

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCARA TİP BİR ROBOTUN YÖRÜNGE
KONTROLÜNDE
PID KONTROL UYGULAMASI

Yusuf ŞAHİN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE ANABİLİM DALI
Konya, 2006

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCARA TİP BİR ROBOTUN YÖRÜNGE KONTROLÜNDE PID KONTROL
UYGULAMASI

Yusuf ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE ANABİLİM DALI

Bu tez 01.12.2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr.Arif ANKARALI
(Danışman)

Prof.Dr.Ziya ŞAKA
(Üye)

Yrd.Doç.Dr. Koray KAVLAK
(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SCARA TİP BİR ROBOTUN YÖRÜNGE KONTROLÜNDE PID KONTROL UYGULAMASI

Yusuf ŞAHİN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Arif ANKARALI

2006, 81 Sayfa

Jüri:

Prof.Dr. Ziya ŞAKA

Yrd.Doç.Dr. Arif ANKARALI

Yrd.Doç.Dr. Koray KAVLAK

Bu çalışmada üç serbestliğe sahip Scara tipi bir manipülatörün uç elemanının PID tekniği ile kontrolü yapılmıştır. Öncelikle robotun kinematik ve dinamik denklemleri elde edilmiştir. Robotun kontrolü için sistem, Matlab-Simulink yazılımı yardımıyla modellenmiş ve dört farklı yol alma fonksiyonu sisteme giriş olarak kabul edilmiştir. Kartezyen koordinatlarda yörünge planlaması yapılmıştır. Dinamik denklemler kullanılarak elde edilen servo motor torqları sisteme dış bozucu etki olarak dahil edilmiştir. Değişik giriş fonksiyonları uygulanarak elde edilen sistem cevapları, istenen çıkış yörüngesi üzerindeki sonuçları gözlenerek karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Scara Robot, Manipülatör, PID, Kontrol

ABSTRACT

Master's Thesis

TRAJECTORY TRACKING OF A SCARA ROBOT WITH PID CONTROL

Yusuf ŞAHİN

Selcuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mechanical Engineering

Supervisor: Assist.Prof.Dr. Arif ANKARALI

2006, 81 Page

Jury:

Prof.Dr. Ziya ŞAKA

Assist.Prof.Dr. Arif ANKARALI

Assist.Prof.Dr. Koray KAVLAK

In this study, the precise trajectory tracking of the end effector of a Scara type manipulator is realized by the usage of PID control technique. First of all the kinematic and the dynamic equations of the robot are obtained. For control purposes, simulink model of the system is constructed and four different input functions are assumed. The torques of the servomotors are included to the model as disturbances. The effects of the input function on the desired trajectory is examined and the results are compared with each other.

Key Words: Scara Robot, Manipulator, PID, Control

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans süresince çalışmalarımda, engin bilgi ve tecrübeleri doğrultusunda yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd.Doç.Dr. Arif ANKARALI' ya en içten sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında maddi manevi yardımlarını benden esirgemeyen aileme en içten şükranlarımı sunarım.

Yusuf ŞAHİN

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGE DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	2
3. ROBOT KİNEMATİĞİ	4
3.1. Düz Kinematik Analiz	6
3.1.1. Robotun (D-H) parametrelerinin belirlenmesi	6
3.2. Ters Kinematik Analiz	8
3.2.1. Mafsal değişkenlerinin bulunması ($\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4$)	9
3.2.2. Çözümlerin tekilleştirilmesi	11
3.2.3. Scara Robot için çalışma alanının tanımlanması	11
4. YÖRÜNGE PLANLAMASI	13
4.1. Scara Robotun Sürekli Yörünge Kontrolü	13
4.1.1 Yol alma fonksiyonları	14
a-) Lineer konum vektörü	14
b-) Sikloid yol alma fonksiyonu	15
c-) Harmonik yol alma fonksiyonu	15
d-) (4-5-6-7) polinomu yol alma fonksiyonu	15
5. SCARA ROBOTUN DİNAMİK ANALİZİ	17
5.1. Lagrange – Euler Yaklaşımı	19
5.1.1. Bejczy algoritması	19
5.2. Robot Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi	29
5.2.1. Coriolis ve santrifüj terimleri $h(\theta, \dot{\theta})$	31
5.2.2. Yerçekimi terimleri ($c(\theta)$)	37
6. ROBOT KONTROLÜ	41
6.1. Temel Kontrol İşlemleri	42
6.2. Orantı+İntegral+Türev (PID) Tipi Kontrolcü	43
6.2.1 PID kontrol sistem blok diyagramı	45
6.2.2. Servo motorların matematiksel modellenmesi	45
7. SİMÜLASYONLAR	48
7.1. Kontrol Sisteminin Simulink Yardımıyla Modellenmesi ve Simülasyonu	48
7.2. Simülasyon Sonuçları	51
8. TARTIŞMA VE SONUÇ	65
9. KAYNAKLAR	67
EK-1	68

SİMGELER DİZİNİ

τ_i	Sisteme uygulanan genelleştirilmiş kuvvet ya da momentler.
q_i	Robotun genelleştirilmiş koordinatları.
θ_i	Mafsal değişkenleri (rad.)
M	Kütle
g	yerçekimi ivmesi
T	Transformasyon matrisi
R	Rotasyon matrisi
P	Kartezyen koordinatlarda takım koordinat vektörü
Γ	Takım yörüngesi
K_p	PID oransal kazancı
K_i	PID integral kazancı
K_d	PID türev kazancı
T_i	integral zamanını
T_D	türev zamanını
V_a	Armatür voltajı
L_a	Armatür indüktansı
R_a	Armatür direnci
i_a	Armatür akımı
e_b	Zıt elektromotor kuvveti (emk)
θ_m	Motor milindeki açısal dönme miktarı
θ_L	Yük milindeki açısal dönme miktarı
J_m	Motor eylemsizlik momenti
f_m	Viskoz sürtünme katsayısı
φ	Alan akısı
Δs	alınacak toplam yol (m)
t	zaman (s)
τ	yol alma süresi

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 3.1** Düz ve ters kinematik problemleri
Şekil 3.2 Uzuv koordinat sistemi ve parametreleri
Şekil 3.3 Ters kinematik analizin şematik gösterimi
Şekil 3.4 Robotun sağ kol veya sol kol olarak tanımlanması
Şekil 4.1 Mafsal zamanla konum değişim grafiği
Şekil 4.2 Yol alma fonksiyonlarının genel gösterimi
Şekil 5.1 Uzuv i ' ye ait bir noktanın konumu
Şekil 6.1 Açık çevrimli kontrol
Şekil 6.2 Kapalı çevrim kontrol.
Şekil 6.3 Belirlenen K_p değerine göre çeşitli cevap eğrileri
Şekil 6.4 Kontrol sisteminin genel gösterimi
Şekil 6.5 Servo motor blok diyagramı
Şekil 7.1 Robotun izlemesi istenen uç yörünge
Şekil 7.2 Kontrol sistemi Simulink modeli
Şekil 7.3 Robotun Simulink yardımıyla yapılan dinamik modeli
Şekil 7.5 Sikloid fonksiyonunun uygulanmasıyla gerçekleşen robot uç noktası yörüngesi
Şekil 7.6 (4-5-6-7) Polinomunun uygulanmasıyla gerçekleşen robot uç noktası yörüngesi
Şekil 7.7 Harmonik hareket fonksiyonunun uygulanmasıyla gerçekleşen robot uç noktası yörüngesi
Şekil 7.8 Lineer hareket fonksiyonunun uygulanmasıyla gerçekleşen robot uç noktası yörüngesi
Şekil 7.9-a Sikloid fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği
Şekil 7.9-b Polinom fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği
Şekil 7.9-c Harmonik fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği
Şekil 7.9-d Lineer fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği
Şekil 7.10-a Sikloid fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği
Şekil 7.10-b Polinom fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği
Şekil 7.10-c Harmonik fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği
Şekil 7.10-d lineer fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği
Şekil 7.11-a Sikloid fonksiyonu için birinci mafsal hız grafiği
Şekil 7.11-b Polinom fonksiyonu için birinci mafsal hız grafiği
Şekil 7.11-c Harmonik fonksiyonu için birinci mafsal hız grafiği
Şekil 7.11-d Lineer fonksiyon için birinci mafsal hız grafiği
Şekil 7.12-a Sikloid fonksiyonu için ikinci mafsal hız grafiği
Şekil 7.12-b Polinom fonksiyonu için ikinci mafsal hız grafiği
Şekil 7.12-c Harmonik fonksiyonu için ikinci mafsal hız grafiği
Şekil 7.12-d Lineer fonksiyonu için ikinci mafsal hız grafiği
Şekil 7.13-a Sikloid fonksiyonu için birinci mafsal ivme grafiği
Şekil 7.13-b Polinom fonksiyonu için birinci mafsal ivme grafiği
Şekil 7.13-c Harmonik fonksiyonu için birinci mafsal ivme grafiği
Şekil 7.13-d Lineer fonksiyonu için birinci mafsal ivme grafiği
Şekil 7.14-a Sikloid fonksiyonu için ikinci mafsal ivme grafiği
Şekil 7.14-b Polinom fonksiyonu için ikinci mafsal ivme grafiği

- Şekil 7.14-c Harmonik fonksiyonu için ikinci mafsal ivme grafiği
Şekil 7.14-d Lineer fonksiyonu için ikinci mafsal ivme grafiği
Şekil 7.15-a Sikloid fonksiyonu için birinci mafsal tork değişim grafiği
Şekil 7.15-b Polinom fonksiyonu için birinci mafsal tork değişim grafiği
Şekil 7.15-c Harmonik fonksiyonu için birinci mafsal tork değişim grafiği
Şekil 7.15-d Lineer fonksiyonu için birinci mafsal tork değişim grafiği
Şekil 7.16-a Sikloid fonksiyonu için ikinci mafsal tork değişim grafiği
Şekil 7.16-b Polinom fonksiyonu için ikinci mafsal tork değişim grafiği
Şekil 7.16-c Harmonik fonksiyonu için ikinci mafsal tork değişim grafiği
Şekil 7.16-d Lineer fonksiyonu için ikinci mafsal tork değişim grafiği
Şekil 7.17 Sikloid fonksiyonu için harekete başlama ve bitiş aralığında x ekseninde oluşan hata grafiği
Şekil 7.18 Sikloid fonksiyonu için harekete başlama ve bitiş aralığında y ekseninde oluşan hata grafiği
Şekil 7.19-a Sikloid fonksiyonu için x ekseninde meydana gelen hata grafiği
Şekil 7.19-b Polinom fonksiyonu için x ekseninde meydana gelen hata grafiği
Şekil 7.19-c Harmonik fonksiyonu için x ekseninde meydana gelen hata grafiği
Şekil 7.19-d Lineer fonksiyonu için x ekseninde meydana gelen hata grafiği
Şekil 7.20-a Sikloid fonksiyonu için y ekseninde meydana gelen hata grafiği
Şekil 7.20-b Polinom fonksiyonu için y ekseninde meydana gelen hata grafiği
Şekil 7.20-c Harmonik fonksiyonu için y ekseninde meydana gelen hata grafiği
Şekil 7.20-d Lineer yol alma fonksiyonu için y ekseninde meydana gelen hata grafiği

ÇİZELGE DİZİNİ

Çizelge 3.1 Robotun bu konfigürasyonu için D-H (Denavit-Hartenberg) çizelgesi

Çizelge 5.2 Uzuvların kütle ve uzunlukları

Çizelge 5.3 Hesaplanmış atalet momentleri

Çizelge 6.1 Servo motor için değişken çizelgesi

Çizelge 6.2 PITTMAN 14207 serisi servo motor parametreleri

1. GİRİŞ

Günümüzde robotlar endüstride yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Robotlar işlem hızı, güvenilirlik ve insan sağlığını etkileyebilecek ortamlarda çalışması bakımından üretim hatlarında yaygın olarak kullanılmaktadırlar. Günümüzde ürünlerde seri üretimin kaçınılmaz olmasından dolayı robotlar firmalar için stratejik öneme sahiptir.

Tezin ilk bölümünde kontrolü düşünülen robot için kinematik denklemler elde edilmiştir. Elde edilen denklemler ile mafsalsal değişkenleri olan θ dönmesi ile robot uç noktası arasındaki matematiksel ifadeler elde edilmiştir. Ayrıca robotun izlemesi istenen yörüngenin elde edilmesinde gerekli mafsalsal hareketlerinin bulunabilmesi için ters kinematik analiz yapılmıştır.

Kartezyen uzayda verilen yörüngenin takibinde yörünge planlaması yapılarak robot uç noktasının hareketleri yumuşatılmıştır. Bu sayede mafsalsal motorlarına gelen ani yükler minimuma indirilmiş ve gerçekleşen yörüngedeki hatalarda azalma sağlanmıştır. Bu amaçla yörüngenin izlenmesinde değişik fonksiyonlar uygulanarak sonuçlar değerlendirilmiştir.

Dinamik analiz ile robot dinamiği incelenerek mafsalsal motorlarına ait tork denklemleri bulunmuştur. Robotun dinamik analizinde programlama mantığına uygunluğu açısından Lagrange-Euler yaklaşımı kullanılmıştır.

Robotun kontrolünde ise elde edilen matematiksel ifadeler kullanılarak Simulink modeli oluşturulmuştur. Kontrolde sistem girişi olarak kartezyen koordinatlarda tanımlı takım yörüngesi alınmıştır. Kontrol sistemi içerisinde kartezyen koordinatlarda tanımlı yörünge, mafsalsal değişkenlerine (θ) dönüştürülmekte ve PID kontrolcüye girilmektedir. Kontrolcü çıkışında elde edilen mafsalsal değişkenleri ters kinematik analiz ile robot uç noktasının izlediği yörüngeye dönüştürülmüştür. Sistem girişinde istenen yörünge ile çıkışta oluşan yörünge karşılaştırılmaktadır. Kontrol bloğu içerisinde servo motor modellenerek sistem için gerekli tork sinyali oluşturulmuştur. Robotun dinamiği sisteme bozucu etki olarak ayrıca dışardan ilave edilmektedir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Robot kontrolünde kontrol için problem olan tahmin edilemeyen düzensizlikler veya zamanla değişen faktörler sistemin performansına çok ciddi şekilde etki etmektedir. Birçok kontrol tekniği konvansiyonel PID kontrol tekniğinin anlatılan problemler karşısında yetersiz kalmasından dolayı geliştirildi. *Sun ve Mils (1999)* yörünge performansının geliştirilmesi ve tekrarlı işlemlerde yakınsamanın garanti altına alınması için adaptif öğrenme kontrol tekniğini önermiştir. Fakat bu kontrol yöntemi sistemin detaylı bir şekilde dinamiğinin incelenmesini gerektirmektedir. Model tabanlı PID kontrolör *Li ve ark. (2000)* tarafından sunuldu. Bu kontrol robot manipülatörünün zamanla değişen yörünge kontrolünün yapılmasında iyi sonuçlar verdi. Ama model tabanlı kontrol sisteminin dizaynı için uygun matematiksel modelin oluşturulması çok zordu. Bu yüzden geleneksel zeka kontrol yaklaşımından istenilen, önceden tahmin edilemeyen ve zamanla değişen sistem değişkenlerinin etkisinin kontrol edilebilmesidir. *M.Taylan Das ve L.Canan Dülger (2005)* Scara tipi bir robotun matematiksel modellenmesi, simülasyonu ve elde edilen teorik bilgilerin deneysel olarak doğrulaması yapılmıştır. *Meng Joo Er ve ark.(2002)* Scara robot için dinamik YSA kontrolörün gerçek zamanlı uygulaması yapılarak sistem cevapları irdelenmiştir. *R.Safaric, K.Jezenik,M.Pec (1998)* çalışmada direk sürülen robot mekanizmaları için neural network kontrol yöntemi kullanılmış ve üç serbestliğe sahip endüstriyel PUMA tipi bir robot üzerinde uygulama yapılarak kontrol sonuçları irdelenmiştir. Çalışmada ayrıca kayan kipli kontrolör ile üç kritere göre (yüksek hızlı dönme momenti, düşük hızda moment ve yüksek hız PTP moment) yörünge takibi yapılarak kontrolörün başarısı incelenmiştir. *Cumali Semetay (2001)* tezinde robotların matematiksel modelleri elde edilerek PID ve kayan kipli kontrol yöntemlerinin robotlar üzerine uygulanması ile sistemin verdiği cevaplar incelenmiştir. *Doruk Özkök (1998)* tezin iki uzuvlu bir manipülatörün matematiksel modelinin elde edilmesi ve uç noktanın kontrolü için PID kontrol yöntemi yanında, parametreleri bulanık mantık ile belirlenen PID kontrol ve değişken yapıları kontrolörler kullanılarak sistem cevapları irdelenmiştir. *A.Selçuk Tekdemir (1991)* tezinde robotlar incelenerek parametrik olarak kinematik ve dinamik analizler yapılmış ve sistem adaptif kontrol yöntemi ile kontrol edilerek

sistem cevapları incelenmiştir. *J.Jantzen (2001)* yaptığı çalışmada PID kontrolörün dizaynında kontrol parametrelerinin (K_p, K_i, K_d) belirlenmesi üzerinde durulmuş ve lineer olmayan sistemlerin PID kontrol parametrelerinin bulanık mantık kullanılarak daha kolay elde edilmesi için çalışılmıştır. *W. Li (2004)* ve ark. tarafından yapılan bir çalışmada FUZZ+PID kontrolör kullanılarak bir manipölatörün yörünge kontrolü yapılmış ve ani yük değişimlerinde iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

3. ROBOT KİNEMATİĞİ

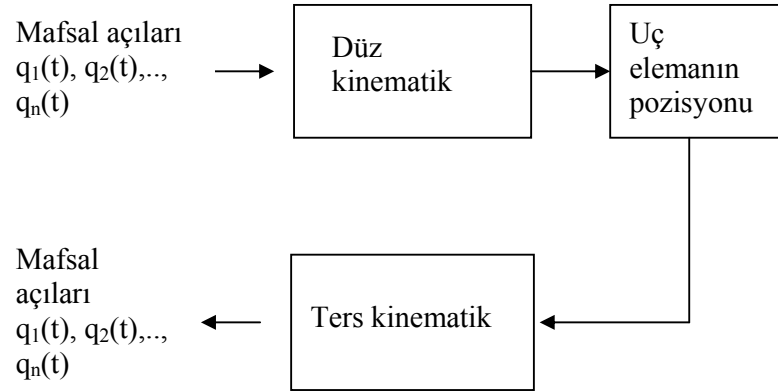
Üç serbestlik derecesine sahip Scara tipi bir robot; üç rijit uzvun ucu açık bir mekanizma oluşturacak şekilde dönel mafsallarla birleştirilerek, tahrik elemanları tarafından sürülmesi şeklinde modellenebilir. Robot kolunun bir ucu yer üzerindeki destek elemana bağlı iken diğer ucuna yapacağı işe göre bir takım bağlanmıştır. Mafsallardan verilen hareketler sonucu manipülatörün uç noktası istenen konuma ve yönlenebilir. Robotik uygulamalarda genellikle uç noktanın üç boyutlu koordinat sisteminde sabit yer koordinatlarına göre tanımının yapılması istenir.

Robot kolu kinematığı, hareketin geometrisinin sabit referans koordinat sistemine göre zamanın fonksiyonu olarak analitik çalışılmasından ibarettir. Bu çalışma esnasında harekete neden olan kuvvetler ve momentler ile ilgilenilmez. Bu bölümde robot kolu kinematığı ile ilgili olarak aşağıda verilen iki durum için analizler gerçekleştirilecektir.

1. Verilen bir manipülatör için mafsallara ait açılar vektörü $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ ve geometrik kol parametreleri verilir ve uç noktanın sabit eksen takımlarına göre pozisyonu ve yönlenebilirliği nedir sorusunun cevabı aranır. Burada n serbestlik derecesidir.
2. Uç noktanın istenilen pozisyonu ve yönlenebilirliği sabit eksen takımlarına göre kol parametreleriyle birlikte verilerek, manipülatör bu noktaya ulaşabilir mi? Ulaşabilirse kaç çeşit robot kol konfigürasyonu bu şartları sağlar? Sorularının cevabı aranır.

Yukarıda bahsedilen birinci durum direkt kinematik problemi ve ikincisi ters kinematik problemi olarak bilinir.

Scara tipi bir robot kolunda bağımsız değişkenler mafsal değişkenleri olduğundan ve yapılacak iş referans yer koordinatlarına göre tanımlandığından ters kinematik çok daha sık kullanılır. Her iki durumu da özetleyen blok diyagram Şekil 3.1'de görülmektedir.



Şekil 3.1 Düz ve ters kinematik problemleri

Scara tipi bir robot kolunun uzuvları referans koordinat takımına göre ya dönme ya da öteleme (yer değiştirme) hareketi yapar. Bu nedenle uç elemanın üç boyutlu uzaydaki toplam yer değiştirmesi uzuvların açısal dönmeleri ve doğrusal ötelenmeleri sonucu oluşur. Denavit ve Hartenberg (1955)' de bir metod geliştirerek, referans eksen takımına göre uzuvların uzaysal geometrisinin matris cebri ile gösterilmesini sağlamışlardır. Bu metod 4x4 homojen dönüşüm matrislerini kullanarak birbirine komşu iki mekanik uzva ait uzaysal ilişkileri tanımlar. Sonuçta bu metod direkt kinematik problemini, robotun eli üzerindeki koordinat takımının yer koordinat takımına göre tanımlanmasını sağlayacak bir eşdeğer 4x4 dönüşüm matrisinin bulunması haline getirir. Bu 4x4 homojen dönüşüm matrisleri aynı zamanda robot koluna ait dinamik denklemlerin elde edilmesinde de oldukça faydalıdır.

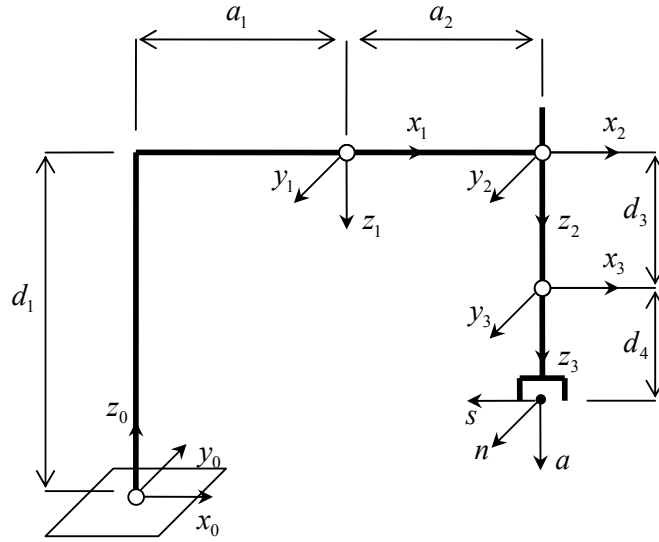
Ters kinematik problemi, genelde birkaç teknikte çözülebilir. En çok kullanılan metodlar matris cebri metodu, iterasyon ve geometrik yaklaşımlar metodlarıdır. Bu çalışmada analitik metod kullanılmıştır.

3.1. Düz Kinematik Analiz

Robot kolunun geometrik link parametreleri (Denavit-Hartenberg parametreleri) ve zamanla değişen eklem değerleri (θ_i , d_i) kullanılarak uç elemanın pozisyon ve yönlenmesinin hesaplanması düz kinematik olarak adlandırılmaktadır.

3.1.1. Robotun (D-H) parametrelerinin belirlenmesi

Bir mafsalsal eksen (i mafsalsal için) iki uzvun birleşimine yerleştirilir. Mafsalsal eksenine iki tane normal ilave edilir. Bunlardan her biri bir uzvu içindir. Her iki uzvu birbirlerine göre pozisyonu ($i-1$ ve i uzvları)



Şekil 3.2 Uzun koordinat sistemi ve parametreleri

d_i : Mafsalsal eksen boyunca ölçülen normaller arasındaki mesafedir.

θ_i : Normaller arasındaki mafsalsal eksenine dik düzlemde ölçülen açıdır.

Kinematik açıdan uzuvların önemi mafsalları arasında sabit bir konfigürasyon oluşturmalarıdır. Bu konfigürasyon a_i ve α_i gibi iki parametre ile tanımlanabilir. a_i parametresi, mafsalsal eksenleri arasındaki ortak normalleri boyunca ölçülen en kısa mesafedir (i ve $i+1$ mafsalları için Z_i ve Z_{i-1} eksenleri), α_i ise mafsalsal eksenleri arasındaki a_i 'ye dik bir düzlem üzerinde ölçülen açıdır. Bu

durumda, a_i ve α_i i uzvunun boyu ve dönme açısı olarak bilinir ve i uzvunun yapısını belirler.

Kontrolü düşünülen Scara robot uç serbestliğe sahiptir. Sistem değişkenleri $(\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4)$ dir. Robotun şematik gösterimi ve mafsal koordinatlarının yerleşim şekilleri Şekil 3.2 de görüldüğü gibidir.

Çizelge 3.1 Robotun bu konfigürasyonu için D-H (Denavit-Hartenberg) çizelgesi

Eksen	θ	d	a	α	Başlangıç
1	θ_1	d_1	a_1	π	0
2	θ_2	0	a_2	0	0
3	0	d_3	0	0	100
4	θ_4	d_4	0	0	$\pi/2$

Kontrolü düşünülen Scara tipi robot için kinematik parametrelerin değerleri.

$$d = [877 \quad 0.0 \quad d_3 \quad 200]^T \text{ mm} \quad (3.1)$$

$$a = [425 \quad 375 \quad 0.0 \quad 0.0]^T \text{ mm} \quad (3.2)$$

şeklindedir.

Elde edilen D-H parametrelerine göre robotun uç elemanının tabana göre konum ve oryantasyonunu gösterecek transformasyon matrisi;

$$T_{taban}^{takım} = T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 \quad (3.3)$$

$$T_0^i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

olarak yazılabilir.

(3.4) denkleminde d6nel mafsals i7in genel transformasyon matrisi yazılmıştır. (3.5) denkleminde ise prizmatik mafsallar i7in genel transformasyon matrisi verilmiştir. Buna g6re verilen matrisler eşitlik (3.3) 'de yerine koyularak robot transformasyon matrisi elde edilebilir.

$$T_{taban}^{takim} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

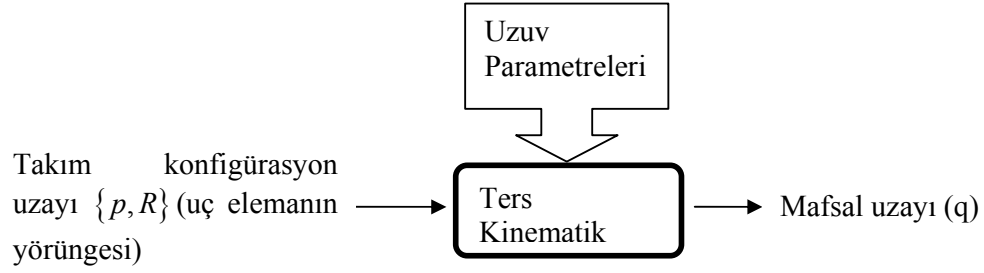
Matrisler 7arpılarak sadeleştirildikten sonra sonu7 matris (3.5) denkleminde g6r6ld6đu gibidir.

$$T_{taban}^{takim} = \begin{bmatrix} C_{1-2-4} & S_{1-2-4} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{1-2} \\ S_{1-2-4} & -C_{1-2-4} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{1-2} \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Not: $C_{1-2-4} = \cos(\theta_1 - \theta_2 - \theta_4)$ dir.

3.2. Ters Kinematik Analiz

U7 elemanın istenilen bir pozisyona veya y6nlenmeye hareket etmesi i7in eklem değişkenlerinin (eklem değişkenleri vekt6r6n6n) hesaplanmasıdır. Genelde robotun izlemesi istenen y6r6nge bilinir ve bu y6r6ngeyi sağlayacak mafsals değişkenlerinin bulunması gerekir ve bu da ters kinematik analizle m6mk6nd6r.



Şekil 3.3 Ters kinematik analizin şematik gösterimi

Takımın konum ve oryantasyonunu belirleyen takım konfigürasyon vektörü kullanılarak gerekli mafsal değişkenleri bulunabilir.

3.2.1. Mafsal değişkenlerinin bulunması ($\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4$)

a-) Ön kol mafsal değişkeni θ_2 in bulunması

$$T_{taban}^{takım} = \begin{bmatrix} C_{1-2-4} & S_{1-2-4} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{1-2} \\ S_{1-2-4} & -C_{1-2-4} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{1-2} \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & \begin{matrix} Px \\ Py \\ Pz \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Px - a_1 \cos(\theta_1) &= a_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ Py - a_1 \sin(\theta_1) &= a_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

her iki tarafın kareleri alınarak toplanırsa:

$$\begin{aligned} Px^2 + Py^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\theta_2) \\ \theta_{2(1,2)} &= \pm \arccos\left(\frac{Px^2 + Py^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}\right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

b-) Ana kol mafsal değişkeni θ_1 in bulunması:

Denklem (3.1) de θ_1 içeren ifadeler bir araya toplanırsa

$$\begin{aligned} Px &= \cos(\theta_1)(a_1 + a_2 \cos(\theta_2)) + \sin(\theta_1)(a_2 \sin(\theta_2)) \\ Py &= \sin(\theta_1)(a_1 + a_2 \cos(\theta_2)) - \cos(\theta_1)(a_2 \sin(\theta_2)) \end{aligned}$$

Her iki denklemden $\sin \theta_1$ ve $\cos \theta_1$ yalnız bırakılırsa;

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1) &= \frac{a_2 \sin \theta_2 \cdot Px + (a_1 + a_2 \cos \theta_2) \cdot Py}{(a_2 \sin \theta_2)^2 + (a_1 + a_2 \cos \theta_2)^2} \\ \cos \theta_1 &= \frac{(a_1 + a_2 \cos \theta_2) \cdot Px - a_2 \sin \theta_2 \cdot Py}{(a_2 \sin \theta_2)^2 + (a_1 + a_2 \cos \theta_2)^2} \\ \theta_1 &= \arctan \left(\frac{a_2 \sin \theta_2 \cdot Px + (a_1 + a_2 \cos \theta_2) \cdot Py}{(a_1 + a_2 \cos \theta_2) \cdot Px - a_2 \sin \theta_2 \cdot Py} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

c-) Uç eleman lineer hareket miktarı d_3 'ün bulunması:

$$d_3 = d_1 - d_4 - Pz \quad (3.9)$$

d-) Takımın z ekseninde dönme miktarı θ_4 ün bulunması

Rotasyon matrisi ($R(q)$) kullanılarak takım açısı bulunabilir.

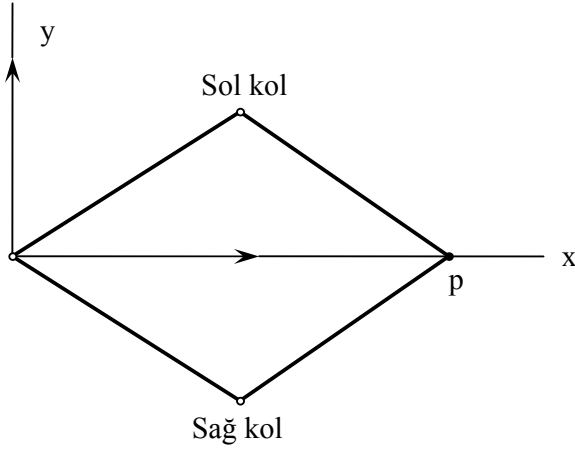
$$R(q) = \begin{bmatrix} C_{1-2-4} & S_{1-2-4} & 0 \\ S_{1-2-4} & -C_{1-2-3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$q_{1-2-4} = a \tan 2(R_{21}, R_{11})$$

$$q_4 = \theta_1 - \theta_2 - q_{1-2-4} \quad (3.10)$$

3.2.2. Çözümlerin tekilleştirilmesi

Takım uç noktası için ters kinematikle bulunan mafsalsal değişkenlerinin (θ_i, d_i) bir noktada birden fazla çözümü çıkabilmektedir. Bu problemi aşmak için öncelikle mafsalsal limitlerini belirlemelidir. Ayrıca uzuvların yapabilecekleri hareketler için belli kurallar konulmalıdır. Şekil (3.4) de görüldüğü gibi çalışma alanı içerisinde istenen takım koordinatında (p) iki çözüm bulunmaktadır. Bunun için mafsalsal açıları sağ kol veya sol kol olacak şekilde sınırlamamız çözümü tekilleştirecektir.



Şekil 3.4 Robotun sağ kol veya sol kol olarak tanımlanması

3.2.3. Scara Robot için çalışma alanının tanımlanması

Çalışma alanının tayininde öncelikli olarak robot konstrüksiyon kısıtlarının bilinmesi gerekmektedir. Scara tipi manipülatörde arka kol dönmesi (θ_1) genelde kısıtlayıcı bir etken içermez. Bu mafsalsal değişkeni için $-\pi \leq \theta_1 \leq \pi$ aralığında olacak şekilde bir kısıtlama yapılabilir. Ancak dirsek değişkeni θ_2 robotun konstrüksiyonuna bağlı olarak sınırlanmalıdır. β sınır açısı kabul edilirse θ_2 mafsalsal değişkeninin sınırları $-\pi + \beta \leq \theta_2 \leq \pi - \beta$ şeklinde olacaktır. Mafsalsal değişkenlerinin sınırlarının genel gösterimi denklem (3.11) deki gibidir.

$$\begin{bmatrix} -\pi \\ -\pi + \beta \\ h \\ -\pi \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ d_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \pi \\ \pi - \beta \\ H \\ \pi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Robot çalışma hacmi trigonometrik eşitlikler yardımıyla bulunabilir.

4. YÖRÜNGE PLANLAMASI

4.1. Scara Robotun Sürekli Yörünge Kontrolü

Sürekli yörünge hareketi için yörünge planlama takım konfigürasyon uzayında yapılmaktadır. Yörünge planlamasında takım yörüngesinin ve yörünge gerçeleşme zamanının belirlenmesi gerekmektedir.

Takım yörüngesi Γ ile tanımlı bir eğri olarak alınabilir ve tanımlanan bu eğrinin gerçeleşme zamanı $s(t)$ fonksiyonu ile tanımlansın. $s(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ arasında değişen değerlere sahiptir ve $s(0)=0, s(T)=1$ dir. T ile takımın yol alma süresi gösterilmektedir.

$$s(t) = \frac{t}{T} \quad 0 \leq t \leq T$$

Robotun kartezyen koordinatlarda izlemesi gereken yörünge izlenmesinde öncelikle ters kinematik analizle bulunan mafsal değişkenlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Mafsal değişkenlerinin uygulama zamanı için ise $s(t)$ vektörü belirlenmelidir. Verilen veriler yardımıyla artık robot mafsal hızları bulunabilir.

$$\theta_{2(1,2)} = \pm \arccos\left(\frac{Px^2 + Py^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}\right)$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{a_2 \sin \theta_2 \cdot Px + (a_1 + a_2 \cos \theta_2) \cdot Py}{(a_1 + a_2 \cos \theta_2) \cdot Px - a_2 \sin \theta_2 \cdot Py}\right)$$

$$d_3 = d_1 - d_4 - Pz$$

Burada işlemleri basitleştirmek için değişken değişimi yapılırsa

$$b_1 = a_2 \sin \theta_2 \cdot Px + (a_1 + a_2 \cos \theta_2) \cdot Py$$

$$b_2 = (a_1 + a_2 \cos \theta_2) \cdot Px - a_2 \sin \theta_2 \cdot Py$$

θ_1 b_1 ve b_2 ye bağlı olarak denklem (4.1) deki gibi yazılabilir.

$$\theta_1 = \arctan(b_1 / b_2) \quad (4.1)$$

Bulunan eşitlikler kullanılarak \dot{q}_i değerleri bulunabilir.

$$\dot{\theta}_2 = \pm \frac{2(Px \cdot \dot{P}x + Py \cdot \dot{P}y)}{\sqrt{[(2a_1 a_2)^2 - (Px^2 + Py^2 - a_1^2 - a_2^2)^2]}} \quad (4.2)$$

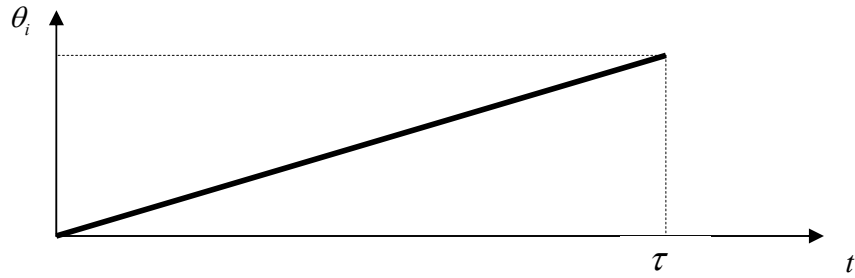
$$\dot{\theta}_1 = \frac{b_1 \dot{b}_2 - b_2 \dot{b}_1}{b_1^2 + b_2^2} \quad (4.3)$$

$$\dot{d}_3 = -\dot{P}z \quad (4.4)$$

Mafsal hızları takım hız vektörlerine bağlı olarak yukarıdaki gibidir.

4.1.1 Yol alma fonksiyonları

a-) Lineer konum vektörü



Şekil 4.1 Mafsal zamanla konum değişim grafiği

Şekil 4.1 de gösterilen hız profili için $[0, \tau]$ aralığında uygun bir ivme öngörülerek takımın belirtilen hıza ulaşması sağlanmıştır. Kalkış ve frenleme ivmeleri sistemin rijit kalacağı aralıkta seçilmelidir.

b-) Sikloid yol alma fonksiyonu

Sikloid fonksiyonu hareket başlangıç ve bitişlerinde yumuşak bir hareket oluşturmak için kullanılmaktadır. Fonksiyon denklem 4.5 'de verilmiştir.

$$s = \Delta s \left[\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau} \right) \right] \quad (4.5)$$

Burada;

Δs : alınacak toplam yol (m)

t : zaman (s)

τ : yol alma süresi

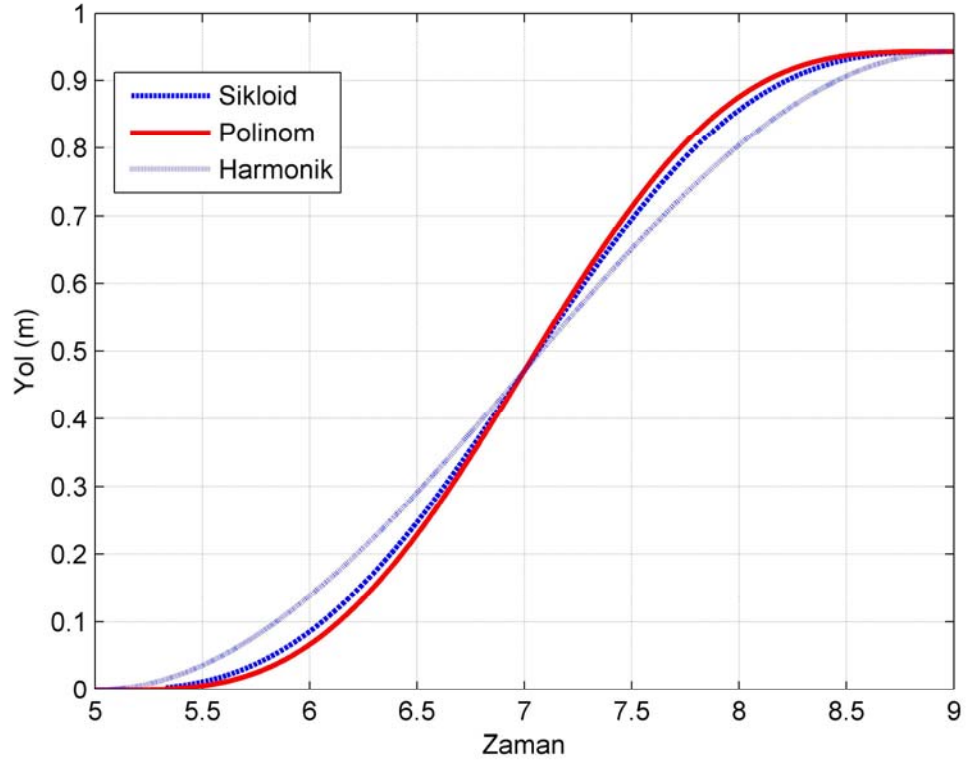
c-) Harmonik yol alma fonksiyonu

$$s = \frac{\Delta s}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi t}{\tau} \right) \right] \quad (4.6)$$

d-) (4-5-6-7) polinomu yol alma fonksiyonu

$$s = \Delta s \left[35 \left(\frac{t}{\tau} \right)^4 - 84 \left(\frac{t}{\tau} \right)^5 + 70 \left(\frac{t}{\tau} \right)^6 - 20 \left(\frac{t}{\tau} \right)^7 \right] \quad (4.7)$$

Şekil 4.2 de fonksiyonlar aynı grafik üstünde görülmektedir. Bu grafikte zamana göre dairenin çevre uzunluğu boyunca konumun değişimi görülmektedir. Verilen denklemlerde izlenmesi istenen kartezyen koordinatlarda tanımlı dairesel yörüngenin toplam uzunluğu Δs , yarıçapı 0.15 m olan dairenin çevre uzunluğuna eşit olarak alınmıştır. Yol alma süresi τ nun değeri de dört saniye olarak alınmıştır.



Şekil 4.2 Yol alma fonksiyonlarının genel gösterimi

5. SCARA ROBOTUN DİNAMİK ANALİZİ

Robot kolu dinamiği, robot kolu hareket denklemlerinin matematiksel formülasyonu ile ilgilenir. Bir manipülatörün dinamik denklemleri, manipülatörün dinamik davranışını tanımlayan matematik denklemler grubudur. Bu denklemler, robot kolunun hareketinin bilgisayar simülasyonu, robot koluna uygun kontrol denklemlerinin tasarımı, kinematik tasarım ve robot kolunun yapısının hesaplanması için oldukça faydalıdır.

Burada hareketin kontrol için uygun olan dinamik denklemlerinin formülasyonu, karakteristikleri ve özellikleri üzerinde durulacaktır. Genelde bir manipülatörün dinamik performansı, kontrol algoritmasının verimliliğine ve manipülatörün dinamik modeline doğrudan bağlıdır. Kontrol problemi, “fiziksel robot kolu sisteminin dinamik modelinin elde edilmesini ve istenilen sistem performansını elde etmek üzere, ilgili kontrol kanunlarını ve stratejilerini belirlemek” şeklinde ifade edilebilir. Bu bölümde manipülatör kontrol probleminin ilk kısmı olan bilgisayar kontrollü robot davranışının ve dinamik özelliklerin modellenmesi ve hesaplanmasından bahsedilecektir. Bir robot kolunun gerçek dinamik modeli, yaygın olarak bilinen Newton mekaniği ve Lagrange mekaniği gibi fiziksel kanunlardan elde edilebilir. Bu kanunların uygulanmasıyla değişik sayıda mafsallı manipülatörün belirlenen kollarının geometrik ve atalet parametrelerine göre hareketin dinamik denkleminin elde edilmesi mümkündür. Klasik olarak Lagrange–Euler (L-E) ve Newton–Euler (N-E) formülasyonları sistematik olarak gerçek bir robot kol hareketinin denklemlerini elde etmek için kullanılabilir. Buradan elde edilecek hareket denklemleri aynı fiziksel robotik manipülatörün dinamik davranışını tanımlayacağından bu anlamda birbirine eşittir. Bununla beraber, bu denklemlerin yapısı değişik elde edilme nedenlerine bağlı olarak farklılık gösterebilir.

Bazıları mafsal torklarının hesaplanmasında hızlı hesaplama ihtiyacına göre, diğerleri kontrol analizi ve sentezi kolaylıklarına göre elde edilebilir. L–E formülasyonuna göre yapılan manipülatörün dinamik modelinin elde edilmesi, diğerlerine göre basit ve sistematiktir.

Rijit cisim hareketi düşünülduğünde elde edilen hareket denklemleri, elektronik kontrol parçalarının dinamikleri, backlash ve dişli sürtünmeleri modele ilave edilmediği zaman, ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklem takımındır.

Bejczy (1974), 4x4 homojen dönüşüm matrisi gösterimini kullanarak 6 mafsallı stanford tipi bir robotun dinamik hareket denklemlerinin lineer olmadığını ve atalet yüklemeleri, mafsallar arasında kaplin reaksiyon kuvvetleri ve yerçekimi etkilerinin olduğunu göstermiştir. İlave olarak bu torklar/kuvvetler manipülatörün fiziksel parametrelerine, mafsal konfigürasyonuna, mafsal hızına ve ivmesine ve taşıdığı yüke bağlıdır. L–E hareket denklemleri robot dinamiği için kapalı durum denklemlerinin elde edilmesini sağlar. Bu denklemler ileri seviyede mafsal değişkenli uzayla ilgili kontrol stratejilerinin tasarım ve analizinde kullanılabilir. Aynı zamanda, bu denklemler ileri dinamik problemlerinin (düz dinamik-ters dinamik) çözümü için kullanılabilir. Öyle ki, arzu edilen moment ve kuvvetler verilirse, dinamik denklemler mafsal ivmelerinin çözümü için kullanılır. Daha sonra integre edilerek mafsalin genelleştirilmiş koordinatlarının ve hızlarının hesaplanması için kullanılır. Eğer ters problemler için yani istenen genelleştirilmiş koordinat ve bunların zamana göre ilk iki türevi verilmişse genelleştirilmiş kuvvetler/torklar hesaplanabilir. Her iki durumda da D_{ik} , h_{ikm} ve c_i 'nin hesaplanması gerekebilir. Ne yazık ki bu katsayıların hesaplanması çok sayıda aritmetik işleme gerek duyar. Bu nedenle L–E denklemlerinin, gerçek zamanlı kontrol amaçlı olarak basitleştirilmeden kullanılmaları oldukça zordur.

L–E hareket denklemlerinin yetersizliği kinematik zinciri tanımlayan 4x4 homojen matrislerden kaynaklanır. Halbuki N–E formülasyonunun üstünlüğü vektör formülasyonu ve onun tekrarlanan yapısına dayanır. L–E formülasyonunun hesaplama zamanının daha da iyileştirilmesi için Hollerbach(1980) Lagrange formülasyonunun yapısını tekrarlanan hale getirmiştir.

Bununla beraber, tekrarlanan denklemler durum uzayında kontrolcü tasarımı için gerekli ve faydalı olan dinamik modelin yapısını bozar. Durum uzayı kontrol analizi için bir manipülatörün dinamik davranışını tanımlayan kapalı formdaki diferansiyel denklem takımını elde etmek gerekebilir. İlave olarak denklemlerdeki etki–tepki ve kaplin reaksiyon kuvvetleri kolayca tespit edilebilmelidir, öyle ki, uygun bir kontrolcü dizayn edilebilsin ve bunların etkilerini telafi edebilsin. L–E

hareket denklemlerine göre dinamik katsayıların daha hızlı hesaplanmasına ilave olarak Genelleştirilmiş D'alambert (G-D) hareket denklemleri uzuvların öteleme ve dönme etkilerini de kapalı olarak içerir. Bu bilgi durum uzayında bir kontrolörün tasarımı için faydalıdır.

Bu bölümde, robot kolunun L-E hareket denklemleri türetilmiştir. Uygulanan torkların / kuvvetlerin hesaplanması için gerekli işlem sayısı G-D denklemleri için $O(n^3)$ iken L-E denklemleri için $O(n^4)$ veya optimize edilir $O(n^3)$ ve N-E denklemleri için $O(n)$ kadardır. Burada n robot kolunun serbestlik derecesini göstermektedir. Robot kolunun L-E hareket denklemleri kullandığı için şu an önemli olan işlem sayısı L – E yaklaşımının işlem sayısıdır.

5.1. Lagrange – Euler Yaklaşımı

5.1.1. Bejczy algoritması

Robot dinamiği konusunda en çok kullanılan iki yaklaşımdan biri Lagrange – Euler (L – E) yaklaşımıdır. Yöntem bir sistemin içerdiği iş ve enerji ile ifade edildiğinden Newton – Euler (N – E) yönteminde ortaya çıkan, iş yapmayan iç kuvvetler bu yöntemde ortaya çıkmamaktadır. Yöntem L – E hareket denklemleri olarak bilinen ;

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1)$$

ifadesine dayanır.

Burada geçen L, q_i ve τ_i değerlerinin anlamları şöyledir:

$$L = \text{Lagrange fonksiyonu} = \text{Kinetik enerji (K)} - \text{Potansiyel enerji (P)} \quad (5.2)$$

K = Robot uzuvlarının toplam kinetik enerjisi

P = Robot uzuvlarının toplam potansiyel enerjisi

Kinetik enerji, $K = \sum_{i=1}^n K_i$ ve potansiyel enerji, $P_i = \sum_{i=1}^n P_i$ şeklindedir.

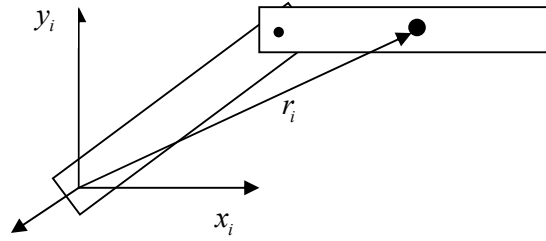
q_i = Robotun genelleştirilmiş koordinatı. Döner eklemlerde $q_i = \theta_i$ ve prizmatik eklemlerde $q_i = d_i$ 'dir.

\dot{q}_i = Genelleştirilmiş q_i koordinatının zamana göre birinci türevidir.

τ_i = Sisteme uygulanan genelleştirilmiş kuvvet ya da moment.

Yöntem sistematik ve uygulaması kolay bir yöntemdir. Ancak kontrol amacıyla kullanılabilir ve bilgisayar uygulamalarına yatkın olmak zorundadır. Bu amaçla yöntem matris notasyonu ile ifade edilecektir. Yöntemin bu şekilde ifade edilmesi ilk kez Bejczy tarafından gerçekleştirilmiştir.

L – E yöntemi sistemin enerjisi ile ilgili bir yöntem olduğundan, uzuvların hız ifadelerinin elde edilmesi, kinetik enerjinin bulunması için gereklidir.



Şekil 5.1 Uzuv i'ye ait bir noktanın konumu

Şekil 5.1'deki r_i vektörü, robot kolunun i numaralı uzvu üzerinde bir noktayı $O_i - x_i, y_i, z_i$ eksen takımına göre tanımlayan bir vektör olsun. Bu noktanın hızı bulunmak istenirse, bu noktanın hızının i numaralı eksen takımına göre sıfır olduğu görülür. Oysa sistemin kinetik enerjisini bulmak için uzuvların sabit eksen takımına göre hızlarının bilinmesi gerekir.

Şekil 5.1'deki aynı nokta sabit eksen takımı $O_0 - x_0, y_0, z_0$ 'a göre r_{0i} vektörüyle tanımlanmaktadır.

$${}^0A_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot \dots \cdot {}^{i-1}A_i \quad (5.3)$$

Burada döner eklemler için;

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

şeklindedir ve α_i , a_i , d_i sabittir ayrıca θ_i dönel mafsalsal değişkenidir. Prizmatik eklemler için ise;

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

şeklindedir ve prizmatik mafsalsal için mafsalsal değişkeni d_i 'dir ayrıca α_i , a_i , θ_i sabittir. Burada, dönel mafsalsal için $q_i = \theta_i$ ve prizmatik mafsalsal için $q_i = d_i$ şeklindedir.

Homojen dönüşüm matrisleri ;

$${}^0r_i = {}^0A_i {}^i r_i \quad (5.6)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Bu durumda 0r_i vektörü ile ifade edilen noktanın sabit eksen takımına göre hızı;

$$v_i = \frac{d}{dt} ({}^0r_i) \quad (5.7)$$

olarak hesaplanır. v_i değeri homojen dönüşümler kullanılarak ifade edilmek istenirse,

$${}^0v_i \equiv v_i = \frac{d}{dt} ({}^0r_i) = \frac{d}{dt} ({}^0A_i {}^i r_i) \quad (5.8)$$

elde edilir. Çarpım halindeki bütün elemanların zamana göre türevleri alınırsa:

$${}^0v_i \equiv v_i = \dot{{}^0A_1} {}^1A_2 \dots {}^{i-1}A_i {}^i r_i + {}^0A_1 \dot{{}^1A_2} \dots {}^{i-1}A_i {}^i r_i + \dots + {}^0A_1 \dots \dot{{}^{i-1}A_i} {}^i r_i + {}^0A_1 \dots {}^{i-1}A_i \dot{{}^i r_i} \quad (5.9)$$

$\dot{{}^i r_i}$ vektörü hep aynı noktayı tanımlayan ve zamanla değişmeyen bir vektördür.

Dolayısıyla,

$\dot{{}^i r_i} = 0$ yazılabilir. Bu durumda hız ifadesi:

$${}^0v_i \equiv v_i = \sum_{j=1}^i ({}^0A_1 {}^1A_2 \dots \dot{{}^{j-1}A_j} \dots {}^{i-1}A_i) {}^i r_i \quad (5.10)$$

halini alır.

Bu arada ${}^{j-1}\dot{A}_j$ homojen dönüşüm matrisinin zamana göre değişimi, aslında ${}^{j-1}\dot{A}_j$ matrisinin içinde yer alan eklem değişkeni q_j sayesinde gerçekleşmektedir. Bu yüzden,

$${}^{j-1}\dot{A}_j = \frac{d {}^{j-1}A_j}{dt} = \frac{\partial {}^{j-1}A_j}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} \quad (5.11)$$

yazılabilir. Bu durumda,

$${}^0v_i \equiv v_i = \sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} \right) \cdot {}^i r_i = \sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j \right) \cdot {}^i r_i \quad (5.12)$$

halini alır. $\frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j}$ kısmi türevi Q_i matrisi kullanılarak kolayca elde edilir.

$$\frac{\partial {}^{i-1}A_i}{\partial q_i} = Q_i {}^{i-1}A_i \quad (5.13)$$

Burada, döner eklemler için:

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

prizmatik eklemler için:

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

olarak tanımlanır.

$$\frac{\partial {}^{i-1}A_i}{\partial q_i} = Q_i {}^{i-1}A_i \quad (5.16)$$

ise, dönel mafsall için $q_i = \theta_i$ olduğundan denklem,

$$\frac{\partial {}^{i-1}A_i}{\partial \theta_i} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & -\cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & -a_i \sin \theta_i \\ \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\equiv Q_i^{i-1} A_i$$

haline gelir.

$\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j}$ kısmi türevinde ${}^0 A_i$ dönüşümünde yalnız ${}^{j-1} A_j$ matrisi q_j 'den etkilenmektedir. Bu yüzden yalnız ${}^{j-1} A_j$ matrisi Q_j matrisi ile çarpılmalıdır. Bu durumda;

$$\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0 A_1 {}^1 A_2 \dots {}^{j-2} A_{j-1} Q_j {}^{j-1} A_j \dots {}^{i-1} A_i & j \leq i \text{ ise,} \\ 0 & j > i \text{ ise.} \end{cases} \quad (5.19)$$

elde edilir.

$$\frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} = U_{ij} \quad (5.20)$$

olmak üzere bir U matrisi tanımlansın.

$$U_{ij} = \begin{cases} {}^0 A_{j-1} Q_j {}^{j-1} A_j & j \leq i \text{ ise,} \\ 0 & j > i \text{ ise.} \end{cases} \quad (5.21)$$

Bu durumda;

$$v_i = \left(\sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j \right) {}^i r_i \quad (5.22)$$

elde edilir. U_{ij} matrisi j denklem değişkeninin i nolu uzvun hızları üzerinde yaptığı etkiyi göstermektedir. i nolu uzuv üzerinde diğer eklemlerin etkileri de göz önüne alınır;

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} = U_{ijk} = \begin{cases} {}^0 A_{j-1} Q_j {}^{j-1} A_{k-1} Q_k {}^{k-1} A_i & i \geq k \geq j \text{ ise,} \\ {}^0 A_{k-1} Q_k {}^{k-1} A_{j-1} Q_j {}^{j-1} A_i & i \geq j \geq k \text{ ise,} \\ 0 & i < j \text{ ve } i < k \text{ ise} \end{cases} \quad (5.23)$$

elde edilir. U_{ijk} , j ve k eklemlerinin i nolu uzvun hızı üzerindeki etkilerini ifade etmektedir.

Örneğin, dönel mafsallı robot kolu için $i = j = k = 1$ ve $q_1 = \theta_1$ için;

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} = U_{ijk} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} (Q_1 {}^0 A_1) = Q_1 Q_1 {}^0 A_1 \quad (5.24)$$

Sonuç olarak (5.23) numaralı denklem j ve k mafsallarının i numaralı uzvun hızı üzerindeki etkilerini ifade eder.

Yöntemde amaç kinematik enerji ifadesini elde etmektir. Sonsuz küçük bir dm kütesinin kinetik enerjisi,

$$dK_i = \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) dm \quad (5.25)$$

şeklindedir.

$$Tr(v) = v_{11} + v_{22} + \dots + v_{nn} \quad (5.26)$$

şeklinde v matrisinin izi (trace) olmak üzere (5.25) ifadesi;

$$dK_i = \frac{1}{2} trace (v_i v_i^T) dm = dK_i = \frac{1}{2} Tr (v_i v_i^T) dm \quad (5.27)$$

elde edilir. (5.22) kullanılarak,

$$dK_i = \frac{1}{2} Tr \left[\sum_{p=1}^i U_{ip} \dot{q}_p {}^i r_i \left(\sum_{r=1}^i U_{ir} q_r \dot{r}_i \right)^T \right] dm \quad (5.28)$$

$$dK_i = \frac{1}{2} Tr \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \, {}^i r_i \, {}^i r_i^T U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] dm \quad (5.29)$$

$$dK_i = \frac{1}{2} Tr \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} ({}^i r_i dm \, {}^i r_i^T) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (5.30)$$

U_{ip} ve U_{ir} matrisleri, i uzvunun hızının p ve r eklemlerinden etkilenmesini göstermektedir ve i uzvunun kütle dağılımından bağımsızdırlar. Aynı şekilde \dot{q}_p ve \dot{q}_r eklem hızları da i uzvunun kütle dağılımından bağımsızdır. Bu durum göz önüne alınarak eşitliğin iki tarafının integrali alınır;

$$K_i = \int dK_i = \frac{1}{2} Tr \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left(\int {}^i r_i \, {}^i r_i^T dm \right) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (5.31)$$

elde edilir. U_{ip} , U_{ir} , \dot{q}_p ve \dot{q}_r 'nin integralin dışında kaldığı görülmektedir. Burada,

$$J_i = \int {}^i r_i \, {}^i r_i^T dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

olmak üzere i uzvunun sahte eylemsizlik tensörü olarak bilinir ve

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & \overline{m_i x_i} \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & \overline{m_i y_i} \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & \overline{m_i z_i} \\ \overline{m_i x_i} & \overline{m_i y_i} & \overline{m_i z_i} & \overline{m_i} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} m_1 a_1^2 / 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} m_2 a_2^2 / 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{yz}$ ve I_{xz} belirtilen eksenlere göre eylemsizlik momentlerini; ${}^i r_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$ olmak üzere i uzvunun $O_i - x_i y_i z_i$ eksen takımına göre kütle merkezini göstermektedir. Bu durumda bütün uzuvların toplam kinetik enerjisi;

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Tr} \left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} J_i U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right) \quad (5.34)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[\text{Tr} (U_{ip} J_i U_{ir}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r \right]$$

olur. Bu skaler bir büyüklüktür. Burada J_i değeri, yalnızca i uzvunun kütle dağılımına bağlıdır ve zamana veya robot kolunun pozisyonuna göre değişmemektedir.

Lagrange değerini oluşturan diğer büyüklük olan potansiyel enerji ise yerçekimi ivmesinden kaynaklanmaktadır. i uzvunun sabit eksen takımına göre potansiyel enerjisi,

$$P_i = -m_i g {}^0 \bar{r}_i = -m_i g ({}^0 A_i {}^i \bar{r}_i) \quad (5.35)$$

şeklinindedir. Burada $g, g = (0, 0, -9.8062, 0)^T$ şeklindeki yerçekimi vektörüdür.

Robot kolunun toplam potansiyel enerjisi;

$$P_i = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n -m_i g ({}^0 A_i {}^i \bar{r}_i) \quad (5.36)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$L = K - P$$

olarak tanımlanan Lagrange değeri;

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left[\text{Tr}(U_{ij} J_i U_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] + \sum_{i=1}^n m_i g ({}^0 A_i {}^i \bar{r}_i) \quad (5.37)$$

olarak elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \frac{(\partial L)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (5.38)$$

şeklindeki Lagrange hareket denklemleri elde edilmek üzere gerekli türevler alınırsa,

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{(\partial L)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (5.39)$$

$$= \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \text{Tr}(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \ddot{q}_k + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Tr}(U_{jkm} J_j U_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=i}^n m_j g U_{ji} {}^j \bar{r}_j$$

...(5.40)

veya D, h ve c aşağıda tanımlanan matrisler olmak üzere;

$$\tau_i = \sum_{k=i}^n D_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + c_i \quad (5.41)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem ise;

$$\tau(t) = D(q(t))\ddot{q}(t) + h(q(t), \dot{q}(t)) + c(q(t)) \quad (5.42)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\tau(t) = n \times 1$ boyutlu, mafsallardan uygulanan tork vektörü,

$$\tau(t) = (\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t))^T \quad (5.43)$$

$q(t)$ = nx1 boyutlu, mafsal değişkenleri vektörü,

$$q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))^T \quad (5.44)$$

$\dot{q}(t)$ = nx1 boyutlu, mafsal hızları vektörü,

$$\dot{q}(t) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t))^T \quad (5.45)$$

$\ddot{q}(t)$ = nx1 boyutlu, $q(t)$ mafsal değişkenlerinin ivme vektörü,

$$\ddot{q}(t) = (\ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \dots, \ddot{q}_n(t))^T \quad (5.46)$$

$D(q)$ = n x n boyutunda ivme ile ilgili simetrik atalet matrisi ve elemanları,

$$D_{ik} = \sum_{j=\text{maksimum}(i,k)}^n Tr(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (5.47)$$

olarak tanımlıdır.

$h(q, \dot{q})$ = nx1 boyutlu lineer olmayan, Coriolis ve santrifüj kuvvet vektörüdür ve elemanları;

$$h(q, \dot{q}) = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T \quad (5.48)$$

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{ve} \quad (5.49)$$

$$h_{ikm} = \sum_{j=\text{maksimum}(i,k,m)}^n Tr(U_{jkm} J_j U_{ji}^T) \quad i, k, m = 1, 2, \dots, n \quad (5.50)$$

$c(q)$ = Yerçekiminden kaynaklanan kuvvet vektörüdür ve elemanları,

$$c(q) = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \quad (5.51)$$

şeklindedir. Burada;

$$c_i = \sum_{j=i}^n \left(-m_j g U_{ji}^j \bar{r}_j \right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.52)$$

olarak tanımlıdır.

5.2. Robot Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi

Bir önceki bölümde elde edilen denklemler dönel mafsallı ve 4 serbestlik dereceli Scara tipi bir robot kolu için genişletilirse aşağıda verilen ve dinamik hareket denklemlerini oluşturan formlara ulaşılır:

İvmeye ilgili simetrik matris $D(\theta)$, (5.47) denkleminde,

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & D_{34} \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} & D_{44} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada,

$$D_{11} = Tr(U_{11} J_1 U_{11}^T) + Tr(U_{21} J_2 U_{21}^T) + Tr(U_{31} J_3 U_{31}^T) + Tr(U_{41} J_4 U_{41}^T)$$

$$D_{12} = D_{21} = Tr(U_{22} J_2 U_{21}^T) + Tr(U_{32} J_3 U_{31}^T) + Tr(U_{42} J_4 U_{41}^T)$$

$$D_{13} = D_{31} = Tr(U_{33} J_3 U_{31}^T) + Tr(U_{43} J_4 U_{41}^T)$$

$$D_{14} = D_{41} = Tr(U_{44} J_4 U_{41}^T)$$

$$D_{22} = Tr(U_{22} J_2 U_{22}^T) + Tr(U_{32} J_3 U_{32}^T) + Tr(U_{42} J_4 U_{42}^T)$$

$$D_{23} = D_{32} = Tr(U_{33} J_3 U_{32}^T) + Tr(U_{43} J_4 U_{42}^T)$$

$$D_{24} = D_{42} = Tr(U_{44} J_4 U_{42}^T)$$

$$D_{33} = Tr(U_{33} J_3 U_{33}^T) + Tr(U_{43} J_4 U_{43}^T)$$

$$D_{34} = D_{43} = Tr(U_{44} J_4 U_{43}^T)$$

$$D_{44} = Tr(U_{44} J_4 U_{44}^T)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada U_{ij} 'ler denklem (5.21)' den bulunmuştur.

$$U_{11} = Q_1 \cdot {}^0A_1$$

$$U_{21} = Q_1 \cdot {}^0A_2$$

$$U_{22} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2$$

$$U_{33} = {}^0A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3$$

$$U_{32} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_3$$

$$U_{31} = Q_1 \cdot {}^0A_3$$

$$U_{41} = Q_1 \cdot {}^0A_4$$

$$U_{42} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_4$$

$$U_{43} = {}^0A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_4$$

$$U_{44} = {}^0A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4$$

Diğer yandan Q_{ij} matrisleri ise denklem (5.14)'den aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D_{ij} matrislerini bulmada kullanılan 0A_i matrisleri ise aşağıda verilen formüller yardımıyla bulunur:

$${}^0A_2 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2;$$

$${}^0A_3 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3;$$

$${}^0A_4 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4;$$

$${}^1A_3 = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3;$$

$${}^1A_4 = {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4;$$

$${}^2A_4 = {}^2A_3 \cdot {}^3A_4;$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & a_3 C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & a_3 S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^3A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

burada

$$C_i \equiv \cos \theta_i; \quad S_i \equiv \sin \theta_i;$$

5.2.1. Coriolis ve santrifüj terimleri $h(\theta, \dot{\theta})$

Hızlardan kaynaklanan Coriolis ve santrifüj terimlerdeki katsayılar, simetrik ve 4x4 ebadında bir $H_{i,v}$ matrisi ile gösterilebilir ve aşağıda verildiği gibi tanımlanabilir.

$$H_{i,v} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} & h_{34} \\ h_{14} & h_{24} & h_{34} & h_{44} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 4 \quad (5.54)$$

4 mafsıl değişkenlerinin hızları 4 boyutlu bir sütun vektörle gösterilir ve $\dot{\theta}$ ile ifade edilirse,

$$\dot{\theta}(t) = [\dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t), \dot{\theta}_3(t), \dot{\theta}_4(t)]^T \quad (5.55)$$

olur. Bu durumda (5.49) denklemini matris-vektör çarpımı şeklinde yazılabilir.

$$h_i = \dot{\theta}^T H_{i,v} \dot{\theta} \quad (5.56)$$

Yukarıda verilen ifade $h(\theta, \dot{\theta})$ ile gösterilen 4 boyutlu bir sütun vektörün bileşenleridir.

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^T H_{1,v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{2,v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{3,v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{4,v} \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Burada h_i ifadeleri denklem (5.49)' dan elde edilir.

$$\begin{aligned} h_1 = & h_{111} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{112} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{113} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{114} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_4 + h_{121} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{122} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_2 + \\ & h_{123} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{124} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_4 + h_{131} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{132} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{133} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{134} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_4 + \\ & h_{141} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{142} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{143} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{144} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2 = & h_{211} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{212} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{213} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{214} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_4 + h_{221} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{222} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_2 + \\ & h_{223} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{224} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_4 + h_{231} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{232} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{233} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{234} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_4 + \\ & h_{241} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{242} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{243} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{244} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3 = & h_{311} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{312} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{313} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{314} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_4 + h_{321} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{322} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_2 + \\ & h_{323} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{324} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_4 + h_{331} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{332} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{333} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{334} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_4 + \\ & h_{341} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{342} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{343} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{344} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_4 = & h_{411} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{412} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{413} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{414} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_4 + h_{421} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{422} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_2 + \\ & h_{423} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{424} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_4 + h_{431} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{432} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{433} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{434} \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_4 + \\ & h_{441} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_1 + h_{442} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_2 + h_{443} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_3 + h_{444} \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \dot{\theta}_4 \end{aligned}$$

olup h_{jkm} matrisleri ise denklem (5.50)'den aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$h_{111} = Tr(U_{111} \cdot J_1 \cdot U_{11}^T) + Tr(U_{211} \cdot J_2 \cdot U_{21}^T) + Tr(U_{311} \cdot J_3 \cdot U_{31}^T) + Tr(U_{411} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{112} = \text{Tr}(U_{212} \cdot J_2 \cdot U_{21}^T) + \text{Tr}(U_{312} \cdot J_3 \cdot U_{31}^T) + \text{Tr}(U_{412} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{113} = \text{Tr}(U_{313} \cdot J_3 \cdot U_{31}^T) + \text{Tr}(U_{413} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{114} = \text{Tr}(U_{414} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{121} = \text{Tr}(U_{221} \cdot J_2 \cdot U_{21}^T) + \text{Tr}(U_{321} \cdot J_3 \cdot U_{31}^T) + \text{Tr}(U_{421} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{122} = \text{Tr}(U_{222} \cdot J_2 \cdot U_{21}^T) + \text{Tr}(U_{322} \cdot J_3 \cdot U_{31}^T) + \text{Tr}(U_{422} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{123} = \text{Tr}(U_{323} \cdot J_3 \cdot U_{31}^T) + \text{Tr}(U_{423} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{124} = \text{Tr}(U_{424} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{131} = \text{Tr}(U_{331} \cdot J_3 \cdot U_{31}^T) + \text{Tr}(U_{431} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{132} = \text{Tr}(U_{332} \cdot J_3 \cdot U_{31}^T) + \text{Tr}(U_{432} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{133} = \text{Tr}(U_{333} \cdot J_3 \cdot U_{31}^T) + \text{Tr}(U_{433} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{134} = \text{Tr}(U_{434} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{141} = \text{Tr}(U_{441} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{142} = \text{Tr}(U_{442} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{143} = \text{Tr}(U_{443} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{144} = \text{Tr}(U_{444} \cdot J_4 \cdot U_{41}^T)$$

$$h_{211} = \text{Tr}(U_{211} \cdot J_2 \cdot U_{22}^T) + \text{Tr}(U_{311} \cdot J_3 \cdot U_{32}^T) + \text{Tr}(U_{411} \cdot J_4 \cdot U_{42}^T)$$

$$h_{212} = \text{Tr}(U_{212} \cdot J_2 \cdot U_{22}^T) + \text{Tr}(U_{312} \cdot J_3 \cdot U_{32}^T) + \text{Tr}(U_{412} \cdot J_4 \cdot U_{42}^T)$$

$$h_{213} = \text{Tr}(U_{313} \cdot J_3 \cdot U_{32}^T) + \text{Tr}(U_{413} \cdot J_4 \cdot U_{42}^T)$$

$$h_{214} = \text{Tr}(U_{414} \cdot J_4 \cdot U_{42}^T)$$

$$h_{221} = \text{Tr}(U_{221} \cdot J_2 \cdot U_{22}^T) + \text{Tr}(U_{321} \cdot J_3 \cdot U_{32}^T) + \text{Tr}(U_{421} \cdot J_4 \cdot U_{42}^T)$$

$$h_{222} = \text{Tr}(U_{222} \cdot J_2 \cdot U_{22}^T) + \text{Tr}(U_{322} \cdot J_3 \cdot U_{32}^T) + \text{Tr}(U_{422} \cdot J_4 \cdot U_{42}^T)$$

$$h_{223} = \text{Tr}(U_{323} \cdot J_3 \cdot U_{32}^T) + \text{Tr}(U_{423} \cdot J_4 \cdot U_{42}^T)$$

$$h_{224} = \text{Tr}(U_{424} \cdot J_4 \cdot U_{42}^T)$$

$$h_{231} = \text{Tr}(U_{331} \cdot J_3 \cdot U_{32}^T) + \text{Tr}(U_{431} \cdot J_4 \cdot U_{42}^T)$$

$$h_{232} = \text{Tr}(U_{332} \cdot J_3 \cdot U_{32}^T) + \text{Tr}(U_{432} \cdot J_4 \cdot U_{42}^T)$$

$$h_{233} = \text{Tr}(U_{333} J_3 U_{32}^T) + \text{Tr}(U_{433} J_4 U_{42}^T)$$

$$h_{234} = \text{Tr}(U_{434} J_4 U_{42}^T)$$

$$h_{241} = \text{Tr}(U_{441} J_4 U_{42}^T)$$

$$h_{242} = \text{Tr}(U_{442} J_4 U_{42}^T)$$

$$h_{243} = \text{Tr}(U_{443} J_4 U_{42}^T)$$

$$h_{244} = \text{Tr}(U_{444} J_4 U_{42}^T)$$

$$h_{311} = \text{Tr}(U_{311} J_3 U_{33}^T) + \text{Tr}(U_{411} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{312} = \text{Tr}(U_{312} J_3 U_{33}^T) + \text{Tr}(U_{412} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{313} = \text{Tr}(U_{313} J_3 U_{33}^T) + \text{Tr}(U_{413} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{314} = \text{Tr}(U_{414} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{321} = \text{Tr}(U_{321} J_3 U_{33}^T) + \text{Tr}(U_{421} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{322} = \text{Tr}(U_{322} J_3 U_{33}^T) + \text{Tr}(U_{422} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{323} = \text{Tr}(U_{323} J_3 U_{33}^T) + \text{Tr}(U_{423} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{324} = \text{Tr}(U_{424} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{331} = \text{Tr}(U_{331} J_3 U_{33}^T) + \text{Tr}(U_{431} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{332} = \text{Tr}(U_{332} J_3 U_{33}^T) + \text{Tr}(U_{432} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{333} = \text{Tr}(U_{333} J_3 U_{33}^T) + \text{Tr}(U_{433} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{334} = \text{Tr}(U_{434} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{341} = \text{Tr}(U_{441} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{342} = \text{Tr}(U_{442} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{343} = \text{Tr}(U_{443} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{344} = \text{Tr}(U_{444} J_4 U_{43}^T)$$

$$h_{411} = \text{Tr}(U_{411} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{412} = \text{Tr}(U_{412} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{413} = \text{Tr}(U_{413} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{414} = \text{Tr}(U_{414} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{421} = \text{Tr}(U_{421} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{422} = \text{Tr}(U_{422} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{423} = \text{Tr}(U_{423} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{424} = \text{Tr}(U_{424} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{431} = \text{Tr}(U_{431} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{432} = \text{Tr}(U_{432} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{433} = \text{Tr}(U_{433} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{434} = \text{Tr}(U_{434} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{441} = \text{Tr}(U_{441} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{442} = \text{Tr}(U_{442} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{443} = \text{Tr}(U_{443} J_4 U_{44}^T)$$

$$h_{444} = \text{Tr}(U_{444} J_4 U_{44}^T)$$

Yukarıdaki denklemlerde kullanılan U_{ijk} matrisleri ise (5.23) denkleminden aşağıdaki gibi bulunur:

$$U_{111} = Q_1 \cdot Q_1 \cdot {}^0A_1$$

$$U_{112,113,114,121,122,123,124,131,132,133,134,141,142,143,144} = 0$$

$$U_{211} = Q_1 \cdot Q_1 \cdot {}^0A_2$$

$$U_{212} = Q_1 \cdot {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2$$

$$U_{213} = 0$$

$$U_{214} = 0$$

$$U_{221} = Q_1 \cdot {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2$$

$$U_{222} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2$$

$$U_{223} = 0$$

$$U_{224,231,232,233,234,241,242,243,244} = 0$$

$$U_{311} = Q_1 \cdot Q_1 \cdot {}^0A_3$$

$$U_{312} = Q_1 \cdot {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_3$$

$$U_{313} = Q_1 \cdot {}^0A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3$$

$$U_{314} = 0$$

$$U_{321} = Q_1 \cdot {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_3$$

$$U_{322} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_3$$

$$U_{323} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3$$

$$U_{324} = 0$$

$$U_{331} = Q_1 \cdot {}^0A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3$$

$$U_{332} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3$$

$$U_{333} = {}^0A_2 \cdot Q_3 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3$$

$$U_{334,341,342,343,344} = 0$$

$$U_{411} = Q_1 \cdot Q_1 \cdot {}^0A_4$$

$$U_{412} = Q_1 \cdot {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_4$$

$$U_{413} = Q_1 \cdot {}^0A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_4$$

$$U_{414} = Q_1 \cdot {}^0A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4$$

$$U_{421} = Q_1 \cdot {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_4$$

$$U_{422} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_4$$

$$U_{423} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_4$$

$$U_{424} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4$$

$$U_{431} = Q_1 \cdot {}^0A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_4$$

$$U_{432} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_4$$

$$U_{433} = {}^0A_2 \cdot Q_3 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_4$$

$$U_{434} = {}^0A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4$$

$$U_{441} = Q_1 \cdot {}^0A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4$$

$$U_{442} = {}^0A_1 \cdot Q_2 \cdot {}^1A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4$$

$$U_{443} = {}^0A_2 \cdot Q_3 \cdot {}^2A_3 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4$$

$$U_{444} = {}^0A_3 \cdot Q_4 \cdot Q_4 \cdot {}^3A_4$$

5.2.2. Yerçekimi terimleri ($c(\theta)$)

(5.52) denkleminde

$$c(\theta) = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T \quad (5.58)$$

olduğu bilinmektedir ve burada;

$$c_1 = -(m_1 g U_{11} {}^1\bar{r}_1 + m_2 g U_{21} {}^2\bar{r}_2 + m_3 g U_{31} {}^3\bar{r}_3 + m_4 g U_{41} {}^4\bar{r}_4)$$

$$c_2 = -(m_2 g U_{22} {}^2\bar{r}_2 + m_3 g U_{32} {}^3\bar{r}_3 + m_4 g U_{42} {}^4\bar{r}_4)$$

$$c_3 = -(m_3 g U_{33} {}^3\bar{r}_3 + m_4 g U_{43} {}^4\bar{r}_4)$$

$$c_4 = -(m_4 g U_{44} {}^4\bar{r}_4)$$

Buradan (5.52) denklemini kullanarak;

$$c_1 = -m_1 \cdot [0 \quad -g \quad 0 \quad 0] \cdot U_{11} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l/2 \\ 1 \end{bmatrix} - m_2 \cdot [0 \quad -g \quad 0 \quad 0] \cdot U_{21} \cdot \begin{bmatrix} -l/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ - m_3 \cdot [0 \quad -g \quad 0 \quad 0] \cdot U_{31} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l/2 \\ 1 \end{bmatrix} - m_4 \cdot [0 \quad -g \quad 0 \quad 0] \cdot U_{41} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = -m_2 \cdot [0 \ -g \ 0 \ 0] \cdot U_{22} \cdot \begin{bmatrix} -l/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - m_3 \cdot [0 \ -g \ 0 \ 0] \cdot U_{32} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l/2 \\ 1 \end{bmatrix} - m_4 \cdot [0 \ -g \ 0 \ 0] \cdot U_{42} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_3 = -m_3 \cdot [0 \ -g \ 0 \ 0] \cdot U_{33} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l/2 \\ 1 \end{bmatrix} - m_4 \cdot [0 \ -g \ 0 \ 0] \cdot U_{43} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_4 = -m_4 \cdot [0 \ -g \ 0 \ 0] \cdot U_{44} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

değerleri bulunur.

(5.47)-(5.52) denklemlerindeki c_i , D_{ik} ve h_{ikm} katsayıları manipülâtörün mafsalsal değişkenlerinin ve atalet parametrelerinin fonksiyonudur ve bazen manipülâtörün “dinamik katsayıları” olarak isimlendirilir. Bu dinamik katsayıların fiziksel anlamları (5.42)-(5.52) denklemlerinde verilen Lagrange-Euler hareket denklemlerinin incelenmesiyle anlaşılabilir:

1. c_i katsayıları uzuvların üzerindeki yerçekiminden kaynaklanan yük terimlerini içerir ve (5.52) denklemiyle verilmiştir.
2. D_{ik} katsayıları, mafsalsal değişkenlerinin ivmeleriyle ilgilidir ve (5.47) denklemiyle verilmiştir. Özel bir durum olan $i=k$ için D_{ii} , τ_i tahrik torkunun uygulandığı i . mafsalsalın ivmesinden kaynaklanır. Halbuki $i \neq k$ için, D_{ik} , k mafsalsalında uygulanan ivmeye bağlı olarak i mafsalsalında oluşan reaksiyon torku temsil eder veya tersi de doğrudur. Atalet matrisi simetrik olduğundan ve $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A)^T$ olduğundan $D_{ik} = D_{ki}$ eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir.
3. h_{ikm} katsayıları mafsalsal değişkenlerinin hızlarından kaynaklanır ve (5.49)-(5.50) denklemleriyle verilmiştir. Alt indis k ve m , mafsallarının hızları ile ilgili terimleri gösterir ve bunların dinamik davranışları i . mafsalsal üzerinde bir reaksiyon tork oluşturur. Bu durumda, ilk indeks olan i , hızdan kaynaklanan torkların hissedildiği mafsalsal temsil eder. Özelde, $k=m$ olduğu zaman, h_{ikk} k mafsalsalının açısalsal hızı sebebiyle üretilen santrifüj kuvvete bağlıdır ve i

mafsalında hissedilir, aynı zamanda $k \neq m$ için, h_{ikm} k ve m mafsal hızlarının oluşturduğu Coriolis kuvvetlere bağlıdır ve i mafsalında hissedilir. Verilen bir i için, fiziksel sistemden $h_{ikm} = h_{imk}$ eşitliğinin sağlandığı görülmektedir.

Bu katsayılar kullanılarak mafsallar üzerinde oluşan torklar hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Bu katsayıların hesaplanması sırasında aşağıdaki nedenlerden dolayı bazıları sıfır olabilir:

1. Manipülatörün özel kinematik tasarımı mafsal hareketleri arasındaki bazı dinamik etkileşimleri (D_{ik} ve h_{ikm} katsayıları) ortadan kaldırabilir.
2. Hızla ilgili dinamik katsayılardan bazıları (5.49) ve (5.50) denklemlerinde rasgele varlık gösterir; öyle ki, bunlar fiziksel olarak mevcut değildir. (Örneğin, santrifüj kuvvetler üretildiği mafsalın hareketiyle etkileşimli değildir, yani daima $h_{iii}=0$ 'dır. Bununla beraber, aynı kuvvetler kinematik zincirde bulunan diğer mafsalların hareketleriyle etkileşim içerisindedir, öyle ki $h_{jii} \neq 0$ olabilir.)
3. Hareket esnasında uzuvların konfigürasyonlarının özel değişimlerinde bazı dinamik katsayılar belirli zamanlarda sıfır olabilir.

(5.42)-(5.52) denklemlerinde verilen 4+1 serbestlik dereceli Scara tipi bir robot kolunun hareket denklemleri etkileşimli, lineer olmayan, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemler sembolik diferansiyel denklemler formundadır ve uzuvların atalet, santrifüj, Coriolis ve yerçekimi gibi bütün etkilerini ihtiva eder. Uygulanan ve zamanın fonksiyonu olan bir grup τ_i ($i=1,2,\dots,n$) torku için (5.42) denklemi, manipülatörün $q(t)$ değişkenleri cinsinden gerçek hareketini elde etmek üzere aynı anda integre edilmelidir. Daha sonra, mafsal değişkenlerinin zamana göre değişimleri uygun dönüşüm matrisleri kullanılarak dönüştürülmeli ve el

hareketinin zamana bağılı değişimi elde edilmelidir. Eğer mafsalsal değişkenlerinin, mafsalsal hızlarının ve mafsalsal ivmelerinin zamana bağılı değişimleri, yörünge planlama programında önceden elde edilmişse, (5.42)-(5.52) denklemleri bu defa uygulanan ve zamanın fonksiyonu olan, planlanan robot kolunun hareketini gerçekleştirmek için gerekli $\tau(t)$ torklarını hesaplamak için kullanılabilir. Bu “açık çevrim” olarak bilinir. Bununla beraber otonom bir robotik sistem için “kapalı çevrim” tercih edilir.

L-E hareket denklemleri yapısı nedeniyle kapalı çevrim kontrolü açısından değerlendirildiğinde, (5.42) denkleminde olduğu gibi bir grup durum denklemi verir. Bu form, lineer olmayan etkileri kontrol kanununun tasarımı aşamasında kolayca dengeler. Bir robot kolu için, bir geri beslemeli kontrolcünün tasarımında dinamik katsayılar reaksiyon kuvvetlerinin lineer olmayan etkilerini minimize etmek için sık sık kullanılır.

L-E yaklaşımı ihtiva ettiği hesaplamaların yani çarpma ve toplamaların çokluğu açısından diğer formülasyonlarla karşılaştırıldığında oldukça yetersizdir. Çünkü robotun çalışması esnasında bütün bu hesaplar planlanan yörünge için her bir noktası için ayrı ayrı tekrarlanmalıdır ve oldukça zaman almaktadır.

Çizelge 5.2 Uzunlukların kütle ve uzunlukları

Uzunluk numarası	1	2	3
Kütle(kg), m_i	3	2	1
Uzunluk(m), l	0.4	0.3	0.3

Robota ait atalet momenti değerleri robotun parçalarının uygun bir yazılımda modellenmesiyle elde edilebilir. Bu çalışmada, simülasyonların gerçekleşmesi için literatür incelenerek uygun değerler seçilmiştir.

Robot mafsallarının sıfır konumunda olduğunu varsayarak mafsalsal motorlarına etkiyen atalet kuvvetleri;

Çizelge 5.3 Hesaplanmış atalet momentleri

Atalet momentleri	I. mafsalsal	II. mafsalsal	III. mafsalsal
$I (kgm^2)$	2.38	0.381	0.00083

6. ROBOT KONTROLÜ

Robot kontrol probleminde amaç, robotun uç noktasının verilen yörüngeyi en uygun şekilde izlemesini sağlamaktır. Bunun için sistemin matematiksel olarak ifadesi elde edilmeli ve sistem için uygun bir kontrolcü dizayn edilmelidir.

Bugünkü robot kolu kontrol sistemlerinde genel yaklaşım, her bir kolun birbirinden bağımsız servo mekanizmalar olarak düşünülmesi üzerine yapılmaktadır (Gonzalez, Lee 1988).

Robot kollarının kontrolüyle ilgili hız kontrolü, tork kontrolü gibi çeşitli yaklaşımlar üzerinde çalışmalar yapılmaktadır. Ancak bu çalışmalarda sistemin tam bir matematiksel modeli elde edilemediğinden kontrolcüler çok iyi sonuç vermemektedir. Bu sebeple araştırmacılar bulanık mantık ve yapay sinir ağları gibi üst düzey kontrol yöntemlerine yönelmektedirler (Gonzalez, Lee 1988).

Robot kontrol sisteminin yapısı, yerine getirilecek görevin karmaşıklığı ile değişir. Basit robotlar, hareketi kontrol etmek için pnömatik, mekanik veya basit elektriksel mantık kontrolcülerini kullanırlar. Karmaşık endüstriyel robotlarda, her eklem konumu veya hareket eksenini kapalı döngülü servo sistemiyle kontrol edilir. Bu kontrolcüler, eklem hareketlerini kontrol etmek için algılayıcılardan sürekli konum bilgisi alırlar.

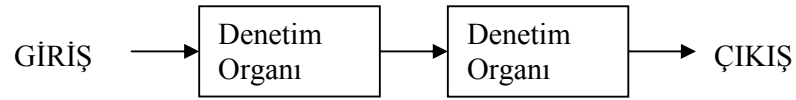
Robotlara uygulanabilecek kontrol metotları, lineer ve nonlineer olmak üzere iki kısımda incelenebilir. Genel olarak, eğer sistemin matematiksel modeli lineer diferansiyel denklemlerle ifade edilebiliyorsa lineer kontrol kullanılabilir. Ancak robot dinamiğinin nonlineer diferansiyel denklemlerle ifade edilmesi daha doğrudur. Buna rağmen bazı yaklaşımlarla robot modeli, lineer diferansiyel denklemlerle oluşturulmakta ve önemli sonuçlar alınabilmektedir. Bu yüzden lineer kontrol metotları hala endüstride sıkça uygulanmaktadır. Ayrıca lineer kontrol, nonlineer kontrolün de temelini oluşturmaktadır.

6.1. Temel Kontrol İşlemleri

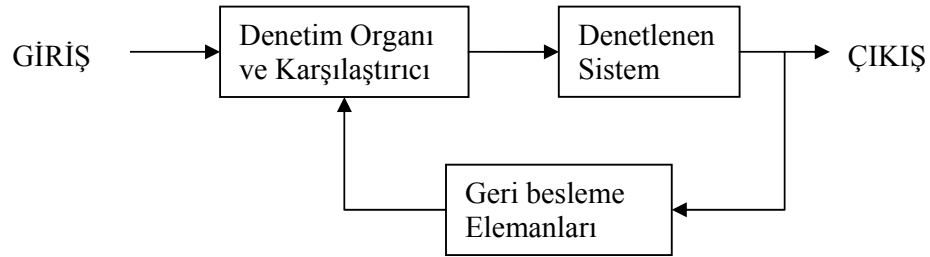
Kontrolün amacı, bir işlemdeki değişkenlerin istenilen şekilde davranması için giriş sinyalleri üretmektir. Daha değişik bir ifadeyle sisteme uygun bir giriş uygulayarak, arzu edilen çıkışı elde etmektir. Mühendislik kontrol sistemleri açık çevrimli kontrol ve kapalı çevrimli kontrol olmak üzere iki gruba ayrılır.

Bir kontrol çevriminde kontrol ve kumanda, sistemin çıkışlarına bağlı olarak belirlenmiyorsa kontrol çevrimi açıktır. Diğer bir deyişle, çıkışlar kumandayı kontrol sistemi içinde doğrudan etkilememektedir. Bu tür kontrol genellikle sistem yapısının ve sistem girişlerinin önceden çok iyi bilindiği uygulamalarda kullanılır.

Sisteme referans ile gerçek çıkış arasındaki farka (hata) göre giriş uygulanıyorsa, buna kapalı çevrimli kontrol adı verilir. Sistem çıkışındaki değişimler, sisteme uygulanacak kumandanın belirlenmesi için geri gönderilir. Bu nedenle kapalı çevrimli kontrole "Geri beslemeli kontrol" de denir. Bu iki kontrol biçimi Şekil 6.1 ve Şekil 6.2' de şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 6.1 Açık çevrimli kontrol



Şekil 6.2 Kapalı çevrim kontrol

Eğer referans değeri değişken ise kapalı çevrimli sistemin, açık çevrimli sistemden dikkate değer bir biçimde farklı olduğu ortaya çıkar. Geri besleme

tasarımının amacı da hızlı cevap veren, daha kararlı bir sistem oluşturmaktır. Çok yavaş tepki veren sistemler çok kuvvetli kontrol girişleri ile hızlandırılabilirler.

6.2. Orantı+İntegral+Türev (PID) Tipi Kontrolcü

Endüstriyel çevrelerde PID kontrolcü hala en çok kullanılan geri beslemeli kontrolcüdür. Pratikte edinilen tecrübeler bu kontrolcünün bir çok proses kontrol problemi ile son derece iyi bir şekilde baş edebildiğini göstermiştir. PID yönteminin diğer avantajları ise az sayıdaki tasarım parametresinin olması ve bunların performans ölçüleri ile kolayca ilişkilendirilebilmesidir.

PID kontrolcü lineer bir kontrolcüdür. Hata sinyali $e(t)$ ' yi kontrol sinyali $u(t)$ ' ye çevirir. Lineer bir kontrolcü olduğundan zaman ve frekans domenlerinde incelenebilir. Zaman domeninde kontrol sinyali şu şekildedir:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right) \quad (6.1)$$

Laplace Dönüşümü alındıktan sonra bu denklem:

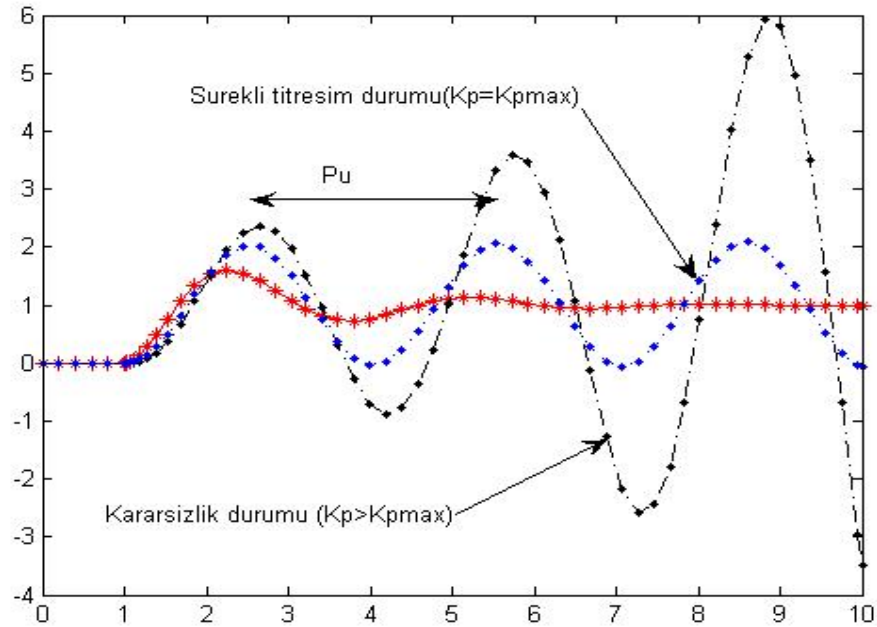
$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) E(s) \quad (6.2)$$

Temel olarak kontrolcü üç terimden oluşur. Birinci terim hata sinyali ile, ikinci terim hata sinyalinin integrali ile ve üçüncü terim hata sinyalinin türevi ile orantılıdır. Orantı işlemi (P), proses değerindeki bir değişime çabuk cevap verdiği için hızlıdır. Orantı terimi yüzünden sabit hata, sabit kontrol işlemine neden olur. İntegral işlemi (I), hata sabit kaldığı sürece kontrol işleminin büyümesine yol açar. Dolayısıyla İntegral kontrolcü kullanılarak hata daima azaltılır. Oransal kontrolcü ile kıyaslandığında İntegral kontrolcü daha yavaş tepki verir. Bir hata ortaya çıktığı anda türev işlemi (D) çok çabuk devreye girer. Ancak hatanın değiştiği anlarda etkindir.

PID kontrolde en önemli nokta kontrolcü katsayıları olan orantı kazancını (K_p), integral zamanını (T_i) ve türev zamanını (T_d) ayarlamaktır. Bunun için deneysel ve teorik birçok yöntem geliştirilmiştir.

Kapalı çevrimli kontrol sisteminin referans değerinde basamak fonksiyonu şeklinde bir uyan sağlandığı zaman, sistem cevabının yeni daimi rejim değerine en kısa zamanda ve kararlı bir biçimde erişmesini sağlayan kontrol organı ayarı optimum ayar kabul edilir. Bu amaçla seçilen ölçüt, cevap eğrisinin ikinci aşma genliğinin, birinci aşma genliğinin dörtte biri olmasıdır. Bu değer hızlı cevap ve çabuk sönümlenme sağladığı deneysel olarak saptanmıştır.

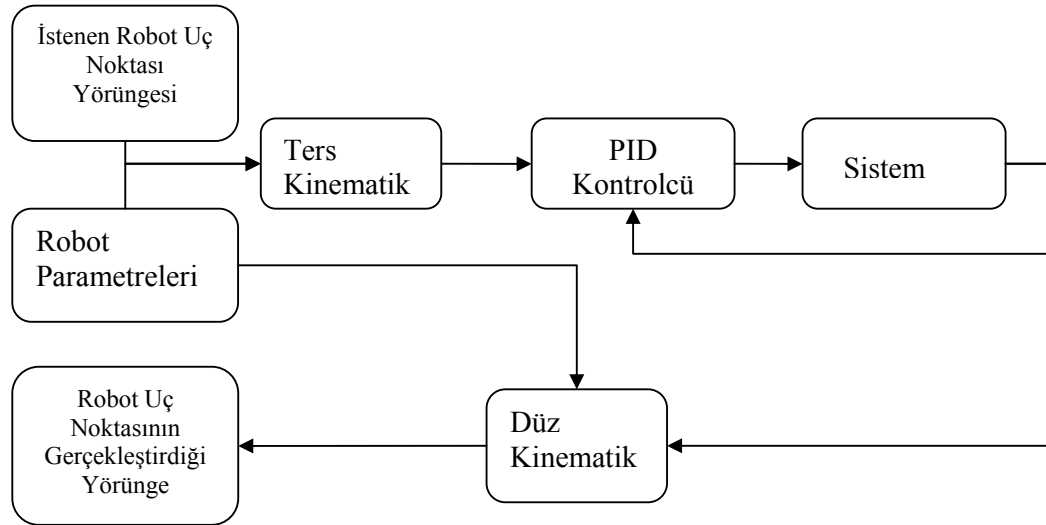
Sönümlü Titreşim Metodu, deneysel yöntemler arasında en tanınmış olanlardan birisidir. Burada amaç kapalı çevrimli kontrol sistemini yalnızca oransal kontrolcü ile denemeye tâbi tutmaktır. İntegral zamanı sonsuza ($T_i = \infty$), türev zamanı ise sıfıra ($T_d = 0$) ayarlanarak sistem üzerinde yalnızca oransal etki kalması sağlanır. Referans değerinde bir basamak değişmesi uygulanır. Kazanç değeri değiştirilerek deney birkaç kez tekrarlanır. Sürekli titreşim yapan cevap eğrisini veren kazanç değerine K_{max} , bu durumdaki titreşim periyoduna ise P_u denir. Bunlar Şekil 6.3 'de gösterilmiştir.



Şekil 6.3 Belirlenen K_p değerine göre çeşitli cevap eğrileri

6.2.1 PID kontrol sistem blok diyagramı

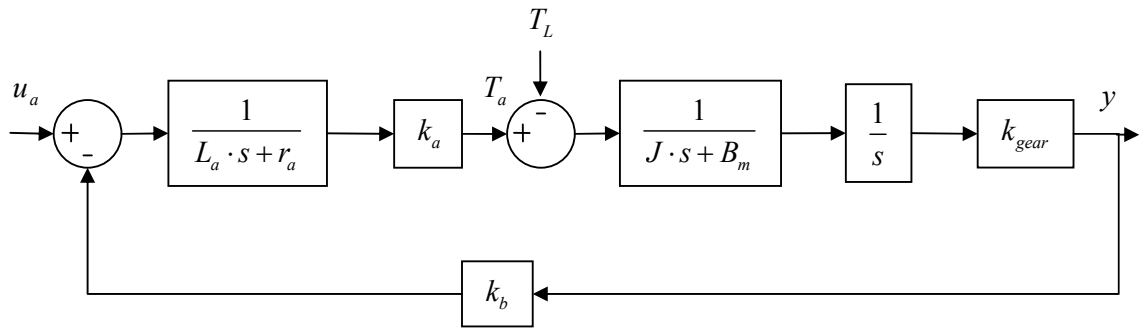
Robotun kontrolünde her bir mafsal ayrı ayrı düşünülerek kontrol uygulanmıştır. Motorlara gelen ataletler, robot kolunun sabit olduğu düşünülerek hesaplanmıştır. Aslında değişken durumdaki kol ataletleri sabit kabul edilerek PID parametreleri maksimum yük durumuna göre tasarlanmıştır. Değişken kol ataletlerine göre anlık PID parametrelerinin farklı kontrol yöntemleri ile hesaplanması mümkün olsa da, kol ataletlerinin sabit kabul edilmesi durumunda sonuçlar tatmin edicidir.



Şekil 6.4 Kontrol sisteminin genel gösterimi

6.2.2. Servo motorların matematiksel modellenmesi

İstenen mafsal açılarının ve torkun elde edilmesi için uygun gerilimin motora uygulanması sağlanmaktadır. Bu aşamada öncelikli olarak bir servo motorun modeli oluşturulmalıdır.



Şekil 6.5 Servo motor blok diyagramı

Çizelge 6.1 Servo motor için değişken çizelgesi

Değişken Adı	Anlamı	Birimi
V_a	Armatür Voltajı	<i>Volt(V)</i>
L_a	Armatür indüktansı	<i>Henry (H)</i>
R_a	Armatür Direnci	<i>Ohm(Ω)</i>
i_a	Armatür akımı	<i>Amper(A)</i>
e_b	Zıt elektromotor kuvveti (emk)	<i>Volt(V)</i>
τ	Motor torku	<i>N-m</i>
θ_m	Motor milindeki açısıl dönme miktarı	<i>Rad</i>
θ_L	Yük milindeki açısıl dönme miktarı	<i>Rad</i>
J_m	Motor eylemsizlik momenti	<i>Kgm²</i>
f_m	Viskoz sürtünme katsayısı	$\frac{s}{rad}$
J_L	Yük eylemsizlik kuvveti	<i>Kgm²</i>
f_L	Yük mili viskoz sürtünme katsayısı	$\frac{s}{rad}$
φ	Alan akısı	<i>Web</i>

Sistem transfer fonksiyonu;

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_a}{s(s^2 J_{eff} L_a + (L_a f_{eff} + R_a J_{eff})s + R_a f_{eff} + K_a K_b)} \quad (6.3)$$

Denklem (6.3) düzenlenirse

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_a}{J_{eff}L_a s^3 + (L_a f_{eff} + R_a J_{eff})s^2 + (R_a f_{eff} + K_a K_b)s}$$

Robotta kullanılan servo motorların motor parametrelili çizelge 6.2 'de gösterilmiştir.

Çizelge 6.2 PITTMAN 14207 serisi servo motor parametreleri

Parametre	SI Değeri
K_A	0.0706397 N-m/A
K_B	0.0705693 V-s/rad
R_A	0.59 Ω
L_A	0.87×10^{-3} H
f_m	1.6864×10^{-5} N-m-s/rad
J_M	4.73286×10^{-5} N-m-s ²

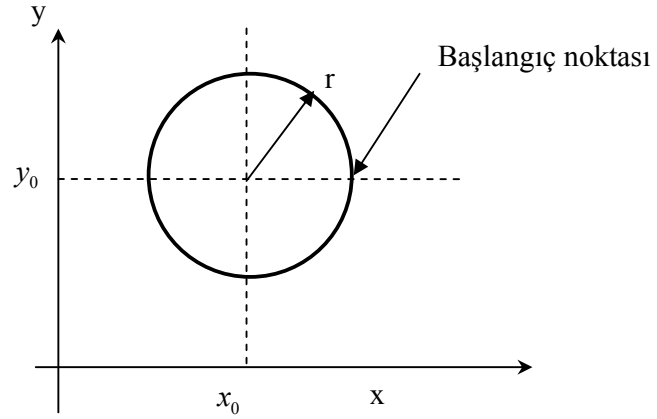
Verilen parametreler denklem (6.3)'de yerine konularak oluşan transfer fonksiyonu denklem (6.4)'de olduğu gibidir.

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{0.03s^3 + 19.88s^2 + 0.154s} \quad (6.4)$$

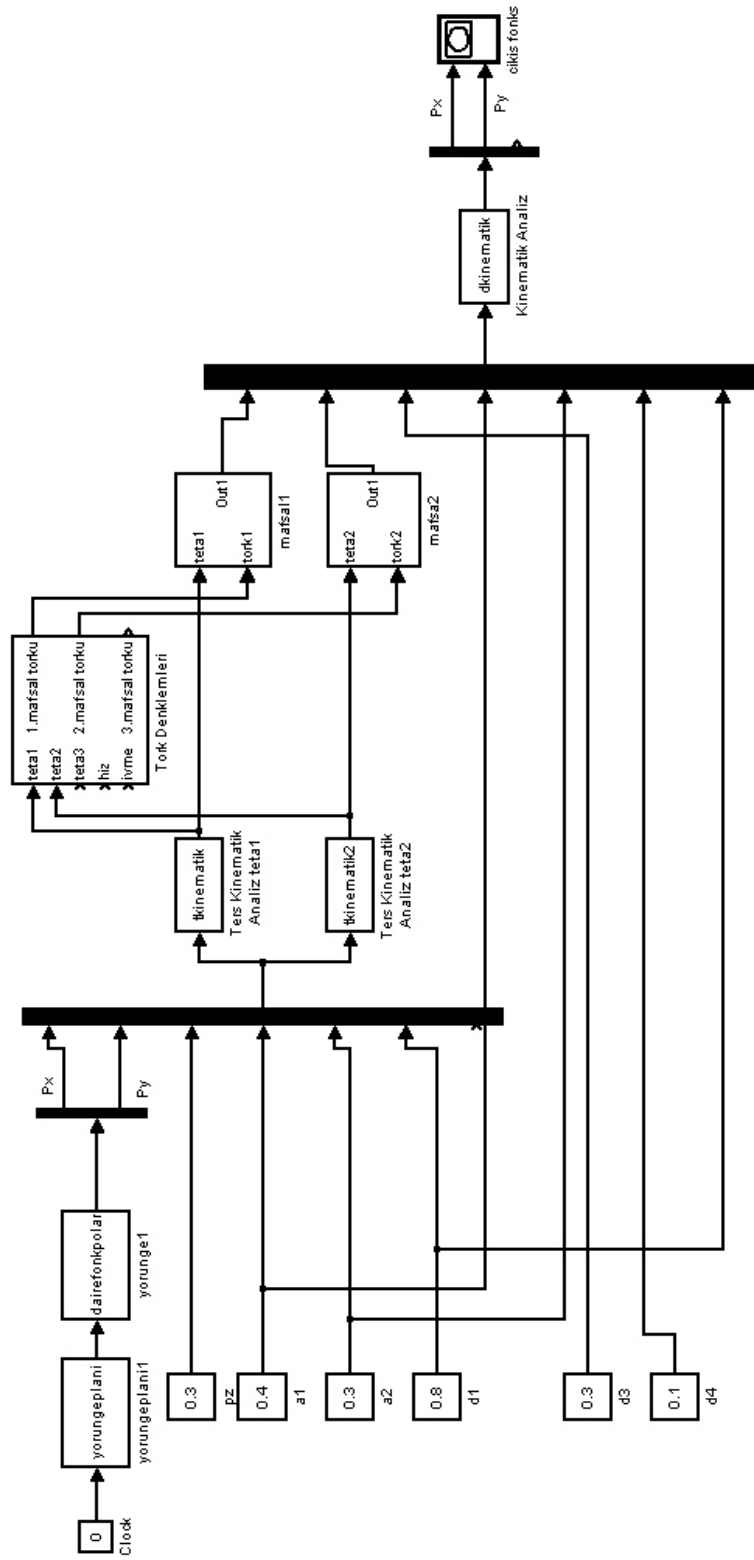
7. SİMÜLASYONLAR

7.1. Kontrol Sisteminin Simulink Yardımıyla Modellenmesi ve Simülasyonu

Robotun simülasyonu için robotun önceki bölümlerde elde edilen matematiksel ifadeleri, Matlab'ın Simulink ara birimine aktarılarak Şekil 7.2'de görülen kontrol sistemi oluşturulmuştur. Kontrol sisteminin bölümleri aşağıda ayrı ayrı ele alınmıştır. Robotun izleyeceği yörünge "Yörünge Bloğu" yardımıyla oluşturulmaktadır. Bloğun çıkışında robot uç elemanının sabit eksene göre konumu olan $[p_x, p_y, p_z]$ konum vektörü elde edilmektedir. Simülasyonda sisteme uygulanan örnek yörünge Şekil 7.1'de görüldüğü gibi bir dairedir.



Şekil 7.1 Robotun izlemesi istenen uç yörünge



Şekil 7.2 Kontrol sistemi Simulink modeli

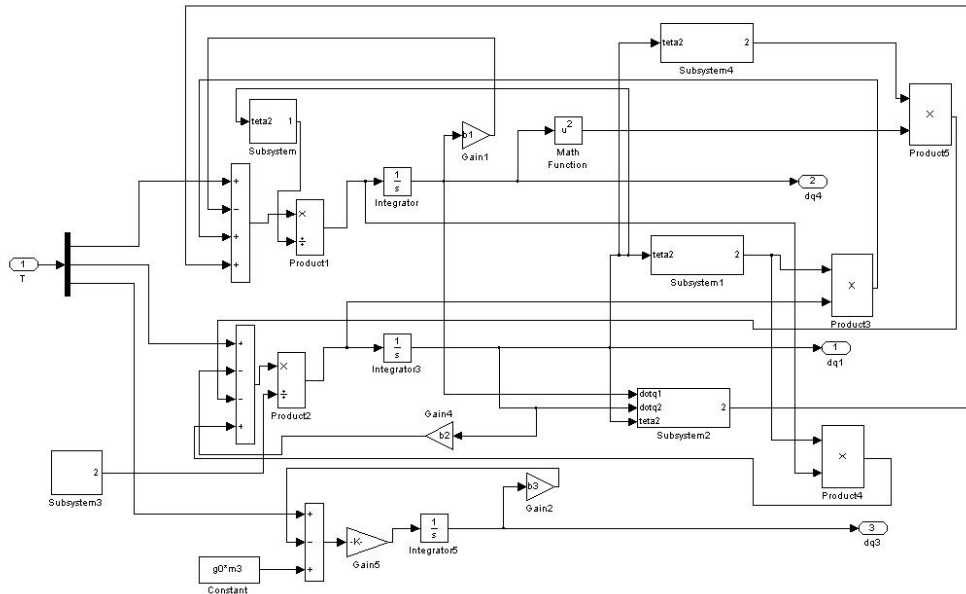
“Yörünge planı” bloğu lineer, sikloid, polinom veya harmonik fonksiyonlarının sisteme uygulandığı kısmı oluşturmaktadır. Böylece kartezyen yörünge planlaması yapılarak, yörünge bu plana uygun şekilde izletilmektedir.

Yörünge bloğu ile yarıçap ve açı verilerek daire çizdirilmektedir. Blok; yörünge planından gelen açı ve sabit bir yarıçap değeri ile çıkışta kartezyen koordinatlarda x ve y koordinatlarını içeren bir vektör vermektedir.

“Ters Kinematik Analiz” bloğunda ise Bölüm 3.2’de elde edilen ters kinematik denklemler kullanılarak, girilen takım konumuna (**P**) karşın gerekli mafsalsal değişkenlerinin değerlerinin elde edilmesi sağlanmaktadır.

“Tork Denklemleri” bloğu ile robot için elde edilen dinamik denklemler, girilen mafsalsal değişkenleri ve bu değişkenlerin değerlerine bağlı olarak hesaplanan hız ve ivme değerleri kullanılarak gerekli torklar elde edilmektedir. Bu tork değerleri sisteme bozucu etki olarak girilmektedir.

Son olarak, sistem çıkışında elde edilen mafsalsal değişkenlerinin değerlerine karşılık gelen kartezyen koordinatlarda tanımlı konum bilgisine “Düz Kinematik Analiz” bloğu yardımıyla dönüştürülmektedir.

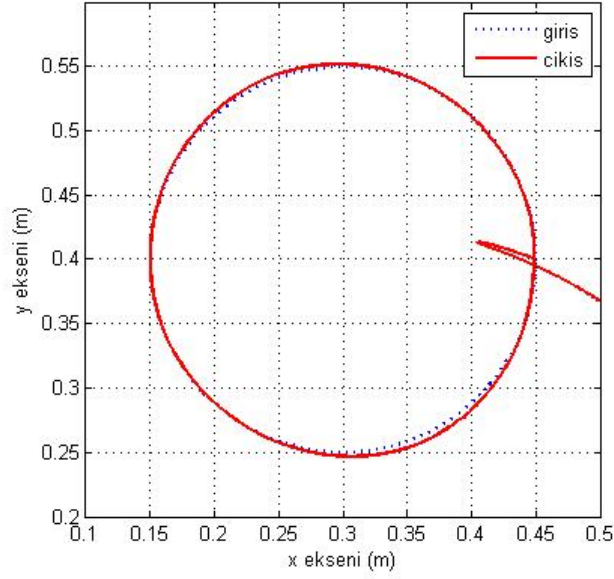


Şekil 7.3 Robotun Simulink yardımıyla yapılan dinamik modeli

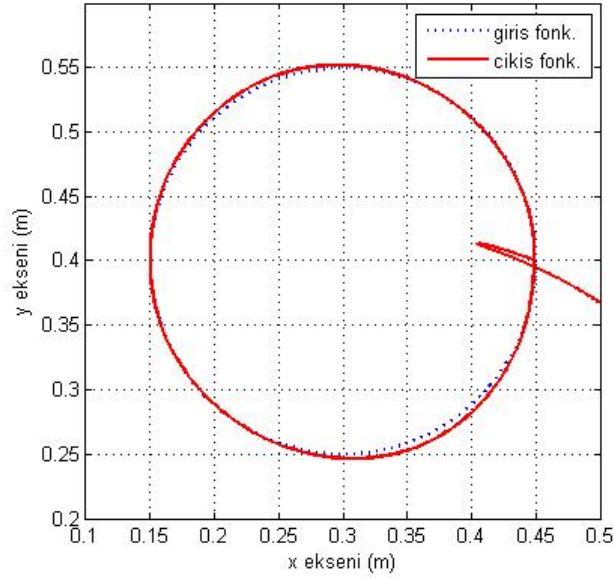
7.2. Simülasyon Sonuçları

Şekil 4.1 ve Şekil 4.2’de verilen lineer, sikloid, polinom ve harmonik fonksiyonlar kartezyen koordinatlarda tanımlı dairesel yörünge izlenmesinde kullanılarak, istenen yörünge ile gerçekleşen yörünge aynı grafik üzerinde gösterilmiştir. Daha sonra, gerçekleşen kartezyen konumları sağlayan mafsal açıları, hızları ve ivmeleri her bir fonksiyon için ayrı ayrı verilmiştir.

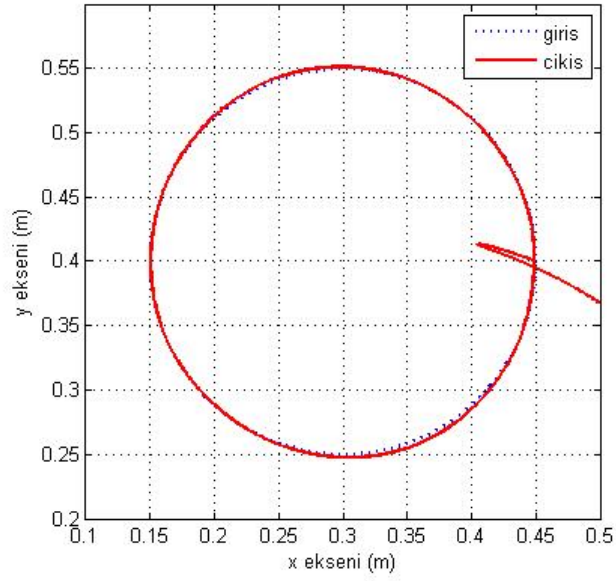
Grafikler iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde robotun uç elemanı sıfır konumundan, dairesel yörünge üzerindeki başlangıç noktasına hareket etmektedir. Bu hareketin beş saniyede gerçekleşmesi öngörülmüştür. Bu hareket esnasında, sistemin darbe girişine cevabı elde edilen grafik üzerinde açıkça görülmektedir. Robot uç elemanının dairesel yörüngeye oturmasından sonra, toplam yolun dört saniyede alınacağı öngörülmüştür.



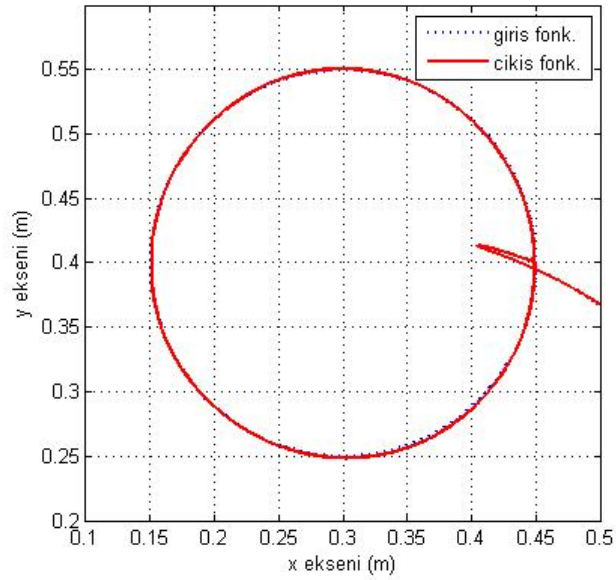
Şekil 7.5 Sikloid fonksiyonunun uygulanmasıyla gerçekleştirilen robot uç noktası yörüngesi



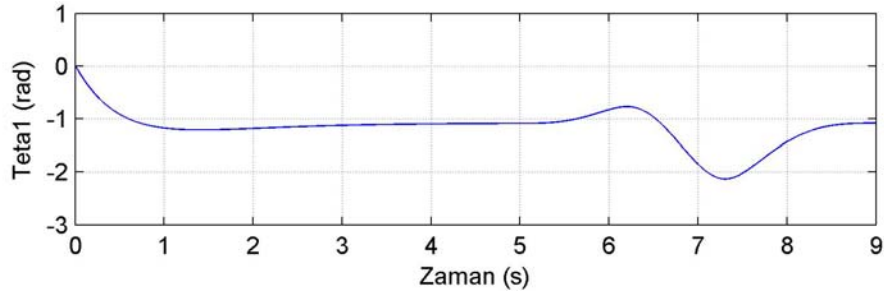
Şekil 7.6 (4-5-6-7) polinomunun uygulanmasıyla gerçekleştirilen robot uç noktası yörüngesi



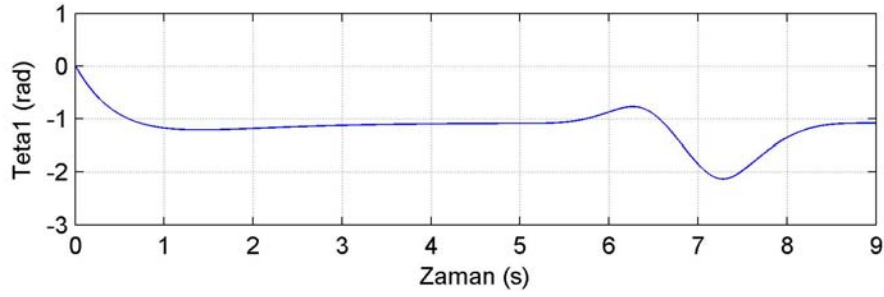
Şekil 7.7 Harmonik hareket fonksiyonunun uygulanmasıyla gerçekleştirilen robot uç noktası yörüngesi



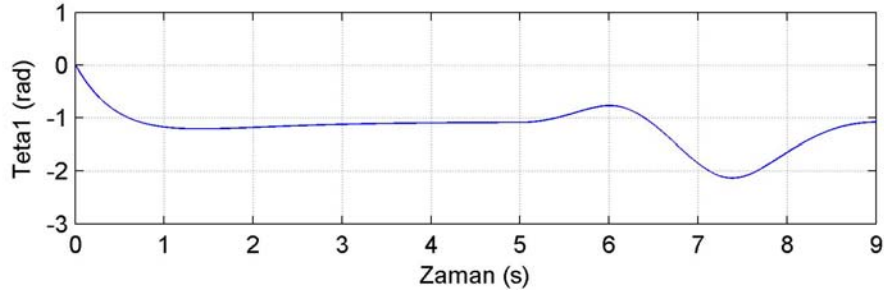
Şekil 7.8 Lineer hareket fonksiyonunun uygulanmasıyla gerçekleştirilen robot uç noktası yörüngesi



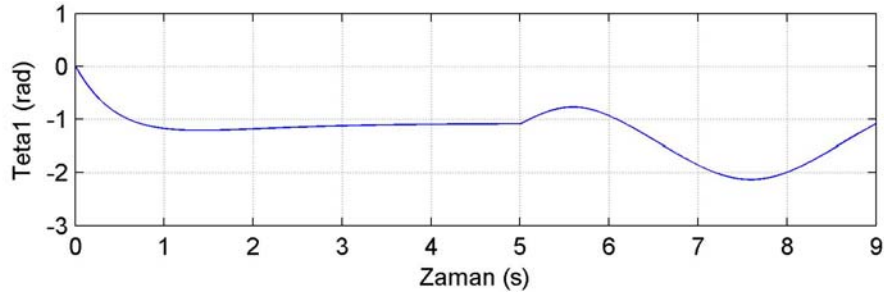
Şekil 7.9-a Sikloid fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği



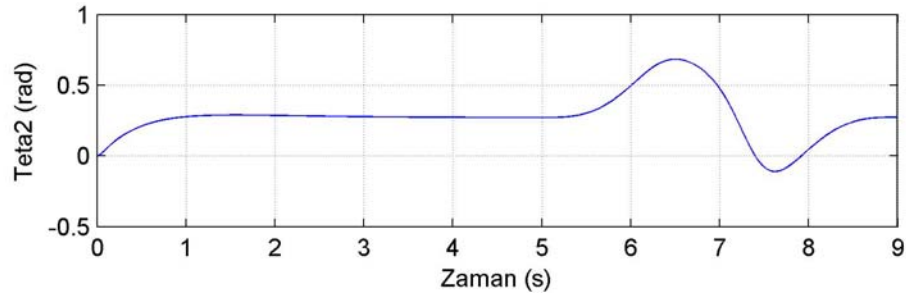
Şekil 7.9-b Polinom fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği



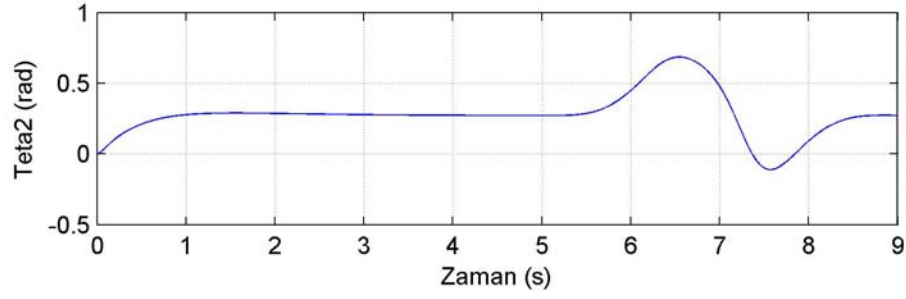
Şekil 7.9-c Harmonik fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği



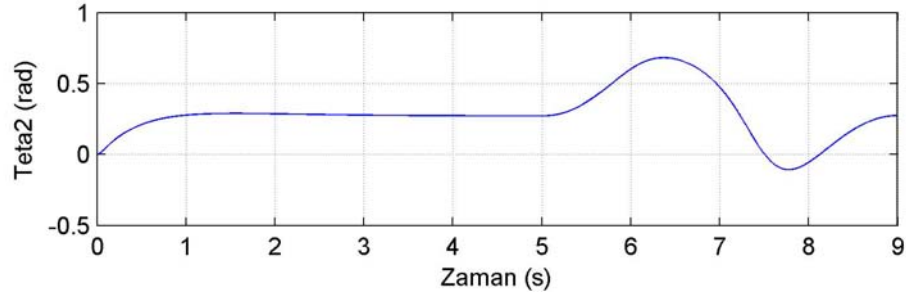
Şekil 7.9-d Lineer fonksiyonu için birinci mafsal açısının değişim grafiği



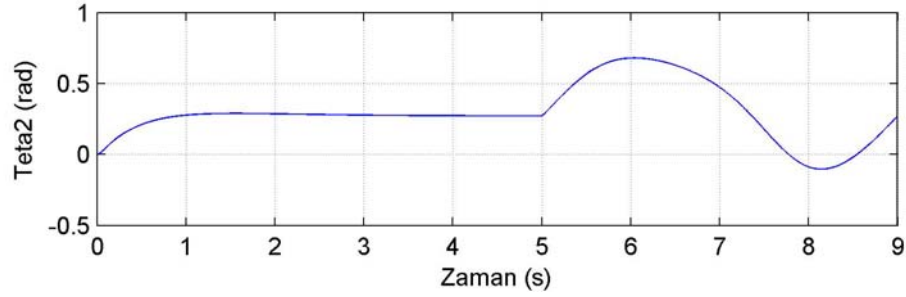
Şekil 7.10-a Sikloid fonksiyonu için birinci mafsals açısının değışim grafiği



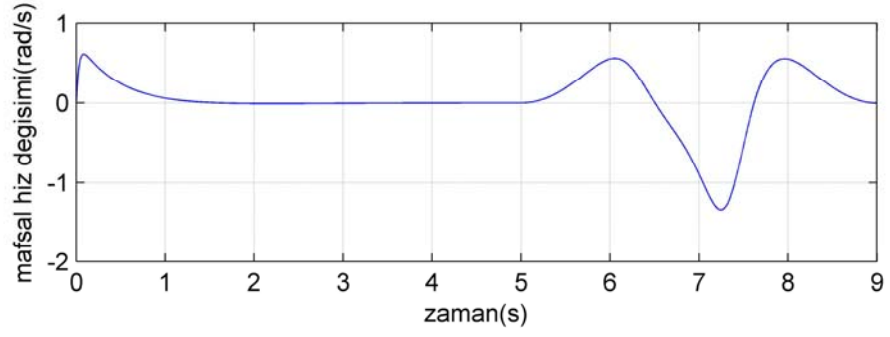
Şekil 7.10-b Polinom fonksiyonu için birinci mafsals açısının değışim grafiği



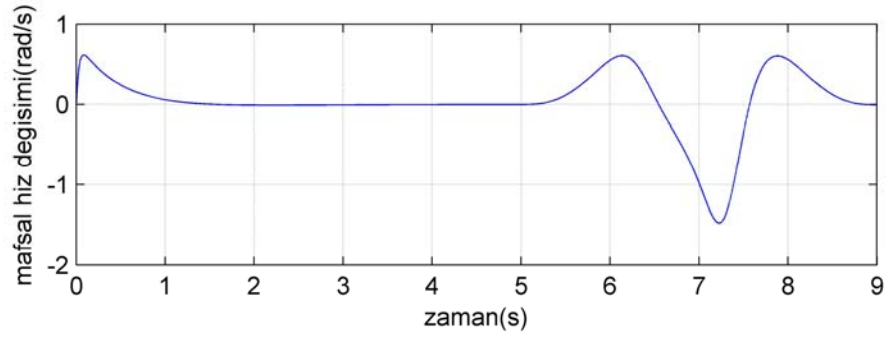
Şekil 7.10-c Harmonik fonksiyonu için birinci mafsals açısının değışim grafiği



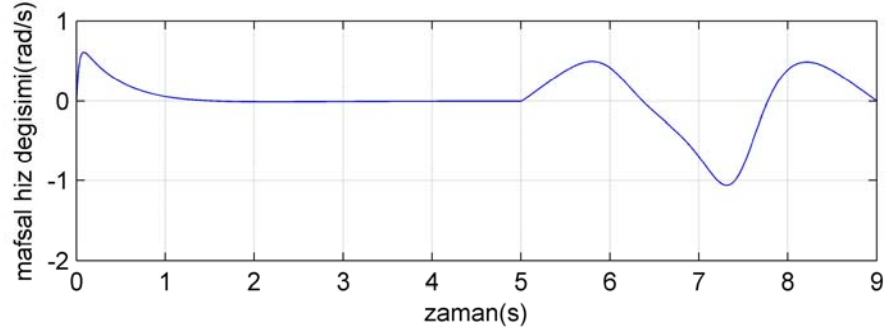
Şekil 7.10-d lineer fonksiyonu için birinci mafsals açısının değışim grafiği



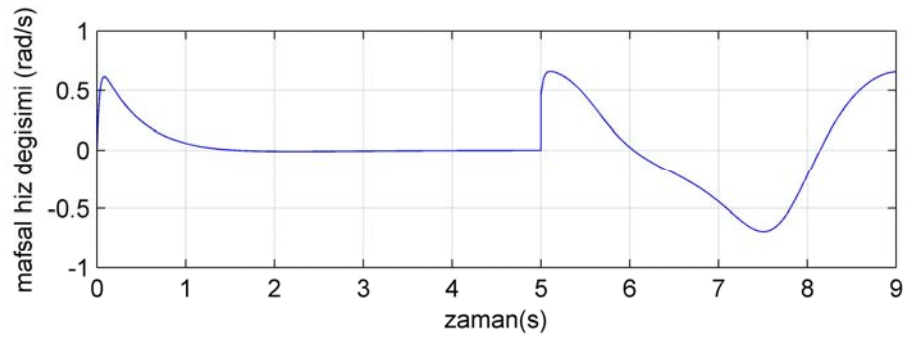
Şekil 7.11-a Sikloid fonksiyonu için birinci mafsalsal hız grafiği



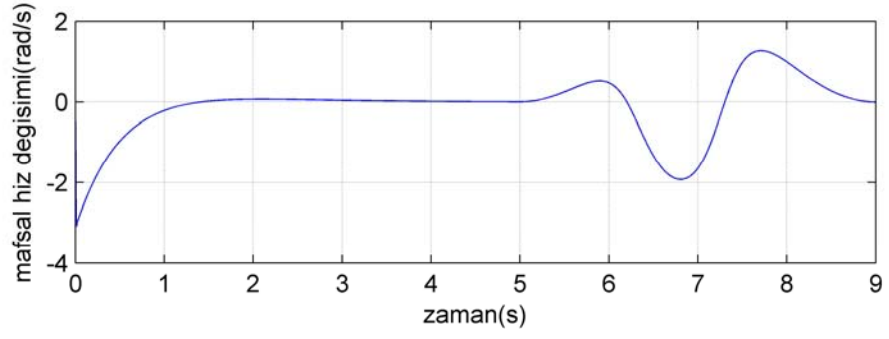
Şekil 7.11-b Polinom fonksiyonu için birinci mafsalsal hız grafiği



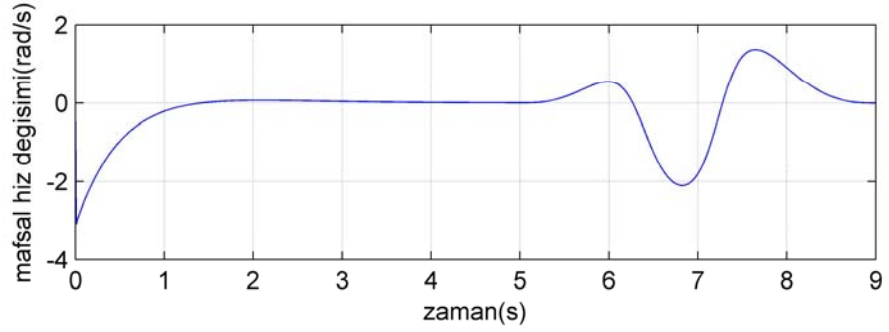
Şekil 7.11-c Harmonik fonksiyonu için birinci mafsalsal hız grafiği



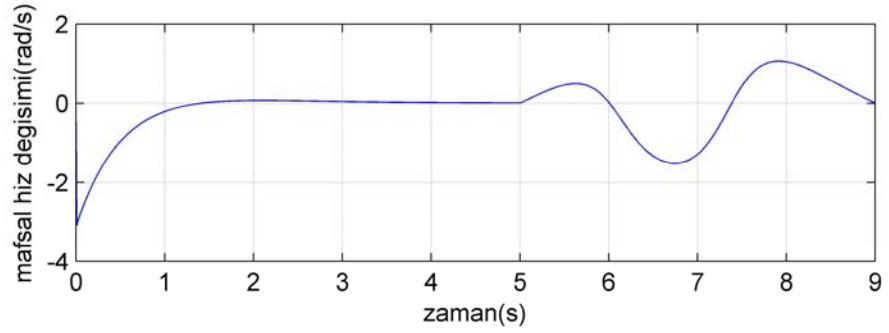
Şekil 7.11-d Lineer fonksiyon için birinci mafsalsal hız grafiği



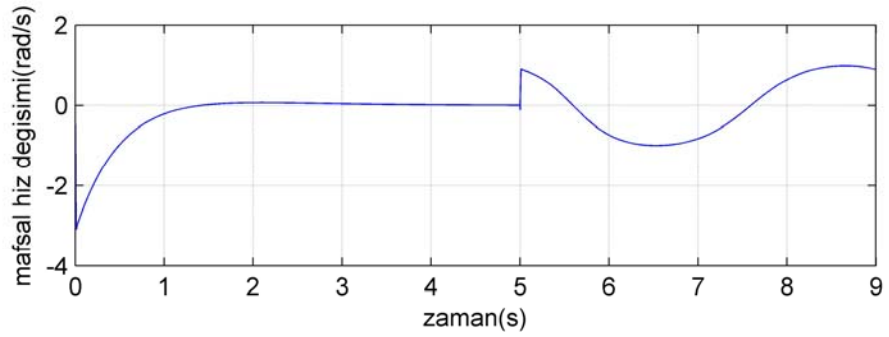
Şekil 7.12-a Sikloid fonksiyonu için ikinci mafsal hız grafiği



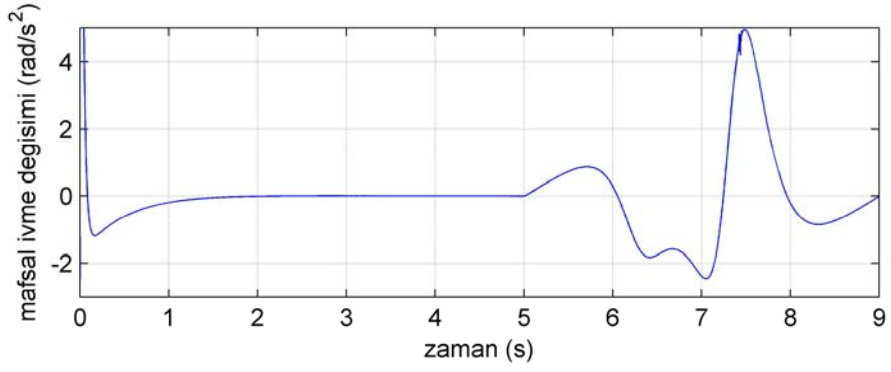
Şekil 7.12-b Polinom fonksiyonu için ikinci mafsal hız grafiği



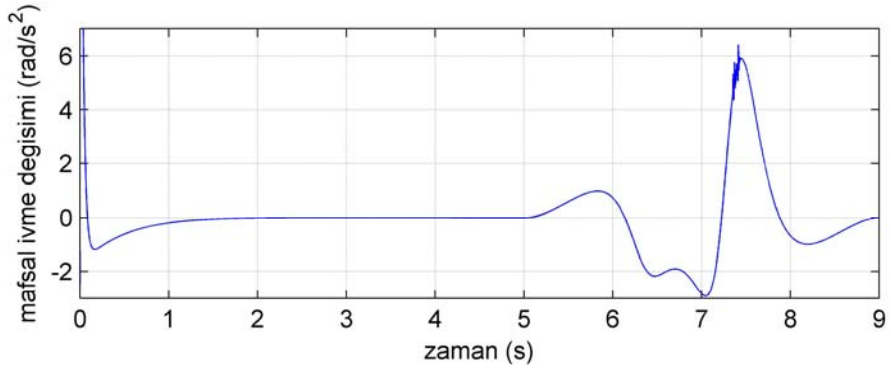
Şekil 7.12-c Harmonik fonksiyonu için ikinci mafsal hız grafiği



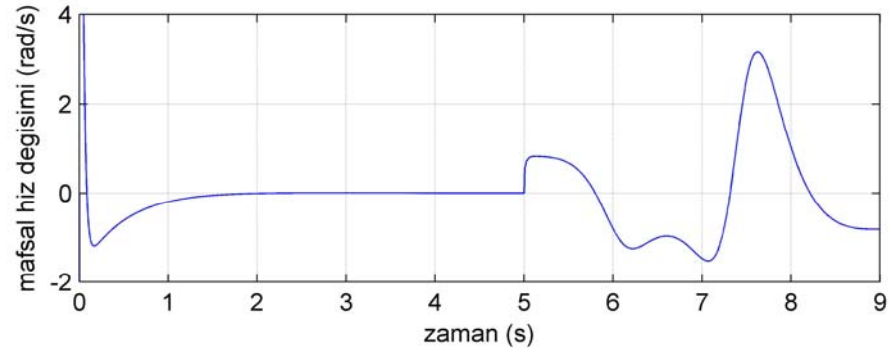
Şekil 7.12-d Lineer fonksiyonu için ikinci mafsal hız grafiği



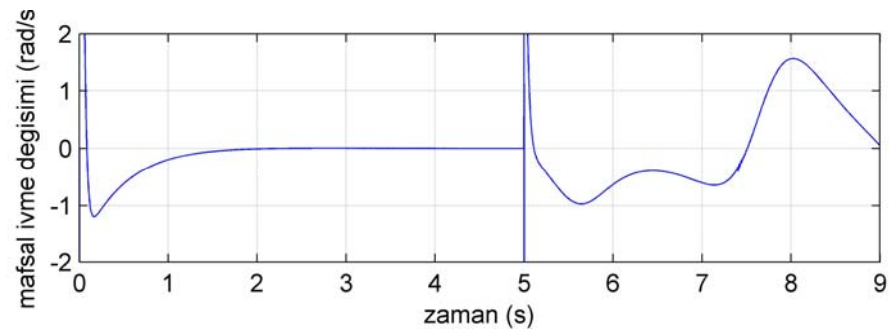
Şekil 7.13-a Sikloid fonksiyonu için birinci mafsalsal ivme grafiği



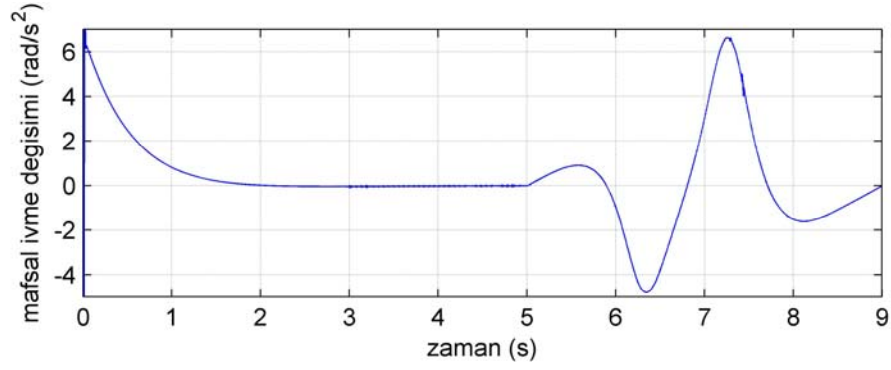
Şekil 7.13-b Polinom fonksiyonu için birinci mafsalsal ivme grafiği



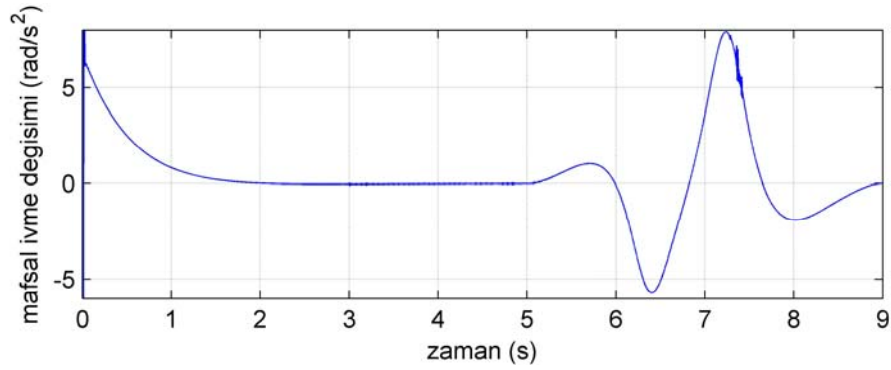
Şekil 7.13-c Harmonik fonksiyonu için birinci mafsalsal ivme grafiği



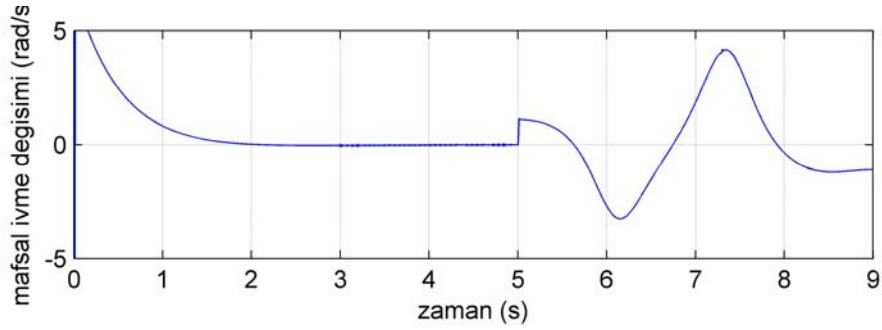
Şekil 7.13-d Lineer fonksiyonu için birinci mafsalsal ivme grafiği



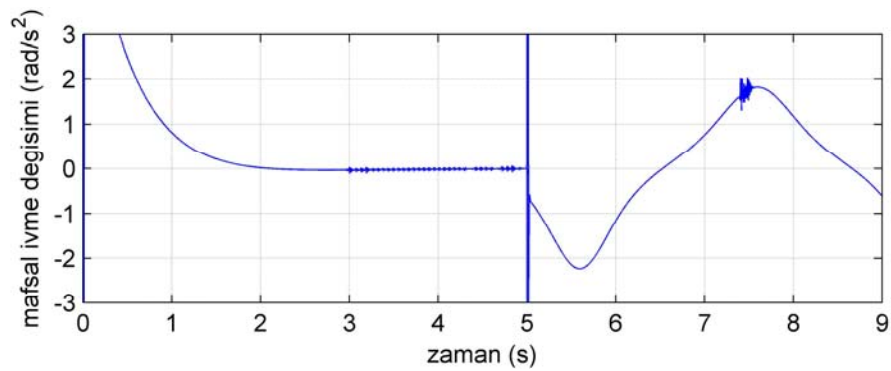
Şekil 7.14-a Sikloid fonksiyonu için ikinci mafsalsal ivme grafiği



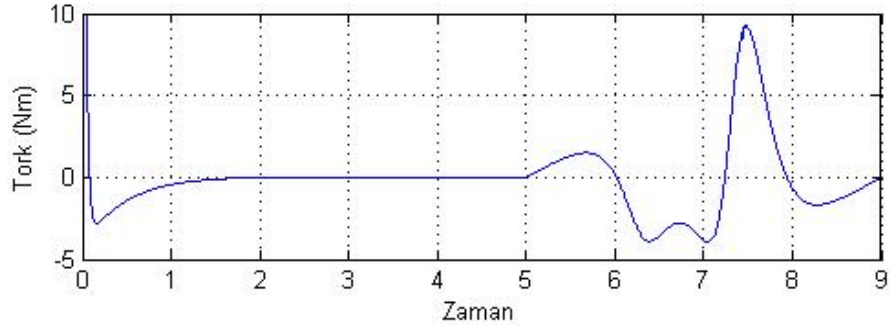
Şekil 7.14-b Polinom fonksiyonu için ikinci mafsalsal ivme grafiği



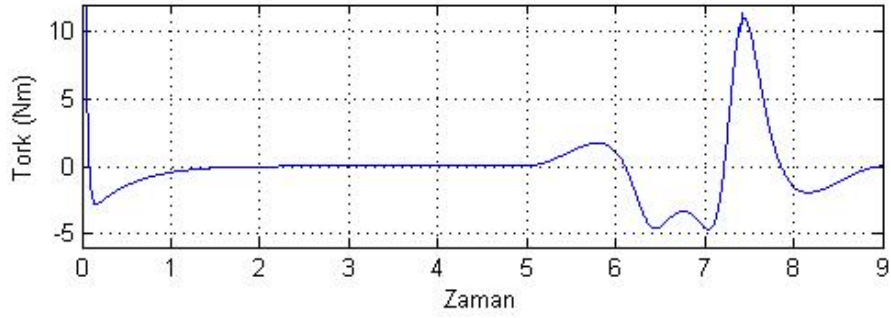
Şekil 7.14-c Harmonik fonksiyonu için ikinci mafsalsal ivme grafiği



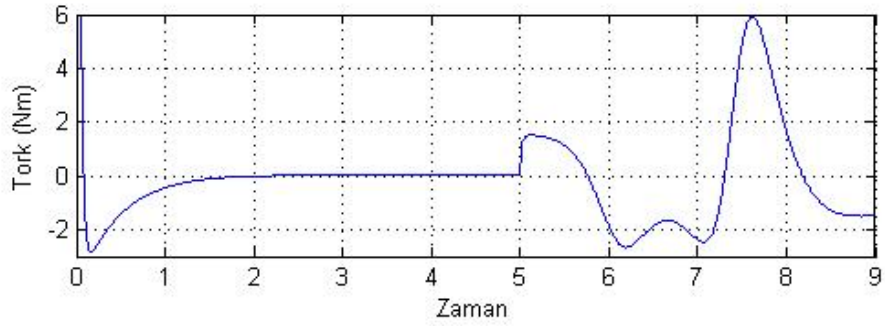
Şekil 7.14-d Lineer fonksiyonu için ikinci mafsalsal ivme grafiği



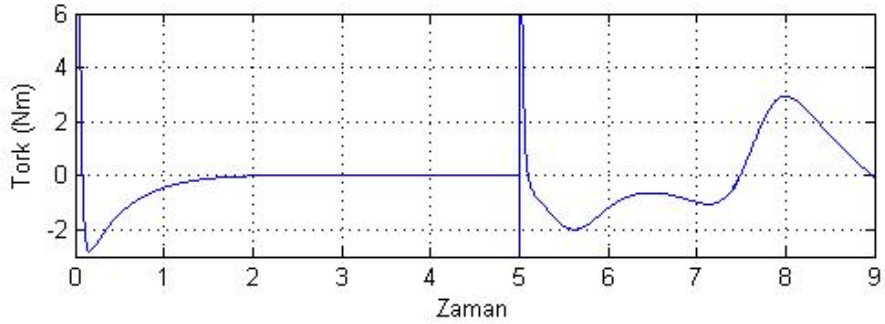
Şekil 7.15-a Sikloid fonksiyonu için birinci mafsallık tork değişim grafiği



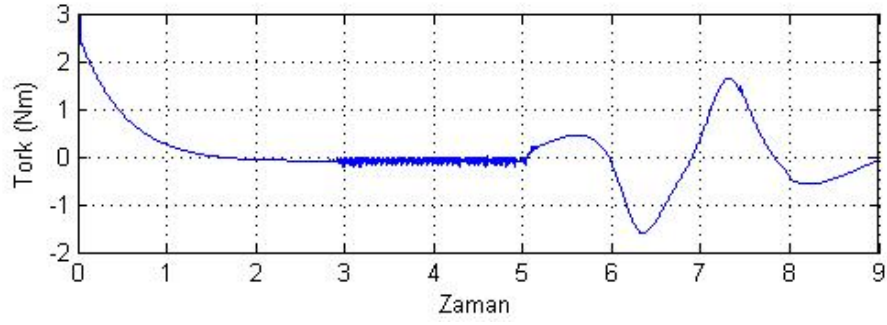
Şekil 7.15-b Polinom fonksiyonu için birinci mafsallık tork değişim grafiği



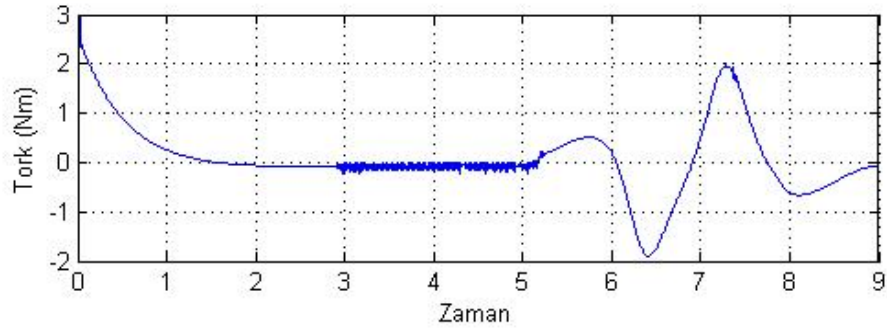
Şekil 7.15-c Harmonik fonksiyonu için birinci mafsallık tork değişim grafiği



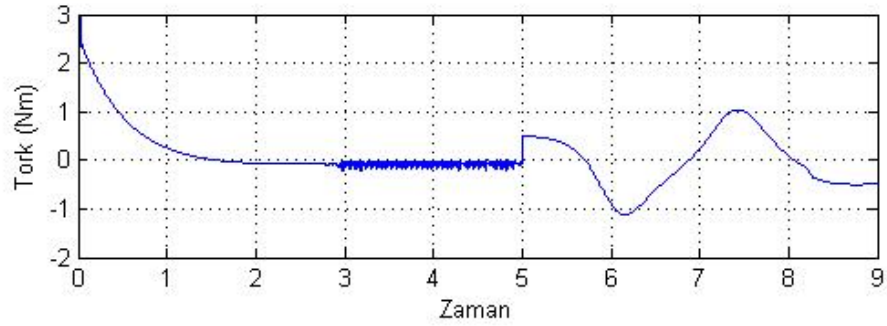
Şekil 7.15-d Lineer fonksiyonu için birinci mafsallık tork değişim grafiği



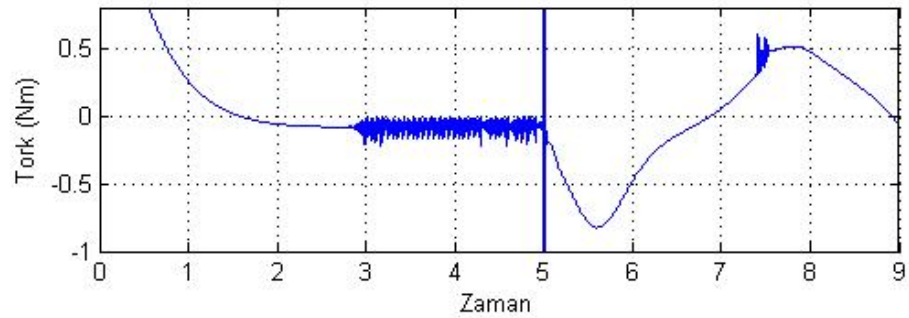
Şekil 7.16-a Sikloid fonksiyonu için ikinci mafsal tork değişim grafiği



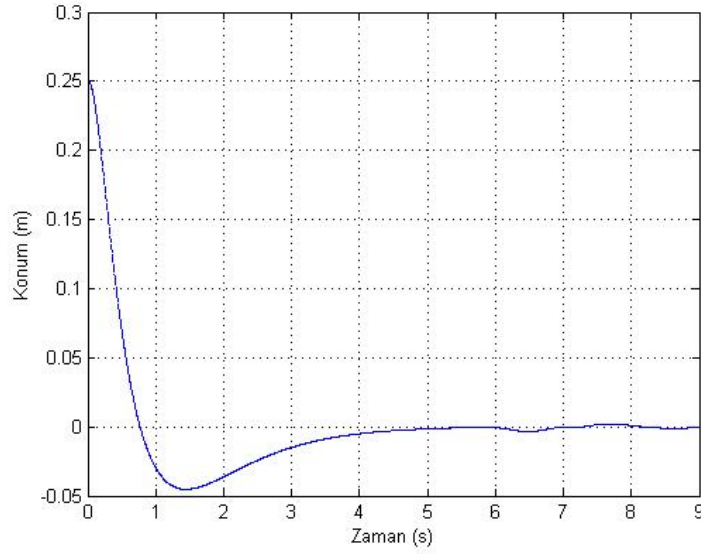
Şekil 7.16-b Polinom fonksiyonu için ikinci mafsal tork değişim grafiği



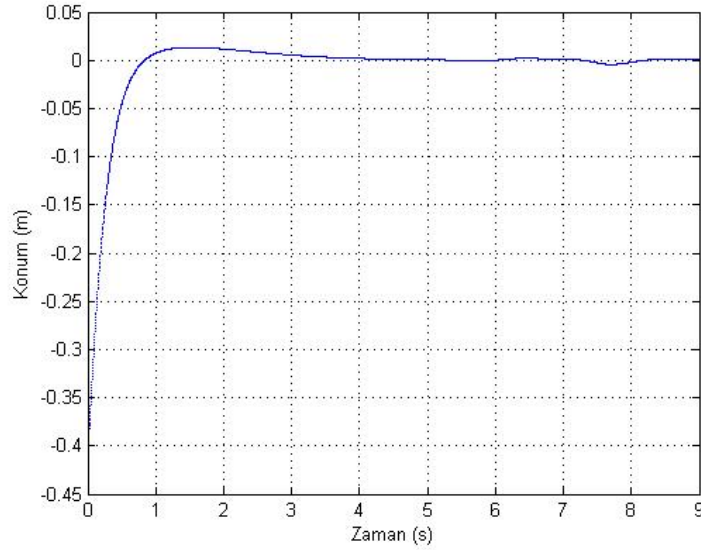
Şekil 7.16-c Harmonik fonksiyonu için ikinci mafsal tork değişim grafiği



Şekil 7.16-d Lineer fonksiyonu için ikinci mafsal tork değişim grafiği

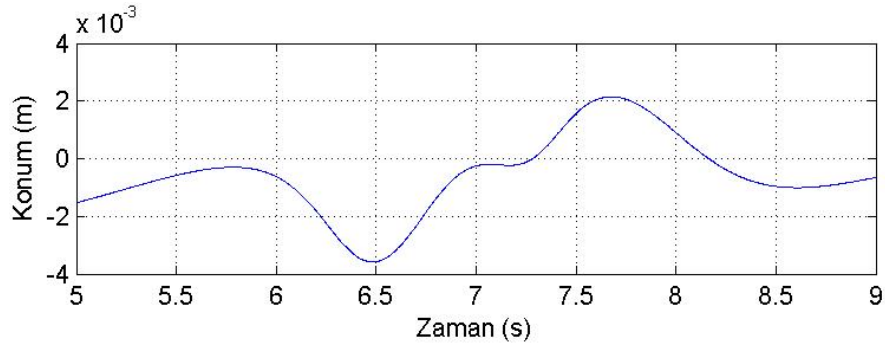


Şekil 7.17 Sikloid fonksiyonu için harekete başlama ve bitiş aralığında x ekseninde oluşan hata grafiği

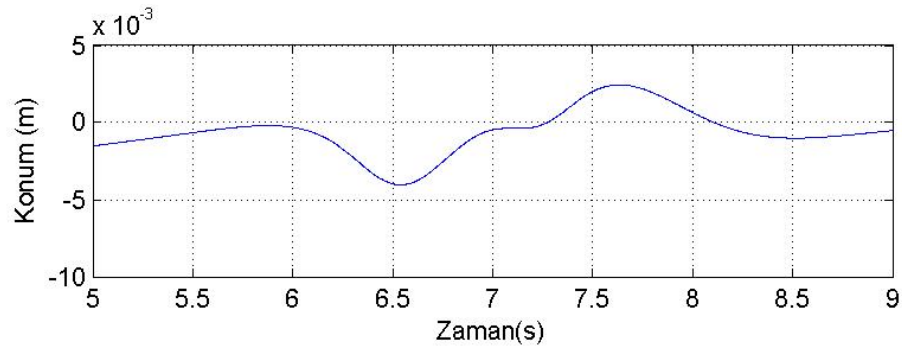


Şekil 7.18 Sikloid fonksiyonu için harekete başlama ve bitiş aralığında y ekseninde oluşan hata grafiği

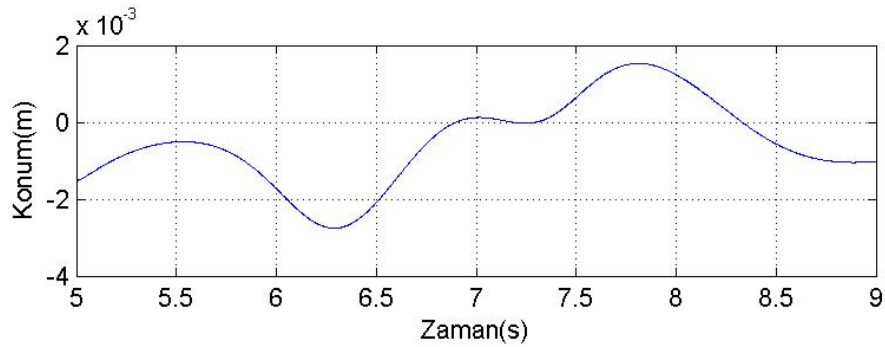
Uygulanan fonksiyonlara göre oluşan hata grafikleri Şekil 7.17 ve Şekil 7.18'de görülmektedir. Sıfır noktasından dairesel yörüngeye başlama noktası aralığındaki hata oranının büyüklüğü grafiklerde açıkça görülmektedir. 5. ve 9. saniye aralığında gerçekleşen, dairesel yörünge izlenmesi esnasında oluşan hata değişimi Şekil 7.19 ve Şekil 20'de verilmiştir.



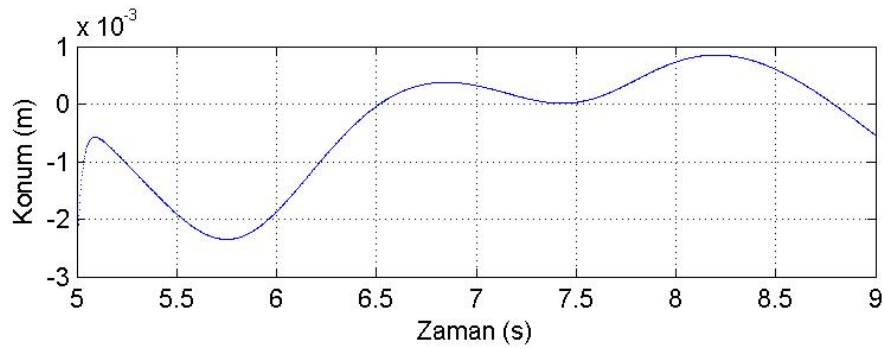
Şekil 7.19-a Sikloid fonksiyonu için x ekseninde meydana gelen hata grafiği



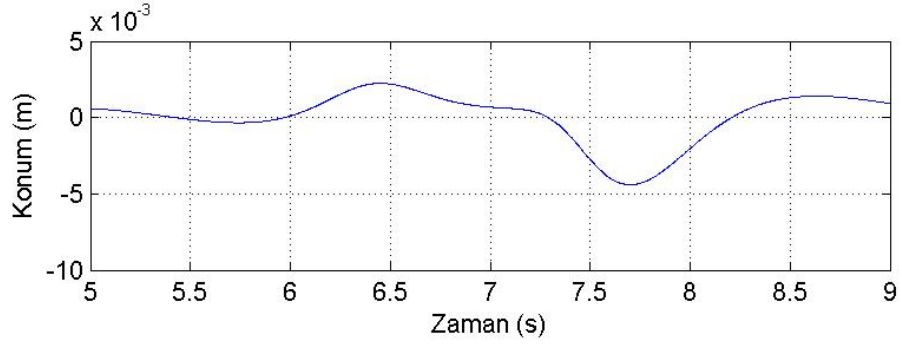
Şekil 7.19-b Polinom fonksiyonu için x ekseninde meydana gelen hata grafiği



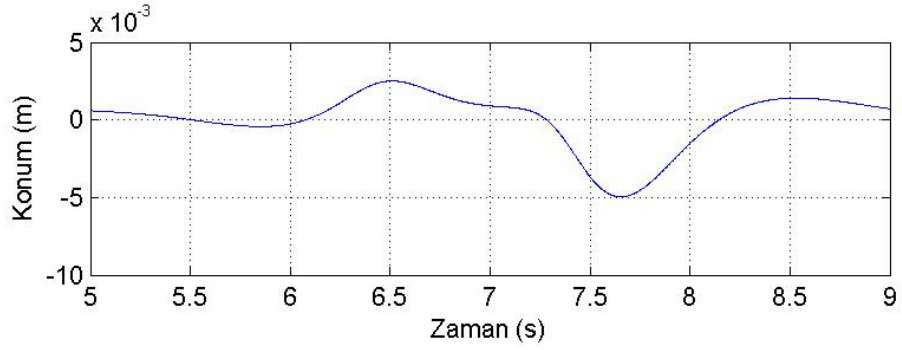
Şekil 7.19-c Harmonik fonksiyonu için x ekseninde meydana gelen hata grafiği



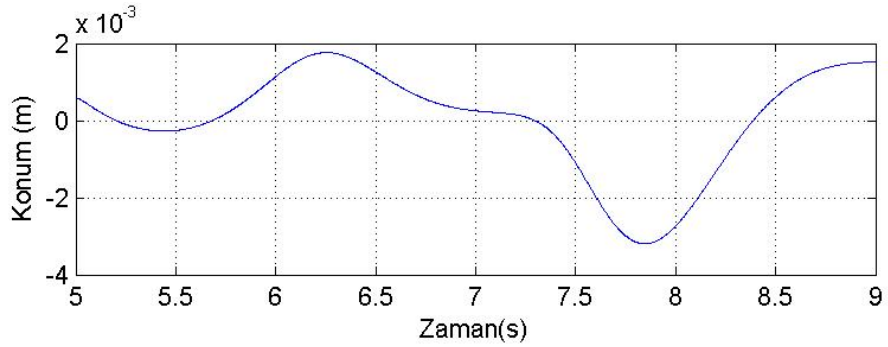
Şekil 7.19-d Lineer fonksiyonu için x ekseninde meydana gelen hata grafiği



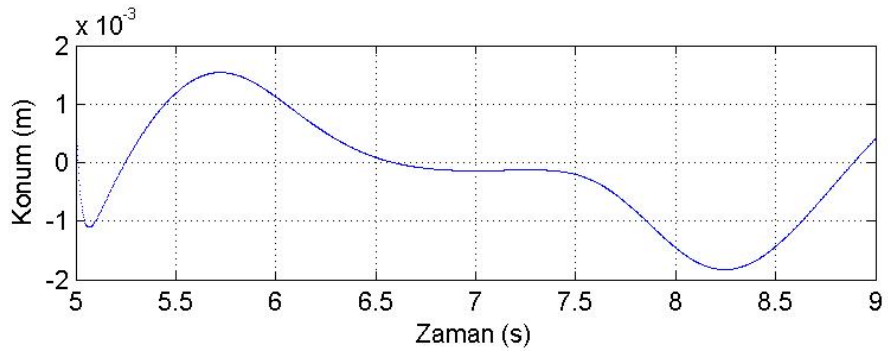
Şekil 7.20-a Sikloid fonksiyonu için y ekseninde meydana gelen hata grafiği



Şekil 7.20-b Polinom fonksiyonu için y ekseninde meydana gelen hata grafiği



Şekil 7.20-c Harmonik fonksiyonu için y ekseninde meydana gelen hata grafiği



Şekil 7.20-d Linear yol alma fonksiyonu için y ekseninde meydana gelen hata grafiği

8.TARTIŞMA VE SONUÇ

PID kontrol yöntemi kullanılarak oluşturulan sistem modelinde mafsallar ayrı ayrı kontrol edilerek sonuca gidilmiştir. Simülasyon sonucunda gerçekleşen uç noktanın yörüngesi ile istenen yörünge karşılaştırılmıştır. Ayrıca hareketin gerçekleşmesi esnasında oluşan mafsal konum, hız, ivme ve torklarının zamana göre değişimleri incelenmiştir. Bütün konum ve tork grafiklerinde ilk beş saniyede, robotun uç elemanı sıfır konumundan başlangıç noktasına gelmekte, daha sonraki dört saniyede ise dairesel yörünge izlenmektedir. Dairesel yolun izlenmesinde, dört farklı yol alma fonksiyonu uygulanmıştır. Bunlar sırasıyla sikloid, polinom, harmonik ve lineer fonksiyonlar şeklindedir.

Şekil 7.5-7.8'de izlenmek istenen ve kontrol sonucu gerçekleşen yörünge birlikte görülmektedir. Sisteme uygulanan farklı yol alma fonksiyonlarının etkileri hem mafsal değişkenleri üzerinde hem de kartezyen yörünge üzerinde gözlemlenmiştir. Grafiklerde, gerçekleşen takım yörüngesinde istenen yörüngeden sapmalar meydana geldiği görülmektedir.

Bu sapmaların şekil 7.9 ve şekil 7.10 da görüldüğü gibi ana kolun hareket yönünün değişimi sırasında meydana geldiği görülmektedir. Takım yörüngesindeki sapmalarda en az hata lineer yol alma fonksiyonu ile gerçekleşmiştir. Bunun nedeni ise şekil 7.11 ve 7.12 de verilen mafsal hız grafiklerinden de görüleceği gibi diğer yol alma fonksiyonlarının başlangıç ve bitişi esnasında hızların azalmasına rağmen, orta kısımda hızların çok yükselmesidir. Hızların yükselmesinin nedeni ise başlangıçta kaybedilen zamanın telafi edilmeye çalışılmasıdır. Bu değerlendirmeye göre lineer yol alma fonksiyonunun uygulanması robot için bir avantaj olarak görülebilir ancak şekil 7.15-d ve şekil 7.16-d de birinci ve ikinci mafsal için tork grafiklerinden görüleceği üzere torklar yörünge başlangıç ve sonunda aşırı yükselmekte ve ivmeler robotun rijit kalacağı alanın dışına çıkmaktadır. Bu durum şekil 7.13 ve şekil 7.14 deki ivme grafiklerinde görülmektedir. Ayrıca şekil 7.14-d'de Lineer fonksiyon için verilen ivme grafiğinin 7,5. saniyesinde aşırı bir titreşim meydana gelmektedir. Bu titreşim durumu diğer fonksiyonlarda gerçekleşmemektedir. Oluşan torklar bakımından sikloid fonksiyonuna göre polinom

fonksiyonu her iki ekseninde de daha fazla tork gerektirmektedir. En az tork ise lineer fonksiyonun uygulanması esnasında meydana gelmektedir.

Şekil 7.19 ve şekil 7.20 de oluşan hata grafiklerinde en az hata lineer yol alma fonksiyon ile oluşmaktadır. Lineer fonksiyondan sonra ise harmonik fonksiyonu gelmektedir. Sikloid fonksiyonuna göre x ve y eksenlerinde hata miktarı polinom yol alma fonksiyonunda daha fazla olmaktadır.

Sonuç olarak her ne kadar lineer yol alma fonksiyonu ile hız, ivme ve torklar ortalama olarak diğer yol alma fonksiyonlarına göre düşük çıksa da; oluşturduğu titreşim ve anlık gerçekleşen yüksek torklar nedeniyle yol alma fonksiyonu olarak kullanılması uygun değildir. Diğer yol alma fonksiyonlarında ise Oluşan hata grafikleri ve tork grafiklerinden sikloid yol alma fonksiyonu polinom ve harmonik yol alma fonksiyonlarına göre iyi sonuç vermektedir. Genel olarak polinom ve sikloid fonksiyonları birbirlerine yakın sonuçlar vermektedir. Yörüngenin daha hızlı izletilmesi durumunda polinom yol alma fonksiyonu da kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Clifton, C., Homaifar, A., Bikdash , M., Design of generalized Sugeno controllers by approximating hybrid fuzzy–PID controllers, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1996, Page 1906.
- [2] Corke, P., A Computer Tool For Simulation And Analysis: The Robotic Toolbox For Matlab Corke P., Robotic Toolbox For Matlab, 2001
- [3] Das, M. T., Dulger, L. C., Mathematical modelling, simulation and experimental verification of a scara robot, Simulation Modelling Practice and Theory, April 2005, Pages 257-271
- [4] Fu, K.S, Gonzales, R.C, Lee C.S,Robotics ,1987, McGraw-Hill Book Company
- [5] Köker, R., Öz , C., Akar, T. C., Ekiz, H., A study of neural network based inverse kinematics solution for a three-joint robot, Robotics and Autonomous Systems, 31 December 2004, Pages 227-234
- [6] Misir, D., Malki, H.A., Chen, G., Graphical stability analysis for a fuzzy PID controlled robot arm model,IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1998, Page 451.
- [7] Özkök, D., PID, FUZZY+PID and variable structure control of two link manipulators, Boğaziçi Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği ABD, 1998
- [8] Semetay, C., Robot kontrolü ve kinematiği, İÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği ABD, Haziran 2001
- [9] Sun, D., Mills , J.K., High-accuracy trajectory tracking of industrial robot manipulator using adaptive-learning schemes, American Control Conference, 1999, Page 1935.
- [10] Tekdemir, A.S., Manipülâtör kontrolü için çok değişkenli adaptif PID regülatör, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği ABD, 1991
- [11] Yüksel İ. , Otomatik Kontrol Sistem Dinamiği ve Denetim Sistemleri, Uludağ Ün., 2001

EK-1**Dinamik analiz için yazılan program**

```

%dinamik analiz
clf
clc
clear
syms tetal teta2 teta3
%*****
%DENAVÝT-HARTENBERG(D-H) PARAMETRELERÝ
alfa1=pi; ,a1=0.4; ,d1=0.8;
alfa2=0; ,a2=0.3; ,d2=0;
alfa3=0; ,a3=0; ,d3=0.3;
%*****
m1=3;
m2=2;
m3=2;
%*****
tp=0.8;
dtetal=pi/2;
dteta2=0;
dteta3=0;
t=0;
%sikloid fonksiyonunun verilmesi
%*****
tetal=(dtetal)*(t/tp-(1/(2*pi))*sin(2*pi*t/tp));
teta2=0;
teta3=0;
teta2=(dteta2)*(t/tp-(1/(2*pi))*sin(2*pi*t/tp));
teta3=(dteta3)*(t/tp-(1/(2*pi))*sin(2*pi*t/tp));
w1=dtetal*(1/tp-(1/tp)*cos(2*pi*t/tp));
w2=dteta2*(1/tp-(1/tp)*cos(2*pi*t/tp));
w3=dteta3*(1/tp-(1/tp)*cos(2*pi*t/tp));
ivme1=dtetal*((2*pi/tp^2)*sin(2*pi*t/tp));
ivme2=dteta2*((2*pi/tp^2)*sin(2*pi*t/tp));
ivme3=dteta3*((2*pi/tp^2)*sin(2*pi*t/tp));
%figure (1)
%acisal degisim hiz ivme grafiginin cizilmesi
%*****
subplot(2,1,1);
%grid on
%plot(t,tetal)
%plot(t,w1)
%plot(t,ivme1,'.')
%hold on
%*****
%Transformasyon matrisinin hesaplanmasi
A01=[cos(tetal) -cos(alfa1)*sin(tetal) sin(alfa1)*sin(tetal)
a1*cos(tetal); sin(tetal) cos(alfa1)*cos(tetal) -
sin(alfa1)*cos(tetal) a1*sin(tetal); 0 sin(alfa1) cos(alfa1) d1;0 0
0 1];
A12=[cos(teta2) -cos(alfa2)*sin(teta2) sin(alfa2)*sin(teta2)
a2*cos(teta2); sin(teta2) cos(alfa2)*cos(teta2) -

```

```

sin(alfa2)*cos(teta2) a2*sin(teta2); 0 sin(alfa2) cos(alfa2) d2;0 0
0 1];
A23=[cos(teta3) -cos(alfa3)*sin(teta3) sin(alfa3)*sin(teta3)
a3*cos(teta3); sin(teta3) cos(alfa3)*cos(teta3) -
sin(alfa3)*cos(teta3) a3*sin(teta3); 0 sin(alfa3) cos(alfa3) d3;0 0
0 1];
A03=A01*A12*A23;

%*****
%*****
g=[0 0 -9.8062 0];
A02=A01*A12;
A03=A02*A23;
A13=A12*A23;
qr=[0 -1 0 0;1 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 0];
qp=[0 0 0 0;0 0 0 0;0 0 0 1;0 0 0 0];
r11=[-a1/2; 0; 0; 1];
r22=[-a2/2; 0; 0; 1];
r33=[0; 0; d3; 1];
%r01=A01*r11;
%r02=A02*r22;
%r03=A03*r33;
%v(n)(hız) in hesaplanmasý için u(ij) lerin hesaplanmasý
gerekmektedir
u11=qr*A01;
u21=qr*A02;
u22=A01*qr*A12;
u31=qp*A03;
u32=A01*qp*A13;
u33=A02*qp*A23;
u111=qr*qr*A01;
u112=0;
u113=0;
u121=0;
u122=0;
u123=0;
u131=0;
u132=0;
u133=0;
u211=qr*qr*A01;
u212=qr*A01*qr*A12;
u213=0;
u221=qr*A01*qr*A12;
u222=A01*qr*qr*A12;
u223=0;
u231=0;
u232=0;
u233=0;
u311=qr*qr*A03;
u312=qr*A01*qr*A13;
u313=qr*A02*qr*A23;
u321=qr*A01*qr*A13;
u322=A01*qr*qr*A13;
u323=A01*qr*A12*qp*A23;
u331=qr*A02*qp*A23;
u332=A01*qr*A12*qp*A23;
u333=A02*qp*qp*A23;
v1=u11*w1*r11;
v2=(u21*w1+u22*w2)*r22;

```

```

v3=(u31*w1+u32*w2+u33*w3)*r33;
%kinetik enerji
j1=[(m1*a1^2)/3 0 0 0;0 0 0 0 ;0 0 0 0;0 0 0 m1];
j2=[(m2*a2^2)/3 0 0 0;0 0 0 0 ;0 0 0 0;0 0 0 m2];
j3=[0 0 0 0;0 0 0 0 ;0 0 0 0;0 0 0 1];
%j3=0;
D11=trace(u11*j1*u11')+trace(u21*j2*u21')+trace(u31*j3*u31');
D21=trace(u22*j2*u21')+trace(u32*j3*u31');
D12=D21;
D31=trace(u33*j3*u31');
D13=D31;
D22=trace(u22*j2*u22')+trace(u32*j3*u32');
D32=trace(u11*j1*u11')+trace(u21*j2*u21')+trace(u31*j3*u31');
D23=D32;
D33=trace(u33*j3*u33');
D=[D11 D12 D13;D21 D22 D23;D31 D32 D33];
%koriyolis ve santrifüj(centrifugal) terimleri
h111=trace(u111*j1*u11')+trace(u211*j2*u21')+trace(u311*j3*u31');
h112=trace(u313*j3*u31');
h113=trace(u313*j3*u31');
h121=trace(u221*j2*u21')+trace(u321*j3*u31');
h122=trace(u222*j2*u21')+trace(u322*j3*u31');
h123=trace(u323*j3*u31');
h131=trace(u331*j3*u31');
h132=trace(u332*j3*u31');
h133=trace(u333*j3*u31');
h211=trace(u211*j2*u22')+trace(u311*j3*u32');
h212=trace(u212*j2*u22')+trace(u312*j3*u32');
h213=trace(u313*j3*u32');
h221=trace(u221*j2*u22')+trace(u321*j3*u32');
h222=trace(u222*j2*u22')+trace(u322*j3*u32');
h223=trace(u323*j3*u32');
h231=trace(u331*j3*u32');
h232=trace(u332*j3*u32');
h233=trace(u233*j3*u32');
h311=trace(u311*j3*u33');
h312=trace(u312*j3*u33');
h313=trace(u313*j3*u33');
h321=trace(u321*j3*u33');
h322=trace(u322*j3*u33');
h323=trace(u323*j3*u33');
h331=trace(u331*j3*u33');
h332=trace(u332*j3*u33');
h333=trace(u333*j3*u33');
h1=h111*w1*w1+h112*w1*w2+h113*w1*w3+h121*w2*w1+h122*w2*w2+h123*w2*w3
+h131*w3*w1+h132*w3*w2+h133*w3*w3;
h2=h211*w1*w1+h212*w1*w2+h213*w1*w3+h221*w2*w1+h222*w2*w2+h223*w2*w3
+h231*w3*w1+h232*w3*w2+h233*w3*w3;
h3=h311*w1*w1+h312*w1*w2+h313*w1*w3+h321*w2*w1+h322*w2*w2+h323*w2*w3
+h331*w3*w1+h332*w3*w2+h333*w3*w3;
h=[h1;h2;h3];
%h=simplify(h);
c1=-m1*g*u11*r11-m2*g*u21*r22-m3*g*u31*r33;
c2=-m2*g*u22*r22-m3*g*u32*r33;
c3=-m3*g*u33*r33;
c=[c1;c2;c3];
%c=simplify(c);
T=D*[ivme1;ivme2;ivme3]+h+c;
tb=D*[ivme1;ivme2;ivme3];

```

```
%tba=tb*inv(D);  
  
%[teta1,teta2,teta3]=solve(T(1)-10);  
%T=simplify(T);  
%tm=tm+1;  
%figure (2)  
%subplot(2,1,2);  
%plot(t,c,'.r');
```