

## BÖLÜM 1

### 1. Temel Kavramlar

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

**Tanım 1.1:**  $M$  bir diferensiyellenebilir ( $C^\infty$ ) manifold olsun.  $M$  üzerindeki  $C^\infty$  vektör alanlarının uzayı  $\mathcal{X}(M)$  ve  $M$  den  $\mathbf{R}$  ye  $C^\infty$  fonksiyonların uzayı  $C^\infty(M, \mathbf{R})$  olmak üzere,  $M$  üzerinde;

$$g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbf{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer  $g$  Riemann metriği ile birlikte  $M$  ye bir Riemann manifoldu adı verilir ve  $(M, g)$  şeklinde gösterilir [1]

$M$  manifoldunun herhangi iki  $p$  ve  $q$  noktası için  $M$  üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse  $M$  ye bağlantılı manifold adı verilir.  $M$  bağlantılı ve temel grubu sadece birim elemandan oluşuyor ise  $M$  ye basit bağlantılı dır denir [2]

**Tanım 1.2:**  $M$  bir diferensiyellenebilir manifold ve  $M$  üzerindeki  $C^\infty$  vektör alanlarının uzayı  $\mathcal{X}(M)$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\xrightarrow{2\text{-lineer}} \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü  $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbf{R}), \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  için,

- i)  $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
- ii)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$
- iii)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özelliklerini sağlarsa,  $\nabla$  ya  $M$  üzerinde bir Afin Koneksiyon adı verilir [3]

**Tanım 1.3:**  $(M, g)$  bir Riemann manifoldu ve  $\nabla$  da  $M$  üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  olmak üzere;  $\nabla$  dönüşümü;

$$i) \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),}$$

$$ii) Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \text{ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği)}$$

şartlarını sağlıyorsa,  $\nabla$  ya  $M$  üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon veya  $M$  nin Levi-Civita Koneksiyonu adı verilir [3]

**Tanım 1.4:**  $M$  bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\begin{aligned} \nabla: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\xrightarrow{2\text{-lineer}} \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan  $\nabla$  operatörü,  $M$  nin bir  $U$  bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir  $C^\infty$   $X, Y \in \mathcal{X}(U)$  vektör alan çiftine  $U$  üzerinde  $\nabla_X Y$  ile ifade edilen üçüncü bir  $C^\infty$  vektör alanı karşılık getirir. Bu karşılık gelme aşağıdaki özellikleri sağladığında  $\nabla$  ya Lineer Koneksiyon (veya kovaryant türev) adı verilir [2]

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), \forall f \in C^\infty(M, R) \text{ olmak üzere;}$$

$$i) \nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$$

$$ii) \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$$

$$iii) \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$iv) \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$$

dir.

**Tanım 1.5:**  $(M, g)$  bir Riemann manifoldu,  $\nabla$  de  $M$  üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olsun.

$$\begin{aligned} R: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned} \quad (1.1)$$

ile tanımlanan  $R$  fonksiyonu  $M$  üzerinde bir (1, 3)-tensör alanıdır ve  $M$  nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Ayrıca  $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$  tensörüne  $M$  nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir.

Her  $X, Y, Z, V, W \in \mathcal{X}(M)$  için Riemann eğrilik tensörü  $R$  aşağıdaki özelliklere sahiptir;

$$i) \quad R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z, \quad (1.2)$$

$$ii) \quad g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V), \quad (1.3)$$

$$iii) \quad R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \quad (1.4)$$

$$iv) \quad g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y) \quad (1.5)$$

[2]

**Tanım 1.6:**  $(M, g)$  bir Riemann manifoldu olsun.  $T_pM$  tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı  $\mathcal{I}$  olmak üzere  $V, W \in \mathcal{I}$  tanjant vektörleri için  $Q$  fonksiyonu;

$$Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2$$

biçiminde tanımlansın.  $Q(V, W) \neq 0$  olmak üzere;

$$K(V, W) = \frac{g(R(V, W)W, V)}{Q(V, W)} \quad (1.6)$$

olup buna  $\mathcal{I}$ 'nin kesitsel eğriliği denir ve  $K(\mathcal{I})$  ile gösterilir [2]

**Tanım 1.7:**  $(M, g)$   $n$ -boyutlu bir Riemann manifoldu ve  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , lokal ortonormal vektör alanları olsunlar.

$$S : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i) \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlı  $(0,2)$  tipindeki  $S$  tensör alanına,  $M$  üzerinde Ricci eğrilik tensörü adı verilir [4]

**Tanım 1.8:**  $(M, g)$   $n$ -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  için;

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y) \quad (1.8)$$

olacak biçimde  $M$  üzerinde bir  $\lambda$  fonksiyonu var ise yani  $M$  nin Ricci tensörü  $S$ , metrik tensör  $g$  nin bir katı ise  $M$  ye Einstein manifoldu adı verilir [4]

**Tanım 1.9:**  $(M, g)$   $n$ -boyutlu bir Riemann manifoldu ve  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$\tau = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) \quad (1.9)$$

değerine  $M$  nin skalar eğriliği adı verilir [4]

**Tanım 1.10:**  $M$   $n$ -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her  $X, Y, Z \in \chi(M)$  için  $M$  nin Weyl conformal eğrilik tensör alanı, projektif eğrilik tensörü ve konharmonik eğrilik tensörü sırası ile

$$\begin{aligned} C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2} [S(X, Z)Y - S(Y, Z)X + g(X, Z)QY \\ - g(Y, Z)QX] + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-1} [S(Y, Z)X - S(X, Z)Y] \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} K(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)X - S(X, Z)Y \\ + g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY] \end{aligned} \quad (1.12)$$

ile tanımlanır. Burada  $Q$  Ricci operatörüdür [4]

**Tanım 1.11:**  $C = 0$  ise  $M$  manifoldu conformal flat olarak adlandırılır. [4]

**Tanım 1.12:** Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara uzay form denir.  $n$ -boyutlu bir  $M$  uzay formu  $M^n(c)$  ile gösterilir. Eğer,

$$\begin{aligned} c = 0 \text{ ise } M^n(c) = E^n \text{ Öklid uzayı} \\ c = \frac{1}{r^2} \text{ ise } M^n(c) = S^n(r) \text{ küresi} \\ c = -\frac{1}{r^2} \text{ ise } M^n(c) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay} \end{aligned}$$

dır [6]

**Tanım 1.13:**  $M$  ve  $N$ , sırası ile,  $m$  ve  $n$  boyutlu birer  $C^\infty$  manifold ve  $f_* : T_p M \xrightarrow{\text{lineer}} T_{f(p)} N$ ,  $\forall p \in M$ , türev dönüşümü 1:1 ise  $f$  fonksiyonuna bir immersiyon (daldırma) denir [6]

**Tanım 1.14:**  $M$  ve  $N$ , sırası ile,  $m$  ve  $n$  boyutlu birer  $C^\infty$  manifold ve  $f_* : T_p M \xrightarrow{\text{lineer}} T_{f(p)} N$  türev dönüşümü birebir ve  $f$  tek değişkenli ise  $f$  ye  $M$  den  $N$  ye bir imbeding adı verilir [4]

**Tanım 1.15:**  $(M, g)$  ve  $(N, \tilde{g})$  birer Riemann manifold ve  $f$   $M$  den  $N$  ye bir immersiyon olsun.  $\forall X, Y \in T_p M$  için,

$$\tilde{g}(f_*(X), f_*(Y)) = g(X, Y)$$

ise  $f$  ye bir izometrik immersiyon adı verilir [4]

**Tanım 1.16:**  $M$   $n \geq 2$  boyutlu  $C^\infty$  sınıfından bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun.  $M$  üzerinde tanımlı  $(0,2)$ -tipinde bir simetrik tensör alanı  $A$  olmak üzere  $\wedge_A$  endomorfizmi

$$\begin{aligned} \wedge_A : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X \wedge_A Y)Z &= A(Y, Z)X - A(X, Z)Y \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer  $A=g$  alınırsa son denklem

$$(X \wedge_g Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \quad (1.13)$$

biçimine indirgenir. Bundan sonra  $(X \wedge_g Y)Z$  yerine kısaca  $X \wedge Y$  kullanılacaktır.[6]

$M$  üzerinde  $(0,k)$ -tipinde ( $k \geq 1$ ) bir  $T$  tensör alanı ve  $(0,2)$ -tipinde bir simetrik  $A$  tensör alanı verildiğinde  $R, T$  ve  $Q(A, T)$  tensörleri sırası ile:

$$\begin{aligned} (R, T)(X_1, X_2, \dots, X_k; X, Y) &= -T(R(X, Y)X_1, X_2, \dots, X_k) - \dots \\ &\quad - T(X_1, X_2, \dots, R(X, Y)X_k) \end{aligned} \quad (1.14)$$

ve

$$\begin{aligned} Q(AT)(X_1, X_2, \dots, X_k; X, Y) &= -T((X \wedge_A Y)X_1, X_2, \dots, X_k) - \dots \\ &\quad - T(X_1, X_2, \dots, (X \wedge_A Y)X_k) \end{aligned} \quad (1.15)$$

biçiminde tanımlanır.[5]

Böylece (1.14), (1.15) denklemlerinde  $T=R$  ve  $A=g$  alınırsa

$$\begin{aligned} R.R(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) &= -R(R(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots \\ &\quad - R(X_1, X_2, X_3, R(X, Y)X_4) \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$Q(g, R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -R((X \wedge_g Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots \\ - R(X_1, X_2, X_3, (X \wedge_g Y)X_4) \quad (1.17)$$

$T=C$  ve  $A=g$  alınırsa

$$(R.C)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -C(R(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots \\ - C(X_1, X_2, X_3, R(X, Y)X_4) \quad (1.18)$$

$$Q(g, C)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -C((X \wedge_g Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots \\ - C(X_1, X_2, X_3, (X \wedge_g Y)X_4) \quad (1.19)$$

$T=S$  ve  $A=g$  alınırsa

$$(R.S)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -S(R(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots \\ - S(X_1, X_2, X_3, R(X, Y)X_4) \quad (1.20)$$

$$Q(g, S)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -S((X \wedge_g Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots \\ - S(X_1, X_2, X_3, (X \wedge_g Y)X_4) \quad (1.21)$$

ve ayrıca  $T=R$  ve  $A=S$  için (1.15) denklemden

$$Q(S, R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -R((X \wedge_S Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots \\ - R(X_1, X_2, X_3, (X \wedge_S Y)X_4) \quad (1.22)$$

olarak elde edilir. Eğer  $M$  nin her  $p$  noktası için bundan başka

Eğer

$$R.R=0 \quad (1.23)$$

ise  $M$  ye semisimetrik denir.[7]

Eğer

$$R.S=0 \quad (1.24)$$

ise  $M$  ye Ricci-semisimetriktir denir.[5]

Eğer

$$R.C=0 \quad (1.25)$$

ise  $M$  ye Weyl-semisimetriktir denir.[5]

$n \geq 3$  boyutlu bir  $(M, g)$  Riemann manifoldu için eğer  $M$  nin her noktasında  $R.R$  ve  $Q(g, R)$  tensörleri lineer bağımlı ise  $M$  ye pseudosimetriktir denir. Bu durumda  $M$  nin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart  $U_R = \{p \in M : Q(g, R) \neq 0\}$  kümesi üzerinde

$$R.R = L_R Q(g, R) \quad (1.26)$$

olmasıdır. Burada  $L_R$  ,  $U_R$  üzerinde bir fonksiyondur.[5]

$n \geq 3$  boyutlu bir  $(M, g)$  Riemann manifoldu için eğer  $M$  nin her noktasında  $R.S$  ve  $Q(g, S)$  tensörleri lineer bağımlı ise  $M$  ye *Ricci-pseudosimetrik manifoldu* denir. Bu durumda  $M$  nin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart  $U_S = \{p \in M : S - \frac{\kappa}{\eta} \neq 0\}$  kümesi üzerinde

$$R.S = L_S Q(S, R) \quad (1.27)$$

olmasıdır. Burada  $L_S$  ,  $U_S$  üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.[5]

$n \geq 4$  boyutlu bir  $(M, g)$  Riemann manifoldu için eğer  $M$  nin her noktasında  $R.C$  ve  $Q(g, C)$  tensörleri lineer bağımlı ise  $M$  ye *Weyl-pseudosimetrik manifoldu* denir. Bu durumda  $M$  nin Weyl-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart  $U_C = \{p \in M : p \in M \text{ de } C \neq 0\}$  kümesi üzerinde

$$R.C = L_C Q(g, C) \quad (1.28)$$

olmasıdır. Burada  $L_C$  ,  $U_C$  üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.[5]

Eğer  $R.S$  ve  $Q(g, S)$  tensörleri lineer bağımlı yani

$$R.R = LQ(S, R) \quad (1.29)$$

İse  $M$  ye genelleştirilmiş *Ricci-pseudosimetritir* denir.[5]

Yukarıda tanımlanan eğrilik şartları için aşağıdaki kapsama bağıntıları geçerlidir.

$$\begin{aligned}
R \cdot R = 0 &\subset R \cdot S = 0, \\
R \cdot R = 0 &\subset R \cdot C = 0, \\
R \cdot S = 0 &\subset R \cdot S = L_S Q(g, S), \\
R \cdot R = 0 &\subset R \cdot R = L_R Q(g, R), \\
R \cdot C = 0 &\subset R \cdot C = L_C Q(g, C), \\
R \cdot R = L_R Q(g, R) &\subset R \cdot S = L_S Q(g, S), \\
R \cdot R = L_R Q(g, R) &\subset R \cdot C = L_C Q(g, C),
\end{aligned}$$

Eğer  $M$  semisimetrik olmayan fakat pseudosimetrik bir manifold ise  $M$  ye proper pseudosimetrik, Ricci-semisimetrik olmayan fakat Ricci-pseudosimetrik bir manifold ise  $M$  ye proper Ricci-pseudosimetrik, Weyl-semisimetrik olmayan fakat Weyl-pseudosimetrik bir manifold ise  $M$  ye proper Weyl-pseudosimetrik denir.

**Tanım 1.17:** Bir  $(M, g)$   $n > 3$  boyutlu, diferansiyellenebilir manifoldu için eğer

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = \alpha(X)S(Y, Z) \quad (1.30)$$

olacak biçimde bir  $\alpha(X)$  1- formu var ise  $M$  ye Ricci Rekürent denir. Eğer

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = \alpha(X)S(Y, Z) + \beta(X)g(Y, Z) \quad (1.31)$$

olacak biçimde  $\alpha(X)$  ve  $\beta(X)$  1- frmları var ise  $M$  ye genelleştirilmiş Ricci Rekürent denir.

Burada  $S$  nin kovaryant türevi  $\nabla S$

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = \nabla_X S(Y, Z) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z)$$

ile tanımlanır. Eğer;

$$(\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_Y S)(X, Z) + (\nabla_Z S)(X, Y) = 0 \quad (1.32)$$

ise  $M$  ye dairesel paralel Ricci tensöre sahiptir denir.[8]

Bundan başka  $g$  metrik tensörünün türevi

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_X g)(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \quad (1.33)$$

ile verilir.

**Tanım 1.18:**  $M$  bir  $(2n+1)$ -boyutlu manifold,  $\phi$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  da  $M$  üzerinde, sırası ile,  $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Eğer  $\phi$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  için,  $M$  üzerinde herhangi bir vektör alanı  $X$  olmak üzere;

$$\eta(\xi)=1 \quad (1.34)$$

ve

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad (1.35)$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman  $(\phi, \xi, \eta)$  ya  $M$  üzerinde bir hemen hemen değme yapısı denir.  $M$  bu yapı ile bir hemen hemen değme manifoldu olarak adlandırılır [4]

**Teorem 1.1:**  $(\phi, \xi, \eta)$  hemen hemen değme yapısı için;

$$\text{i) } \quad \phi\xi = 0 \quad (1.36)$$

$$\text{ii) } \quad \eta(\phi X) = 0 \quad (1.37)$$

$$\text{iii) } \quad \text{rank } \phi = 2n \quad (1.38)$$

dir [4]

**Tanım 1.19:** Hemen hemen değme manifoldu  $M$  verilsin.  $M$  üzerinde hemen hemen değme yapısı  $(\phi, \xi, \eta)$  olsun.  $M$  üzerinde bir  $g$  Riemann metriği;

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (1.39)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (1.40)$$

şartlarını sağlıyor ise  $g$  metriğine  $M$  üzerinde hemen hemen değme metrik,  $(\phi, \xi, \eta, g)$  yapısına da hemen hemen değme metrik yapısı,  $(\phi, \xi, \eta, g)$  yapısı ile  $M$  ye de hemen hemen değme metrik manifoldu denir [4]

**Sonuç 1.1:**  $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu  $M$  ile hemen hemen değme metrik yapısı  $(\phi, \xi, \eta, g)$  verilsin. Böylece,

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \quad (1.41)$$

dir [4]

**Tanım 1.20:**  $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu  $M$  verilsin. Herbir  $\eta$  1-formu için  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  şartı sağlanır ise  $\eta$  ya  $M$  nin değme yapısı ve  $M$  ye de değme manifoldu denir [4]

**Teorem 1.2:**  $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu  $M$  verilsin.  $M$  nin bir değme yapısı  $\eta$  verildiğinde;

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \quad (1.42)$$

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı  $(\phi, \xi, \eta, g)$  vardır [4]

**Tanım 1.21:**  $M$  üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı  $(\phi, \xi, \eta, g)$  için;

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

şeklinde tanımlı  $\Phi$  dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısı  $(\phi, \xi, \eta, g)$  nın 2.temel formu denir [4,13]

**Tanım 1.22:**  $V$  bir reel vektör uzayı olmak üzere;

$$J: V \longrightarrow V$$

lineer dönüşümü;

$$J^2 = -I$$

şartını sağlıyor ise  $J$  ye  $V$  üzerinde bir kompleks yapı denir.

$(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu  $M$  verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen değme yapısı  $(\phi, \xi, \eta)$  olsun. Reel bir doğruyu  $R$  ile göstererek  $M \times R$  çarpım manifoldunu gözönüne alalım.  $M \times R$  üzerinde herhangi bir vektör alanı;

$$(X, f \frac{d}{dt})$$

şeklinindedir. Burada  $X$ ,  $M$  ye teğet bir vektör alanı,  $t$   $R$  nin bir koordinatı ve  $f$   $M \times R$  üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

$M \times R$  nin tanjant uzayındaki bir  $J$  lineer dönüşümü;

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = (\phi X) - f \cdot \xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \quad (1.43)$$

ile tanımlanır [4]

**Sonuç 1.2:** Yukarıdaki şekilde tanımlanan  $J$  dönüşümü  $M \times R$  üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır [4]

**Tanım 1.23:**  $M$  bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere  $M$  üzerinde  $(1,1)$ -tipinde bir tensör alanı  $F$  olsun.  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için;

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY]$$

şeklinde tanımlı  $N_F$  tensör alanına  $F$  nin Nijenhuis torsion tensörü denir.

$F=J$  hemen hemen kompleks yapı olması halinde de,

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \end{aligned} \quad (1.44)$$

dir [4]

**Tanım 1.24:** Hemen hemen kompleks manifoldu  $(M, J)$  verilsin.  $N_J = 0$  ise  $J$  dönüşümüne integrallenebilir denir [4]

**Tanım 1.25:** Eğer  $M \times \mathbb{R}$  üzerindeki bir  $J$  hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise  $(\phi, \xi, \eta)$  hemen hemen değme yapısına normaldir denir [4]

**Örnek 1.1:**  $E^4$  Kaehler manifoldunun 3-boyutlu bir reel hiperküresi  $S^3$  olsun.  $E^4$  de  $S^3$  ün bir birim normal  $C$  olmak üzere  $E^4$  ün hemen hemen kompleks tensör alanı  $J$

$$J : E^4 \longrightarrow E^4$$

$$JC = -\xi$$

biçiminde tanımlansın. O zaman  $\xi$ ,  $S^3$  üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani  $\xi \in \mathcal{X}(S^3)$  dir.  $S^3$  e teğet her bir  $X$  vektör alanı için  $\eta(X) = g(X, \xi)$  olmak üzere  $\eta$  1-formu iyi tanımlıdır. Üstelik  $\eta(\xi) = 1$  dir. Diğer yandan,

$$JX = \phi X + \eta(X)C$$

eşitliği ile  $\phi$  lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre  $\forall p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3$  için;

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p)) = J(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-p_3, -p_4, p_1, p_2) = -\xi$$

elde edilir [4]. Burada;

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi  $g(X, \xi)\xi$  için;

$$g(X, \xi)\xi = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$g(X, \xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece;

$$\lambda = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$$

olmak üzere;

$$g(X, \xi)\xi = \lambda \xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(\phi X) = J(\phi X) - \eta(\phi X)C$$

$$\phi(\phi X) = J(JX - \eta(X)C) - \eta(JX - \eta(X)C)C$$

$$= J \left( \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \right) - g(JX - \eta(X)C, \xi)C$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -x_1 + \lambda p_3 \\ -x_2 + \lambda p_4 \\ -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \\ -x_1 - \lambda p_3 \\ -x_2 - \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \\
&= \\
&\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda p_3 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_1 \\ -\lambda p_4 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_2 \\ -\lambda p_1 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_3 \\ -\lambda p_2 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dir. O zaman

$$\phi(\phi X) = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\phi\xi = J\xi - \eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece;

$$\begin{aligned}
\eta(\phi X) &= g(\phi X, \xi) \\
&= g(JX - \eta(X)C, \xi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu da açıkça görülebilir.

Sonuç olarak  $(\phi, \xi, \eta, g)$  yapısı  $S^3$  üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur.[14]

## BÖLÜM 2

### 2. SASAKIAN MANİFOLDLAR

**Tanım 2.1:**  $M$ , değme metrik yapısı  $(\phi, \xi, \eta, g)$  olan  $(2n+1)$ -boyutlu bir değme metrik manifoldu olsun. Eğer  $M$  nin değme metrik yapısı normal ise,  $M$  Sasakian yapıya sahiptir denir. Bazan Sasakian manifold normal değme metrik manifold olarak da adlandırılır [4]

**Teorem 2.1:**  $M$  üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı  $(\phi, \xi, \eta, g)$  bir Sasakian yapıdır  $\Leftrightarrow \forall X, Y \in \chi(M)$  için;

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \quad (2.1)$$

dir [4]. Burada;

$$\nabla_X(\phi Y) = (\nabla_X \phi)Y + \phi \nabla_X Y$$

dir.

**Sonuç 2.1:**  $M$  bir Sasakian manifold ise  $M$  nin bir Riemann eğrilik tensörü  $R$  olmak üzere;

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y \quad (2.2)$$

dir [4,13]).

**Teorem 2.2:**  $M$   $(2n+1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere  $M$  üzerinde bir birim Killing vektör alanı  $\xi$  verilsin. Ayrıca  $M$  nin eğrilik tensörü  $R$  olmak üzere  $M$  Sasakian manifolddur  $\Leftrightarrow$

$$R(X, \xi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X \quad (2.3)$$

dir [4]

**Uyarı :** Bir Sasakian manifoldu bir  $K$ -değme manifolddur fakat tersi sadece boy  $M = 3$  olması halinde geçerlidir [4,13]

**Sonuç 2.2:**  $M$  bir Sasakian manifold olsun.  $\forall X, Y \in \chi(M)$  ve  $\xi$  bir birim Killing vektör alanı olmak üzere;

$$R(X, \xi)Y = -(\nabla_X \phi)Y \quad (2.4)$$

dir [4,13]

**Sonuç 2.3:**  $M$ , değme metrik yapısı  $(\phi, \xi, \eta, g)$  olan  $(2n+1)$ -boyutlu bir Sasakian manifold olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} R(X, Y)\phi Z &= \phi R(X, Y)Z + g(\phi X, Z)Y - g(Y, Z)\phi X \\ &\quad + g(X, Z)\phi Y - g(\phi Y, Z)X \end{aligned} \quad (2.5)$$

dır [4,13]

**Sonuç 2.4:**  $M$  bir Sasakian manifold olmak üzere;

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= -\phi R(X, Y)\phi Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \\ &\quad - g(\phi Y, Z)\phi X + g(\phi X, Z)\phi Y \end{aligned} \quad (2.6)$$

dır [4,13]

**Önerme 2.1:**  $(M, g)$  Riemann manifoldu sabit  $k$  eğrilikli bir manifold olsun. O zaman  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  için;

$$R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \quad (2.7)$$

dir [4,13]

**Tanım 2.2:**  $M$  bir Sasakian manifold olsun. Böylece  $p \in M$  deki  $T_p M$  tanjant uzayında  $\xi$  ya dik bir  $X$  birim vektörü  $\{X, \phi X\}$  ortonormal olacak şekilde var ise  $\{X, \phi X\}$  düzlemine  $T_p M$  nin  $\phi$ -kesitseli denir. Ayrıca

$$K(X, \phi X) = g(R(X, \phi X)\phi X, X)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye  $M$  nin bir  $\phi$ -kesitsel eğriliği adı verilir [4,13]

**Tanım 2.3:**  $M$  bir Sasakian manifold olmak üzere  $M$  nin  $\phi$ -kesitsel eğriliği  $c = sbt$  ise  $M$  bir Sasakian uzay formu olarak adlandırılır ve  $M(c)$  şeklinde gösterilir (Verstraelen ve Vrancken, 1988).

**Teorem 2.3:**  $M(c)$  Sasakian uzay formunun  $R$  eğrilik tensörü;  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  için,

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \frac{1}{4}(c+3)[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \\ &\quad - \frac{1}{4}(c-1)[\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi \\
& +g(\phi Y, Z)\phi X - g(\phi X, Z)\phi Y + 2g(\phi X, Y)\phi Z
\end{aligned} \tag{2.8}$$

dir [4,13]

### Lorentzian para-Sasakian Manifolds

**Tanım 2.4:**  $M$  düzgün parakompakt Hausdorff manifoldu olsun.  $\Pi : TM \rightarrow M$  de  $M$  nin tanjant demetini gösterebilir.  $M$  nin bir  $g$  yarı-Riemann metriği,  $M$  de  $(0,2)$  tipinde düzgün simetrik tensör alanıdır öyleki  $\forall p \in M$  için

$$g \Big|_p : T_p M \times T_p M \rightarrow R$$

tensörü  $(-, \dots, -, +, \dots, +)$  işaretli non-dejener bir iç çarpımdır.

$M$  üzerinde  $(u, (x^1, \dots, x^n))$  lokal koordinatlarındaki  $g$  yarı-Riemann metriği

$$g \Big|_u = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(x) dx_i \otimes dx_j$$

olarak alınabilir. Buradaki  $g_{i,j} = g_{j,i}$  ve  $\det g \neq 0$  dir. Eğer  $g$ ,  $s$  tane negatif eigen değerine ve  $r=n-s$  tane pozitif eigen değerine sahipse o zaman  $g$ ,  $(s,r)$  tipindedir denir. Her  $p \in M$  için  $g \Big|_p$  nin  $diag\{-1, \dots, -1, +1, \dots, +1\}$  ile gösterebilecek şekilde lokal koordinatları vardır.[19]

**Tanım 2.5:**  $M$  diferensiyellenebilir bir manifold ve  $g$  'de  $M$  üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere;  $(M,g)$  ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir.[2]

**Tanım 2.6:**  $(M,g)$  bir yarı-Riemann manifoldu olsun.  $G$ 'nin sabit indeksi  $q$ 'ya  $(M,g)$  yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir,  $q$  indeksli ve  $n$ -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu  $M_q^n$  ile gösterilir.[2]

**Tanım 2.7:**  $M_q^n$  bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer  $n \geq 2$  ve  $q = 1$  ise, bu durumda  $M_1^n$  yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu denir.[2]

**Tanım 2.8:**  $M$  Lorentzian para-Sasakian manifoldu olsun. Eğer  $M$  de  $\phi$  (1,1)-tensör alanı,  $\xi$  kontravaryant vektör alanı,  $\eta$  kovaryant vektör alanı ve  $g$  Lorentzian metriki ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır.[18]

$$\eta(\xi) = -1 \quad (2.9)$$

$$\phi^2 = I + \eta \otimes \xi \quad (2.10)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad (2.11)$$

$$g(X, \xi) = \eta(X) \quad (2.12)$$

$$\nabla_x \xi = \phi X \quad (2.13)$$

$$(\nabla_x \phi)Y = [g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)]\xi + [X + \eta(X)\xi]\eta(Y) \quad (2.14)$$

Burada  $\nabla$ ,  $g$  Lorentzian metriğinin yönlü türev operatörünü gösterir. Bir LP-sasakian manifoldunda, aşağıdaki bağıntılarını sağladığı kolaylıkla görülebilir. [18]

$$\phi\xi = 0 \quad \eta(\phi X) = 0 \quad (2.15)$$

$$\text{rank}\phi = n - 1 \quad (2.16)$$

Eğer  $S$  Ricci tensörü herhangi  $X, Y$  vektörleri ve  $M$  üzerinde  $a, b$  fonksiyonları için

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y) \quad (2.17)$$

ise  $M$  LP-sasakian manifolduna  $\eta$ -Einstein manifoldu denir.[18]

Ayrıca  $(\phi, \xi, \eta, g)$  yapısı ile bu tip bir LP-sasakian manifoldunda aşağıdaki bağıntılar  $R$  Riemannian eğrilik tensörü olmak üzere herhangi bir  $X, Y, Z$  vektör alanları için aşağıdaki ifadeler sağlanır. [18]

$$g(R(X, Y)Z, \xi) = \eta(R(X, Y)Z) = g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y) \quad (2.18)$$

$$R(\xi, X)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \quad (2.19)$$

$$R(\xi, X)\xi = X + \eta(X)\xi \quad (2.20)$$

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y \quad (2.21)$$

$$S(X, \xi) = (n-1)\eta(X) \quad (2.22)$$

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X, Y) + (n-1)\eta(X)\eta(Y) \quad (2.23)$$

### BÖLÜM 3

#### 3. Lorentzian para-Sasakian Manifoldlarda Eğrilik Şartları

Bu bölümde daha önceki bölümlerde verdiğimiz teoremlerden faydalanarak Lorentzian para-sasakian manifoldlarda bazı eğrilik şartları incelendi. Bulunan orijinal sonuçlar teorem ve sonuç olarak verildi.

**Teorem 3.1 :**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun. Eğer  $M$  üzerinde  $R(\xi, Y).R = 0$  ise  $M$ ,  $S^n(1)$  küresine izomorftur.

**İspat:**  $\forall Y, Z, U, W \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} (R(\xi, Y)R)(Z, U)W &= R(\xi, Y)R(Z, U)W - R(R(\xi, Y)Z, U)W \\ &\quad - R(Z, R(\xi, Y)U)W - R(Z, U)R(\xi, Y)W = 0 \end{aligned}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alınırsa

$$\begin{aligned} (R(\xi, Y)R)(\xi, U)W &= R(\xi, Y)R(\xi, U)W - R(R(\xi, Y)\xi, U)W \\ &\quad - R(\xi, R(\xi, Y)U)W - R(\xi, U)R(\xi, Y)W = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

(3.1) denklemindeki  $R(\xi, Y)R(\xi, U)W$  ifadesini hesaplayalım. Bunun için

(2.19) denklemini kullanılırsa

$$R(\xi, Y)R(\xi, U)W = R(\xi, Y)[g(U, W)\xi - \eta(W)U] \quad (3.2)$$

elde edilir.

(3.1) denklemindeki  $R(R(\xi, Y)\xi, U)W$  ifadesini hesaplayalım. Bunun için

(2.20) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(R(\xi, Y)\xi, U)W &= R(Y, U)W + \eta(Y)g(U, W)\xi \\ &\quad - \eta(Y)\eta(W)U \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir.

(3.1) denklemindeki  $R(\xi, R(\xi, Y)U)W$  ifadesini hesaplayalım. Bunun için

(2.19) denklemini kullanılırsa

$$R(\xi, R(\xi, Y)U)W = -\eta(U)g(Y, W)\xi + \eta(U)\eta(W)Y \quad (3.4)$$

elde edilir.

(3.1) denklemindeki  $R(\xi, U)R(\xi, Y)W$  ifadesini hesaplayalım. Bunun için

(2.19) ve (2.20) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(\xi, U)R(\xi, Y)W &= g(Y, W)U + \eta(U)g(Y, W)\xi \\ &\quad - \eta(W)g(U, Y)\xi + \eta(W)\eta(Y)U \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.2), (3.3), (3.4) ve (3.5) ifadeleri (3.1) da yazılırsa

$$\begin{aligned} (R(\xi, Y)R(\xi, U)W &= R(\xi, Y)[g(U, W)\xi - \eta(W)U] \\ &\quad - R(Y, U)W \\ &\quad - \eta(Y)[g(U, W)\xi - \eta(W)U] \\ &\quad + \eta(U)[g(Y, W)\xi - \eta(W)Y] \\ &\quad - R(\xi, U)[g(Y, W)\xi - \eta(W)Y] = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) denkleminde (2.19) ve (2.20) uygulanırsa

$$\begin{aligned} (R(\xi, Y)R(\xi, U)W &= g(U, W)Y + \eta(Y)g(U, W)\xi \\ &\quad - \eta(W)g(Y, U)\xi + \eta(W)\eta(U)Y \\ &\quad - R(Y, U)W - \eta(Y)g(U, W)\xi \\ &\quad + \eta(Y)\eta(W)U + \eta(U)g(Y, W)\xi \\ &\quad - \eta(U)\eta(W)Y - g(Y, W)U \\ &\quad - \eta(U)g(Y, W)\xi + \eta(W)g(U, Y)\xi \\ &\quad - \eta(W)\eta(Y)U = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) denkleminde

$$g(U, W)Y - R(Y, U)W - g(Y, W)U = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir.

Buradan

$$R(Y, U)W = g(U, W)Y - g(Y, W)U \quad (3.9)$$

dir.

Böylece  $M S^n(1)$  küresine izomorf olduğu sonucuna varılır.

**Teorem 3.2 :**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.  $M$  üzerinde  $R(\xi, Y).R = L_R Q(g, R)$  ise  $L_R = 1$  dir.

**İspat:**  $\forall Y, U, Z, W \in \mathcal{X}(M)$  için

$$\begin{aligned} (R(\xi, Y)R)(Z, U)W &= L_R\{((\xi \wedge_g Y)R)(Z, U)W\} \\ &= L_R\{(\xi \wedge_g Y)R(Z, U)W - R((\xi \wedge_g Y)Z, U)W \\ &\quad - R(Z, (\xi \wedge_g Y)U)W - R(Z, U)(\xi \wedge_g Y)W\} \end{aligned}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alınır

$$\begin{aligned} (R(\xi, Y)R)(\xi, U)W &= L_R\{((\xi \wedge_g Y)R)(\xi, U)W\} \\ &= L_R\{(\xi \wedge_g Y)R(\xi, U)W - R((\xi \wedge_g Y)\xi, U)W \\ &\quad - R(\xi, (\xi \wedge_g Y)U)W - R(\xi, U)(\xi \wedge_g Y)W\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

dir. (3.10) denklemindeki  $(\xi \wedge_g Y)R(\xi, U)W$  ifadesi için

(1.13) ve (2.19) kullanırsak

$$\begin{aligned} (\xi \wedge_g Y)R(\xi, U)W &= \eta(Y)g(U, W)\xi + g(U, W)Y \\ &\quad - \eta(W)g(Y, U)\xi + \eta(W)\eta(U)Y \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir.

(3.10) denklemindeki  $R((\xi \wedge_g Y)\xi, U)W$  ifadesi için

(1.13) ve (2.19) kullanılırsa

$$\begin{aligned} R((\xi \wedge_g Y)\xi, U)W &= \eta(Y)g(U, W)\xi - \eta(Y)\eta(W)U \\ &\quad + R(Y, U)W \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir.

(3.10) denklemindeki  $R(\xi, (\xi \wedge_g Y)U)W$  ifadesi için

(1.13) ve (2.19) kullanılırsa

$$R(\xi, (\xi \wedge_g Y)U)W = -\eta(U)g(Y, W)\xi + \eta(U)\eta(W)Y \quad (3.13)$$

elde edilir.

(3.10) denklemindeki  $R(\xi, U)(\xi \wedge_g Y)W$  ifadesi hesaplanırsa

(1.13) , (2.19) ve (2.20) kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(\xi, U)(\xi \wedge_g Y)W &= g(Y, W)U + \eta(U)g(Y, W)\xi \\ &\quad - \eta(W)g(U, Y)\xi + \eta(W)\eta(Y)U \end{aligned} \quad (3.14)$$

elde edilir.

(3.11), (3.12), (3.13) ve (3.14) ifadeleri (3.10) te yazılırsa

$$\begin{aligned} L_R Q(g, R) &= L_R \{ g(U, W)Y + \eta(Y)g(U, W)\xi \\ &\quad - \eta(W)g(Y, U)\xi + \eta(W)\eta(U)Y \\ &\quad - R(Y, U)W - \eta(Y)g(U, W)\xi \\ &\quad + \eta(Y)\eta(W)U + \eta(U)g(Y, W)\xi \\ &\quad - \eta(U)\eta(W)Y - g(Y, W)U \\ &\quad - \eta(U)g(Y, W)\xi + \eta(W)g(U, Y)\xi \\ &\quad - \eta(W)\eta(Y)U \} \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.7) ve (3.15) den

$$R.R = L_R Q(g, R) \quad (3.16)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla  $L_R = 1$  dir.

**Teorem 3.3 :**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.  $M$  üzerinde  $K(\xi, Y).P = 0$  ise

$$S^2(U, Y) = (n-2)S(U, Y) + (n-1)g(U, Y)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat:**  $\forall Y, Z, U, W \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} (K(\xi, Y)P)(Z, U)W &= K(\xi, Y)P(Z, U)W - P(K(\xi, Y)Z, U)W \\ &\quad - P(Z, K(\xi, Y)U)W - P(Z, U)K(\xi, Y)W = 0 \end{aligned}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alınır

$$\begin{aligned} (K(\xi, Y)P)(\xi, U)W &= K(\xi, Y)P(\xi, U)W - P(K(\xi, Y)\xi, U)W \\ &\quad - P(\xi, K(\xi, Y)U)W - P(\xi, U)K(\xi, Y)W = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.17) deki  $K(\xi, Y)P(\xi, U)W$  ifadesini hesaplayalım. Bunun için

(1.11) denklemi kullanılırsa

$$K(\xi, Y)P(\xi, U)W = g(U, W)K(\xi, Y)\xi - \frac{1}{n-1}S(U, W)K(\xi, Y)\xi \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.17) deki  $P(K(\xi, Y)\xi, U)W$  ifadesini hesaplayalım. Bunun için

(1.12) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} P(K(\xi, Y)\xi, U)W &= \frac{1}{n-2}\eta(Y)P(\xi, U)W - \frac{1}{n-2}P(Y, U)W \\ &\quad - \frac{n-1}{n-2}\eta(Y)P(\xi, U)W \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.17) deki  $P(\xi, K(\xi, Y)U)W$  ifadesini hesaplayalım. Bunun için

(1.12) denklemi kullanılırsa

$$P(\xi, K(\xi, Y)U)W = \frac{1}{n-2}\eta(U)[P(\xi, Y)W + P(\xi, QY)W] \quad (3.20)$$

elde edilir. (3.17) deki  $P(\xi, U)K(\xi, Y)W$  ifadesini hesaplayalım. Bunun için

(1.12) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} P(\xi, U)K(\xi, Y)W &= -\frac{1}{n-2}g(Y, W)P(\xi, U)\xi + \frac{1}{n-2}\eta(W)P(\xi, U)\xi \\ &\quad + \frac{1}{n-2}P(\xi, U)QY \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.18), (3.19), (3.20) ve (3.21), (3.17) de yazılırsa

$$\begin{aligned} (K(\xi, Y)P)(\xi, U)W &= g(U, W)K(\xi, Y)\xi - \frac{1}{n-1}S(U, W)K(\xi, Y)\xi \\ &\quad + \frac{1}{n-2}\eta(Y)P(\xi, U)W + \frac{1}{n-2}P(Y, U)W \\ &\quad + \frac{n-1}{n-2}\eta(Y)P(\xi, U)W + \frac{1}{n-2}P(QY, U)W \\ &\quad - \frac{1}{n-2}\eta(U)P(\xi, Y)W - \frac{1}{n-2}\eta(U)P(\xi, QY)W \\ &\quad + \frac{1}{n-2}g(Y, W)P(\xi, U)\xi - \frac{1}{n-2}\eta(W)P(\xi, U)Y \\ &\quad + \frac{1}{n-2}S(Y, W)P(\xi, U)\xi - \frac{1}{n-2}\eta(W)P(\xi, U)QY \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22) de  $W = \xi$  alınırsa

$$\begin{aligned}
(K(\xi, Y)P)(\xi, U)\xi = & + \frac{1}{n-2}\eta(Y)P(\xi, U)\xi + \frac{1}{n-2}P(Y, U)\xi \\
& + \frac{n-1}{n-2}\eta(Y)P(\xi, U)\xi + \frac{1}{n-2}P(QY, U)\xi \\
& - \frac{1}{n-2}\eta(U)P(\xi, Y)\xi - \frac{1}{n-2}\eta(U)P(\xi, QY)\xi \\
& + \frac{1}{n-2}g(Y, \xi)P(\xi, U)\xi + \frac{1}{n-2}P(\xi, U)Y \\
& + \frac{1}{n-2}S(Y, \xi)P(\xi, U)\xi + \frac{1}{n-2}P(\xi, U)QY = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.23) de (2.12) ve (2.22) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(K(\xi, Y)P)(\xi, U)\xi = & \frac{1}{n-2}[g(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}S(U, Y)\xi] \\
& + \frac{1}{n-2}[P(QY, U)\xi - \eta(U)P(\xi, QY)\xi + P(\xi, U)QY] = 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.24) de (1.11), (2.12), (2.19), (2.20), (2.21) ve (2.22) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(K(\xi, Y)P)(\xi, U)W = & \frac{1}{n-2}g(U, Y)\xi - \frac{1}{(n-1)(n-2)}S(U, Y)\xi \\
& + \frac{1}{n-2}S(U, Y)\xi - \frac{1}{(n-1)(n-2)}S^2(U, Y)\xi = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.25) den de

$$S^2(U, Y)\xi = (n-2)S(U, Y)\xi + (n-1)g(U, Y)\xi \tag{3.26}$$

elde edilir.

(3.26) denklemini  $\xi$  ile çarpılırsa

$$S^2(U, Y) = (n-2)S(U, Y) + (n-1)g(U, Y) \tag{3.27}$$

elde edilir.

**Teorem 3.4 :**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.  $M$  üzerinde  $P(\xi, Y).K = 0$  ise

$$S^2(Y, U) = (n-1)g(Y, U) + (n-2)S(Y, U)$$

dir.

**İspat:**  $\forall Y, Z, U, W \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} (P(\xi, Y)K)(Z, U)W &= P(\xi, Y)K(Z, U)W - K(P(\xi, Y)Z, U)W \\ &\quad - K(Z, P(\xi, Y)U)W - K(Z, U)P(\xi, Y)W = 0 \end{aligned}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alınrsa

$$\begin{aligned} (P(\xi, Y)K)(\xi, U)W &= P(\xi, Y)K(\xi, U)W - K(P(\xi, Y)\xi, U)W \\ &\quad - K(\xi, P(\xi, Y)U)W - K(\xi, U)P(\xi, Y)W = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.28) denkleminde  $W = \xi$  alınrsa

$$P(\xi, Y)K(\xi, U)\xi - K(\xi, P(\xi, Y)U)\xi = 0 \quad (3.29)$$

elde edilir. (3.29) da (1.11), (1.12), (2.19), (2.20) ve (2.22) kullanılırsa

$$-\frac{1}{n-2}P(\xi, Y)U - \frac{1}{n-2}P(\xi, Y)QU = 0 \quad (3.30)$$

elde edilir.

(3.30) de (1.11), (2.19) ve (2.22) kullanılırsa

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n-2}g(Y, U)\xi - \frac{1}{n-1}S(Y, U)\xi \\ + \frac{1}{(n-1)(n-2)}S^2(Y, U)\xi = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

elde edilir.

(3.31) denklemini  $\xi$  ile çarpılırsa

$$S^2(Y, U) = (n-1)g(Y, U) + (n-2)S(Y, U) \quad (3.32)$$

elde edilir.

**Sonuç 3.1 :**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold üzerinde

$$(K(\xi, Y)P)(\xi, U)W - (P(\xi, Y)K)(\xi, U)W = 0 \text{ dir.} \quad (3.33)$$

**Teorem 3.5 :**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.

$$(K(\xi, Y)P)(\xi, U)W + (P(\xi, Y)K)(\xi, U)W = 0 \text{ ise}$$

$$S^2(Y, U) = (n-1)g(Y, U) + (n-2)S(Y, U)$$

eşitliği  $M$  üzerinde sağlanır.

**İspat:**

$$(K(\xi, Y)P)(\xi, U)W + (P(\xi, Y)K)(\xi, U)W = 0 \quad (3.34)$$

göz önüne alırsak.

(3.34) denkleminde (3.27) ve (3.32) yazılırsa

$$\begin{aligned} S^2(U, Y) - (n-1)g(U, Y) - (n-2)S(U, Y) \\ + S^2(U, Y) - (n-1)g(U, Y) - (n-2)S(U, Y) = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

elde edilir. (3.35) denkleminde

$$2S^2(U, Y) - 2(n-1)g(U, Y) - 2(n-2)S(U, Y) = 0 \quad (3.36)$$

$$S^2(U, Y) - (n-1)g(U, Y) - (n-2)S(U, Y) = 0 \quad (3.37)$$

$$S^2(Y, U) = (n-1)g(Y, U) + (n-2)S(Y, U) \quad (3.38)$$

elde edilir.

**Teorem 3.6 :**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.  $M$  üzerinde

$$(C(\xi, Y).C)(\xi, U)W = 0 \text{ şartı sağlanıyorsa } M \text{ manifoldu}$$

$$\tau = n-1$$

skaler eğriliğine sahiptir.

**İspat:**  $\forall Y, U, W \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} (C(\xi, Y).C)(\xi, U)W &= C(\xi, Y)C(\xi, U)W - C(C(\xi, Y)\xi, U)W \\ &\quad - C(\xi, C(\xi, Y)U)W - C(\xi, U)C(\xi, Y)W = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

dir.

(3.39) denklemindeki  $C(\xi, Y)C(\xi, U)W$  i hesaplarsak

$$\begin{aligned} C(\xi, Y)C(\xi, U)W &= C(\xi, Y)\left[\left(1 - \frac{n-1}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\right)g(U, W)\xi \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{n-1}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\right)\eta(W)U \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n-2}S(U, W)\xi + \frac{1}{n-2}\eta(W)QU\right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

elde edilir. Burada

$$\left(1 - \frac{n-1}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\right) = A \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{n-2} = D \quad (3.42)$$

dir.

(3.41) ve (3.42) (3.40) de yazılırsa

$$\begin{aligned} C(\xi, Y)C(\xi, U)W &= C(\xi, Y)[Ag(U, W)\xi - A\eta(W)U \\ &\quad - DS(U, W)\xi + D\eta(W)QU] \end{aligned} \quad (3.43)$$

elde edilir. (3.39) denklemindeki  $C(C(\xi, Y)\xi, U)W$  hesaplanırsa

$$C(C(\xi, Y)\xi, U)W = C(AY + A\eta(Y)\xi - \frac{n-1}{n-2}\eta(Y)\xi - DQY, U)W \quad (3.44)$$

elde edilir.

$$\text{Burada } B = \frac{n-1}{n-2} \quad \text{dersek ve} \quad (3.45)$$

(3.45) (3.44) denkleminde yerine yazılırsa

$$C(C(\xi, Y)\xi, U)W = C(AY + A\eta(Y)\xi - B\eta(Y)\xi - DQY, U)W \quad (3.46)$$

elde edilir.

(3.39) denklemdeki  $C(\xi, C(\xi, Y)U)W$  hesaplanırsa

$$C(\xi, C(\xi, Y)U)W = C(\xi, Ag(Y, U)\xi - A\eta(U)Y - DS(Y, U)\xi + D\eta(U)QY)W \quad (3.47)$$

elde edilir.

(3.39) denklemdeki  $C(\xi, U)C(\xi, Y)W$  hesaplanırsa

$$C(\xi, U)C(\xi, Y)W = C(\xi, U)[Ag(Y, W)\xi - A\eta(W)Y - DS(Y, W)\xi + D\eta(W)QY] \quad (3.48)$$

elde edilir.

(3.43) , (3.46) , (3.47) , (3.48) denklemleri (3.39) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (C(\xi, Y)C)(\xi, U)W &= Ag(U, W)C(\xi, Y)\xi - A\eta(W)C(\xi, Y)U \\ &\quad - D(S(U, W)C(\xi, Y)\xi + D\eta(W)C(\xi, Y)QU \\ &\quad - AC(Y, U)W - A\eta(Y)C(\xi, U)W \\ &\quad + B\eta(Y)C(\xi, U)W + DC(QY, U)W \\ &\quad + A\eta(U)C(\xi, Y)W - D\eta(U)C(\xi, QY)W \\ &\quad - Ag(Y, W)C(\xi, U)\xi + A\eta(W)C(\xi, U)Y \\ &\quad + DS(Y, W)C(\xi, U)\xi - D\eta(W)C(\xi, U)QY = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

elde edilir.

(3.49) denklemde (1.10), (2.12), (2.19), (2.20), (2.21) ve (2.22) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(C(\xi, Y)C)(\xi, U)W &= Ag(U, W)[AY + A\eta(Y)\xi - B\eta(Y)\xi - DQY] \\
&\quad - A\eta(W)[Ag(Y, U)\xi - A\eta(U)Y - DS(Y, U)\xi + D\eta(U)QY] \\
&\quad - DS(U, W)[AY + A\eta(Y)\xi - B\eta(Y)\xi - DQY] \\
&\quad + D\eta(W)[Ag(Y, QU)\xi - A\eta(QU)Y - DS(Y, QU)\xi + D\eta(QU)QY] \\
&\quad - AC(Y, U)W \\
&\quad - A\eta(Y)[Ag(U, W)\xi - A\eta(W)U - DS(U, W)\xi + D\eta(W)QU] \\
&\quad + B\eta(Y)[Ag(U, W)\xi - A\eta(W)U - DS(U, W)\xi + D\eta(W)QU] \\
&\quad + DC(QY, U)W \\
&\quad + A\eta(U)[Ag(Y, W)\xi - A\eta(W)Y - DS(Y, W)\xi + D\eta(W)QY] \\
&\quad - D\eta(U)[Ag(QY, W)\xi - A\eta(W)QY - DS(QY, W)\xi + D\eta(W)Q(QY)] \\
&\quad - Ag(Y, W)[AU + A\eta(U)\xi - B\eta(U)\xi - DQU] \\
&\quad + A\eta(W)[Ag(U, Y)\xi - A\eta(Y)U - DS(U, Y)\xi + D\eta(Y)QU] \\
&\quad + DS(Y, W)[AU + A\eta(U)\xi - B\eta(U)\xi - DQU] \\
&\quad - D\eta(W)[Ag(U, QY)\xi - A\eta(QY)U - DS(U, QY)\xi + D\eta(QY)QU] = 0
\end{aligned} \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.50) denkleminde (2.12) ve(2.22) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(C(\xi, Y)C)(\xi, U)W &= A^2 g(U, W)Y - A.Dg(U, W)QY - A.D\eta(W)\eta(U)QY \\
&\quad - A.DS(U, W)Y + D^2 S(U, W)QY - A.B\eta(W)\eta(U)Y \\
&\quad + B.D\eta(W)\eta(U)QY - AC(Y, U)W + DC(QY, U)W \\
&\quad - A.D\eta(W)S(Y, W)\xi + D^2 \eta(U)S^2(Y, W)\xi \\
&\quad - D^2 \eta(W)\eta(U)Q(QY) - A^2 g(Y, W)U + A.B\eta(U)g(Y, W)\xi \\
&\quad + A.Dg(Y, W)QU + A.DS(Y, W)U \\
&\quad - B.D\eta(U)S(Y, W)\xi - D^2 S(Y, W)QU = 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir. (3.51) denklemi  $\xi$  ile çarpılırsa

$$2A.B\eta(W)\eta(U)\eta(Y) = 0 \tag{3.52}$$

elde edilir.

Buradan

$$A.B = \left(1 - \frac{n-1}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n-2}\right) = 0 \tag{3.53}$$

elde edilir.

(3.53) denkleminde de  $n \neq 1$  olduğundan

$$\tau = n - 1 \quad (3.54)$$

elde edilir.

**Teorem 3.7 :**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.  $C(\xi, Y).R = 0$  ise

$$S^2(U, W) = (n-1)g(U, W) + \left(-2 + \frac{\tau}{n-1}\right)S(U, W)$$

eşitliği  $M$  manifoldu üzerinde sağlanır.

**İspat:**  $\forall Y, Z, U, W \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} (C(\xi, Y)R)(Z, U)W &= C(\xi, Y)R(Z, U)W - R(C(\xi, Y)Z, U)W \\ &\quad - R(Z, C(\xi, Y)U)W - R(Z, U)C(\xi, Y)W = 0 \end{aligned}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alınırsa

$$\begin{aligned} (C(\xi, Y)R)(\xi, U)W &= C(\xi, Y)R(\xi, U)W - R(C(\xi, Y)\xi, U)W \\ &\quad - R(\xi, C(\xi, Y)U)W - R(\xi, U)C(\xi, Y)W = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

elde edilir.

(3.55) denklemindeki  $C(\xi, Y)R(\xi, U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(2.19) kullanalım.

$$C(\xi, Y)R(\xi, U)W = C(\xi, Y)[g(U, W)\xi - \eta(W)U] \quad (3.56)$$

elde edilir.

(3.56) de (1.10), (2.12), (2.19), (2.20), (2.22), (3.41), (3.42), (3.45) i uygulayalım.

$$\begin{aligned} C(\xi, Y)R(\xi, U)W &= Ag(U, W)Y + A\eta(Y)g(U, W)\xi \\ &\quad - B\eta(Y)g(U, W)\xi - Dg(U, W)QY \\ &\quad - A\eta(W)g(Y, U)\xi + A\eta(W)\eta(U)Y \\ &\quad + D\eta(W)S(Y, U)\xi - D\eta(W)\eta(U)QY \end{aligned} \quad (3.57)$$

elde edilir.

(3.55) denklemindeki  $R(C(\xi, Y)\xi, U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.20), (2.22), (3.41) , (3.42) , (3.45) ı kullanalım

$$\begin{aligned} R(C(\xi, Y)\xi, U)W &= AR(Y, U)W - DR(QY, U)W \\ &+ A\eta(Y)g(U, W)\xi - A\eta(Y)\eta(W)U \\ &- B\eta(Y)g(U, W)\xi + B\eta(Y)A\eta(W)U \end{aligned} \quad (3.58)$$

elde edilir.

(3.55) denklemindeki  $R(\xi, C(\xi, Y)U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.22), (3.41) , (3.42) , (3.45) i kullanalım

$$\begin{aligned} R(\xi, C(\xi, Y)U)W &= -A\eta(U)g(Y, W)\xi + A\eta(U)\eta(W)Y \\ &+ D\eta(U)S(Y, W)\xi - D\eta(U)\eta(W)QY \end{aligned} \quad (3.59)$$

elde edilir.

(3.55) denklemindeki  $R(\xi, U)C(\xi, Y)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.22), (3.41) , (3.42) , (3.45) i kullanalım

$$\begin{aligned} R(\xi, U)C(\xi, Y)W &= Ag(Y, W)U + A\eta(U)g(Y, W)\xi \\ &- A\eta(W)g(U, Y)\xi + A\eta(W)\eta(Y)U \\ &- DS(Y, W)U - D\eta(U)S(Y, W)\xi \\ &+ D\eta(W)S(U, Y)\xi - B\eta(W)\eta(Y)U \end{aligned} \quad (3.60)$$

(3.55) denkleminde (3.57) , (3.58) , (3.59) , (3.60) i kullanalım

$$\begin{aligned} (C(\xi, Y)R)(\xi, U)W &= Ag(U, W)Y - Dg(U, W)QY \\ &- AR(Y, U)W + DR(QY, U)W \\ &- Ag(Y, W)U + DS(Y, W)U = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

elde edilir.

(3.61) ifadesini V ile çarparsak

$$\begin{aligned} &Ag(U, W)g(V, Y) - Ag(Y, W)g(V, U) \\ &- Ag(R(Y, U)W, V) \\ &- Dg(U, W)g(V, QY) + Dg(QY, W)g(V, U) \\ &+ Dg(R(QY, U)W, V) = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

(3.62) denkleminde  $V = Y = e_i$  alırsak

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n [Ag(U,W)g(e_i,e_i) - Ag(e_i,W)g(e_i,U) \\
- Ag(R(e_i,U)W,e_i) \\
- Dg(U,W)S(e_i,e_i) + DS(e_i,W)g(e_i,U) \\
+ Dg(R(Qe_i,U)W,e_i)] = 0
\end{aligned} \tag{3.63}$$

elde edilir

(3.63) denkleminde

$$S^2(U,W) = \left(\frac{\tau D - A(n-1)}{D}\right)g(U,W) + \frac{A-D}{D}S(U,W) \tag{3.64}$$

elde edilir.

(3.42) ve (3.45) (3.64) de yazılırsa

$$S^2(U,W) = (n-1)g(U,W) + \left(-2 + \frac{\tau}{n-1}\right)S(U,W) \tag{3.65}$$

elde edilir.

**Teorem 3.8 :**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.

$R(\xi,Y).C = 0$  ise  $M$ ,  $E^{n+1} \times S^n(4)$  e lokal izometriktir.

**İspat:**  $\forall Y,Z,U,W \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned}
(R(\xi,Y).C)(Z,U)W &= R(\xi,Y)C(Z,U)W - C(R(\xi,Y)Z,U)W \\
&\quad - C(Z,R(\xi,Y)U)W - C(Z,U)R(\xi,Y)W = 0
\end{aligned}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alalım.

$$\begin{aligned}
(R(\xi,Y).C)(\xi,U)W &= R(\xi,Y)C(\xi,U)W - C(R(\xi,Y)\xi,U)W \\
&\quad - C(\xi,R(\xi,Y)U)W - C(\xi,U)R(\xi,Y)W = 0
\end{aligned} \tag{3.66}$$

elde edilir.

(3.66) denkleminde  $R(\xi,Y)C(\xi,U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.20), (2.22), (3.41), (3.42), (3.45) ı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
R(\xi, Y)C(\xi, U)W &= Ag(U, W)Y + A\eta(Y)g(U, W)\xi \\
&\quad - A\eta(W)g(Y, U)\xi + A\eta(W)\eta(U)Y \\
&\quad - DS(U, W)Y - D\eta(Y)S(U, W)\xi \\
&\quad + D\eta(W)S(Y, U)\xi - B\eta(W)\eta(U)Y
\end{aligned} \tag{3.67}$$

elde edilir.

(3.66) denkleminde  $C(R(\xi, Y)\xi, U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.20), (2.22), (3.41), (3.42), (3.45) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
C(R(\xi, Y)\xi, U)W &= R(Y, U)W - DS(U, W)Y \\
&\quad + DS(Y, W)U - Dg(U, W)QU \\
&\quad + Dg(Y, W)QU \\
&\quad + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [g(U, W)Y - g(Y, W)U] \\
&\quad + A\eta(Y)g(U, W)\xi - A\eta(Y)\eta(W)U \\
&\quad - D\eta(Y)S(U, W)\xi + D\eta(Y)\eta(W)QU
\end{aligned} \tag{3.68}$$

elde edilir.

(3.66) denkleminde  $C(\xi, R(\xi, Y)U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.20), (2.22), (3.41), (3.42), (3.45) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
C(\xi, R(\xi, Y)U)W &= -A\eta(U)g(Y, W)\xi + A\eta(U)\eta(W)Y \\
&\quad + D\eta(U)S(Y, W)\xi - D\eta(U)\eta(W)QU
\end{aligned} \tag{3.69}$$

elde edilir.

(3.66) denkleminde  $C(\xi, U)R(\xi, Y)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.20), (2.22), (3.41), (3.42), (3.45) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
C(\xi, U)R(\xi, Y)W &= Ag(Y, W)U + A\eta(U)g(Y, W)\xi \\
&\quad - B\eta(U)g(Y, W)\xi - Dg(Y, W)QU \\
&\quad - A\eta(W)g(U, Y)\xi + A\eta(W)\eta(Y)U \\
&\quad + D\eta(W)S(U, Y)\xi - D\eta(W)\eta(Y)QU
\end{aligned} \tag{3.70}$$

elde edilir.

(3.66) denkleminde (3.67), (3.68), (3.69), (3.70) yazılırsa

$$\begin{aligned}
(R(\xi, Y)C)(\xi, U)W &= -B\eta(W)\eta(U)Y - R(Y, U)W \\
&\quad - DS(Y, W)U + Dg(U, W)QY \\
&\quad - Dg(U, W)Y + Dg(Y, W)U \\
&\quad - D\eta(U)S(Y, W)\xi + D\eta(W)\eta(U)QY \\
&\quad + B\eta(U)g(Y, W)\xi = 0
\end{aligned} \tag{3.71}$$

elde edilir.

(3.71) denkleminde  $W = \xi$  alınırsa

$$(B + D - 1)R(Y, U)\xi = 0 \tag{3.72}$$

elde edilir. (3.72) dan

$(B + D - 1) \neq 0$  olduğundan

$$R(Y, U)\xi = 0 \tag{3.73}$$

elde edilir.

O halde  $M$ ,  $E^{n+1} \times S^n(4)$  e lokal izometriktir.

**Teorem 3.9 :**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.  $P(\xi, Y).S = 0$  ise

$M$  Einstein Manifoldudur.

**İspat:**  $\forall Y, Z, U \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned}
(P(\xi, Y).S)(Z, U) &= P(\xi, Y)S(Z, U) - S(P(\xi, Y)Z, U) \\
&\quad - S(Z, P(\xi, Y)U) = 0
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alınırsa

$$\begin{aligned}
(P(\xi, Y).S)(\xi, U) &= P(\xi, Y)S(\xi, U) - S(P(\xi, Y)\xi, U) \\
&\quad - S(\xi, P(\xi, Y)U) = 0
\end{aligned} \tag{3.75}$$

elde edilir.

Buradan

$$(P(\xi, Y).S)(\xi, U) = -S(P(\xi, Y)\xi, U) - S(\xi, P(\xi, Y)U) = 0 \tag{3.76}$$

dır.

(3.76) denklemindeki  $S(P(\xi, Y)\xi, U)$  ifadesini hesaplayalım.

(1.11), (2.20) ve (2.22) kullanılırsa

$$S(P(\xi, Y)\xi, U) = 0 \quad (3.77)$$

elde edilir.

(3.76) denklemindeki  $S(\xi, P(\xi, Y)U)$  ifadesini hesaplayalım.

(1.11), (2.19) ve (2.22) kullanılırsa

$$S(\xi, P(\xi, Y)U) = -(n-1)g(Y, U) + S(Y, U) \quad (3.78)$$

elde edilir.

(3.77) ve (3.78) (3.76) denkleminde yazılırsa

$$S(Y, U) = (n-1)g(Y, U) \quad (3.79)$$

elde edilir.

$M$  bir Einstein Manifoldudur.

**Teorem 3.10 :**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.  $K(\xi, Y).S = 0$  ise

$$S^2(Y, U) = (n-1)g(Y, U) + (n-2)S(Y, U) \quad \text{eşitliği } M \text{ manifoldu üzerinde sağlanır.}$$

**İspat:**  $\forall Y, Z, U \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} (K(\xi, Y).S)(Z, U) &= K(\xi, Y)S(Z, U) - S(K(\xi, Y)Z, U) \\ &\quad - S(Z, K(\xi, Y)U) = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Bu denklemden  $Z = \xi$  alırsak

$$\begin{aligned} (K(\xi, Y).S)(\xi, U) &= K(\xi, Y)S(\xi, U) - S(K(\xi, Y)\xi, U) \\ &\quad - S(\xi, K(\xi, Y)U) = 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

elde edilir.

Buradan

$$(K(\xi, Y).S)(\xi, U) = -S(K(\xi, Y)\xi, U) - S(\xi, K(\xi, Y)U) = 0 \quad (3.82)$$

(3.82) denklemindeki  $S(K(\xi, Y)\xi, U)$  ifadesini hesaplayalım.

(1.12), (2.12), (2.20) ve (2.22) kullanılırsa

$$S(K(\xi, Y)\xi, U) = -\frac{1}{n-2}S(Y, U) - \frac{n(n-1)}{n-2}\eta(Y)\eta(U) - \frac{1}{n-2}S^2(Y, U) \quad (3.83)$$

elde edilir.

(3.82) denklemindeki  $S(\xi, K(\xi, Y)U)$  ifadesini hesaplayalım

(1.12), (2.12), (2.19) ve (2.22) kullanılırsa

$$S(\xi, K(\xi, Y)U) = \frac{n-1}{n-2}g(Y, U) + \frac{n-1}{n-2}\eta(U)\eta(Y) + \frac{n-1}{n-2}S(Y, U) + \frac{(n-1)^2}{n-2}\eta(U)\eta(Y) \quad (3.84)$$

elde edilir.

(3.83) ve (3.84) (3.82) denkleminde yazılırsa

$$S(\xi, U)K(\xi, Y) = -\frac{n-1}{n-2}g(Y, U) + \frac{2-n}{n-2}S(Y, U) + \frac{1}{n-2}S^2(Y, U) = 0 \quad (3.85)$$

elde edilir.

(3.85) de gerekli düzenleme yapılırsa

$$S^2(Y, U) = (n-1)g(Y, U) + (n-2)S(Y, U) \quad (3.86)$$

elde edilir.

**Teorem 3.11:**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.

$C(\xi, Y).R + R(\xi, Y).C = 0$  ise  $M$ ,  $E^{n+1} \times S^n(4)$  e lokal izometriktir.

**İspat:**  $\forall Y, Z, U \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned}
(C(\xi, Y)R)(Z, U)W + (R(\xi, Y).C)(Z, U)W &= C(\xi, Y)R(Z, U)W \\
&- R(C(\xi, Y)Z, U)W \\
&- R(Z, C(\xi, Y)U)W \\
&- R(Z, U)C(\xi, Y)W \\
&+ [R(\xi, Y)C(Z, U)W \\
&- C(R(\xi, Y)Z, U)W \\
&- C(Z, R(\xi, Y)U)W \\
&- C(Z, U)R(\xi, Y)W] = 0
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemde  $Z = \xi$  alınır

$$\begin{aligned}
(C(\xi, Y)R)(\xi, U)W + (R(\xi, Y).C)(\xi, U)W &= C(\xi, Y)R(\xi, U)W \\
&- R(C(\xi, Y)\xi, U)W \\
&- R(\xi, C(\xi, Y)U)W \\
&- R(\xi, U)C(\xi, Y)W \\
&+ [R(\xi, Y)C(\xi, U)W \\
&- C(R(\xi, Y)\xi, U)W \\
&- C(\xi, R(\xi, Y)U)W \\
&- C(\xi, U)R(\xi, Y)W] = 0
\end{aligned} \tag{3.87}$$

dir. (3.87) denklemindeki  $C(\xi, Y)R(\xi, U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(2.19) ü kullanalım.

$$C(\xi, Y)R(\xi, U)W = C(\xi, Y)[g(U, W)\xi - \eta(W)U] \tag{3.88}$$

elde edilir.

(3.88) de(1.10), (2.12), (2.19), (2.20), (2.22), (3.41) , (3.42) , (3.45) i uygulayalım.

$$\begin{aligned}
C(\xi, Y)R(\xi, U)W &= Ag(U, W)Y + A\eta(Y)g(U, W)\xi \\
&- B\eta(Y)g(U, W)\xi - Dg(U, W)QY \\
&- A\eta(W)g(Y, U)\xi + A\eta(W)\eta(U)Y \\
&+ D\eta(W)S(Y, U)\xi - D\eta(W)\eta(U)QY
\end{aligned} \tag{3.89}$$

elde edilir.

(3.87) denklemindeki  $R(C(\xi, Y)\xi, U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.20), (2.22), (3.41) , (3.42) , (3.45) ı kullanalım

$$\begin{aligned}
R(C(\xi, Y)\xi, U)W &= AR(Y, U)W - DR(QY, U)W \\
&+ A\eta(Y)g(U, W)\xi - A\eta(Y)\eta(W)U \\
&- B\eta(Y)g(U, W)\xi + B\eta(Y)A\eta(W)U
\end{aligned} \tag{3.90}$$

elde edilir.

(3.87) denklemindeki  $R(\xi, C(\xi, Y)U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.22), (3.41) , (3.42) , (3.45) i kullanalım

$$\begin{aligned}
R(\xi, C(\xi, Y)U)W &= -A\eta(U)g(Y, W)\xi + A\eta(U)\eta(W)Y \\
&+ D\eta(U)S(Y, W)\xi - D\eta(U)\eta(W)QY
\end{aligned} \tag{3.91}$$

elde edilir.

(3.87) denklemindeki  $R(\xi, U)C(\xi, Y)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.22), (3.41) , (3.42) , (3.45) i kullanalım

$$\begin{aligned}
R(\xi, U)C(\xi, Y)W &= Ag(Y, W)U + A\eta(U)g(Y, W)\xi \\
&- A\eta(W)g(U, Y)\xi + A\eta(W)\eta(Y)U \\
&- DS(Y, W)U - D\eta(U)S(Y, W)\xi \\
&+ D\eta(W)S(U, Y)\xi - B\eta(W)\eta(Y)U
\end{aligned} \tag{3.92}$$

elde edilir.

(3.87) denkleminde  $R(\xi, Y)C(\xi, U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.20), (2.22), (3.41) , (3.42) , (3.45) ı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
R(\xi, Y)C(\xi, U)W &= Ag(U, W)Y + A\eta(Y)g(U, W)\xi \\
&- A\eta(W)g(Y, U)\xi + A\eta(W)\eta(U)Y \\
&- DS(U, W)Y - D\eta(Y)S(U, W)\xi \\
&+ D\eta(W)S(Y, U)\xi - B\eta(W)\eta(U)Y
\end{aligned} \tag{3.93}$$

elde edilir.

(3.87) denkleminde  $C(R(\xi, Y)\xi, U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.20), (2.22), (3.41) , (3.42) , (3.45) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
C(R(\xi, Y)\xi, U)W &= R(Y, U)W - DS(U, W)Y \\
&+ DS(Y, W)U - Dg(U, W)QY \\
&+ Dg(Y, W)QU \\
&+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(U, W)Y - g(Y, W)U] \\
&+ A\eta(Y)g(U, W)\xi - A\eta(Y)\eta(W)U \\
&- D\eta(Y)S(U, W)\xi + D\eta(Y)\eta(W)QU
\end{aligned} \tag{3.94}$$

elde edilir.

(3.87) denkleminde  $C(\xi, R(\xi, Y)U)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.20), (2.22), (3.41), (3.42), (3.45) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
C(\xi, R(\xi, Y)U)W &= -A\eta(U)g(Y, W)\xi + A\eta(U)\eta(W)Y \\
&+ D\eta(U)S(Y, W)\xi - D\eta(U)\eta(W)QY
\end{aligned} \tag{3.95}$$

elde edilir.

(3.87) denkleminde  $C(\xi, U)R(\xi, Y)W$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.12), (2.19), (2.20), (2.22), (3.41), (3.42), (3.45) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
C(\xi, U)R(\xi, Y)W &= Ag(Y, W)U + A\eta(U)g(Y, W)\xi \\
&- B\eta(U)g(Y, W)\xi - Dg(Y, W)QU \\
&- A\eta(W)g(U, Y)\xi + A\eta(W)\eta(Y)U \\
&+ D\eta(W)S(U, Y)\xi - D\eta(W)\eta(Y)QU
\end{aligned} \tag{3.96}$$

elde edilir.

(3.87) denkleminde (3.89), (3.90), (3.91), (3.92), (3.93), (3.94), (3.95) ve (3.96) yazılırsa

$$\begin{aligned}
(C(\xi, Y)R(\xi, U)W + (R(\xi, Y).C)(\xi, U)W &= Ag(U, W)Y - Dg(U, W)QY \\
&- AR(Y, U)W + DR(QY, U)W \\
&- Ag(Y, W)U + DS(Y, W)U \\
&+ Dg(U, W)Y - Dg(Y, W)U \\
&- B\eta(W)\eta(U)Y - R(Y, U)W \\
&- DS(Y, W)U + Dg(U, W)QY \\
&- D\eta(U)S(Y, W)\xi + D\eta(W)\eta(U)QY \\
&+ B\eta(U)g(Y, W)\xi = 0
\end{aligned} \tag{3.97}$$

elde edilir.

(3.97) denkleminde  $W = \xi$  alınırsa

$$\begin{aligned} (C(\xi, Y)R)(\xi, U)W + (R(\xi, Y).C)(\xi, U)W &= D\eta(U)Y + B\eta(U)Y \\ &- \eta(U)Y - D\eta(Y)U \\ &- B\eta(Y)U + \eta(Y)U \end{aligned} \quad (3.98)$$

elde edilir.

(3.98) de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(C(\xi, Y)R)(\xi, U)W + (R(\xi, Y).C)(\xi, U)W = (D + B - 1)\eta(U)Y - (D + B - 1)\eta(Y)U \quad (3.99)$$

elde edilir.

(3.99) dan

$$(D + B - 1)R(Y, U)\xi = 0 \quad (3.100)$$

elde edilir.

(3.42) ve (3.45) (3.100) de yazılırsa

$$\frac{2}{(n-2)}R(Y, U)\xi = 0 \quad (3.101)$$

(3.101) den de

$$R(Y, U)\xi = 0 \quad (3.102)$$

elde edilir

**Sonuç 3.2:**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.

$$C(\xi, Y).R - R(\xi, Y).C = 0$$

dır.

**İspat:**  $\forall Y, Z, U \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned}
(C(\xi, Y)R)(Z, U)W - (R(\xi, Y).C)(Z, U)W &= C(\xi, Y)R(Z, U)W \\
&- R(C(\xi, Y)Z, U)W \\
&- R(Z, C(\xi, Y)U)W \\
&- R(Z, U)C(\xi, Y)W \\
&- [R(\xi, Y)C(Z, U)W \\
&- C(R(\xi, Y)Z, U)W \\
&- C(Z, R(\xi, Y)U)W \\
&- C(Z, U)R(\xi, Y)W] = 0
\end{aligned}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alınrsa

$$\begin{aligned}
(C(\xi, Y)R)(\xi, U)W - (R(\xi, Y).C)(\xi, U)W &= C(\xi, Y)R(\xi, U)W \\
&- R(C(\xi, Y)\xi, U)W \\
&- R(\xi, C(\xi, Y)U)W \\
&- R(\xi, U)C(\xi, Y)W \\
&- [R(\xi, Y)C(\xi, U)W \\
&- C(R(\xi, Y)\xi, U)W \\
&- C(\xi, R(\xi, Y)U)W \\
&- C(\xi, U)R(\xi, Y)W] = 0
\end{aligned} \tag{3.103}$$

elde edilir.

(3.89), (3.90), (3.91), (3.92), (3.93), (3.94), (3.95) ve (3.96) (3.103) te yazılırsa

$$\begin{aligned}
(C(\xi, Y)R)(\xi, U)W - (R(\xi, Y).C)(\xi, U)W &= Ag(U, W)Y - Dg(U, W)QY \\
&- AR(Y, U)W + DR(QY, U)W \\
&- Ag(Y, W)U + DS(Y, W)U \\
&+ Dg(U, W)Y - Dg(Y, W)U \\
&+ B\eta(W)\eta(U)Y + R(Y, U)W \\
&+ DS(Y, W)U - Dg(U, W)QY \\
&+ D\eta(U)S(Y, W)\xi - D\eta(W)\eta(U)QY \\
&- B\eta(U)g(Y, W)\xi = 0
\end{aligned} \tag{3.104}$$

elde edilir.

(3.104) denkleminde  $W = \xi$  alınrsa

$$\begin{aligned}
(C(\xi, Y)R)(\xi, U)W - (R(\xi, Y).C)(\xi, U)W &= D\eta(U)Y - B\eta(U)Y \\
&+ \eta(U)Y - D\eta(Y)U \\
&+ B\eta(Y)U - \eta(Y)U
\end{aligned} \tag{3.105}$$

elde edilir.

$$(C(\xi, Y)R)(\xi, U)W - (R(\xi, Y).C)(\xi, U)W = (D - B + 1)\eta(U)Y - (D - B + 1)\eta(Y)U \quad (3.106)$$

elde edilir.

(3.106) dan da

$$(D - B + 1)R(Y, U)\xi = 0 \quad (3.107)$$

elde edilir.

$$D = \frac{1}{n-2} \text{ ve } B = \frac{n-1}{n-2} \text{ olduğundan } D-B+1=0 \text{ dir.}$$

$$C(\xi, Y).R - R(\xi, Y).C = 0 \text{ sonucuna ulaşılır.}$$

**Teorem 3.12:**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.  $P(\xi, Y).C = 0$  ise

$$S^2(U, Y) = \left(\frac{A}{D} + n - 1\right)S(U, Y) + \frac{A}{D}(n - 1)g(U, Y) \quad \text{eşitliği } M \text{ manifoldu üzerinde sağlanır.}$$

**İspat:**  $\forall Y, Z, U \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} (P(\xi, Y)C)(Z, U)W &= P(\xi, Y)C(Z, U)W - C(P(\xi, Y)Z, U)W \\ &\quad - C(Z, P(\xi, Y)U)W - C(Z, U)P(\xi, Y)W = 0 \end{aligned}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alınırsa

$$\begin{aligned} (P(\xi, Y)C)(\xi, U)W &= P(\xi, Y)C(\xi, U)W - C(P(\xi, Y)\xi, U)W \\ &\quad - C(\xi, P(\xi, Y)U)W - C(\xi, U)P(\xi, Y)W = 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

elde edilir.

(3.108) de  $W = \xi$  alınırsa

$$(P(\xi, Y)C)(\xi, U)\xi = P(\xi, Y)C(\xi, U)\xi - C(\xi, P(\xi, Y)U)\xi = 0 \quad (3.109)$$

elde edilir.

(3.109) denklemindeki  $P(\xi, Y)C(\xi, U)\xi$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.9), (2.20) ve (2.22) kullanılırsa

$$P(\xi, Y)C(\xi, U)\xi = P(\xi, Y)[AU + (A\eta(U) - B\eta(U))\xi - DQU] \quad (3.110)$$

(1.11) (3.110) da kullanılırsa

$$\begin{aligned} P(\xi, Y)C(\xi, U)\xi &= A(g(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}S(U, Y)\xi) \\ &\quad - D(S(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}S^2(U, Y)\xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.111)$$

elde edilir.

(3.109) denklemindeki  $C(\xi, P(\xi, Y)U)\xi$  ifadesini hesaplayalım.

(1.11), (2.19), (2.22) kullanılırsa

$$C(\xi, P(\xi, Y)U)\xi = C(\xi, g(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}S(U, Y)\xi)\xi = 0 \quad (3.112)$$

elde edilir.

(3.111) ve (3.112) ( 3.109) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} P(\xi, Y)C(\xi, U)\xi &= A(g(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}S(U, Y)\xi) \\ &\quad - D(S(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}S^2(U, Y)\xi) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan da

$$Ag(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}AS(U, Y)\xi - DS(U, Y)\xi + \frac{1}{n-1}DS^2(U, Y)\xi = 0 \quad (3.113)$$

elde edilir.

(3.113) te gereki düzenlemeler yapılırsa

$$S^2(U, Y)\xi = (\frac{A}{D} + n-1)S(U, Y)\xi + \frac{A}{D}(n-1)g(U, Y)\xi \quad (3.114)$$

elde edilir.

(3.114)  $\xi$  ile çarpılırsa

$$S^2(U, Y) = \left(\frac{A}{D} + n - 1\right)S(U, Y) + \frac{A}{D}(n - 1)g(U, Y) \quad (3.115)$$

Burada

$$A = \left(1 - \frac{n-1}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\right) \text{ ve}$$

$$D = \frac{1}{n-2} \text{ dir.}$$

**Teorem 3.13:**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.  $C(\xi, Y).P = 0$  ise

$$S^2(U, Y) = \left(\frac{A}{D} + n - 1\right)S(U, Y) + \frac{A}{D}(n - 1)g(U, Y) \quad \text{eşitliği } M \text{ manifoldu üzerinde}$$

sağlanır.

**İspat:**  $\forall Y, Z, U \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} (C(\xi, Y)P)(Z, U)W &= C(\xi, Y)P(Z, U)W - P(C(\xi, Y)Z, U)W \\ &\quad - P(Z, C(\xi, Y)U)W - P(Z, U)C(\xi, Y)W \end{aligned}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alırsak

$$\begin{aligned} (C(\xi, Y)P)(\xi, U)W &= C(\xi, Y)P(\xi, U)W - P(C(\xi, Y)\xi, U)W \\ &\quad - P(\xi, C(\xi, Y)U)W - P(\xi, U)C(\xi, Y)W \end{aligned} \quad (3.116)$$

elde edilir.

(3.116) da  $W = \xi$  alınırsa

$$(C(\xi, Y)P)(\xi, U)\xi = -P(C(\xi, Y)\xi, U)\xi - P(\xi, U)C(\xi, Y)\xi \quad (3.117)$$

elde edilir.

(3.117) denklemindeki  $P(C(\xi, Y)\xi, U)\xi$  ifadesini hesaplayalım

(1.10), (2.9), (2.20) ve (2.22) kullanılırsa

$$P(C(\xi, Y)\xi, U)\xi = P(AY + (A\eta(Y) - B\eta(Y))\xi - DQY, U)\xi \quad (3.118)$$

elde edilir.

(3.118) den

$$P(C(\xi, Y)\xi, U)\xi = AP(Y, U)\xi - DP(QY, U)\xi \quad (3.119)$$

elde edilir.

(3.119) daki  $P(Y, U)\xi$  ifadesini hesaplayalım.

(1.11), (2.21) ve (2.22) kullanılırsa

$$P(Y, U)\xi = 0 \quad (3.120)$$

elde edilir.

(3.119) daki  $P(QY, U)\xi$  ifadesini hesaplayalım.

(1.11), (2.21) ve (2.22) kullanılırsa

$$P(QY, U)\xi = 0$$

elde edilir.

Buradan

$$P(C(\xi, Y)\xi, U)\xi = 0 \quad (3.121)$$

elde edilir.

(3.117) denklemindeki  $P(\xi, U)C(\xi, Y)\xi$  ifadesini hesaplayalım.

(1.10), (2.9), (2.20) ve (2.22) kullanılırsa

$$P(\xi, U)C(\xi, Y)\xi = AP(\xi, U)Y - DP(\xi, U)QY \quad (3.122)$$

elde edilir.

(3.122) deki  $P(\xi, U)Y$  ifadesini hesaplayalım.

(1.11), (2.19) ve (2.22) kullanılırsa

$$P(\xi, U)Y = g(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}S(U, Y)\xi \quad (3.123)$$

elde edilir.

(3.122) deki  $P(\xi, U)QY$  ifadesini hesaplayalım.

(1.11), (2.19) ve (2.22) kullanılırsa

$$P(\xi, U)QY = S(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}S^2(U, Y)\xi \quad (3.124)$$

elde edilir.

(3.123) ve (3.124) (3.122) de yazılırsa

$$\begin{aligned} P(\xi, U)C(\xi, Y)\xi &= Ag(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}AS(U, Y)\xi \\ &\quad - [DS(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}DS^2(U, Y)\xi] \end{aligned} \quad (3.125)$$

elde edilir.

(3.125) (3.117) de yazılırsa

$$\begin{aligned} (C(\xi, Y)P)(\xi, U)\xi &= Ag(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}AS(U, Y)\xi \\ &\quad - DS(U, Y)\xi + \frac{1}{n-1}DS^2(U, Y)\xi = 0 \end{aligned} \quad (3.126)$$

elde edilir.

(3.126) da gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S^2(U, Y)\xi = \left(\frac{A}{D} + n - 1\right)S(U, Y)\xi + \frac{A}{D}(n-1)g(U, Y)\xi \quad (3.127)$$

elde edilir.

(3.127)  $\xi$  ile çarpılırsa

$$S^2(U, Y) = \left(\frac{A}{D} + n - 1\right)S(U, Y) + \frac{A}{D}(n-1)g(U, Y) \quad (3.128)$$

elde edilir.

Burada

$$A = \left(1 - \frac{n-1}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\right) \text{ ve}$$

$$D = \frac{1}{n-2} \text{ dir.}$$

**Sonuç 3.3:**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.

$$P(\xi, Y).C - C(\xi, Y).P = 0 \text{ dir.}$$

**İspat:**  $\forall Y, Z, U \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} (P(\xi, Y)C)(Z, U)W - (C(\xi, Y)P)(Z, U)W &= P(\xi, Y)C(Z, U)W \\ &\quad - C(P(\xi, Y)Z, U)W \\ &\quad - C(Z, P(\xi, Y)U)W \\ &\quad - C(Z, U)P(\xi, Y)W \\ &\quad - [C(\xi, Y)P(Z, U)W \\ &\quad \quad - P(C(\xi, Y)Z, U)W \\ &\quad \quad - P(Z, C(\xi, Y)U)W \\ &\quad \quad - P(Z, U)C(\xi, Y)W] = 0 \end{aligned}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alınırsa

$$\begin{aligned} (P(\xi, Y)C)(\xi, U)W - (C(\xi, Y)P)(\xi, U)W &= P(\xi, Y)C(\xi, U)W \\ &\quad - C(P(\xi, Y)\xi, U)W \\ &\quad - C(\xi, P(\xi, Y)U)W \\ &\quad - C(\xi, U)P(\xi, Y)W \\ &\quad - [C(\xi, Y)P(\xi, U)W \\ &\quad \quad - P(C(\xi, Y)\xi, U)W \\ &\quad \quad - P(\xi, C(\xi, Y)U)W \\ &\quad \quad - P(\xi, U)C(\xi, Y)W] = 0 \end{aligned} \tag{3.129}$$

elde edilir.

(3.129) denklemde  $W = \xi$  alınırsa

$$\begin{aligned} (P(\xi, Y)C)(\xi, U)\xi - (C(\xi, Y)P)(\xi, U)\xi &= P(\xi, Y)C(\xi, U)\xi \\ &\quad - C(\xi, P(\xi, Y)U)\xi \\ &\quad - [-P(C(\xi, Y)\xi, U)\xi \\ &\quad \quad - P(\xi, U)C(\xi, Y)\xi] = 0 \end{aligned} \tag{3.130}$$

elde edilir.

(3.111), (3.112), (3.121), (3.125) ifadeleri (3.130) yazılırsa

$P(\xi, Y).C - C(\xi, Y).P = 0$  elde edilir.

**Sonuç 3.4:**  $M$   $n$ - boyutlu bir Lorentzian Para Sasakian manifold olsun.

$$P(\xi, Y).C + C(\xi, Y).P = 0 \text{ ise } S^2(U, Y) = \left(\frac{A}{D} + n - 1\right)S(U, Y) + \frac{A}{D}(n - 1)g(U, Y)$$

eşitliği  $M$  manifoldu üzerinde sağlanır.

**İspat:**  $\forall Y, Z, U \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} (P(\xi, Y)C)(Z, U)W + (C(\xi, Y)P)(Z, U)W &= P(\xi, Y)C(Z, U)W \\ &\quad - C(P(\xi, Y)Z, U)W \\ &\quad - C(Z, P(\xi, Y)U)W \\ &\quad - C(Z, U)P(\xi, Y)W \\ &\quad + [C(\xi, Y)P(Z, U)W \\ &\quad \quad - P(C(\xi, Y)Z, U)W \\ &\quad \quad - P(Z, C(\xi, Y)U)W \\ &\quad \quad - P(Z, U)C(\xi, Y)W] = 0 \end{aligned}$$

Bu denklemde  $Z = \xi$  alınır

$$\begin{aligned} (P(\xi, Y)C)(\xi, U)W + (C(\xi, Y)P)(\xi, U)W &= P(\xi, Y)C(\xi, U)W \\ &\quad - C(P(\xi, Y)\xi, U)W \\ &\quad - C(\xi, P(\xi, Y)U)W \\ &\quad - C(\xi, U)P(\xi, Y)W \\ &\quad + [C(\xi, Y)P(\xi, U)W \\ &\quad \quad - P(C(\xi, Y)\xi, U)W \\ &\quad \quad - P(\xi, C(\xi, Y)U)W \\ &\quad \quad - P(\xi, U)C(\xi, Y)W] = 0 \end{aligned} \tag{3.131}$$

elde edilir.

(3.131) denkleminde  $W = \xi$  alınır

$$\begin{aligned} (P(\xi, Y)C)(\xi, U)\xi + (C(\xi, Y)P)(\xi, U)\xi &= P(\xi, Y)C(\xi, U)\xi \\ &\quad - C(\xi, P(\xi, Y)U)\xi \\ &\quad + [-P(C(\xi, Y)\xi, U)\xi \\ &\quad \quad - P(\xi, U)C(\xi, Y)\xi] = 0 \end{aligned} \tag{3.132}$$

elde edilir.

(3.111), (3.112), (3.121), (3.125) ifadeleri (3.130) yazılırsa

$$\begin{aligned} (P(\xi, Y)C(\xi, U)\xi + (C(\xi, Y)P)(\xi, U)\xi = 2(Ag(U, Y)\xi - \frac{1}{n-1}AS(U, Y)\xi \\ - DS(U, Y)\xi + \frac{1}{n-1}DS^2(U, Y)\xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.133)$$

elde edilir.

(3.133) de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S^2(U, Y)\xi = \left(\frac{A}{D} + n - 1\right)S(U, Y)\xi + \frac{A}{D}(n-1)g(U, Y)\xi \quad (3.134)$$

elde edilir.

(3.134) denklemini  $\xi$  ile çarpılırsa

$$S^2(U, Y) = \left(\frac{A}{D} + n - 1\right)S(U, Y) + \frac{A}{D}(n-1)g(U, Y) \quad (3.135)$$

elde edilir.

Burada

$$A = \left(1 - \frac{n-1}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\right) \text{ ve}$$

$$D = \frac{1}{n-2} \text{ dir.}$$

### KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Kobayashi S., Nomizu K., 1996, Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York
- [2] O'Neill, B., 1996, Elementary differential geometry. Academic Pres, New York-London
- [3] Hacısalihoğlu, H. H., 1983, Diferansiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları
- [4] Yano, K. Kon, M., 1984, Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore
- [5] Deszcz, R., 1992, "On pseudosymmetric spaces" Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A 44, no. 1, 1-34
- [6] Chen, B.Y., 1973, "Geometry of Submanifolds", Pure and Applied Mathematics, No.22. Marcell Dekker, Inc., New York
- [7] Szabo, Z. I., 1982, "Structure theorems on Riemannian spaces satisfying  $R(X,Y).R=0$  The local version" ,J. Differential Geom. 17 , no. 4, 531-582.
- [8] De, U. C., Guha, N., Kamilya, D., 1995, "On generalized Ricci-recurrent manifolds", Tensor (N.S) 56 , no. 3, 312-317
- [9] Chaki, M.C., 1987, "On pseudo symmetric manifolds" An. Stinn. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat. 33 , no. 1, 53-58
- [10] Tamassy, L. And Binh, T. Q., 1992, "On weakly symmetric and weakly projective symmetric Riemannian manifolds", Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 56 , 663-670
- [11] Tamassy, L. And Binh, T. Q., 1993, "On weak symmetries of Einstein and Sasakian manifolds", Tensor N. S, 53 , 140-148.
- [12] Chaki, M. C., 1988, "On pseudo Ricci symmetric manifolds", Bulgar. J. Phys. 15 , No. 6, 526-531.
- [13] Blair, D. E., 2002, "Riemannian Geometry of contact and symplectic manifolds", Progress in Mathematics, 203. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA,
- [14] Yıldız, A., 2002, "Değme metrik manifoldlarda bazı eğrilik şartları", Osmangazi Üniv. Fen Bilimleri Ens. Doktora tezi
- [15] Papantoniou, B. J., 1993, "Contact Riemannian manifolds satisfying  $R(\xi, X).R = 0$  and  $\xi \in (k, \mu)$ -nullity distribution" Yokohama Math. J. 40 , no. 2, 149-161.
- [16] Chaki, M. C., Tarafdar, M., "On a type of Sasakian manifold", Soochow J. Math. 16 no. 1, 23-28.
- [17] Guha, N., 2000, "On generalized Ricci-recurrent Sasakian manifolds", Bull. Cal. Math. Soc., 92 , 361-364.
- [18] Tarafdar M., Bhattacharya A., 2000, "On Lorentzian Para-Sasakian manifolds" Steps in Differential Geometry, Proceedings of the Colloquium on Differential Geometry, Debrecen, Hungary.

- [19] Beem, J. K., Ehrlic P. E. And Easley, K. L. 1996, Global Geometry. Marcell Dekker Inc. New York, Second Edition.