T.C
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR SÜREKSİZ STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan : Zekeriya ŞAŞMAZ

Danışman : Yrd.Doç.Dr. Zülfigar AKDOĞAN

TOKAT - 2006

ÖZET

BİR SÜREKSİZ STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

ZEKERİYA ŞAŞMAZ

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2006- 75 Sayfa

Danışman : Yrd.Doç.Dr. Zülfigar AKDOĞAN

Jüri : Yrd.Doç.Dr. Zülfigar AKDOĞAN
Jüri : Prof.Dr. Oktay MUHTAROĞLU
Jüri : Prof.Dr. Bahtiyar MEHMETOĞLU
Jüri : Yrd.Doç.Dr. Ercan TUNÇ
Jüri : Yrd.Doç.Dr. Adem EROĞLU

Bu çalışmada geçiş şartları verilen süreksiz Sturm-Liouville problemi incelenmiştir. Operatör-teorik yorum verilerek, özdeğer ve öz fonksiyonların asimptotik formülleri elde edilmiştir. Bu çalışmadaki farklılık, süreksiz problemin sürekli çözümünün elde edilmesidir.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde yapılan çalışmanın teorik ve pratik önemi belirtilmiştir. İkinci bölümünde konuyla ilgili çalışmalar hakkında genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümünde problemin çözümünde kullanılan temel kavramlar verilmiştir. Dördüncü bölümünde yaralanılan materyal ve metotlara yer verildi. Beşinci bölümünde süreksiz Strum-Liouville probleminin özdeğerleri incelenip asimptotik ifadeler elde edildi. Son bölümünde ise çalışmada elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların önemine değinilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Özdeğerler, Özfonksiyonlar, Sınırdeğer problemleri, Asimptotik davranış, Geçiş şartları, Sınır şartları, Strum-liouville problemleri.

ABSTRACT

SOME PROPERTİES OF EİGENVALUES AND EİGENFUNCTİONS OF A DİSCONTİNİOUS STURM-LİOUVİLLE PROBLEMS

ZEKERİYA ŞAŞMAZ

Gaziosmanpaşa University
Graduate School of Natural and Applied science
Department of Mathematics
Masters Thesis

2006, 75 page

Supervisor : Assist.Prof.Dr. Zülfigar AKDOĞAN

Jury : Assist.Prof.Dr. Zülfigar AKDOĞAN
Jury : Assoc.Prof.Dr. Oktay MUHTAROĞLU
Jury : Assoc.Prof.Dr. Bahtiyar MEHMETOĞLU
Jury : Assist.Prof.Dr. Ercan TUNÇ
Jury : Assist.Prof.Dr. Adem EROĞLU

In this study, discontinuous Strum-liouville problem with transmission conditions have been investigated. An operator-theoretic interpretation is given and asymptotic formulas for eigenvalues and corresponding eigenfunctions have been obtained. The main different of this study has been obtained continuous solution for discontinuous problem.

This present work has consisted of six chapters. In the first chapter, theoretical and practical importances of the problem have been determined. In the second chapter, a brief knowledge related to the thesis has been given. The third chapter deals with the fundamental concepts obtained result of for solution of problem. Materials and methods used for the solution of the problem were stated in the fourth section, In the fifth section eigen values of the discontinuous Sturm-Liouville problem were analyzed to obtain asymptotic representations. In the last section, the results implications of obtained in the present study were discussed.

Key Words : Eigenvalue, Eigenfunction, Asymptotic, Behavior, Boundary-Value problems, Transmission Conditions, Boundary Conditions, Sturm Liouville Problems.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamın her aşamasında yardımlarını gördüğüm kıymetli hocalarım Yrd.Doç.Dr. Zülfigar AKDOĞAN ve Prof.Dr. Oktay MUHTAROĞLU' na ve her zaman manevi desteklerini hissettiğim matematik anabilim dalı öğretim üyelerine şükranlarımı sunarım. Ayrıca her zaman beni bu tarz çalışmalara teşvik eden sevgili aileme teşekkür ederim.

Zekeriya ŞAŞMAZ

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Sturm-liouville diye adlandırılan özdeğer parametresini içeren özel tipten sınır değer problemleri matematiksel fiziğin önemli problemlerindendir. Bu problemlerin matematiksel olarak çözümünde en etkin kullanılan yöntemlerden biri özfonksiyon yöntemidir. Bu yöntem yaygın olarak bilinen Fourier yöntemidir. Matematiksel fizik problemlelerinde bu yöntemin uygulanması Sturm-liouville problemlerinin spektral özelliklerinin incelenmesini gerektirir. Bazı matematiksel fizik problemleri

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=P(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+R(x)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x)u, \qquad x\in[a,b], \qquad t\geq 0 \tag{1.1}$$

veya

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+R(x)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x)u, \qquad x\in[a,b], \qquad t=0 \tag{1.2}$$

biçiminde kısmi diferansiyel denklemlerin taralı sınır ve başlangıç şartları altındaki problemlerle ifade edilir. (örneğin telin titreşim ve ısı iletişim problemlerini). Bu iki tip problem iki keyfi fonksiyona bağımlı sonsuz sayıda çözümlere sahiptir. Fizik problemlerinde ise çoğunlukla bir tek çözüm arandığından fiziksel sürecede uygun olarak kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bazı özel şartları da sağlaması gerekir.
Birçok fiziksel problemde olduğu gibi (1.1) denkleminde de

$$\beta_1 u(a,t)+\beta_2 u_x(a,t)=0 \tag{1.3}$$

$$\alpha_1 X(b)+\alpha_2 X'(b)=0 \tag{1.4}$$

biçiminde sınır şartlarını ve

$$u(x,0)=f(x), \tag{1.5}$$

$$u_t(x,0)=g(x), \tag{1.6}$$

biçimindeki başlangıç şartlarını sağlaması gerekir. Burada (t fiziksel problemlerde zamanı belirttiği ve de t=0 noktasındaki şartlar olduğundan başlangıç şartları olarak adlandırılır) $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları fiziksel probleme uygun sürekli fonksiyonlardır $\alpha_1^2+\alpha_2^2>0$ ve $\beta_1^2+\beta_2^2>0$ (i=1,2,3,...) şartlarının sağlanması gerektiği aşikardır. Ve ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklem olması için $p(x)\neq 0$ şartıda doğaldır.

Özdeşlik olarak $u(x)=0$ şeklinde ifade edilen fonksiyonun (1.1) denklem ve (1.3), (1.4) sınır şartlarını sağladığı açıktır. Bu nedenle ilk önce (1.1) denkleminin (1.3),(1.4) sınır şartlarını sağlayan $u(x,t)\neq 0$ çözümlerini inceleyelim. Fourier yöntemi ile ilk önce

$$u(x,t)=X(x)\,T(t) \tag{1.7}$$

biçiminde çözümlerini arayalım. (1.7) ifadesinde gerekli kısmi türevleri alıp (1.1) denkleminde yerine yazarsak

$$P\,X''\,T + R\,X'\,T + Q\,X\,T = X\,T''$$

denklemini elde ederiz. Sonuncu denklemi

$$\frac{P\,X'' + R\,X' + Q\,X}{X} = \frac{T''}{T} \qquad \textbf{(1.8)}$$

biçiminde yazalım.

Bu şekilde sağ taraf yalnız t değişkenine sol taraf ise yalnız x değişkenine bağlı sabit fonksiyonlardır. Bu sabit fonksiyonu $-\lambda$ ile gösterirsek

$$P\,X'' + R\,X' + Q\,X = -\lambda X \qquad \textbf{(1.9)}$$

ve

$$T'' = -\lambda T \qquad \textbf{(1.10)}$$

adi diferansiyel denklemleri elde edilir.

(1.7) ifadesini (1.3),(1.4) sınır şartlarında yerine yazarsak

$$\beta_1 X(a) + \beta_2 X'(a) = 0 \qquad \textbf{(1.11)}$$

$$\alpha_1 X(a) + \alpha_2 X'(a) = 0 \qquad \textbf{(1.12)}$$

sınır şartlarını buluruz. (1.9) denklemini ve (1.11) ,(1.12) sınır şartlarını sağlayan

çözümlerinin aranması problemi (1.9) denklemi için sınır değer problemidir. Bu tip problemler literatürde Sturm-liouville problemi olarak adlandırılır.

Genel olarak Sturm-liouville tipindeki problemlerin λ parametresinin herbir değeri için çözüm bulunmaz fakat P,θ,R fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli iseler Sturm-liouville problemini λ nın sayılabilir sayıda

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \qquad \textbf{(1.13)}$$

değerleri için çözümün mevcut olduğu bilinmektedir. Verilen Sturm-liouville probleminin (1.13) deki değerlerine öz değerler, uygun çözüm fonksiyonlarına da özfonksiyonlar denir. Demek ki Sturm-liouville probleminin sayılabilir sayıda $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ özdeğerleri ve bu özdeğerlere uygun

$$X_0(x), X_1(x), X_2(x), \ldots \qquad \textbf{(1.14)}$$

özfonksiyonları vardır. Ayrıca (1-14) fonksiyonlar sistemi ortogonal bir sistemdir. Yani

$$m \neq n \;\Rightarrow\; \int_a^b X_n(x) X_m(x)\,dx = 0 \qquad \textbf{(1.15)}$$

λ nın (1.13) deki değerleri için (1.10) denkleminin $T_n(t)$ çözümleri bulunur.

Eğer $\lambda_n > 0$ (n=0,1,2,...) ise

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t \qquad \textbf{(1.16)}$$

çözümleri elde edilir. Bu durumda herbir

$$u_n(x,t) = X_n(x)\, T_n(t) \qquad \textbf{(1.17)}$$

fonksiyonu (1.1) denklemi ve (1.3),(1.4) sınır şartlarını sağlar. (1.1) denklemi ve (1.3),(1.4) sınır şartları $u(x)$ değişkeni ve onun türevlerine göre lineer olduğundan (1.17) biçimindeki çözümlerinin toplamından oluşan (serinin yakınsaklığı ile ilgili bazı ek şartlarının sağlanması ile birlikte)

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, X_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t \right) \mathrm{X_n}(\mathrm{x}) \qquad \textbf{(1.18)}$$

serisinin toplamıda (1.1),(1.3),(1.4) problemlerini sağlar.
Eğer (1.18) serisi yakınsak ve de x ve t değişkenlerinin her birine göre iki kere terim terim diferansiyellenebilirse bu durumda (1.18) serisinin toplamı (1.1),(1.3),(1.4) probleminin çözümü olur.

Şimdi hangi şartlar altında (1.18) serisi (1.5) ve (1.6) başlangıç şartlarını sağladığını araştıralım A_n ve $\mathrm{B_n}$ katsayıları öyle seçmeye çalışacağız ki (1.3) fonksiyonu (1-5) ve (1-6) başlangıç şartlarını da sağlasın.(1.18) ifadesini (1.5) ve (1.6) başlangıç şartlarında yerine yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\, X_n(x) = f(x) \qquad \textbf{(1.19)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T'_n(0)\, X_n(x) = g(x) \qquad \textbf{(1.20)}$$

eşitliklerini buluruz.

Eğer $f(x)$ ve $\mathrm{g}(\mathrm{x})$ fonksiyonları sırası ile (1.19),(1.20) serilerine açılabiliyorsa o halde araştırdığımız (1.1),(1.3)-(1.6) başlangıç sınır değer probleminin çözümü bulunabilir. Şimdi f ve g fonksiyonlarının

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n X_n(x) \qquad \textbf{(1.21)}$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} D_n X_n(x) \qquad \textbf{(1.22)}$$

Fourier serilerine açılabilir olduğunu kabul edelim. Böyle bir durumda

$$T_n(0)=C_n\ , \qquad n=0,1,2,... \qquad \textbf{(1.23)}$$

$$T_n'(0)=D_n \qquad n=0,1,2,... \qquad \textbf{(1.24)}$$

eşitliklerini sağlaması gerekir. Buradan (1.16) gereği

$$A_n=C_n\ ,\ \mathrm{B_n}=\frac{D_n}{\sqrt{\lambda_n}} \qquad (n=0,1,2,...) \qquad \textbf{(1.25)}$$

şeklinde A_n ve $\mathrm{B_n}$ katsayıları bir değerli olarak bulunur ve (1.25) eşitliklerini (1.18) formülünde yerine yazarsak (1.1), (1.3)-(1.6) probleminin çözümü

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+\frac{D_n}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}\,t\right)\mathrm{X_n}(\mathrm{x}) \qquad \textbf{(1.26)}$$

şeklinde bulunur.

Yukarda ki örnekte görüldüğü gibi bir çok matematiksel fizik probleminin çözümü uygun özdeğer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları kullanılarak inşa edilebilir.((1.26) formülü)

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Genellikle matematiksel fizik problemlerinin dönüştürülebildiği Sturm-liouville problemleri ilk olarak 19. yüzyılın ortalarında C.Sturm ve J.liouville tarafından incelenmiştir. Daha sonra 20. yüzyılın başlarında G.D.Birkhoff(1909) tarafından

$$\ell(y,\lambda) = y^{n} + p_1(x,\lambda)\,y^{(n-1)} + ... + p_n(x,\lambda)\,y = o \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$V_j(y,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{jk}(\lambda)\,y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1)\right) = 0\ , \qquad j=1,2,3,...,n \qquad \textbf{(2.2)}$$

$$(\ p_s(x,\lambda) = \sum_{\gamma=0}^{s} p_{\gamma s}(x)\lambda^{\gamma}\ ,\ p_{ss}(x) = \cos t,\ s = 1,2,...,n\ ,\ p_{nn} \neq 0\ ,\ a_{jk}(\lambda)\ ,\ b_{jk}(\lambda)$$

fonksiyonları λ -nın polinomlarıdır) problemleri araştırılmış ve bu (2.1) denkleminin temel çözüm sistemleri için bazı asimptotik eşitlikler bulunmuştur. Bu çalışmalarda regüler sınır şartları öz fonksiyonlar ve özfonksiyonlara bağlanmış fonksiyonlar sisteminin tamlığı hakkında teorem ispatlanmıştır.

Daha sonra J.D. Tamarkin'in çalışmaları da daha geniş sınıftan olan parametreye bağlı lineer diferansiyel denklemler için temel çözüm sisteminin asimptotiği bulunmuş, regüler ve güçlü regüler sınır şartları tanımlanmıştır. Bu çalışmalarda sınır şartlarının regüler olduğu durum için Green fonksiyonu değerlendirilmiş ve düzgün fonksiyonların verilmiş sınır değer probleminin özfonksiyonları ve özfonksiyonlara bağlanmış fonksiyon sistemi üzerine seriye açılım formülü elde edilmiş.

Daha sonraki yıllarda hem fiziğin yeni somut problemleri doğrultusunda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi hızlı bir şekilde geliştirilmiştir. Bu konuda bir çok makale ve kitap yazılmış ve yazılmaktadır(Fulton, 1977; Hinton, 1979; Kobayashi, 1989; Lang, 1983; Likov et all., 1963; Liu, 1999; Tolstov, 1980; Binding et al., 1997; Bailey et all., 1991; İbrahim, 1998).

Walter J.(1973) $[a_1, a_2]$ aralığında

$$\tau u := \frac{1}{r}\left\{-\left(pu'\right)' + qu\right\} = \lambda u$$

$$-\left(\beta_{i1}u(a_i) - \beta_{i2}u'(a_i)\right) = \lambda\left(a_{i1}u(a_i) - a_{i2}u'(a_i)\right) \qquad (i=1,2)$$

çalışmasında özdeğer parametresini hem denkleminde hemde sınır şartlarının her ikisinde bulunduran ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için sınır değer probleminin uygun Hilbert uzaylarında kendine eşlenik lineer operatörlerle bağlantısını kurmuş ve bu tipten problemin operatör-teorik yorumunu vermiştir. Buradan hareketle özfonksiyonlar üzere açılım teoremini ispatlamıştır.

A.Schneider(1974) ise

$$-\left(pu'\right)' + qu = \lambda ru$$

u(a)=0

$$-\left(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)\right) = \lambda\left(a_1 u(b) - a_2 u'(b)\right)$$

sınır şartlarından sadece bir tanesi özdeğer parametresi içeren çalışmasını S-hermityen sınır-değer problemleri yöntemiyle araştırılabileceğini göstermiş ve özfonksiyonlar sistemi üzere açılımın düzgün ve mutlak yakınsaklığı için yeter şartlar bulmuştur.

C.T. Fulton

$$\tau u := -u'' + qu = \lambda u$$

$$\cos\alpha u(a) + \sin\alpha u'(a) = 0$$

$$-\left(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)\right) = \lambda\left(\beta_1' u(b) - \beta_2' u'(b)\right)$$

çalışmasında bu tipten problemlerin araştırılmasında Titchmarsh'ın 1962 deki kitabındaki kılasik yöntemlerinde uygulanabileceğini göstermiştir.

Daha sonraki yıllarda bu konudaki en önemli çalışmalar A.A.Shkalikov, S.Y.Yakubov ve Y.Y Yakubov'a aittir. S.Y.Yakubov ve Y.Y Yakubov un son yıllarda yayınlanmış bir dizi çalışmalarında ise bu tipten problemlerin genel teorisini kurmuştur(1999,2002). Bu çalışmalarda p-regülerlik olarak adlandırılan ve klasik Birkhoff anlamında regülerlikten farklı olan bir regülerlik kavramı tanımlanmış ve bu anlamda regüler olan sınır-değer problemleri için uzay değişkenine göre izomorfluk , uzay değişkenine ve özdeğer parametresine göre koersitivlik , özfonksiyonlar ve özfonksiyonlara bağlanmış fonksiyon sisteminin tamlığı, çok kat tamlığı, Abel bazlığı v.s. özelliklerini araştırmıştır.

Bu bahsedilen bütün çalışmalarda sınır değer problemleri sürekli katsayılı diferansiyel denklemler için incelenmiştir.

O.Sh. Muhtarov, E. Tunç ve ark.(2004) ise çalışmalarında süreksiz katsayılı diferansiyel (adi ve kısmi türevli) denklemler için sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunan fakat geçiş şartlarında özdeğer parametresi bulunmayan sınır değer geçiş problemlerini araştırmıştır. Bu çalışmalarda diferansiyel ve özdeğer parametresine bağlı olan izomorfluk hem uzay değişkenine hem özdeğer parametresine göre koersitivlik, özdeğerlerin asimptotiği rozolvent oparatörünün değerlendirilmesi, tamlık, iki kat tamlık, Abel bazlığı vs. hakkında teoremler ispatlanmış ve parabolik tipten kısmi türevli diferansiyel denklemler için başlangıç sınır değer geçiş problemleri incelenmiştir.

O.Sh. Muhtarov , Z. Akdoğan ve M. Demirci nin birlikte yaptığı; $x \in [a,c)$ için $p(x) = \dfrac{1}{p_1^2}$ ve $x \in (c,b]$ için $p(x) = \dfrac{1}{p_2^2}$, λ komplex özdeğer parametresi, $q(x)$ reel değerli ve $[a,c) \cup (c,b]$ aralığında sürekli, $q(c \pm 0) := \lim\limits_{x \to c \pm 0} q(x)$; $\alpha_i, \alpha_i^{'}, \beta_i, \beta_i^{'}$ ve δ_1, δ_2 reel sayılar olmak üzere bir $c \in (a,b)$ noktası hariç sonlu (a,b) aralığında

$$\tau u := -p(x)u^{''} + q(x)u = \lambda u$$

özdeğerli parametreye bağlı sınır değer şartları

$$L_1(u) := \lambda\left(\alpha_1^{'} u(a) - \alpha_2^{'} u^{'}(a)\right) - \left(\alpha_1 u(a) - \alpha_2 u^{'}(a)\right) = 0$$

$$L_2(u) := \lambda\left(\beta_1^{'} u(b) - \beta_2^{'} u^{'}(b)\right) - \left(\beta_1 u(b) - \beta_2 u^{'}(b)\right) = 0$$

ve özdeğer parametresine bağlı geçiş şartları da

$$l_3(u) := u(c+0) - u(c-0) = 0$$

$$l_4(u) := u^{'}(c+0) - u^{'}(c-0) + (\lambda\delta_1 + \delta_2)u(c) = 0$$

olan çalışmalarında ise problemin oparatör-teorik yorumu, özfonksiyonların ve özdeğerlerin asimptotikliği, Green fonksiyonu , rozolvent oparatörünün değerlendirilmesi self-adjointliği incelenmiştir.

3. GENEL BİLGİLER

3.1. Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Şartları (Naimark, M. A., 1967)

$P_i(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ($i=0,1,2,3,...,n$), sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$l(y):=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y \quad ,x\in(a,b) \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

biçimindeki ifadeye n-mertebeden lineer diferansiyel ifade denir. Genel olarak her *x* için $p_0(x)\neq 0$ olduğu kabul edilir.

$$U(y)=\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)+...+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(a)$$
$$+\beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)+...+\beta_{n-1}y^{(n-1)}(b) \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

biçimindeki ifadeye ise sınır değer ifadesi denir. $U_i(y)$, $i=1,2,...,m$ ifadeleri sınır değer ifadeleri olduğunda

$$U_i(y)=0,\ i=1,2,...,m \qquad \textbf{(3.1.3)}$$

biçimindeki eşitlikler sınır şartları olarak adlandırılır.

Bilindiği gibi $C[a,b]$ ile, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan fonksiyonların lineer uzayı gösterilir.

$\{f\in C[a,b]\ \mid f', f'',..., f^{(n)}\in C[a,b]\}$ lineer uzayı ise $C^{(n)}[a,b]$ biçiminde gösterilir.

$$L : C[a,\, b] \rightarrow C[a,\, b]$$

$$D(L) = D\left\{ y \in C[a,b],\ y \in C^{(n)}[a,b], U_i(y) =, \ i = 1,2,...,m \right\}$$

$$L(y) = l(y) = p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + p_n(x)\, y$$

eşitlikleri ile tanımlanan L-lineer operatörüne lineer diferansiyel operatör veya $l(y)$ diferansiyel ifadesi ile $U_i(y) = 0,\ i = 1,2,...,m$ sınır şartlarının ürettiği lineer diferansiyel operatör denir.

Not: Literatürde $C[a,\, b]$ uzayında tanımlı olan operatörle birlikte $L_q[a,b]$ q > 1 tipinde uzayda tanımlı olan lineer diferansiyel operatörler de incelenmektir.

3.2. Diferansiyel Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları (Naimark, M. A., 1967)

$$Ly = \lambda_0 y \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

operatör denkleminin $y_0 \neq 0$ çözümü varsa, bu çözüme L operatörünün özelementi (özfonksiyonu) , λ_0 sayısına ise özdeğeri denir.

Bir başka deyişle

$$P_0(x)\, y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + P_n(x)\, y = \lambda_0 y \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

lineer diferansiyel denkleminin (3.1.3) sınır şartlarının her birini sağlayan $y_0 \not\equiv 0$ çözümü varsa, λ_0 değerine sınır değer probleminin özdeğeri, $y_0 \not\equiv 0$ çözümüne ise bu özdeğere uygun özfonksiyonu denir.

3.3 Sturm –Liouville Problemleri (Levitan, B.M., Sarqsyan, I.S., 1988)

H – her hangi Hilbert uzayı $L: H \to H$ ise bu uzayda tanımlı olan lineer operatör olsun. Eğer herhangi λ_0 skaleri için (H uzayının cisminden alınmış) $Ly_0 = \lambda_0 y_0$ olacak biçimde $y_0 \in H$, $y_0 \neq 0$ elemanı bulunursa, λ_0 sayısına L operatörünün özdeğeri, y_0 elemanına ise bu özdeğer uygun olan özeleman (veya özvektör) denir. Uygulamalarda sık sık rastlanan diferansiyel operatörlerden biri de

$$L \equiv -\frac{d}{dx^2} + g(x)$$

biçiminde ifade edilen operatördür (bu operatör genelde $H = L_2(a,b)$ biçimindeki Hilbert uzaylarında incelenmektedir).

L – operatörü için en önemli sınır şartları

$$\left.\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

$(\alpha,\ \beta \in [0,\pi))$ biçiminde veya

$$\left.\begin{aligned} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

biçiminde verilmiş sınır şartlarıdır.

$$Ly(x) = -y'' + q(x)y = \lambda y \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

denkleminin (3.3.1) veya (3.3.2) tipindeki sınır şartlarını sağlayan çözümlerinin bulunması problemi klasik Sturm – Liouville problemleri olarak adlandırılır.

Eğer $[a,b]$ aralığı sınırlı, $g(x)$ fonksiyonu ise integrallenebilir ise o halde böyle problemler regüler Sturm – Liouville problemleri denir. Daha genel olan

$$y'' + p(x)y' + \{l(x) + \lambda r(x)\} y = 0 \tag{3.3.4}$$

biçimindeki diferansiyel denklemlerde (x,y) değişkenlerinden (t,u) değişkenlerine

$$t = \frac{\int_a^x \sqrt{r(s)}ds}{\int_a^b \sqrt{r(s)}ds}$$

$$u(t) = \sqrt[4]{r(x)}\, e^{\frac{1}{2}\int_a^x p(s)ds}\, y(x)$$

Laplace dönüşümü ile geçersek, (3.3.4) denklemi

$$u'' + q(t)u = -\lambda u$$

kronik denklemine dönüşür. Burada $r(x) > 0$ olmak üzere, ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon; $p(x)$ ise 1. mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyondur. Ayrıca bu durumda $[a,b]$ aralığı da $[0,1]$ aralığına dönüşmüş olur.

3.4. Kompleks Fonksiyonlar ve Diziler İçin Asimptotik Davranışlar

$G \subset \mathbb{C}$ sınırsız bir bölge ve $f, g : G \to \mathbb{C}$ kompleks fonksiyonları için

$$|f(z)| \le M\,|g(z)| \;,\; z \in G \cap \{z \,|\, |z| > R\}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $R > 0,\ M > 0$ sayıları mevcut ise

$$f(z) = O\big(g(z)\big),\ z \in G,\ z \to \infty$$

şeklinde yazılır. Bu ifadeye asimptotik eşitlik denir. Eğer,

$$f(z) - h(z) = O\big(g(z)\big),\ z \in G,\ z \to \infty$$

ise o halde

$$f(z) = h(z) + O\big(g(z)\big),\ z \in G,\ z \to \infty$$

yazılır.

İki tane $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ reel veya kompleks sayı dizileri verilsin. Eğer

$$|a_n| \le M\,|b_n|,\ \ n \ge N$$

olacak şekilde *M>0* reel sayısı ve N doğal sayısı varsa, bu durumda

$$a_n = O(b_n)$$

yazılır. Eğer

$$a_n - c_n = O(b_n)$$

ise

$$a_n = c_n + O(b_n)$$

biçiminde gösterilir.

3.5. Kompleks Fonksiyonların Sıfır Yerlerinin Sayısı Hakkında Teorem

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu ve $z_0\in\mathbb{C}$ noktası verilsin. Eğer herhangi bir K doğal sayısı için $f(z_0)=f'(z_0)=...=f^{(k-1)}(z_0)=0,\qquad f^{(k)}(z_0)\neq 0$

ise, bu durumda $z=z_0$ noktasına $f(z)$ fonksiyonunun *k* katlı sıfır yeri denir.

3.5.1. Teorem (Rouche Teoremi):

Kompleks düzlemdeki kapalı düzlenebilir Γ eğrisinin içinde ve üzerinde analitik olan $f(z)$ ve $\varphi(z)$ kompleks fonksiyonları verilsin. Eğer her $z\in\Gamma$ için,

$$|f(z)|>|\varphi(z)|$$

ise, o halde Γ eğrisinin içinde $f+\varphi$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı f fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısına eşittir; burada her sıfır yeri katı sayıda hesaplanır (Ulucay, C., 1971).

3.6. Sınırlı Varyasyonlu Ve Mutlak Değerli Fonksiyonlar (Lang,S.,1983)

$f:[A,B]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $[a,b]$ aralığının bütün mümkün olan $p=\{x_0,x_1,...,x_n : a=x_0<x_1<...<x_n=b \quad n\in\mathbb{N}\}$ parçalanışlarının kümesini P ile gösterelim. Her P parçalanışı için

$$V_P(f)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

toplamını oluşturalım. Eğer $\underset{p\in P}{Sup}\, V_p(f) < +\infty$ ise , $f(x)$ fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında sınırlı varyasyonludur denir ve

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \underset{p\in P}{Sup}\, V_P(f)$$

sayısına f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında tam varyasyonu denir. Sınırlı varyasyonlu ve *f(x)* fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında hemen-hemen her yerde sonlu $f'(x)$ türevi varsa , bu türev fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir.

Ayrıca $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı varsa ,o zaman bu f fonksiyona $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli denir (Burada $n \in \mathbb{N}$; $(a_k, b_k) \subset [a,b]$, $k = 1,2,...$ aralıkları ise sonlu sayıda keyfi ayrık aralıklardır).

Her mutlak sürekli fonksiyon düzgün sürekli ve sınırlı varyasyonlu olduğundan, her mutlak sürekli fonksiyon hemen-hemen her yerde sonlu $f'(x)$ türevi varsa, bu türev fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir.

3.7. Hilbert Uzayında Simetrik Operatörler (Smirnov, V.I., 1964)

H-Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ lineer uzayı verilsin.

$$\langle Ax, y\rangle_H = \langle x, Ay\rangle_H$$

eşitliği her $x, y \in D(A)$ için sağlanıyorsa A operatörüne simetrik operatör denir. Simetrik operatörlerin bütün özdeğerleri reel ve farklı özdeğerlere uygun özfonksiyonları ortogonaldır.

3.8. Parametreye Bağlı Sınır-Değer Probleminin Çözümünün Varlığı, Tekliği ve Parametreye Göre Tamlık Teoremi (Titchmarsh, E.C., 1939)

$q:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$-u''+q(x)u=\lambda u, \qquad x\in[a,b]$$

$$u(a)=\sin\alpha, \qquad u'(a)=-\cos\alpha, \qquad \alpha\in[0,\pi)$$

sınır değer probleminin bir tek $u(x,\lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her $x\in[a,b]$ için $\lambda\in\mathbb{C}$ parametresinin tam fonksiyonudur.

4. MATERYAL VE METOD

Bu çalışmada literatürde bulunan aşağıdaki materyal ve metotlardan yararlanılmıştır. Adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin özdeğerlerinin asimptotik davranışlarının incelenmesi için uygulanan karakteristik fonksiyonun kurulması yöntemi (Titchmars, E.C.,1962), regüler Sturm-Liouville teorisi ve yöntemleri (Fulton, C.T. 1977,; Titchmars, E.C.,1962); fonksiyonel analizden bazı temel tanımlar ve simetrik operatörlerin bazı temel özellikleri (Lang, S., 1963); kompleks analizden tam fonksiyonların sıfır yerleri ile ilgili olan teoremler (Hinton D.B.,1979; Shkalikov, A., A., 1983; Walter J., 1973) v.s. Ayrıca bu yöntemlerden araştırdığımız problemi uygun hale dönüştürülerek yararlanılmıştır.

5.BULGULAR

5.1 Sınır Değer Probleminin İfadesi

Bu bölümde,

$L_2(-1,0) \oplus L_2(0,1)$ Hilbert uzayında süreksiz katsayılı

$$-a(x)u'' + q(x)u = \lambda u \qquad \textbf{(5.1.1)}$$

diferansiyel denkleminin,

$$l_1(u) := \cos\alpha u(-1) + \sin\alpha u'(-1) = 0 \qquad \textbf{(5.1.2)}$$

$$l_2(u) := \cos\beta u(1) + \sin\beta u'(1) = 0 \qquad \textbf{(5.1.3)}$$

sınır şartlarından ve x = 0 süreksizlik noktasındaki

$$T_1(u) := u(-0) - u(+0) = 0 \qquad \textbf{(5.1.4)}$$

$$T_2(u) := u'(-0) - u'(+0) = 0 \qquad \textbf{(5.1.5)}$$

geçiş şartlarından oluşan sınır değer geçiş probleminin özdeğerleri incelenecektir.

Burada $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ve $a_1 > 0, a_2 > 0$ olmak üzere

$$a(x) = \begin{cases} a_1^2 & x \in [-1,0) \\ a_2^2 & x \in (0,1] \end{cases}$$

parçalı sabit ve reel değerli fonksiyon, *q(x)* fonksiyonu sadece *x = 0* noktasında 1.çeşit süreksizliğe sahip olan reel değerli parçalı sürekli fonksiyondur. Sınır şartlarında bulunan $\alpha, \beta \in [0,\pi)$, λ ise kompleks özdeğer parametresidir.

5.2 Uygun Hilbert Uzayı ve Operatör –Teorik Yorum

Önce verilmiş probleme uygun olan özel bir Hilbert uzayı, sonra da bu uzayda verilmiş sınır-değer-geçiş problemi ile aynı özdeğerlere sahip olan lineer operatör kurulacaktır.

$L_2(-1,0)\oplus L_2(0,1)$ Hilbert uzayında; $u,v\in L_2(-1,0)\oplus L_2(0,1)$ elemanlarının iç çarpımını

$$\langle u,v\rangle_{H_a} = \frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{0} u(x)\overline{v(x)}\,dx + \frac{1}{a_2^2}\int_{0}^{1} u(x)\overline{v(x)}\,dx \qquad \textbf{(5.2.1)}$$

eşitliği ile tanımlayalım. $L_2(-1,0)\oplus L_2(0,1)$ uzayının bu iç çarpım altında bir Hilbert uzayı olduğu aşikardır. Bu Hilbert uzayını H_a şeklinde gösterelim.

Herhangi aralıklarda diferansiyellenebilir iki *u(x)* ve *v(x)* fonksiyonlarının Wronksiyen'ini ise

$$W(u,v;x) = u(x)v'(x) - v(x)u'(x)$$

şeklinde göstereceğiz.

Verilmiş (5.1.1)- (5.1.5) sınır değer problemine uygun olan

$$A: H_a \to H_a$$

lineer operatörünü

$$\begin{aligned} D(A) = \{ u(x) \mid\; & u(x) \; ve \; u'(x) \text{ fonksiyonları } [-1,0)\, ve\, (0,1] \text{ aralıklarında} \\ & \text{mutlak süreklidirler ve sonlu } u(\pm 0)\; ve\; u'(\pm 0) \text{ limit değerleri mevcuttur} \\ & -a(x)u'' + q(x)u \in L_2(-1,0)\oplus L_2(0,1),\; l_i(u)=0,\; T_i(u)=0,\; (i=1,2) \;\} \end{aligned}$$

(5.2.2)

tanım bölgesinde

$$Au := -a(x)u'' + q(x)u \qquad \textbf{(5.2.3)}$$

formülü ile tanımlarsak (5.1.1)- (5.1.5) sınır değer problemini H_a uzayında

$$Au = \lambda u \qquad \textbf{(5.2.4)}$$

operatör denklem şeklinde yazabiliriz. A operatörünün özdeğerlerine ve özfonksiyonlarına (5.1.1)- (5.1.5) sınır değer probleminin özdeğeri ve özfonksiyonları diyeceğiz.

5. 3 A Operatörünün Simetrikliği

A operatörünün simetrik olması için yeter şart aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.3.1 (5.2.2), (5.2.4) eşitlikleri ile tanımlı A operatörü simetriktir

<u>İspat:</u> $\forall u,v\in D(A)$ için $\langle Au,v\rangle_{Ha}$ iç çarpımı aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\langle Au,v\rangle_{Ha}=\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{0}\left(-a(x)u''+q(x)u\right)\overline{v(x)}\,dx+\frac{1}{a_2^2}\int_{0}^{1}\left(-a(x)u''+q(x)u\right)\overline{v(x)}\,dx \qquad \textbf{(5.3.1)}$$

İki kere kısmi integrasyon uygularsak

$$\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{0}\left(-a(x)u''+q(x)u\right)\overline{v(x)}\,d(x)=\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{0}(-a_1^2u''+q(x)u)\overline{v(x)}\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}u''(x)\overline{v(x)}\,dx+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{0}q(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

$$=-\left(u'(x)\overline{v(x)}\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}u'(x)\overline{v'(x)}\,dx\right)+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{0}q(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}u'(x)\overline{v'(x)}\,dx-u'(x)\overline{v(x)}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{0}q(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

$$=u(x)\overline{v'(x)}\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}u(x)\overline{v''(x)}\,dx-u'(x)\overline{v(x)}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{0}q(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}u(x)\overline{v''(x)}\,dx+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{0}q(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx$$
$$+u(0)\overline{v'(0)}-u(-1)\overline{v'(-1)}-u'(0)\overline{v(0)}+u'(-1)\overline{v(-1)}$$

$$=-\int_{-1}^{0}u(x)\overline{v''(x)}\,dx+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{0}q(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx+W(u,\overline{v};-0)-W(u,\overline{v};-1) \qquad \textbf{(5.3.2)}$$

Benzer şekilde

$$\frac{1}{a_2^2}\int_{0}^{1}\left(-a(x)u''+q(x)u\right)\overline{v(x)}\,dx=\frac{1}{a_2^2}\int_{0}^{1}\left(-a_2^2u''+q(x)u\right)\overline{v(x)}\,dx$$

$$=-\int_{0}^{1}u''\overline{v(x)}\,dx+\frac{1}{a_2^2}\int_{0}^{1}q(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

$$=-\int_0^1 u(x)\overline{v''(x)}dx+\frac{1}{a_2^2}\int_0^1 q(x)u(x)\overline{v(x)}dx+W(u,\overline{v};1)-W(u,\overline{v};+0) \quad \textbf{(5.3.3)}$$

bulunur.

(5.3.2) ve (5.3.3)'ü (5.3.1)'de yerine yazarsak

$$\langle Au,v\rangle_{H_a}=-\int_{-1}^0 u(x)\overline{v''(x)}dx+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^0 q(x)u(x)\overline{v(x)}dx+W(u,\overline{v};-0)-W(u,\overline{v};-1)$$

$$-\int_0^1 u(x)\overline{v''(x)}dx+\frac{1}{a_2^2}\int_0^1 q(x)u(x)\overline{v(x)}dx+W(u,\overline{v};1)-W(u,\overline{v};+0) \quad \textbf{(5.3.4)}$$

bulunur.

Diğer taraftan

$$\langle u,Av\rangle_{H_a}=\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^0 \overline{\left(-a(x)v''+q(x)v(x)\right)}u(x)dx$$

$$+\frac{1}{a_2^2}\int_0^1 u(x)\overline{\left(-a(x)v''(x)+q(x)v(x)\right)}dx \quad \textbf{(5.3.5)}$$

$$\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^0 \overline{\left(-a_1^2v''(x)\right)}u(x)dx+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^0 u(x)q(x)\overline{v(x)}dx$$

$$=-\int_{-1}^0 u(x)\overline{v''(x)}dx+\frac{1}{a_1^2}\int_0^1 u(x)\overline{v(x)}q(x)dx \quad \textbf{(5.3.6)}$$

$$\frac{1}{a_2^2}\int_0^1 -a_2^2(x)u(x)\overline{v''(x)}+\frac{1}{a_2^2}\int_0^1 u(x)q(x)\overline{v(x)}dx$$

$$=-\int_0^1 u(x)\overline{v''(x)}dx+\frac{1}{a_2^2}\int_0^1 u(x)\overline{v(x)}q(x)dx \quad \textbf{(5.3.7)}$$

(5.3.6) ve (5.3.7)'yi (5.3.5)'de yerine yazarsak

$$\langle u,Av\rangle_{H_a}=-\int_{-1}^0 u(x)\overline{v''(x)}dx+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^0 u(x)q(x)\overline{v(x)}dx$$

$$-\int_0^1 u(x)\overline{v''(x)}dx+\frac{1}{a_2^2}\int_0^1 u(x)\overline{v(x)}q(x)dx \qquad \textbf{(5.3.8)}$$

bulunur.

Diğer taraftan (5.3.4) ve (5.3.8) eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak;

$$\begin{aligned}\langle Au,v\rangle_{H_a}-\langle u,Av\rangle_{H_a}&=W(u,\overline{v};-0)-W(u,\overline{v};-1)+\\&W(u,\overline{v};1)-W(u,\overline{v};+0)\end{aligned} \qquad \textbf{(5.3.9)}$$

eşitliğini elde ederiz.

Şimdi (5. 3. 9) eşitliğinin sağ tarafının sıfıra eşit olduğunu gösterelim.

$u,v\in D(A)$ olduğu için

$$\cos\alpha u(-1)+\sin\alpha u'(-1)=0$$

$$\cos\alpha v(-1)+\sin\alpha v'(-1)=0$$

eşitlikleri sağlanır. Bu iki eşitlikte $\cos\alpha,\ \sin\alpha$ değişken; $u(-1), u'(-1), v(-1)$ *ve* $v'(-1)$ lineer denklem sisteminin katsayıları olmak üzere, bu homojen lineer denklem sisteminin $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)\neq(0,0)$ çözümü bulunduğundan

$$\det\begin{bmatrix}u(-1) & u'(-1)\\ v(-1) & v'(-1)\end{bmatrix}=u(-1).v'(-1)-u'(-1)v(-1)=W(u,v;-1)=0 \qquad \textbf{(5.3.10)}$$

olur. Benzer şekilde

$$\cos\beta u(1)+\sin\beta u'(1)=0$$

$$\cos\beta v(1)+\sin\beta v'(1)=0$$

lineer homojen denklem sisteminden

$$\det\begin{bmatrix}u(1) & u'(1)\\ v(1) & v'(1)\end{bmatrix}=u(1)v'(1)-u'(1)v(1)=W(u,v;1)=0 \qquad \textbf{(5.3.11)}$$

elde edilir.

Ayrıca $u,v\in D(A)$ olduğu için *u(x)* ve *v(x)* fonksiyonları (5.1.4) - (5.1.5) geçiş şartlarını sağlıyor.

$$
\begin{aligned}
W\left(u,\overline{v};-0\right) &= u\left(-0\right)\overline{v'\left(-0\right)}-u'\left(-0\right)\overline{v\left(-0\right)} \\
&= u\left(+0\right)\overline{v'\left(+0\right)}-u'\left(+0\right)\overline{v\left(+0\right)} \\
&= \left(u\left(+0\right)\overline{v'\left(+0\right)}-u'\left(+0\right)\overline{v\left(+0\right)}\right) \\
&= \left(W\left(u,\overline{v};+0\right)\right) \\
&= W\left(u,\overline{v};+0\right) \qquad \textbf{(5.3.12)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(5.3.10), (5.3.11) ve (5.3.12) eşitliklerini (5.3.9) da yerine yazarsak $\forall u,v\in D\left(A\right)$ için aranan

$$\left\langle Au,v\right\rangle_{H_a}=\left\langle u,Av\right\rangle_{H_a}$$

eşitliği bulunmuş olur. İspat bitti.

Sonuç: (5.1.1) - (5.1.5) sınır değer probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

5.4 Temel Çözümler ve Karakteristik Fonksiyon

Bu bölümde verilmiş

$$-a(x)u''+q(x)u=\lambda u \tag{5.4.1}$$

$$l_1(u):=\cos\alpha u(-1)+\sin\alpha u'(-1)=0 \tag{5.4.2}$$

$$l_2(u):=\cos\beta u(1)+\sin\beta u'(1)=0 \tag{5.4.3}$$

$$T_1(u):=u(-0)-u(+0)=0 \tag{5.4.4}$$

$$T_2(u):=u'(-0)-u'(+0)=0 \tag{5.4.5}$$

sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları arasındaki bazı temel bağıntıları inceleyeceğiz. Bunun için bazı yardımcı başlangıç değer problemleri araştırıldı. Önce aşağıdaki başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

$$-a_1^2u''(x)+q(x).u(x)=\lambda u(x), \qquad x\in[-1,0] \tag{5.4.6}$$

$$u(-1)=\sin\alpha \tag{5.4.7}$$

$$u'(-1)=-\cos\alpha \tag{5.4.8}$$

Teorem 3.8 gereği her $\lambda\in\mathbb{C}$ için (5.4.6)- (5.4.8) başlangıç değer probleminin bir tek $u=\phi_1(x)\equiv\phi_1(x,\lambda)$ çözümü bulunur ve yine aynı teoreme göre

$$-a_2^2u''(x)+q(x)u(x)=\lambda u(x) \qquad x\in[0,1] \tag{5.4.9}$$

diferansiyel denkleminin

$$u(1)=-\sin\beta \tag{5.4.10}$$

$$u'(1)=\cos\beta \tag{5.4.11}$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir tek $u=\chi_2(x)\equiv\chi_2(x,\lambda)$ çözümü bulunur.

$\phi_1(x,\lambda)$ ve $\chi_2(x,\lambda)$ fonksiyonları ile bağlantılı olan aşağıdaki başlangıç şartları da özdeğer parametresi bulunduran başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

$$-a_2^2u''(x)+q(x)u(x)=\lambda u(x)\ , \qquad x\in[0,1] \tag{5.4.12}$$

$$u(0)=\phi_1(0,\lambda) \tag{5.4.13}$$

$$u'(0)=\phi_1'(0,\lambda) \tag{5.4.14}$$

başlangıç değer probleminin her $\lambda \in \mathbb{C}$ için Teorem 3.8 gereği bir tek $u=\phi_2(x)\equiv\phi_2(x,\lambda)$ çözümü bulunur. Benzer şekilde

$$-a_1^2u''(x)+q(x)u(x)=\lambda u(x) \qquad x\in[-1,0] \tag{5.4.15}$$

diferansiyel denkleminin $\lambda-$ parametresine bağlı

$$u(0)=\chi_2(0,\lambda) \tag{5.4.16}$$

$$u'(0)=\chi_2'(0,\lambda) \tag{5.4.17}$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir tek $u=\chi_1(x)=\chi_1(x,\lambda)$ çözümü bulunur.

Bu fonksiyonların $[-1,1]$ aralığına sıfırla devamlarını uygun olarak $\tilde{\phi}_i(x,\lambda)$ ve $\tilde{\chi}_i(x,\lambda)$ ile gösterelim. Ayrıca $W(\phi_1(x,\lambda),\chi_1(x,\lambda))$ ve $W(\phi_2(x,\lambda),\chi_2(x,\lambda))$ Wronksiyenleri uygun olarak $x\in[-1,0]$ ve $x\in[1,0]$ değişkenlerinden bağımsız oldukları için (Boyce, W.E. and Diprima, R.C.) ve $\phi_i(x,\lambda)$ ve $\chi_i(x,\lambda)$ *(i=1,2)* her bir x için $\lambda-$ parametresinin tam fonksiyonları olduklarından

$$\omega_1(\lambda):=W(\phi_1(x,\lambda),\chi_1(x,\lambda))$$

$$\omega_2(\lambda):=W(\phi_2(x,\lambda),\chi_2(x,\lambda))$$

fonksiyonları $\lambda-$ parametresinin tam fonksiyonlarıdır.

5.4.1 Lemma : Her $\lambda\in\mathbb{C}$ için

$$\omega_1(\lambda)=\omega_2(\lambda)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : (5.4.13), (5.4.14), (5.4.16), (5.4.17) eşitlikleri gereği

$$\begin{aligned}\omega_1(\lambda) &:= W\left(\phi_1(x,\lambda),\chi_1(x,\lambda)\right)\\ &= \phi_1(0,\lambda)\chi_1'(0,\lambda)-\phi_1'(0,\lambda)\chi_1(0,\lambda)\\ &= \phi_2(0,\lambda)\chi_2'(0,\lambda)-\phi_2'(0,\lambda)\chi_2(0,\lambda)\\ &= \left(\phi_2(0,\lambda)\chi_2'(0,\lambda)-\phi_2'(0,\lambda)\chi_2(0,\lambda)\right)\\ &= W\left(\phi_2(x,\lambda),\chi_2(x,\lambda)\right)\big|_{x=0}\\ &= \omega_2(\lambda)\end{aligned}$$

elde edilir.

5.4.2 Sonuç : $\omega_1(\lambda)$ ve $\omega_2(\lambda)$ tam fonksiyonlarının sıfır yerleri çakışıktır.

Şimdi $[-1,0)\cup(0,1]$'de tanımlı olan $\phi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,\lambda)$ fonksiyonlarını

$$\phi(x,\lambda)=\begin{cases}\phi_1(x,\lambda), & x\in[-1,0)\\ \phi_2(x,\lambda), & x\in(0,1]\end{cases}$$

$$\chi(x,\lambda)=\begin{cases}\chi_1(x,\lambda), & x\in[-1,0)\\ \chi_2(x,\lambda), & x\in(0,1]\end{cases}$$

eşitlikleri ile tanımlarsak Lemma 5.4.1'den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

5.4.3 Sonuç: $\phi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının Wronksiyeni $x\in[-1,0)\cup(0,1]$ değişkeninden bağımsızdır ve $\lambda-$ parametresinin tam fonksiyonudur.

Not : $\phi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,\lambda)$ fonksiyonların Wronksiyenini

$$\omega(\lambda):=W\left(\phi(x,\lambda),\chi(x,\lambda)\right) \tag{5.4.18}$$

ile göstereceğiz.

5.4.4 Teorem: (5.4.1)- (5.4.5) sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\omega(\lambda)$ fonksiyonun sıfır yerlerinden ibarettir.

İspat :

$(\Rightarrow): \omega(\lambda_0)=0$ olsun. O halde

$$\omega_1(\lambda_0)=\omega(\lambda_0)=0 \Rightarrow W(\phi_1(x,\lambda_0),\chi_1(x,\lambda_0))=0$$

olacaktır. O halde ϕ_1 ve χ_1 lineer bağımlı olacağından

$$\phi_1(x,\lambda_0)=k_1\chi_1(x,\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.19)}$$

olacak şekilde $k_1 \neq 0$ sayısı bulunur. $\chi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu (5.4.1) denklemi ve üç tane (5.4.3), (5.4.4) ve (5.4.5) sınır şartlarını sağladığı açıktır. (5.4.19) eşitliği gereği $\chi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu (5.4.2) sınır şartını da sağlıyor. Dolayısıyla $\chi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu (5.4.1)-(5.4.5) sınır değer probleminin çözümü oluyor. Bu ise $\lambda=\lambda_0$ sayısının özdeğer olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow:)$ şimdi ise $\lambda=\lambda_0$ komplex sayısının özdeğer olduğunu kabul ederek $\omega(\lambda_0)=0$ eşitliğinin doğruluğunu ispat edelim. Bunu aksini kabul etme yöntemi ile yapalım. Herhangi $\lambda=\lambda_0$ özdeğeri için $\omega(\lambda_0)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $\phi_1(x,\lambda_0)$ ile $\chi_1(x,\lambda_0)$ ve $\phi_2(x,\lambda_0)$ ile $\chi_2(x,\lambda_0)$ fonksiyonları lineer bağımsız olacaktır (Boyce, W.E. and Diprima, R.C.). (5.4.1) diferansiyel denkleminin genel çözümünün

$$u(x,\lambda)=c_1\tilde{\phi}_1(x,\lambda)+c_2\tilde{\chi}_1(x,\lambda)+c_3\tilde{\phi}_2(x,\lambda)+c_4\tilde{\chi}_2(x,\lambda)$$

şeklinde ifade edilebileceği kolayca anlaşılabilir. Dolayısıyla λ_0 özdeğerine uygun olan her bir $u_0(x)$ özfonksiyonu için

$$u_0(x)=k_1\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0)+k_2\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0)+k_3\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0)+k_4\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.20)}$$

olacak şekilde en az biri sıfırdan farklı olan k_1, k_2, k_3, k_4 sayıları bulunur. (5.4.20) eşitliği ile verilen $u_0(x)$ özfonksiyonu (5.4.2)- (5.4.5) sınır ve geçiş şartlarını sağladığından;

$$l_1(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0))k_1+l_1(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0))k_2+l_1(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0))k_3+l_1(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0))k_4=0$$

$$l_2(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0))k_1+l_2(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0))k_2+l_2(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0))k_3+l_2(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0))k_4=0$$

$$T_1\left(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0)\right)k_1+T_1\left(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0)\right)k_2+T_1\left(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0)\right)k_3+T_1\left(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0)\right)k_4=0$$

$$T_2\left(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0)\right)k_1+T_2\left(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0)\right)k_2+T_2\left(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0)\right)k_3+T_2\left(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0)\right)k_4=0$$

eşitlikleri geçerlidir. k_i katsayılarının en az biri sıfırdan farklı olduğundan

$$\begin{vmatrix} l_1\left(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0)\right) & l_1\left(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0)\right) & l_1\left(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0)\right) & l_1\left(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0)\right) \\ l_2\left(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0)\right) & l_2\left(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0)\right) & l_2\left(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0)\right) & l_2\left(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0)\right) \\ T_1\left(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0)\right) & T_1\left(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0)\right) & T_1\left(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0)\right) & T_1\left(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0)\right) \\ T_2\left(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0)\right) & T_2\left(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0)\right) & T_2\left(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0)\right) & T_2\left(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0)\right) \end{vmatrix}=0 \qquad \textbf{(5.4.21)}$$

elde edilir. Şimdi bu determinantın elemanlarını hesaplayalım : $\tilde{\phi}_i(x,\lambda)$ ve $\tilde{\chi}_i(x,\lambda)$ fonksiyonların tanımı gereği

$$l_1\left(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0)\right)=\cos\alpha\,\phi_1(-1,\lambda_0)+\sin\alpha\,\phi_1'(-1,\lambda_0)$$

$$=\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha(-\cos\alpha)=0 \qquad \textbf{(5.4.22)}$$

$$l_1\left(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0)\right)=\cos\alpha\,\chi_1(-1,\lambda_0)+\sin\alpha\,\chi_1'(-1,\lambda_0)$$

$$=-\phi_1'(-1,\lambda_0)\chi_1(-1,\lambda_0)+\phi_1(-1,\lambda_0)\chi_1'(-1,\lambda_0)$$

$$=\phi_1(-1,\lambda_0)\chi_1'(-1,\lambda_0)-\phi_1'(-1,\lambda_0)\chi_1(-1,\lambda_0)$$

$$=W\left(\phi_1(x,\lambda_0),\chi_1(x,\lambda_0)\right)\Big|_{x=-1}=\omega_1(\lambda_0)=\omega(\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.23)}$$

$$l_1\left(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0)\right)=\cos\alpha\,\phi_2(-1,\lambda_0)+\sin\alpha\,\phi_2'(-1,\lambda_0)=0 \qquad \textbf{(5.4.24)}$$

$$l_1\left(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0)\right)=\cos\alpha\,\chi_2(-1,\lambda_0)+\sin\alpha\,\chi_2'(-1,\lambda_0)=0 \qquad \textbf{(5.4.25)}$$

$$l_2\left(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0)\right)=\cos\beta\,\phi_1(1,\lambda_0)+\sin\beta\,\phi_1'(1,\lambda_0)=0 \qquad \textbf{(5.4.26)}$$

$$l_2\left(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0)\right)=\cos\beta\,\chi_1(1,\lambda_0)+\sin\beta\,\chi_1'(1,0)=0 \qquad \textbf{(5.4.27)}$$

$$l_2\left(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0)\right)=\cos\beta\,\phi_2(1,\lambda_0)+\sin\beta\,\phi_2'(1,\lambda_0)$$

$$= \chi_2'(1,\lambda_0)\phi_2(1,\lambda_0) - \chi_2(1,\lambda_0)\phi_2'(1,\lambda_0)$$

$$= W\left(\phi_2(x,\lambda_0), \chi_2(x,\lambda_0)\right)\Big|_{x=1} = \omega_2(\lambda_0) = \omega(\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.28)}$$

$$l_2\left(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0)\right) = \cos\beta\,\chi_2(1,\lambda_0) + \sin\beta\,\chi_2'(1,\lambda_0)$$

$$= \cos\beta\left(-\sin\beta\right) + \sin\beta\cos\beta = 0 \qquad \textbf{(5.4.29)}$$

$$T_1\left(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0)\right) = \phi_1(-0,\lambda_0) - \phi_1(0,\lambda_0) = \phi_1(-0_1,\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.30)}$$

$$T_1\left(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0)\right) = \chi_1(-0,\lambda_0) - \chi_1(0,\lambda_0) = \chi_1(-0,\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.31)}$$

$$T_1\left(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0)\right) = \phi_2(-0,\lambda_0) - \phi_2(+0,\lambda_0) = -\phi_2(+0\ ,\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.32)}$$

$$T_1\left(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0)\right) = \chi_2(-0,\lambda_0) - \chi_2(+0,\lambda_0) = -\chi_2(+0,\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.33)}$$

$$T_2\left(\tilde{\phi}_1(x,\lambda_0)\right) = \phi_1'(-0,\lambda_0) - \phi_1'(+0,\lambda_0) = \phi_1'(-0,\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.34)}$$

$$T_2\left(\tilde{\chi}_1(x,\lambda_0)\right) = \chi_1'(-0,\lambda_0) - \chi_1'(-0,\lambda_0) = \chi_1'(-0,\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.35)}$$

$$T_2\left(\tilde{\phi}_2(x,\lambda_0)\right) = \phi_2'(-0,\lambda_0) - \phi_2'(+0,\lambda_0) = -\phi_2'(+0,\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.36)}$$

$$T_2\left(\tilde{\chi}_2(x,\lambda_0)\right) = \chi_2'(-0,\lambda_0) - \chi_2'(+0,\lambda_0) = -\chi_2'(+0,\lambda_0) \qquad \textbf{(5.4.37)}$$

Şimdi bulmuş olduğumuz (5.4.22)- (5.4.37) eşitliklerini (5.4.21) determinantında yerine yazarsak ,

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega(\lambda_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega(\lambda_0) & 0 \\ \phi_1(-0,\lambda_0) & \chi_1(-0,\lambda_0) & -\phi_1(+0,\lambda_0) & -\chi_2(+0,\lambda_0) \\ \phi_1'(-0,\lambda_0) & \chi_1'(-0,\lambda_0) & -\phi_1'(-0,\lambda_0) & -\chi_2'(+0,\lambda_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(5.4.38)}$$

olur. Buradan $\omega(\lambda_0) \neq 0$ kabulünü de dikkate alırsak

$$\begin{vmatrix} \phi_1(-0,\lambda_0) & -\chi_2(+0,\lambda_0) \\ \phi_1'(-0,\lambda_0) & -\chi_2'(+0,\lambda_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(5.4.39)}$$

elde edilir.

$$\phi_1(-0,\lambda_0) = \phi_2(0,\lambda_0)$$

$$\phi_1'(-0,\lambda_0) = \phi_2'(0,\lambda_0)$$

eşitliklerini (5.4.39) nolu determinantta yerine yazarsak

$$\begin{vmatrix} \phi_2(0,\lambda_0) & -\chi_2(0,\lambda_0) \\ \phi_2'(0,\lambda_0) & -\chi_2'(0,\lambda_0) \end{vmatrix} = 0$$

bulunur. Bunun sonucunda ise

$$-W\left(\phi_2(x,\lambda_0),\chi_2(x,\lambda_0)\right)\Big|_{x=+0} = -\omega_2(\lambda_0)$$

$$-\omega(\lambda_0) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\omega_2(\lambda_0) \neq 0$ kabulümüzle çelişiyor.

5. 5 Bazı Başlangıç Değer Problemlerinin İntegral Denklemlere İndirgenmesi

5. 5. 1 Lemma : $\lambda = s^2$ olmak üzere,

$$-a_1^2 u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) \qquad x \in [-1,0] \qquad \textbf{(5.4.6)}$$

$$u(-1) = \sin\alpha \qquad \textbf{(5.4.7)}$$

$$u'(-1) = -\cos\alpha \qquad \textbf{(5.4.8)}$$

sınır değer problemi

$$u(x) = \sin\alpha \cos\frac{s(x+1)}{a_1} - \frac{a_1}{s}\cos\alpha \sin\frac{s(x+1)}{a_1} + \frac{1}{a_1 s}\int_{-1}^{x} \sin\frac{s(x-y)}{a_1} q(y)u(y)\,dy \qquad \textbf{(5.5.1)}$$

integral denklemi ile eşdeğerdir.

<u>İspat</u> : $\quad -a_1^2 u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x)$

denklemini

$$u''(x) + \frac{\lambda}{a_1^2} u(x) = \frac{q(x)u(x)}{a_1^2} \qquad \textbf{(5.5.2)}$$

şeklinde yazalım.

Bu denklemi homojen olmayan lineer diferansiyel denklem gibi kabul edersek bunu çözmek için önce bazı yardımcı denklemler oluşturup bunları çözelim. Önce $\lambda = s^2$ olmak üzere

$$u''(x) + \frac{\lambda}{a_1^2} u(x) = 0 \qquad \textbf{(5.5.3)}$$

denkleminin çözümünü araştıralım. Yukarıdaki sabit katsayılı lineer diferansiyel denkleme uygun karakteristik denklemimiz

$$r^2 + \frac{s^2}{a_1^2} = 0$$

biçiminde olduğundan (5.5.3) denkleminin temel çözümleri

$$y_1 = \cos\frac{s}{a_1}x \quad \text{ve} \quad y_2 = \sin\frac{s}{a_1}x$$

olacak. Dolayısıyla (5.5.3) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 \cos\frac{s}{a_1}x + c_2 \sin\frac{s}{a_1}x$$

biçiminde yazılabilir; burada c_1, c_2 keyfi sabitlerdir.

Şimdi (5.5.2) denkleminin $u(x) \equiv u(x,s)$ çözümünü

$$u(x) = c_1(x)\cos\frac{s}{a_1}x + c_2(x)\sin\frac{s}{a_1}x \tag{5.5.4}$$

şeklinde bulmaya çalışacağız. Burada $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ yeni bilinmeyen fonksiyonlardır. Bu yeni fonksiyonları bulmak için iki tane denklem kuracağız. $u(x)$, (5.5.2) denkleminin çözümü olduğundan denklemde yerine koyabilmek için $u''(x)'i$ bulmamız gerekiyor. $u(x)$'in önce birinci türevini alalım.

$$u'(x) = c_1'(x)\cos\frac{s}{a_1}x + c_2'(x)\sin\frac{s}{a_1}x - \frac{s}{a_1}c_1(x)\sin\frac{s}{a_1}x + \frac{s}{a_1}c_2(x)\cos\frac{s}{a_1}x$$

$c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki,

$$c_1'(x)\cos\frac{s}{a_1}x + c_2'(x)\sin\frac{s}{a_1}x = 0 \tag{5.5.5}$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda

$$u'(x) = -\frac{s}{a_1}c_1(x)\sin\frac{s}{a_1}x + \frac{s}{a_1}c_2(x)\cos\frac{s}{a_1}x$$

eşitliği sağlanacak. Şimdi de ikinci türevini alalım.

$$u''(x) = -\frac{s}{a_1}c_1'(x)\sin\frac{s}{a_1}x + \frac{s}{a_1}c_2'(x)\cos\frac{s}{a_1}x$$

$$-\frac{s^2}{a_1^2}c_1(x)\cos\frac{s}{a_1}x - \frac{s^2}{a_1^2}c_2(x)\sin\frac{s}{a_1}x \tag{5.5.6}$$

olur.

(5.5.4) ve (5.5.6)'yı (5.5.2) de yerine yazarsak,

$$-\frac{s}{a_1}c_1'(x)\sin\frac{sx}{a_1} + \frac{s}{a_1}c_2'(x)\cos\frac{sx}{a_1} - \frac{s^2}{a_1^2}c_1(x)\cos\frac{sx}{a_1}$$

$$-\frac{s^2}{a_1^2}c_2(x)\sin\frac{sx}{a_1}+\frac{s^2}{a_1^2}c_1(x)\cos\frac{sx}{a_1}+\frac{s^2}{a_1^2}c_2(x)\sin\frac{sx}{a_1}=\frac{q(x)u(x)}{a_1^2} \qquad \textbf{(5.5.7)}$$

sonucu ortaya çıkar. (5.5.5) ve (5.5.7) denklemlerini beraber düşünüp, $c_1'(x)$ ve $c_2'(x)$ değişkenlerine göre lineer denklem sistemi gibi çözelim. $(s \neq 0\ kabul\ \ ediyoruz)$

Buradan

$$c_1'(x)=-\frac{1}{sa_1}\sin\frac{sx}{a_1}q(x)u(x) \qquad \textbf{(5.5.8)}$$

$$c_2'(x)=\frac{1}{sa_1}\cos\frac{sx}{a_1}q(x)u(x) \qquad \textbf{(5.5.9)}$$

bulunur. Bu eşitliklerin integrallerini alırsak,

$$c_1(x)=\int_{-1}^{x}\frac{-1}{sa_1}\sin\frac{sy}{a_1}q(y)\,u(y)\,dy+c_1 \qquad \textbf{(5.5.10)}$$

$$c_2(x)=\int_{-1}^{x}\frac{1}{sa_1}\cos\frac{sy}{a_1}q(y)\,u(y)\,dy+c_2 \qquad \textbf{(5.5.11)}$$

bulunur. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonlarını (5.5.4) denkleminde yerine yazarsak,

$$u(x)=\left(\int_{-1}^{x}\frac{-1}{sa_1}\sin\frac{sy}{a_1}q(y)u(y)\,dy+c_1\right)\cos\frac{sx}{a_1}+\left(\int_{-1}^{x}\frac{1}{sa_1}\cos\frac{sy}{a_1}q(y)u(y)\,dy+c_2\right)\sin\frac{sx}{p_1}$$

$$=\int_{-1}^{x}\frac{-1}{sa_1}\sin\frac{sy}{a_1}\cos\frac{sx}{a_1}q(y)u(y)\,dy+c_1\cos\frac{sx}{a_1}$$

$$+\int_{-1}^{x}\frac{1}{sa_1}\cos\frac{sy}{a_1}\sin\frac{sx}{a_1}q(y)u(y)\,dy+c_2\sin\frac{sx}{a_1}$$

$$=c_1\cos\frac{sx}{a_1}+c_2\sin\frac{sx}{a_1}+\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x}\left(\sin\frac{sx}{a_1}\cos\frac{sy}{a_1}-\cos\frac{sx}{a_1}\sin\frac{sy}{a_1}\right)q(y)\,u(y)\,dy$$

$$=c_1\cos\frac{sx}{a_1}+c_2\sin\frac{sx}{a_1}+\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x}\sin\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)u(y)\,dy \qquad \textbf{(5.5.12)}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ifadeyi

$$u(-1)=\sin\alpha$$

$$u'(-1)=-\cos\alpha$$

başlangıç şartlarında yerine yazarsak c_1 ve c_2'ye bağlı aşağıdaki lineer denklem sistemini elde ederiz. İlk eşitlikten

$$c_1\cos\frac{s}{a_1}-c_2\sin\frac{s}{a_1}=\sin\alpha \qquad \textbf{(5.5.13)}$$

elde edilir.

$u'(-1)$'i bulmak için önce $u'(x)$'i bulalım. Kolaylık için

$$f(x,y)=\sin\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)u(y)$$

gösteriminden yararlanacağız.

$$u'(x)=-\frac{s}{a_1}c_1\sin\frac{sx}{a_1}+\frac{s}{a_1}c_2\cos\frac{sx}{a_1}+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x}\sin\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)\,u(y)\,dy\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x}\sin\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)u(y)dy\right)=\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy+f(x,x).x'-f\left(x,(-1)\right)(-1)'$$

$$=\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x}\frac{s}{a_1}\cos\frac{s(x-y)}{a_1}\;q(y)u(y)dy+\sin\frac{s(x-x)}{a_1}q(x)u(x)1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x}\sin\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)\,u(y)dy\right)=\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x}\frac{s}{a_1}\cos\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)\,u(y)dy$$

$$=\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{x}\cos\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)u(y)dy$$

olduğu için

$$u'(x)=-\frac{s}{a_1}c_1\sin\frac{sx}{a_1}+\frac{s}{a_1}c_2\cos\frac{sx}{a_1}+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{x}\cos\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)u(y)dy \qquad \textbf{(5.5.14)}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{s}{a_1}c_1\sin\frac{s}{a_1}+\frac{s}{a_1}c_2\cos\frac{s}{a_1}=-\cos\alpha \qquad \textbf{(5.5.15)}$$

bulunur. (5.5.13), (5.5.15) denklemlerinden c_1 ve c_2 katsayıları için

$$c_1=\sin\alpha\cos\frac{s}{a_1}-\frac{a_1}{s}\cos\alpha\sin\frac{s}{a_1} \qquad \textbf{(5.5.16)}$$

$$c_2 = -\sin\alpha \sin\frac{s}{a_1} - \frac{a_1}{s}\cos\alpha \cos\frac{s}{a_1} \qquad \textbf{(5.5.17)}$$

ifadeleri bulunur.

(5.5.12) denkleminde (5.5.16) ve (5.5.17) değerlerini yerine yazarsak

$$u(x) = \left(\sin\alpha \cos\frac{s}{a_1} - \frac{a_1}{s}\cos\alpha \sin\frac{s}{a_1}\right)\cos\frac{sx}{a_1} + \left(-\sin\alpha \sin\frac{s}{a_1} - \frac{a_1}{s}\cos\alpha \cos\frac{s}{a_1}\right)\sin\frac{sx}{a_1}$$
$$+\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x} \sin\frac{s(x-y)}{a_1} q(y)u(y)dy$$
$$= \sin\alpha \cos\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_1} - \frac{a_1}{s}\cos\alpha \sin\frac{s}{a_1}\cos\frac{sx}{a_1} - \sin\alpha \sin\frac{s}{a_1}\sin\frac{sx}{a_1}$$
$$-\frac{a_1}{s}\cos\alpha \cos\frac{s}{a_1}\sin\frac{sx}{a_1} + \frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x} \sin\frac{s(x-y)}{a_1} q(y)u(y)dy$$

$$= \sin\alpha\left[\cos\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_1} - \sin\frac{sx}{a_1}\sin\frac{s}{a_1}\right] - \frac{a_1}{s}\cos\alpha\left[\cos\frac{sx}{a_1}\sin\frac{s}{a_1} + \sin\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_1}\right]$$
$$+\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x} \sin\frac{s(x-y)}{a_1} q(y)u(y)dy$$

Düzenlersek

$$u(x) = \sin\alpha \cos\frac{s(x+1)}{a_1} - \frac{a_1}{s}\cos\alpha \sin\frac{s(x+1)}{a_1} + \frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x} \sin\frac{s(x-y)}{a_1} q(y)u(y)dy \qquad \textbf{(5.5.18)}$$

elde edilir. Böylece

$$-a_1^2 u''(x) + q(x)\, u(x) = \lambda\, u(x) \qquad x \in [-1,0]$$
$$u(-1) = \sin\alpha$$
$$u'(-1) = -\cos\alpha$$

sınır değer probleminin her bir çözümünün aynı zamanda bulduğumuz (5.5.18) integral denkleminin çözümü olduğu ispatlandı.

(5.5.18) integral denkleminin her bir çözümünün aynı zamanda (5.4.6) – (5.4.8) sınır değer probleminin çözümü olduğunu gösterelim.

(5.5.18) integral denkleminin her bir çözümünün (5.4.7) ve (5.4.8) sınır şartlarını sağladığı açık olduğu için (5.4.6) diferansiyel denklemini sağladığını gösterelim. (5.5.18)'in sağ tarafındaki ilk iki toplamının her birinin

$$a_1^2 u''(x) + \lambda u(x) = 0$$

denklemini sağladığı kolayca gösterilebilir. $U(x) = F_1 + F_2 + \varphi$ olmak üzere

$$a_1^2 F_1'' + \lambda F_1 = 0 \qquad\qquad a_1^2 F_2'' + \lambda F_2 = 0 \tag{5.5.19}$$

olur. $u(x)$, (5.5.18) integral denkleminin herhangi çözümü olmak üzere,

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_1 s} \int_{-1}^{x} \sin \frac{s(x-y)}{a_1} q(y) u(y)\, dy$$

ile gösterirsek,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{a_1^2} \int_{-1}^{x} \cos \frac{s(x-y)}{a_1} q(y) u(y)\, dy$$

ve

$$\varphi''(x) = \frac{-s}{a_1^3} \int_{-1}^{x} \sin \frac{s(x-y)}{a_1} q(y) u(y)\, dy + \frac{1}{a_1^2} q(x) u(x)$$

bulunur. Bu eşitliklerden

$$a_1^2 \varphi''(x) + s^2 \varphi(x) = q(x) u(x)$$

yani

$$a_1^2 \varphi'' + \lambda \varphi = q(F_1 + F_2 + \varphi) \tag{5.5.20}$$

olduğu kolayca görülür. (5.5.19) ve (5.5.20) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$a_1^2 (F_1'' + F_2'' + \varphi'') + \lambda (F_1 + F_2 + \varphi) = q(F_1 + F_2 + \varphi)$$

yani

$$a_1^2 (F_1 + F_2 + \varphi)'' + \lambda (F_1 + F_2 + \varphi) = q(F_1 + F_2 + \varphi)$$

olur. Dolayısıyla (5.5.18) in her bir çözümü (5.5.2)' nin de bir çözümü olur.

5. 5. 2 Sonuç :

$\phi_{1\lambda}(x)$ çözüm fonksiyonu

$$\phi_{1\lambda}(x)=\sin\alpha\cos\frac{s(x+1)}{a_1}-\frac{a_1}{s}\cos\alpha\sin\frac{s(x+1)}{a_1}+\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x}\sin\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)\phi_{1\lambda}(y)dy$$

integral denklemini sağlıyor.

5. 5. 3 Lemma :

$\lambda = s^2$ olmak üzere (5.4.6) – (5.4.8) başlangıç değer probleminin her bir çözümü

$$u'(x)=-\frac{s}{a_1}\sin\alpha\sin\frac{s(x+1)}{a_1}-\cos\alpha\cos\frac{s(x+1)}{a_1}+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{x}\cos\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)\phi_{1\lambda}(y)dy$$

integro-diferansiyel denklemini sağlıyor.

İspat :

Lemma 5.5.1- den kolayca elde edilebilir.

5. 5. 4 Sonuç :

$\phi_{1\lambda}(x)$ fonksiyonu

$$\phi'_{1\lambda}(x)=-\frac{s}{a_1}\sin\alpha\sin\frac{s(x+1)}{a_1}-\cos\alpha\cos\frac{s(x+1)}{a_1}+\frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{x}\cos\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)\phi_{1\lambda}(y)dy$$

integro – diferansiyel denklemini sağlıyor.

Benzer şekilde ; (5.4.9) - (5.4.11), (5.4.12) - (5.4.14) ve (5.4.15) - (5.4.17) başlangıç değer problemleri ile eşdeğer olan integral ve integro–diferansiyel denklemlerini bularak aşağıdaki Teoremleri ispat edebiliriz.

5. 5. 5 Teorem :

$\phi_{1\lambda}(x)$ ve $\phi_{2\lambda}(x)$ çözüm fonksiyonları için aşağıdaki integral ve integro-diferansiyel denklemler sağlanır.

$$\phi_{2\lambda}(x)=\phi_{1\lambda}(-0)\cos\frac{sx}{a_2}+\frac{a_2}{s}\phi'_{1\lambda}(-0)\sin\frac{sx}{a_2}+\frac{1}{a_2 s}\int_{0}^{x}\sin\frac{s(x-y)}{a_2}q(y)\phi_{2\lambda}(y)dy$$

$$\phi_{2\lambda}'(x) = -\frac{s}{a_2}\phi_{1\lambda}(-0)\sin\frac{sx}{a_2} + \phi_{1\lambda}'(-0)\cos\frac{sx}{a_2} + \frac{1}{a_2^2}\int_0^x \cos\frac{s(x-y)}{a_2}q(y)\phi_{2\lambda}(y)dy$$

5. 5. 6 Teorem :

$\chi_{1\lambda}(x)$ ve $\chi_{2\lambda}(x)$ çözüm fonksiyonları aşağıdaki integral ve integro-diferansiyel denklemlerini sağlarlar.

$$\chi_{1\lambda}(x) = \chi_{2\lambda}(+0)\cos\frac{sx}{a_1} + \frac{a_1}{s}\chi_{2\lambda}'(+0)\sin\frac{sx}{a_1} - \frac{1}{a_1 s}\int_x^0 \cos\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)\chi_{1\lambda}(y)dy$$

$$\chi_{1\lambda}'(x) = -\frac{s}{a_1}\chi_{2\lambda}(+0)\sin\frac{sx}{a_1} + \chi_{2\lambda}'(+0)\cos\frac{sx}{a_1} - \frac{1}{a_1^2}\int_x^0 \sin\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)\chi_{1\lambda}(y)dy$$

$$\chi_{2\lambda}(x) = -\sin\beta\cos\frac{s(x-1)}{a_2} + \frac{a_2}{s}\cos\beta\sin\frac{s(x-1)}{a_2} - \frac{1}{a_2 s}\int_x^1 \sin\frac{s(x-y)}{a_2}q(y)\chi_{2\lambda}(y)dy$$

$$\chi_{2\lambda}'(x) = \frac{s}{a_2}\sin\beta\sin\frac{s(x-1)}{a_2} + \cos\beta\cos\frac{s(x-1)}{a_2} - \frac{1}{a_2^2}\int_x^1 \cos\frac{s(x-y)}{a_2}q(y)\chi_{2\lambda}(y)dy$$

5. 5. 7 Teorem :

$\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ ile gösterelim. O halde öyle $s_0 > 0$ vardır ki $|s| > s_0$ için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

1) $\sin\alpha \neq 0$ ise

$$\phi_{1\lambda}^{(k)} = 0\left(|s|^k \exp\frac{|t|(x+1)}{a_1}\right) \quad , \qquad k=0,1 \qquad \textbf{(5.5.21)}$$

$$\phi_{2\lambda}^{(k)} = 0\left(|s|^k \exp\frac{|t|(a_1 x + a_2)}{a_1 a_2}\right), \qquad k=0,1 \qquad \textbf{(5.5.22)}$$

2) $\sin\alpha = 0$ ise

$$\phi_{1\lambda}^{(k)} = 0\left(|s|^{-1+k} \exp\frac{|t|(x+1)}{a_1} \right) \qquad k=0,1 \qquad \mathbf{(5.5.23)}$$

$$\phi_{2\lambda}^{(k)} = 0\left(|s|^{-1+k} \exp\frac{|t|(a_1 x + a_2)}{a_1 a_2} \right) \qquad k=0,1 \qquad \mathbf{(5.5.24)}$$

Ayrıca bu asimptotik eşitliklerin her biri x-değişkenine göre $\phi_{1\lambda}(x)$ için $[-1,0]$ aralığında $\phi_{2\lambda}(x)$ için ise $[0,1]$ aralığında düzgün olarak geçerlidir.

İspat : Önce $\sin\alpha \neq 0$ için $\phi_{1\lambda}(x)$-in asimptotiğini bulalım.

$$F_{1\lambda}(x) := \exp\left(\frac{-|t|(x+1)}{a_1} \right) \phi_{1\lambda}(x) \qquad \mathbf{(5.5.25)}$$

ile gösterelim. O halde $F_{1\lambda}(x)$ fonksiyonu

$$F_{1\lambda}(x) = \sin\alpha\cos\frac{s(x+1)}{a_1} e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}} - \frac{a_1}{s}\cos\alpha\sin\frac{s(x+1)}{a_1} e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}}$$

$$+\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x} \sin\frac{s(x-y)}{a_1} q(y)\phi_{1\lambda}(y) e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}} dy$$

$$= \sin\alpha\cos\frac{s(x+1)}{a_1} e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}} - \frac{a_1}{s}\cos\alpha\sin\frac{s(x+1)}{a_1} e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}}$$

$$+\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x} \sin\frac{s(x-y)}{a_1} q(y) F_{1\lambda}(y) e^{\frac{|t|(y+1)}{a_1}} e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}} dy$$

$$= \sin\alpha\cos\frac{s(x+1)}{a_1} e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}} - \frac{a_1}{s}\cos\alpha\sin\frac{s(x+1)}{a_1} e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}}$$

$$+\frac{1}{sa_1}\int_{-1}^{x} \sin\frac{s(x-y)}{a_1} q(y) F_{1\lambda}(y)\, e^{\frac{-|t|(x-y)}{a_1}} dy \qquad \mathbf{(5.5.26)}$$

integral denklemini sağlar. Bu durumda (5.5.26) eşitliğinden

$$\left|F_{1\lambda}(x)\right| \le \left|\sin\alpha\right|\left|\cos\frac{s(x+1)}{a_1}\right| e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}} + \frac{a_1}{|s|}\left|\cos\alpha\right|\left|\sin\frac{s(x+1)}{a_1}\right| e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}}$$

$$+\frac{1}{|s|a_1}\int_{-1}^{x}\left|\sin\frac{s(x-y)}{a_1}\right|\left|q(y)\right|\left|F_{1\lambda}(y)\right| e^{\frac{-|t|(x-y)}{a_1}}dy$$

$$\le \left|\sin\alpha\right| e^{\frac{|t|(x+1)}{a_1}} e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}} + \frac{a_1}{|s|}\left|\cos\alpha\right| e^{\frac{|t|(x+1)}{a_1}} e^{\frac{-|t|(x+1)}{a_1}}$$

$$+\frac{1}{|s|a_1}\int_{-1}^{x} e^{\frac{|t|(x-y)}{a_1}}\left|q(y)\right|\left|F_{1\lambda}(y)\right| e^{\frac{-|t|(x-y)}{a_1}}dy$$

$$\le \left|\sin\alpha\right| + \frac{a_1}{|s|}\left|\cos\alpha\right| + \frac{1}{|s|a_1}\int_{-1}^{x}\left|q(y)\right|\left|F_{1\lambda}(x)\right|dy$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$M_1(\lambda) := \max_{x\in[-1,0]}\left|F_{1\lambda}(x)\right| \qquad \textbf{(5.5.27)}$$

ile gösterirsek, sonuncu eşitsizlikten

$$M_1(\lambda) \le \left|\sin\alpha\right| + \frac{a_1}{|s|}\left|\cos\alpha\right| + \frac{M_1(\lambda)}{a_1|s|}\int_{-1}^{0}\left|q(y)\right|dy$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizliği

$$M_1(\lambda)\left[1-\frac{1}{a_1|s|}\int_{-1}^{0}\left|q(y)\right|dy\right] \le \left|\sin\alpha\right| + \frac{a_1}{|s|}\left|\cos\alpha\right|$$

biçiminde yazarsak

$$|s| > \frac{2}{a_1}\int_{-1}^{0}\left|q(y)\right|dy =: r_0 \qquad \textbf{(5.5.28)}$$

için

$$M_1(\lambda) < \frac{\left|\sin\alpha\right| + \frac{a_1}{|s|}\left|\cos\alpha\right|}{1-\frac{1}{a_1|s|}\int_{-1}^{0}\left|q(y)\right|dy} < 2\left(\left|\sin\alpha\right| + \frac{a_1\left|\cos\alpha\right|}{r_0}\right) := M_0 \qquad \textbf{(5.5.29)}$$

bulunur. Dolayısıyla $r_0 > 0$ sayısı (5.5.28) ile tanımlamak üzere $|s| > r_0$ için (5.5.25), (5.5.27) ve (5.5.29) ifadelerinden

$$\left|\phi_{1\lambda}(x)\right| \le M_0 \exp\left(\frac{|t|(x+1)}{a_1}\right) \tag{5.5.30}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $[-1,0]$ aralığında x-değişkenine göre (5.5.21) asimptotiğinin k=0 için sağlandığını gösterir.

Şimdi (5.5.21) eşitliğinin k=1 için doğruluğunu ispatlayalım.

(5.5.30) eşitsizliği ve Sonuç 5.5.4 gereğince $|s| > r_0$ için

$$\phi'_{1\lambda}(x) = -\frac{\sin\alpha.s}{a_1}\sin\frac{s(x+1)}{a_1} - \cos\alpha\cos\frac{s(x+1)}{a_1} + \frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{x}\cos\frac{s(x-y)}{p_1}q(y)\phi_{1\lambda}(y)\,dy$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\left|\phi'_{1\lambda}(x)\right| &\le \frac{|\sin\alpha||s|}{a_1}\left|\sin\frac{s(x+1)}{a_1}\right| + |\cos\alpha|\left|\cos\frac{s(x+1)}{a_1}\right| \\
&\quad + \frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{x}\left|\cos\frac{s(x-y)}{a_1}\right||q(y)||\phi_{1\lambda}(y)|\,dy \\
&\le \left|\frac{\sin\alpha}{a_1}\right||s|e^{\frac{|t|(x+1)}{a_1}} + |\cos\alpha|e^{\frac{|t|(x+1)}{a_1}} + \frac{1}{a_1^2}\int_{-1}^{x}e^{\frac{|t|(x-y)}{a_1}}|q(y)|M_0e^{\frac{|t|(y+1)}{a_1}}dy \\
&\le \left(\frac{|\sin\alpha|}{a_1}|s| + |\cos\alpha|\right)e^{\frac{|t|(x+1)}{a_1}} + \frac{M_0}{a_1^2}\int_{-1}^{0}e^{\frac{|t|(x-y+y+1)}{a_1}}|q(y)|\,dy \\
&\le \left(\frac{|\sin\alpha|}{a_1}|s| + |\cos\alpha| + \frac{M_0}{a_1^2}\int_{-1}^{0}|q(y)\,dy|\right)e^{\frac{|t|(x+1)}{a_1}} \\
&\le \left(\frac{|\sin\alpha|}{a_1} + \frac{|\cos\alpha|}{r_0} + \frac{M_0}{a_1^2 r_0}\int_{-1}^{0}|q(y)\,dy|\right)|s|e^{\frac{|t|(x+1)}{a_1}}
\end{aligned} \tag{5.5.31}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece (5.5.21) asimptotik eşitliğinin k=1 için de doğruluğu ispatlanmış oldu. (5.5.22) formülünü ispatlamak için önce yazının kısalığı hatırına

$$M_0' := \frac{|\sin\alpha|}{a_1} + \frac{|\cos\alpha|}{r_0} + \frac{M_0}{a_1^2 r_0}\int_{-1}^{0}|q(y)\,dy|$$

ile göstererek (5.5.31) eşitsizliğini

$$\left|\phi_{1\lambda}'(x)\right| \le M_0' |s| \exp\left(\frac{|t|(x+1)}{a_1}\right) \qquad \textbf{(5.5.32)}$$

şeklinde yazalım ve

$$F_{2\lambda}(x) := \exp\left(-\frac{|t|(a_1 x + a_2)}{a_1 a_2}\right)\phi_{2\lambda}(x) \qquad \textbf{(5.5.33)}$$

ile gösterelim.

O halde $F_{2\lambda}(x)$ fonksiyonu

$$F_{2\lambda}(x) = \left[\phi_{1\lambda}(-0)\cos\frac{sx}{a_2} + \frac{a_2}{s}\phi_{1\lambda}'(-0)\sin\frac{sx}{a_2} + \frac{1}{a_2 s}\int_0^x \sin\frac{s(x-y)}{a_2} q(y)\phi_{2\lambda}(y)\,dy\right]$$
$$\exp\left(-\frac{|t|(a_1 x + a_2)}{a_1 a_2}\right)$$
$$= \left(\phi_{1\lambda}(-0)\cos\frac{sx}{a_2} + \frac{a_2}{s}\phi_{1\lambda}'(-0)\sin\frac{sx}{a_2}\right)e^{\left(-\frac{|t|(a_1 x + a_2)}{a_1 a_2}\right)}$$
$$+\frac{1}{a_2 s}\int_0^x \sin\frac{s(x-y)}{a_2} q(y) F_{2\lambda}(y) e^{\left(-\frac{|t|(x-y)}{a_2}\right)} dy$$

integral denklemini sağlar.

(5.5.30) ve (5.5.32) eşitliklerinden yararlanarak, buradan $|s| > r_0$ için

$$|F_{2\lambda}(x)| \le \left(|\phi_{1\lambda}(-0)|\left|\cos\frac{sx}{a_2}\right| + \frac{a_2}{|s|}|\phi_{1\lambda}'(-0)|\left|\sin\frac{sx}{a_2}\right|\right)e^{\left(-\frac{|t|(a_1 x + a_2)}{a_1 a_2}\right)}$$
$$+\frac{1}{a_2|s|}\int_0^x \left|\sin\frac{s(x-y)}{a_2}\right| |q(y)||F_{2\lambda}(y)| e^{-\frac{|t|(x-y)}{a_2}} dy$$
$$\le |\phi_{1\lambda}(-0)| e^{\frac{|t|x}{a_2}} e^{-\frac{|t|(a_1 x + a_2)}{a_1 a_2}} + \frac{a_2}{|s|}|\phi_{1\lambda}'(-0)| e^{\frac{|t|x}{a_2}} e^{-\frac{|t|(a_1 x + a_2)}{a_1 a_2}}$$
$$+\frac{1}{a_2|s|}\int_0^x e^{\frac{|t|(x-y)}{a_2}} |q(y)||F_{2\lambda}(y)| e^{-\frac{|t|(x-y)}{a_2}} dy$$

$$\leq \left|\phi_{1\lambda}(-0)\right| e^{-\frac{|t|}{a_1}} + \frac{a_2}{|s|}\left|\phi'_{1\lambda}(-0)\right| e^{-\frac{|t|}{a_1}} + \frac{1}{a_2|s|}\int_0^x |q(y)||F_{2\lambda}(y)|\,dy$$

$$\leq \left(\left|\phi_{1\lambda}(-0)\right| + \frac{a_2}{|s|}\left|\phi'_{1\lambda}(-0)\right|\right) e^{-\frac{|t|}{a_1}} + \frac{1}{a_2|s|}\int_0^x |q(y)||F_{2\lambda}(y)|\,dy$$

$$\leq \left(M_0 + a_2 M'_0\right) + \frac{1}{a_2|s|}\int_0^x |q(y)||F_{2\lambda}(y)|\,dy$$

elde edilir.

$$M_2(\lambda) := \max_{x\in[0,1]} |F_{2\lambda}(y)|$$

$$A := M_0 + a_2 M'_0$$

$$B := \frac{1}{a_2}\int_0^1 |q(y)|\,dy$$

gösterimlerini kullanarak sonuncu eşitsizlik gereği

$$M_2(\lambda) \leq A + \frac{B}{|s|} M_2(\lambda)$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $|s| > 2B$ için

$$M_2(\lambda) \leq 2A$$

ve dolayısıyla

$$\left|\phi_{2A}(x)\right| \leq 2A \exp\frac{|t|(a_1 x + a_2)}{a_1 a_2} \qquad \textbf{5.5.34)}$$

elde edilir. Bu ise (5.5.22) formülünün k=0 için doğru olduğunu gösterir. Öteki durumlar benzer şekilde ispatlanır.

Yukarıda (5.5.21) formülünün k=0 için doğruluğundan yararlanarak k=1 için doğruluğunu ispat etmiştik. Aynı yöntemi takip etmekle, (5.5.22) formülünün de k=0 için doğruluğundan yararlanarak k=1 için doğruluğu benzer şekilde ispatlanır.

$\sin\alpha = 0$ durumu, $\sin\alpha \neq 0$ durumuna tam benzer şekilde ispatlanır.

5. 5. 8 Teorem :

$\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ ile gösterelim. O halde öyle $s_0 > 0$ vardır ki $|s| > s_0$ için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

1) $\sin\beta \neq 0$ ise

$$\chi_{1\lambda}^{(k)}(x) = 0\left(|s|^k \exp\frac{|t|(a_1 - a_2 x)}{a_1 a_2}\right), \qquad k=0,1 \qquad \textbf{(5.5.35)}$$

$$\chi_{2\lambda}^{(k)}(x) = 0\left(|s|^k \exp\frac{|t|(1-x)}{a_2}\right), \qquad k=0,1 \qquad \textbf{(5.5.36)}$$

2) $\sin\beta = 0$ ise

$$\chi_{1\lambda}^{(k)}(x) = 0\left(|s|^{k-1} \exp\frac{|t|(a_1 - a_2 x)}{a_1 a_2}\right) \qquad k=0,1 \qquad \textbf{(5.5.37)}$$

$$\chi_{2\lambda}^{(k)}(x) = 0\left(|s|^{k-1} \exp\left(\frac{|t|(1-x)}{a_2}\right)\right), \qquad k=0,1 \qquad \textbf{(5.5.38)}$$

Ayrıca,bu asimptotik eşitliklerin her biri x-değişkenine göre $\chi_{1\lambda}(x)$ için $[-1,0]$ aralığında $\chi_{2\lambda}(x)$ için ise $[0,1]$ aralığında düzgün olarak geçerlidirler.

Not: Önce (5.5.36) formülü, (5.5.21) formülüne benzer şekilde ispatlanır. Daha sonra, (5.5.21) formülünden yararlanarak, (5.5.22) formülünün çıkarılmasında uyguladığımız yöntemi uygulamakla, benzer şekilde (5.5.36) formülünden yararlanarak (5.5.35) formülü çıkarılır.

$\sin\beta = 0$ durumu , $\sin\beta \neq 0$ durumuna tam benzer şekilde ispatlanır. Bununla da Lemma 5.5.8 ispatlanmış olur.

5. 5. 9 Teorem :

$\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ ile gösterelim. O halde öyle $s_0 > 0$ vardır ki $|s| > s_0$ için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

1) $\sin\alpha \neq 0$ ise

$$\phi_{1\lambda}(x)=\sin\alpha\cos\frac{s(x+1)}{a_1}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(x+1)}{a_1}\right) \tag{5.5.39}$$

$$\phi'_{1\lambda}(x)=-\frac{\sin\alpha}{a_1}s\sin\frac{s(x+1)}{a_1}+0\left(\exp\frac{|t|(x+1)}{a_1}\right) \tag{5.5.40}$$

$$\phi_{2\lambda}(x)=a_2\sin\alpha\left(\frac{1}{a_2}\cos\frac{sx}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}-\frac{1}{a_1}\sin\frac{sx}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(a_1x+a_2)}{a_1a_2}\right) \tag{5.5.41}$$

$$\phi'_{2\lambda}(x)=-\sin\alpha s\left(\frac{1}{a_2}\sin\frac{sx}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}+\frac{1}{a_1}\cos\frac{sx}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(\exp\frac{|t|(a_1x+a_2)}{a_1a_2}\right) \tag{5.5.42}$$

2) $\sin\alpha=0$ ise

$$\phi_{1\lambda}(x)=-\frac{a_1}{s}\cos\alpha\sin\frac{s(x+1)}{a_1}+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|(x+1)}{a_1}\right) \tag{5.5.43}$$

$$\phi'_{1\lambda}(x)=-\cos\alpha\cos\frac{s(x+1)}{a_1}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(x+1)}{a_1}\right) \tag{5.5.44}$$

$$\phi_{2\lambda}(x)=-\frac{\cos\alpha}{s}\left(a_1\cos\frac{sx}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}+a_2\sin\frac{sx}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|(a_1x+a_2)}{a_1a_2}\right) \tag{5.5.45}$$

$$\phi'_{2\lambda}(x)=a_1\cos\alpha\left(\frac{1}{a_2}\sin\frac{sx}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}-\frac{1}{a_1}\cos\frac{sx}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(a_1x+a_2)}{a_1a_2}\right) \tag{5.5.46}$$

Ayrıca bu asimptotik eşitliklerin her biri x-değişkenine göre düzgün olarak geçerlidirler.

İspat : $\sin\alpha \neq 0$ olsun. O halde k=0 için (5.5.30) formülünü, Sonuç 5.5.2 deki ifadenin integral kısmında dikkate alırsak yeteri kadar büyük $|s|$-ler için

$$\left|\int_{-1}^{x}\sin\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)\phi_{1\lambda}(y)dy\right| \le \int_{-1}^{x}\left|\sin\frac{s(x-y)}{a_1}\right||q(y)||\phi_{1\lambda}(y)|dy$$

$$\le M_0\int_{-1}^{x}\exp\frac{|t|(x-y)}{a_1}|q(y)|\exp\frac{|t|(y+1)}{a_1}dy$$

$$\le M_0\exp\frac{|t|(x+1)}{a_1}\int_{-1}^{0}|q(y)|dy$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buna göre,

$$\int_{-1}^{x}\sin\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)\phi_{1\lambda}(y)dy = 0\left(\exp\frac{|t|(x+1)}{a_1}\right) \qquad \textbf{(5.5.47)}$$

asimptotik eşitliği sağlanır. Bunu Sonuç 5.5.2 deki ifadede dikkate alırsak kolayca (5.5.39) formülünü elde ederiz. (5.5.40) formülü (5.5.39) formülüne benzer şekilde ispatlanır.

Şimdi (5.5.41) formülünü çıkaralım :

(5.5.21) dan yararlanarak (5.5.47) formülünü elde ettiğimiz yöntemle benzer şekilde, (5.5.22) den yararlanarak, kolayca

$$\int_{0}^{x}\sin\frac{s(x-y)}{a_2}q(y)\phi_{2\lambda}(y)dy = 0\left(\exp\frac{|t|(a_1x+a_2)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.5.48)}$$

bulunur.

(5.5.39), (5.5.40) ve (5.5.48) asimptotik eşitliklerini Teorem (5.5.5) deki $\phi_{2\lambda}(x)$ ifadesinde dikkate alırsak

$$\phi_{2\lambda}(x) = \cos\frac{sx}{a_2}\left(\sin\alpha\cos\frac{s}{a_1} + 0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|}{a_1}\right)\right)$$

$$+\frac{a_2}{s}\sin\frac{sx}{a_2}\left(-\frac{\sin\alpha}{a_1}s\sin\frac{s}{a_1} + 0\left(\exp\frac{|t|}{a_1}\right)\right)$$

$$+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\left(a_1x+a_2\right)}{a_1a_2}\right),$$

$$\phi_{2\lambda}\left(x\right)=a_2\sin\alpha\left(\frac{1}{a_2}\cos\frac{sx}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}-\frac{1}{a_1}\sin\frac{sx}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)+e^{\frac{|t|x}{a_2}}0\left(|s|^{-1}e^{\frac{|t|}{a_1}}\right)$$

$$+a_2e^{\frac{|t|x}{a_2}}0\left(|s|^{-1}e^{\frac{|t|}{a_1}}\right)+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\left(a_1x+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

$$=a_2\sin\alpha\left(\frac{1}{a_2}\cos\frac{sx}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}-\frac{1}{a_1}\sin\frac{sx}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)+0\left(|s|^{-1}e^{|t|\left(\frac{x}{a_2}+\frac{1}{a_1}\right)}\right)$$

$$+a_20\left(|s|^{-1}e^{|t|\left(\frac{x}{a_2}+\frac{1}{a_1}\right)}\right)+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\left(a_1x+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

$$=a_2\sin\alpha\left(\frac{1}{a_2}\cos\frac{sx}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}-\frac{1}{a_1}\sin\frac{sx}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)+0\left(|s|^{-1}e^{\frac{|t|\left(a_1x+a_2\right)}{a_1a_2}}\right)+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\left(a_1x+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

$$=a_2\sin\alpha\left(\frac{1}{a_2}\cos\frac{sx}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}-\frac{1}{a_1}\sin\frac{sx}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\left(a_1x+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

bulunur. Böylece (5.5.41) formülü de ispatlanmış olur.

(5.5.42) formülü (5.5.41) formülünün ispatına benzer şekilde ispatlanır.

Şimdi $\sin\alpha=0$ durumunu inceleyelim.

(5.5.43) ve (5.5.44) formülleri (5.5.39) ve (5.5.40) formüllerinin ispatına benzer yöntem ile bulunur.

(5.5.45) formülünü çıkaralım:

Bu durumda, (5.5.48) formülünün çıkarılışına benzer şekilde,

$$\int_0^x\sin\frac{s\left(x-y\right)}{a_2}q\left(y\right)\phi_{2\lambda}\left(y\right)dy=0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\left(a_1x+a_2\right)}{a_1a_2}\right)\qquad\textbf{(5.5.49)}$$

asimptotik eşitliği bulunur. O halde (5.5.43), (5.5.44) ve (5.5.49) asimptotik eşitliklerini Teorem 5.5.5'deki $\phi_{2\lambda}(x)$ ifadesinde dikkate alırsak,

$$\phi_{2\lambda}(x)=\left(-\frac{a_1}{s}\cos\alpha\sin\frac{s}{a_1}+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|}{a_1}\right)\right)\cos\frac{sx}{a_2}$$

$$+\frac{a_2}{s}\sin\frac{sx}{a_2}\left(-\cos\alpha\cos\frac{s}{a_1}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|}{a_1}\right)\right)+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|\,\left(a_1x+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

$$=-\frac{a_1}{s}\cos\alpha\sin\frac{s}{a_1}\cos\frac{sx}{a_2}-\cos\alpha\frac{a_2}{s}\cos\frac{s}{a_1}\sin\frac{sx}{a_2}+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|\,\left(a_1x+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

$$=-\frac{\cos\alpha}{s}\left(a_1\sin\frac{s}{a_1}\cos\frac{sx}{a_2}+a_2\cos\frac{s}{a_1}\sin\frac{sx}{a_2}\right)+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|\,\left(a_1x+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

elde edilir.

(5.5.46) formülü, 52.5.33) formülüne benzer şekilde ispatlanır.

5. 5. 10 Teorem :

$\lambda=s^2$, $s=\sigma+it$ ile gösterelim. O halde öyle $s_0>0$ vardır ki $|s|>s_0$ için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

1) $\sin\beta\neq 0$ ise

$$\chi_{1\lambda}(x)=-a_1\sin\beta\left(\frac{1}{a_1}\cos\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}+\frac{1}{a_2}\sin\frac{sx}{a_2}\sin\frac{s}{a_2}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\,\left(a_1-a_2x\right)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.5.50)}$$

$$\chi'_{1\lambda}(x)=\frac{s\sin\beta}{a_1}\left(\sin\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}+\frac{1}{a_2}\cos\frac{sx}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}\right)$$

$$+0\left(\exp\frac{|t|\,\left(a_1-a_2x\right)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.5.51)}$$

$$\chi_{2\lambda}(x)=-\sin\beta\ \cos\frac{s\left(x-1\right)}{a_2}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\,\left(1-x\right)}{a_2}\right) \qquad \textbf{(5.5.52)}$$

$$\chi'_{2\lambda}(x)=\frac{s}{a_2}\sin\beta\ \ \sin\frac{s\ (x-1)}{a_2}+0\left(\exp\frac{|\ t|\ \ (1-x)}{a_2}\right) \quad \textbf{(5.5.53)}$$

2) $\sin\beta=0$ ise

$$\chi_{1\lambda}(x)=\frac{\cos\beta}{s}\left(-a_2\cos\frac{sx}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}+a_1\sin\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|\ t|\ \ (a_1-a_2x)}{a_1a_2}\right) \quad \textbf{(5.5.54)}$$

$$\chi'_{1\lambda}(x)=\cos\beta\left(\frac{a_2}{a_1}\sin\frac{sx}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}+\cos\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|\ t|\ \ (a_1-a_2x)}{a_1a_2}\right) \quad \textbf{(5.5.55)}$$

$$\chi_{2\lambda}(x)=\frac{a_2}{s}\cos\beta\ \ \sin\frac{s\ \ (x-1)}{a_2}+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|\ t|\ \ (1-x)}{a_2}\right) \quad \textbf{(5.5.56)}$$

$$\chi'_{2\lambda}(x)=\cos\beta\ \cos\frac{s\ \ (x-1)}{a_2}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|\ t|\ \ (1-x)}{a_2}\right) \quad \textbf{(5.5.57)}$$

Ayrıca bu asimptotik ifadelerin her biri x-değişkenine göre $\chi_{1\lambda}(x),\ \chi'_{1\lambda}(x)$ için [-1,0] aralığında, $\chi_{2\lambda}(x),\ \chi'_{2\lambda}(x)$ için ise [0,1] aralığında düzgün olarak geçerlidirler.

İspat : $\sin\beta\neq 0$ için önce (5.5.52) formülünü çıkaralım.

k=0 için yazılmış (5.5.36) asimptotiğinden yararlanarak Teorem 5.5.6 daki $\chi_{2\lambda}$ ifadesini göz önüne alalım.

$$\chi_{2\lambda}(x)=-\sin\beta\cos\frac{s(x-1)}{a_2}+\frac{a_2}{s}\cos\beta\sin\frac{s(x-1)}{a_2}$$

$$-\frac{1}{a_2s}\int_x^1\sin\frac{s(x-y)}{a_2}q(y)0\left(\exp\frac{|\ t|\ \ (1-y)}{a_2}\right)dy$$

$$=-\sin\beta\cos\frac{s(x-1)}{a_2}+a_2\cos\beta\,0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\ (1-x)}{a_2}\right)$$
$$-\frac{1}{a_2 s}\int_x^1 q(y)0\left(\exp\frac{|t|\ (y-x)}{a_2}\right)0\left(\exp\frac{|t|\ (1-y)}{a_2}\right)dy$$

$$=-\sin\beta\cos\frac{s(x-1)}{a_2}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\ (1-x)}{a_2}\right)$$
$$+\frac{1}{a_2 s}\int_1^x q(y)0\left(\exp\frac{|t|\ (1-y+y-x)}{a_2}\right)dy$$

$$=-\sin\beta\cos\frac{s(x-1)}{a_2}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\ (1-x)}{a_2}\right)$$
$$+\frac{1}{a_2 s}\int_1^x q(y)0\left(\exp\frac{|t|\ (1-x)}{a_2}\right)dy$$
$$=-\sin\beta\cos\frac{s(x-1)}{a_2}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|\ (1-x)}{a_2}\right)$$

asimptotiği bulunur. k=1 için yazılmış (5.5.36) eşitliğinden yararlanarak Teorem 5.5.6 daki $\chi'_{2\lambda}(x)$ eşitliğinden benzer yöntemle (5.5.53) formülü elde edilir.

Şimdi (5.5.50) formülünü çıkaralım :

Daha önce ispatlanmış olan (5.5.52) ve (5.5.53) formüllerinden

$$\chi_{2\lambda}(+0)=-\sin\beta\cos\frac{s}{a_2}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|}{a_2}\right)$$
$$\chi'_{2\lambda}(+0)=-\frac{s}{a_2}\sin\beta\sin\frac{s}{a_2}+0\left(\exp\frac{|t|}{a_2}\right)$$

elde ederiz. Bunları Teorem 5.5.6 daki $\chi_{1\lambda}(x)$ eşitliğinde yerine yazıp (5.5.35) formülünden yararlanılırsa,

$$\chi_{1\lambda}(x)=\cos\frac{sx}{a_1}\left(-\sin\beta\cos\frac{s}{a_2}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|}{a_2}\right)\right)$$
$$+\frac{a_1}{s}\sin\frac{sx}{a_1}\left(-\frac{s}{a_2}\sin\beta\sin\frac{s}{a_2}+0\left(\exp\frac{|t|}{a_2}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{a_1 s}\int_x^0\cos\frac{s(x-y)}{a_1}q(y)0\left(\exp\frac{|t|(a_1-a_2y)}{a_1a_2}\right)dy$$

$$=-\sin\beta\cos\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}-\frac{a_1}{a_2}\sin\beta\sin\frac{sx}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}+\cos\frac{sx}{a_1}0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|}{a_2}\right)$$
$$+\frac{a_1}{s}\sin\frac{sx}{a_1}0\left(\exp\frac{|t|}{a_2}\right)-\frac{1}{a_1 s}\int_x^0 0\left(\exp\frac{|t|(y-x)}{a_1}\right)q(y)0\left(\exp\frac{|t|(a_1-a_2y)}{a_1a_2}\right)dy$$

$$=-\sin\beta\cos\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}-\frac{p_1}{a_2}\sin\beta\sin\frac{sx}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}+0\left(\exp\frac{-|t|x}{a_1}\right)0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|}{a_2}\right)$$
$$+a_1 0\left(|s|^{-1}\exp\frac{-|t|x}{a_1}\right)0\left(\exp\frac{|t|}{a_2}\right)-\frac{1}{a_1 s}\int_x^0 q(y)0\left(\exp\frac{|t|(a_2y-a_2x+a_1-a_2y)}{a_1a_2}\right)dy$$

$$=-\sin\beta\cos\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}-\frac{a_1}{a_2}\sin\beta\sin\frac{sx}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(a_1-a_2x)}{a_1a_2}\right)$$

bulunur. Böylece (5.5.50) formülü ispatlanmış oldu. Teorem 5.5.6 daki $\chi'_{1\lambda}(x)$ eşitliğinin sağ tarafındaki terimlerin asimptotik ifadeleri, aynı yöntemle bulunarak (5.5.51) formülü de kolayca elde edilir.

Şimdi $\sin\beta=0$ durumunu inceleyelim.

Önce (5.5.56) formülünü çıkaracağız. (5.5.38) formülünü Teorem 5.5.6 deki $\chi_{2\lambda}(x)$ ifadesinin sağ tarafındaki integral ifadesinde yerine yazarsak, mutlak değerce yeteri kadar büyük $|s|$ - ler için

$$\int_x^1\sin\frac{s(x-y)}{a_2}q(y)\ \chi_{2\lambda}(y)dy=\int_x^1 q(y)0\left(\exp\frac{|t|(y-x)}{a_2}\right)0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(1-y)}{a_2}\right)dy$$

$$=\int_x^1 q(y)\,0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(y-x+1-y)}{a_2}\right)dy$$

$$=\int_x^1 q(y)\,0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(1-x)}{a_2}\right)dy$$

$$=0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(1-x)}{a_2}\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Bunu $\chi_{2\lambda}(x)$- de yerine yazarsak

$$\chi_{2\lambda}(x)=\frac{a_2}{s}\cos\beta\sin\frac{s(x-1)}{a_2}+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|(1-x)}{a_2}\right)$$

buluruz.

Benzer şekilde (5.5.57) formülü de ispatlanabilir. (5.5.54) formülünü bulmak için Teorem 5.5.6 - daki $\chi_{1\lambda}(x)$ ifadenin sağ tarafında $\chi_{2\lambda}(+0)$, $\chi'_{2\lambda}(+0)$ yerine sırasıyla bulmuş olduğumuz (5.5.56) ve (5.5.57) formüllerinden özel olarak elde edilen

$$\chi_{2\lambda}(+0)=-\frac{a_2}{s}\cos\beta\sin\frac{s}{a_2}+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|}{a_2}\right)$$

$$\chi'_{2\lambda}(+0)=\cos\beta\cos\frac{s}{a_2}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|}{a_2}\right)$$

asimptotik ifadelerini, integral işareti altındaki $\chi_{1\lambda}(y)$ yerine ise (5.5.37) formülündeki

$$\chi_{1\lambda}(y)=0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(a_1-a_2y)}{a_1a_2}\right)$$

asimptotik ifadeyi yazarak gerekli işlemleri yaparsak

$$\chi_{1\lambda}(x)=\cos\frac{sx}{a_1}\left(-\frac{a_2}{s}\cos\beta\sin\frac{s}{a_2}+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|}{a_2}\right)\right)$$

$$+\frac{a_1}{s}\sin\frac{sx}{a_1}\left(\cos\beta\cos\frac{s}{a_2}+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|}{a_2}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{a_1s}\int_x^0 0\left(\exp\frac{|t|(y-x)}{a_1}\right)q(y)\,0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(a_1-a_2y)}{a_1a_2}\right)dy$$

$$=-\frac{a_2}{s}\cos\beta\cos\frac{sx}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}+\frac{a_1}{s}\cos\beta\sin\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|(a_1-a_2x)}{a_1a_2}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|(a_1-a_2x)}{a_1a_2}\right)+\frac{1}{a_1s}\int_0^x q(y)\,0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(a_2y-a_2x+a_1-a_2y)}{a_1a_2}\right)dy$$

$$=\frac{\cos\beta}{s}\left(-a_2\cos\frac{sx}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}+a_1\sin\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}\right)+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|(a_1-a_2x)}{a_1a_2}\right)$$

$$+\frac{1}{a_1s}\int_0^x q(y)\,0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(a_1-a_2x)}{a_1a_2}\right)dy$$

$$=\frac{\cos\beta}{s}\left(-a_2\cos\frac{sx}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}+a_1\sin\frac{sx}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}\right)+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|(a_1-a_2x)}{a_1a_2}\right)$$

formülünü elde ederiz. Benzer şekilde (5.5.55) formülü ispatlanır. Böylece (5.5.10) un ispatı biter.

5.6. Karakteristik Fonksiyonun Asimptotiği

Verilmiş problemin özdeğerleri $\omega(\lambda)$- nın sıfır yerlerinden ibaret olduğu için önce $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun asimptotik ifadesini bulacağız. Daha sonra bu asimptotik ifadeden yararlanarak özdeğerler için asimptotik formüller elde edeceğiz.

5.6.1 Teorem

$\omega(\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir.

1) $\sin\beta\neq 0$ ve $\sin\alpha\neq 0$

$$\omega(\lambda)=-\sin\alpha\sin\beta\, s\left(\frac{1}{a_2}\sin\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}+\frac{1}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.6.1)}$$

2) $\sin\beta \neq 0$ ve $\sin\alpha = 0$

$$\omega(\lambda) = a_1 \sin\beta \cos\alpha \left(\frac{1}{a_2} \sin\frac{s}{a_2} \sin\frac{s}{a_1} - \frac{1}{a_1} \cos\frac{s}{a_2} \cos\frac{s}{a_1} \right)$$

$$+0\left(|s|^{-1} \exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1 a_2} \right) \qquad \textbf{(5.6.2)}$$

3) $\sin\beta = 0$ ve $\sin\alpha = 0$

$$\omega(\lambda) = -\frac{\cos\beta\cos\alpha}{s} \left(a_1 \cos\frac{s}{a_2} \sin\frac{s}{a_1} + a_2 \sin\frac{s}{a_2} \cos\frac{s}{a_1} \right)$$

$$+0\left(|s|^{-2} \exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1 a_2} \right) \qquad \textbf{(5.6.3)}$$

4) $\sin\beta = 0$ ve $\sin\alpha \neq 0$

$$\omega(\lambda) = a_2 \cos\beta \sin\alpha \left(\frac{1}{a_2} \cos\frac{s}{a_1} \cos\frac{s}{a_2} - \frac{1}{a_1} \sin\frac{s}{a_1} \sin\frac{s}{a_2} \right)$$

$$+0\left(|s|^{-1} \exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1 a_2} \right) \qquad \textbf{(5.6.4)}$$

İspat :

$$\omega(\lambda) = l_2(\phi_{2\lambda})$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Buradan

$$\omega(\lambda) = \cos\beta\,\phi_{2\lambda}(1) + \sin\beta\,\phi'_{2\lambda}(1) \qquad \textbf{(5.6.5)}$$

eşitliği elde edilir.

1) $\sin\alpha \neq 0$ ve $\sin\beta \neq 0$, olduğu durumları araştıralım. $\lambda = s^2$ olduğunu da dikkate alarak (5.5.41) ve (5.5.42) asimptotik eşitliklerini (5.6.5) de yerine yazalım.

$$\cos\beta\,\phi_{2\lambda}(1)=a_2\cos\beta\sin\alpha\left(\frac{1}{a_2}\cos\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}-\frac{1}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.6.6)}$$

$$\sin\beta\,\phi'_{2\lambda}(1)=-\sin\beta\sin\alpha\, s\left(\frac{1}{a_2}\sin\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}-\frac{1}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.6.7)}$$

(5.6.6) ve (5.6.7)’i (5.6.5)’de yerine yazarsak

$$\omega(\lambda)=-\sin\beta\sin\alpha\, s\left(\frac{1}{a_2}\sin\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}+\frac{1}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.6.8)}$$

2) $\sin\beta\neq 0$ ve $\sin\alpha=0$ durumunu araştıralım.

Bu durumda $\cos\alpha\neq 0$ olacaktır. Yine (5.6.5) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadeleri ayrı ayrı değerlendireceğiz. Fakat bu sefer (5.5.24) ve (5.5.46) formüllerinden yaralanmamız gerekecek.

(5.5.46) gereği

$$\cos\beta\,\phi_{2\lambda}(1)=-\frac{\cos\beta\cos\alpha}{s}\left(a_1\cos\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}+a_2\sin\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.6.9)}$$

$$\sin\beta\,\phi'_{2\lambda}(1)=\sin\beta\, a_1\cos\alpha\left(\frac{1}{a_2}\sin\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}-\frac{1}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.6.10)}$$

(5.6.9) ve (5.6.10)’i (5.6.5) de yerine yazarsak

$$\omega(\lambda)=\sin\beta\, a_1\cos\alpha\left(\frac{1}{a_2}\sin\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}-\frac{1}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.6.11)}$$

asimptotik formülü elde edilir.

3) $\sin\alpha=0$ ve $\sin\beta=0$ durumunu incelelim. $\lambda=s^2$ olduğunu dikkate alarak (5.5.45) ve (5.5.46) asimptotik eşitliklerini (5.6.5) de yerine yazalım.

$$\omega(\lambda)=\cos\beta\left(\frac{-\cos\alpha}{s}\left(a_1\cos\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}+a_2\sin\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}\right)+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right)\right)$$

$$=-\frac{\cos\beta\,\cos\alpha}{s}\left(a_1\cos\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}+a_2\sin\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-2}\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.6.12)}$$

4) $\sin\alpha\neq 0$ ve $\sin\beta=0$ durumunu inceleyelim. Bu durumda

$$\omega(\lambda)=\cos\beta\;\phi_{2\lambda}(1)$$

olur. (5.5.41) asimptotik eşitliğini yerine yazarsak

$$\omega(\lambda)=\cos\beta\,a_2\sin\alpha\left(\frac{1}{a_2}\cos\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}-\frac{1}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+0\left(|s|^{-1}\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.6.13)}$$

olur.

5.6.2 Teorem :

(5.4.1)-(5.4.5) sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerleri için $\lambda_n\geq K$, $n=0,1,2,3,....$ olacak şekilde K reel sayısı vardır. Yani, özdeğerler aşağıdan sınırlıdır.

İspat : $\sin\alpha\neq 0$ durumunu araştıralım. Bu durumda (5.6.1) ifadesinde $s=it$, $(t>0)$ yazarsak

$$\omega\left(-t^2\right) = -t\sin\alpha\sin\beta\left(\frac{1}{a_2}\sinh\frac{t}{a_2}\cosh\frac{t}{a_1} + \frac{1}{a_1}\cosh\frac{t}{a_2}\sinh\frac{t}{a_1}\right)$$

$$+0\left(\exp\frac{|t|\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2}\right) \qquad \textbf{(5.6.14)}$$

eşitliği elde edilir $\frac{1}{a_2}$ ve $\frac{1}{a_1}$ aynı işaretli olduğundan (5.6.13) formülünden

$$\lim_{t\to\infty}\omega\left(-t^2\right) = \infty$$

olduğunu açıkça görebiliriz. Bundan dolayı $t > t_0$ olduğunda $\omega\left(-t^2\right) \neq 0$ olacak şekilde $t_0 > 0$ sayısı bulunur. Dolayısıyla $\lambda < -t_0^2$ için $\omega\left(\lambda\right) \neq 0$ olacaktır. Buna göre $K = -t_0^2$ olmak üzere $\lambda_n > K$ dır. Diğer durumlar buna benzer olarak ispatlanır.

5.7 Özdeğerler İçin Asimptotik Formüller

Bu bölümde özdeğerlerin asimptotik açılımının ilk terimini hesaplayacağız**.**

5.7.1 Lemma :

Eğer H(z) fonksiyonu z=0 ve $z = \infty$ noktaları hariç her yerde analitik ise $\exists\ \alpha > 0$ için z düzleminin sanal eksenini içeren R bölgesinde $\left(\left\{z\left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| < \alpha, \operatorname{Im} z > o\right\}\text{ ,biçiminde bölgede}\right)$

analitik ise ve de bu bölgede $\left[M\right] = M + O\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ olmak üzere

$$H\left(z\right) \equiv \left[M_1\right]e^{m_1 z} + \left[M_2\right]e^{m_2 z} + \ldots + \left[M_r\right]e^{m_r z}$$

biçiminde asimtotik olarak ifade edilebilirse (burada $M_1 \neq 0$, $M_r \neq 0$ $m_1 < m_2 < \ldots < m_r$) bu durumda

$$H\left(z\right) \equiv \left[M_1\right]e^{m_1 z} + \left[M_2\right]e^{m_2 z} + \ldots + \left[M_r\right]e^{m_r z} = 0$$

denkleminin R bölgesinde sayılabilir sayıda z_k $(|z_1| \le |z_2| \le ...)$ kökleri mevcuttur, bu kökler z – kompleks düzleminin sanal ekseni içeren ve genişliği h olan (D_h) şeridinde yerleşir ve bu kökler için $|z_N| = \dfrac{2\pi n}{m_r - m_1}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ asimtotik eşitliği geçerlidir. (M.A.Rasulov,sayfa 113)

Teorem (5.6.1) de olduğu gibi dört durumun her birini ayrı ayrı araştırmamız gerekecek.

1) $\sin\alpha \neq 0$ ve $\sin\beta \neq 0$ olsun (5.6.1) formülü gereği

$$\omega(\lambda) = -\sin\alpha\sin\beta\, s\left(\frac{1}{a_2}\sin\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1} + \frac{1}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+O\left(\exp\frac{|t|(a_1 + a_2)}{a_1 a_2}\right)$$

fonksiyonunda sinis ve kosinüs degerlerinin yerine $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ve $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ eşitliklerini yazarsak

$$\omega(\lambda) = -\sin\alpha\sin\beta\, s\left(\frac{1}{a_2}\frac{e^{\frac{is}{a_2}} - e^{\frac{-is}{a_2}}}{2i}\frac{e^{\frac{is}{a_1}} + e^{\frac{-is}{a_1}}}{2} + \frac{1}{a_1}\frac{e^{\frac{is}{a_2}} + e^{\frac{-is}{a_2}}}{2}\frac{e^{\frac{is}{a_1}} - e^{\frac{-is}{a_1}}}{2i}\right)$$

$$+O\left(\exp\frac{|t|(a_1 + a_2)}{a_1 a_2}\right)$$

$$\omega(\lambda)=-\sin\alpha\sin\beta\, s\left[\frac{1}{a_2}\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}-e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4i}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{a_1}\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}-e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4i}\right]+O\left(\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right)$$

$\omega(\lambda)$=0 eşitliğinde her iki taraf s ile bölünürse

$$\tilde{\omega}(\lambda)=-\sin\alpha\sin\beta\left[\frac{1}{a_2}\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}-e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4i}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{a_1}\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}-e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4i}\right]+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right)$$

$$\tilde{\omega}(\lambda)=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{4i}\left(-\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}\right.$$

$$\left.+\frac{a_1-a_2}{a_1a_2}e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}+\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}e^{is\frac{-(a_1+a_2)}{a_1a_2}}\right)+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right)$$

$$\tilde{\omega}(\lambda)=\left[-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{4i}\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}\right]e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+\left[\frac{\sin\alpha\sin\beta}{4i}\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}\right]e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}$$

$$+\left[\frac{\sin\alpha\sin\beta}{4i}\frac{a_1-a_2}{a_1a_2}\right]e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}+\left[\frac{\sin\alpha\sin\beta}{4i}\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}\right]e^{is\frac{-(a_1+a_2)}{a_1a_2}}$$

$$+O\left(\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right)$$

$$\tilde{\omega}(\lambda)=\omega_0(\lambda)+\omega_1(\lambda)$$

$$\tilde{\omega}(\lambda) = \omega_0\left(s^2\right) + \omega_1\left(s^2\right)$$

$$\tilde{\omega}(\lambda) \equiv \tilde{\omega}_0(s) + \tilde{\omega}_1(s)$$

$$\tilde{\omega}_0(s) = M_1 e^{m_1\rho} + M_2 e^{m_2\rho} + M_3 e^{m_3\rho} + M_4 e^{m_4\rho} \quad , \quad \rho\text{=is}$$

$$m_4 > m_2 > m_3 > m_1$$

Burada

$$m_1 = -\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}, \dots\ m_4 = \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}$$

$$M_1 = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{4i} s \frac{a_2 + a_1}{a_1 a_2}, \dots, M_4 = -\frac{\sin\alpha \sin\beta}{4i} s \frac{a_2 + a_1}{a_1 a_2} \quad \left(M_1 \neq 0, M_4 \neq 0\right)$$

lemma 5.6.1 den

$$\left|\tilde{\rho}_n\right| = \frac{2\pi n}{m_4 - m_1}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\left|\tilde{\rho}_n\right| = \frac{2\pi n}{\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}\right) - \left(-\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\left|\tilde{\rho}_n\right| = \frac{2\pi n}{2\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\left|\tilde{\rho}_n\right| = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + O(1)$$

$$= \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + \eta_n \qquad \left(\eta_n = O(1),\ \eta_n \text{ sınırlı}\right)$$

$\widetilde{\rho}_n = i\tilde{S}_n$ olmak üzere

$$\left|i\tilde{S}_n\right| = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + \eta_n$$

$$\left|\tilde{S}_n\right| = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + \eta_n$$

$\tilde{S}_n$ -ler reel oldukları için

$$\tilde{S}_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + \eta_n \qquad\qquad \tilde{\eta}_n = O(1)$$

Roche teoreminden özdeğerlerin asimtotiği

$$S_n = \tilde{S}_n + O(1)$$

$$S_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + O(1) + O(1)$$

$$S_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + O(1)$$

şeklinde elde edilir.

2. $\sin\alpha = 0$ ve $\sin\beta \neq 0$ olsun (5.6.2) formülü gereği

$$\omega(\lambda) = a_1 \sin\beta\cos\alpha\left(\frac{1}{a_2}\sin\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1} - \frac{1}{a_1}\cos\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|(a_1 + a_2)}{a_1 a_2}\right)$$

fonksiyonunda sinis ve kosinüs degerlerinin yerine $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ve $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ eşitliklerini yazarsak

$$\omega(\lambda) = a_1 \sin\beta\cos\alpha\left(\frac{1}{a_2}\frac{e^{\frac{is}{a_2}} - e^{\frac{-is}{a_2}}}{2i}\frac{e^{\frac{is}{a_1}} - e^{\frac{-is}{a_1}}}{2i} - \frac{1}{a_1}\frac{e^{\frac{is}{a_2}} + e^{\frac{-is}{a_2}}}{2}\frac{e^{\frac{is}{a_1}} + e^{\frac{-is}{a_1}}}{2}\right)$$

$$+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|(a_1 + a_2)}{a_1 a_2}\right)$$

$$\omega(\lambda)=a_1\sin\beta\cos\alpha\left[-\frac{1}{a_2}\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}+e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{a_1}\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}+e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4}\right]+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

$$\tilde{\omega}(\lambda)=\left[-\frac{\sin\beta\cos\alpha}{4}\left(\frac{a_1}{a_2}+1\right)\right]e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+\left[\frac{\sin\beta\cos\alpha}{4}\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\right]e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}$$

$$\left[\frac{\sin\beta\cos\alpha}{4}\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)\right]e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}+\left[\frac{\sin\beta\cos\alpha}{4}\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right)\right]e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}$$

$$+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

$$\omega(\lambda)=\omega_0(\lambda)+\omega_1(\lambda)$$

$$\omega(\lambda)=\omega_0\left(s^2\right)+\omega_1\left(s^2\right)$$

$$\omega(\lambda)\equiv\tilde{\omega}_0(s)+\tilde{\omega}_1(s)$$

$\rho=is$ olmak üzere

$$\tilde{\omega}_0(s)=M_1e^{m_1\rho}+M_2e^{m_2\rho}+M_3e^{m_3\rho}+M_4e^{m_4\rho}$$

$$m_4>m_2>m_3>m_1$$

Burada

$$m_1=-\frac{a_1+a_2}{a_1a_2},\ldots\ m_4=\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}$$

$$M_1 = -\frac{\sin\beta\cos\alpha}{4}\left(\frac{a_1}{a_1}-1\right), \ldots, M_4 = -\frac{\sin\beta\cos\alpha}{4}\left(\frac{a_1}{a_2}+1\right) \quad \left(M_1 \neq 0, M_4 \neq 0\right)$$

lemma 5.6.1 den

$$\left|\tilde{\rho}_n\right| = \frac{2\pi n}{m_4 - m_1}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\left|\tilde{\rho}_n\right| = \frac{2\pi n}{\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}\right) - \left(-\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\left|\tilde{\rho}_n\right| = \frac{2\pi n}{2\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\left|\tilde{\rho}_n\right| = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + O(1)$$

$$= \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + \eta_n \qquad \left(\eta_n = O(1),\ \eta_n \text{ sınırlı}\right)$$

$\tilde{\rho}_n = i\tilde{S}_n$ olduğundan

$$\left|i\tilde{S}_n\right| = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + \eta_n \qquad \eta_n = O(1) \ \ \left|\eta_n\right| \leq A \quad A > 0$$

$$\left|\tilde{S}_n\right| = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + \eta_n$$

$\tilde{S}_n$ -ler reel oldukları için

$$\tilde{S}_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + \eta_n \qquad \eta_n = O(1)$$

Roche teoreminden özdeğerlerin asimptotiği

$$S_n = \tilde{S}_n + O(1)$$

$$S_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + O(1) + O(1)$$

$$S_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + O(1)$$

şeklinde elde edilir.

3. $\sin\alpha = 0$ ve $\sin\beta = 0$ olsun (5.6.3) formülü gereği

$$\omega(\lambda) = -\frac{\cos\alpha\cos\beta}{s}\left(a_1\cos\frac{s}{a_2}\sin\frac{s}{a_1} + a_2\sin\frac{s}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}\right)$$

$$+O\left(\left|s^{-2}\right|\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right)$$

fonksiyonunda sinis ve kosinüs degerlerinin yerine $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ ve

$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ eşitliklerini yazarsak

$$\omega(\lambda) = -\frac{\cos\alpha\cos\beta}{s}\left(a_1\frac{e^{\frac{is}{a_2}}+e^{\frac{-is}{a_2}}}{2}\frac{e^{\frac{is}{a_1}}-e^{\frac{-is}{a_1}}}{2i} + a_2\frac{e^{\frac{is}{a_2}}-e^{\frac{-is}{a_2}}}{2i}\frac{e^{\frac{is}{a_1}}+e^{\frac{-is}{a_1}}}{2}\right)$$

$$+O\left(\left|s^{-2}\right|\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right)$$

$$\omega(\lambda) = -\frac{\cos\alpha\cos\beta}{s}\left[a_1\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}-e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4i}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{a_1}\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}-e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4i}\right]+O\left(\left|s^{-2}\right|\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right)$$

$\omega(\lambda)$=0 eşitliğinde her iki taraf s ile çarparsak

$$\tilde{\omega}(\lambda) = -\cos\alpha\cos\beta\left[a_1\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}-e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4i}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{a_1}\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}-e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4i}\right]+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|(a_1+a_2)}{a_1a_2}\right)$$

$$\tilde{\omega}(\lambda)=-\frac{\cos\alpha\cos\beta}{4i}\left(\left(a_1+a_2\right)e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}-\left(a_1-a_2\right)e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}-\left(a_2-a_1\right)e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}\right.$$

$$\left.-\left(a_1+a_2\right)e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2}\right)\right)$$

$$\tilde{\omega}(\lambda)=\left[-\frac{\cos\alpha\cos\beta}{4i}\left(a_1+a_2\right)\right]e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+\left[\frac{\cos\alpha\cos\beta}{4i}\left(a_1-a_2\right)\right]e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}$$

$$\left[\frac{\cos\alpha\cos\beta}{4i}\left(a_2-a_1\right)\right]e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}+\left[\frac{\cos\alpha\cos\beta}{4i}\left(a_1+a_2\right)\right]e^{is\frac{-\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2}}$$

$$+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

$$\tilde{\omega}\left(\lambda\right)=\omega_0\left(\lambda\right)+\omega_1\left(\lambda\right)$$

$$\tilde{\omega}\left(\lambda\right)=\omega_0\left(s^2\right)+\omega_1\left(s^2\right)$$

$$\tilde{\omega}\left(\lambda\right)\equiv\tilde{\omega}_0\left(s\right)+\tilde{\omega}_1\left(s\right)$$

$$\tilde{\omega}_0\left(s\right)=M_1e^{m_1\rho}+M_2e^{m_2\rho}+M_3e^{m_3\rho}+M_4e^{m_4\rho}\qquad \rho=is$$

$$m_4>m_2>m_3>m_1$$

Burada

$$m_1=-\frac{a_1+a_2}{a_1a_2},\dots\ m_4=\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}$$

$$M_1=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{4i}\left(a_1+a_2\right),\ .\ .\ .\ ,M_4=-\frac{\cos\alpha\cos\beta}{4i}\left(a_1+a_2\right)\ \left(M_1\neq0,M_4\neq0\right)$$

lemma 5.6.1 den

$$\left|\tilde{\rho}_n\right|=\frac{2\pi n}{m_4-m_1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$|\tilde{\rho}_n| = \frac{2\pi n}{\left(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}\right) - \left(-\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$|\tilde{\rho}_n| = \frac{2\pi n}{2\left(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$|\tilde{\rho}_n| = \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\pi n + O(1)$$

$$= \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\pi n + \eta_n \qquad \left(\eta_n = O(1),\ \eta_n \text{ sınırlı}\right)$$

$\widetilde{\rho}_n = i\tilde{S}_n$ olduğundan

$$\left|i\tilde{S}_n\right| = \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\pi n + \eta_n$$

$$\left|\tilde{S}_n\right| = \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\pi n + \eta_n$$

$\tilde{S}_n$ -ler reel oldukları için

$$\tilde{S}_n = \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\pi n + \eta_n$$

Roche teoreminden özdeğerlerin asimptotiği

$$S_n = \tilde{S}_n + O(1)$$

$$S_n = \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\pi n + O(1) + O(1)$$

$$S_n = \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\pi n + O(1)$$

şeklinde elde edilir.

4. $\sin\alpha \neq 0$ ve $\sin\beta = 0$ olsun (5.6.4) formülü gereği

$$\omega(\lambda) = a_2\cos\beta\sin\alpha\left(\frac{1}{a_2}\cos\frac{s}{a_1}\cos\frac{s}{a_2} - \frac{1}{a_1}\sin\frac{s}{a_1}\sin\frac{s}{a_2}\right)$$

$$+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

fonksiyonunda sinis ve kosinüs degerlerinin yerine $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ ve

$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ eşitliklerini yazarsak

$$\omega(\lambda)=a_2\cos\beta\sin\alpha\left(\frac{1}{a_2}\frac{e^{\frac{is}{a_1}}+e^{\frac{-is}{a_1}}}{2}\frac{e^{\frac{is}{a_2}}+e^{\frac{-is}{a_2}}}{2}-\frac{1}{a_1}\frac{e^{\frac{is}{a_1}}-e^{\frac{-is}{a_1}}}{2i}\frac{e^{\frac{is}{a_2}}-e^{\frac{-is}{a_2}}}{2i}\right)$$

$$+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

$$\omega(\lambda)=a_2\cos\beta\sin\alpha\left[\frac{1}{a_2}\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}+e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}+e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a_1}\frac{e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}-e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}+e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}}{4}\right]+0\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

$$\omega(\lambda)=\left[\frac{\cos\beta\sin\alpha}{4}\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right)\right]e^{is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}+\left[\frac{\cos\beta\sin\alpha}{4}\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\right]e^{is(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2})}$$

$$\left[\frac{\cos\beta\sin\alpha}{4}\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\right]e^{is(\frac{a_1-a_2}{a_1a_2})}+\left[\frac{\cos\beta\sin\alpha}{4}\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right)\right]e^{-is(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2})}$$

$$+O\left(\left|s^{-1}\right|\exp\frac{|t|\left(a_1+a_2\right)}{a_1a_2}\right)$$

$$\omega(\lambda)=\omega_0(\lambda)+\omega_1(\lambda)$$

$$\omega(\lambda)=\omega_0\left(s^2\right)+\omega_1\left(s^2\right)$$

$$\omega(\lambda)\equiv\tilde{\omega}_0(s)+\tilde{\omega}_1(s)$$

$$\tilde{\omega}_0(s)=M_1e^{m_1\rho}+M_2e^{m_2\rho}+M_3e^{m_3\rho}+M_4e^{m_4\rho} \qquad \rho=is$$

$$m_4>m_2>m_3>m_1$$

Burada

$$m_1=-\frac{a_1+a_2}{a_1a_2},\dots\ m_4=\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}$$

$$M_1=\frac{\cos\beta\sin\alpha}{4}\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right),\ .\ .\ .\ ,M_4=\frac{\cos\beta\sin\alpha}{4}\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right)\ \left(M_1\neq 0,M_4\neq 0\right)$$

Lemma 5.6.1 den

$$\left|\tilde{\rho}_n\right|=\frac{2\pi n}{m_4-m_1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\left|\tilde{\rho}_n\right|=\frac{2\pi n}{\left(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}\right)-\left(-\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\left|\tilde{\rho}_n\right|=\frac{2\pi n}{2\left(\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\left|\tilde{\rho}_n\right|=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\pi n+O(1)$$

$$=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\pi n+\eta_n \qquad \left(\eta_n=O(1),\ \eta_n\ \text{sınırlı}\right)$$

$\widetilde{\rho}_n=i\tilde{S}_n$ olduğundan

$$\left|i\tilde{S}_n\right|=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\pi n+\eta_n$$

$$\left|\tilde{S}_n\right|=\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\pi n+\eta_n$$

$\tilde{S}_n$ -ler reel oldukları için

$$\tilde{S}_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + \eta_n$$

Roche teoreminden özdeğerlerin asimtotiği

$$S_n = \tilde{S}_n + O(1)$$

$$S_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + O(1) + O(1)$$

$$S_n = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\pi n + O(1)$$

şeklinde elde edilir.

Bu özdeğerlerin asimptotik eşitlikleri

$$\phi(x,\lambda) = \begin{cases} \phi_1(x,\lambda), & x \in [-1,0) \\ \phi_2(x,\lambda), & x \in (0,1] \end{cases}$$

$$\chi(x,\lambda) = \begin{cases} \chi_1(x,\lambda), & x \in [-1,0) \\ \chi_2(x,\lambda), & x \in (0,1] \end{cases}$$

ifadelerinde yerine yazarsak özfonksiyonların asimptotik formülleri elde edilir.

6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

$L_2(-1,0)\oplus L_2(0,1)$, Hilbert uzayında süreksiz katsayılı,

$$-a(x)u''+q(x)u=\lambda u \ ,$$

diferansiyel denkleminin

$$\cos\alpha u(-1)+\sin\alpha u'(-1)=0$$

$$\cos\beta u(1)+\sin\beta u'(1)=0$$

sınır şartlarından ve x=0 süreksizlik noktasında

$$u(-0)=u(+0)$$

$$u'(-0)=u'(+0)$$

geçiş şartları verilen bir süreksiz sınırdeğer problemlerinin özellikleri ve asimptotik davranışlarının ve özfonksiyonlarının bazı özellikleri incelendi.

Bu çalışmanın esas özelliği yüksek mertebeden türevin katsayısının bir iç noktada süreksiz olması ve bu süreksizlik noktasında iki tane geçiş şartlarının verilmesidir. Bu problemin çözümünün önemi süreksiz problemin sürekli cözümlerinin araştırılması ve telin titreşim problemi gibi bir çok matematiksel fizik probleminin bu tür problemlere dönüştürülebilir olmasıdır. Literatürde bu problem ilk olarak bu tez çalışmasında araştırıldığı için sonuçlar da orjinaldir.

Bu çalışmada problem $[-1,1]$ aralığında incelenip süreksizlik noktsı aralıkta $x=0$ noktası alınmıştır. Bu problem bir $[a,b]$ aralığında ve $c\in(a,b)$ süreksizlik noktası için incelenip bir genel durum elde edilebilir.(Naimark,1967) Bu aralıkta bir tek süreksizlik noktası yerine birden fazla süreksizlik noktası alınarak daha farklı sonuçlara varılabilir.

Ayrıca bu çalışmada ele alınan problemin özdeğer ve öz fonksiyonlarının asimptotik açılımında ikinci terimler de bulunabilir.

KAYNAKLAR

ALTINIŞIK, N., 1998. “Sınır şartlarında özdeğer parametre bulunduran süreksiz katsayılı sınır değer problemi“ Doktora tezi, Ondokuzmayıs Üniversitesi.

BAILEY P.B., EVERITT W.N. and ZETTL A., 1991. “Automatic solution of Sturm-Liouville problems” In Results in Mathematics, Vol. 20, Birkhauser Vergal, Basel.

BINDING, P.A and BROWNE, PATRICK J., 1997, “Oscillation theory for indefinite Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions” Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect. A.127, no 6,1123-1136.

BIRKHOFF,G.D.,1908, ”On the asymtotic character of the solution of the certain linear differantial equations containing parameter”Trans.Amer.Math.Soc.9, p.219-231

BOYCE,W.E. and DIPRIMA,R.C.,”Elemantary differantial equations and boundary value problems”, John Willy and Sons, New York , p. 544-554.

FULTON, C.T., 1977. Two- point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc Roy Soc. Edin. 77 A, P.293-308.

HINTON, D.B., 1979. An expansion theorem for an eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary condition,Quart. J. math. Oxford, 30. 33-42.

IBRAHİM, S.F.M., 1998. Indefinite egienvalue problem with eigenparameter in the two boundary conditions, Internat. J. Math., Math. Sci. 21, No: 4, 775-784.

KADAKAL, M., 2000 “Sınır şartlarının birinde özdeğer parametresi bulunduran regüler sınır-değer geçiş problemi, Ondokuzmayıs Üniversitesi.

KADAKAL M., MUHTAROV F., MUKHTAROV O. Sh, 2002. "Greeen function of one discontinuous boundary Value problem with transmission conditions" Bulletin of Pure and Applied Sciences Vol 21 no2.

KERİMOV, N.B. and MEMEDOV, Kh.K., 1999. "On a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions". Sibirsk. Math. Zh. 40, no2 325-335, 1999. English translation: Siberial Math. J. 40, no2, 281-290

KOBAYASHI, M., 1989. Eigenvalues of discontinuous Sturm-Liouvillle problems with symmetric potentials, Computers. Math. Applic. Vol. 18, No 4, 357-364.

LANG, S., 1983. Real Analysis (Second edition), Addision-Wesley, Reading, Mass.

LEVITAN, B.M., SARQSYAN, I.S., 1988, "Sturm-Liouville ve Dirac Operatörler", Moskova, Nauka (Rusca).

LIKOV, A.V. and Yu. A. MIKHAILOV, 1963. The Theory of Heat and mass Transfer, Qoesenerqoizdat (Russian).

LİU, XIYU., 1999. A note on the Sturmian Theorem for Singular Boundary Value Problems, J. Math.Analysis and App.,237,393-403

MUHTAROV, O. Sh. and DEMİR, H. 1999. Coerciveness of the discontinious initial-boundary value problem for parabolic equations, Israel Jour. Math.,114,239-252

MUKHTAROV, O.Sh., KANDEMİR, M., 2002. "Asymptotic behaviour of eigenvalues for the discontinuouns boundary-value problem with functional-transmission conditions" Acta Mathematica Scientia vol 22 B(3) pp.335-345.

MUKHTAROV, O.Sh. KADAKAL M. ALTINIŞIK N., 2002. "Eigenvalues and Eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter in the boundary conditions" İndian Journal of Pure and Applied Mathematics.

MUKHTAROV, O.Sh., KURUOĞLU N. and KANDEMİR M., 2002. "Distribution of eigenvalues for the discontinuouns boundary value problem with functional manypoint conditions" Israel Journal of Mathematics vol 129 pp. 143-156.

MUKHTAROV O. Sh and YAKUBOV, S., 2002, "Problems for Ordinary Differential Equations with Transmission Conditions", Applicaple Analysis, Vol 81, 1033-1064.

MUKHTAROV O.SH., KADAKAL M., ALTINIŞIK N., 2004. "Eigenvalues and Eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions" Acta Mathematica Huncarica (Has been accepte for publication in volume 102(3)).

RUSSAKOVSKIY, E.M., 1975, "Sınır şartları özdeğer parametresinden polinominal şekilde bağımlı olan sınır değer probleminin operatör yorumu", Fonk. Analiz I, eqopriloj 9, No. 4, Sayfa 91-92.

NAIMARK, M.A., 1967, " Linear differential operators", Ungar, Newyork.

SCHNEIDER, A., 1974. A note on eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition, Math. Z. 136, 163-167.

SHKALIKOV, A., A., 1983. Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in boundary condition, Trudy Sem. Imeny I.G. Petrowsgo, 9, 190-229.

SMIRNOV, V.I., 1964, "A Course of Higher Mathematics", Part, Pergaman Press, Oxford.

TAMARKIN, J.D., 1917, "About certain general problems of theory of ordinary linear differantial equations and about expansion of derivative functions into series", Petrograd.

TITCHMARS, E.C., 1962. Eigenfunctions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I, second edn. Oxford Univ. press, London.

TOLSTOV Q.P., 1980. "Fourier serileri" Moskova "Nauka" (Rusça).

TUNÇ, E., 2001, "Bir adi diferansiyel operatörünün bazı spektral özellikleri" Doktora tezi, Ondokuzmayıs Üniversitesi.

ULUÇAY, C., 1971, "Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri", Ankara Üniversitesi, Fen Fak., Ankara.

WALTER, J., 1973. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions, Math. Z., 133, 301-312.

YAKUBOV, S. and YAKUBOV Y., 1999, "Abel basis of root functions of regular bound-ary value problems", Math. Nachr. 197, 157-187.

RASULOV, M.A., 1967. Methots of contour integration. Amsterdam: NorthHolland publishing company .1967.

MUKHTAROV O. Sh , DEMİRCİ M. , AKDOĞAN Z., 2005, Sturm-Liouville problems with Eigendependent Boundary and Transmissions Conditions. Acta Mathematica Scientia , Vol 25, No. 4.

MUKHTAROV O. Sh , DEMİRCİ M. , AKDOĞAN Z., 2005, Discontinuous Sturm-Liouville Problem with. Eigenparameter-Dependent Boundary and Transmission Conditions. Acta Applicandae Mathematicae, 86, pp. 329-344

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zekeriya ŞAŞMAZ

Baba Adı : Ünal

Ana Adı : Akkadın

Doğum Yeri ve Yılı : Yozgat, 1978

İlk, orta ve lise öğrenimimi Yozgat'ta tamamladı. 1996 yılında Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünü kazanıp 2000 yılında mezun oldu. 2000 yılının Eylül ayında Milli Eğitim Bakanlığınca Ankara Nallıhan'a Matematik öğretmeni olarak atandı. 2003 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. 2006 yılında Diyarbakır Ergani Bekir Aral lisesine zorunlu hizmet görevi için atandı. Halen Diyarbakır Ergani Bekir Aral lisesinde Matematik öğtetmeni olarak görev yapmaktadır.