

**PARÇALI SABİT KATSAYILI BİR HİLL DENKLEMİNİN
KARARSIZLIK ARALIKLARI ÜZERİNE**

Burhan SELÇUK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EYLÜL 2006
ANKARA**

Burhan SELÇUK tarafından hazırlanan PARÇALI SABİT KATSAYILI BİR HİLL DENKLEMİNİN KARARSIZLIK ARALIKLARI ÜZERİNE adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr.İ.Baki Yaşar

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile MATEMATİK Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof.Dr.İ.Baki Yaşar

Üye : Prof.Dr.İ.Ethem Anar

Üye : Prof.Dr.Muhsin Mert

Üye : Prof.Dr.Necmettin Tanrıöver

Üye : Prof.Dr.Bahri Turan

Tarih : 28/09/2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Burhan SELÇUK

**PARÇALI SABİT KATSAYILI BİR HİLL DENKLEMİNİN KARARSIZLIK
ARALIKLARI ÜZERİNE**

(Yüksek Lisans Tezi)

Burhan SELÇUK

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Eylül 2006

ÖZET

Bu çalışmada, parçalı sabit katsayılı Hill denklemleri ile ilişkilendirilmiş periyodik ve yarı-periyodik sınır-değer problemlerinin özdeğerleri için asimptotik formüller araştırıldı. Sonuç olarak, Hill denkleminin kararsızlık aralıklarının uzunluklarının sonsuza gittiği görüldü.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Hill denklemleri, Özdeğer, Kararlılık
Sayfa Adedi : 56
Tez Yöneticisi : Prof.Dr.İrfan Baki Yaşar

**ON INSTABILITY INTERVALS OF A HILL'S EQUATION WITH
PIECEWISE CONSTANT COEFFICIENT**

(M.Sc. Thesis)

Burhan SELÇUK

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

September 2006

ABSTRACT

In this paper, the asymptotic formulas for eigenvalues of the periodic and the semiperiodic boundary value problems associated with a Hill's equation having piecewise constant coefficient are investigated. As a corollary, it is shown that the lengths of instability intervals of Hill's equation tend to infinity.

Science Code : 204.1.138

Key Words : Hill's equation, Eigenvalue, Stability

Page Number: 56

Adviser : Prof.Dr.İrfan Baki Yaşar

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR'a ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve çok değerli arkadaşım Mehmet ARSLAN'a teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. PARÇALI POZİTİF SABİT KATSAYILI BİR HİLL DENKLEMİNİN KARARSIZLIK ARALIKLARI ÜZERİNE.....	2
2.1. Giriş.....	2
2.2. Hill Diskriminantı	5
2.3. Bazı Özel Durumlar.....	7
2.4. Genel Durumlar.....	13
2.5. Kararsızlık Aralıklarının Uzunluğu.....	24
2.6. Varlık Şartları.....	26
3. PARÇALI SABİT VE ALTERNE KATSAYILI BİR HİLL DENKLEMİNİN KARARSIZLIK ARALIKLARI ÜZERİNE.....	29
3.1. Giriş.....	29
3.2. Hill Diskriminantı	31
3.3. Genel Durumlar.....	34
3.4. Kararsızlık Aralıklarının Uzunluğu.....	49
4. SONUÇLAR.....	51
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ	56

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
ρ	Hill denkleminin katsayısı
μ_0, μ_2, \dots	Periyodik problemin özdeğerleri
μ_1, μ_3, \dots	Yarı-periyodik problemin özdeğerleri
$F(\lambda)$	Hill diskriminantı
$\theta(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)$	Hill denkleminin çözümleri
I_n	Kararsızlık aralıklarının uzunluğu
$\phi_1^+(z)$	Periyodik problemin karakteristik denklemi
$\phi_1^-(z)$	Yarı-periyodik problemin karakteristik denk.
r_{2n}^\pm	Periyodik problemin kökleri
r_{2n+1}^\pm	Yarı-periyodik problemin kökleri

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, G.Sh.Guseinov ve I.Y.Karacaya ait “On Hill’s Equation with Piecewise Constant Coefficient” ve “Instability Intervals of a Hill’s Equation with Piecewise Constant and Alternating Coefficient” adlı makalelerinin analizi yapılarak bu makalelerin benzerlikleri ve farklılıkları ortaya konmuştur.

2. PARÇALI POZİTİF SABİT KATSAYILI BİR HİLL DENKLEMİNİN KARARSIZLIK ARALIKLARI ÜZERİNE

2.1. Giriş

λ bir kompleks parametre ve $\rho(x)$,

$$\rho(x+w) = \rho(x), \quad (-\infty < x < \infty)$$

şeklinde $w > 0$ periyotlu bir periyodik fonksiyon olduğunda

$$-y'' = \lambda \rho(x)y \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.1)$$

Hill denklemini göz önüne alalım.

Ayrıca burada $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$, $\int_0^{\infty} \rho(x) dx < \infty$ kabul edelim.

Eş. 2.1 ile ilişkilendirilmiş periyodik sınır-değer problemini

$$-y'' = \lambda \rho(x)y \quad (0 \leq x \leq w), \quad (2.2)$$

$$y(0) = y(w) \quad y'(0) = y'(w)$$

ve yarı-periyodik sınır-değer problemini

$$-y'' = \lambda \rho(x)y \quad (0 \leq x \leq w), \quad (2.3)$$

$$y(0) = -y(w) \quad y'(0) = -y'(w)$$

biçiminde tanımlayalım.

Eş. 2.2 ya da Eş. 2.3 problemlerinin $y(x, \lambda)$ adi olmayan çözümleri λ kompleks parametresinin değerleridir ve *özdeğerleri* diye adlandırılır.

Eş. 2.1 in çözümlerini $\theta(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$ olarak alalım ve bu çözümler aşağıdaki başlangıç şartlarını sağlasın:

$$\theta(0, \lambda) = 1, \quad \theta'(0, \lambda) = 0, \quad \varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1. \quad (2.4)$$

Eş. 2.1 in Hill diskriminantı

$$F(\lambda) = \theta(w, \lambda) + \varphi'(w, \lambda) \quad (2.5)$$

olarak tanımlanan bir fonksiyondur [1]. Eş. 2.2 periyodik probleminin özdeğerleri $F(\lambda) - 2 = 0$ (periyodik problemin karakteristik denklemi) ile çakışır. Eş. 2.3 yarı-periyodik probleminin özdeğerleri $F(\lambda) + 2 = 0$ (yarı-periyodik problemin karakteristik denklemi) ile çakışır.

Eş. 2.2 ve Eş. 2.3 problemlerinin her biri yığılma noktası $+\infty$ olan sayılabilir sonsuz reel özdeğerlere sahiptir. Eş. 2.2 periyodik problemi için açıkça $y \equiv 1$ fonksiyonunun basit özdeğeri $\lambda = 0$ dır.

Eş. 2.2 periyodik problemin özdeğerleri

$$0 = \mu_0 < \mu_2^- \leq \mu_2^+ < \mu_4^- \leq \mu_4^+ < \dots < \mu_{2n}^- \leq \mu_{2n}^+ < \dots$$

ve Eş. 2.3 yarı-periyodik problemin özdeğerleri

$$\mu_1^- \leq \mu_1^+ < \mu_3^- \leq \mu_3^+ < \dots < \mu_{2n+1}^- \leq \mu_{2n+1}^+ < \dots$$

olarak sıralanırlar. Bu özdeğerler birlikte düşünüldüğünde

$$0 = \mu_0 < \mu_1^- \leq \mu_1^+ < \mu_2^- \leq \mu_2^+ < \mu_3^- \leq \mu_3^+ < \mu_4^- \leq \mu_4^+ \dots \quad (2.6)$$

biçiminde sıralanırlar [1, 2].

Eğer λ , $(-\infty, 0)$ ve (μ_n^-, μ_n^+) , $(n \in \mathbb{Z}^+)$ açık aralıklarının herhangi birinde ise, o zaman Eş. 2.1 in adi olmayan tüm çözümleri $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırsızdır. Bu aralıklara, Eş. 2.1 in *kararsızlık aralıkları* denir [1].

Eğer λ , (μ_{n-1}^+, μ_n^-) , $(n \in \mathbb{Z}^+, \mu_0^+ = 0)$ açık tamamlayıcı aralıklarının herhangi birinde ise, o zaman Eş. 2.1 in tüm çözümleri $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırlıdır. Bu aralıklara, Eş. 2.1 in *kararlılık aralıkları* denir [1].

$n \rightarrow \infty$ iken (μ_n^-, μ_n^+) kararsızlık aralıklarının uzunluğu

$$I_n = \mu_n^+ - \mu_n^- \quad (n \in \mathbb{Z}^+) \quad (2.7)$$

olarak tanımlanır [1].

Bu çalışmada a , $0 < a < w$ aralığında sabit bir sayı ve $\alpha > 0, \beta > 0$ sabitler olmak üzere Eş. 2.1 in ρ katsayısını

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, & 0 < x \leq a, \\ \beta^2, & a < x \leq w, \end{cases} \quad (2.8)$$

parçalı sabit fonksiyon olarak kabul edelim. Ayrıca $\rho(x)$, $-\infty < x < \infty$ ekseninde tanımlı $w > 0$ periyotlu bir periyodik fonksiyon olsun.

2.2. Hill Diskriminantı

Eş. 2.1 de $\lambda = s^2$ ve $\rho(x)$ i Eş. 2.8 biçiminde kabul edelim. Eş. 2.1 in Eş. 2.4 sınır şartlarını sağlayan çözümlerini aşağıdaki gibi buluruz;

i) $\rho(x) = \alpha^2$ ve $0 \leq x \leq a$ olsun. O zaman, Eş. 2.1 in öz denklemini $m^2 = -\alpha^2 s^2$ ve $m_1 = \alpha si$ ve $m_2 = -\alpha si$ dir. Böylece genel çözüm

$$Y(x) = C \cos s\alpha x + D \sin s\alpha x$$

olarak bulunur. Başlangıç şartlarını da hesaba katarsak;

$$\theta(0, \lambda) = 1, \theta'(0, \lambda) = 0$$

$$Y(0) = C \Rightarrow 1 = C, \frac{dY}{dx}(0) = Ds\alpha \Rightarrow 0 = Ds\alpha; \quad C = 1, D = 0 \Rightarrow \theta(x, \lambda) = \cos s\alpha x$$

ve

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \varphi'(0, \lambda) = 1$$

$$Y(0) = C \Rightarrow 0 = C, \frac{dY}{dx}(0) = Ds\alpha \Rightarrow 1 = Ds\alpha; \quad C = 0, D = \frac{1}{s\alpha} \Rightarrow \varphi(x, \lambda) = \frac{1}{s\alpha} \sin s\alpha x$$

çözümleri elde edilir. O halde Eş. 2.1 in Eş. 2.4 şartlarını sağlayan çözümü

$$Y(x) = \cos s\alpha x + \frac{1}{s\alpha} \sin s\alpha x$$

olarak bulunur. Sınır şartlarını çözümlerle beraber değerlendirirsek $\cos s\alpha a = 1$ ve $\sin s\alpha a = 0$ olduğu görülür.

ii) $\rho(x) = \beta^2$ ve $a < x \leq w$ olsun. Yukarıdaki çözüme benzer olarak;

$$\theta(x, \lambda) = \cos s\beta(x-a) \text{ ve } \varphi(x, \lambda) = \frac{\sin s\beta(x-a)}{s\beta}$$

çözümleri elde edilir. $\cos s\alpha a = 1$ ve $\sin s\alpha a = 0$ olduğunu hatırlarsak bu çözümleri aşağıdaki gibi de yazabiliriz:

$$\theta(x, \lambda) = \cos s\beta(x-a) = \cos s\alpha a \cos s\beta(x-a) - \frac{\alpha}{\beta} \sin s\alpha a \sin s\beta(x-a),$$

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\sin s\beta(x-a)}{s\beta} = \frac{\sin s\alpha a}{s\alpha} \cos s\beta(x-a) + \cos s\alpha a \frac{\sin s\beta(x-a)}{s\beta}.$$

O halde $Y(x)$ çözümünü 2 tane parçalı fonksiyonun birleşimi şeklinde aşağıdaki gibi belirtiriz;

$$\theta(x, \lambda) = \begin{cases} \cos s\alpha x, & 0 \leq x \leq a, \\ \cos s\alpha a \cos s\beta(x-a) - \frac{\alpha}{\beta} \sin s\alpha a \sin s\beta(x-a), & a < x \leq w, \end{cases}$$

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin s\alpha x}{s\alpha}, & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{\sin s\alpha a}{s\alpha} \cos s\beta(x-a) + \cos s\alpha a \frac{\sin s\beta(x-a)}{s\beta}, & a < x \leq w. \end{cases}$$

O zaman Hill diskriminantının kapalı-olmayan formunu aşağıdaki gibi buluruz;

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \theta(w, \lambda) + \varphi'(w, \lambda) \\ &= \cos s\alpha a \cos s\beta(w-a) - \frac{\alpha}{\beta} \sin s\alpha a \sin s\beta(w-a) \\ &\quad - \frac{\beta}{\alpha} \sin s\alpha a \sin s\beta(w-a) + \cos s\alpha a \cos s\beta(w-a) \\ &= 2 \cos s\alpha a \cos s\beta(w-a) - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \sin s\alpha a \sin s\beta(w-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] (\cos s\alpha a \cos s\beta(w-a) - \sin s\alpha a \sin s\beta(w-a)) + \\
&\quad \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] (\cos s\alpha a \cos s\beta(w-a) + \sin s\alpha a \sin s\beta(w-a)) \\
&= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] \cos s(\alpha a + \beta(w-a)) + \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] \cos s(\alpha a - \beta(w-a))
\end{aligned}$$

Bunu aşağıdaki gibi de ifade ederiz:

$$F(\lambda) = A \cos s\delta + B \cos s\gamma. \quad (2.9)$$

Yukarıdaki son eşitliğe aşağıdaki değişken değiştirmeleri yaparak ulaşıyoruz;

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right), & B &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right), \\
\delta &= \alpha a + \beta(w-a), & \gamma &= \alpha a - \beta(w-a).
\end{aligned} \quad (2.10)$$

2.3. Bazı özel durumlar

Bu kesimde periyodik ve yarı-periyodik sınır-değer problemlerinin özdeğerleri bazı özel durumlarda açık olarak bulunmuştur.

1. $\alpha = \beta$ alalım. Eş. 2.9 ve Eş. 2.10 dan $A = 2$, $B = 0$, $\delta = \alpha w$, $\gamma = \alpha(2a - w)$ ve $F(\lambda) = 2 \cos s\alpha w$ bulunur. Bu yüzden,

$$F(\lambda) - 2 = 2 \cos s\alpha w - 2 = -4 \sin^2 s\alpha w / 2 = 0 \Leftrightarrow s = 2n\pi / \alpha w, \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

$$F(\lambda) + 2 = 2 \cos s\alpha w + 2 = 4 \cos^2 s\alpha w / 2 = 0 \Leftrightarrow s = (2n+1)\pi / \alpha w, \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

bulunur. Her bir λ kökü çift köktür. Sonuç olarak,

$$\mu_0 = 0, \mu_n^- = \mu_n^+ = (n\pi / \alpha w)^2, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ve Eş. 2.7 den $I_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots$. Tek kararsızlık aralığı $(-\infty, 0)$ dir.

2. $\alpha \neq \beta$ alalım. Eş. 2.10 dan aşağıdakiler elde edilir:

$$A > 2, B < 0, A + B = 2, \delta > 0, -\infty < \gamma < \infty, |B/A| < 1, |\gamma/\delta| < 1 \quad (2.11)$$

2(i) $\gamma = 0$ olsun. Bu durumda $\alpha = \beta(w-a)/a$ olur. ($\alpha \neq \beta \Rightarrow a \neq w/2$)

O halde Eş. 2.9

$$F(\lambda) = A \cos s\delta + B = A \cos s\delta + 2 - A = A(\cos s\delta - 1) + 2$$

fonksiyonuna dönüştür. Buradan $n \in Z$ için

$$F(\lambda) - 2 = A(\cos s\delta - 1) = 0 \Leftrightarrow -2A \sin^2 s\delta/2 = 0 \Rightarrow s = 2n\pi / \delta,$$

$$F(\lambda) + 2 = A(\cos s\delta - 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow s = (\pm \cos^{-1}(A - 4/A) + 2n\pi) / \delta.$$

bulunur. Sonuç olarak $c = \cos^{-1}(A - 4/A)$ ve $0 < c < \pi$ alır, Eşz. 2.6 yı hesaba katarsak;

$$\mu_0 = 0, \mu_{2n}^- = \mu_{2n}^+ = (2n\pi / \delta)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\mu_{(2n+1)}^- = (2n\pi + c / \delta)^2, \mu_{(2n+1)}^+ = ((2n+2)\pi - c / \delta)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$I_{2n} = \mu_{2n}^+ - \mu_{2n}^- = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$I_{(2n+1)} = \mu_{(2n+1)}^+ - \mu_{(2n+1)}^- = 4(\pi - c)(2n+1)\pi / \delta^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

bulunur. O halde $n \rightarrow \infty$ iken $I_{(2n+1)} \rightarrow \infty$ olur.

2(ii) $\gamma = \delta/2$ olsun. Bu durumda $\alpha = 3\beta(w-a)/a$, ($\alpha \neq \beta \Rightarrow a \neq 3w/4$) olur.

O halde Eş. 2.9 dan;

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= A \cos s\delta + B \cos s\gamma = A \cos s\delta + B \cos s\delta/2 \\ &= A(2 \cos^2 s\delta/2 - 1) + B \cos s\delta/2 = 2A \cos^2 s\delta/2 + B \cos s\delta/2 - A \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F(\lambda) - 2 &= 2A \cos^2 s\delta/2 + B \cos s\delta/2 - A - 2 \\ &= 2A \cos^2 s\delta/2 + (2 - A) \cos s\delta/2 - A - 2 \\ &= A(2 \cos^2 s\delta/2 - \cos s\delta/2 - 1) + 2(\cos s\delta/2 - 1) \\ &= A(2 \cos s\delta/2 + 1)(\cos s\delta/2 - 1) + 2(\cos s\delta/2 - 1) \\ &= (\cos s\delta/2 - 1)(A(2 \cos s\delta/2 + 1) + 2) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$F(\lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow -2 \sin^2 s\delta/4 = 0$ veya $\cos^2 s\delta/4 = -(2 + A)/2A$ olarak bulunur

$d = \cos^{-1}(2 + A/2A)$ ve $0 < \pi < d/2$ olduğunda; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ için $s = 4n\pi/\delta$

veya $s = 2(\pm d + (2n+1)\pi)/\delta$ eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak;

$$\mu_0 = 0, \mu_{4n}^- = \mu_{4n}^+ = (4n\pi/\delta)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.12)$$

$$\mu_{(4n+2)}^- = \left(\frac{((4n+2)\pi + 2d)}{\delta} \right)^2, \mu_{(4n+2)}^+ = \left(\frac{((4n+2)\pi - 2d)}{\delta} \right)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.13)$$

yazılır ve benzer olarak

$$F(\lambda) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2A \cos^2 s\delta/2 + (2 - A) \cos s\delta/2 - A + 2 = 0$$

$$\cos s\delta/2 = \left(A - 2 \mp \sqrt{(2 - A)^2 + 8A(A - 2)} \right) / 4A$$

$$d_1 = \cos^{-1} \left(\left(A - 2 - \sqrt{(A-2)^2 + 8A(A-2)} \right) / 4A \right); \quad 0 < d_1 < \pi/2$$

$$d_2 = \cos^{-1} \left(\left(A - 2 + \sqrt{(A-2)^2 + 8A(A-2)} \right) / 4A \right); \quad 0 < d_2 < \pi/2$$

olduğunda $s\delta/2 = (\pm d_1 + (2n+1)\pi)$ veya $s\delta/2 = (\pm d_2 + 2n\pi)$ bulunur. Ayrıca $d_2 < d_1$ ve $d < d_1$ dir. Böylece Eş. 2.12, Eş. 2.13 ve Eşz. 2.6 dan;

$$\mu_{(4n+1)}^- = ((4n\pi + 2d_2) / \delta)^2, \mu_{(4n+1)}^+ = (((4n+2)\pi - 2d_1) / \delta)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.14)$$

$$\mu_{(4n+3)}^- = (((4n+2)\pi + 2d_1) / \delta)^2, \mu_{(4n+3)}^+ = (((4n+4)\pi - 2d_2) / \delta)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.15)$$

eşitlikleri bulunur. Eş. 2.12, Eş. 2.13, Eş. 2.14 ve Eş. 2.15 den;

$$I_{4n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad I_{(4n+2)} = 16d(2n+1) / \delta^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$I_{(4n+1)} = \frac{4(\pi - d_1 - d_2)}{\delta^2} (4n\pi + \pi - d_1 + d_2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$I_{(4n+3)} = \frac{4(\pi - d_1 - d_2)}{\delta^2} (4n\pi + 3\pi + d_1 - d_2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

elde ederiz. Görülür ki $n \rightarrow \infty$ iken $I_{(4n+1)} \rightarrow \infty, I_{(4n+2)} \rightarrow \infty, I_{(4n+3)} \rightarrow \infty$ olur.

2(iii) $\gamma = \delta/3$ olsun. Bu durumda $\alpha = 2\beta(w-a)/a$, ($\alpha \neq \beta \Rightarrow a \neq 2w/3$) bulunur.

O halde Eş. 2.9 dan;

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= A \cos s\delta + B \cos s\gamma = A \cos s\delta + B \cos \frac{s\delta}{3} \\ &= A \left[\cos \frac{s\delta}{3} \cos \frac{2s\delta}{3} - \sin \frac{s\delta}{3} \sin \frac{2s\delta}{3} \right] + B \cos \frac{s\delta}{3} \\ &= A \left[\cos \frac{s\delta}{3} \left(2 \cos^2 \frac{s\delta}{3} - 1 \right) - \sin \frac{s\delta}{3} \sin \frac{2s\delta}{3} \right] + B \cos \frac{s\delta}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A \left[\cos \frac{s\delta}{3} \left(2 \cos^2 \frac{s\delta}{3} - 1 \right) - 2 \sin^2 \frac{s\delta}{3} \cos \frac{s\delta}{3} \right] + B \cos \frac{s\delta}{3} \\
&= A \left[\cos \frac{s\delta}{3} \left(2 \cos^2 \frac{s\delta}{3} - 1 - 2 \sin^2 \frac{s\delta}{3} \right) \right] + B \cos \frac{s\delta}{3} \\
&= A \left[\cos \frac{s\delta}{3} \left(4 \cos^2 \frac{s\delta}{3} - 3 \right) \right] + B \cos \frac{s\delta}{3} \\
&= 4A \cos^3 \frac{s\delta}{3} + (B - 3A) \cos \frac{s\delta}{3} \\
&= 4A \cos^3 \frac{s\delta}{3} + (2 - 4A) \cos \frac{s\delta}{3}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
F(\lambda) - 2 &\Leftrightarrow 4A \cos^3 \frac{s\delta}{3} + (2 - 4A) \cos \frac{s\delta}{3} - 2 = 0 \\
&2A \cos^3 \frac{s\delta}{3} + (1 - 2A) \cos \frac{s\delta}{3} - 1 = 0 \\
\cos \frac{s\delta}{3} - 1 = 0 &\quad \vee \quad c \cos \frac{s\delta}{3} = \frac{-A \mp \sqrt{A(A-2)}}{2A} \\
-2 \sin^2 \frac{s\delta}{6} = 0 &\quad \vee \quad \cos \frac{s\delta}{3} = \frac{-A \mp \sqrt{A(A-2)}}{2A}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$d_3 = \cos^{-1} \frac{A + \sqrt{A(A-2)}}{2A}, \quad d_4 = \cos^{-1} \frac{A - \sqrt{A(A-2)}}{2A}, \quad 0 < d_3 < \frac{\pi}{3} < d_4 < \frac{\pi}{2}$$

ve $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olduğunda;

$$\frac{s\delta}{6} = n\pi \text{ ya da } \frac{s\delta}{3} = (\pm d_3 + (2n+1)\pi) \text{ ya da } \frac{s\delta}{3} = (\pm d_4 + (2n+1)\pi)$$

eşitlikleri bulunur. Daha da ilerletirsek;

$$\begin{aligned}
F(\lambda) + 2 &\Leftrightarrow 4A \cos^3 \frac{s\delta}{3} + (2-4A) \cos \frac{s\delta}{3} + 2 = 0 \\
2A \cos^3 \frac{s\delta}{3} + (1-2A) \cos \frac{s\delta}{3} + 1 &= 0 \\
\cos \frac{s\delta}{3} + 1 = 0 \vee \cos \frac{s\delta}{3} &= \frac{-A \pm \sqrt{A(A-2)}}{2A} \\
2\cos^2 \frac{s\delta}{6} = 0 \vee \cos \frac{s\delta}{3} &= \frac{-A \pm \sqrt{A(A-2)}}{2A}
\end{aligned}$$

$\frac{s\delta}{6} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ ya da $\frac{s\delta}{3} = (\pm d_3 + 2n\pi)$ ya da $\frac{s\delta}{3} = (\pm d_4 + 2n\pi)$ eşitlikleri bulunur.

Yukarıdaki bulduklarımızdan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\mu_0 = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ için } \mu_{6n}^- = \mu_{6n}^+ = (6n\pi / \delta)^2$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ için } \mu_{6n+1}^- = \left(\frac{6n\pi + 3d_3}{\delta}\right)^2, \quad \mu_{6n+1}^+ = \left(\frac{6n\pi + 3d_4}{\delta}\right)^2,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ için } \mu_{6n+2}^- = \left(\frac{(6n+3)\pi - 3d_4}{\delta}\right)^2, \quad \mu_{6n+2}^+ = \left(\frac{(6n+3)\pi - 3d_3}{\delta}\right)^2,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ için } \mu_{6n+3}^- = \mu_{6n+3}^+ = \left(\frac{(6n+3)\pi}{\delta}\right)^2,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ için } \mu_{6n+4}^- = \left(\frac{(6n+3)\pi + 3d_3}{\delta}\right)^2, \quad \mu_{6n+4}^+ = \left(\frac{(6n+3)\pi + 3d_4}{\delta}\right)^2,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ için } \mu_{6n+5}^- = \left(\frac{(6n+6)\pi - 3d_4}{\delta}\right)^2, \quad \mu_{6n+5}^+ = \left(\frac{(6n+6)\pi - 3d_3}{\delta}\right)^2.$$

Bundan dolayı; $I_{6n} = 0, n = 1, 2, 3, \dots; I_{(6n+3)} = 0, n = 0, 1, 2, \dots$ ve $n \rightarrow \infty$ $j = 1, 2, 4, 5$

iken $I_{(6n+j)} \rightarrow \infty$ olur.

2.4. Genel Durumlar

α, β, a ve w gelişigüzel değerler ve $\alpha \neq \beta$ olduğunda $F(\lambda)-2$ ve $F(\lambda)+2$ fonksiyonlarının köklerini araştıralım. Eş. 2.9 da $\lambda = s^2$ olduğunda;

$$\begin{aligned}
 \phi^+(\lambda) &= F(\lambda) - 2 = A \cos s\delta + B \cos s\gamma - 2 \\
 &= A(1 - 2 \sin^2 s\delta/2) + B(1 - 2 \sin^2 s\gamma/2) - 2 \\
 &= -2A \sin^2 s\delta/2 - 2B \sin^2 s\gamma/2 + A + B - 2 \\
 &= -2A \sin^2 s\delta/2 - 2B \sin^2 s\gamma/2 + 2 - 2 \\
 &= -2A \sin^2 s\delta/2 - 2B \sin^2 s\gamma/2
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

elde ederiz.

$$s\delta/2 = \pi z \Rightarrow s = 2\pi z/\delta \text{ ve } \lambda = s^2 = (2\pi/\delta)^2 z^2 \tag{2.17}$$

aldığımızda

$$\phi^+(\lambda) = \phi^+(4\pi^2 z^2/\delta^2) = \phi_1^+(z), \tag{2.18}$$

ve

$$\phi_1^+(z) = -2A \sin^2 \pi z - 2B \sin^2 \frac{\gamma}{\delta} \pi z \tag{2.19}$$

eşitliklerini elde ederiz. Dahası, herhangi bir n doğal sayı olmak üzere karenin sınırını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\Gamma_n^+ = \{z \in C : |\operatorname{Re} z| = n + 1/2, |\operatorname{Im} z| = n + 1/2\}.$$

2.1. Teorem (Rouche teoremi)

Eğer f ve g analitik fonksiyonları Γ kapalı sınırı üzerinde ve içinde tanımlı ve Γ da $|g(z)| < |f(z)|$ eşitsizliği geçerli ise, o zaman f ve $f+g$ fonksiyonlarının Γ içindeki sıfırlarının sayısı aynıdır [3].

Rouche teoremini uygularsak $\Gamma = \Gamma_n^+$, $f(z) = 2A \sin^2 \pi z$ ve $g(z) = 2B \sin^2 \frac{\gamma}{\delta} \pi z$ alalım. Böylece $\phi_1^+(z) = f(z) + g(z)$ ve $|g(z)| < |f(z)|$ eşitsizliği de

$$\left| \frac{B}{A} \left| \frac{\sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\sin \pi z} \right|^2 \right| < 1 \quad (2.20)$$

e denktir.

2.1. Lemma

n_0 bir doğal sayı olmak üzere $\forall z \in \Gamma_n^+, \forall n \geq n_0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{\sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\sin \pi z} \right| \leq 1. \quad (2.21)$$

İspat

Herhangi bir $z = \sigma + i\tau$ ($\sigma, \tau \in \mathfrak{R}$) için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi \sigma + \sinh^2 \pi \tau = \frac{1}{4} \{ e^{2\pi\tau} - 2 \cos 2\sigma\pi + e^{-2\pi\tau} \}. \quad (2.22)$$

Γ_n^+ sınırının düşey kenarı üzerinde $z = \sigma + i\tau$, $\sigma = \pm(n+1/2)$ alalım.

Eş. 2.22 den $|\sin \pi z| = \cosh \pi \tau$ ve Eşz. 2.11 den $\left| \frac{\gamma}{\delta} \right| < 1$ olduğunu da hatırlarsak

$$\left| \sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z \right| \leq \cosh \left| \frac{\gamma}{\delta} \right| \pi \tau \leq \cosh \pi \tau \text{ elde edilir.}$$

Bu yüzden $\forall n$ için Γ_n^+ sınırının düşey kenarı üzerinde Eşz. 2.21 i sağlar.

Γ_n^+ sınırının yatay kenarı üzerinde $z = \sigma + i\tau$, $\tau = \pm(n+1/2)$ alalım ve Eş. 2.22 den:

$$|\sin \pi z|^2 = \frac{1}{4} (e^{2\pi\tau} - 2 \cos 2\sigma\pi + e^{-2\pi\tau}) \geq \frac{1}{4} (e^{\pi\tau} - e^{-\pi\tau})^2,$$

$$|\sin \pi z| \geq \frac{1}{2} e^{\pi|\tau|} (1 - e^{-2\pi|\tau|}), \quad |\sin \pi z| \geq \frac{1}{4} e^{\pi|\tau|}$$

eşitsizlikleri bulunur. Bu yüzden $\tau = \pm(n+1/2)$, $n \rightarrow \infty$ iken

$$\left| \frac{\sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\sin \pi z} \right| \leq \frac{8e^{\pi \left| \frac{\gamma}{\delta} \right| \tau}}{e^{\pi|\tau|}} = 8e^{-\pi \left(1 - \left| \frac{\gamma}{\delta} \right| \right) |\tau|} \rightarrow 0. \quad (2.23)$$

Sonuç olarak öyle bir n_0 doğal sayısı vardır $n \geq n_0$ ve $\tau = \pm(n+1/2)$ olduğunda her $z = \sigma + i\tau$ için Eşz. 2.21 i sağlar. Lemma ispatlandı.

2.1. Yorum

Eş. 2.23 den, 2.1. Lemmayı sağlayan

$$n_0 = \left\lceil \frac{3 \log 2}{\pi (1 - |\gamma/\delta|)} \right\rceil + 1 \quad (2.24)$$

sayısı kolaylıkla bulunur.

Eşz. 2.11 den $|B/A| < 1$ idi. 2.1. Lemmadan $z \in \Gamma_n^+, n \geq n_0$ için Eşz. 2.20 sağlar. Rouché teoremini uygularsak $n \geq n_0$ için Γ_n^+ içinde yatan $\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı $\sin^2 \pi z$ fonksiyonu ile aynıdır. $\sin^2 \pi z$ fonksiyonunun Γ_n^+ içindeki kökleri $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ noktalarıdır ve her bir kök çift katlıdır. Bundan dolayı $n \geq n_0$ olmak üzere $\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun Γ_n^+ içinde $4n+2$ kökü olmalıdır. Çünkü Eş. 2.19 dan $\phi_1^+(z)$ çift fonksiyondur ve $z=0$ çift köktür, $\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun Γ_n^+ içindeki köklerini

$$-z_{2n}^+, -z_{2n}^-, \dots, -z_2^+, -z_2^-, 0, 0, z_2^-, z_2^+, \dots, z_{2n}^-, z_{2n}^+. \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

ile göstereceğiz.

$\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun kökleri Eş. 2.17 ve Eş. 2.18 den reeldir çünkü Eş. 2.2 periyodik sınır-değer probleminin özdeğerleri non-negatiftir.

2.2. Lemma

$n \geq n_0 + 1$ için, $\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun

$$K_n^+ = \left\{ z \in \mathbb{C} : n - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < n + \frac{1}{2}, |\operatorname{Im} z| < n + \frac{1}{2} \right\}$$

bölgesinde 2 kökü vardır. Bu yüzden, $\phi_1^+(z)$ nin z_{2n}^- ve z_{2n}^+ kökleri $\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right)$

aralığında yatar;

$$n - \frac{1}{2} < z_{2n}^\pm < n + \frac{1}{2}, \quad (n \geq n_0 + 1). \quad (2.25)$$

İspat

2.1. Lemmanın ispatından açıktır ki, $n \geq n_0 + 1$ için K_n^+ bölgesinin sınırları üzerinde bile Eşz. 2.20 yi sağlar. Sonuç olarak, Rouché teoreminden $\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun köklerinin sayısı $\sin^2 \pi z$ fonksiyonu ile aynıdır. (K_n^+ içinde $\sin^2 \pi z$ fonksiyonunun $z = n$ noktasında çift kökü vardır.) Lemma ispatlandı.

$k \in \mathbb{Z}$ ve $s_{2n}^\pm = \frac{2\pi}{\delta} z_{2n}^\pm$ alalım. Eşz. 2.25 den $-\pi/2 < h_{2n}^\pm < \pi/2$, $n \geq n_0 + 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} n - \frac{1}{2} < z_{2n}^\pm < n + \frac{1}{2} &\Rightarrow -\frac{1}{2} < z_{2n}^\pm - n < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \pi(z_{2n}^\pm - n) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi(z_{2n}^\pm - n) = h_{2n}^\pm \\ \Rightarrow \pi\left(s_{2n}^\pm \frac{\delta}{2\pi} - n\right) = h_{2n}^\pm &\Rightarrow s_{2n}^\pm \frac{\delta}{2} - n\pi = h_{2n}^\pm \Rightarrow s_{2n}^\pm = \frac{2n\pi + 2h_{2n}^\pm}{\delta} \end{aligned}$$

olur. h_{2n}^\pm analiz edersek, Eş. 2.16 nın kökleri s_{2n}^\pm sayılarıdır. Bu yüzden, h_{2n}^- ve h_{2n}^+

$$A \sin^2 t + B \sin^2 \frac{\gamma}{\delta}(n\pi + t) = 0$$

denkleminin kökleridir ve $-\pi/2 < t < \pi/2$ aralığında yatarlar. $B = 2 - A$ ve $A > 2$ olduğunda bu son denklem aşağıdaki eşitliklerin birleşimidir:

$$\sin t = \left| \sin \frac{\gamma}{\delta}(n\pi + t) \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}, \quad (2.26)$$

$$\sin t = - \left| \sin \frac{\gamma}{\delta}(n\pi + t) \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}. \quad (2.27)$$

Eş. 2.26 nın her bir kökü $(-\pi/2, \pi/2)$ de yatar ve non-negatiftir. Eş. 2.27 nin her bir kökü $(-\pi/2, \pi/2)$ de yatar ve non-pozitiftir.

2.3. Lemma

$\forall n \geq n_0 + 1$ için Eş. 2.26'nın $[0, \pi/2)$ de bir kökü ve Eş. 2.27'nin $(-\pi/2, 0]$ da bir kökü vardır.

İspat

$$f_1(t) = \sin t - \left| \sin \frac{\gamma}{\delta}(n\pi + t) \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}$$

fonksiyonu $0 \leq t \leq \pi/2$ de süreklidir ve $f_1(\pi/2) > 0, f_1(0) < 0$ dır. Analizde iyi bildiğimiz Bolzano teoreminden, Eş. 2.26'nın $[0, \pi/2)$ de bir kökü vardır.

Benzer olarak Eş. 2.27'nin de $(-\pi/2, 0]$ da bir kökü olduğunu gösterelim:

$$f_2(t) = \sin t + \left| \sin \frac{\gamma}{\delta}(n\pi + t) \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}$$

fonksiyonu $-\pi/2 \leq t \leq 0$ da süreklidir ve $f_2(0) > 0, f_2(-\pi/2) < 0$ dır. Sonuç olarak Eş. 2.27'nin $(-\pi/2, 0]$ da bir kökü vardır. Lemma ispatlandı.

$[0, \pi/2)$ aralığında Eş. 2.26'nın köklerini r_{2n}^+ ve $(-\pi/2, 0]$ aralığında Eş. 2.27'nin köklerini $-r_{2n}^-$ alalım. O zaman $0 \leq r_{2n}^+ < \pi/2$ ve $h_{2n}^+ = r_{2n}^+, h_{2n}^- = -r_{2n}^-$ olduğunda

$$\mu_0 = 0, \mu_{2n}^\pm = (S_{2n}^\pm)^2 = \left(\frac{2n\pi \pm 2r_{2n}^\pm}{\delta} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sin r_{2n}^\pm = \left| \sin \frac{\gamma}{\delta}(n\pi \pm r_{2n}^\pm) \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.28)$$

eşitlikleri bulunur.

Benzer araştırmaları yarı-periyodik problemde yapalım, fonksiyonun kökleri $\lambda = s^2$ olduğunda

$$\begin{aligned}
\phi^-(\lambda) &= F(\lambda) + 2 = A \cos s\delta + B \cos s\gamma + 2 \\
&= A(2 \cos^2 s\delta/2 - 1) + B(2 \cos^2 s\gamma/2 - 1) + 2 \\
&= 2A \cos^2 s\delta/2 + 2B \cos^2 s\gamma/2 - A - B + 2 \\
&= 2A \cos^2 s\delta/2 + 2B \cos^2 s\gamma/2 - 2 + 2 \\
&= 2A \cos^2 s\delta/2 + 2B \cos^2 s\gamma/2
\end{aligned} \tag{2.29}$$

olarak elde edilir. $s\delta = 2\pi z$ aldığımızda

$$\phi^-(\lambda) = \phi^-(4\pi^2 z^2 / \delta^2) = \phi_1^-(z) \tag{2.30}$$

ve

$$\phi_1^-(z) = 2A \cos^2 \pi z + 2B \cos^2 \frac{\gamma}{\delta} \pi z \tag{2.31}$$

eşitlikleri elde edilir. $\phi_1^-(z) = f(z) + g(z)$ fonksiyonunda $f(z) = 2A \cos^2 \pi z$ ve

$g(z) = 2B \cos^2 \frac{\gamma}{\delta} \pi z$ alalım. Karesel bölgenin sınırını da

$$\Gamma_n^- = \{z \in C : |\operatorname{Re} z| = n+1, |\operatorname{Im} z| = n+1\}$$

alalım. O zaman Rouché teoremini uygularsak aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$|g(z)| < |f(z)| \Rightarrow \left| \frac{B}{A} \frac{\cos \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\cos \pi z} \right|^2 < 1. \tag{2.32}$$

2.4. Lemma

n_0 bir doğal sayı olmak üzere $\forall z \in \Gamma_n^-, \forall n \geq n_0$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\left| \frac{\cos \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\cos \pi z} \right| \leq 1. \quad (2.33)$$

İspat

Herhangi bir $z = \sigma + i\tau$ ($\sigma, \tau \in \mathfrak{R}$) için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$|\cos \pi z|^2 = \cos^2 \pi \sigma + \sinh^2 \pi \tau = \frac{1}{4} \{ e^{2\pi\tau} + 2 \cos 2\pi\sigma + e^{-2\pi\tau} \}. \quad (2.34)$$

Γ_n^- sınırının düşey kenarı üzerinde $z = \sigma + i\tau, \sigma = \pm(n+1)$ alalım ve Eş. 2.34 den:

$|\cos \pi z| = \cosh \pi \tau$ ve Eşz. 2.11 den $|\gamma/\delta| < 1$ olduğunu da hatırlarsak kolaylıkla

$\left| \cos \frac{\gamma}{\delta} \pi z \right| \leq \cosh \left| \frac{\gamma}{\delta} \right| \pi \tau \leq \cosh \pi \tau$ elde edilir. Bu yüzden $\forall n$ için Γ_n^- sınırının düşey

kenarı üzerinde Eşz. 2.33 sağlar.

Γ_n^- sınırının yatay kenarı üzerinde $z = \sigma + i\tau, \tau = \pm(n+1)$ alalım ve Eş. 2.34 den:

$$|\cos \pi z|^2 = (e^{2\pi\tau} + 2 \cos 2\pi\sigma + e^{-2\pi\tau})/4 \geq (e^{\pi\tau} - e^{-\pi\tau})^2/4,$$

$$|\cos \pi z| \geq e^{\pi|\tau|} (1 - e^{-2\pi|\tau|})/2, \quad |\cos \pi z| > e^{\pi|\tau|}/4$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu yüzden, $\tau = \pm(n+1), n \rightarrow \infty$ ve $|\gamma/\delta| < 1$ den

$$\left| \frac{\cos \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\cos \pi z} \right| \leq \frac{8e^{\pi \frac{|z|}{\delta} \tau}}{e^{\pi \tau}} = 8e^{\pi \left(1 - \frac{|z|}{\delta}\right) \tau} \rightarrow 0.$$

Sonuç olarak öyle bir n_0 doğal sayısı vardır $n \geq n_0$ ve $\tau = \pm(n+1)$ olduğunda her $z = \sigma + i\tau$ için Eşz. 2.33 sağlar. Lemma ispatlandı.

Eşz. 2.11 den $|B/A| < 1$ idi. 2.4. Lemmadan $z \in \Gamma_n^-, n \geq n_0$ için Eşz. 2.32 sağlar. Rouché teoremini uygularsak $n \geq n_0$ için Γ_n^- içinde yatan $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı $\cos^2 \pi z$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı ile aynıdır. $\cos^2 \pi z$ fonksiyonunun Γ_n^- içindeki kökleri

$$z = (m + 1/2), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, -n - 1$$

noktalarıdır ve her bir kök çift katlıdır. Bundan dolayı $n \geq n_0$ olmak üzere $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun Γ_n^- içinde $4n + 4$ tane kökü vardır. Çünkü Eş. 2.31 den $\phi_1^-(z)$ çift fonksiyondur ve $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun Γ_n^- içindeki köklerini

$$-z_{2n+1}^+, -z_{2n+1}^-, \dots, -z_1^+, -z_1^-, z_1^-, z_1^+, \dots, z_{2n+1}^-, z_{2n+1}^+ \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

ile göstereceğiz.

$\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun kökleri Eş. 2.17 ve Eş. 2.30 dan reeldir çünkü Eş. 2.3 yarı-periyodik sınır-değer probleminin özdeğerleri non-negatiftir.

2.5. Lemma

$n \geq n_0 + 1$ için, $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun

$$D_n^- = \{z \in \mathbb{C} : n < \operatorname{Re} z < n+1, |\operatorname{Im} z| < n+1\}$$

bölgesinde 2 kökü vardır. Bu yüzden, $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun z_{2n+1}^- ve z_{2n+1}^+ kökleri $(n, n+1)$ aralığında yatar;

$$n < z_{2n+1}^\pm < n+1 \quad (n \geq n_0 + 1). \quad (2.35)$$

İspat

2.4. Lemmanın ispatından açıktır ki, $n \geq n_0 + 1$ için D_n^- bölgesinin sınırları üzerinde bile Eşz. 2.32 sağlar. Sonuç olarak, Rouché teoreminden $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun köklerinin sayısı $\cos^2 \pi z$ fonksiyonunun köklerinin sayısı ile aynıdır. (D_n^- içinde $\cos^2 \pi z$ nin $z = n+1/2$ noktasında çift kökü vardır.) Lemma ispatlandı.

$k \in \mathbb{Z}$ ve $s_{2n+1}^\pm = \frac{2\pi}{\delta} z_{2n+1}^\pm$ alırsak, Eşz. 2.35 den $0 < h_{2n+1}^\pm < \pi$ ve $n \geq n_0 + 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} n < z_{2n+1}^\pm < n+1 &\Rightarrow 0 < z_{2n+1}^\pm - n < 1 \Rightarrow 0 < \pi(z_{2n+1}^\pm - n) < \pi \Rightarrow \pi(z_{2n+1}^\pm - n) = h_{2n+1}^\pm \\ \Rightarrow \pi \left(s_{2n+1}^\pm \frac{\delta}{2\pi} - n \right) &= h_{2n+1}^\pm \Rightarrow s_{2n+1}^\pm \frac{\delta}{2} - n\pi = h_{2n+1}^\pm \Rightarrow s_{2n+1}^\pm = \frac{2n\pi + 2h_{2n+1}^\pm}{\delta} \end{aligned}$$

bulunur. h_{2n+1}^\pm niceliğini analiz edersek, Eş. 2.29 nun kökleri S_{2n+1}^\pm sayılarıdır. Bu yüzden, h_{2n+1}^- ve h_{2n+1}^+

$$A \cos^2 t + B \cos^2 \frac{\gamma}{\delta}(n\pi + t) = 0$$

denkleminin kökleridir ve $0 < t < \pi$ aralığında yatarlar. $B = 2 - A$ ve $A > 2$ olduğunda bu son denklem aşağıdaki eşitliklerin birleşimidir;

$$\cos t = \left| \cos \frac{\gamma}{\delta}(n\pi + t) \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}, \quad (2.36)$$

$$\cos t = - \left| \cos \frac{\gamma}{\delta}(n\pi + t) \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}. \quad (2.37)$$

Eş. 2.36 nın her bir kökü $(0, \pi)$ de yatar ve non-negatiftir. Eş. 2.37 nin her bir kökü $(0, \pi)$ de yatar ve non-pozitiftir.

2.6. Lemma

$\forall n \geq n_0 + 1$ için Eş. 2.36 nın $(0, \pi/2]$ de bir kökü ve Eş. 2.37 nin $[\pi/2, \pi)$ de bir kökü vardır.

İspat

$$f_3(t) = \cos t - \left| \cos \frac{\gamma}{\delta}(n\pi + t) \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}$$

fonksiyonu $0 \leq t \leq \pi/2$ de süreklidir ve $f_3(0) > 0, f_3(\pi/2) < 0$ dır. O halde Eş. 2.36 nın $(0, \pi/2]$ de bir kökü vardır.

Benzer olarak Eş. 2.37 nin de $(\pi/2, \pi]$ de bir kökü olduğu gösterelim:

$$f_4(t) = \cos t + \left| \cos \frac{\gamma}{\delta}(n\pi + t) \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}$$

fonksiyonu $\pi/2 \leq t \leq \pi$ de süreklidir ve $f_4(\pi/2) > 0, f_4(\pi) < 0$ dır. Sonuç olarak Eş. 2.37 nin $(\pi/2, \pi]$ de bir kökü vardır. Lemma ispatlandı.

$(\pi/2, \pi]$ aralığında Eş. 2.37 nin köklerini $r_{2n+1}^+ + \pi/2$ ve $[0, \pi/2)$ aralığında Eş. 2.36 nin köklerini $-r_{2n+1}^- + \pi/2$ alalım. O zaman $0 \leq r_{2n+1}^\pm < \pi/2$, $h_{2n+1}^+ = r_{2n+1}^+ + \pi/2$ ve $h_{2n+1}^- = -r_{2n+1}^- + \pi/2$ olur. Böylece $0 \leq r_{2n+1}^\pm < \pi/2$, $n \geq n_0 + 1$ olduğunda

$$\mu_{2n+1}^\pm = (S_{2n+1}^\pm)^2 = \left(\frac{(2n+1)\pi \pm 2r_{2n+1}^\pm}{\delta} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sin r_{2n+1}^\pm = \left| \cos \frac{\gamma}{\delta} \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \pm r_{2n+1}^\pm \right) \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

eşitlikleri bulunur.

2.2. Teorem

Periyodik problemin özdeğerleri $\{\mu_0, \mu_{2n}^\pm\}$ ve yarı-periyodik problemin özdeğerleri $\{\mu_{2n+1}^\pm\}$ olmak üzere, $0 \leq r_n^\pm \leq \pi/2$, ($n \geq n_0 + 1$) olduğunda

$$\mu_0 = 0, \mu_n^\pm = \left((n\pi \pm 2r_n^\pm) / \delta \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

ve Eş. 2.28, Eş. 2.38 ni sağlar.

2.5. Kararsızlık aralıklarının uzunluğu

2.1. Sonuç

$\{\mu_n^-, \mu_n^+\}$ kararsızlık aralığının $I_n = \mu_n^+ - \mu_n^-$ uzunluğu için $0 \leq r_n^\pm \leq \pi/2$, ($n \geq n_0 + 1$) olduğunda aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$I_n = 4n\pi(r_n^+ + r_n^-) / \delta^2 + 4\left((r_n^+)^2 - (r_n^-)^2 \right) / \delta^2. \quad (2.40)$$

2.3. Teorem

Eğer $\alpha \neq \beta$ ise, I_{2n} ve I_{2n+1} uzunlukları $n \rightarrow \infty$ için sınırsızdır.

İspat

2.3 kısımda $\gamma = 0$ durumunda I_{2n+1} nin sınırsızlığı görüldü.

Şimdi $\gamma \neq 0$ alalım. Eş. 2.40 dan, $n \rightarrow \infty$ iken $\{r_{2n}^+\}$ ve $\{r_{2n+1}^+\}$ dizilerinin sıfıra gitmediği görülebilir.

Biz aksini kabul edelim, $n \rightarrow \infty$ iken $r_{2n}^+ \rightarrow 0$ alalım. O zaman Eş. 2.28 denklemini

$$\sin r_{2n}^+ = \left| \sin \frac{\gamma}{\delta} (n+1) \pi \cos \frac{\gamma}{\delta} r_{2n}^+ + \cos \frac{\gamma}{\delta} (n+1) \pi \sin \frac{\gamma}{\delta} r_{2n}^+ \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}$$

şeklinde yazılır, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\gamma}{\delta} (n+1) \pi = 0$ elde edilir. Ayrıca aşağıdaki eşitlikten

$$\sin \frac{\gamma}{\delta} (n+1) \pi = \sin \frac{\gamma}{\delta} n \pi \cos \frac{\gamma}{\delta} \pi + \cos \frac{\gamma}{\delta} n \pi \sin \frac{\gamma}{\delta} \pi$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\gamma}{\delta} n \pi = 0$ elde edilir. Bir çelişki elde ettik. Çünkü $\forall n$ için

$$\cos^2 \frac{\gamma}{\delta} n \pi + \sin^2 \frac{\gamma}{\delta} n \pi = 1 \text{ dir.}$$

Benzer olarak, Eş. 2.38 de $n \rightarrow \infty$ iken $\{r_{2n+1}^+\}$ dizisinin sıfıra gitmediği görülebilir.

Bunun için $n \rightarrow \infty$ iken $r_{2n+1}^+ \rightarrow 0$ alalım. O zaman Eş. 2.38

$$\sin r_{2n+1}^+ = \left| \cos \frac{\gamma}{\delta} (n+1/2) \pi \cos \frac{\gamma}{\delta} r_{2n+1}^+ - \sin \frac{\gamma}{\delta} (n+1/2) \pi \sin \frac{\gamma}{\delta} r_{2n+1}^+ \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}$$

şeklinde yazılır, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\gamma}{\delta} (n+1/2) \pi = 0$ elde edilir. Ayrıca aşağıdaki eşitlikten

$$\cos \frac{\gamma}{\delta} (n+1/2) \pi = \cos \frac{\gamma}{\delta} (n-1/2) \pi \cos \frac{\gamma}{\delta} \pi - \sin \frac{\gamma}{\delta} (n-1/2) \pi \sin \frac{\gamma}{\delta} \pi$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\gamma}{\delta} (n-1/2) \pi = 0$ elde edilir. Bir çelişki elde ettik. Çünkü $\forall n$ için

$$\cos^2 \frac{\gamma}{\delta} (n-1/2) \pi + \sin^2 \frac{\gamma}{\delta} (n-1/2) \pi = 1 \text{ dir. Teorem ispatlandı.}$$

2.6. Varlık Şartları

$\frac{\gamma}{\delta}$ bir rasyonel sayı olsun; $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{p}{q}$, p ve q aralarında asal tamsayılar ve

$q > 0, |\gamma/\delta| < 1, 0 \leq |p| < q/2$ olarak kabul edelim.

2.4. Teorem

i) Eğer $p = 0$ ise (yani, eğer $\psi = 0$), o zaman

$$n = 1, 2, 3, \dots \text{ için } \mu_{2n}^- = \mu_{2n}^+.$$

ii) Eğer $p \neq 0$ ise, o zaman

$$k = 1, 2, 3, \dots \text{ için } \mu_{2kq}^- = \mu_{2kq}^+. \quad (2.41)$$

iii) Eğer, p ve q her ikisi tek ise, o zaman Eş. 2.41 e ek olarak

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ için } \mu_{(2k+1)q}^- = \mu_{(2k+1)q}^+.$$

İspat

(i) durumu 2.3 bölüm 1.kısımda ispatlandı. Eş. 2.28 den hatta görülür ki; eğer $\psi = 0$ ise $\sin r_{2n}^+ = 0$ ve böylece $n = 1, 2, 3, \dots$ için $r_{2n}^- = r_{2n}^+ = 0$.

(ii) durumunu ispatlamak için Eş. 2.28 de $k = 1, 2, 3, \dots$ için $n = kq$ yazalım.

O zaman

$$\sin r_{2kq}^{\pm} = \left| \sin \frac{p}{q} r_{2kq}^{\pm} \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}$$

Böylece $r_{2kq}^- = r_{2kq}^+ = 0$ ve Eş. 2.39 den Eş. 2.41 görülür.

Şimdi (iii) durumunu ispatlayalım. $q = 2m + 1$ ve $n = kq + m$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) alalım.

Eş. 2.38 den:

$$\sin r_{(2k+1)q}^{\pm} = \left| \cos \left(p(2k+1) \frac{\pi}{2} \pm \frac{p}{q} r_{(2k+1)q}^{\pm} \right) \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}$$

Böylece (p tek verilmişti)

$$\sin r_{(2k+1)q}^{\pm} = \left| \sin \frac{p}{q} r_{(2k+1)q}^{\pm} \right| \sqrt{\frac{A-2}{A}}$$

ve böylece $r_{(2k+1)q}^- = r_{(2k+1)q}^+ = 0$. Teorem ispatlandı.

2.5. Teorem

Eğer periyodik problemin en az bir çift kökü varsa, o zaman γ/δ bir rasyonel sayıdır. Eğer yarı-periyodik problemin en az bir çift kökü varsa, o zaman γ/δ iki tek tamsayının bir oranıdır.

İspat

Periyodik problemin en az bir çift kökü olsun. O zaman $n \in \{1, 2, \dots\}$ için $r_{2n}^- = r_{2n}^+ = 0$ buluruz ve Eş. 2.28 den $\sin n\pi\gamma/\delta = 0$. Bundan dolayı bazı m tamsayıları için $n\pi\gamma/\delta = m\pi$ dir. Bu yüzden, $\gamma/\delta = m/n$ rasyonel sayıdır.

Şimdi yarı-periyodik problemin en az bir çift kökü olduğunu farz edelim. O zaman bazı $n \in \{1, 2, \dots\}$ için $r_{2n+1}^- = r_{2n+1}^+ = 0$ buluruz ve Eş. 2.38 den $\cos \frac{\gamma}{\delta}(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$.

Bundan dolayı (bazı m tamsayıları için) $\frac{\gamma}{\delta}(2n+1)\frac{\pi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ dir. O zaman

$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{2m+1}{2n+1}$ iki tek tamsayının oranıdır. Teorem ispatlandı.

2.4. Teorem ve 2.5. Teorem den aşağıdaki sonuçlar bulunur:

2.2. Sonuç

Eş. 2.8 biçimindeki $\rho(x)$ durumunda, eğer periyodik ya da yarı-periyodik problemin en az bir çift kökü varsa, o zaman bu problemin sonsuz birçok çift özdeğeri vardır.

3. PARÇALI SABİT VE ALTERNE KATSAYILI BİR HİLL DENKLEMİNİN KARARSIZLIK ARALIKLARI ÜZERİNE

3.1. Giriş

λ bir kompleks parametre ve $\rho(x)$,

$$\rho(x) = \rho(x+w) \quad (-\infty < x < \infty)$$

şeklinde $w > 0$ periyotlu bir periyodik fonksiyon olduğunda

$$-y'' = \lambda \rho(x)y \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3.1)$$

Hill denklemini göz önüne alalım.

Ayrıca burada $\rho(x)$ alterne fonksiyon ve $\int_0^{\infty} \rho(x) dx < \infty$ olsun.

Eş. 3.1 ile ilişkilendirilmiş periyodik sınır-değer problemini

$$-y'' = \lambda \rho(x)y \quad (0 \leq x \leq w) \quad , \quad (3.2)$$

$$y(0) = y(w) \quad y'(0) = y'(w)$$

ve yarı-periyodik sınır-değer problemini

$$-y'' = \lambda \rho(x)y \quad (0 \leq x \leq w) \quad , \quad (3.3)$$

$$y(0) = -y(w) \quad y'(0) = -y'(w)$$

biçiminde tanımlayalım.

Eş. 3.2 ya da Eş. 3.3 problemlerinin $y(x, \lambda)$ adi olmayan çözümleri λ kompleks parametresinin değerleridir ve *özdeğerleri* diye adlandırılır.

Eş. 3.1 in çözümlerini $\theta(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$ olarak alalım ve bu çözümler aşağıdaki başlangıç şartlarını sağlasın:

$$\theta(0, \lambda) = 1, \quad \theta'(0, \lambda) = 0, \quad \varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1. \quad (3.4)$$

Eş. 3.1 in Hill diskriminantı

$$F(\lambda) = \theta(w, \lambda) + \varphi'(w, \lambda) \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur [1]. Eş. 3.2 periyodik probleminin özdeğerleri $F(\lambda) - 2 = 0$ (periyodik problemin karakteristik denklemi) ile çakışır. Eş. 3.3 yarı-periyodik probleminin özdeğerleri $F(\lambda) + 2 = 0$ (yarı-periyodik problemin karakteristik denklemi) ile çakışır.

$\rho(x)$ alterne fonksiyonu periyodik seçildiğinde Eş. 3.2 ve Eş. 3.3 problemlerinin her biri yığılma noktası $+\infty$ ve $-\infty$ olan sayılabilir sonsuz reel özdeğerlere sahiptirler. Eş. 3.2 periyodik probleminin özdeğerleri μ_{2k}^{\pm} ($k \in Z$) ve Eş. 3.3 yarı-periyodik probleminin özdeğerleri μ_{2k+1}^{\pm} ($k \in Z$) olmak üzere bu özdeğerler birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki gibi sıralanırlar [1, 2, 4].

$$\dots < \mu_{-2}^{-} \leq \mu_{-2}^{+} < \mu_{-1}^{-} \leq \mu_{-1}^{+} < \mu_0^{-} \leq \mu_0^{+} < \mu_1^{-} \leq \mu_1^{+} < \mu_2^{-} \leq \mu_2^{+} < \dots$$

Eğer λ , (μ_n^{-}, μ_n^{+}) , ($n \in Z$) açık aralıklarının herhangi birinde ise, o zaman Eş. 3.1 in adi olmayan tüm çözümleri $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırsızdır. Bu aralıklara, Eş. 3.1 in *kararsızlık aralıkları* denir [1].

Eğer λ , (μ_{n-1}^+, μ_n^-) , $(n \in \mathbb{Z})$ açık aralıklarının herhangi birinde ise, o zaman Eş. 3.1 in tüm çözümleri $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırlıdır. Bu aralıklara, Eş. 3.1 in *kararlılık aralıkları* denir [1].

$n \rightarrow \infty$ iken (μ_n^-, μ_n^+) kararsızlık aralıklarının uzunluğu

$$I_n = \mu_n^+ - \mu_n^- \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır [1].

Bu çalışmada a , $0 < a < w$ aralığında sabit bir sayı olmak üzere Eş. 3.1 in ρ katsayısını

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq a, \\ -1, & a < x \leq w, \end{cases} \quad (3.7)$$

parçalı sabit fonksiyon olarak kabul edelim. Ayrıca $\rho(x)$, $-\infty < x < \infty$ ekseninde $w > 0$ periyotlu bir periyodik fonksiyon olsun.

3.2. Hill Diskriminanti

Eş. 3.1 de $\lambda = s^2$ ve $\rho(x)$ i Eş. 3.7 biçiminde alalım. Eş. 3.1 in Eş. 3.4 başlangıç şartlarını sağlayan çözümlerini aşağıdaki gibi elde ederiz;

i) $\rho(x) = 1$ ve $0 \leq x \leq a$ olsun. O zaman, Eş. 3.1 in öz denklemi $m^2 = -s^2$ $\Rightarrow m = \pm si$ dir ve böylece genel çözüm

$$Y(x) = C \cos sx + D \sin sx$$

olarak bulunur. Başlangıç şartlarını da hesaba katarsak;

$$\theta(0, \lambda) = 1, \theta'(0, \lambda) = 0$$

$$Y(0) = C \Rightarrow 1 = C, \frac{dY}{dx}(0) = Ds \Rightarrow 0 = Ds; \quad C = 1, D = 0 \Rightarrow \theta(x, \lambda) = \cos sx$$

ve

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \varphi'(0, \lambda) = 1$$

$$Y(0) = C \Rightarrow 0 = C, \frac{dY}{dx}(0) = Ds \Rightarrow 1 = Ds; \quad C = 0, D = \frac{1}{s} \Rightarrow \varphi(x, \lambda) = \frac{1}{s} \sin sx$$

çözümleri bulunur. O halde Eş. 3.1 in Eş. 3.4 şartlarını sağlayan çözümleri;

$$Y(x) = \cos sx + \frac{1}{s} \sin sx$$

olarak yazılır, sınır şartlarını çözümlerle beraber değerlendirirsek; $\cos sa = 1$ ve $\sin sa = 0$ elde edilir.

ii) $\rho(x) = -1$ ve $a < x \leq w$ olsun. O zaman, Eş. 3.1 in öz denklemi $m^2 = s^2$
 $\Rightarrow m = \pm s$ dir ve böylece genel çözüm

$$Y(x) = Ae^{sx} + Be^{-sx}$$

olarak bulunur. Başlangıç şartlarını da hesaba katarsak;

$$\theta(0, \lambda) = 1, \theta'(0, \lambda) = 0$$

$$Y(0) = A + B \Rightarrow 1 = A + B, \frac{dY}{dx}(0) = As - Bs \Rightarrow 0 = As - Bs, \quad A = B = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta(x, \lambda) = \frac{(e^{sx} + e^{-sx})}{2} = \cosh sx$$

ve

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \varphi'(0, \lambda) = 1$$

$$Y(0) = A + B \Rightarrow 0 = A + B, \frac{dY}{dx}(0) = As - Bs \Rightarrow 1 = As - Bs, A = \frac{1}{2s}, B = -\frac{1}{2s}$$

$$\Rightarrow \varphi(x, \lambda) = (e^{sx} - e^{-sx}) / 2s = \sinh sx / s$$

çözümleri bulunur. $\cos sa = 1$ ve $\sin sa = 0$ olduğunu hatırlarsak bu çözümleri;

$$\theta(x, \lambda) = \cosh s(x-a) = \cos sa \cosh s(x-a) - \sin sa \sinh s(x-a),$$

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\sinh s(x-a)}{s} = \frac{\sin sa}{s} \cosh s(x-a) + \cos sa \frac{\sinh s(x-a)}{s}$$

biçiminde yazarız.

O halde $Y(x)$ çözümünü 2 parçalı fonksiyonun birleşimi şeklinde aşağıdaki gibi belirtiriz:

$$\theta(x, \lambda) = \begin{cases} \cos sx, & 0 \leq x \leq a, \\ \cos sa \cosh s(x-a) - \sin sa \sinh s(x-a), & a < x \leq w. \end{cases}$$

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin sx}{s}, & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{\sin sa}{s} \cosh s(x-a) + \cos sa \frac{\sinh s(x-a)}{s}, & a < x \leq w. \end{cases}$$

O zaman Hill diskriminantının kapalı-olmayan formu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \theta(w, \lambda) + \varphi'(w, \lambda) \\ &= \cos sa \cosh s(w-a) - \sin sa \sinh s(w-a) + \\ &\quad \sin sa \sinh s(w-a) + \cos sa \cosh s(w-a) \\ &= 2 \cos sa \cosh s(w-a). \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.3. Genel durumlar

Şimdi $F(\lambda)-2$ ve $F(\lambda)+2$ fonksiyonlarının köklerini araştıralım.

Eş. 3.8 de $\lambda = s^2$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
 \phi^+(\lambda) &= F(\lambda) - 2 \\
 &= 2 \cos sa \cosh s(w-a) - 2 \\
 &= 2(1 - 2 \sin^2 sa/2)(2 \sinh^2 s(w-a)/2 + 1) - 2 \\
 &= -8 \sin^2 sa/2 \sinh^2 s(w-a)/2 - 4 \sin^2 sa/2 + 4 \sinh^2 s(w-a)/2
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde ederiz.

$sa/2 = \pi z$ ve $(w-a)/a = \alpha$ alırsak,

$$s = 2\pi z/a \text{ ve } \lambda = s^2 = (2\pi/a)^2 z^2 \tag{3.10}$$

aldığımızda

$$\phi^+(\lambda) = \phi^+(4\pi^2 z^2/a^2) = \phi_1^+(z) \tag{3.11}$$

olduğunda

$$\phi_1^+(z) = -8 \sin^2 \pi z \sinh^2 \alpha \pi z - 4 \sin^2 \pi z + 4 \sinh^2 \alpha \pi z \tag{3.12}$$

elde ederiz. Dahası, herhangi bir m tamsayı için dikdörtgensel bölge sınırı Γ_m^+ iken bölgenin sınırını

$$R_m^+ = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq m + 1/2, |\operatorname{Im} z| \leq (m + 1/2)/\alpha\}$$

olarak alalım. $\Gamma = \Gamma_m^+$, $f(z) = -8 \sin^2 \pi z \sinh^2 \alpha \pi z$, $g(z) = -4 \sin^2 \pi z + 4 \sinh^2 \alpha \pi z$ seçip, Rouché teoremini uygularsak $\phi_1^+(z) = f(z) + g(z)$ ve $|g(z)| < |f(z)|$ eşitsizliği de

$$\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1 \Rightarrow \left| \frac{-4 \sin^2 \pi z + 4 \sinh^2 \alpha \pi z}{-8 \sin^2 \pi z \sinh^2 \alpha \pi z} \right| < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{\sinh^2 \alpha \pi z} \right| < 1 \quad (3.13)$$

e denktir.

3.1. Lemma

Bir m_0 pozitif tam sayı vardır öyle ki $\forall z \in \Gamma_m^+$ ve $\forall m \geq m_0$ için Eşz. 3.13 geçerlidir.

İspat

Herhangi bir $z = \sigma + i\tau$ ($\sigma, \tau \in \mathfrak{R}$) için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$|\sinh \alpha \pi z|^2 = \sinh^2 \alpha \pi \sigma + \sin^2 \alpha \pi \tau = \frac{1}{4} \{ e^{2\alpha \pi \sigma} - 2 \cos 2\alpha \pi \tau + e^{-2\alpha \pi \sigma} \}. \quad (3.14)$$

Γ_m^+ sınırının düşey kenarı üzerinde $z = \sigma + i\tau$, $\sigma = \pm(m + 1/2)$ alalım. Eş. 2.22 ve Eş.

3.14 den

$$|\sin \pi z| = \cosh \pi \tau \geq 1, \quad |\sinh \alpha \pi z| \geq \sinh \alpha \pi (m + 1/2)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu yüzden,

$$\frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{\sinh^2 \alpha \pi z} \right| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sinh^2 \alpha \pi (m + 1/2)} \right) < 1$$

bulunur. Böylece, Eşz. 3.13 m_1 yeterince büyük bir pozitif tamsayı olduğunda $\forall m \geq m_1$ için Γ_m^+ sınırının düşey kenarı üzerinde geçerli olur.

Γ_m^+ sınırının yatay kenarı üzerinde düşünelim. $z = \sigma + i\tau$ ve Eş. 2.22 den:

$$|\sin^2 \pi z| \geq \frac{1}{4} (e^{\pi\tau} - e^{-\pi\tau})^2 = \frac{1}{4} (e^{\pi|\tau|} - e^{-\pi|\tau|})^2 \Rightarrow |\sin \pi z| \geq \frac{1}{2} e^{\pi|\tau|} (1 - e^{-2\pi|\tau|})$$

eşitsizlikleri elde edilir. $\tau = \pm(1/\alpha)(m+1/2)$ alır ve m_2 yeterince büyük bir pozitif tamsayı seçersek

$$|\sin \pi z| > \frac{1}{2} e^{\pi|\tau|}, \forall m \geq m_2$$

olur. Dahası, $z = \sigma \pm (1/\alpha)(m+1/2)$ için Eş. 3.14 den

$$|\sinh \alpha\pi z| = \cosh \alpha\pi\sigma \geq 1$$

bulunur. Bu yüzden, Γ_m^+ sınırının yatay kenarı üzerinde $\forall m \geq m_2$ için

$$\frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{\sinh^2 \alpha\pi z} \right| \leq \frac{1}{2} (4e^{-2\pi|\tau|} + 1) < 1.$$

Bu yüzden, eğer $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$ alırsak, o zaman $\forall z \in \Gamma_m^+$ ve $\forall m \geq m_0$ için Eşz. 3.13 ü sağlar. Lemma ispatlandı.

3.1. Lemma kullanır ve Rouché teoremini uygularsak $m \geq m_0$ için Γ_m^+ içinde yatan

$\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı $\sin^2 \pi z \sinh^2 \alpha\pi z$ fonksiyonu ile aynıdır.

$\sin^2 \pi z \sinh^2 \alpha\pi z$ fonksiyonunun Γ_m^+ içindeki kökleri

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m, \pm i \frac{1}{\alpha}, \pm i \frac{2}{\alpha}, \dots, \pm i \frac{m}{\alpha}$$

noktalarıdır ve her bir kök çift katlıdır. (i =imajiner birim).

Sıfır kökü 4 ve her bir sıfır olmayan kök 2 katlıdır. Buradan, $\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun Γ_m^+ içinde $m \geq m_0$ olduğunda $8m+4$ tane sıfıra sahip olması gereklidir. Çünkü Eş. 3.12 den $\phi_1^+(z)$ çift fonksiyondur ve $z=0$ çift köktür, $\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun Γ_m^+ içindeki köklerini

$$\pm z_{-2m}^-, \pm z_{-2m}^+, \dots, \pm z_{-2}^-, \pm z_{-2}^+, \pm z_0^-, \pm z_0^+, \pm z_2^-, \pm z_2^+, \dots, \pm z_{2m}^-, \pm z_{2m}^+$$

ile göstereceğiz. Eş. 3.2 periyodik probleminin özdeğerleri reeldir, Eş. 3.10 ve Eş. 3.11 den, $\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının her biri reel ya da sıfır imajinerdir.

3.2. Lemma

$m \geq m_0 + 1$ için, $\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun

$$D_m^+ = \left\{ z \in C : m - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < m + \frac{1}{2}, \quad |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{\alpha} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right\}$$

bölgesinde 2 sıfıra sahiptir ve

$$K_m^+ = \left\{ z \in C : |\operatorname{Re} z| < m + \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\alpha} \left(m - \frac{1}{2} \right) < \operatorname{Im} z < \frac{1}{\alpha} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right\}$$

bölgesinde 2 sıfıra sahiptir. Bu yüzden $m \geq m_0 + 1$ için,

$$m - \frac{1}{2} < z_{2m}^{\pm} < m + \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad z_{-2m}^{\pm} = iw_{-2m}^{\pm}, \quad \frac{1}{\alpha} \left(m - \frac{1}{2} \right) < w_{-2m}^{\pm} < \frac{1}{\alpha} \left(m + \frac{1}{2} \right). \quad (3.15)$$

İspat

3.1. Lemmanın ispatından açıktır ki, $m \geq m_0 + 1$ için Eşz. 3.13 D_m^+ ve K_m^+ bölgelerinin sınırları üzerinde bile geçerlidir. Sonuç olarak, Rouché teoreminden $\phi_1^+(z)$ fonksiyonunun D_m^+ ve K_m^+ deki köklerinin sayısı $f(z) = -8 \sin^2 \pi z \sinh^2 \alpha \pi z$ ile aynıdır. D_m^+ ve K_m^+ de 2 tane sıfır kökü vardır. ($f(z)$ fonksiyonu D_m^+ içinde $z = m$ noktasında 2 sıfır noktası ve K_m^+ içinde $z = i(m/\alpha)$ noktasında 2 sıfır noktası vardır.) Lemma ispatlandı.

$k \in \mathbb{Z}$ ve $s_{2k}^{\pm} = \frac{2\pi}{a} z_{2k}^{\pm}$ alalım. Eşz. 3.15 den $-\frac{\pi}{2} < h_{2k}^{\pm} < \frac{\pi}{2}$ ($|k| \geq m_0 + 1$) olduğunda

$$\begin{aligned} k - \frac{1}{2} < z_{2k}^{\pm} < k + \frac{1}{2} &\Rightarrow -\frac{1}{2} < z_{2k}^{\pm} - k < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \pi(z_{2k}^{\pm} - k) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi(z_{2k}^{\pm} - k) = h_{2k}^{\pm} \\ \Rightarrow \pi \left(s_{2k}^{\pm} \frac{a}{2\pi} - k \right) = h_{2k}^{\pm} &\Rightarrow s_{2k}^{\pm} \frac{a}{2} - k\pi = h_{2k}^{\pm} \Rightarrow s_{2k}^{\pm} = \frac{2k\pi + 2h_{2k}^{\pm}}{a}, \quad (k \geq m_0 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \left(-k - \frac{1}{2} \right) < w_{-2k}^{\pm} < \frac{1}{\alpha} \left(-k + \frac{1}{2} \right) &\Rightarrow -\frac{1}{2} < \alpha w_{-2k}^{\pm} + k < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \pi(\alpha w_{-2k}^{\pm} + k) < \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \pi(\alpha w_{-2k}^{\pm} + k) = h_{2k}^{\pm} &\Rightarrow \pi \left(\alpha \frac{z_{-2k}^{\pm}}{i} + k \right) = h_{2k}^{\pm} \Rightarrow \pi \left(\frac{(w-a) a s_{2k}^{\pm}}{a} \frac{as_{2k}^{\pm}}{2\pi i} + k \right) = h_{2k}^{\pm} \\ \Rightarrow \frac{(w-a) s_{2k}^{\pm}}{2i} + \pi k = h_{2k}^{\pm} &\Rightarrow s_{2k}^{\pm} = i \frac{-2k\pi + 2h_{2k}^{\pm}}{w-a}, \quad (k \leq -(m_0 + 1)) \end{aligned}$$

bulunur. h_{2k}^{\pm} niceliğini analiz edersek, Eş. 3.9 un kökleri s_{2k}^{\pm} sayılarıdır. Bu yüzden h_{2k}^- ve h_{2k}^+ , $k \geq m_0 + 1$ için

$$2 \sin^2 t \sinh^2 \alpha(k\pi + t) + \sin^2 t - \sinh^2 \alpha(k\pi + t) = 0 \quad (3.16)$$

denkleminin ve $k \leq -(m_0 + 1)$ için

$$2 \sin^2 t \sinh^2 \left(\frac{k\pi - t}{\alpha} \right) + \sin^2 t - \sinh^2 \left(\frac{k\pi - t}{\alpha} \right) = 0 \quad (3.17)$$

denkleminin kökleridir.

Eş. 3.16 aşağıdaki eşitliklerin birleşimidir:

$$\sin t = \sqrt{\frac{\sinh^2 \alpha (k\pi + t)}{1 + 2 \sinh^2 \alpha (k\pi + t)}}, \quad (3.18)$$

$$\sin t = -\sqrt{\frac{\sinh^2 \alpha (k\pi + t)}{1 + 2 \sinh^2 \alpha (k\pi + t)}}. \quad (3.19)$$

Eş. 3.17 aşağıdaki eşitliklerin birleşimidir:

$$\sin t = \sqrt{\frac{\sinh^2 \left(\frac{k\pi - t}{\alpha} \right)}{1 + 2 \sinh^2 \left(\frac{k\pi - t}{\alpha} \right)}}, \quad (3.20)$$

$$\sin t = -\sqrt{\frac{\sinh^2 \left(\frac{k\pi - t}{\alpha} \right)}{1 + 2 \sinh^2 \left(\frac{k\pi - t}{\alpha} \right)}}. \quad (3.21)$$

Açıkça, Eş. 3.18 ve Eş. 3.20 nin her birinin kökleri $(-\pi/2, \pi/2)$ yatmaktadır ve non-negatiftir ve Eş. 3.19 ve Eş. 3.21 in her birinin kökleri $(-\pi/2, \pi/2)$ yatmaktadır ve non-pozitiftir.

3.3. Lemma

$|k| \geq m_0 + 1$ için Eş. 3.18 ve Eş. 3.20 nin her birinin $[0, \pi/2)$ de bir kökü ve Eş. 3.19 ve Eş. 3.21 in her birinin $(-\pi/2, 0]$ de bir kökü vardır.

İspat

$k \geq m_0 + 1$ için

$$f_1(t) = \sin t - \sqrt{\frac{\sinh^2 \alpha(k\pi + t)}{1 + 2 \sinh^2 \alpha(k\pi + t)}}$$

fonksiyonu $0 \leq t \leq \pi/2$ de süreklidir ve $f_1(\pi/2) > 0, f_1(0) < 0$ dir. Bu yüzden,

$f_1(t)$ fonksiyonunun $[0, \pi/2)$ de en az bir kökü vardır.

Benzer olarak Eş. 3.19 un $(-\pi/2, 0]$ da bir kökü olduğunu gösterelim:

$$f_2(t) = \sin t + \sqrt{\frac{\sinh^2 \alpha(k\pi + t)}{1 + 2 \sinh^2 \alpha(k\pi + t)}}$$

fonksiyonu $-\pi/2 \leq t \leq 0$ da süreklidir ve $f_2(0) > 0, f_2(-\pi/2) < 0$ dir. Sonuç olarak

Eş. 3.19 un $(-\pi/2, 0]$ da bir kökü vardır.

$k \leq -(m_0 + 1)$ için

$$f_3(t) = \sin t - \sqrt{\frac{\sinh^2((k\pi - t)/\alpha)}{1 + 2 \sinh^2((k\pi - t)/\alpha)}}$$

fonksiyonu $0 \leq t \leq \pi/2$ de süreklidir ve $f_3(\pi/2) > 0, f_3(0) < 0$ dir. $f_3(t)$

fonksiyonunun $[0, \pi/2)$ de bir kökü vardır.

Benzer olarak Eş. 3.21 de $(-\pi/2, 0]$ de bir kökü olduğunu gösterelim:

$$f_4(t) = \sin t + \sqrt{\frac{\sinh^2((k\pi - t)/\alpha)}{1 + 2 \sinh^2((k\pi - t)/\alpha)}}$$

fonksiyonu $-\pi/2 \leq t \leq 0$ da süreklidir ve $f_4(0) > 0, f_4(-\pi/2) < 0$ dır. Sonuç olarak Eş. 3.21 in $(-\pi/2, 0]$ da bir kökü vardır. Lemma ispatlandı.

$k \geq m_0 + 1$ için Eş. 3.18 in bir kökünü ve $k \leq -(m_0 + 1)$ için Eş. 3.20 nin bir kökünü $r_{2k}^+ \in [0, \pi/2)$ alalım. Hatta, $k \geq m_0 + 1$ için Eş. 3.19 un bir kökünü ve $k \leq -(m_0 + 1)$ için Eş. 3.21 in bir kökünü $-r_{2k}^- \in (-\pi/2, 0]$ alalım. O zaman, bütün $|k| \geq m_0 + 1$ için $0 \leq r_{2k}^+ < \pi/2$ ve $k \geq m_0 + 1$ için $h_{2k}^+ = \pm r_{2k}^+, k \leq -(m_0 + 1)$ için $h_{2k}^+ = \mp r_{2k}^+$ dır.

$$\mu_{2k}^+ = (S_{2k}^+)^2 = \left(\frac{2k\pi \pm 2r_{2k}^+}{a} \right)^2, \quad k \geq m_0 + 1$$

$$\mu_{2k}^+ = (S_{2k}^+)^2 = -\left(\frac{2k\pi \pm 2r_{2k}^+}{w-a} \right)^2, \quad k \leq -(m_0 + 1)$$

$$\sin r_{2k}^+ = \sqrt{\frac{\sinh^2 \alpha (k\pi \pm r_{2k}^+)}{1 + 2 \sinh^2 \alpha (k\pi \pm r_{2k}^+)}} , \quad k \geq m_0 + 1 \quad (3.22)$$

$$\sin r_{2k}^+ = \sqrt{\frac{\sinh^2 (k\pi \mp r_{2k}^+) / \alpha}{1 + 2 \sinh^2 (k\pi \mp r_{2k}^+) / \alpha}} , \quad k \leq -(m_0 + 1) \quad (3.23)$$

eşitlikleri bulunur.

Benzer araştırmaları yarı-periyodik problemde yapalım, fonksiyonun kökleri $\lambda = s^2$ olduğunda;

$$\begin{aligned} \phi^-(\lambda) &= F(\lambda) + 2 \\ &= 2 \cos sa \cosh s(w-a) + 2 \\ &= 2(2 \cos^2 sa/2 - 1)(2 \cosh^2 s(w-a)/2 - 1) + 2 \\ &= 8 \cos^2 sa/2 \cosh^2 s(w-a)/2 - 4 \cos^2 sa/2 - 4 \cosh^2 s(w-a)/2 + 4 \end{aligned} \quad (3.24)$$

elde ederiz. Eş. 3.10 değişken değiştirmesini kullanırsak

$$\phi^-(\lambda) = \phi^-(4\pi^2 z^2 / a^2) = \phi_1^-(z) \quad (3.25)$$

olur ve

$$\phi_1^-(z) = 8 \cos^2 \pi z \cosh^2 \alpha \pi z - 4 \cos^2 \pi z - 4 \cosh^2 \alpha \pi z + 4 \quad (3.26)$$

elde ederiz. Dahası, herhangi bir m tamsayı için dikdörtgensel bölge sınırı Γ_m^- iken bölgenin sınırı;

$$R_m^- = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq m+1, |\operatorname{Im} z| \leq (m+1)/\alpha\}$$

olarak alalım. $\Gamma = \Gamma_m^-$, $\phi_1^-(z) = f(z) + g(z)$, $f(z) = 8 \cos^2 \pi z \cosh^2 \alpha \pi z$, $g(z) = -4 \cos^2 \pi z - 4 \cosh^2 \alpha \pi z + 4$ olarak yazalım. Rouché teoreminden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$|g(z)| < |f(z)| \Rightarrow \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\cos^2 \pi z} + \frac{1}{\cosh^2 \alpha \pi z} - \frac{1}{\cos^2 \pi z \cosh^2 \alpha \pi z} \right| < 1. \quad (3.27)$$

3.4. Lemma

m_0 bir pozitif tam sayı olmak üzere Eşz. 3.27 $\forall z \in \Gamma_m^-$ ve $\forall m \geq m_0$ için geçerlidir.

İspat

Herhangi bir $z = \sigma + i\tau$ ($\sigma, \tau \in \mathfrak{R}$) için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$|\cos \pi z|^2 = \cos^2 \sigma \pi + \sinh^2 \pi \tau = \frac{1}{4} \{e^{2\pi\tau} + 2 \cos 2\sigma \pi + e^{-2\pi\tau}\}, \quad (3.28)$$

$$|\cosh \alpha \pi z|^2 = \sinh^2 \alpha \pi \sigma + \cos^2 \alpha \pi \tau = \frac{1}{4} \{ e^{2\alpha \pi \sigma} + 2 \cos 2\alpha \pi \tau + e^{-2\alpha \pi \sigma} \}. \quad (3.29)$$

Γ_m^- sınırının düşey kenarı üzerinde $z = \sigma + i\tau$, $\sigma = \pm(m+1)$ olsun. Eş. 3.28 ve Eş. 3.29 dan

$$|\cos \pi z| = \cosh \pi \tau \geq 1, \quad |\cosh \alpha \pi z| \geq \sinh \alpha \pi (m+1)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\cos^2 \pi z} + \frac{1}{\cosh^2 \alpha \pi z} - \frac{1}{\cos^2 \pi z \cosh^2 \alpha \pi z} \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sinh^2 \alpha \pi (m+1)} - \frac{1}{\sinh^2 \alpha \pi (m+1)} \right) < 1 \end{aligned}$$

ve böylece, Eşz. 3.27 m_1 yeterince büyük bir pozitif tamsayı olduğunda $\forall m \geq m_1$ için Γ_m^- sınırının düşey kenarı üzerinde geçerli olur.

Γ_m^- sınırının yatay kenarı üzerinde düşünelim. $z = \sigma + i\tau$ ve Eş. 3.28 den

$$|\cos^2 \pi z| \geq \frac{1}{4} (e^{\pi \tau} - e^{-\pi \tau})^2 = \frac{1}{4} (e^{\pi |\tau|} - e^{-\pi |\tau|})^2 \Rightarrow |\cos \pi z| \geq \frac{1}{2} e^{\pi |\tau|} (1 - e^{-2\pi |\tau|})$$

eşitsizlikleri bulunur. $\tau = \pm(1/\alpha)(m+1)$ alır ve m_2 yeterince büyük bir pozitif tamsayı seçersek

$$|\cos \pi z| > \frac{1}{2} e^{\pi |\tau|}, \quad \forall m \geq m_2$$

olur. Dahası, $z = \sigma \pm (1/\alpha)(m+1)$ için Eş. 3.29 dan

$$|\cosh \alpha \pi z| = \cosh \alpha \pi \sigma \geq 1$$

bulunur. Bu yüzden, Γ_m^- sınırının yatay kenarı üzerinde $\forall m \geq m_2$ için

$$\frac{1}{2} \left| \frac{1}{\cos^2 \pi z} + \frac{1}{\cosh^2 \alpha \pi z} - \frac{1}{\cos^2 \pi z \cosh^2 \alpha \pi z} \right| \leq \frac{1}{2} (4e^{-2\pi|\tau|} + 1 - 4e^{-2\pi|\tau|}) < 1.$$

Sonuç olarak, eğer $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$ alırsak, o zaman $\forall z \in \Gamma_m^-$ ve $\forall m \geq m_0$ için Eş. 3.27 sağlar. Lemma ispatlandı.

3.4. Lemmayı kullanır ve Rouché teoremini uygularsak $m \geq m_0$ için Γ_m^- içinde yatan $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı $\cos^2 \pi z \cosh^2 \alpha \pi z$ fonksiyonu ile aynıdır. $\cos^2 \pi z \cosh^2 \alpha \pi z$ fonksiyonunun Γ_m^- içindeki kökleri

$$z = \left(k + \frac{1}{2}\right) \text{ ve } z = \frac{i}{\alpha} \left(k + \frac{1}{2}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m, -m-1$$

noktalarıdır ve her bir kök çift katlıdır. Bundan dolayı $n \geq n_0$ olmak üzere $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun Γ_m^- içinde $8n+8$ tane kökü vardır. Çünkü Eş. 3.26 dan $\phi_1^-(z)$ çift fonksiyondur ve $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun Γ_m^- içindeki köklerini

$$\pm z_{-(2m+1)}^-, \pm z_{-(2m+1)}^+, \dots, \pm z_{-1}^-, \pm z_{-1}^+, \pm z_1^-, \pm z_1^+, \dots, \pm z_{-(2m+1)}^-, \pm z_{-(2m+1)}^+$$

ile göstereceğiz.

Eş. 3.3 yarı-periyodik probleminin özdeğerleri reeldir, Eş. 3.10 ve Eş. 3.25 den, $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının her biri reel ya da sıfır imajinerdir.

3.5. Lemma

$m \geq m_0 + 1$ için, $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun

$$D_m^- = \{z \in \mathbb{C}; m < \operatorname{Re} z < m+1, |\operatorname{Im} z| < (m+1)/\alpha\}$$

bölgesinde 2 sifira sahiptir ve

$$K_m^- = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Re} z| < m+1, m/\alpha < \operatorname{Im} z < (m+1)/\alpha\}$$

bölgesinde 2 sifira sahiptir. Bu yüzden $m \geq m_0 + 1$ için,

$$m < z_{2m+1}^\pm < m+1 \text{ ve } z_{-(2m+1)}^\pm = iw_{-(2m+1)}^\pm, m/\alpha < w_{-(2m+1)}^\pm < (m+1)/\alpha. \quad (3.30)$$

İspat

3.4. Lemmanın ispatından açıktır ki, $m \geq m_0 + 1$ için Eşz. 3.27 D_m^- ve K_m^- bölgelerinin sınırları üzerinde bile geçerlidir. Sonuç olarak, Rouché teoreminden $\phi_1^-(z)$ fonksiyonunun D_m^- ve K_m^- deki köklerinin sayısı $f(z) = 8 \cos^2 \pi z \cosh^2 \alpha \pi z$ ile aynıdır. D_m^- ve K_m^- de 2 tane sıfır kökü vardır. ($f(z)$ fonksiyonu D_m^- içinde $z = m+1/2$ noktasında 2 sıfır noktası ve K_m^- içinde $z = i(m+1/2)/\alpha$ noktasında 2 sıfır noktası vardır.) Lemma ispatlandı.

$k \in \mathbb{Z}$ ve $s_{2k+1}^\pm = \frac{2\pi}{a} z_{2k+1}^\pm$ alalım. Eş. 3.30 dan $0 < h_{2k+1}^\pm < \pi$ ($|k| \geq m_0 + 1$) olduğunda

$$\begin{aligned} k < z_{2k+1}^\pm < k+1 &\Rightarrow 0 < z_{2k+1}^\pm - k < 1 \Rightarrow 0 < \pi(z_{2k+1}^\pm - k) < \pi \Rightarrow \pi(z_{2k+1}^\pm - k) = h_{2k+1}^\pm \\ \Rightarrow \pi\left(s_{2k+1}^\pm \frac{a}{2\pi} - k\right) &= h_{2k+1}^\pm \Rightarrow s_{2k+1}^\pm \frac{a}{2} - k\pi = h_{2k+1}^\pm \Rightarrow s_{2k+1}^\pm = \frac{2k\pi + 2h_{2k+1}^\pm}{a}, (k \geq m_0 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}(-k) < w_{-(2k+1)}^{\pm} < \frac{1}{\alpha}(-k+1) &\Rightarrow 0 < \alpha w_{-(2k+1)}^{\pm} + k < 1 \Rightarrow 0 < \pi(\alpha w_{-(2k+1)}^{\pm} + k) < \pi \\
\Rightarrow \pi(\alpha w_{-(2k+1)}^{\pm} + k) = h_{2k+1}^{\pm} &\Rightarrow \pi\left(\alpha \frac{z_{-(2k+1)}^{\pm}}{i} + k\right) = h_{2k+1}^{\pm} \Rightarrow \pi\left(\frac{(w-a)}{a} \frac{as_{2k+1}^{\pm}}{2\pi i} + k\right) = h_{2k+1}^{\pm} \\
\Rightarrow \frac{(w-a)}{2i} s_{2k+1}^{\pm} + \pi k = h_{2k+1}^{\pm} &\Rightarrow s_{2k+1}^{\pm} = i \frac{-2k\pi + 2h_{2k+1}^{\pm}}{w-a}, \quad (k \leq -(m_0 + 1))
\end{aligned}$$

bulunur. h_{2k+1}^{\pm} niceliğini analiz edersek, Eş. 3.24 ün kökleri s_{2k+1}^{\pm} sayılarıdır. Bu yüzden, h_{2k+1}^{-} ve h_{2k+1}^{+} , $k \geq m_0 + 1$ için

$$2 \cos^2 t \cosh^2 \alpha(k\pi + t) - \cos^2 t - \cosh^2 \alpha(k\pi + t) + 1 = 0 \quad (3.31)$$

denkleminin ve $k \leq -(m_0 + 1)$ için

$$2 \cos^2 t \cosh^2 ((k\pi - t)/\alpha) - \cos^2 t - \cosh^2 ((k\pi - t)/\alpha) + 1 = 0 \quad (3.32)$$

denkleminin kökleridir. Eş. 3.31 aşağıdaki eşitliklerin birleşimidir:

$$\cos t = \sqrt{\frac{1 - \cosh^2 \alpha(k\pi + t)}{1 - 2 \cosh^2 \alpha(k\pi + t)}}, \quad (3.33)$$

$$\cos t = -\sqrt{\frac{1 - \cosh^2 \alpha(k\pi + t)}{1 - 2 \cosh^2 \alpha(k\pi + t)}}. \quad (3.34)$$

Eş. 3.32 aşağıdaki eşitliklerin birleşimidir:

$$\cos t = \sqrt{\frac{1 - \cosh^2 ((k\pi - t)/\alpha)}{1 - 2 \cosh^2 ((k\pi - t)/\alpha)}}, \quad (3.35)$$

$$\cos t = -\sqrt{\frac{1 - \cosh^2 ((k\pi - t)/\alpha)}{1 - 2 \cosh^2 ((k\pi - t)/\alpha)}}. \quad (3.36)$$

Eş. 3.33 ve Eş. 3.35 in her birinin kökleri $(0, \pi)$ yatmaktadır ve non-negatiftir ve Eş. 3.34 ve Eş. 3.36 nın her birinin kökleri $(0, \pi)$ yatmaktadır ve non-pozitifdir.

3.6. Lemma

$|k| \geq m_0 + 1$ için Eş. 3.33 ve Eş. 3.35 in her birinin $(0, \pi/2]$ de bir kökü ve Eş. 3.34 ve Eş. 3.36 nın her birinin $[\pi/2, \pi)$ de bir kökü vardır.

İspat

$k \geq m_0 + 1$ için

$$g_1(t) = \cos t - \sqrt{\frac{1 - \cosh^2 \alpha(k\pi + t)}{1 - 2 \cosh^2 \alpha(k\pi + t)}}$$

fonksiyonu $0 \leq t \leq \pi/2$ de süreklidir ve $g_1(0) > 0, g_1(\pi/2) < 0$ dir. $g_1(t)$ nin $[0, \pi/2)$ de bir kökü vardır. Benzer olarak Eş. 3.34 ün de $(\pi/2, \pi]$ de bir kökü olduğunu gösterelim:

$$g_2(t) = \cos t + \sqrt{\frac{1 - \cosh^2 \alpha(k\pi + t)}{1 - 2 \cosh^2 \alpha(k\pi + t)}}$$

fonksiyonu $\pi/2 \leq t \leq \pi$ de süreklidir ve $g_2(\pi/2) > 0, g_2(\pi) < 0$ dir. Sonuç olarak Eş. 3.34 ün $(\pi/2, \pi]$ de bir kökü vardır.

$k \leq -(m_0 + 1)$ için

$$g_3(t) = \cos t - \sqrt{\frac{1 - \cosh^2 \alpha((k\pi - t)/\alpha)}{1 - 2 \cosh^2 \alpha((k\pi - t)/\alpha)}}$$

fonksiyonu $0 \leq t \leq \pi/2$ de süreklidir ve $g_3(0) > 0, g_3(\pi/2) < 0$ dir. $g_3(t)$ nin $[0, \pi/2)$ de bir kökü vardır. Benzer olarak Eş. 3.36 nın da $(\pi/2, \pi]$ de bir kökü olduğunu gösterelim:

$$g_4(t) = \cos t + \sqrt{\frac{1 - \cosh^2((k\pi - t)/\alpha)}{1 - 2 \cosh^2((k\pi - t)/\alpha)}}$$

fonksiyonu $\pi/2 \leq t \leq \pi$ de süreklidir ve $g_4(\pi/2) > 0, g_4(\pi) < 0$ dir. Sonuç olarak Eş. 3.36 nın $(\pi/2, \pi]$ de bir kökü vardır. Lemma ispatlandı.

$(\pi/2, \pi]$ aralığında $k \geq m_0 + 1$ için Eş. 3.34 ün bir kökünü ve $k \leq -(m_0 + 1)$ için Eş. 3.36 nın bir kökünü $r_{2k+1}^+ + \pi/2$ olarak alalım. Hatta $[0, \pi/2)$ aralığında $k \geq m_0 + 1$ için Eş. 3.33 ün bir kökünü ve $k \leq -(m_0 + 1)$ için Eş. 3.35 in bir kökünü $-r_{2k+1}^- + \pi/2$ olarak alalım. O zaman, bütün $|k| \geq m_0 + 1$ için $0 \leq r_{2k+1}^\pm < \pi/2$ ve $k \geq m_0 + 1$ için $h_{2k+1}^\pm = \pm r_{2k+1}^\pm + \pi/2$, $k \leq -(m_0 + 1)$ için $h_{2k+1}^\pm = \mp r_{2k+1}^\pm + \pi/2$ dir.

$$\mu_{2k+1}^\pm = (S_{2k+1}^\pm)^2 = \left(\frac{(2k+1)\pi \pm 2r_{2k+1}^\pm}{a} \right)^2, \quad k \geq m_0 + 1$$

$$\mu_{2k+1}^\pm = (S_{2k+1}^\pm)^2 = - \left(\frac{(2k+1)\pi \pm 2r_{2k+1}^\pm}{w-a} \right)^2, \quad k \leq -(m_0 + 1)$$

$$\cos r_{2k+1}^\pm = \sqrt{\frac{1 - \cosh^2 \alpha (k\pi + \pi/2 \pm r_{2k+1}^\pm)}{1 - 2 \cosh^2 \alpha (k\pi + \pi/2 \pm r_{2k+1}^\pm)}}, \quad k \geq m_0 + 1 \quad (3.37)$$

$$\cos r_{2k+1}^\pm = \sqrt{\frac{1 - \cosh^2((k\pi + \pi/2 \mp r_{2k+1}^\pm)/\alpha)}{1 - 2 \cosh^2((k\pi + \pi/2 \mp r_{2k+1}^\pm)/\alpha)}}, \quad k \leq -(m_0 + 1) \quad (3.38)$$

eşitlikleri bulunur.

3.1. Teorem

Periyodik problemin özdeğerleri $\{\mu_{2k}^\pm\}$ ve yarı-periyodik problemin özdeğerleri $\{\mu_{2k+1}^\pm\}$ olmak üzere ve $0 \leq r_n^\pm \leq \frac{\pi}{2}$, $(|n| \geq m_0 + 1)$ olduğunda

$$\mu_n^\pm = \left(\frac{n\pi \pm 2r_n^\pm}{a} \right)^2, \quad k \geq m_0 + 1, \quad \mu_n^\pm = - \left(\frac{n\pi \pm 2r_n^\pm}{w-a} \right)^2, \quad k \leq -(m_0 + 1)$$

biçiminde elde edilir ve Eş. 3.22, Eş. 3.23, Eş. 3.37 ve Eş. 3.38 i sağlar.

3.4. Kararsızlık Aralıklarının Uzunluğu

3.2. Teorem

$\{\mu_n^-, \mu_n^+\}$ kararsızlık aralığının $I_n = \mu_n^+ - \mu_n^-$ uzunluğu $n \rightarrow \pm\infty$ iken sonsuza gider.

İspat

$0 \leq r_n^\pm \leq \pi/2$ olduğunda aşağıdaki eşitlikler bulunur;

$$\begin{aligned} I_n = \mu_n^+ - \mu_n^- &= \left((n\pi + 2r_n^+) / a \right)^2 - \left((n\pi - 2r_n^-) / a \right)^2 \\ &= 4n\pi (r_n^+ + r_n^-) / a^2 + 4 \left((r_n^+)^2 - (r_n^-)^2 \right) / a^2, \quad (n \geq m_0 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n = \mu_n^+ - \mu_n^- &= - \left((n\pi + 2r_n^+) / (w-a) \right)^2 - \left[- \left((n\pi - 2r_n^-) / (w-a) \right)^2 \right] \\ &= -4n\pi (r_n^+ + r_n^-) / (w-a)^2 - 4 \left((r_n^+)^2 - (r_n^-)^2 \right) / (w-a)^2. \quad (n \leq -(m_0 + 1)) \end{aligned}$$

Bu yüzden, teoremin ispatı için $n \rightarrow \pm\infty$ iken $\{r_n^\pm\}$ dizisinin sifıra yakınsamadığını görmek yeterli olacaktır. $n = 2k$ ve $k \rightarrow \infty$ durumunu düşünelim.

Aksini kabul edelim. $k \rightarrow \infty$ iken $r_{2k}^+ \rightarrow 0$ dır. Daha sonra Eş. 3.22 den elde edilen

$$\sinh^2 \alpha(k\pi + r_{2k}^+) = \frac{\sin^2 r_{2k}^+}{1 - 2\sin^2 r_{2k}^+}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sinh \alpha(k\pi + r_{2k}^+) = 0$$

ki bu tezattır.

$n = 2k + 1$ ve $k \rightarrow -\infty$ durumu benzer şekilde gösterilebilir. Bunun için aksini kabul edelim. $k \rightarrow -\infty$ iken $r_{2k+1}^- \rightarrow 0$ dır. Daha sonra Eş. 3.38 den elde edilen

$$\cosh^2 \left((k\pi + \pi/2 + r_{2k+1}^-) / \alpha \right) = \frac{\cos^2 r_{2k+1}^- - 1}{1 + 2\cos^2 r_{2k+1}^-}, \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} \cosh \left((k\pi + \pi/2 + r_{2k+1}^-) / \alpha \right) = 0$$

ki bu tezattır. Teorem ispatlandı.

4. SONUÇLAR

“Parçalı pozitif sabit katsayılı bir Hill denkleminin kararsızlık aralıkları üzerine” isimli çalışmadan elde edilen sonuçlar:

i. Hill denklemi ile ilgili periyodik problemin özdeğerleri $F(\lambda) - 2 = 0$ (periyodik problemin karakteristik denklemi) ile çakışır ve bu fonksiyon $0 \leq x \leq a$ aralığında *sinüs*, $a < x \leq w$ aralığında da *sinüs* fonksiyonunun kombinasyonu ile ifade edilir.

Hill denklemi ile ilgili yarı-periyodik problemin özdeğerleri $F(\lambda) + 2 = 0$ (yarı-periyodik problemin karakteristik denklemi) ile çakışır ve bu fonksiyon $0 \leq x \leq a$ aralığında *kosinüs*, $a < x \leq w$ aralığında da *kosinüs* fonksiyonunun kombinasyonu ile ifade edilir.

ii. $\rho(x)$ fonksiyonu parçalı pozitif sabit fonksiyon seçildiğinde başlangıç şartlarını sağlayan problemin çözümleri *sinüs* ve *kosinüs* dairesel fonksiyonları ile ifade edildiğinden, Hill denklemi ile ilgili periyodik ve yarı-periyodik problemlerin her biri yığılma noktası $+\infty$ olan sayılabilir sonsuz reel özdeğerlere sahiptir.

Çünkü Hill denkleminin özdeğerlerini $\lambda = s^2 = (2\pi/\delta)^2 z^2$ olarak seçmiştik. Rouché teoreminden, $\phi^+(\lambda) = F(\lambda) - 2$ fonksiyonunun Γ_m^+ içindeki sıfırlarının sayısı $\sin^2 \pi z$ fonksiyonu ile aynıdır. $\sin^2 \pi z$ fonksiyonunun Γ_m^+ içindeki kökleri $z = \pm m$, noktalarıdır. $\phi^-(\lambda) = F(\lambda) + 2$ fonksiyonunun Γ_m^- içindeki sıfırlarının sayısı $\cos^2 \pi z$ fonksiyonu ile aynıdır. $\cos^2 \pi z$ fonksiyonunun Γ_m^- içindeki kökleri $z = \pm(m + 1/2)$ noktalarıdır.

Eş. 2.26 ve Eş. 2.27 nin kökleri $0 \leq r_{2n}^\pm < \pi/2$ olduğunda, periyodik problemin özdeğerleri

$$\mu_0 = 0, \mu_{2n}^\pm = (S_{2n}^\pm)^2 = \left((2n\pi \pm 2r_{2n}^\pm) / \delta \right)^2$$

olarak bulunur ve bunlar $F(\lambda) - 2$ fonksiyonunun $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığındaki çözümü olan Eş. 2.28 i sağlar.

Eş. 2.36 ve Eş. 2.37 nin kökleri $0 \leq r_{2n+1}^\pm < \pi/2$ olduğunda, yarı-periyodik problemin özdeğerleri

$$\mu_{2n+1}^\pm = (S_{2n+1}^\pm)^2 = \left(((2n+1)\pi \pm 2r_{2n+1}^\pm) / \delta \right)^2$$

olarak bulunur ve bunlar $F(\lambda) + 2$ fonksiyonunun $(0, \pi)$ aralığındaki çözümü olan Eş. 2.38 i sağlar.

O zaman $0 \leq r_n^\pm \leq \pi/2, (n \geq n_0 + 1)$ olduğunda Hill denkleminin özdeğerleri

$$\mu_0 = 0, \mu_n^\pm = \left((n\pi \pm 2r_n^\pm) / \delta \right)^2, n = 1, 2, \dots$$

şeklinde gösterilir. O halde Hill denkleminin özdeğerleri pozitif reel bulunur.

iii. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \rightarrow \infty$ iken (μ_n^-, μ_n^+) kararsızlık aralıklarının $I_n = \mu_n^+ - \mu_n^-$ uzunluğu sonsuza gider.

“Parçalı sabit ve alterne katsayılı bir Hill denkleminin kararsızlık aralıkları üzerine” isimli çalışmadan elde edilen sonuçlar:

i. Hill denkleminin periyodik problemin özdeğerleri $F(\lambda) - 2 = 0$ (periyodik problemin karakteristik denklemi) ile çakışır ve bu fonksiyon $0 \leq x \leq a$ aralığında

sinüs, $a < x \leq w$ aralığında *sinüs* ve *hiperbolik sinüs* fonksiyonlarının kombinasyonu şeklinde ifade edilir.

Hill denkleminin yarı-periyodik problemin özdeğerleri $F(\lambda) + 2 = 0$ (yarı-periyodik problemin karakteristik denklemi) ile çakışır ve bu fonksiyon $0 \leq x \leq a$ aralığında *kosinüs*, $a < x \leq w$ aralığında *kosinüs* ve *hiperbolik kosinüs* fonksiyonlarının kombinasyonu şeklinde ifade edilir.

ii. $\rho(x)$ alterne sabit fonksiyon seçildiğinde başlangıç şartlarını sağlayan problemin çözümleri; $0 \leq x \leq a$ aralığında *sinüs* ve *kosinüs* dairesel fonksiyonları ile elde edildiğinden, Hill denklemi ile ilgili periyodik ve yarı-periyodik problemlerin her biri bu aralıkta yığılma noktası $+\infty$ olan sayılabilir sonsuz reel özdeğere sahiptir. $a < x \leq w$ aralığında problemin çözümünde *hiperbolik sinüs* ve *hiperbolik kosinüs* fonksiyonları elde edilir. Burada belirtilmesi gereken en önemli detay *hiperbolik sinüs* ve *hiperbolik kosinüs* periyodik olmadığından bu çözümlere eşit fakat $\cos sa = 1$ ve $\sin sa = 0$ sabit değerlerini katsayı kabul eden biçimde yeniden yazılarak periyodikliğin yani sonsuz reel özdeğerin elde edilmesidir. O halde, $a < x \leq w$ aralığında problemin çözümlerinde *sinüs*, *kosinüs*, *hiperbolik sinüs* ve *hiperbolik kosinüs* fonksiyonları elde edilir. Hill denklemi ile ilgili periyodik ve yarı-periyodik problemlerin her biri $a < x \leq w$ aralığında yığılma noktası $+\infty$ ve $-\infty$ olan sayılabilir sonsuz reel özdeğere sahiptir.

Çünkü Hill denkleminin özdeğerlerini $\lambda = s^2 = (2\pi/a)^2 z^2$ olarak seçmiştik. Rouché teoreminden, $\phi^+(\lambda) = F(\lambda) - 2$ fonksiyonunun Γ_m^+ içindeki sıfırlarının sayısı $\sin^2 \pi z \sinh^2 \alpha \pi z$ fonksiyonu ile aynıdır. $\sin^2 \pi z \sinh^2 \alpha \pi z$ fonksiyonunun Γ_m^+ içindeki kökleri $z = \pm m$, $z = \pm im/\alpha$ noktalarıdır. $\phi^-(\lambda) = F(\lambda) + 2$ fonksiyonunun Γ_m^- içindeki sıfırlarının sayısı $\cos^2 \pi z \cosh^2 \alpha \pi z$ fonksiyonu ile aynıdır. $\cos^2 \pi z \cosh^2 \alpha \pi z$ fonksiyonunun Γ_m^- içindeki kökleri $z = \pm(m+1/2)$, $z = \pm i(m+1/2)/\alpha$ noktalarıdır.

Eş. 3.18, Eş. 3.19, Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 in kökleri $0 \leq r_{2n}^\pm < \pi/2$ olduğunda, periyodik problemin özdeğerleri

$$\begin{aligned}\mu_{2k}^\pm &= (S_{2k}^\pm)^2 = \left((2k\pi \pm 2r_{2k}^\pm) / a \right)^2, & k \geq m_0 + 1 \\ \mu_{2k}^\pm &= (S_{2k}^\pm)^2 = - \left((2k\pi \pm 2r_{2k}^\pm) / (w-a) \right)^2, & k \leq -(m_0 + 1)\end{aligned}$$

şeklinde ve bunlar $F(\lambda) - 2$ fonksiyonunun $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığındaki çözümü olan Eş. 3.22 ve Eş. 3.23 ü sağlarlar.

Eş. 3.33, Eş. 3.34, Eş. 3.35 ve Eş. 3.36 nın kökleri $0 \leq r_{2n+1}^\pm < \pi/2$ olduğunda, yarı-periyodik problemin özdeğerleri

$$\begin{aligned}\mu_{2k+1}^\pm &= (S_{2k+1}^\pm)^2 = \left(((2k+1)\pi \pm 2r_{2k+1}^\pm) / a \right)^2, & k \geq m_0 + 1 \\ \mu_{2k+1}^\pm &= (S_{2k+1}^\pm)^2 = - \left(((2k+1)\pi \pm 2r_{2k+1}^\pm) / w-a \right)^2, & k \leq -(m_0 + 1)\end{aligned}$$

şeklinde ve bunlar $F(\lambda) + 2$ fonksiyonunun $(0, \pi)$ aralığındaki çözümü olan Eş. 3.37 ve Eş. 3.38 i sağlarlar.

iii. $0 \leq r_n^\pm \leq \pi/2, (|n| \geq m_0 + 1)$ olduğunda Hill denkleminin özdeğerleri

$$\mu_n^\pm = \left((n\pi \pm 2r_n^\pm) / a \right)^2, \quad k \geq m_0 + 1, \quad \mu_n^\pm = - \left((n\pi \pm 2r_n^\pm) / w-a \right)^2, \quad k \leq -(m_0 + 1)$$

olur. O halde, Hill denkleminin özdeğerleri pozitif veya negatif reeldir.

iv. $n \in \mathbb{Z}$ ve $n \rightarrow \pm\infty$ iken (μ_n^-, μ_n^+) kararsızlık aralıklarının $I_n = \mu_n^+ - \mu_n^-$ uzunluğu sonsuza gider.

KAYNAKLAR

1. Magnus, W. And Winkler, S. , “Hill’s Equation”, **Wiley**, New York, (1966).
2. Hochstadt, H. , “A special hill’s equation with discontinuous coefficients”, **Amer.Math.**, 70: 18-26 (1963).
3. Titchmarsh, E.C. , “The Theory of Functions”, **Oxford Univ.Press**, London, 156-163 (1964).
4. Yakubovic, V.A. And Starzhinsky, V.M. , “Linear Differential Equations With Periodic Coefficients”, , English Transl, **Wiley**, New York, (1980).
5. Guseinov, G.Sh. And Yaslan, İ. , “On hill’s equation with piecewise constant coefficient”, **Turkish Journal Math.**, 21: 461- 474 (1997).
6. Guseinov, G.Sh. And Karaca, İ.Y. , “Instability intervals of a hill’s equation with piecewise constant and alternating coefficient, **Computers & Mathematics With Applications.**, 47: 319-326 (2004).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : SELÇUK, Burhan
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 15.02.1978 Malatya
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 3463686
e-mail : selcukburhan@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	İnönü Üniversitesi/ Mat Eğt Bölümü	1999
Lise	Malatya Fen Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1999-2004	Refahiye Ç.P.L	Öğretmen
2004-2006	Y.Durali Bezci İ.Ö.O	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce