım fonksiyonu ve H ye iç çarpım uzayı denir.

Tanım 1.2.2 X bir iç çarpım uzayı olsun. $x, y \in X$ vektörleri için

$$(x, y) = 0$$

ise bu iki vektöre ortogonaldir (diktir) denir ve $x \perp y$ sembolü kullanılır.

Tanım 1.2.3 X bir iç çarpım uzayı olsun. $\{e_1, e_2, ..., e_k\} \subset X$ kümesini gözönüne alalım. $1 \leq n \leq k$ ve $1 \leq m \leq k$ olmak üzere her m, n için

$$(e_m, e_n) = \begin{cases} 1 \ , \ m = n \text{ ise} \\ 0 \ , \ m \neq n \text{ ise} \end{cases}$$

sağlanırsa $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ kümesine ortonormaldir (birim dikeydir) denir.

$$m = n$$

için

$$(e_m, e_n) = 1$$

olması

$$\|e_n\| = 1$$

ile denktir.

Tanım 1.2.4 X bir iç çarpım uzayı ve $\{e_n\}$, X içinde bir dizi olsun. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$(e_m, e_n) = \begin{cases} 1 \ , \ m = n \text{ ise} \\ 0 \ , \ m \neq n \text{ ise} \end{cases}$$

sağlanırsa $\{e_n\}$ dizisine ortonormal dizidir (birim dikey dizidir) denir.

Teorem 1.2.5 $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $\{e_n\}$, $\mathcal{H}$ içinde ortonormal bir dizi olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

(a) $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$,

(b) $\overline{Sp}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{H}$,

(c) Her $x \in \mathcal{H}$ için $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$

(d) Her $x \in \mathcal{H}$ için $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\, e_n$.

Tanım 1.2.6 $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve $\{e_n\}$, $\mathcal{H}$ içinde ortonormal bir dizi olsun. O zaman (1.2.5.) içindeki koşullardan herhangi birisi sağlanırsa $\{e_n\}$ dizisine $\mathcal{H}$ için bir ortonormal taban (tam ortonormal dizi) adı verilir.

Tanım 1.2.7 Normlu bir X uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı varsa, $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsaktır (ya da norma göre yakınsaktır) denir. Bu durum

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$$

veya kısaca

$$x_n \to x$$

olarak yazılır.

Tanım 1.2.8 Normlu bir X uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer her f için

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı varsa, $\{x_n\}$ dizisi zayıf yakınsaktır denir ve

$$x_n \xrightarrow{z} x$$

ya da

$$x_n \rightharpoonup x$$

şeklinde yazılır. x elemanına $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir ve $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir.

Tanım 1.2.9 X boş olmayan bir küme ve $f_n : X \longrightarrow \mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde fonksiyonlar olsun.

(a) Eğer her bir $x \in X$ için $\{f_n(x)\}$ sayı dizisi, bir $f(x)$ sayısına yakınsıyor, yani

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

oluyor ise, f_n fonksiyon dizisine f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir.

(b) $f_n : X \longrightarrow \mathbb{F}$ fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı var ve her $x \in X$, her $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

oluyor ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

Tanım 1.2.10 B, $\mathbb{C}$ içinde bir bölge olmak üzere $f : B \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ görüntü eğrileride $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında konform dönüşümdür denir. Eğer her $z_0 \in B$ noktasında f fonksiyonu konform ise f, B bölgesinde konformdur denir.

1.3 KARMAŞIK ANALİZ

Tanım 1.3.1 Bir f fonksiyonunun türevi yalnızca z_0 noktasında değilde z_0 'ın komşuluğundaki her z noktasında mevcutsa f, fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 1.3.2 $f : C \to C$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

şeklinde bir fonksiyon olduğunda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad ve \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

denklemlerine Cauchy-Riemann şartları denir.

Teorem 1.3.3 Eğer $f = u + iv$ foksiyonunun bir z noktasında türevi varsa o zaman u ve v bileşenlerinin bu noktada x ve y değişkenlerine göre birinci mertebeden kısmi türevleri var olmalıdır ve bu türevler Cauchy-Riemann şartlarını sağlamalıdır. Ayrıca $f'(z)$ türevi bu kısmi türevler yardımıyla

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Teorem 1.3.4 x ve y nin gerçel tek değerli iki fonksiyonu u ve v olsun, ayrıca hem u ve v hemde bunların birinci mertebeden kısmi türevleri (x_0, y_0) noktasında sürekli olsunlar. Eğer kısmi türevler bu noktada Cauchy-Riemann şartlarını sağlarsa $f = u + iv$ fonksiyonunun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında türevi vardır.

Tanım 1.3.5 f, kapalı bir C çevresinin üzerinde ve içinde analitik olsun. Eğer z_0, C

'nin rastgele bir iç noktası ise integral C üzerinden pozitif anlamda alınmak üzere

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

ifadesine Cauchy integral formülü denir.

Tanım 1.3.6 $z = re^{i\theta}$ karmaşık sayısı için

$$\begin{aligned} \ln(z) &= \ln\left(re^{i\theta}\right) \\ &= \ln(r) + \ln\left(e^{i\theta}\right) \\ &= \ln(r) + i\theta \end{aligned}$$

dır.

$$\theta = \theta + 2n\pi \ , \ (n \in N)$$

olduğundan

$$\ln(z) = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi)$$

şeklinde her bir n için çok değerli bir fonksiyondur. Şimdi ln fonksiyonunu $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$ olacak şekilde seçersek

$$\ln(z) = \ln(r) + i\theta$$

şeklinde tek değerli $(\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ aralığında analitik bir fonksiyon olur. Bu fonksiyona logaritma fonksiyonunun $(\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ aralığına düşen dalı diyeceğiz, $(-\pi, \pi)$ aralığına düşen dalını Ln ile göstereceğiz ve bunada logaritma fonksiyonunun esas dalı diyeceğiz.

Tanım 1.3.7 $z_0, \ z$ birer karmaşık sayı ve $n = 0, 1, 2, ...$ için a_n de birer karmaşık ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

şeklindeki serilere kuvet serisi denir.

1.4 ÖLÇÜM VE İNTEGRASYON

Tanım1.4.1 X bir küme ise X in tüm alt kümelerinin ailesi

$$\begin{aligned} A+B &= (A\cup B)-(A\cap B) \\ AB &= A\cap B \end{aligned}$$

işlemleri ile bir halka oluşturur. X in bir $\sigma-$halkası X in sayılabilir sayıda birleşim altında kapalı olan tüm alt kümelerinin oluşturduğu halakanın bir alt halkasıdır.

Kabul edelimki X yerel kompakt bir Haussdorff uzayı olsun, örneğin n- boyutlu Öklid uzay yada onun kapalı bir alt kümesi olsun.
Tanım1.4.2 X 'in alt kümelerinin her kompakt G_σ yı içeren en küçük $\sigma-$ halkasının elemanlarına X 'in Baire alt kümeleri denir, yani X in sayılabilir sayıda açık kümelenin kesişimi olan her kompakt alt kümesidir.

Tanım1.4.3 X in alt kümelerinin her kompakt kümeyi içeren en küçük $\sigma-$ halkasının üyelerine X 'in Borel alt kümeleri denir.

Öklid uzayında her kompakt (kapalı ve sınırlı) küme bir G_σ dır. Buradan X eğer Öklid uzayı içinde kapalı bir alt kümesi ise X in Baire ve Borel alt kümeleri çakışır. X reel eksen yada reel eksen üzerinde kapalı bir aralık ise X in alt kümelerinin Baire (Borel) alt kümelerinin halkası $[a,b)$ yarı açık aralıkları ile üretilen $\sigma-$halkası olarak da ifade edilebilir.

Tanım1.4.4 Eğer X yerel kompakt bir Hausdorff uzayı ise X üzerinde bir pozitif Baire(Borel) ölçümü, X'in her Baire (Borel) alt kümesini negatif olmayan bir reel sayıya (yada $+\infty$'a) götüren ve, $A_1, A_2, ...$ X içinde ayrık Baire (Borel) kümelerinin dizisi olduğunda

$$\mu\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

eşitliğini sağlayan μ fonksiyonudur.

Tanım1.4.5 İnfimum A'yı içeren U açık kümelerinin üzerinde alınmak üzere herbir A Borel kümesi için

$$\mu\left(A\right) = \inf \mu\left(U\right)$$

oluyorsa μ Borel ölçümü regülerdir denir.

Bir Baire ölçümü her zaman regülerdir ve herbir Baire ölçümü tek bir regüler Borel ölçümüne genişlemeye sahiptir. Bu nedenle (ve diğer bazı nedenlerle de) X üzerinde ki Baire ölçümlerini inceleyeceğiz. Eğer herbir A Baire kümesi için $\mu\left(A\right)$ sonlu ise μ pozitif Baire ölçümü sonludur denir. X kompakt ise μ ölçümünün sonlu olması için gerek ve yeter şart $\mu\left(X\right)$ 'in sonlu olmasıdır. X 'in bir kapalı aralık veya reel eksen olduğunu kabul edelim, F, X üzerinde monoton artan (azalmayan) bir fonksiyon ve soldan sürekli yani;

$$F\left(X\right) = \sup_{t<x} F\left(X\right)$$

olan bir fonksiyon olsun. $[a, b)$ yarı kapalı aralıkları üzerinde bir μ fonksiyonu

$$\mu\left([a, b)\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right)$$

ile tanımlayalım, o halde μ'nün, X üzerinde bir pozitif Baire ölçümüne tek bir genişlemesidir. μ ölçümü sonlu olması için gerek ve yeter şart F 'nin sınırlı olmasıdır. Eğer X reel eksen ise X üzerindeki her pozitif Baire ölçümü, soldan sürekli, artan bir F fonksiyonundan bu yolla elde edilebilir. Eğer X kapalı bir aralıksa X üzerindeki monoton bir fonksiyon sınırlı olmak zorundadır, bu sebeple X üzerindeki her sonlu pozitif Baire ölçümü böyle bir artan fonksiyon yardımıyla tanımlanır. Eğer X, reel eksen yada bir aralık ise $F(x) = x$ den elde edilen ölçüme Lebesgue ölçümü denir.

Tanım1.4.6 $1 \leq p < \infty$ olmak şartıyla

$$L^p(X) = \left\{ f : f \text{ ölçülebilirdir ve } \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

uzayını kısaca L^p ile gösterelim. L^p içindeki f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_p = \left(\int_x |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu şekilde tanımlanan norm L^p uzayı üzerindeki standart norm yada kısaca L^p normu olarak adlandırılır.

Tanım1.4.7 Genel yerel kompakt X üzerinde bir Baire fonksiyonu düzlem üzerindeki her S Baire kümesi için $f^{-1}(S)$ bir Baire kümesi olacak şekilde, X üzerinde karmaşık değerli bir f fonksiyonudur. Her sürekli fonksiyon bir Baire fonksiyonudur.

Tanım1.4.8

(a) $\alpha_1, ..., \alpha_n$ birer karmaşık sayı,

(b) $E_1, ..., E_n$ sonlu μ ölçümünün ayrık Baire kümeleri,

(c) x_E, E kümesinin karakteristik fonksiyonu,

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{E_k}(x)$$

formuna sahip karmaşık değerli bir f fonksiyonuna μ için bir basit Baire fonksiyonu denir.

Basit fonksiyonlar karmaşık sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı oluştururlar. Böyle basit f Baire fonksiyonları için

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu \left(E_k \right)$$

olarak tanımlıdır. Eğer f basit bir fonksiyon ise $|f|$ de basit bir fonksiyondur ve

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$$

olur.

Tanım1.4.9 f bir basit Baire fonksiyonu olmak üzere
(a) Her bir f_n, μ için basit bir Baire fonksiyonu;
(b)

$$\lim_{m,n \to \infty} \int |f_m - f_n| \, d\mu = 0$$

(c) f_n , f ye ölçümiçinde yakınsaksa yani, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \mu \left(\{ x : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon \} \right) = 0$$

olacak şekilde fonksyonların bir $\{f_n\}$ dizisi varsa f fonksiyonu μ ye göre integrallenebilirdir denir.

Eğer f integrallenebilir ise, o zaman bu şekildeki her $\{f_n\}$ dizisi için

$$\left\{ \int f_n d\mu \right\}$$

dizisi yakınsaktır ve bu dizinin ($\{f_n\}$ den bağımsız) limiti

$$\int f d\mu$$

ile gösterilir. μ integrallenebilir fonksiyonların sınıfını $L^1(d\mu)$ ile gösterelim Bu durmda $L^1(d\mu)$ bir vektör uzayıdır ve

$$f \to \int f d\mu$$

L^1 üzerinde lineer fonksiyoneldir. f, Baire fonksiyonunun $L^1(d\mu)$ nün elemanı olması için gerek ve yeter şart fonksiyonun reel ve imajiner kısımlarının $L^1(d\mu)$ den olması ya da gerek ve yeter şart $|f|$ 'nin, $L^1(d\mu)$ den olmasıdır. f, L^1 içinde olduğunda

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| \, d\mu$$

olur.

Eğer f negatif olmayan bir Baire fonksiyonu ise $+\infty$ değerini de alabilecek şekilde

$$\int f d\mu$$

her zaman tanımlanabilir. Yani ya f integrallenebilirdir ya da her bir $K > 0$ sayısı için, $g \leq f$ ve

$$\int g d\mu > K$$

olacak şekilde basit bir g fonksiyonu vardır. İkinci durumda

$$\int f d\mu = +\infty$$

olarak tanımlanır.

S, X 'in bir alt kümesi olmak üzere herbir $\varepsilon > 0$ için

$$\mu(A) < \varepsilon$$

S 'yi kapsayan bir A Baire kümesi varsa S'nin μ 'ye göre ölçümü sıfırdır denir. Eğer istenirse μ, μ ölçülebilir kümeler sınıfına genişletilebilir.

Böyle bir küme Baire kümesinden sıfır ölçümlü küme kadar farklı bir küme olur. μ ye göre ölçümü sıfır olan küme dışında ortaya çıkabilecek durumlara μ 'ye göre hemen hemen her yerde olur denir.

Teorem 1.4.10 (Fubini) μ sonlu bir ölçüm ve f, $X \times X$ çarpım uzayı üzerinde negatif olmayan Baire fonksiyonu olsun. Eğer $f(x,y)$ herbir sabit y için x e göre integrallenebilir ve herbir sabit x için y ye göre integrallenebilir ise

$$\int \left[\int f(x,y)\, d\mu(x) \right] d\mu(y) = \int \left[\int f(x,y)\, d\mu(y) \right] d\mu(x)$$

dir.

p pozitif bir sayı ise $L^p(d\mu)$ uzayı, $|f|^p \in L^1(d\mu)$ yi sağlayan f Baire fonksiyonlarının tamamını kapsar.

Tanım 1.4.11 Eğer

$$f \in L^p(d\mu), \quad g \in L^q(d\mu)$$

ve

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

ise

$$(fg) \in L^1(d\mu)$$

olur, ve

$$\left|\int fgd\mu\right| \leq \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır.

X kompakt bir küme ve μ sonlu bir ölçüm olduğunda $L^p\,(d\mu)$ uzaylarının özelliklerine bakalım. Bu durumda X üzerinde her sürekli fonksiyon integrallenebilirdir ve sürekli fonksiyonlar uzayı L^1 içinde yoğundur, yani eğer $f \in L^1$ ve $\varepsilon > 0$ ise

$$\int |f - g| \, d\mu < \varepsilon$$

olacak şekilde bir g sürekli fonksiyonu vardır.,
Ayrıca $p \geq 1$ ise L^1, L^p 'yi kapsar ve sürekli fonksiyonlar uzayı L^p nin yoğun bir alt uzayıdır;

$$\int |f - g|^p \, d\mu < \varepsilon$$

dir.

Tanım 1.4.12 μ_1 ve μ_2, X üzerinde iki pozitif Baire ölçümü olmak üzere μ_2 ye göre ölçümü sıfır olan her kümenin μ_1'e göre de ölçümü sıfırsa μ_1, μ_2'ye göre mutlak (absolutely) süreklidir denir.

Tanım 1.4.13 Eğer μ_1 ve μ_2 sonlu birer ölçüm ise μ_1'in μ_2 ye göre mutlak sürekli olması için gerek ve yeter şart f, $L^1\,(d\mu_2)$ içinde negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$$d\mu_1 = fd\mu_2$$

olmasıdır.

Tanım 1.4.14 Her A Baire kümesi için

$$\mu_j(A) = \mu_j(A \cap B_j) \quad , \quad j = 1, 2,$$

olacak şekilde ayrık B_1 ve B_2 Baire kümeleri varsa μ_1 ve μ_2 Muttually Singular (İkişer tekil) denir.

Teorem 1.4.15(F. ve M. Riesz) μ birim çember üzerinde

$$\int e^{in\theta} d\mu(\theta) \quad , \quad n = 1, 2, 3, ...$$

olacak şekilde sonlu karmaşık bir Baire ölçümü ise, μ, Lebesgue ölçümüne göre mutlak süreklidir.

BÖLÜM 2

FOURİER SERİLERİ

Bu bölümde reel eksen üzerindeki $[-\pi, \pi]$ kapalı aralığında çalışacağız. Eğer f bu aralıkta Lebesgue integrallenebilir karmaşık değerli bir fonksiyon ise

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ e^{-inx}\, dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

karmaşık sayılarına f 'nin Fourier katsayıları ve

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{2.1.1}$$

serisine f 'nin Fourier serisi denir.

f ve f ye karşılık gelen seri hakkında iki temel soru karşımıza çıkmaktadır.

(a) f, kendisinin Fourier serisiyle ifade edilebilir mi?
(b) Eğer öyleyse f verilen Fourier serisinden nasıl tekrar elde edilebilir.

Birinci soruya ilişkin olarak f yi $L^1(-\pi, \pi)$ nin bir elemanı olarak alalım, yani sadece Lebesgue ölçümüne göre sıfır ölçümlü bir küme üzerinde farklılık gösteren fonksiyonları ele alalım. Bu durumda birinci sorudan aynı Fourier katsayıları dizisine sahip herhangi iki integrallenebilir fonksiyonun hemen hemen her yerde eşit olup olmadığı sorusu karşımıza çıkar. Bu sorunun cevabının olumlu olduğu aşağıda gösterilecektir.

İkinci soru tanımlanmasının belirlenmesi açısından daha önemlidir. İkinci soruyu çözerken

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

olacak şekilde kısmi toplamı yazıp, bu fonksiyonların yakınsak olup olmadığını belirlemek gerekir. Bu durumda S_n nin noktasal yakınsak, hemen hemen her yerde noktasal yakınsak, düzgün yakınsak veya herhangi bir norma göre yakınsak olup olmadığı sorusu karşımıza çıkar. Eğer bu kısmi toplamlar yakınsaksa, bu toplamlar f ye mi yakınsaktırlar.

f nin karesi integrallenebilir olduğunda kısmi toplamlarının L^2 normuna göre f' ye yakınsadığını görmüştük. ($\{e^{inx}\}$ dizisinin ortogonal taban olduğu kabul edilerek) L^1 içindeki bir f için S_n' nin L^1 normuna göre f 'ye yakınsaması beklenebilir, ancak bu her zaman doğru olmak zorunda değildir. Eğer f sürekli ve

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

ise S_n' nin f 'ye düzgün yakınsaması da beklenebilir ancak bu da her zaman doğru olmak zorunda değildir. Aslında sürekli bir f fonksiyonu için $\{S_n\}$ noktasal yakınsak bile olmayabilir. f nin Fourier serisinden f yi tekrar elde etmek için farklı yollar araştırılabilir. Devam etmeden önce düzgün noktasal yakınsayan f fonksiyonları için S_n kısmi toplamlarının noktasal yakınsadığını belirtmeliyiz. Örneğin f sınırlı varyasyonsa bu sağlanır.

Eğer f ikinci dereceye kadar sürekli türevlenebilir ise S_n nin düzgün yakınsak olduğu açıktır, çünkü kısmi integrasyonun iki kere uygulanmasıyla

$$c_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olduğu görülür.

2.1 CESARO ORTALAMALARI

f 'nin Fourier serisinin Cesaro ortalamaları;

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\left(s_0 + ...s_{n-1}\right), \quad n = 1, 2, ...$$

aritmetik ortalamalarıdır. Eğer f, $L^p(-\pi,\pi)$ içinde ve $1 \leq p < \infty$ ise, σ_n Cesaro ortalamaları L^p normuna göre f 'ye yakınsadığını göreceğiz. Eğer f sürekli ve

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

ise σ_n Cesaro ortalaması f 'ye düzgün yakınsar.

Şimdi

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} dt \end{aligned}$$

dir. Buradan, $K_n(x)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$$

serisinin n. Cesaro ortalaması olmak üzere

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, K_n(x-t)\, dt$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} (n+1) K_{n+1}(x) - n K_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikx} \\ &= \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} + \frac{1-e^{-i(n+1)x}}{1-e^{-ix}} - 1 \\ &= \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{1-\cos x} \end{aligned}$$

elde edilir. $K_1(x) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n}\left[\frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{\sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}\right]^2 \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

Bu K_n fonksiyonlarının dizisine Fejer çekirdeği denir. $[-\pi, \pi]$ üzerinde integrallenebilir her bir f fonksiyonunun Fourier serisinin n. Cesaro ortalaması, K_n Fejer çekirdeği (kernel) olmak üzere

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t)\, dt$$

dir. K_n nin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir

(a)

$$K_n \geq 0$$

(b)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, dx = 1$$

(c) Eğer I $x = 0$ civarında bir açık aralık ise;

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\notin I} |K_n(x)| = 0 \qquad (|x| \leq \pi)$$

olur. (a) özelliği K_n'nin ifadesinden açıkça görülür. (b) özelliği: 1 sabit fonksiyonunun Fourier serisinin n. Cesaro ortalamasının 1 olduğunu ifade eder. (c) özelliği ise birkaç basit eşitsizliğin sonucudur. Eğer $0 < \delta < \pi$ ve $\pi \geq |x| > \delta$ ise

$$\left(\sin \frac{1}{2} x\right)^2 \geq \left(\sin \frac{1}{2} \delta\right)^2$$

olur. Böylece $\pi \geq |x| > \delta$ için

$$|K_n(x)| \leq \frac{1}{n\left(\sin \frac{1}{2}\delta\right)^2}$$

olur. K_n aynı zamanda bir çift fonksiyondur ancak bu herhangi bir yerde kullanılmayacaktır. Cesaro ortalamaları hakkında bilmek istediğimiz herşey Fejer çekirdeğinin sadece yukarıdaki üç özelliği kullanılarak ispat edilecektir.

Lebesgue integrallenebilir K_n fonksiyonlarının yukarıdaki (a), (b), (c), özelliklerine sahip herhangi bir dizisi (L^1 için) yaklaşık özdeşlik olarak adlandırılacaktır (buna pozitif çekirdekte denir). Diğer yaklaşık özdeşliklere ilerde değinilecektir. Örneğin K_n Fejer çekirdeğinden biraz farklı olan

$$\acute{K_n} = \begin{cases} 2K_n, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

çekirdeği alınabilir.

Teorem 2.1.1 $1 \leq p < \infty$ için f, $L^p(-\pi, \pi)$ içinde bir fonksiyon olsun bu durumda f 'nin Fourier serisinin Cesaro ortalamaları L^p normuna göre f 'ye yakınsar. Eğer f sürekli ve $f(-\pi) = f(\pi)$ ise Cesaro ortalaması f 'ye düzgün yakınsar.

İspat.
Şimdi

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t)\, dt$$

eğer f yi reel eksen üzerinde 2π periyodlu, periyodik bir fonksiyona genişletirsek yukarıdaki eşitliği

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) \, dt$$

şeklinde yazabiliriz.

$f \in L^p$ için $f(-\pi) = f(\pi)$ periyodluk şartı önemli değildir çünkü $f(x)$ i hemen hemen her yerde biliyoruz. Ancak sürekli bir f fonksiyonu için bu önemlidir çünkü bu f nin periyodik genişlemesini sürekli yapar. İlk olarak sürekli olduğu durumu ele alalım.

$$\int K_n = 1$$

olduğundan

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) \, dt$$

dir. Eğer $\delta > 0$ ise

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) \, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq \delta} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) \, dt$$

yazabiliriz ve

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \sup_{-\delta < t < \delta} |f(x-t) - f(x)| + 2 \|f\|_\infty \ . \ \sup_{|t| \geq \delta} K_n(t)$$

olduğunu görürüz.

Eğer f, x 'de sürekli ve δ yeterince küçük ise, $|t| \leq \delta$ için

$$|f(x-t) - f(x)|$$

sayısı yeterince küçüktür

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|t|\geq\delta} K_n(t) = 0$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$$

olur.

Eğer f herhangi bir $a \leq x \leq b$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ise aynı aralık üzerinde düzgün süreklidir ve $[a,b]$ üzerinde

$$\sigma_n(x) \to f(x)$$

yakınsamasının düzgün olduğu görülür.

L^p içinde bir f için

$$\|\sigma_n - f\|_p$$

yi hesaplamak isteyebiliriz.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere $g,\ L^q$ içinde bir fonksiyon olsun.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n(x) - f(x)]\, g(x)\, dx = \frac{1}{4\pi^2}\int\int [f(x-t) - f(x)]\, g(x)\, K_n(t)\, dxdt$$

dir. Buradan

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n(x) - f(x)]\, g(x)\, dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)]\, g(x)\, dx\right| K_n(t)\, dt$$

elde edilir.

$$f_t(x) = f(x-t)$$

olmak üzere, Hölder eşitsizliği kullanılarak iç kısımdaki integralin mutlak değeri

$$\|g\|_q \ . \ \|f_t - f\|_p$$

den daha büyük değildir. Buradan her bir $g \in L^q$ için

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_n(x) - f(x)] \, g(x) \, dx \right| \le \|g\|_q \ . \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f_t - f\|_p \, K_n(t) \, dt$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\|\sigma_n - f\|_p \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f_t - f\|_p \, K_n(t) \, dt$$

olur.

L^q, L^p uzayının eşlenik uzayı olduğundan, L^p içinde bir h fonksiyonu verilirse (Hahn-Banach teoreminden) $\|g\|_q = 1$ ve

$$\int hg = \|h\|_p$$

olacak şekilde bir $g \in L^2$ fonksiyonu bulunabilir.

Eğer $\delta > 0$ ise

$$\begin{aligned} \|\sigma_n - f\|_p &\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \|f_t - f\|_p \, K_n(t) \, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \ge \delta} \|f_t - f\|_p \, K_n(t) \, dt \\ &\le \sup_{-\delta < t < \delta} \|f_t - f\|_p + 2 \|f\|_p \ . \ \sup_{|t| \ge \delta} K_n(t) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Eğer δ küçük ise $t \le \delta$ için, $\|f_t - f\|_p$ de küçüktür. Yani öteleme L^p

normuyla süreklidir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n - f\|_p = 0$$

bulunur.

Teorem 2.1.2 $f,\ L^{\infty}(-\pi,\pi)$ içinde bir fonksiyon ise f' nin Fourier serisinin Cesaro ortalamaları L^{∞} üzerindeki zayıf yıldız topoloji içinde f' ye yakınsar.

İspat.

Yukarıda olduğu gibi L^1 içindeki her bir g fonksiyonu için

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sigma_n(x)-f(x)]\,g(x)\,dx\right| \leq \sup_{-\delta<t<\delta}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t)-f(x)]\,g(x)\,dx\right| \\ +2\|f\|_{\infty}\ .\ \sup_{|t|\geq\delta} K_n(t)$$

dur. Bu nedenle sadece

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t)-f(x)]\,g(x)\,dx = 0$$

yada

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,[g(y)-g(y-t)]\,dt = 0$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

İstenen f 'nin sınırlı ve

$$\|g-g_t\|_1 \to 0$$

oluşu kullanılarak elde edilir, böylece L^1 içindeki her g fonksiyonu için

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\,g(x)\,dx \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx$$

olur, yani zayıf yıldız topoloji içinde $\sigma_n \to f$ dir.

Bu durumda bu teoremin bir benzeri ölçümler içinde sağlanır. Eğer μ, $[-\pi,\pi]$ üzerinde herhangi bir sonlu karmaşık Baire ölçümü ise Fourier katsayılarını

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} d\mu(x)$$

ile tanımlayabiliriz. Genel olarak c_n katsayılarına ölçümün Fourier-Stieljest katsayıları denir. μ 'nün Cesaro ortalamalarının fonksiyonları gibi yakınsamasını bekleyemeyiz, ancak

$$\frac{1}{2\pi}\sigma_n(x)\,dx$$

ölçümlerinin, ölçümler üzerindeki zayıf topoloji içinde fonksiyonlar olarak μ 'ye yakınsaması beklenebilir. Bu durumda μ ölçümü 2π periyotlu olmak zorundadır.Yani, μ, π yada $-\pi$ de bir nokta kümesine sahipse bu kümeler aynı olmak zorundadır ve

$$\mu(\{\pi\}) = \mu(\{-\pi\})$$

olmalıdır. Bu koşulu daha iyi belirtmek gerekirse μ, gerçekten çember üzerinde, $-\pi$ ve π aynı olacak şekilde elde edilen bir ölçümdür.

Teorem 2.1.3 μ, $[-\pi,\pi]$ aralığı üzerinde sonlu (periyodik) karmaşık bir Baire ölçümü ve σ_n, μ nün Fourier serisinin n. Cesaro ortalaması olsun. Eğer f, 2π periyotlu herhangi bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sigma_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\mu(x)$$

dir, yani

$$\frac{1}{2\pi}\sigma_n dx$$

ölçümleri, zayıf yıldız topoloji içinde μ ye yakınsaktır.

İspat.

τ_n, f 'nin n. Cesaro ortalaması olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sigma_n(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,K_n(x-t)\,dx\right]d\mu(t) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\tau_n(t)\,d\mu(t)\end{aligned}$$

dir. τ_n, f 'ye düzgün yakınsadığından ispat tamamlanmış olur.

Teorem (2.1.3.) ün sonuçlarından biri Fejer teoremidir;

Teorem 2.1.4 (Fejer) 2π periyotlu her sürekli fonksiyon

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$$

trigonometrik polinomlarının bir düzgün limitidir.

Buradan $\{e^{inx}\}$ ortonormal ailesi $L^2(-\pi,\pi)$ içinde tamdır. Çünkü bu fonksiyonların kapalı lineer gereni, L^2 içinde yoğun olan, sürekli fonksiyonların tamamının oluşturduğu kümeyi kapsar. L^2 içinde σ_n 'nin f' ye yakınsaması tamlıkla verilmiş olur. $f \in L^2$ için σ_n, L^2 içinde f ye yakınsadığından tamlık yine teoremin sonucundan elde edilir.

$L^1(-\pi,\pi)$ içinde f ve g fonksiyonları için bir çarpma tanımlayabiliriz (noktasal olmayan yolla) bu çarpma işlemine Konvolüsyon denir ve

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,g(t)\,dt$$

ile verilir. Fubini teoremi yardımıyla $(f * g)$ 'nin L^1 içinde olduğu ve

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

olduğu kolayca görülür. Konvolüsyonun birleşme özelliğinin olduğu ve L^1 i bir lineer cebir yaptığı gösterilebilir. $f * g$ nin n. Fourier katsayısı f ve g nin n. Fourier katsayılarının çarpımıdır.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}(f * g)(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,g(t)\,dtdx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, f(x-t)\,dx\right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,e^{-int}dt \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny}\, f(y)\,dy
\end{aligned}$$

dir. İki ölçümün konvolüsyonu da tanımlanabilir. Bu tanımı ölçümlerden birinin Lebesgue ölçümüne göre mutlak sürekli olması durumunda, yani $f \in L^1$ olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi} f(x)\,dx$$

formuna sahip olduğunda yapalım. f ve μ' nün konvolüsyonu

$$(f * \mu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,d\mu(t) \tag{2.1.2}$$

fonksiyonudur (bu tanımın anlam kazanması için Fubini teoremi gereklidir). $(f * \mu)$ nün Fourier katsayıları, f ve μ' nün karşılık gelen katsayılarının çarpımı olduğu kolayca görülür. Diğer bir önemli durum μ' nün Dirac Delta ölçümü olması, yani 0 (sıfır) da yoğun olması durumudur. Bu δ_0 ölçümü bir Baire kümesini, eğer sıfır noktasını içeriyorsa 1 ölçümüne, içermiyorsa 0 ölçümüne götürür. Eğer f, L^1 içindeyse $f * \delta_0 = f$ olur yani δ_0 konvulüsyon işlemine göre birim eleman gibidir. Bu durum δ_0 'ın Fourier katsayılarının 1 olduğunu gösterir.

Eğer f, L^1 içinde ise f nin Cesaro ortalaması L^1 içinde f 'ye yakınsar. Çünkü

$$\sigma_n = f * K_n$$

ve

$$\frac{1}{2\pi} K(x)\, dx$$

ölçümleri δ_0 ölçümüne yakınsar. $\{K_n\}$, L^1 için bir yaklaşık özdeşlik olarak adlandırılmasının nedeni budur. K_n Fejer çekirdeği δ_0 Dirac delta ölçümünün Fourier serisinin n. Cesaro ortalamasıdır.

Yukarıda ifade edilen sonuçlar, $\{K_n\}$, L^1 için yaklaşık özdeşlik olması durumunda sağlanır. Yani $\{f * K_n\}$ eğer f sürekli ise , f ye düzgün yakınsar, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L^p normu içinde f 'ye yakınsaktır, eğer f, L^∞ içindeyse f ye zayıf yıldız yakınsaktır ve eğer $\{\mu * K_n\}$, μ birim çember üzerinde bir ölçüm ise , μ ye zayıf yıldız yakınsaktır. Bu ifadelerin ispatları her bir K_n sınırlı fonksiyonu için yukarıdakiler gibidir. Eğer K_n 'ler sınırlı değilse bir L^1 fonksiyonu ile L^p fonksiyonunun konvolüsyonunun L^p içinde olduğunu göstermeliyiz ve ispatlar yukarıdaki gibi yapılır.

2.2 FOURİER SERİ ÇEŞİTLERİNİN AYRIŞTIRILMASI

Fourier serileri ile ilgili bölümü tamamlamak için, aşağıdaki soru ile ilgilenmeliyiz.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

(genel) formal Fourier serisi verilmiş olsun. Bu serinin L^1 fonksiyonunun mu, L^p fonksiyonunun mu, bir ölçümün mü ya da bir sürekli fonksiyonun mu Fourier serisi olduğu nasıl belirlenebilir? L^2 için cevabı biliyoruz: $\{c_n\}$'lerin karesi toplanabilir olması gereklidir. Diğer durumlar için de benzer testler vardır. Örneğin herhangi bir sonlu ölçümün Fourier katsayılarının dizisi ($[-\pi, \pi]$ üzerinde ölçümün toplam varyasyonu ile) sınırlı olmak zorundadır. Bu, f, L^1içinde olmak üzere,mutlak sürekli

$$\frac{1}{2\pi}f(x)\,dx$$

ölçümü olması durumunu da içerir. Bu durumda, bir integrallenebilir fonksiyonun Fourier katsayılarının sıfıra gitmesinden de bahsedilebilir:

$$\lim_{|n|\to\infty}|c_n|=0$$

Bu Riemann-Lebesgue lemmasıdır (ifadesidir) ve ispatı zor değildir. (Örneğin) ilk olarak f'nin, bir $[a,b]$ aralığının karakteristik fonksiyonu olması durumunda ispat yapılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-inx}dx \\ &= \frac{i}{2\pi n}\left[e^{-inb}-e^{-ina}\right] \end{aligned}$$

elde edilir, yani

$$|c_n|\leq\frac{1}{\pi|n|}$$

dir. Daha sonra, bu sonuçtan yola çıkarak ispat basamak fonksiyonları için yani aralıkların karakteristik fonksiyonlarının lineer kombinasyonu (birleşimi) için devam eder. Basamak fonksiyonlarının L^1 içinde olmasından istenen sonuç elde edilir. Tabii ki bir ölçümün Fourier katsayıları sıfıra yakınsamak zorunda değildir. Bir formal seri için sorduğumuz sorunun tatminkar bir cevabı, serinin Cesaro ortalamaları yardımı ile verilebilir. Sonucu aralıkların karakteristik fonksiyonu olan basamak fonksiyonlarına uygulayalım. Basamak fonksiyonları L^1 içinde yoğun olduğundan genel bir sonuç bulunabilir, tabiiki bir ölçümün Fourier katsayılar dizisinin sıfıra yakınsamaması gerekir.

Teorem 2.2.1

(a) $1 < p \leq \infty$ için L^p fonksiyonunun,

(b) L^1 fonksiyonunun,

(c) 2π periyodik sürekli fonksiyonun,

(d) Sonlu ölçümün,

(e) Sonlu pozitif ölçümün,

Fourier serisinin formal Fourier seri olması için gerekli ve yeterli şart σ_n Cesaro ortalamasının

$(\mathbf{a})'$ L^p normuyla sınırlı olması,

$(\mathbf{b})'$ L^1 normuyla yakınsak olması,

$(\mathbf{c})'$Düzgün yakınsak olması,

$(\mathbf{d})'$ L^1 normuyla sınırlı olması,

$(\mathbf{e})'$ Hiç birinin negatif olmaması,

gerekir. Serinin Cesaro ortalamasıyla, formal seriler arasındaki ilişkiye dair sorumuza makul bir cevap vereceğiz.

İspat.

$k \Rightarrow k'$ durumlarının çoğu yukarıda ispatlanmıştı ve kalan diğerleri de kolayca gösterilebilir. Örneğin σ_n bir sonlu reel ölçümün Fourier serisinin n. Cesaro ortalaması ise

$$\sigma_n(x) = \int K_n\,(x-t)\,d\mu\,(t)$$

ve böylece

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n\,(x)|\,dx \;&\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n\,(x-t)\,d\,|\mu|\,(t)\,dx \\ &=\; |\mu|\,([-\pi,\pi])\end{aligned}$$

dir. Karmaşık ölçümler için reel ve sanal (imajiner) kısımları alınır.

Bu durumda ispatlanması gereken, eğer σ_n, k' şartlarından birini sağlıyorsa k tipinde bir Fourier serisi elde edilir.İlk olarak herhangi bir formal seri için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} \sigma_n(x)\, dx = c_m$$

olduğu görülür. $n > |m|$ ise σ_n 'nin m. Fourier katsayısı

$$\frac{n - |m|}{n} c_m$$

dir. Cesaro ortalamalarının $1 < p \leq \infty$ olmak üzere L^p normu içinde sınırlı olduğunu kabul edelim. Benzer şekilde

$$\|\sigma_n\|_p \leq 1 \ , \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

olarak kabul edilir. Bu durumda σ_n

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere L^q 'nun eşlenik uzayının birim yuvarının içinde kalır.Birim yuvar zayıf-yıldız kompakt olduğundan, L^p içinde ,

$$\|f\|_p \leq 1$$

olacak şekilde ve f 'nin her zayıf-yıldız komşuluğu, sonsuz sayıda n değeri için σ_n' i içerecek şekilde bir f fonksiyonu vardır. Yani L^q içinde verilen her g fonksiyonu için

$$\int \sigma_n g dx$$

sayıları ifadesi

$$\int f g dx$$

değerlerine yaklaşıktır. Her bir e^{imx}, L^q içindedir; σ_n 'in m. Fourier katsayısı c_m 'ye yakınsadığından c_m, f 'nin m. Fourier katsayısı olmak zorundadır. Bu (a) durumu ile alakalıdır.

Eğer σ_n, L^1 normu içinde yakınsaksa, bu norm içinde bir integrallenebilir fonksiyona yakınsaktır.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\sigma_n(x)|\,e^{-imx}dx \leq \|f-\sigma_n\|_1$$

olduğundan c_m, f 'nin m. Fourier katsayısıdır.

Eğer σ_n düzgün yakınsak ise, sürekli bir f fonksiyonuna yakınsar ve bu f fonksiyonu benzer bir argüman istenen Fourier katsayılarına sahiptir.

$$\|\sigma_n\|_1 \leq 1, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

olsun. Bu durumda

$$d\mu_n = \frac{1}{2\pi}\sigma_n(x)\,dx$$

ölçümleri (toplam varyasyona göre) 1 sınırlıdır. Ölçümlerin uzayı, sürekli fonksiyonların Banach uzayının eşlenik uzaydır. μ_n' lerin hepsi bu eşlenik uzayın birim yuvarı içindedir; bu nedenle, μ zayıf-yıldız yığılma noktasına sahiptir. Her bir e^{imx} sürekli olduğundan yukarıdakilere benzer şekilde μ 'nün istenen Fourier katsayılarına sahip olduğu görülür.

$$\sigma_n(x) \geq 0, \qquad n = 1, 2, ...$$

olsun. Bu durumda

$$\|\sigma_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\,dx = c_0$$

olur. Bu nedenle σ_n 'ler , L^1 normuna göre sınırlıdır. Son sonuçtan, serimiz sonlu (periyodik) bir μ ölçümünün Fourier serisidir. Böylece μ,

$$\frac{1}{2\pi}\sigma_n(x)\,dx$$

ölçümlerinin zayıf-yıldız limitidir.Yani (2π periyodik) her g fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\sigma_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,d\mu(x)$$

olur. Eğer

$$g \geq 0 \Rightarrow g\sigma_n$$

$$\int g d\mu \geq 0$$

olur. Bu nedenle μ bir pozitif ölçümdür.

BÖLÜM 3

BİRİM YUVARDA ANALİTİK VE HARMONİK FONKSİYONLAR

Karmaşık düzlemdeki açık birim yuvarı

$$D = \{z; |z| < 1\}$$

ile ve birim çemberi

$$C = \{z; |z| = 1\}$$

ile göstereceğiz. Karmaşık değerli bir f fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.1}$$

olacak şekilde yakınsak bir kuvvet serisine eşitse D içinde analitiktir.

Yani f fonksiyonunun D 'nin herbir noktasında türevi vardır. D üzerinde tanımlı karmaşık değerli bir u fonksiyonu Laplace denklemi adı verilen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

eşitliğini sağlarsa harmoniktir denir.

Her analitik fonksiyon karmaşık değerli harmonik fonksiyondur. Gerçel değerli bir u fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$f = u + iv$$

fonksiyonunun analitik olmasıdır. Gerçel değerli bir u harmonik fonksiyonu için, $u + iv$ analitik olacak şekilde her bir v fonksiyonuna u'nun harmonik eşleniği denir. Bu şekilde tanımlı olan v fonksiyonu Cauchy-Riemann denklemleri adı verilen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

eşitliklerini sağlayan gerçel değerli bir fonksiyondur.

u 'nun harmonik eşleniği bir toplamsal sabit farkıyla tektir. Yani verilen gerçel harmonik u fonksiyonu için u'nun harmonik eşleniği olan ve orjinde sıfır olan bir tek gerçel v fonksiyonu vardır.

3.1 CAUCHY VE POİSSON ÇEKİRDEKLERİ

Eğer f fonksiyonu D açık birim yuvarı içinde analitik veya harmonik bir fonksiyon ise, f nin ne zaman sınır değerlerine sahip olduğunu ve f 'nin sınır değerleriyle nasıl belirlendiğini inceleyeceğiz. Hangi koşullar altında

$$f(\theta) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$$

limitlerinin var olduğunu ve C birim çemberi üzerinde bir fonksiyon tanımladığını araştıracağız. Daha sonra çember üzerindeki bu fonksiyon yardımıyla f fonksiyonunun nasıl belirlendiği gösterilecektir. Eğer f, $(1 + \varepsilon)$ yarıçaplı yuvar içinde analitikse kesinlikle sınır değerlere sahiptir ve bu sınır değerlerine göre Cauchy integral formülü adı verilen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \tag{3.1.1}$$

formülü yardımıyla bu sınır değerlerle belirlidir. Daha kullanışlı olması açısından (3.1.1) Cauchy formülünü

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} d\theta \tag{3.1.2}$$

formunda yazmak daha uygun olacaktır. Eğer f, $(1+\varepsilon)$ yarıçaplı yuvarda sadece harmonikse (3.1.2) Cauchy integral formülü sağlanmaz fakat f fonksiyonunu Poisson integral formülü yardımıyla sınır değerlerinden tekrar elde edebiliriz. Yuvar için verilen bu formüllerin her ikiside Fourier serileriyle yakından ilgilidir. Poisson formülünün nasıl ilişkisi olduğu verilmeden önce Fourier serileriyle harmonik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi açıklayalım.

f açık birim yuvar içinde analitik olsun;

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ve

$$f(re^{i\theta}) = f_r(\theta)$$

olsun. Sabit bir r için, f_r birim çember üzerinde tanımlı bir fonksiyondur; yani eğer f fonksiyonu r yarıçaplı bir çembere kısıtlanırsa bu çember üzerinde birim çember üzerindede tanımlı olan, sürekli bir fonksiyon elde edilmiş olur. Şimdi

$$f_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

dir. Yani f_r nin n. Fourier katsayısı, $n \geq 0$ ise $a_n r^n$ ve $n < 0$ ise sıfırdır. Eğer f kapalı yuvar üzerinde analitik ise f_1 sınır değer fonksiyonu a_n Fourier katsayılarına sahiptir. Cauchy formülüne bu açıdan bakalım.

$$f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{e^{it}}{e^{it}-re^{i\theta}}dt$$

$f(e^{it})$ yerine $f(t)$ alınırsa.

$$C_r(\theta) = \frac{1}{1-re^{i\theta}} \tag{3.1.3}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} f_r(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{1-re^{i(\theta-t)}}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)C_r(\theta-t)dt \end{aligned}$$

dır. Diğer bir deyişle f, birim çember üzerindeki f fonksiyonu olmak üzere, f_r ,

$$f_r = f * C_r$$

konvolüsyonudur. Bu nedenle f_r Fourier katsayıları, $f(e^{it})$ ve C_r nin Fourier katsayılarının çarpımlarıdır,

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \\ C_r(e^{i\theta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} \\ f_r(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \end{aligned}$$

dır. u yuvar içerisinde harmonik (ve gerçel değerli) olsun. Bu durumda u bir analitik fonksiyonun gerçel kısmı yada f analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$u(z) = f(z) + \overline{f(z)}$$

şeklindedir. Eğer

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ise

$$u(z) = 2\,\mathrm{Re}\, a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n}\ \overline{z}^n$$

olur

Eğer u fonksiyonunu r yarıçaplı çembere kısıtlarsak, $c_0 = 2\,\mathrm{Re}\, a_0$, $n > 0$ için $a_n = c_n$ ve $n < 0$ için $c_n = \overline{a}_{-n}$ olmak üzere

$$u_r(\theta) = u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

olur. Eğer u kapalı birim yuvar içinde harmonikse u_1 sınır fonksiyonu c_n Fourier katsayılarına sahiptir ve u gerçel değerli olduğundan,

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

dir. Böylece c_n Fourier katsayısının $r^{|n|}$ ile çarpılması sonucunda u_r fonksiyonu $u(e^{i\theta})$ dan elde edilir. Yani u_r , $u(e^{i\theta})$ ile Fourier katsayıları $r^{|n|}$ olan P_r fonksiyonunun konvolüsyonudur:

$$\begin{aligned}
P_r(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \\
&= C_r(\theta) + \overline{C_r(\theta)} - 1 \\
&= 2\,\mathrm{Re}\, C_r(\theta) - 1 \\
&= \mathrm{Re}\,[2C_r(\theta) - 1] \\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right] \\
& \quad \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}
\end{aligned}$$

dir. Bu P_r fonksiyonlar ailesine Poisson çekirdeği denir. Böylece, kapalı yuvar içinde tanımlı herhangi gerçel değerli bir fonksiyon için $u(t)$, $u(e^{it})$ yi ifade etmek üzere;

$$u_r(\theta) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t) P_r(\theta - t) dr$$

olduğunu göstermiş olduk. Bu durumda Poisson integral formülünün kapalı yuvar içinde tanımlı her karmaşık değerli harmonik fonksiyon için sağlanacağı sonucuna ulaşılır. Özellikle bu formül analitik bir f fonksiyonu için de sağlanır. Bu yüzden C_r Cauchy ve P_r Poisson çekirdeklerinin her ikiside analitik fonksiyonların, kendi sınır değerlerinden tekrar elde edilmesini sağlar. Bunun neden böyle olduğu kolayca görülür. C_r ve P_r fonksiyonları negatif olmayan tamsayılar üzerinde aynı Fourier katsayılarına sahiptir. Sonuç olarak bu foksiyonların çember üzerinde analitik bir fonksiyon ile konvolüsyonu aynı olur. İkisi arasındaki farklılığı şöyle açıklayabiliriz. P_r nin Fourier katsayıları tamsayılar üzerinde sıfıra göre simetrik olmasına rağmen, yani;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P_r(\theta) d\theta = r^{|n|}$$

olmasına rağmen, C_r' nin Fourier katsayıları negatif tamsayılarda sıfırdır, yani

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} C_r(\theta) d\theta = \begin{cases} r^n & , \ n \geq 0 \\ 0 & , \ n < 0 \end{cases}$$

dir. C_r 'nin negatif Fourier katsayılarının sıfır olması, C_r 'nin orijinde sıfır olan herhangi bir analitik fonksiyonun eşleniğine ortogonal olması anlamına gelir, yani eğer f kapalı birim yuvar içinde analitik ise

$$\overline{f(e^{i\theta})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} e^{-in\theta}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(e^{it})}C_r(\theta-t)dt &= \overline{a_0}\\ &= \overline{f(0)}\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\overline{f}$ harmonik olduğundan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(e^{it})}P_r(\theta-t)dt = \overline{f(re^{i\theta})}$$

olur.

$$P_r(\theta) = \operatorname{Re} H_r(\theta)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}H_r(\theta) &= 2C_r(\theta)-1\\ &= \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\end{aligned}$$

çekirdeği de önemlidir. Ayrıca $f = u+iv$ kapalı yuvar içinde analitik ve $f(0)$ gerçel ise

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)H_r(\theta-t)dt$$

yani

$$f_r = u * H_r$$

olduğundan bu çekirdek daha da önem kazanır. Bunu görmek kolaydır çünkü,

$$u = \frac{1}{2}\left(f+\overline{f}\right)$$

ve bu durumda

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(f(e^{it})+\overline{f(e^{it})}\right)H_r(\theta-t)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(f+\overline{f}\right)\left[2C_r(\theta-t)-1\right]dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})C_r(\theta-t)dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(e^{it})}\left[C_r(\theta-t)\right]dt\\ &\quad -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(e^{it})+\overline{f(e^{it})}\right]dt\\ &= f(re^{i\theta})+\overline{f(0)}-\operatorname{Re} f(0)\end{aligned}$$

olur. Yani eğer $f(0)$ gerçel ise

$$f_r = u * H_r$$

dir. Bu formül,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}dt$$

veya

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt$$

olarak yeniden yazılabilir.

$Q_r = \operatorname{Im} H_r$ olsun. Bu çekirdeğe eşlenik Poisson çekirdeği denir. Yukarıdan,

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)Q_r(\theta - t)dt$$

nin u nun orijinde sıfır olan v harmonik eşleniğini verdiği görülür. $P_r(\theta)$ ve $Q_r(\theta)$ yuvar içinde harmonik eşlenik fonksiyonlardır.

3.2 SINIR DEĞERLERİ

Harmonik fonksiyonların sınır davranışlarını daha iyi incelemeye başlamak için, ilk olarak birim çember üzerindeki bir fonksiyonun yuvar içinde bir harmonik fonksiyona genişletilmesini ele alacağız. Bu tipten orijinal bir problem, Dirichlet problemidir. Yani birim çember üzerinde bir reel değerli sürekli bir fonksiyon verildiğinde kapalı yuvar üzerinde sürekli, çember üzerinde f ye eşit olan ve D açık yuvarı içinde harmonik olan bir fonksiyon bulunması problemidir. Bu problem tamamıyla (3.2.1) Poisson integral formülü ile çözülür. Gösterilmesi gereken, $0 \leq r < 1$ olmak üzere P_r fonksiyonlar ailesinin, çemberin L^1 i için bir yaklaşık özdeşlik (approximate identity) olduğudur.

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \tag{3.2.1}$$

olduğundan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(a) $P_r(\theta) \geq 0$ (ve P_r birim çember üzerinde süreklidir)

(b)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 1, \qquad 0 \leq r < 1$$

(çünkü yukarıdaki integral 1 sabit fonksiyonunun $z = r$ de ki değeridir)
(c) Eğer $0 < \delta < \pi$ ise

$$\lim_{r\to 1} \sup_{|\theta|\geq\delta} |P_r(\theta)| = 0$$

olur. Eğer

$$\delta \leq |\theta| \leq \pi$$

ise

$$P_r(\theta) \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2}$$

dir.

Teorem 3.2.1 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere f , birim çemberin L^p si üzerinde karmaşık değerli bir fonksiyon olsun. f, birim yuvar içinde

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta - t)dt$$

olarak tanimlansın. Bu durumda genişletilmiş f fonksiyonu açık birim yuvar üzerinde harmoniktir ve $r \to 1$ iken

$$f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$$

fonksiyonları L^p normuna göre f ye yakınsar. Eğer f birim çember üzerinde sürekli ise, f_r, f ye düzgün yakınsar, bu nedenle genişletilmiş f fonksiyonu kapalı yuvar üzerinde sürekli, içinde harmoniktir.

İspat.

$\{P_r\}$ bir yaklaşık özdeşlik olduğundan L^p yakınsaklığının ve düzgün yakınsaklığın ispatı Cesaro ortalamalarında olduğu gibidir. Temel olarak farklılık gösteren tek durum, burada $\{f_r\}$ fonksiyonlar ailesinin de açık yuvar üzerinde harmonik olmasıdır. Bu fonksiyonun neden harmonik olduğunu göstermenin çeşitli yolları vardır. Bu yollardan biri, eğer orijinal f gerçel değerli ise $f(re^{i\theta})$ fonksiyonunun

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt$$

analitik fonksiyonunun gerçel kısmı olmasıdır.

Teorem 3.2.2 f, birim yuvar üzerinde sınırlı bir Baire fonksiyonu ve

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta - t)dt$$

olsun. Genişletilmiş f fonksiyonu açık yuvar içinde sınırlı bir harmonik fonksiyondur ve $r \longrightarrow 1$ iken

$$f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$$

fonksiyonları L^∞ üzerindeki zayıf yıldız topolojisi içinde f ye yakınsar.

İspat.

$\{P_r\}$ yaklaşık özdeşliktir.

Teorem 3.2.3 μ birim yuvar üzerinde sonlu karmaşık bir Baire ölçümü ve

$$f(re^{i\theta}) = \int_C P_r(\theta - t)d\mu(t)$$

olsun. Bu durumda f açık yuvar içinde harmoniktir, ve:

$$d\mu_r = \frac{1}{2\pi}\,f_r(\theta)d\theta$$

ölçümleri, ölçümler üzerinde, zayıf yıldız topoloji içinde μ 'ye yakınsar.

Yukarıdaki durumların hepsinde, $f(re^{i\theta})$ harmonik fonksiyonunun, çember üzerinde karşılık gelen fonksiyon veya ölçümün Poisson integrali olduğu söylenebilir. Cesaro ortalamaları için yaptığımız gibi, şimdi yuvar içinde bir harmonik fonksiyon verildiğinde bu fonksiyonun birim çember üzeerinde bazı fonksiyon yada ölçüm tipinin Poisson integrali olup olmadığının nasıl arştırılacağı sorusu karşımıza çıkar. Eğer f harmonikse

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} \tag{3.2.2}$$

olur $\{c_n\}$ ne zaman bazı fonksiyon yada ölçüm tipinin Fourier katsayılarının bir dizisidir. Bu sorunun cevabı ve dolayısıyla ispat cesaro ortalamalarında olduğu gibidir.

Teorem 3.2.4 f açık birim yuvar içinde karmaşık değerli bir harmonik fonksiyon olsun ve

$$f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$$

yazalım,

(a) Eğer $1 < p \leq \infty$ ise f 'nin birim çember üzerindeki bir L^p fonksiyonunun Poisson integrali olması için gerek ve yeter şart f_r fonksiyonlarının L^pnormuna göre sınırlı olmasıdır.

(b) f nin birim çember üzerinde integrallenebilir bir fonksiyonun Poisson integrali olması için gerek ve yeter şart f_r 'nin L^1 normuna göre yakınsak olmasıdır.

(c) f nin birim çember üzerinde sürekli bir fonksiyonun Poisson integrali olması için gerek ve yeter şart f_r nin düzgün yakınsak olmasıdır.

(d) f nin birim çember üzerinde sonlu karmaşık Baire ölçümünün Poisson integrali olması için gerek ve yeter şart f_r nin L^1 normuna göre sınırlı olmasıdır.

(e) f nin sonlu pozitif Baire ölçümünün Poisson integrali olması için gerek ve yeter şart f nin negatif olmamasıdır.

(a) kısmındaki L^∞ durumu genellikle Fatou teoremi olarak adlandırılır. Burada ilginç olan, birim yuvar üzerindeki her sınırlı harmonik fonksiyonun, birim çember üzerindeki sınırlı bir Baire fonksiyonunun Poisson integrali olmasıdır. (e) ifadesi genellikle Herglotz teoremi olarak adlandırılır: Negatif olmayan her harmonik fonksiyon, bir pozitif ölçümün Poisson integralidir. Yukarıdaki durumların her birinde f harmonik fonksiyonunun gerçel değerli olması için gerek ve yeter şart ancak ve ancak karşılık gelen L^p fonksiyonu ya da ölçüm gerçel değerli olmasıdır.

3.3 FATOU TEOREMİ

Şimdiye kadar harmonik fonksiyonlar hakkında elde edilen sonuçlar tamamıyla daha önceden Cesaro ortalamaları hakkında elde edilenlere benzerdir. Aslında, bu sonuçlara Fourier serisinin toplanmasının bir başka yolu olarak bakılabilir (Abel toplanabilirliği.) Cesaro toplanabilirliği ile ilgili, ispatını vermediğimiz teorem, Lebesgue teoremidir: f, $[-\pi, \pi]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ise f nin Fourier serisinin Cesaro ortalamaları f ye hemen hemen her yerde noktasal yakınsar. Bu sonuç Abel toplanabilirliği içinde benzer bir sonuca sahiptir. Eğer f birim yuvar içinde bir harmonik fonksiyona genişletilirse, f_r fonksiyonları her yerde f ye hemen hemen her yerde noktasal yakınsar. Bu Fatou' nun aşağıda ispatını vereceğimiz bir teoremidir.

Teorem 3.3.1 (Fatou) μ, birim çember üzerinde sonlu karmaşık bir Baire ölçümü ve f birim yuvar içinde

$$f(r, \theta) = \int P_r(\theta - t) d\mu(t)$$

olarak tanımlı bir harmonik fonksiyon olsun. μ Lebesque ölçümüne göre diferansiyellenebilir olmak üzere, θ_0 herhangi bir nokta olsun. Bu durumda

$$\lim_{r \to 1} f(r, \theta_0) = 2\pi \left(\frac{d\mu}{d\theta} \right) (\theta_0) = 2\pi \acute{\mu}(\theta_0)$$

dir. Aslında, $z = re^{i\theta}$ noktası, açık birim yuvar içinde birim çembere teğet olmayan herhangi bir yol boyunca $e^{i\theta_0}$ noktasına yaklaşırken

$$\lim f(r, \theta) = 2\pi \acute{\mu}(\theta_0)$$

olur.

İspat.

μ ölçümü $[-\pi, \pi]$ aralığı üzerinde sınırlı varyasyonlu, karmaşık terimli bir F fonksiyonu tarfından indirgenir;

$$\int g d\mu = \int g dF$$

dir. Teorem eğer F, θ_0 da diferansiyellenebilir ise teğet olmayan herhangi yol boyunca

$$re^{i\theta} \to e^{i\theta_0}$$

için

$$\lim f(r,\theta) = 2\pi F'(\theta_0)$$

olduğunu belirtir, yani $f(z)$, normalleştirilmiş Lebesgue ölçümüne göre F 'nin (yada μ nün) türevine yakınsar. İspat için ilk olarak $d\mu = d\theta$ için teoremin açık olarak doğru olduğu görülmektedir. Böylece genelliği bozmadan ($d\theta$ nın, bir sabit çarpanın $d\theta$ den çıkarılmasıyla) $\mu(C) = 0$ kabul edebiliriz. Bu durumda

$$F(-\pi) = F(\pi)$$

sağlanır.

Şimdi

$$F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)F(t)dt$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P'_r(\theta - t)F(t)dt = -\frac{1}{2\pi}P_r(\theta - t)F(t)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)dF(t)$$

ve böylece

$$\frac{1}{2\pi} f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r'(\theta - t) F(t) dt$$

bulunur. Daha kolay olmasından dolayı ilk olarak radyal yakınsaklığı ispatlayacağız,

$$\begin{aligned}
f(r,\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} P_r'(t) F(\theta - t) dt \\
&= \int_{0}^{\pi} P_r'(t) F(\theta - t) dt + \int_{-\pi}^{0} P_r'(t) F(\theta - t) dt \\
&= \int_{0}^{\pi} P_r'(t) \left[F(\theta - t) - F(\theta + t) \right] dt \\
&= \int_{0}^{\pi} \left[-\sin t P_r'(t) \right] \left[\frac{F(\theta + t) - F(\theta - t)}{\sin t} \right] dt
\end{aligned}$$

P_r' bir tek fonksiyon olduğundan

$$K_r(t) = -\frac{1}{r} \sin t P_r'(t)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi} f(r,\theta) = \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_r(t) \left[\frac{F(\theta + t) - F(\theta - t)}{2 \sin t} \right] dt$$

elde edilir. $0 < r < 1$ olmak üzere $\{K_r\}$ nin, L^1 için bir yaklaşık özdeşlik olduğu kolayca görülebilir. Eğer F , θ_0 da diferansiyellenebilir ise

$$G(t) = \frac{F(\theta_0 + t) - F(\theta_0 - t)}{2 \sin t}$$

fonksiyonu $t = 0$ noktasında

$$G(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(\theta_0 + t) - F(\theta_0 - t)}{2 \sin t} = F'(\theta_0)$$

değeriyle süreklidir. $\{K_r\}$ bir yaklaşık özdeşlik ve G, 0 da sürekli olduğundan

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}f(r,\theta_0) &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_r(t)G(t)dt \\ &= G(0) \\ &= F'(\theta_0)\end{aligned}$$

dir. Şimdi teğetsel olmayan yakınsaklığı inceleyelim. Yuvar içinde $e^{i\theta_0}$ a teğet olmadan yakınsayan bir yay olduğunu kabul edelim. Yani,

$$r(1) = 1,\ \ \theta(1) = \theta_0,\ \text{ve } 0 \leq\ \alpha < 1 \text{ iken } 0 \leq r(\alpha) < 1$$

olmak üzere.

$0 \leq \alpha \leq 1$ için tanımlı $r = r(\alpha)$, $\theta = \theta(\alpha)$

sürekli fonksiyonları var olsun.

$$\theta_0 = 0$$

alınması genelliği bozmaz. Yayın teğetsel olmayışı $\alpha < 1$ için

$$\frac{\theta(\alpha)}{1 - r(\alpha)}$$

nın sınırlı olması demektir.

$$K_\alpha(t) = \sin t P'_r(\theta - t) \qquad \begin{cases}\theta = \theta(\alpha) \\ r = r(\alpha)\end{cases}$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2\pi}f(r(\alpha),\theta(\alpha)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\alpha(t)\frac{F(t)}{\sin t}dt$$

olur.

$F(0) = 0$ kabul edebiliriz, bu F 'den bir sabiti çıkarmayla elde edilebilir. Bu ne dF' yi nede $F(\pi) = F(-\pi)$ koşulunu değiştirmeyecektir. Bu durumda

$$F'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{\sin t}$$

olur. Şimdi K_α fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları sağladığını ispatlayacağız.

(a) $\alpha \to 1$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_\alpha(t)|\, dt$$

sınırlıdır.

(b)

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_\alpha(t) dt = 1$$

dir.

(c) Eğer $0 < \delta < \pi$ ise

$$\lim_{\alpha \to 1} \sup_{\delta \leqq |t| \leqq \pi} |K_\alpha(t)| = 0$$

olur.

(c) koşulunun sağlandığı,

$$\begin{aligned} \sin t P'_r(\theta - t) &= 2r(1 - r^2). \frac{\sin t \sin(t - \theta)}{[1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2]^2} \\ &= \frac{2r \sin t \sin(t - \theta)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} P_r(\theta - t) \end{aligned}$$

olduğundan ve böylece θ sıfıra yakın iken $\delta \leqq |t|$ ise, r nin 1 e yakın değerlerinde $\sin t P'_r(\theta - t)$ küçük olacağından kolayca görülür.

(b) koşulunun sağlandığı

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t P'_r(\theta - t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos t P_r(\theta - t) dt \\ &= r \cos\theta \end{aligned}$$

oluşundan elde edilir.

(a) koşulunun sağlandığını gösterirken yayın teğetsel olmayışından faydalanılır.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\alpha(t)|\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin(\theta+t)P'_r(t)|\,dt \\ &\leq |\sin\theta|\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P'_r(t)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin tP'_r(t)|\,dt\end{aligned}$$

bulunur.

$$-\frac{1}{r}\sin tP'_r(t)$$

bir yaklaşık özdeşlik olduğundan, $r \to 1$ için ikinci integral sınırlı olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}|\sin\theta|\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P'_r(t)|\,dt &= |\sin\theta|\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}|P'_r(t)|\,dt \\ &= |\sin\theta|\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}P'_r(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}|\sin\theta|\,[P_r(0)-P_r(-\pi)] \\ &= \frac{1}{\pi}|\sin\theta|\left[\frac{1+r}{1-r}-\frac{1-r}{1+r}\right] \\ &\leqq \frac{1+r}{\pi}\frac{|\theta|}{1-r}\end{aligned}$$

dir.

$$\frac{|\theta|}{1-r}$$

yayımız üzerinde sınırlı olduğundan, $\alpha \to 1$ için

$$\int|K_\alpha|$$

nın sınırlı olduğu sonucuna ulaşırız.

K_α nın bu üç özelliği ile ispatı bitireceğiz.

$$G(t) = \frac{F(t)}{\sin t} - F'(0)$$

ve

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int K_\alpha$$

olarak alalım. Bu durumda

$$\frac{1}{2\pi} f(r(\alpha), \theta(\alpha)) - I(\alpha)F'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t)K_\alpha(t)dt$$

olur. $G(0) = 0$ olmak üzere, G sıfır noktasında sürekli olduğundan, küçük δ için

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} GK_\alpha$$

integralide K_α için verilen (a) koşulundan dolayı küçük olur. Bu durumda

$$\int\limits_{\delta \leqq |t|} GK_\alpha$$

integrali (c) koşulu dolayısıyla küçük olur.

$$\lim_{\alpha \to 1} I(\alpha) = 1$$

olduğundan

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{1}{2\pi} f(r(\alpha), \theta(\alpha)) = F'(0)$$

olduğu görülür, ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.2 f birim çember üzerinde Lebesque integrallenebilir bir fonksiyon olsun. O halde f nin Poisson integrali birim çemberin hemen hemen her noktasında teğetsel olmayan bir limite sahiptir ve bu limitler hemen hemen her yerde f ye eşittir. Daha genel olarak, sonlu bir μ ölçümünün Poisson integrali, normalleştirilmiş Lebesque ölçümüne göre, μ nün türevine hemen hemen her yerde eşit, teğetsel olmayan limitlere sahiptir.

İspat.
μ birim çember üzerinde sonlu karmaşık bir Baire ölçümü ve

$$d\mu = \frac{1}{2\pi} f d\theta + d\mu_s$$

μ nün Lebesque ayrıştırması olsun. O halde μ heryerde diferansiyellenebilir ve her yerde

$$\frac{d\mu}{d\theta} = \frac{1}{2\pi} f$$

dir. Şimdi Fatou teoreminin uygulanmasıyla istenen sonıç elde edilir.

Sonuç 3.3.3 f birim yuvar içinde karmaşık değerli harmonik bir fonksiyon olsun ve

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta$$

integrallerinin, $1 \leq p < \infty$ olan bazı p değerleri için, $r \to 1$ iken sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda hemen hemen her θ için

$$\widetilde{f}(\theta) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) \tag{3.3.1}$$

radyal limitleri vardır ve çemberin L^p si içinde bir $\widetilde{f}$ fonksiyonu tanımlar. Eğer $p > 1$ ise f, $\widetilde{f}$ nin Poisson integralidir. $p = 1$ ise f, mutlak sürekli kısmı

$$\frac{1}{2\pi} \widetilde{f} d\theta$$

olan (tek) sonlu ölçümünün Poisson integralidir. Eğer f sınırlı bir harmonik fonksiyon ise sınır değerleri hemen hemen her yerde vardır ve Poisson integrali f olan sınırlı ölçülebilen bir $\widetilde{f}$ harmonik fonksiyonunu tanımlar.

En son verilen sonuçta, limtler radyal olarak var olabildiği gibi teğetsel olmayan yoldan da var olabilirler.

Sonuç 3.3.4 Birim yuvar içinde negatif olmayan bir harmonik fonksiyon, birim çemberin hemen hemen her noktasında teğetsel olmayan limitlere sahiptir.

Yukarıdaki verilen teoremlerin bir sonucu şu şekilde verilebilir.$1 \leq p \leq \infty$ olsun ve

$$f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$$

fonksiyonları L^p normuna göre sınırlı olacak şekilde açık yuvar içindeki f harmonik fonksiyonlar sınıfını ele alalım. Harmonik fonksiyonların bu sınıfı

$$\|f\| = \lim_{r\to 1} \|f_r\|_p$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

$1 < p \leq \infty$ için bu Banach uzayı birim çemberin L^p sine izomorfiktir. $\widetilde{f}$, f $i$çin sınır fonksiyonu olmak üzere, İzomorfizm

$$f \to \widetilde{f}$$

dir.

Eğer $1 < p < \infty$ ise hem

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_p = \lim_{r\to 1} \|f_r\|_p$$

hemde

$$\lim_{r\to 1}\left\|\widetilde{f}-f_r\right\|_p=0$$

olur. $p=1$ için bu Banach uzayı, çember üzerinde sonlu (Baire) ölçümlerinin uzayına izomorfiktir ve f, μ 'nün Poisson integrali olmak üzere bu izomorfizm $f\to\mu$ dır.

3.4 $\mathcal{H}^p$ UZAYLARI

Harmonik fonksiyonlar için elde edilen sonuçlar özel olarak analitik fonksiyonlara uygulanır. Eğer $0<p\leq\infty$ ise

$$f_r(\theta)=f(re^{i\theta})$$

fonksiyonları L^p normuna göre $r\to 1$ iken sınırlı olacak şekilde analitik f fonksiyonlarının sınıfını H^p ile (H Hardy için kullanılmaktadır) göstereceğiz. Eğer $1\leq p\leq\infty$ ise H^p,

$$\lim_{r\to 1}\|f_r\|_p$$

normu altında bir Banach uzayıdır, diğer bir deyişle H^p, karşılık gelen harmonik fonksiyonların uzayının bir kapalı altuzaydır. $1<p\leq\infty$ ise H^p yi, çemberin L^p sinin bir kapalı alt uzayı ile özdeşleştirebiliriz, İzomorfizmden dolayı bu uzayıda H^p olarak ifade edeceğiz. Bu uzay, yuvar üzerinde Poisson integralleri analitik olan, L^p içindeki fonksiyonları içeren, diğer bir deyişle,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{in\theta}d\theta=0,\qquad n=1,2,3,..$$

'ü sağlayan L^p içindeki tüm f fonksiyonlarını içeren uzaydır..

$p=1$ olduğunda analitik olan, çember üzerindeki sonlu ölçümlerin kapalı uzayı H^1 ile ifade edilebilir: H^1 'de;

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\mu(\theta) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, ..$$

dir. Burada analitik ve harmonik durumlar arasında çok önemli bir fark karşımıza çıkar. 1.4.15 'de ifadesi verilen F.veM.Riesz teoremi, yukarıdaki gibi analitik olan herhangi bir ölçümün zorunlu olarak Lebesque ölçümüne göre mutlak sürekli olduğunu belirtir. Bu teorem

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} f(\theta) d\theta = 0, \qquad n = 1, 2, 3, ..$$

olacak şekilde çember üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayıyla, H^1 i özdeşleştirmemizi sağlar.

Hardy uzayları ile ilgili detaylı bilgi için [Baumgartel],[Duren],[Hoffman] ye bakılabilir. Bunlardan [Baumgartel] fizikçilere yönelik hazırlanmış bir makaledir.

BÖLÜM 4

YARI DÜZLEMDE H^p UZAYLARI

4.1 YARI DÜZLEMİN H^p Sİ

Bu bölümde

$$\mathrm{Re}(\omega) \geq 0$$

kapalı sağ yarı düzleminde çalışacağız. Eğer f, açık sağ yarı düzlemi içinde analitik ise, $x > 0$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p \, dy \tag{4.1.1}$$

L^p normları sınırlı kalması halinde f 'ye H^p sınıfına aittir denir. Bu uzayların teorisinin bir kısmını geliştireceğiz. Bu uzayların incelenmesi Fourier serilerinin teorisinden daha çok Fourier dönüşümlerinin teorisine yakındır. Bazı temel durumların verilebilmesi için Fourier dönüşümlerinin yanı sıra, birim yuvarın H^p si hakkında bilinenlerden yararlanacağız. Bu, ispatların tekrarından kaçınılması ve birim yuvar ile yarı düzlem H^p si arasındaki basit ilişkinin gösterilmesi açısından bazı avantajlara sahiptir.

Başlangıç olarak gerekli olan bazı temel yorumların yapılması gereklidir. Sağ yarı düzlemde bir H^p fonksiyonu için verilmesi gereken şartlar birim yuvardakine göre daha kısıtlayıcıdır. Analitik bir f fonksiyonunun H^p içinde olması için, dikey doğrular boyunca f nin L^p normları sonlu ve bu nedenle sınırlı olmalıdır. Birim yuvar içinde, r yarıçaplı çember üzerindeki L^p normu için sonlu olmakla ilgili böyle bir sorun yoktur. Dikey doğrular üzerindeki L^p normları üzerinde bir sınırlama gerekli olduğunda, büyük x 'ler için sınır, küçük x 'ler için olan sınır kadar önemlidir (diğer bir deyişle

$x = 0$ doğrusu yani sanal eksen)

$$f(\omega) = \frac{1}{1+\omega} e^{\omega}$$

fonksiyonu her bir dikey doğru üzerinde karesi integrallenebilirdir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 \, dy$$

integralleri herhangi $0 \leq x \leq c$ şeridi üzerinde sınırlıdır. Ancak bu integrallerin $x \leq \infty$ iken sınırlı olmadıkları açıktır.

Bu aşamada yapmamız gereken sanal (imajiner) eksen üzerinde sınır değerlerinin varlığını ispatlamak ve sınır değerleri yardımıyla bir fonksiyonun yeniden elde edilmesi (tanımlanması) için bir Poisson integral çekirdeğini oluşturmak olacak. Bir yarı düzlemin Poisson çekirdeğinin ne olduğunu görmek için, $\mathrm{Re}(\omega) > 0$ yarı düzleminden $|z| < 1$ birim yuvarına olan

$$z = \frac{\omega - 1}{\omega + 1}$$

doğrusal kesir dönüşümünü ele alalım. Sınır üzerinde bu dönüşüm,

$$e^{i\theta} = \frac{it - 1}{it + 1}$$

şeklindedir. Buradan

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\pi} \left(1 + t^2\right)^{-1}$$

olduğu kolayca elde edilir.

Diğer bir deyişle, çember üzerindeki normalleştirilmiş Lebesgue ölçümüne, sanal eksen üzerindeki,

$$\frac{1}{\pi}\frac{dt}{1+t^2}$$

Cauchy olasılık ölçümü karşılık gelir. Eğer g birim çember üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned} f(it) &= g(e^{i\theta}) \\ &= g(\frac{it-1}{it+1}) \end{aligned}$$

ise g nin Lebesgue integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart f nin,

$$\frac{1}{1+t^2}dt$$

ölçümüne göre integrallenebilir olmasıdır. g integrallenebilir olduğunda,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(it)\frac{1}{1+t^2}dt$$

dir. Şimdi Poisson formülünü birim yuvardan yarı düzleme taşımak kolaydır. Birim yuvar içindeki z noktası için Poisson çekirdeği

$$P_z(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right] \tag{4.1.2}$$

dir.

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} &= \frac{\frac{it-1}{it+1}+\frac{\omega-1}{\omega+1}}{\frac{it-1}{it+1}-\frac{\omega-1}{\omega+1}} \\ &= \frac{it\omega-1}{it-\omega} \end{aligned}$$

olduğundan, sağ yarı düzlemdeki ω noktası için Poisson çekirdeği

$$\mathrm{Re}\left[\frac{it\omega-1}{it-\omega}\right] = \frac{x\left(1+t^2\right)}{x^2+\left(y-t\right)^2}$$

olur. Tabi ki bu fonksiyonu

$$\frac{dt}{\pi(1+t^2)}$$

ölçümü ile kullanmak zorundayız. Bu nedenle,

ω 'nin Poisson çekirdeği olarak

$$\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{it\omega-1}{it-\omega}\right]$$

almak uygun olabilir. Birim yuvar içinde verilen Fatou teoreminden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.1 *F sanal eksen üzerinde ölçülebilir ve*

$$\frac{dt}{(1+t^2)}$$

ölçümüne göre integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Sağ yarı düzlemde f fonksiyonunu

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(it)\frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(it)P_x\left(y-t\right)dt \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, f harmoniktir ve sanal eksenin hemen hemen her noktasında F 'ye eşit olan (çakışan) teğetsel olmayan limitlere sahiptir.

İspat.

Yuvar için Fatou teoremi ve yukarıdaki hesaplamalardan ispat açıktır. Birim yuvardan yarı düzleme tanımlanan dönüşüm konform olduğundan teğet olmayan yayların korunduğunu görürüz.

Yapılması gereken birkaç yorum vardır. İlk olarak, yukarıdaki teorem özellikle bazı

$p \geq 1$ değerleri için eğer F sanal eksenin Lebesgue ölçümünün L^p uzayına ait ise doğrudur. İkincisi, yukarıdaki teorem birim yuvar için elde edilen sonuçtan faydalanmadan direkt olarak ispatlanabilir. Üçüncüsü, eğer F, bir $\mathrm{Re}(\omega) > -\varepsilon$ yarı düzlemi içinde analitik olan bir fonksiyonun sanal eksene kısıtlaması ise buradan f nin analitik olduğu sonucu çıkarılmaz. Bunun garanti edilebilmesi için analitik fonksiyonun sonsuzda kontrol altına alınması gerekir. Örneğin Poisson formülü yardımıyla herhangi bir sınırlı analitik fonksiyon kendi sınır değerlerinden elde edilir ancak e^{ω} için bu söylenemez. Şimdi F, $L^p(dt)$ içinde olduğunda f nin bazı özelliklerini verelim.

Teorem 4.1.2 $p \geq 1$ ve F, $L^p(-\infty, \infty)$ içinde bir fonksiyon olsun. f sağ yarı düzlem içinde

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) P_x(y-t)\, dt$$

ile tanımlı bir harmonik fonksiyon olsun.

(a) Her bir $x > 0$ için

$$f_x(y) = f(x+iy)$$

fonksiyonu $L^p(-\infty, \infty)$ içindedir

(b) $x > 0$ için $\|f_x\|_p$, L^p normları sınırlıdır. Aslında, $x > 0$ için $\|f_x\|_p$, x 'e göre azalan bir fonksiyondur.

(c) iken f_x fonksiyonları, $x \to 0$ için, $L^p(-\infty, \infty)$ içinde F 'ye yakınsar.

(d) Sabitlenmiş herhangi bir $\mathrm{Re}(\omega) \geq \delta > 0$ yarı düzleminde, ω sonsuza giderken $f(\omega)$ sıfıra düzgün yakınsar.

İspat.

Sonlu ölçümlü bir uzay üzerinde olmadığımızdan, F 'nin integrallenebilir olmasına gerek yoktur. Fakat $\frac{1}{\pi} P_x$ integrallenebilir olduğundan, $\frac{1}{\pi} P_x$ in F ile konvolüsyonu L^p içinde bir f_x fonksiyonudur. Ayrıca

$$\|G * F\|_p \leq \|G\|_1 \|F\|_p$$

dir, $P_x \geq 0$ ve

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_x\,(t)\,dt = 1$$

olduğundan

$$\|f_x\|_p \leq \|F\|_p$$

elde edilir. $\|f_x\|_p$ 'nin x 'e göre azalan bir fonksiyon olduğunu görmek için $x_1 < x_2$ olsun. Bunu görmek için

$$f_{x_2}(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1}(t)P_{x_2-x_1}\,(y-t)\,dt$$

olduğunu gösterilir ve, F 'yi f_{x_1} ve P_z 'i $P_{x_2-x_1}$ ile değiştirerek yukarıdaki argümanı tekrarlayarak f_x 'in L^p içinde F 'ye yakınsadığı elde edilir.

(d) 'yi ispatlamak için

$$\frac{1}{\pi}P_x\,(y-t)\,dt$$

(ölçümü 1) olan bir pozitif ölçüm olduğundan

$$|f(x+iy)|^p \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^p\,P_x\,(y-t)\,dt$$

olur. $\varepsilon > 0$ olsun, F, L^p içinde olduğundan $T > 0$

$$\int_{-\infty}^{-T} |F|^p\,dt + \int_{T}^{\infty} |F|^p\,dt < \varepsilon$$

olacak şekilde seçilebilir.

Şimdi

$$P_x\,(y-t) \leq \frac{1}{x}$$

ve eğer $x \geq \delta > 0$ alınırsa

$$|f(x+iy)|^p \leq \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} |F(t)|^p \frac{x}{x^2+(y-t)^2}dt + \frac{\varepsilon}{\pi\delta}$$

elde edilir.

T sabitlendiğinde,$x \geq \delta$ içinde son integral açıkça

$$O\ (\left|\frac{1}{(x+iy)}\right|)$$

olur.

4.2 H^{p} FONKSİYONLARI İÇİN SINIR DEĞERLERİ

Şimdi bazı $p \geq 1$ için eğer f sağ yarı düzlemin H^p 'si içinde ise, f 'nin sanal eksenin hemen hemen her noktasında teğet olmayan limitlere sahip olduğunu, F sınır değer fonksiyonunun L^p içinde olduğunu ve F' nin Poisson integralinin f olduğunun ispatını vereceğiz. Aşağıda göstereceğimiz gibi, bu durum f nin verilen son teoremin (d) özelliğine sahip olduğundan kolayca elde edilir.

Teorem 4.2.1 Kabul edelim ki f, bazı $p \geq 1$ değeri için sağ yarı düzlemin H^p si içinde olsun. Bu durumda herhangi sabitlenmiş bir

$$\mathrm{Re}(\omega) \geq \delta > 0$$

yarı düzlemi içinde ω sonsuza giderken, $f(\omega)$ sıfıra gider.

İspat.

İspat verilen son teorem yardımıyla yapılacaktır; yani

$$\mathrm{Re}(\omega) > x_0 > 0$$

için f yi onun $\mathrm{Re}(\omega) = x_0$ doğrusu üzerindeki değerlerinin Poisson integrali olarak yazılabileceğini göstereceğiz. ω 'yi, $\mathrm{Re}(\omega) > 0$ olacak şekilde sabitleyelim. x_0, x ve y pozitif sayılarını

$$\begin{aligned} x_0 &< \mathrm{Re}(\omega) < x \\ -y &< \mathrm{Im}(\omega) < y \end{aligned}$$

olacak şekilde seçelim.

f 'yi Cauchy integral formülünün, köşeleri $x_0 \pm iy$, $x \pm iy$ noktaları olan dikdörtgene uygulanması yardımıyla ifade edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} 2\pi i f(\omega) &= i\int_{-y}^{y} \frac{f(x+it)}{x+it-\omega}dt - i\int_{-y}^{y} \frac{f(x_0+it)}{x_0+it-\omega}dt \\ &+ \int_{x_0}^{x} \frac{f(s-iy)}{s-iy-\omega}ds - \int_{x_0}^{x} \frac{f(s+iy)}{s+iy-\omega}ds \\ &= I_1(x;y) - I_1(x_0;y) + I_2(y) - I_2(-y) \end{aligned}$$

elde ederiz. $Y > |\mathrm{Im}(\omega)|$ olacak şekilde büyük bir Y sayısı seçelim. Yukarıdaki ifadede $f(\omega)$ nin $(Y, 2Y)$ aralığı üzerinde ortalamasını alacağız. İlk olarak y 'nin ele alındığı aralıkta

$$|s \pm iy - \omega| \geq \frac{Y}{2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y}\int_{Y}^{2Y} |I_2(\pm y)|\, dy &\leq \frac{1}{Y}\int_{Y}^{2Y} dy \,.\int_{x_0}^{x} \frac{|f(s \pm iy)|}{|s+iy-\omega|}ds \\ &\leq \frac{2}{Y^2}\int_{x_0}^{x}\int_{Y}^{2Y} |f(s \pm iy)|\, dyds \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(s+iy)|^p \, dy \leq M^p$$

olacak şekilde sabit bir M değerinin varlığı kullanılarak Hölder eşitsizliği yardımıyla iç kısımdaki integrali hesaplayacağız.

Eğer $q,\ p$ 'nin eşleniği ise, yani;

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ise $Y \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y} \int_{Y}^{2Y} |I_2(\pm iy)| \, dy &\leq \frac{2}{Y^2} \int_{x_0}^{x} ds \ .\ Y^{\frac{1}{q}} \ .\ M \\ &= 2M(x - x_0) Y^{\frac{1}{q-2}} \to 0 \end{aligned}$$

olur.

$2\pi i f(\omega)$ nin ortalamasını alırsak

$$2\pi i f(\omega) = \lim_{Y\to\infty} \frac{1}{Y} \int_{Y}^{2Y} [I_1(x;y) - I_1(x_0;y)] \, dy$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\begin{aligned} \lim_{Y\to\infty} \frac{1}{Y} \int_{Y}^{2Y} I_1(x;y) \, dy &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+it)}{x+it-\omega} dt = I_1(x;\infty) \\ \lim_{Y\to\infty} \frac{1}{Y} \int_{Y}^{2Y} I_1(x_0;y) \, dy &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_0+it)}{x_0+it-\omega} dt = I_1(x_0;\infty) \end{aligned}$$

olduğunu buluruz. Bu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(s+it)|}{|s+it-\omega|} dt < \infty$$

oluşunun bir sonucudur. Böylece,

$$2\pi i f(\omega) = I_1(x;\infty) - I_1(x_0;\infty)$$

elde edilir.

Şimdi $x \to \infty$ olsun $p = 1$ için

$$|I_1(x;\infty)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+it)|}{x - \mathrm{Re}(\omega)} dt \leq M \ . \ (x - \mathrm{Re}(\omega)) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

ve $p > 1$ için

$$|I_1(x;\infty)| \leq M \ . \ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{|x+it-\omega|^q}\right]^{\frac{1}{q}} = O\left(x^{-1+\frac{1}{q}}\right)$$

olur. Yani $x \to \infty$ iken

$$I_1(x;\infty) \to 0$$

olur. Böylece $0 < x_0 < \mathrm{Re}(\omega)$ olacak şekilde herhangi x_0 için

$$2\pi i f(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_0+it)}{x_0+it-\omega} dt$$

olur.

f için Cauchy integral gösterimine sahibiz. Bu gösterim yardımıyla kolayca Poisson integral gösterimini elde edebiliriz.

$$\omega = \xi + i\eta \text{ ve } \omega' = 2x_0 - \xi + i\eta$$

olsun. Şimdi

$$\mathrm{Re}(\omega') < x_0$$

olur ve bu nedenle eğer Cauchy integral teoremini kullanır ve yukarıdaki işlemleri tekrarlarsak,

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(x_0+it\right)}{x_0+it-\omega'}dt$$

olduğunu buluruz. Eğer bunu $f\left(\omega\right)$ için Cauchy integral formülünden çıkarır ve

$$\omega-\omega'=2\left(\xi-x_0\right)$$

olduğunu hatırlarsak,

$$f\left(\xi+i\eta\ \right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x_0+it\right)\frac{\left(x_0-\xi\right)}{\left(x_0-\xi\right)^2+\left(t-\eta\right)^2}dt\ ,\quad 0<x_0<\xi$$

olduğunu buluruz. Son teoremin (d) kısmı yardımıyla, herhangi sabitlenmiş $\operatorname{Re}\left(\omega\right)\geq\delta>0$ yarı düzlemi içinde $\omega\rightarrow\infty$ için $f\left(\omega\right)$ 'nin sıfıra düzgün yakınsadığı görülür.

Teorem 4.2.2 $p\geq 1$ ve f, sağ yarı düzlemin H^p 'si içinden herhangi bir fonksiyon olsun. g, birim yuvar içinde

$$g\left(z\right)=f\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

ile tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda g birim yuvarın H^p si içindedir.

İspat.
Birim yuvar içinde

$$C_r=\left\{z:\left|z\right|=r\right\}$$

ile tanımlı r yarıçaplı C_r,çemberini gözönüne alalım. Bu durumda $r\rightarrow 1$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta=\frac{1}{r}\int_{C_r}\left|g\left(z\right)\right|^p\left|dz\right|$$

integrallerini sınırlamak istiyoruz.

Her bir $\delta > 0$ için, sağ yarı düzlemdeki $x = \delta$ doğrusu lineer kesirli dönüşümümüz yardımıyla birim çembere $z = 1$ de teğet olan birim yuvar içindeki Γ_δ çemberine dönüştürülür. $r < 1$ verildiğinde C_r, Γ_δ çemberinin içinde kalacak şekilde yeterince küçük bir $\delta > 0$ seçebiliriz. Son teorem yardımıyla, sonsuzdaki noktada ve $\mathrm{Re}\,(\omega) \geqslant \delta$ yarı düzleminde f fonksiyonu sürekli olur. Bu g nin Γ_δ çemberinin içinde analitik ve Γ_δ ile sınırlı kapalı yuvar üzerinde sürekli olduğu anlamına gelir. C_r yuvar içinde olduğundan

$$\int_{C_r} |g\,(z)|^p\,|dz| \leq 2\int_{\Gamma_\delta} |g\,(z)|^p\,|dz|$$

olur. Bunu aşağıda yorumlayacağız. Bu eşitsizliği şimdilik kabul ederek, M, dikey doğrular üzerinde f nin L^p normuna göre sınırı olmak üzere.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta &= \frac{2}{r}\int_{\Gamma_\delta} |g\,(z)|^p\,|dz| \\
&= \frac{2}{r}\int_{\mathrm{Re}\,w=\delta} |f\,(\omega)|^p\,\frac{2\,|d\omega|}{|1+\omega|^2} \\
&= \frac{4}{r}\int_{-\infty}^{\infty} |f\,(\delta+it)|^p\,\frac{dt}{(1+\delta)^2+t^2} \\
&\leq \frac{4}{r}\int_{-\infty}^{\infty} |f\,(\delta+it)|^p\,dt \\
&\leq \frac{4}{r}M^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak g yuvarin H^p 'si içindedir.

Yukarıdaki ispatta kullandığımız eşitsizliği, aşağıdaki şekilde ifade edeceğiz. g , Γ çemberi içinde analitik, Γ ile sınırlı kapalı yuvar üzerinde sürekli olsun. Eğer C bu kapalı yuvar içinde bir çember ise

$$\int_{C} |g\,(z)|^p\,|dz| \leq 2\int_{\Gamma} |g\,(z)|^p\,|dz|$$

dir. Γ nun birim çember olduğunu farzedelim. Sonuçta eğer g birim yuvar üzerinde sürekli ve içinde analitik ise ve eğer C birim yuvar içinde bir çember ise

$$\int_C |g(z)|^p |dz| \leq 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta$$

olur.

Bunu ispatlamak için, Γ birim yuvar olarak kabul edilebilir. Bu durumda sonuç eğer g, kapalı birim yuvar üzerinde sürekli ve içinde analitik ise ve eğer C açık birim yuvar içerisinde bir çember ise

$$\int_C |g(z)|^p |dz| \leq 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta$$

olarak ifade edilebilir.

Eğer g, kendi sınır değerlerinin Poisson integralleri olarak temsil edilebilirse bunun sağlandığı kolaylıkla görülür.

Şimdi aradığımız teoremi elde etmiş oluyoruz.

Teorem 4.2.3 $p \geq 1$ ve f sağ yarı düzlem H^p si içinde bir fonksiyon olsun.
(a) f sanal eksenin hemen her noktasında teğet olmayan limitlere sahiptir.
(b) f 'nin sınır değerleri L^p içindedir ve

$$f(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(it) \frac{x}{x^2-(y-t)^2} dt \ , \quad 0 < x \tag{4.2.1}$$

dir.
(c)$x \to 0$ iken

$$f_x(y) = f(x+iy)$$

fonksiyonları L^p normu içinde $f(iy)$ 'ye yakınsar.

İspat.

g birim yuvar içinde

$$g(z) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

ile tanımlı bir fonksiyon olsun. Son teoremden, g yuvar H^p 'si içindedir, bu nedenle g birim çemberin hemen hemen her noktasında teğet olmayan limitlere sahiptir ve g kendisinin sınır değerlerinin Poisson integralidir:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\left(e^{i\theta}\right) \ P_z(\theta) \ d\theta$$

Birim yuvardan sağ yarı düzleme doğrusal kesir dönüşümü konformal olduğundan, f nin sanal eksenin hemen hemen her noktasında teğetsel olmayan limitlere sahip olduğu hemen söylenebilir. Bu bölümün başında söylendiği gibi f nin sınır değerleri

$$L^p\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

içindedir ve f, (b) nin Poisson formülü ile gösterilir. (Tabii ki) f nin sınır değerleri aslında $L^p(dt)$ içindedir. Fatou lemmasından

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(it)|^p \, dt &\le \overline{\lim_{x\to 0}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+it\ )|^p \, dt \\ &\le M^p\end{aligned}$$

olur. Bu (a) ve (b) yi ispatlar. (c) ise (b) 'den, bir önceki teoremde olduğu elde edilebilir. Bunu önemli olduğu için tekrar ifade ettik.

4.3 YUVAR VE YARI DÜZLEMİN H^p UZAYLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

Son teoremin ispatı, sağ yarı düzlem içindeki H^p ye ait her f fonksiyonunun doğrusal kesirli

$$\omega = \frac{1+z}{1-z}$$

dönüşümüyle birim yuvarın H^p si içindeki,

$$g(z) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \tag{4.3.1}$$

ile verilen bir g fonksiyonuna dönüştürülebileceğini göstermektedir. Böylece, yarı düzlemin H^p sinden yuvarın H^p sinin altuzayına bir dönüşüm elde etmiş oluruz. Bu uzayın ne olduğunu belirlemek kolaydır. Bu alt uzay

$$(1-z)^{-\frac{2}{p}}\, g(z)$$

yuvarın H^p si içinde kalacak şekilde, birim yuvarın H^p si içindeki tüm g fonksiyonlardan oluşur. Eğer g yuvarın H^p si içindeyse (4.3.1) den buna karşılık gelen sağ yarı düzlemdeki analitik f fonksiyonu yarı düzlemin H^p si içinde olmak zorunda değildir. Bu durumda $\operatorname{Re}(\omega) > 0$ için f nin analitik olduğu ve

$$L^p\left(\frac{dt}{(1+t^2)}\right)$$

ye ait olan sanal eksen üzerindeki bir fonksiyonun Poisson integrali olduğu söylenebilir. Diğer bir deyişle

$$\frac{|f(it)|^p}{(1+t^2)}$$

Lebesgue integrallenebilirdir. Sağ yarı düzlemde $(1+\omega)$ nin logaritmasının analitik bir dalını seçtiğimizi farzedelim. Bu durumda

$$\frac{f(\omega)}{(1+\omega)^{\frac{2}{p}}}$$

sanal eksen üzerindeki L^p içinde kalır. Böylece f nin sağ yarı düzlemin H^p si içinde kalması için gerek ve yeter şart

$$(1+\omega)^{\frac{2}{p}} f(\omega)$$

nin sanal eksen üzerindeki

$$L^p\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

içinde kalmasıdır. (her zaman olduğu gibi g nin birim yuvarın H^p si içinde olduğunu kabul edersek)

$$1+\omega=\frac{2}{1-z}$$

olduğundan

$$\frac{g(z)}{(1-z)^{\frac{2}{p}}}$$

tam olarak birim çember üzerindeki L^p içinde olduğunda, f nin yarı düzlemin H^p si içinde olduğunu görürüz. Şimdi aşağıda ki teoreme ihtiyacımız olacaktır.

Teorem 4.3.1 $p \geq 1,\ \alpha > 0$ ve g birim yuvarın H^p si içinde bir fonksiyon olsun.

$$h(z)=\frac{g(z)}{(1-z)^{\alpha}}$$

fonksiyonunun H^p içinde olması için gerekli ve yeterli koşul, $h\left(e^{i\theta}\right)$ nın birim çember üzerindeki L^p nin içinde olmasıdır.

İspat.

Şimdi

$$\begin{aligned}|g(z)|^p &\leq \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\ \left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|^p\ P_z(\theta)\ d\theta\right]\\|1-z| &= \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\ \left|1-e^{i\theta}\right|\ P_z(\theta)\ d\theta\right]\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}|h(z)|^p &\leq \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_z(\theta)\log\ \left|h\left(e^{i\theta}\right)\right|^p\ d\theta\right]\\&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_z(\theta)\ \left|h\left(e^{i\theta}\right)\right|^p\ d\theta\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|h\left(re^{it}\right)\right|^p\ dt \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|^p\ d\theta$$

elde edilir. $(1-z)^{\alpha}$ nın teorem ile ilişkili olarak belirtilmesi gereken tek özelliği bir dış fonksiyon olduğudur. Teoremden önceki g fonksiyonumuza dönersek görülürki, g nin yarı düzlemin H^p si içinde bir fonksiyona dönüşmesi için gerek ve yeter şart

$$(1-z)^{-\frac{2}{p}}\ g(z)$$

nin de birim yuvarın H^p si içinde olmasıdır. Buraya kadar ispatladıklarıızı aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz.

Teorem 4.3.2 g birim yuvar içinde analitik bir fonksiyon ve f sağ yarı düzlem içinde

$$f(\omega) = g\left(\frac{\omega-1}{\omega+1}\right)$$

ile tanımlı bir analitik fonksiyon olsun. Eğer $p \geq 1$ ise, f nin sağ yarı düzlemin H^p si içinde olması için gerek ve yeter şart G birim yuvar H^p si içinde olmak üzere

$$g(z) = (1-z)^{\frac{2}{p}}\ G(z)$$

olmasıdır. Buna denk olarak g nin birim yuvarın H^p si içinde olması için gerek ve yeter şart F sağ yarı düzlem H^p si içinde olmak üzere

$$f(\omega) = (1+\omega)^{\frac{2}{p}} \; F(\omega)$$

olmasıdır.

Yapılabilecek bazı uyarılar vardır. Son teoremin içeriği kabaca ifade edilirse daha açıklık kazanır. İki H^p uzayı arasındaki ilişki şudur. Yuvarın H^p si ile başlayıp bu uzayı sağ yarı düzlemdeki fonksiyonların oluşturduğu $\widetilde{H^p}$ uzayına dönüştürmek için doğrusal kesir dönüşümü kullanılır,

$$(1+\omega)^{\frac{2}{p}}$$

nin $\operatorname{Re}(\omega) > 0$ üzerinde bir analitik dalı seçilir, $\widetilde{H^p}$ içindeki her fonksiyon

$$(1+\omega)^{\frac{2}{p}}$$

ile bölünür; elde edilen uzay yarı düzlemin H^p sidir. Aslında, bir sabit farkıyla, bu dönüşüm iki H^p uzayı arasında bir Banach uzayı izometrisidir. Eğer

$$h(\omega) = (1+\omega)^{-\frac{2}{p}} \; g\left(\frac{\omega-1}{\omega+1}\right)$$

ise

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |h(it)|^p \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta$$

olur.

$\widetilde{H^p}$,

$$L^p\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

içinde sanal eksen üzerinde bir fonksiyonun Poisson integrali olan, sağ yarı düzlem içindeki analitik f fonksiyonlarının tamamından oluştuğu için ve H^p, $L^p(dt)$ içinde sanal eksen üzerinde bir fonksiyonun Poisson integrali olan analitik f fonksiyonlarının tamamından oluştuğu için

$$\widetilde{H^p} = (1+\omega)^{\frac{2}{p}} H^p$$

olduğu açıktır. Sınır üzerinde bu ilişki açıkça doğrudur. Kontrol edilmesi gereken tek nokta, bir H^p fonksiyonunun

$$(1+\omega)^{\frac{2}{p}}$$

ile çarpılması sonucu elde edilen analitik fonksiyonun hala kendi sınır değerlerinin Poisson integrali olmasıdır. Bu teorem (4.3.1.) de ifade edilmiştir.

$p = 2$ durumunda, üçüncü bölümde incelenmiş olan

$$\widetilde{H^2} = (1+\omega) H^2$$

bağıntısı vardır.

4.4 PALEY-WİENER TEOREMİ

Plancherel teoremi yardımıyla burada bulmuş olduğumuz sonuçlardan tek taraflı Paley-Wiener Teoremi elde edilir.

Teorem 4.4.1(Paley-Wiener Teoremi) Sağ yarı düzlemdeki karmaşık değerli bir f fonksiyonunun H^2 sınıfından olması için gerek ve yeter şart $L^2(0,\infty)$ içindeki bir $\widehat{f}$ fonksiyonu için f fonksiyonu

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \widehat{f}(t)\, e^{-\omega t} dt$$

formunda olmalıdır ve bu gösterim tektir.

İspat.

$\widehat{f}$ fonksiyonu

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(it)\, e^{ixt} dt$$

ile tanımlı olsun. Gerçekten bu tanım f nin integrallenebilir olmasıyla anlam kazanır Plancherel teoremi, eğer, $f \in L^1 \cap L^2$ ise o zaman $\widehat{f} \in L^2$ ve,

$$\|f\|_2 = \left\|\widehat{f}\right\|_2$$

olduğunu ifade eder bu $\widehat{f}$ lerin oluşturduğu kümenin L^2 de yoğun olduğunu ve böylece $f \to \widehat{f}$ Fourier dönüşümünün tek olarak L^2 den L^2 ye birimsel genişletilebileceğini söyler. Bu, L^2 $i$çindeki herhangi bir f için $\widehat{f}$ Fourier dönüşümünü tanımlar. $f \in L^1$ olması durumunda üstteki formülün doğru olması anlamında bu formülü $\widehat{f}$ ile temsil edebiliriz. Fakat genel olarak bu durum dar anlamda yorumlanmaktadır. Benzer olarak ters dönüşüm için formül

$$f(it) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)\, e^{-ixt} dx$$

şeklindedir.

Eğer $\widehat{f}$, L^2 içinde ise ve sol yarı düzlemde sıfır ise karşı gelen f nin bir H^2 fonksiyonunun sınır fonksiyonu olduğu kolayca gösterilebilir. Bunun için f yi yarı düzleme teoremin ifadesinde olduğu gibi genişletmek yeterli olacaktır.

Eğer f , H^2 içindeyse $\widehat{f}$ Fourier dönüşümününün sol yarı düzlem üzerinde sıfır olduğunu ispatlamak istiyoruz. İlk olarak $H^1 \cap H^2$, H^2 de yoğun olduğu için bu ispatı f, H^1 içinde olduğunda yapmamız yeterlidir. Eğer f , H^2 içindeyse f, herbiri $H^1 \cap H^2$ içinde olan

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)^n\right] f(\omega)$$

fonksiyonlarının L^2 normuna göre limitidir.

$f \in H^1$ ve $x < 0$ olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \left(1-\omega^2\right) e^{x\omega} f(\omega) \\ &= \frac{1-\omega}{1+\omega} e^{x\omega} (1+\omega)^2 f(\omega) \end{aligned}$$

olsun. Birim yuvarın H^1 inin görüntüsünü $\widetilde{H^1}$ ile gösterelim.

$$(1+\omega)^2 f(\omega)$$

$\widetilde{H^1}$ içindedir. $\operatorname{Re}(\omega) \geq 0$ üzerinde

$$\frac{1-\omega}{1+\omega}$$

sınırlı olduğundan ve $x < 0$ için $e^{x\omega}$ fonksiyonuda yarı düzlem üzerinde sınırlı olduğundan açıkça h bu uzay içindedir. Ancak bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(it) e^{izt} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(it) \frac{1}{1+t^2} .dt \\ &= h(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\frac{1}{\pi\left(1+t^2\right)}$$

nin $\omega = 1$ noktası için Poisson çekirdeği olduğunu kullandık. Bu ispatı tamamlar.

4.5 BİR YARI DÜZLEMDE H^p FONKSİYONLARI İÇİN FAKTÖRİZASYON

Yuvar için bulunan sonuçlardan, $p \geq 1$ için sağ yarı düzlemin H^p si içindeki sıfırdan farklı bir f fonksiyonu hakkında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(a) Eğer $\beta_1, \beta_2, ...$ $\operatorname{Re}(\omega) > 0$ içinde f nin 1 den farklı sıfırları ise

$$\sum_n \frac{\operatorname{Re}(\beta_n)}{1 + |\beta_n|^2} < \infty$$

olur ki bu

$$B(\omega) = \left(\frac{\omega - 1}{1 + \omega}\right)^k \prod_n \frac{|1 - \beta_n^2|}{1 - \beta_n^2} \cdot \frac{\omega - \beta_n}{\omega + \overline{\beta_n}}$$

Blaschke çarpımının yakınsaklığı için gerekli ve yeterli koşuldur. Burada k, f nin $\omega = 1$ deki sıfırının derecesini ifade eder ve

$$g(\omega) = \frac{f(\omega)}{B(\omega)}$$

H^p içinde sıfırı olmayan bir fonksiyondur.

(b) f nin sınır değerleri pozitif Lebesgue ölçümülü bir küme üzerinde sıfır olamaz; aslında

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log |f(it)| \frac{1}{1 + t^2} dt > -\infty$$

olur.

$$f(\omega) = \exp\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log \ |f(it)| \frac{t\omega + i}{t + i\omega} \frac{1}{1 + t^2} dt\right]$$

fonksiyonu H^p içindedir; ayrıca sanal eksen üzerinde hemen hemen her yerde $|F| = |f|$ ve yarı düzlem üzerinde

$$|F(\omega)| \geq |f(\omega)|$$

dir.

(c)

$$\alpha = \arg\left(\frac{f}{B}\right)(1)$$

olmak üzere, eğer $\lambda = e^{i\alpha}$ise

$$S(\omega) = \frac{f(\omega)}{\lambda B(\omega) F(\omega)}$$

fonksiyonu tek olarak

$$S(\omega) = e^{-\rho\omega} \exp\left[-\int \frac{t\omega + i}{t + i\omega} d\mu(t)\right]$$

formunda gösterilebilir, burada μ sanal eksen üzerinde bir sonlu tekil pozitif ölçüm ve ρ negatif olmayan bir gerçel sayıdır.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L.V. (1996) *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, pp. 203-226.

Churchill, R.V. and **Brown**, **J.W.** (1990) *Complex Variables and Applications*, 5. edn. McGraw-Hill, New York, 7 pp.

Baumgartel, H. (2003) *International Journal of Theoretical Physics*,Vol 42, No:10, 4 pp.

Duren, P.L. (1970) *Theory of H^p Spaces,* Acedemic Pres, New York, pp. 167-182.

Hoffman, K. (1964) *Banach Spaces of Analytic Functions,* Dover Publications, pp. 45-63.

Kreyszig, E. (1978) *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wily and Sons, New York., pp.128-132.

Reddy, D. (1998) *Introductory Functional Analysis*, Springer Verlag, New York, pp. 194-202.

Young, N. (1990) *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Pres, Reprinted, pp. 127-153

Soykan, Y. (2006) *Fonksiyonel Analiz Ders Notları*, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi. 142 s.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet AYDEMİR, 1980'de İstanbul'da doğdu; ilkokulu Niğde Akcaörende, ortaokulu ve liseyi İstanbul' da tamamladıktan sonra 1997 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi; 2002 yılında lisans eğitimini tamamladıktan sonra 2003 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı; Zonguldak Yankı Dersanesi, Sivriler Ç.P.L. ve Çaycuma Fatih Lisesinde Matematik öğretmenliği yaptı; halen Kozlu E.M.L. de bu göreve devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres:	Kozlu Anadolu Teknik Lisesi
	67100 Zonguldak
Tel:	(533) 216 4140
E-posta:	aydemir.a@hotmail.com