

ANKARA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİMETRİK GRUPLARIN p -REGÜLER GÖSTERİMLERİ

Demet KARAYEL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2006

Her hakkı saklıdır

Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU danışmanlığında, Demet KARAYEL tarafından hazırlanan bu çalışma 22/06/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliğiyle Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah Harmancı Hacettepe Üniversitesi

Üye : Prof. Dr. Sait Halıcioğlu (Danışman) Ankara Üniversitesi

Üye: : Yrd. Doç. Dr. Erdal Güner Ankara Üniversitesi

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Tezin Adı : Simetrik Grupların p -Regüler Gösterimleri

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ülkü Mehmetoğlu

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİMETRİK GRUPLARIN p -REGÜLER GÖSTERİMLERİ

Demet KARAYEL

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma için gerekli olan ve daha sonra kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, keyfi cisimler üzerinde simetrik grupların bütün indirgenmez modüllerini belirleyen James yöntemi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, simetrik grupların karakteristiği p olan cisimler üzerinde indirgenmez modüllerini belirlemek amacıyla yapılan bazı çalışmalar özetlenmiştir.

2006, 55sayfa

Anahtar Kelimeler : Gösterim, $F[G]$ -modül, simetrik grup, parçalanma, p -regüler parçalanma, tablo, tabloid, polytabloid, Specht modül.

ABSTRACT

Masters Thesis

P-REGULAR REPRESENTATIONS OF THE SYMMETRIC GROUPS

Demet KARAYEL

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter main definitions and theorems which are necessary for later use are given.

The third chapter mainly concerned with G. D. James' construction all of the irreducible modules of the symmetric groups over an arbitrary fields.

The fourth chapter is a summary of some studies which were carried on to determine the irreducible modules of symmetric groups on fields of characteristic p .

2006, 55 pages

Key Words : Representation, $F[G]$ -module, symmetric group, partition, p -regular partition, tableau, tabloid, polytabloid, Specht module.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam Prof. Dr. Sait Halıoğlu' na, manevi desteğini esirgemeyen değerli arkadaşım araştırma görevlisi Handan Yoldaş'a ve hayatımın her aşamasında desteklerini eksik etmeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Demet KARAYEL

Ankara, Haziran 2006

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Grup Gösterimleri	2
2.2 Denk Gösterimler	4
2.3 Bir Grubun Grup Cebiri	5
2.4 Permütasyon Modülü	9
2.5 İndirgenmez $F[G]$ -Modüller	10
2.6 $F[G]$ -Homomorfizmalar	12
2.7 İzomorfik $F[G]$ -Modüller	13
2.8 Maschke Teoremi	14
2.9 Eşlenik Sınıfları	15
2.10 Sonlu Bir Grubun Karakteri	17
3. SİMETRİK GRUPLARIN GÖSTERİMLERİ	22
3.1 Diyagram,Tablo ve Tabloidler	22
3.2 Parçalanmalar İçin Kısmi ve Tam Sıralamalar	27
3.3 Tabloidler İçin Kısmi ve Tam Sıralamalar	29
3.4 Specht Modüller	33
4. SİMETRİK GRUPLARIN P-REGÜLER	
GÖSTERİMLERİ	36
4.1 p-Regüler Gösterimler	36
4.2 İndirgenmez Specht Modüller İçin Carter Tahmini	42

4.3	Karakteristiği İki Olan Cisimler Üzerinde İndirgenmez Specht Modüller	49
4.4	İndirgenbilir Specht Modüller	51

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
S_n	Simetrik grup
ρ	Gösterim
ρ_B	B bazına göre matris gösterimi
$F[G]$	G nin F üzerindeki grup cebiri
χ	T nin karakteri
$GL(V)$	V nin tersinir lineer dönüşümlerinin grubu
$GL(n, F)$	F üzerindeki $n \times n$ tipindeki tersinir matrislerin grubu
$Ker\theta$	θ nın çekirdeği
x^G	x in G deki eşlenik sınıfı
$C_G(x)$	x in G deki merkezleyeni
izA	A nın izi
$[\lambda]$	λ parçalanmasının Young diyagramı
S_λ	Young altgrubu
R_t	t tablosunun satır grubu
C_t	t tablosunun sütun grubu
$\{t\}$	t tablosunun satır denklik sınıfı
$[t]$	t tablosunun sütun denklik sınıfı

e_t	λ -polytabloid
M^λ	λ -tabloidlar tarafından gerilen vektör uzayı
S^λ	λ parçalanmasına karşılık gelen Specht modül
$S^{\lambda\perp}$	S^λ nin dik uzayı

1. GİRİŞ

Simetrik grupların karakteristiği p olan cisimler üzerinde tanımlanan indirgenmez modüllerini veren çalışmalar çok sayıda matematikçi tarafından ele alınan bir konu olmuştur. Bu çalışmada p -regüler parçalanmalar yardımıyla, simetrik grupların *p -regüler gösterimleri* adını vereceğimiz, simetrik grupların karakteristiği p olan cisimler üzerinde tanımlanan indirgenmez modüllerinin nasıl bulunacağı ile ilgili çalışmalar özetlenecektir.

Çalışmamızın ikinci bölümü olan temel kavramlar kısmında, daha sonraki bölümlerde ihtiyacımız olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise 1976 yılında G.D. James tarafından verilen keyfi cisimler üzerinde simetrik grupların tüm indirgenmez modüllerinin inşası ile ilgili detaylı bilgiler sunulmuştur. Adı geçen çalışmada λ , n nin bir parçalanması olmak üzere λ ya karşılık gelen M^λ modülü ve M^λ nin bir altmodülü olan S^λ Specht modülünün inşası verilmiş ve karakteristiği sıfır olan cisimler üzerinde λ lar değiştikçe S^λ ların S_n nin tüm indirgenmez modüllerini verdiği gösterilmiştir.

Çalışmamızın son bölümünde ise λ parçalanmasının ve eşlenik sınıflarının p -regülerlik ve p -singülerlik tanımları verilmiştir. Daha sonra karakteristiği p olan cisimler üzerinde S^λ nin indirgenmez olması için hangi şartlara ihtiyaç duyulduğu konusunda son yıllarda yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızın daha sonraki bölümlerinde kullanacağımız sonlu grup gösterimleri, indirgenmez $F[G]$ -modüller, $F[G]$ -homomorfizmalar, eşlenik sınıfları ve sonlu grupların karakterleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Grup Gösterimleri

Bir G grubunun gösterimi, G yi matrislerin bir grubu gibi gözönüne alma imkanı verir.

Tanım 2.1.1. G bir grup, $F = \mathbb{R}$ veya \mathbb{C} ve $GL(n, F)$ bileşenleri F cisminden alınan $n \times n$ tipindeki tersinir matrislerin grubu olsun.

$$\begin{aligned}\rho : G &\longrightarrow GL(n, F) \\ g &\longrightarrow \rho(g)\end{aligned}$$

homomorfizmasına G nin F cismi üzerindeki gösterimi ve n sayısına da ρ nun *derecesi* denir.

Daha açık olarak ifade etmek istersek, $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ bir fonksiyon ise ρ nun bir gösterim olması için gerek ve yeter şart $\forall g, h \in G$ için $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ olmasıdır.

Bu gösterim homomorfizma olduğundan I_n ; $n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ gösterimi $\forall g \in G$ için $\rho(1) = I_n$ ve $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$ şartlarını sağlar (James and Liebeck 1993).

Örnek 2.1.2. $G = D_3 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ dihedral grubu olsun. A ve B matrislerini, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olarak alınırsa $A^3 = B^2 = I_3$, $B^{-1}AB = A^{-1}$ dir.

$$\rho: G \longrightarrow GL(3, F)$$

$$a^i b^j \longrightarrow A^i B^j \quad (0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1)$$

şeklinde tanımlanan ρ bir homomorfizmadır. Dolayısıyla ρ , D_3 ün derecesi 3 olan bir matris gösterimidir. Böylece $\forall g \in D_3$ için $\rho(g)$ matrisleri aşağıdaki gibidir.

1	a	a^2
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
b	ab	a^2b
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Örnek 2.1.3. G bir grup olsun.

$\rho: G \longrightarrow GL(n, F)$ şeklinde tanımlanan ρ bir homomorfizmadır.

$$g \longrightarrow \rho(g) = I_n$$

Dolayısıyla ρ , G nin derecesi n olan bir matris gösterimidir.

2.2 Denk Gösterimler

Tanım 2.2.1. G sonlu bir grup ve ρ, σ G nin F üzerindeki sırasıyla dereceleri n, m olan matris gösterimleri olsunlar. Eğer $n = m$ ve $\forall g \in G$ için,

$$\rho(g) = T^{-1}\sigma(g)T$$

olacak şekilde $n \times n$ tipinde tersinir bir T matrisi varsa, bu durumda $\rho; \sigma$ ya denktir denir (James and Liebeck 1993).

ρ, σ ve τ G nin gösterimleri olmak üzere,

(i) $\rho; \rho$ ya denktir.

(ii) Eğer $\rho; \sigma$ ya denk ise, bu durumda σ da ρ ya denktir.

(iii) Eğer $\rho; \sigma$ ya denk ve $\sigma; \tau$ ya denk ise, bu durumda $\rho; \tau$ ya denktir.

Yani gösterimlerin denkliği bir denklik bağıntısıdır.

Örnek 2.2.2. $G = S_2 = \{(1), (12)\}$ ve $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $A^2 = I_2$, $\rho(1) = I_2$ ve $\rho((12)) = A$ olmak üzere; $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ G nin bir matris gösterimidir. A nın özdeğerleri yardımıyla

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$ şartını sağlayan $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ geçiş matrisi bulunabilir.

Buradan G nin bir matris gösterimi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma : G \longrightarrow GL(2, F)$$

$$g \longrightarrow \sigma(g) = T^{-1}\rho(g)T$$

$$1 \in G \text{ için } \sigma(1) = T^{-1}\rho(1)T = T^{-1}I_2T = I_2$$

$$(12) \in G \text{ için } \sigma((12)) = T^{-1}\rho((12))T = T^{-1}I_2T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$$

Görüldüğü gibi ρ, σ ile denktir.

2.3 Bir Grubun Grup Cebiri

Tanım 2.3.1. G sonlu bir grup, g_1, g_2, \dots, g_n G nin elemanları ve $F = \mathbb{R}$ veya \mathbb{C}

olsun. $F[G] = \{\lambda_1g_1 + \lambda_2g_2 + \dots + \lambda_ng_n \mid \lambda_i \in F, 1 \leq i \leq n\}$ kümesini ele alalım.

Herhangi $a_i, b_i, k \in F$ ve $g_i \in G$ için $u = \sum_{i=1}^n a_i g_i, \quad \nu = \sum_{j=1}^n b_j g_j \in F[G]$ olmak üzere,

$$u + \nu = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) g_i$$

$$ku = \sum_{i=1}^n (ka_i) g_i$$

$$u \times \nu = \sum_{i,j=1}^n (a_i b_j) (g_i g_j)$$

işlemleriyle $F[G]$ F cismi üzerinde bir cebir olacaktır. Ayrıca $F[G]$ nin bazı $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ olup, bu baz $F[G]$ nin *doğal baz* olarak adlandırılır (James and Liebeck 1993).

Örnek 2.3.2. $G = C_3 = \langle a : a^2 = e \rangle$ ve $F = \mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2[G] &= \{\lambda_1 e + \lambda_2 a : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_2\} \\ &= \{[0]e + [0]a, [1]e + [0]a, [0]e + [1]a, [1]e + [1]a\} \\ &= \{0, e, a, e+a\} \end{aligned}$$

olup, $(\mathbb{Z}_2[G], +, \times, \odot)$ dörtlüsü bir cebir olacaktır. $+$ ve \times işlemlerine ilişkin işlem tabloları aşağıdaki gibidir.

$+$	0	e	a	$e+a$
0	0	e	a	$e+a$
e	e	0	$e+a$	a
a	a	$e+a$	0	e
$e+a$	$e+a$	a	e	0

\times	0	e	a	$e+a$
0	0	0	0	0
e	0	e	a	$e+a$
a	0	a	e	$e+a$
$e+a$	0	$e+a$	$e+a$	0

Tanım 2.3.3. V ; F üzerinde vektör uzayı ve G bir grup olsun. Eğer $\nu \in V$ ve $g \in G$ için $g\nu$ çarpımı her $u, \nu \in V$, $\lambda \in F$ ve $g \in G$ için;

- (i) $g\nu \in V$,
- (ii) $(gh)\nu = g(h\nu)$,

$$(iii) e\nu = \nu,$$

$$(iv) g(\lambda\nu) = \lambda(g\nu),$$

$$(v) g(u + \nu) = gu + g\nu$$

şartlarını sağlıyorsa, bu durumda V ye bir $F[G]$ -modül denir (James and Liebeck 1993).

Tanım 2.3.4. (Bir Gösterim Tarafından Belirlenen Modül)

G sonlu bir grup ve ρ , G nin V üzerindeki bir gösterimi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \odot : \quad F[G] \times V &\longrightarrow V \\ \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i, \nu \right) &\longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho(g_i)(\nu) \end{aligned}$$

dış işlemiyle V bir $F[G]$ modüldür. Bu modüle G nin ρ gösterimi tarafından belirlenen modülü denir (James and Liebeck 1993).

Tersine eğer V bir $F[G]$ modül olarak verilmişse

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longrightarrow \rho(g) : V \longrightarrow V \\ &\nu \longrightarrow \rho(g)\nu = g\nu \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ρ ; G nin V üzerindeki bir gösterimidir (James and Liebeck 1993).

Sonuç olarak G nin bir ρ gösterimi verildiğinde bu gösterime karşılık bir $F[G]$ -modül, bir $F[G]$ -modül verildiğinde bu modüle karşılık G nin bir gösterimi bulunabilir.

Örnek 2.3.5. $G = D_3 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olsun ve G nin bir

$$\text{matris gösterimi } \rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$\rho : G \longrightarrow GL(3, F)$ şeklinde verilsin.

$$g \longrightarrow \rho(g)$$

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere } V \text{ } \nu_1, \nu_2, \nu_3 \text{ sütun vektörleri}$$

tarafından gerilen vektör uzayı olsun.

Aşağıdaki dış işlemle V bir $F[G]$ -modüldür.

$\forall \nu \in V, g \in G$ için $g\nu = \rho(g)\nu$ olup,

$$a\nu_1 = \rho(a)\nu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \nu_2$$

$$a\nu_2 = \rho(a)\nu_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \nu_3$$

$$a\nu_3 = \rho(a)\nu_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nu_1$$

$$\begin{aligned}
b\nu_1 = \rho(b)\nu_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \nu_3 \\
b\nu_2 = \rho(b)\nu_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \nu_2 \\
b\nu_3 = \rho(b)\nu_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nu_1
\end{aligned}$$

2.4 Permütasyon Modülü

Tanım 2.4.1. G ; S_n nin bir altgrubu ve V ; F üzerinde $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$ bazıyla n boyutlu bir vektör uzayı olsun. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her i ve $\forall g \in G$ için

$$g\nu_i = \nu_{g(i)}$$

olsun. Bu durumda g bir permütasyon olduğundan $g\nu_i \in V$ ve $1\nu_i = \nu_i$ olur. Ayrıca $g, h \in G$ için;

$$(gh)\nu_i = \nu_{(gh)(i)} = \nu_{g(h(i))} = g(h\nu_i)$$

dir. G nin etkisini lineer olarak V nin tümüne genişletecek olursak, bu durumda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in G$ olmak üzere,

$$g(\lambda_1\nu_1 + \dots + \lambda_n\nu_n) = \lambda_1(g\nu_1) + \dots + \lambda_n(g\nu_n)$$

dir. Böylece V bir $F[G]$ -modül olup, V ye *permütasyon modülü* ve $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$ ye de V nin *doğal bazı* denir.

Eğer $V; B = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$ bazıyla birlikte bir permütasyon modülü ise, $\forall g \in G$ için $[g]_B$, her satırında ve sütununda bir tane 1, diğer bileşenleri de 0 olan bir matristir. Bu matrise *permütasyon matrisi* denir (James and Liebeck 1993).

Örnek 2.4.2. $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ olsun. Bu durumda G, S_3 ün (123) permütasyonu tarafından üretilen altgrubuna izomorftir.

$V = Sp\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ 3-boyutlu vektör uzayını alalım. V aşağıdaki dış işlemle bir $F[G]$ modüldür.

$$\begin{aligned} 1\nu_1 &= \nu_1, & a\nu_1 &= \nu_2, & a^2\nu_1 &= \nu_3 \\ 1\nu_2 &= \nu_2, & a\nu_2 &= \nu_3, & a^2\nu_2 &= \nu_1 \\ 1\nu_3 &= \nu_3, & a\nu_3 &= \nu_1, & a^2\nu_3 &= \nu_2 \end{aligned}$$

Ayrıca $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ bazına göre V ye karşılık gelen matris ρ olmak üzere, $\forall g \in G$ için $\rho(g)$ matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.5 İndirgenmez $F[G]$ -Modüller

Tanım 2.5.1. Eğer bir V $F[G]$ -modülünün, $\{0\}$ ve kendisinden başka bir $F[G]$ -altmodülü yoksa, bu durumda V ye *indirgenmez $F[G]$ -modül* denir (James and Liebeck 1993).

Eğer $V; \{0\}$ ve kendisinden başka bir $F[G]$ -altmodüle sahip ise, V ye *indirgenebilir* $F[G]$ - modül adı verilir.

Benzer şekilde bir $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ olmak üzere, $\nu \in F^n$ ve $g \in G$ için

$$g\nu = \rho(g)\nu$$

çarpımıyla tanımlanan $F^n; F[G]$ -modülü indirgenmez ise, bu durumda ρ ya *indirgenmez gösterim*, eğer F^n indirgenebilir $F[G]$ -modül ise ρ ya *indirgenebilir gösterim* denir.

V indirgenebilir bir $F[G]$ -modül olsun. Bu durumda $0 < \dim W < \dim V$ olacak şekilde bir W $F[G]$ -altmodülü vardır. W nın bir bazını V nin bir bazına genişletecek olursak $\forall g \in G$ için $[g]$ matrisi,

$$\left(\begin{array}{c|c} X_g & Y_g \\ \hline 0 & Z_g \end{array} \right) \dots\dots\dots (*)$$

formuna sahiptir. Burada $X_g; k \times k$ ($k=\dim W$) tipinde bir matristir.

Derecesi n olan bir gösterimin indirgenebilir olması için gerek ve yeter şart

$0 < k < n$ ve $X_g; k \times k$ tipinde bir matris olmak üzere bu gösterimin (*) formunda olmasıdır (James and Liebeck 1993).

Örnek 2.5.2. V Örnek 2.4.2 deki gibi tanımlanan bir $F[G]$ -modül olsun. Bu durumda $W = Sp\{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3\}$ V nin bir $F[G]$ altmodülüdür. W nın $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ bazını V nin bir $B' = \{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \nu_1, \nu_2\}$ bazına genişletirsek, $\rho_{B'}$, V ye karşılık

gelen matris gösterimi olmak üzere, $\forall g \in G$ için $\rho_{B'}(g)$ matrisleri,

$$\rho_{B'}(1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \rho_{B'}(a) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right), \quad \rho_{B'}(a^2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

olur. Görüldüğü gibi $\forall g \in G$ için $\rho_{B'}(g)$ matrisleri (*) formundadır. Dolayısıyla $\rho_{B'}$ matris gösterimi indirgenelirdir.

2.6 $F[G]$ -Homomorfizmalar

Tanım 2.6.1. V ve W birer $F[G]$ -modül olsunlar. V modülünden W modülüne tanımlı $\theta : V \longrightarrow W$ fonksiyonu verilsin. Eğer θ bir lineer dönüşümse ve $\forall \nu \in V, g \in G$ için $\theta(g\nu) = g\theta(\nu)$ eşitliği sağlanıyorsa, bu durumda θ ya bir $F[G]$ -homomorfizma denir (James and Liebeck 1993).

Önerme 2.6.2. V ve W birer $F[G]$ -modül ve $\theta : V \longrightarrow W$ bir $F[G]$ homomorfizması olsun. Bu durumda $\text{Ker}\theta; V$ modülünün ve $\text{Im}\theta; W$ modülünün birer $F[G]$ altmodülüdür (James and Liebeck 1993).

Örnek 2.6.3. $\theta : V \longrightarrow V$ fonksiyonu, $\lambda \in F$ ve $\nu \in V$ için $\theta(\nu) = \lambda\nu$ olsun. Bu durumda θ bir $F[G]$ -homomorfizmadır. Ayrıca $\lambda \neq 0$ için $\text{Ker}\theta = \{0\}$, $\text{Im}\theta = V$ dir.

Örnek 2.6.4. $G; S_n$ in bir altgrubu, $V = \text{Sp}\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$ permütasyon modülü ve $W = \text{Sp}\{w\}$ aşikar $F[G]$ -modül olsun.

V den W ya tanımlanan $\theta; F[G]$ homomorfizmasını

$$\theta : \sum_{i=1}^n \lambda_i \nu_i \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) w, \quad (\lambda_i \in F)$$

olarak tanımlayalım. Böylece $1 \leq i \leq n$ için $\theta(\nu_i) = w$ dir. Bu durumda θ bir lineer dönüşüm olmak üzere $\forall \nu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \nu_i \in V, g \in G$ için

$$\theta(g\nu) = \theta\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \nu_{g(i)}\right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) w$$

$$g\theta(\nu) = g\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) w\right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) gw = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) w \quad \text{dir.}$$

Böylece $\theta(g\nu) = g\theta(\nu)$ olup θ bir $F[G]$ homomorfizmadır.

2.7 İzomorfik $F[G]$ -Modüller

Tanım 2.7.1. V ve W $F[G]$ -modüller olmak üzere V modülünden W modülüne bir $\theta: V \longrightarrow W$ $F[G]$ homomorfizması verilsin. Eğer θ bire-bir ve örten ise bu durumda θ homomorfizmasına $F[G]$ -izomorfizma denir ve $V \cong W$ şeklinde gösterilir (James and Liebeck 1993).

Önerme 2.7.2. V, W birer $F[G]$ -modül olsunlar. Eğer $\theta: V \longrightarrow W$ bir $F[G]$ -izomorfizma ise bu durumda $\theta^{-1}: W \longrightarrow V$ fonksiyonunda bir $F[G]$ -izomorfizmadır (James and Liebeck 1993).

Sonuç 2.7.3. Eğer V ile W izomorfik $F[G]$ modüller ise bu durumda V indirgenmez $F[G]$ -modüldür $\Leftrightarrow W$ indirgenmez $F[G]$ -modüldür.

Lemma 2.7.4. V, W birer $F[G]$ -modül ve $\rho: G \longrightarrow GL(V), \sigma: G \longrightarrow GL(W)$ G nin herhangi iki gösterimi olsun. Bu durumda V ile W $F[G]$ modüllerinin izomorfik olması için gerek ve yeter şart $\forall g \in G$ için $\rho_{B_1}(g) = \sigma_{B_2}(g)$ olacak şekilde V nin B_1 bazı ve W nin bir B_2 bazının var olmasıdır (James and Liebeck 1993).

2.8 Maschke Teoremi

Bu teorem bize sıfırdan farklı her $F[G]$ -modülün indirgenmez $F[G]$ -altmodüllerin direkt toplamı olarak yazılabileceğini gösterir.

Lemma 2.8.1. Eğer V bir $F[G]$ -modül ve $\theta, \theta^2 = \theta$ olacak şekilde V den V ye bir $F[G]$ homomorfizma ise bu durumda

$$V = \text{Im}\theta \oplus \text{Ker}\theta$$

dir (James and Liebeck 1993).

Teorem 2.8.2. (Maschke Teoremi) $\text{Char}F \nmid |G|$ ve G sonlu bir grup, $F = \mathbb{R}$ veya \mathbb{C} ve V bir $F[G]$ -modül olsun. Eğer $U; V$ nin bir $F[G]$ -altmodülü ise, bu durumda

$$V = U \oplus W$$

olacak şekilde V nin bir W $F[G]$ -altmodülü vardır (James and Liebeck 1993).

Bu durumda Maschke teoreminin bir sonucu olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 2.8.3. V bir $F[G]$ -modül ve $1 \leq i \leq r$ için U_i ler V nin indirgenmez $F[G]$ -altmodülleri olmak üzere

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$$

ise bu durumda V ye *tamamen indirgenbilirdir* denir (James and Liebeck 1993).

Teorem 2.8.4. $\text{Char}F \nmid |G|$ ve G sonlu bir grup ve $F = \mathbb{R}$ veya \mathbb{C} olsun.

Bu durumda sıfırdan farklı her $F[G]$ -modül tamamen indirgenbilirdir (James and Liebeck 1993).

2.9 Eşlenik Sınıfları

Tanım 2.9.1. $x, y \in G$ olsun. Eğer $y = g^{-1}xg$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, bu durumda x ile y ; G de eşleniktir denir. G de x e eşlenik olan tüm elemanların kümesi

$$x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\}$$

şeklindedir. x^G kümesi x in G içindeki eşlenik sınıfı adını alır (James and Liebeck 1993).

Önerme 2.9.2. Eğer $x, y \in G$ ise, bu durumda $x^G = y^G$ veya $x^G \cap y^G = \emptyset$ dir (James and Liebeck 1993).

Sonuç 2.9.3. Her grup eşlenik sınıflarının bir birleşimidir ve farklı eşlenik sınıfları ayrıktır (James and Liebeck 1993).

Tanım 2.9.4. $x_1^G, x_2^G, x_3^G, \dots, x_r^G$ farklı eşlenik sınıfları olmak üzere

$$G = x_1^G \cup x_2^G \cup x_3^G \cup \dots \cup x_r^G$$

oluyorsa, bu durumda $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ elemanlarına G grubunun eşlenik sınıf temsilcileri denir (James and Liebeck 1993).

Örnek 2.9.5. Her G grubu için $1^G = \{1\}$; G nin bir eşlenik sınıfıdır.

Örnek 2.9.6. $G = D_3 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olsun. Bu durumda $G = \{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ şeklindedir. $\forall g \in G$ için $g^{-1}xg = a$ veya a^2 olduğundan

$$a^G = \{a, a^2\} \quad \text{dir.}$$

Ayrıca $\forall i \in Z$ için $a^i b a^{-i} = a^{2i} b$ dir. Böylece $i=0,1,2$ için

$$b^G = \{b, ab, a^2b\} \quad \text{dir.}$$

Bu durumda G nin eşlenik sınıfları;

$$\{1\}, \{a, a^2\}, \{b, ab, a^2b\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.9.7. G sonlu bir grup ve $x \in G$ olsun. Bu durumda

$$C_G(x) = \{g \in G : xg = gx\} \dots \dots \dots (*)$$

kümesine x in merkezleyeni denir (James and Liebeck 1993).

Örnek 2.9.8. $G = S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ olsun. Bu durumda (*) ifadesi S_3 ün bütün elemanlarına uygulandığında her bir elemanın merkezleyeni aşağıdaki gibidir.

$\forall g \in G$ için $(1)g = g(1)$ olduğundan $C_G((1)) = S_3$ dir.

$$C_G((12)) = \{(1), (12)\}$$

$$C_G((13)) = \{(1), (13)\}$$

$$C_G((23)) = \{(1), (23)\}$$

$$C_G((123)) = \{(1), (123), (132)\} = C_G((132))$$

Teorem 2.9.9. $x \in G$ olsun. Bu durumda, x^G in eşlenik sınıfındaki eleman sayısı,

$$|x^G| = [G : C_G(x)] = \frac{|G|}{|C_G(x)|} \quad \text{dir.}$$

Özel olarak $|x^G|$; $|G|$ yi böler (Sagan 1991).

Önerme 2.9.10. $x \in G$ olmak üzere $g(i_1 i_2 \dots i_k)g^{-1} = (g(i_1)g(i_2)\dots g(i_k))$ dır
(Sagan 1991).

Teorem 2.9.11. $x \in S_n$ olsun. Bu durumda

$$x^{S_n} = \{g \in S_n : x \text{ ile } g \text{ aynı devir tipindedir}\}$$

şeklindedir.

Örnek 2.9.12. $G = S_3$ olsun. Bu durumda

$$(1)^G = \{(1)\}$$

$$(12)^G = \{(12), (13), (23)\}$$

$$(123)^G = \{(123), (132)\}$$

olup, G nin eşlenik sınıfındaki her elemanın aynı devir tipinde olduğu görülür.

Tanım 2.9.13. (Bir Matrisin İzi) $A = (a_{ij})$; $n \times n$ tipinde bir matris olsun. $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ toplamına A matrisinin izi denir ve izA ile gösterilir (James and Liebeck 1993).

Önerme 2.9.14. $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$; $n \times n$ tipinde matrisler ve T ; $n \times n$ tipinde tersinir bir matris ise;

$$(i) iz(A + B) = izA + izB$$

$$(ii) iz(AB) = iz(BA)$$

$$(iii) iz(T^{-1}AT) = izA \quad (\text{James and Liebeck 1993}).$$

2.10 Sonlu Bir Grubun Karakteri

Tanım 2.10.1. G sonlu grup, V ; B bazıyla bir $F[G]$ -modül olsun. Bu durumda

$$\chi: G \longrightarrow F$$

$$g \longrightarrow \chi(g) = iz[g]_B$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona V nin *karakteri* denir (James and Liebeck 1993).

$[g]_B$; V modülüne karşılık gelen bir matris gösterimi ise, χ fonksiyonuna G grubunun bir *karakteri* denir.

Eğer χ bir indirgenmez $F[G]$ -modülün karakteri ise, bu durumda χ ye G nin bir *indirgenmez karakteri* denir. Benzer şekilde χ bir indirgenebilir $F[G]$ -modülün karakteri ise, bu durumda χ ye G nin bir *indirgenebilir karakteri* denir.

Örnek 2.10.2. $G = D_3 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olsun. G nin

$$\rho: G \longrightarrow G(3, F)$$

$$a \longrightarrow \rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b \longrightarrow \rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gösterimini gözönüne alalım. χ ; ρ nun bir karakteri ve $g \in G$ için

g	1	a	a^2
$\rho(g)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	3	0	0

g	b	ab	a^2b
$\rho(g)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	1	1	2

şeklindedir.

Önerme 2.10.3. $\rho; \chi$ karakteriyle G grubunun derecesi n olan bir matris gösterimi

olsun. Bu durumda

(i) $\chi(1) = n$

(ii) $x \in G$ için eğer $g, h \in x^G$ ise $\chi(g) = \chi(h)$

(iii) Eğer $\sigma; \psi$ karakteriyle G grubunun bir başka matris gösterimi ve ρ ile σ denk ise $\forall g \in G$ için

$$\chi(g) = \psi(g)$$

dir (James and Liebeck 1993).

Örnek 2.10.4. $G = D_3$ dihedral grubunu gözönüne alalım. D_3 ün eşlenik sınıfları

$$C_1 = \{1\}, \quad C_2 = \{a, a^2\}, \quad C_3 = \{b, ab, a^2b\}$$

olup, Örnek 2.10.2 deki gösterime göre

$$\chi(a) = \chi(a^2)$$

$$\chi(b) = \chi(ab) = \chi(a^2b) \quad \text{dir.}$$

G grubunun bir başka matris gösterimini

$$\sigma : G \longrightarrow G(3, F)$$

$$a \longrightarrow \sigma(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b \longrightarrow \sigma(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alınırsa

g	1	a	a^2
$\sigma(g)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\psi(g)$	3	0	0

g	b	ab	a^2b
$\sigma(g)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\psi(g)$	1	1	1

olup, $\forall g \in G$ için $\chi(g) = \psi(g)$ dir.

3. SİMETRİK GRUPLARIN GÖSTERİMLERİ

Bu bölümde S_n simetrik grubunun bütün indirgenmez gösterimleri bulunacaktır.

3.1 Diyagram,Tablo ve Tabloidler

Tanım 3.1.1. A boştan farklı bir küme, S_A da A dan A ya tanımlanan bire-bir ve örten fonksiyonların kümesi ise, S_A fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup olduğundan bu gruba *simetrik grup* denir (Sagan 1991).

Eğer $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ise S_A yı S_n ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.2. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_r \text{ ve}$$

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$$

ise $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ ya n nin bir *parçalanması* denir (Sagan 1991).

Örneğin; $n = 4$ için $(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1)$ ve $(1, 1, 1, 1)$ birer parçalanmadır.

Tanım 3.1.3. Kabul edelimki $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ n nin bir parçalanması olsun.

$1 \leq i \leq r$ için i -yinci satırda λ_i tane nokta içeren şekle λ nın *Young diyagramı* denir (Sagan 1991).

Örnek 3.1.4. $\lambda = (5, 3, 2)$ $n = 10$ un bir parçalanması olsun. Bu parçalanmaya

• • • • •

karşılık gelen diyagram $[\lambda] =$ • • •

• •

şeklindedir.

Tanım 3.1.5. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r)$ n nin bir parçalanması olsun. λ ya karşılık gelen S_n in Young altgrubu $S_\lambda = S_{\{1,2,\dots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,\dots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{n-\lambda_m+1,n-\lambda_m+2,\dots, n\}}$ dir (James 1978).

Örneğin; $S_{(3,2,2)} = S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{6,7\}} \cong S_3 \times S_2 \times S_2$ dir.

Tanım 3.1.6. λ n nin bir parçalanması olsun. $1, 2, 3, \dots, n$ sayılarının tekrarsız olarak λ Young diyagramına yerleştirilmesiyle elde edilen şekle λ -*tablo* denir (James 1978).

Örnek 3.1.7. $n = 7$ nin $\lambda = (4, 2, 1)$ parçalanması için

1 2 4 7
3 6 bir (4, 2, 1)-tablodur.
5

$n = 8$ in $\lambda = (4, 2, 2)$ parçalanması için

1 3 4 7
2 6 bir (4, 2, 2)-tablodur.
5 8

Tanım 3.1.8. λ , n nin bir parçalanması ve t bir λ -*tablo* olsun. t , $R_1, R_2, R_3, \dots, R_k$ satırlarına ve $C_1, C_2, C_3, \dots, C_r$ sütunlarına sahip bir tablo ise,

$$R_t = S_{R_1} \times S_{R_2} \times \dots \times S_{R_k}$$

ve

$$C_t = S_{C_1} \times S_{C_2} \times \dots \times S_{C_r}$$

gruplarına sırasıyla t nin *satır sabitleyeni* ve *sütun sabitleyeni* denir (Sagan 1991).

Ayrıca $\pi \in S_n$ olmak üzere $R_{t\pi} = \pi^{-1}R_t\pi$ ve $C_{t\pi} = \pi^{-1}C_t\pi$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 3.1.9.

$$t = \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 4 & & 5 & \\ & & & 6 \end{array} \quad (3, 2, 1)\text{tablosu için}$$

$$R_t = S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{6\}} \cong S_3 \times S_2 \times S_1$$

$$C_t = S_{\{1,4,6\}} \times S_{\{2,5\}} \times S_{\{3\}} \cong S_3 \times S_2 \times S_1$$

ve

$$|R_t| = 3! \times 2! \times 1! \text{ ve } |C_t| = 3! \times 2! \times 1! \text{ dir.}$$

Tanım 3.1.10. t_1 ve t_2 iki λ -tablo olsun. Eğer bu iki tablonun karşılıklı satırlarında aynı eleman var ise, t_1 ve t_2 tabloları *satır denktir* denir. Bir başka ifadeyle $t_1 \approx t_2 \Leftrightarrow t_1\pi = t_2$ olacak şekilde $\pi \in R_{t_1}$ varsa. (Sagan 1991).

Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı sonucu ortaya çıkan denklik sınıflarına λ -tabloid denir ve t bir λ tablo ise bu tabloya karşılık gelen λ -tabloid $\{t\}$ ile gösterilir.

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 4 \\ 3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 4 \quad 1 \ 4 \ 2 \quad 2 \ 1 \ 4 \quad 2 \ 4 \ 1 \quad 4 \ 1 \ 2 \quad 4 \ 2 \ 1 \\ 3 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 3 \quad \quad \quad 3 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \ 3 \ 4 \\ 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 3 \ 4 \quad 1 \ 4 \ 3 \quad 3 \ 1 \ 4 \quad 3 \ 4 \ 1 \quad 4 \ 1 \ 3 \quad 4 \ 3 \ 1 \\ 2 \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \ 3 \ 4 \\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \ 3 \ 4 \quad 2 \ 4 \ 3 \quad 3 \ 2 \ 4 \quad 3 \ 4 \ 2 \quad 4 \ 2 \ 3 \quad 4 \ 3 \ 2 \\ 1 \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad 1 \end{array} \right\}$$

şeklindedir.

Şimdi S_n simetrik grubunun λ -tabloidler üzerindeki etkisini tanımlayalım. $\pi \in S_n$

ve $\{t\}$ bir λ -tabloid olsun. Bu durumda $\sigma\{t\} = \{\sigma t\}$ şeklindedir.

Örneğin; $(124) \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \\ 4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \ 4 \ 3 \\ 1 \end{array} \right\}$ dir.

Tanım 3.1.13. F keyfi bir cisim ve $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r)$ n nin bir parçalanması olsun. M^λ , F üzerinde bazıları farklı λ -tabloidler olan bir vektör uzayıdır (James 1978).

Ayrıca $\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_r!}$ dir. Örneğin $\lambda = (3, 1)$ parçalanması için

$$M^\lambda = Sp \left\{ \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \\ 4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 3 \ 4 \\ 2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 4 \\ 2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 2 \ 3 \ 4 \\ 1 \end{array} \right\} \right\}$$

şeklindedir.

3.2 Parçalanmalar İçin Kısmi ve Tam Sıralamalar

Tanım 3.2.1. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ ve $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ n nin iki parçalanması olsun. Eğer $\forall j \geq 1$ için $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq \sum_{i=1}^j \mu_i$ ise λ büyüktür μ denir ve $\lambda \supseteq \mu$ ile gösterilir (James 1978).

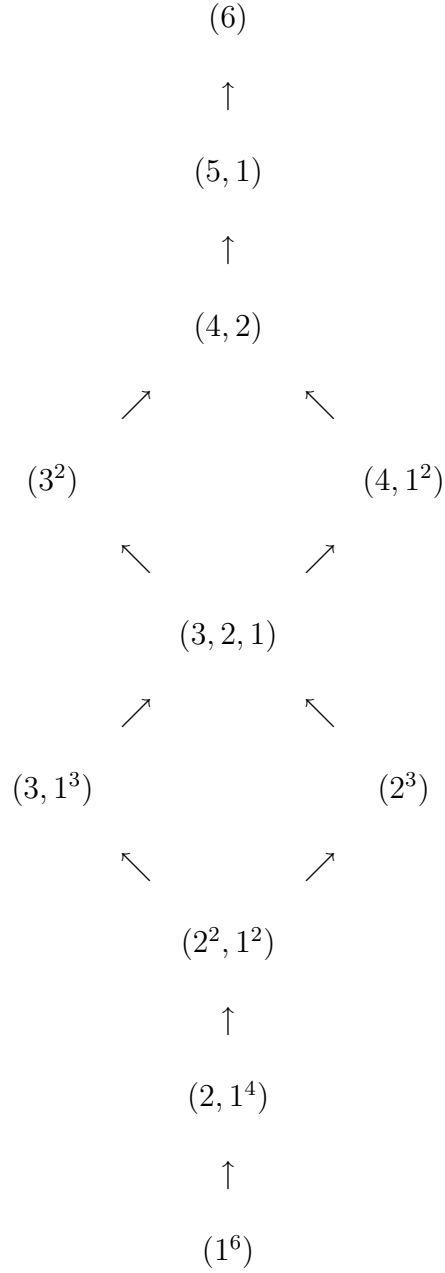
Örnek 3.2.2. $\lambda_1 = (3, 1, 1, 1)$, $\lambda_2 = (2, 1, 1, 1, 1)$, $\lambda_3 = (2, 2, 2)$ 6'nın parçalanmaları olsunlar.

$$3 \geq 2, 3 + 1 \geq 2 + 1, 3 + 1 + 1 \geq 2 + 1 + 1, 3 + 1 + 1 + 1 \geq 2 + 1 + 1 + 1,$$

$$3 + 1 + 1 + 1 + 0 \geq 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \text{ olduğundan } \lambda_1 \supseteq \lambda_2 \text{ dir.}$$

Yukarıda tanımlanan sıralama bir kısmi sıralamadır. Gerçekten $3 \geq 2$, $3 + 1 \geq 2 + 2$ ve $3 + 1 + 1 \leq 2 + 2 + 2$ olduğundan λ_1 ile λ_3 karşılaştırılmaz.

Bu sıralamaya göre $n = 6$ için aşağıdaki diyagramı elde ederiz.



Lemma 3.2.3. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ ve $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$; n nin parçalanmaları olsun. Bu durumda; eğer bir i indisi için $j < i$ iken $\lambda_j = \mu_j$ ve $\lambda_i > \mu_i$ oluyorsa $\lambda > \mu$ dir (Sagan 1991).

Bu sıralama bir tam sıralama olup $n = 6$ için

$(1^6) < (2, 1^4) < (2^2, 1^2) < (2^3) < (3, 1^3) < (3, 2, 1) < (3^2) < (4, 1^2) < (4, 2) < (5, 1) < (6)$ şeklindedir.

Örnek 3.3.2. $\lambda = (3, 2, 1)$, $n=6$ nin bir parçalanması olmak üzere;

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \\ 6 & & \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \\ 6 & & \end{array} \right\}$$

λ -tabloidleri için $i = 4$ alırsak $j = 5, 6$ olur.

(i) 5 ve 6 $\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \\ 6 & & \end{array} \right\}$ ve $\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \\ 6 & & \end{array} \right\}$ nin aynı satırlarına aittir.

(ii) $i = 4$ ün $\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \\ 6 & & \end{array} \right\}$ de yer aldığı satır, $\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \\ 6 & & \end{array} \right\}$ de yer aldığı satırdan daha üsttedir.

Böylece $\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \\ 6 & & \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \\ 6 & & \end{array} \right\}$ olduğu görülür.

Tanım 3.3.3. $\lambda = n$ nin bir parçalanması olmak üzere; herhangi bir $t \in \lambda$ -tablosu için;

$m_i r(t)$; t nin ilk r satırındaki i ye eşit veya i den küçük olan elemanların sayısını gösterebilir.

Bu durumda herhangi $\{t_1\}$ ve $\{t_2\}$ λ -tabloidleri için, $\{t_1\} \trianglelefteq \{t_2\} \Leftrightarrow \forall i$ ve r için $m_{ir}(t_1) \leq m_{ir}(t_2)$ ise, bu sıralama λ -tabloidler üzerinde bir kısmi sıralamadır (James 1978).

Örnek 3.3.4. Eğer $t_1 = \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & \end{array}$ ve $t_2 = \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & \end{array}$ ise $m_{ir}(t_1)$ ve $m_{ir}(t_2)$ matrisleri;

$$(m_{ir}(t_1)) = \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{array} \quad \text{ve} \quad (m_{ir}(t_2)) = \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{array}$$

dir.

Görüldüğü gibi $\forall i$ ve r için $m_{ir}(t_1) \leq m_{ir}(t_2)$ olduğundan $\{t_1\} \trianglelefteq \{t_2\}$ dir.

Önerme 3.3.5. $\{t_1\}$ ve $\{t_2\}$ herhangi iki tabloid olsun. Bu durumda

$$\{t_1\} \triangleleft \{t_2\} \Rightarrow \{t_1\} < \{t_2\}$$

dir (James 1978).

Örnek 3.3.6. $\{t_1\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & \end{array} \right\}$ ve $\{t_2\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & \end{array} \right\}$ $\lambda = (3, 2)$ tabloidleri için bir önceki örnekte $\{t_1\} \trianglelefteq \{t_2\}$ olduğu biliniyor. Şimdi $\{t_1\} < \{t_2\}$ olduğu gösterilsin. $i = 4$ alınırsa $j = 5$ olur.

(i) 5 $\{t_1\}$ ve $\{t_2\}$ tabloidlerinde aynı satırda yer alır.

(ii) $i = 4$ ün $\{t_1\}$ de yer aldığı satır $\{t_2\}$ de yer aldığı satırdan daha yukarıdadır.

Dolayısıyla Tanım 3.3.1 den $\{t_1\} < \{t_2\}$ dir.

Lemma 3.3.7. (Tabloidler İçin Dominance Lemma)

Eğer $k < l$ ve k ; $\{t\}$ de l den daha alttaki bir satırda gözükyorsa bu durumda; $\{t\} \triangleleft (kl)\{t\}$ dir (Sagan 1991).

Örnek 3.3.8. $\{t\} = \begin{Bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}$ tabloidini gözönüne alırsak

$k = 2$ ve $l = 3$ alırsak, $k < l$ şartını sağlar.

$$(kl)\{t\} = (23) \begin{Bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{Bmatrix}$$

Şimdi $\begin{Bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}$ ile $\begin{Bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{Bmatrix}$ tabloidleri karşılaştırılırsa

$$\begin{array}{ccc} & 0 & 1 & & 0 & 1 \\ & & 1 & 2 & & 0 & 2 \\ (m_{ir} \begin{pmatrix} 245 \\ 13 \end{pmatrix}) = & 1 & 3 & \text{ve} & (m_{ir} \begin{pmatrix} 345 \\ 12 \end{pmatrix}) = & 1 & 3 \\ & & 2 & 4 & & 2 & 4 \\ & & 3 & 5 & & 3 & 5 \end{array}$$

$$\forall i \text{ ve } r \text{ için } (m_{ir} \begin{pmatrix} 345 \\ 12 \end{pmatrix}) \leq (m_{ir} \begin{pmatrix} 245 \\ 13 \end{pmatrix}) \text{ olup}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & \end{array} \right\} \text{ olduğu bulunur.}$$

3.4 Specht Modüller

Bu bölümde S_n in bütün indirgenmez modülleri inşa edilecek ve bu indirgenmez modüllere Specht modüller adı verilecektir.

Tanım 3.4.1. t bir λ -tablo olsun. $K_t \in F[S_n]$ olmak üzere

$$K_t = \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma) \sigma$$

şeklinde tanımlanır ve $e_t = K_t\{t\}$ ye λ -polytabloid denir (James 1978).

Örnek 3.4.2. $\lambda = (3, 2)$, $n = 5$ in bir parçalanması ve $t = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{array}$ bir λ -tablo

olsun. Bu durumda;

$$K_t = (1) - (14) - (25) + (14)(25)$$

$$e_t = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & \end{array} \right\}$$

Lemma 3.4.3. t bir tablo ve $\pi \in S_n$ olsun. Bu durumda;

$$(1) K_{\pi t} = \pi K_t \pi^{-1}$$

$$(2) e_{\pi t} = \pi e_t \quad (\text{Sagan 1991}).$$

Tanım 3.4.4. Herhangi bir λ parçalanmasına karşılık gelen S^λ Specht modülü, M^λ nin polytabloidler tarafından gerilen alt modülüdür (James 1978).

Lemma 3.4.5. λ, n nin bir parçalanması olmak üzere S^λ herhangi bir λ -polytabloid tarafından gerilen devirli bir modüldür (Sagan 1991).

Sonuç 3.4.6. λ ve μ, n nin parçalanmaları olmak üzere t_1 bir λ -tablo ve t_2 bir μ -tablo olsun. Eğer $K_{t_1}\{s\} \neq 0$ ise $\lambda \geq \mu$ dür. Ayrıca $\lambda = \mu$ ise $K_{t_1}\{s\} = \pm e_{t_1}$ dir (Sagan 1991).

Sonuç 3.4.7. Eğer $u \in M^\lambda$ ve t bir λ -tablo ise, bu durumda $K_t u, e_t$ nin bir katıdır (Sagan 1991).

Örnek 3.4.8. $n = 3$ için $\lambda = (2, 1)$ parçalanması gözönüne alınırsa, bu durumda

$$M^\lambda = Sp \left\{ \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ & 3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ & 2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ & 1 \end{array} \right\} \right\}$$

$u \in M^\lambda$ ve $c_1, c_2, c_3 \in F$ olmak üzere

$$u = c_1 \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ & 3 \end{array} \right\} + c_2 \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ & 2 \end{array} \right\} + c_3 \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ & 1 \end{array} \right\}$$

şeklinde yazılabilir.

$t = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ & 3 \end{array}$ seçilirse buna karşılık gelen

$$e_t = K_t = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & \end{array} \right\}$$

ve

$$K_t u = (c_1 - c_2) \left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & \end{array} \right) \right) = (c_1 - c_3)e_t \quad \text{bulunur.}$$

Teorem 3.4.9. (James Altmodül Teoremi)

Eğer U , M^λ nin bir altmodülü ise bu durumda $U \supseteq S^\lambda$ veya $U \subseteq S^{\lambda\perp}$ dir.

Önerme 3.4.10. S^λ ile $(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})$ arasında başka modül yoktur.

Teorem 3.4.11. $\frac{S^\lambda}{(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})}$ bölüm modülü ya sıfırdır ya da indirgenmezdir

(James 1978).

Sonuç 3.4.12. Eğer F cisminin karakteristiği sıfır ise, $(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}) = \{0\}$ olup S^λ indirgenmezdir.

4. SİMETRİK GRUPLARIN P-REGÜLER GÖSTERİMLERİ

4.1 p-Regüler Gösterimler

Tanım 4.1.1. μ, n nin bir parçalanması olsun. Bir i sayısı için

$$\mu_{i+1} = \mu_{i+2} = \dots = \mu_{i+p} > 0$$

ise μ parçalanmasına *p-singüler* denir. μ nün içindeki hiçbir sayı p defadan fazla tekrar etmiyorsa μ parçalanmasına *p-regüler* denir.

Örnek 4.1.2. $(4^2, 3^4, 2)$ p-regülerdir $\Leftrightarrow p \geq 5$

Tanım 4.1.3. G grubunun bir eşlenik sınıfındaki elemanların mertebesi p ile aralarında asal ise, bu eşlenik sınıfa *p-regüler sınıf* denir (James 1978).

Örnek 4.1.4. $G = S_3$ olsun. C_1 ve C_2, S_3 ün eşlenik sınıfları olmak üzere

$C_1 = \{(12), (23), (13)\}$ $p \geq 3$ olacak şekildeki bütün asal sayılar için p-regülerdir.

$C_2 = \{(123), (132)\}$ $p = 2$ ve $p \geq 5$ olacak şekildeki bütün asal sayılar için p-regülerdir.

Lemma 4.1.5. S_n in p-regüler sınıflarının sayısı n nin p-regüler parçalanmalarının sayısına eşittir.

İspat $\pi \in S_n$ olmak üzere π yi ayrık devirlerin çarpımı olarak yazacak olursak, π nin mertebesinin p ile aralarında asal olması için gerek ve yeter şart π de yer alan hiçbir devrin boyunun p ile bölünmemesi olacaktır. Bu sebeple S_n nin p regüler

eşlenik sınıflarının sayısı; μ n nin parçalanması olmak üzere hiçbir μ_i parçası p ile bölünmeyen μ parçalanmalarının sayısına eşittir.

Örnek 4.1.6. S_4 ün p -regüler sınıflarının sayısını belirleyelim.

- (4) parçalanması $p \geq 2$ için p -regülerdir.
- (3, 1) parçalanması $p \geq 2$ için p -regülerdir.
- (2, 2) parçalanması $p \geq 3$ için p -regülerdir.
- (2, 1²) parçalanması $p \geq 3$ için p -regülerdir.
- (1⁴) parçalanması $p \geq 5$ için p -regülerdir.

Bu durumda; S_4 ün 2-regüler sınıflarının sayısı 2 , 3-regüler sınıflarının sayısı 4 , 5-regüler sınıflarının sayısı 5 dir.

$g^\mu = \text{ebob}\{ \langle e_t, e_{t^*} \rangle \mid e_t \text{ ve } e_{t^*} S^\mu \text{ de polytabloid} \}$ olmak üzere

Lemma 4.1.7. μ n nin parçalanması olsun. Eğer z_j μ deki j ye eşit parçaların sayısı ise, $\prod_{j=1}^{\infty} z_j!$ g^μ yü böler ve g^μ de $\prod_{j=1}^{\infty} (z_j!)^j$ yi böler.

İspat μ -tabloidleri üzerinde \sim bağıntısını, $\{t_1\}$ ve $\{t_2\}$ herhangi iki μ -tabloidler olmak üzere, " $\{t_1\} \sim \{t_2\} \Leftrightarrow \forall i$ ve j $\{t_1\}$ in aynı satırına ait iken, $\{t_2\}$ nin de aynı satırına ait ise" şeklinde tanımlayalım. Bu bağıntı μ -tabloidler kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Böylece herhangi bir tabloidde uzunluğu aynı olan satırları bir eleman gibi göreceğ olursak, bu tabloidin denklik sınıfındaki eleman sayısı bu tabloiddeki uzunlukları aynı olan satırların permütasyon sayısıdır. Yani bir denklik sınıfındaki eleman sayısı, $\prod_{j=1}^{\infty} z_j!$ dir.

Eğer $\{t_1\} \sim \{t_2\}$ ve $\{t_1\}$, e_t de gözükyor ise polytabloid tanımından $\{t_2\}$ de e_t de gözüktür. Bundan dolayı herhangi iki tabloidin çarpımı $\prod_{j=1}^{\infty} z_j!$ nin bir katıdır.

Yani $\langle e_{t_1}, e_{t_2} \rangle = k \prod_{j=1}^{\infty} z_j!$ dir. Bu durumda;

$$\prod_{j=1}^{\infty} z_j! \mid \langle e_{t_1}, e_{t_2} \rangle \Rightarrow \prod_{j=1}^{\infty} z_j! \mid \text{ebob} \langle e_{t_1}, e_{t_2} \rangle \Rightarrow \prod_{j=1}^{\infty} z_j! \mid g^\mu$$

Şimdi t herhangi bir μ - tablo ve t^* t nin her satırındaki sayıların ters sırada yazılmasıyla elde edilen tablo olsun.

Örneğin;

$$t = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & \\ 8 & 9 & 10 & \\ 11 & & & \end{array} \quad \text{ve} \quad t^* = \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & \\ 10 & 9 & 8 & \\ 11 & & & \end{array}$$

dir.

Şimdi C_t sütun grubunun π şeklindeki elemanlarını gözönüne alalım. Öyleki $\forall i$ için i ve πi sayıları t nin aynı uzunluktaki satırlarına ait olacak şekilde seçilsin. Bizim örneğimize göre $\pi \in S_{\{5,8\}} \times S_{\{6,9\}} \times S_{\{7,10\}}$ olarak seçilecektir. O zaman $\{\pi t\}$, e_t ve e_{t^*} polytabloidlerinin herbirinde aynı katsayı ile gözükür. Böylece $\langle e_t, e_{t^*} \rangle$ iç çarpımı e_t, e_{t^*} polytabloidlerinde ortak olarak gözükken tabloid sayısını verir. Ortak tabloidlerin sayısı t ve t^* tabloidlerindeki aynı uzunluktaki satırların oluşturduğu sütun grubunun eleman sayısına eşittir ve bu sayı $\prod_{j=1}^{\infty} (z_j!)^j$ şeklindedir. Bu durumda $g^\mu \mid \prod_{j=1}^{\infty} (z_j!)^j$ dir.

Örnek 4.1.8. $n = 4$ ve $\lambda = (2, 2)$ parçalanması için λ -tabloidler;

$$\left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{array} \right\}$$

Bu durumda denklik sınıfları ve denklik sınıflarındaki elemanlar aşağıdaki gibidir.

$$\left[\left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right\} \right] = \left\{ \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{array} \right\} \right\}$$

$$\left[\left\{ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \right\} \right] = \left\{ \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{array} \right\} \right\}$$

$$\left[\left\{ \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array} \right\} \right] = \left\{ \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{array} \right\} \right\}$$

$\lambda = (2, 2)$ için,

$z_1 = 1$ e eşit parçaların sayısı =0

$z_2 = 2$ e eşit parçaların sayısı =2

$z_3 = 3$ e eşit parçaların sayısı =0 ,

$$\prod_{j=1}^{\infty} z_j! = 0!2!0! \dots = 2 \quad \text{ve} \quad \prod_{j=1}^{\infty} (z_j!)^j = 4 \quad \text{dir.}$$

Şimdi g^λ yı hesaplayalım.

$$S^\lambda = \text{Sp} \{ e_{12}, e_{13} \} \text{ olup}$$

$$34 \quad 24$$

$\langle e_{12}, e_{13} \rangle = 2$ ve $\langle e_{12}, e_{12} \rangle = 4$ olduğundan $g^\lambda = 2$
 34 24 34 34
 bulunur.

Böylece $\prod_{j=1}^{\infty} z_j! \mid g^\lambda$ ve $g^\mu \mid \prod_{j=1}^{\infty} (z_j!)^j$ olduğu görülür.

Sonuç 4.1.9. p asal olmak üzere $p \mid g^\mu \Leftrightarrow \mu$ p -singüler olmasıdır.

İspat μ p -singüler $\Leftrightarrow \mu$ nün içindeki pozitif tamsayı p defa tekrar eder.

\Leftrightarrow En az bir j için $p \mid z_j!$

$\Leftrightarrow p \mid \prod_{j=1}^{\infty} z_j!$, $(\prod_{j=1}^{\infty} z_j! \mid g^\mu)$

$\Leftrightarrow p \mid g^\mu$

Örnek 4.1.10. $p = 2$ olmak üzere $\mu = (2, 2)$ parçalanmasını alırsak $p \mid g^\mu$ olduğu kolayca görülebilir.

Sonuç 4.1.11. t^*, t nin elemanlarının ters sırada yazılmasıyla elde edilen tabloid ise $K_t e_{t^*} = e_t$ nin bir katıdır ve bu kat ile p nin aralarında asal olması için gerek ve yeter şart μ nun p -regüler olmasıdır.

İspat Sonuç 3.4.7 den $K_t e_{t^*} = e_t$ nin bir katı olduğu biliniyor. Bu yüzden

$K_t e_{t^*} = h e_t$ yazılabilir. Böylece

$$h = h \langle e_t, \{t\} \rangle = \langle h e_t, \{t\} \rangle = \langle K_t e_{t^*}, \{t\} \rangle = \langle e_{t^*}, K_t \{t\} \rangle = \langle e_{t^*}, e_t \rangle$$

dır. Lemma 4.1.7 nin ispatının son satırından $h = \sum_{j=1}^{\infty} (z_j!)^j$ olduğunu görülür.

Sonuç 4.1.9 dan $(h, p) = 1$ olması için $\Leftrightarrow \mu$ p -regüler olması gerektiğini gösterir.

Örnek 4.1.12. $p = 3$ ve $\mu = (2, 2)$ parçalanmasını ve $t = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$ tablosunu

alınırsa $K_t e_{t^*} = 1.e_t$ olduğu görülür. 1 ve 3 aralarında asal olup μ 3-regülerdir.

Teorem 4.1.13. $\frac{S^\lambda}{S^\lambda \cap S^{\lambda^\perp}} \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ p -regüler olmasıdır (James 1978).

İspat İspatı yapabilmek için $\frac{S^\lambda}{S^\lambda \cap S^{\lambda^\perp}} = \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ p -singüler olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} \frac{S^\lambda}{S^\lambda \cap S^{\lambda^\perp}} = \{0\} &\Leftrightarrow S^\lambda = S^\lambda \cap S^{\lambda^\perp} \\ &\Leftrightarrow S^\lambda \subseteq S^{\lambda^\perp} \Leftrightarrow \langle e_s, e_t \rangle = 0 \quad (e_s, e_t \in S^\lambda) \\ &\Leftrightarrow p \text{ ile } \langle e_s, e_t \rangle \text{ aralarında asal değil} \\ &\Leftrightarrow p \mid \langle e_s, e_t \rangle \\ &\Leftrightarrow p \mid \text{ebob} \langle e_s, e_t \rangle \Leftrightarrow p \mid g^\lambda \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ } p\text{-singüler} \end{aligned}$$

Teorem 4.1.14. λ n nin bir parçalanması olmak üzere $D^\lambda = \frac{S^\lambda}{S^\lambda \cap S^{\lambda^\perp}}$ lar denk olmayan $F[S_n]$ -modülleri verir.

Teorem 4.1.15. Denk olmayan indirgenmez $F[S_n]$ -modüllerin sayısı, p -regüler eşlenik sınıfların sayısına eşittir (Herstein 1968).

İspat λ n nin bir parçalanması olmak üzere Lemma 4.1.5 den S_n in p -regüler eşlenik sınıfların sayısı n nin p -regüler parçalanmalarının sayısına eşittir. Teorem 4.1.14 den birbirine denk olmayan D^λ $F[S_n]$ -modüllerin sayısının p -regüler

parçalanmalarının sayısına eşit olduğu biliniyor. Ayrıca Teorem 3.4.11 den λ n nin bir parçalanması ve p -regüler parçalanma olmak üzere D^λ lar da indirgenmez olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi, cismin karakteristiğinin p olması durumunda S^λ Specht modülünün hangi şartlar altında indirgenmez olduğunu araştıran bazı çalışmalar özetlenecektir.

4.2 İndirgenmez Specht Modüller İçin Carter Tahmini

Bu kısımda G.D. James (1977) tarafından hazırlanan "*On a conjecture of Carter concerning irreducible Specht modules*" başlıklı çalışma özetlenecektir.

Tanım 4.2.1. λ n nin herhangi bir parçalanması ve (i, j) de λ nin Young diyagramında bir nokta olsun.

$$H_{i,j} = \{(i, j') | j' \geq j\} \cup \{(i', j) | i' \geq i\}$$

kümesinin eleman sayısına (i, j) noktasının *Hook uzunluğu* denir ve $h(i, j)$ ile gösterilir (Sagan 1991).

Tanım 4.2.2. λ nin Young diyagramındaki (i, j) noktalarının $h_{i,j}$ sayılarıyla yer değiştirilmesiyle elde edilen tabloya *Hook grafiği* denir (James 1978).

Tanım 4.2.3. Her i için $0 \leq n_i < p$, $n_r \neq 0$ ve $n = n_0 + n_1p + \dots + n_r p^r$ olmak üzere

$$\nu_p(n) = maks\{i | n_j = 0, j < i\}$$

dir (James 1978).

Örnek 4.2.7. Cismin karakteristiği 3 ve $\lambda = (4, 2^3, 1)$ $n = 11$ in bir parçalanması olsun. Bu durumda λ 3-singülerdir.

$$\begin{array}{cccc}
 & 8 & 6 & 2 & 1 & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & 5 & 3 & & & \bullet & 1 & & \\
 \lambda \text{ ya karşılık gelen Hook grafiği} = & 4 & 2 & & & \text{ve} & [\lambda]^3 = & \bullet & \bullet & \\
 & & 3 & 1 & & & \bullet & 0 & & \\
 & & & 1 & & & \bullet & & &
 \end{array}$$

$$(i + 1, \lambda_{i+1}) = (2, 2) = 1$$

$$(i + p, \lambda_{i+1}) = (4, 2) = 0 \quad \text{dir.}$$

λ 3-singüler iken $[\lambda]^3$ ün bazı sütunlarında farklı iki sayı bulunduğundan $S^{(4,2^3,1)}$ indirgenebilir.

Teorem 4.2.8. (Payne(7))

λ ve μ , n nin parçalanması ve $\lambda \rightarrow \mu$ pseudo parçalanması ise $Hom_{FS_n}(S^\mu, S^\lambda) \neq 0$ dir.

Conjecture 4.2.9. (Carter Tahmini)

$\mu \triangleright \lambda$ için $Hom_{FS_n}(S^\mu, S^\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow [\lambda]^p$ nin bazı sütunlarında farklı iki sayı bulunur.

Böylece $\lambda \rightarrow \mu$ pseudo parçalanması var ise ve λ p-regüler ise S^λ nın indirgenebilir olduğu sonucu çıkarılabilir.

U S^λ nın indirgenmez altmodülü olmak üzere ;

canon

$\theta : M^\lambda \longrightarrow \frac{M^\lambda}{U^\perp} \longrightarrow S^\lambda$ olacak şekilde $0 \neq \theta \in Hom_{FS_n}(S^\mu, S^\lambda)$ olduğunu

araştırılacaktır.

λ p -regüler iken S^λ nin indirgenmez olup olmadığına karar verilecektir.

(i) Öncelikle $0 \neq \theta \in Hom_{FS_n}(S^\mu, S^\lambda)$ olacak şekilde θ olduğunu gösterilmesi gerekiyor.

(ii) Eğer $Ker\theta \subseteq S^{\lambda^\perp}$ ise S^λ ve $\frac{M^\lambda}{S^{\lambda^\perp}} \cong (S^\lambda)^*$ arasında izomorfizma kurulabildiğinden S^λ indirgenmezdir (Altmodül teoreminden).

Eğer $S^\lambda \subseteq Ker\theta$ ise $Im\theta(\cong \frac{M^\lambda}{Ker\theta})$ nin hiçbir faktörü D^λ ya izomorfik değildir.

Dolayısıyla S^λ indirgenebilir.

Lemma 4.2.10. $\sum a_i \{t_i\} \in S_Q^\lambda$ ise $(a_i \in Z) \pmod{p}$ de a_i ye indirgenen $S_{GF(p)}^\lambda$ nin bir elemanı elde edilir.

$$\begin{aligned} \theta : M^\lambda &\longrightarrow S^\lambda \\ \{t\} &\longrightarrow \left(\frac{1}{g^\lambda} \{t\} K_t \rho_t\right)_p \end{aligned}$$

$0 \neq \theta \in Hom_{GF(p)S_n}(M^\lambda, S^\lambda)$ ise $0 \neq \theta \in Hom_{FS_n}(M^\lambda, S^\lambda)$ dır.

$S^\lambda \subseteq Ker\theta \Leftrightarrow \theta(K_t \{t\}) = 0$ olup S^λ indirgenebilir.

Teorem 4.2.11. λ n nin p -regüler parçalanması olsun. S^λ indirgenebilir olması için $\Leftrightarrow p \mid \frac{\pi}{g^\lambda}$ olmasıdır.

Şimdi bu konuyla ilgili yukarıdaki makalede yer almayan 1999 yılında verilen bir sonuç verilecektir.

Lemma 4.2.12. Kabul edelimki λ ve λ' nün her ikisinde n nin p -regüler parçalanması olsun. λ nın Young diyagramında p yi bölen bir Hook uzunluğu, varsa S^λ indirgenebilirdir (Kleshchev and Premet 1999).

Örnek 4.2.13. $\lambda = (3, 2, 2)$ parçalanması alınır, λ ve λ' $p \geq 3$ olacak şekildeki bütün asallar için p -regülerdir. Bu durumda λ ya karşılık gelen Hook grafiği

$$5 \ 4 \ 1$$

$$3 \ 2 \quad \text{olup, } p = 3 \text{ veya } p = 5 \text{ alınır, Hook grafiğinde } p \text{ yi bölen Hook}$$

$$2 \ 1$$

uzunluğu bulunduğundan Lemma 4.2.12 gereğince S^λ indirgenebilirdir.

Sonuç 4.2.14. $p \nmid \pi$ ise λ parçalanması p -regülerdir ve S^λ indirgenmezdir.

Örnek 4.2.15. $\lambda = (5, 2)$, $n = 7$ nin parçalanması olsun.

Uyarı $\lambda = (x, y)$ ise $g^{\lambda'} = y!$ ebob $\{x!, (x-1)!1!, (x-2)!2!, \dots, (x-y)!y!\}$

$$g^{\lambda'} = 2! \text{ ebob } \{5!, 4!1!, 3!2!\} = 2!3!2! = 2^3 \cdot 3$$

$$\lambda \text{ ya karşılık gelen Hook grafiği} = \begin{array}{cccccc} 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & \\ & & & & & 2 & 1 \end{array}$$

$$\text{Hook uzunluğu} = \pi = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3$$

$$p \mid \frac{\pi}{g^{\lambda'}} \Leftrightarrow p \mid \frac{5 \cdot 3^2 \cdot 2^3}{2^3 \cdot 3} \Leftrightarrow p \mid 5 \cdot 3 \Leftrightarrow p \mid 5 \text{ veya } p \mid 3 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda $S^{(5,2)}$ nin indirgenebilir olması için \Leftrightarrow Cismin karakteristiğinin 3 veya 5 olmasıdır. Diğer durumlarda $S^{(5,2)}$ indirgenmezdir.

Genel olarak $g^{\lambda'} = \text{ebob}\{\langle e_t, e_t\pi \rangle \mid e_t \in S^\lambda, \pi \in S_n\}$ olup, $g^{\lambda'}$ nü hesaplamak her zaman kolay olmadığından Teorem 4.2.11 yi uygulamak çok zordur.

Teorem 4.2.11 ve Lemma 4.1.7 i birleştirirsek aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.16. λ ve λ' nün her ikisinde p -regüler ise S^λ nın indirgenmez olması için $\Leftrightarrow p \nmid \pi$ dir.

Örnek 4.2.17. $\lambda = (4, 1)$ $n = 5$ in parçalanması olsun. λ ya karşılık gelen $\lambda' = (2, 1^3)$ dir. Bu durumda hem λ hem de λ' 7-regülerdir.

λ ya karşılık gelen Hook grafiği= $\begin{array}{cccc} 5 & 3 & 2 & 1 \\ & & & 1 \end{array}$ olup

Hook uzunluğu = $\pi = 5.3.2$ dir. $p \nmid 5.3.2$ olduğundan S^λ indirgenmezdir.

Teorem 4.2.18. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ p -regüler olsun. $S^{(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)}$ indirgenebilir ise $S^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}$ indirgenebiliridir.

Örnek 4.2.19. $\lambda = (2^2, 1)$ parçalanması 3-regülerdir. Bu durumda $\mu = (2, 1)$ alırsak $g^{\mu'} = 1! \text{ ebob } \{2!, 1!1!\} = 1$, μ nun Hook uzunluğu = $\pi = 3$ dir. $p \mid \frac{3}{1}$ olduğundan S^μ indirgenebiliridir. Dolayısıyla S^λ indirgenebiliridir.

Teorem 4.2.20. λ n nin p -regüler parçalanması ise ve $[\lambda]^p$ bazı sütunlarında farklı iki sayı bulundurursa, S^λ indirgenebiliridir.

Örnek 4.2.21. $\lambda = (4, 2^2, 1)$ parçalanması 3-regülerdir.

$$\lambda \text{ ya karşılık gelen Hook grafiği} = \begin{array}{cccc} 7 & 5 & 2 & 1 \\ & 4 & 2 & \\ & 3 & 1 & \\ & & 1 & \end{array} \quad \text{ve} \quad [\lambda]^3 = \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & & 0 \end{array}$$

Birinci sütunda farklı iki sayı bulunduğundan S^λ indirgenebilirdir.

Sonuç 4.2.22. λ n nin p -regüler parçalanması olmak üzere $[\lambda]$ nın p -bölümü birden fazla parçaya sahipse S^λ indirgenebilirdir.

Örnek 4.2.23. Örnek 4.2.21 yeniden gözönüne alınacak olursa $\lambda = (4, 2^2, 1)$ parçalanmasında iki parçanın tekrarlanması ve λ parçalanmasının 3-regüler olması sebebiyle S^λ indirgenebilirdir.

Teorem 4.2.24. $\forall i$ için $\lambda_{i-1} - \lambda_i \equiv -1 \pmod{p^{l(\lambda_i - \lambda_{i+1})}}$ ise S^λ indirgenmezdir.

Örnek 4.2.25. $\lambda = (6, 4, 2)$ 12 nin bir parçalanması olmak üzere,

$\forall i$ için $\lambda_{i-1} - \lambda_i \equiv -1 \pmod{3}$ olup S^λ indirgenmezdir.

Sonuç 4.2.26. Carter tahmini $p = 2$ için doğrudur.

Carter Tahmini bütün parçalanmalar için doğru değildir. Bu karmaşıklığı önlemek amacıyla aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 4.2.27. Carter tahmini iki parçalı parçalanmalar için doğrudur.

Örnek 4.2.28. $\lambda = (5, 3)$ $n = 8$ in bir parçalanması ve $p = 2$ olsun.

$$\lambda \text{ ya karşılık gelen Hook grafiği} = \begin{array}{cccccc} 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & \\ & 3 & 2 & 1 & & \end{array} \text{ ve } [\lambda]^2 = \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

olduğundan Teorem 4.2.27 gereğince $\lambda = (5, 3)$ ya karşılık gelen $S^{(5,3)}$ indirgenbilirdir.

$[\lambda]^p$ nin birinci sütunundaki sayıların hepsi sıfır ve $S^{(\lambda_1-1, \lambda_2-1, \dots, \lambda_m-1)}$ indirgenmez ise S^λ indirgenmezdir. Böylece Carter Tahmini'nin doğru olmadığı ile ilgili verilebilecek karşıt örnek $p = 3$ için $\lambda = (10, 5, 3)$ ve $p \geq 5$ için $\lambda = (3p - 2, 2p - 1, p)$ olması durumudur. Uzun hesaplamalarla $g^{(10,5,3)}$ sayısının 81 e bölüdüğü gösterilebilir ve böylece Teorem 4.2.11 gereğince $p = 3$ için $S^{(10,5,3)}$ indirgenmezdir. Bu sebeple bu tahmin $n \leq 26$ için kesinlikle doğrudur.

Örnek 4.2.29. $\lambda = (5, 2, 1)$ parçalanmasını $p = 2$ için ele alalım.

$$\lambda \text{ ya karşılık gelen Hook grafiği} = \begin{array}{cccccc} 7 & 5 & 3 & 2 & 1 & \\ & 3 & 1 & & & \\ & & 1 & & & \end{array} \text{ ve } [\lambda]^2 = \begin{array}{cccc} 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & & \\ & & 0 & \end{array}$$

$[\lambda]^p$ nin 1. sütunundaki sayıların hepsi sıfırdır. $S^{(4,1)}$ in indirgenmezliği incelenirse,

$$\lambda = (4, 1) \text{ e karşılık gelen Hook grafiği} = \begin{array}{cc} 5 & 3 \\ & 1 \end{array} \quad \pi = 5.3.1 \quad \text{olup} \quad 2 \nmid 5.3.1 \text{ den}$$

$S^{(4,1)}$ indirgenmezdir. Dolayısıyla $S^{(5,2,1)}$ indirgenmezdir.

4.3 Karakteristiği İki Olan Cisimler Üzerinde İndirgenmez Specht Modüller

Bu kısımda, 1999 yılında Gordon James and Andrew Mathas (1999) tarafından yayınlanan " *The irreducible Specht modules in characteristic 2* " başlıklı çalışma

özetlenecektir.

λ , n nin bir parçalanması olmak üzere, λ nın 2-regüler olması durumunda S^λ nın indirgenmezliği bir önceki kısımda incelenmiştir. Ayrıca λ' , λ nın eşleniğini göstermek üzere; S^λ indirgenmez ise $S^{\lambda'} S^\lambda$ ile işaret gösteriminin tensör çarpımına izomorf olduğundan $S^{\lambda'}$ de indirgenmezdir. $\lambda = (2, 2)$ durumunda λ ve λ' 2-singüler olmasına rağmen S^λ indirgenmezdir.

Aşağıdaki teoremde $l(k)$, $k < 2^{l(k)}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir tamsayı olsun.

Teorem 4.3.1. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ olacak şekilde bir parçalanma ise cismin karakteristiği 2 iken S^λ Specht modülünün indirgenmez olması için gerek ve yeter şart

$$(i)] \lambda_i - \lambda_{i+1} \equiv -1 \quad \text{mod}(2^{l(\lambda_i+1-\lambda_{i+2})}), i \geq 1; \text{ veya}$$

$$(ii) \lambda'_i - \lambda'_{i+1} \equiv -1 \quad \text{mod}(2^{l(\lambda'_i+1-\lambda'_{i+2})}), i \geq 1; \text{ veya}$$

(iii) $\lambda = (2, 2)$ dir.

Örnek 4.3.2. $\lambda = (3, 2, 1)$ olsun. Bu durumda

$$\lambda_1 - \lambda_2 \equiv 3 - 2 \equiv -1 \quad \text{mod } 2^{l(k)}$$

$$\lambda_2 - \lambda_3 \equiv 2 - 1 \equiv -1 \quad \text{mod } 2^{l(k)}$$

olup Teorem4.3.1 gereğince S^λ indirgenmezdir.

Lemma 4.3.3. Kabul edelimki $\lambda_r \neq 0$ olmak üzere $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ olsun. $i \geq 2$ olmak üzere $\lambda'_1 \geq \lambda_1$ ve $\lambda'_i = \lambda'_{i+1} > 0$ ise S^λ indirgenebilirdir.

Örnek 4.3.4. $\lambda = (4, 3^3, 1)$ olsun. Bu durumda $\lambda' = (5, 4^2, 1)$ dir. $\lambda'_1 \geq \lambda_1$ ve $i = 2$ için $\lambda'_2 = \lambda'_3 > 0$ olup, Lemma 4.3.3 gereğince S^λ indirgenebilirdir.

Lemma 4.3.5. Kabul edelimki $\lambda_r \neq 0$, $\lambda_{r+1} = 0$ ve $r \geq 2$ olmak üzere $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ olsun. $\lambda_{r-1} \geq \lambda_r$, $\lambda'_1 = \lambda'_2$ ve $2 \leq i \leq \lambda_1$ olacak şekildeki bütün i ler için $\lambda'_i > \lambda'_{i+1}$ ise S^λ indirgenebildir.

Örnek 4.3.6. $\lambda = (5, 4, 3, 2)$ olsun. $\lambda_4 \neq 0$, $\lambda_5 = 0$ ve $r \geq 2$ dir. Ayrıca $r = 4$ için $\lambda_3 \geq \lambda_4$ ve $\lambda' = (4^2, 3, 2, 1)$ olup, $\lambda'_1 = \lambda'_2$ dir ve $2 \leq i \leq \lambda_1 = 5$ için $\lambda'_2 > \lambda'_3$, $\lambda'_3 > \lambda'_4$ ve $\lambda'_4 > \lambda'_5$ şartları sağlandığından Lemma 4.3.5 gereğince S^λ indirgenebildir.

Kleshchev and Premet (1999) ana teoremlerinde λ nın (n) ve (1^n) olması durumunda bütün p asalları için S^λ Specht modülünün indirgenmez olduklarını göstermişlerdir. Eğer $\lambda = (2, 2)$ ise $p = 3$ için S^λ indirgenebildir. Eğer λ ve λ' 2-singüler ve $\lambda \neq (2, 2)$ ise Teorem 4.3.1 gereğince $p = 2$ için S^λ indirgenebildir. Eğer λ 2-regüler ve $\lambda \neq (n)$ ise bu durumda $p|\lambda_1 - \lambda_2 + 2$ olarak seçilecek olursa Teorem 4.2.20 gereğince S^λ karakteristiği p olan cisimler üzerinde indirgenmezdir. $S^{\lambda'}$ indirgenbilir iken S^λ da indirgenbilir olduğundan bütün asallar için S^λ indirgenmez ise $\lambda = (n)$ ve $\lambda = (1^n)$. Son olarak p nin tek olması durumunda Specht modülünün indirgenmezliğinin araştırılmasının çok daha zor olduğunu belirtelim. İleride "karakteristiği p olan cisimler üzerindeki p -singüler Specht modüller indirgenmezdir" iddiası ispatlanacaktır.

4.4 İndirgenbilir Specht Modüller

Bu kısımda, sırasıyla Sinead Lyle (2003) ve Matthew Fayers (2004) tarafından hazırlanan "*Some reducible Specht modules*" ve "*Reducible Specht modules*" başlıklı çalışmalar sonucunda elde edilen temel teorem verilecektir.

Tanım 4.4.1. λ n nin bir parçalanması ve (a, b) λ nın Young diyagramında bir kutucuk olmak üzere eğer

$$(1) \nu_p(h(a, b)) > 0 ,$$

(2) λ nın Young diyagramı $\nu_p(h(x, b)) \neq \nu_p(h(a, b))$ ve $\nu_p(h(a, b)) \neq \nu_p(h(a, y))$ olacak şekilde (x, b) ve (a, y) kutucuklarına sahipse (a, b) kutucuğuna *p-uyumsuzdur* denir.

Örnek 4.4.2. $p = 3$ ve $\lambda = (7, 2, 2)$ olsun. λ ya karşılık gelen Hook grafiği ve $[\lambda]^p$ kuvvet diyagramı sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{cccccccc} 9 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 3 & 2 & & & & & & 1 & 0 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & & 0 & 0 & & & & & \end{array}$$

$$(1) \nu_p(h(a, b)) = \nu_p(h(1, 1)) = 2 > 0 ,$$

(2) λ nın Young diyagramı $\nu_p(h(2, 1)) \neq \nu_p(h(1, 1))$ ve $\nu_p(h(1, 1)) \neq \nu_p(h(1, 2))$ olacak şekilde $(x, b) = (2, 1)$ ve $(a, y) = (1, 2)$ kutucuklarına sahip olduğundan $(a, b) = (1, 1)$ kutucuğu p-uyumsuzdur.

Örnek 4.4.3. $p = 3$ ve $\lambda = (6, 4, 1)$ olsun. λ ya karşılık gelen Hook grafiği ve $[\lambda]^p$ kuvvet diyagramı sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{cccccccc} 8 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 5 & 3 & 2 & 1 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ & 2 & & & & & & & 0 & & & & & & \end{array}$$

$$(1) \nu_p(h(a, b)) = \nu_p(h(1, 2)) = 1 > 0 ,$$

(2) λ nın Young diyagramında $\nu_p(h(x, b)) \neq \nu_p(h(a, b))$ ve $\nu_p(h(a, b)) \neq \nu_p(h(a, y))$ olacak şekilde (x, b) ve (a, y) kutucukları bulunmadığından λ Young diyagramı p -uyumsuz kutucuğa sahip değildir.

Teorem 4.4.4. λ n nin bir parçalanması, F karakteristiği p ($p \geq 3$) olan bir cisim olsun. Bu durumda S^λ Specht modülü indirgenmezdir $\Leftrightarrow \lambda$ nın Young diyagramı p -uyumsuz hiç bir kutucuğa sahip değilse.

Örnek 4.4.5. $p = 3$ ve $n = 11$ olsun. $\lambda = (6, 4, 1)$, $\alpha = (7, 2, 2)$, $\beta = (4, 2, 1^5)$ olmak üzere S^λ ve S^β indirgenmez olmalarına rağmen, S^α indirgenmez değildir. Bu örnekte λ p -regüler olmasına rağmen β parçalanması p -regüler değildir. Ayrıca α p -regüler iken p -uyumsuz bir kutucuğa sahip olduğundan S^α indirgenbilirdir.

KAYNAKLAR

- Fayers, M. 2004. Reducible Specht modules, *J. Algebra* 280, 500-504.
- Herstein, I. N. 1968. *Non-commutative ring*, John Wiley and Sons, Inc., 131, New York.
- James, G. D. 1976. The irreducible representations of the symmetric groups. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 229-232.
- James, G. D. 1978. *The representation theory of the symmetric groups. Lectures Notes in Mathematics.*, Vol. 682 (Springer-Verlag, Berlin).
- James, G. D. and Liebeck, M. 1993. *Representations and Characters of Groups*. Cambridge University Press, Cambridge.
- James, G.D. and Mathas, A. 1999. The Irreducible Specht Modules in Characteristic 2, *Bull. London Math. Soc.*31, 457-462.
- Kleshchev, A. and Premet, A. 1999. The Globally Irreducible Representations of Symmetric Groups. *Proceedings of The American Mathematical Society*, Vol.128, 647-655.
- Lyle, S. 2003. Some reducible Specht modules, *J. Algebra* 269, 536-543.
- Sagan, B. E. 1991. *The Symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*. Wadsworth and Brooks / Cole Mathematics Series (Wadsworth and Brooks, California).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Demet Karayel

Doğum Yeri : Kırıkkale

Doğum Tarihi : 01.08.1979

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Sokullu Mehmet Paşa (1997)

Lisans : A.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü (1998-2002)

Yüksek Lisans : A.Ü. Eğitim Bilimleri Enstitüsü (2002-2003)

Yüksek Lisans : A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü (2002-2006)

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Akyazı Şehit Yzb. Halil İbrahim Sert Lisesi (2003-2005)

Şereflikoçhisar Ticaret ve Anadolu Ticaret Lisesi 2005-