

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BANACH UZAYLARINDA VE BANACH LATİSLERDE
DEĞİŞMEZ ALT UZAYLAR ÜZERİNE**

Matematikçi Elif DEMİRBİLEK

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ömer GÖK

İSTANBUL, 2006

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER.....	3
3. DEĞİŞMEZ ALT UZAY PROBLEMİ	14
4. UYGULAMA	20
5. BANACH LATİSLERDE DEĞİŞMEZ KAPALI İDEALLER	23
6. SIKIŞTIRMALI AYRIŞTIRILABİLİRLİK.....	28
7. SONUÇLAR	31
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ	33

SİMGE LİSTESİ

A^0	A kümesinin kutupsalı
$\text{Boy}(J/I)$	J/I bölüm uzayının boyutu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$C(S)$	S' den S' ye tanımlı reel veya kompleks değerli sürekli fonksiyonların kümesi
$C(S, X')$	S' den X' ' ye tanımlı tüm sürekli zayıf* fonksiyonların Banach uzayı
E_+	E' nin pozitif konisi
E_u	u ile üretilen ideal
$\overline{E_u}$	E_u kümesinin kapanışı
$f_\alpha \rightarrow f$	f_α neti f elemanına yakınsar
$K(S, X')$	$C(S, X')$ ' ye ait sürekli fonksiyonların vektör alt uzayı
$L(X)$	X uzayından X' e tanımlı sınırlı lineer operatörler kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
T'	T operatörünün adjointi (eşleniği)
$\{T\}_+^c$	T ile değişmeli tüm pozitif operatörlerin koleksiyonu
X'	X uzayının topolojik duali
X''	X' in ikinci norm duali
$x_n \xrightarrow{w} 0$	x_n 0' a zayıf yakınsar
$\ x\ $	x elemanının normu
$ x $	x elemanının mutlak değeri
$\sigma(X, X')$	Zayıf topoloji
$\sigma(X', X)$	Zayıf* topoloji
$\beta(X', X)$	Güçlü topoloji
$\tau(X, X')$	Mackey topoloji
$\wedge$	İnfimum
$\vee$	Supremum
$\langle ., . \rangle$	Dual çift
$\sum$	Toplam sembolu

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli Hocam Sayın Doç. Dr. Ömer GÖK' e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca manevi desteklerini eksik etmeyen aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Banach uzaylarında önemli sorulardan biri değişmez alt uzay problemidir. Bu probleme ait pek az olumlu netice bilinmektedir. Burada, ilk önce bu problemle ilgilenildi. Kuvvetli ve zayıf operatör topolojilerinin benzerleri olan topolojileri sunarak adjoint operatörler için değişmez alt uzay probleminin karakterizasyonuna değişik bir yaklaşım sunuldu. Lomonosov ve Branges' in metodunu takip ederek değişmez alt uzay probleminde operatör cebirleri için çalışıldı.

Ayrıca, E bir Banach latis olmak üzere E' den E' ye sürekli lineer operatörlerin uzayı $L(E)'$ de, operatörlerin bir koleksiyonunun değişmez bıraktığı kapalı idealler üzerinde duruldu.

Pozitif konisi uç ışını kapsayan bir Banach latis veya birimli bir AM- uzayı üzerinde bir yarı nilpotent pozitif operatör için aşikar olmayan kapalı değişmez idealin varlığını garantileyen sonuçlar bilinmektedir. Buradaki çalışmanın ana neticelerinden biri de yarı nilpotent pozitif operatörler veya kompakt pozitif operatörlerin belli bir koleksiyonu altında değişmez kalan kapalı ideallerin varlığını elde etmektir.

Son olarak da Banach latislerdeki yarı nilpotent, pozitif, kompakt operatörlerin sıkıştırılabilirliği incelendi.

Anahtar kelimeler: Değişmez alt uzay, kapalı ideal, Banach latis, kompakt operatör, ayrıştırılabilirlik.

ABSTRACT

Invariant subspace problem is one of the most important problems on Banach spaces .Very few positive results are known about it. Firstly, here was interested in this problem. An alternative approach was presented to the characterization of invariant subspace problem for adjoint operators by introducing the topologies which are similar to strong and weak operator topologies. It was studied for operator algebras on invariant subspace problem following the method of Lomonosov and Branges.

Also, it was studied on closed ideals which are invariant under a collection of operators in space $L(E)$ of continuous linear operators from a Banach lattice E into itself.

There are some known results that guarantee the existence of a nontrivial closed invariant ideal for a quasinilpotent positive operator on an AM- space with unit or a Banach lattice whose positive cone contains an extreme ray. One of the main results of this work is to obtain existence of closed ideals which are invariant under a certain collection of compact positive operators or quasinilpotent positive operators.

Finally, compressionally decomposability of quasinilpotent, positive, compact operators on Banach lattices was investigated.

Keywords: Invariant subspace, closed ideal, Banach lattice, compact operator, decomposability.

1. GİRİŞ

Bir X Banach uzayı üzerinde tanımlı $T: X \rightarrow X$ sürekli lineer operatörü aşıkâr olmayan bir kapalı değişmez alt uzaya sahip midir? sorusu değişmez alt uzay problemi olarak bilinmektedir. Eğer X Banach uzayı ayrılabilir değilse sıfırdan farklı bir x vektörüne ait $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$ yörüngesi tarafından üretilmiş kapalı vektör alt uzayı T için aşıkâr olmayan kapalı bir değişmez alt uzaydır. Başka bir deyişle, ayrılabilir olmayan bir Banach uzayı üzerindeki her operatör aşıkâr olmayan bir kapalı değişmez alt uzaya sahiptir. Buna rağmen, tek bir operatörden farklı $L(X)$ üzerindeki operatörlerin bir cebirini gözönüne alırsak, aşıkâr olmayan ortak bir değişmez alt uzayın varlığı, ayrılabilir olmayan durumlarla bile ilgili olur.

Değişmez alt uzay problemine ilişkin pek az olumlu sonuç bilinmektedir. En göze çarpanı ise Lomonosov'un (1973) aşağıdaki değişmez alt uzay teoremidir.

Lomonosov' un Teoremi: Bir Banach uzayı üzerinde sürekli olan bir T operatörü birim operatörle bir çarpımdan farklı olan bir S operatörüyle değişmeli ve S de sıfırdan farklı bir kompakt operatörle değişmeliyse, T aşıkâr olmayan bir kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.

Enflo (1975), ayrılabilir bir Banach uzayı üzerinde sınırlı lineer operatörü bir aşıkâr olmayan kapalı alt uzaysız gösteren ilk kişidir ve değişmez alt uzay probleminin genel formülasyonuna olumsuz bir cevap vermiştir. Sonrasında, Read (1985) ℓ_1 üzerinde, aşıkâr olmayan kapalı alt uzaysız bir sınırlı lineer operatör oluşturdu. Bu zıt örneklerin ışığında Lomonosov (1991), değişmez alt uzay probleminin adjoint operatörler için olumlu cevabının olabilirliği sorusunu sordu. Yani O, aşağıdaki dual değişmez alt uzay problemini önerdi.

Lomonosov' un Sorusu: Banach uzayındaki bir sınırlı lineer operatörün adjointinin aşıkâr olmayan bir kapalı değişmez alt uzayı vardır.

Aynı makalede Lomonosov (1991) ayrıca dual değişmez alt uzay probleminin de bazı karakterizasyonlarını sunmuştur.

Sonrasında, Branges (1993) son çalışmalarının birinde Lomonosov' un sorusunu ispatlamak amacıyla bir çalışma başlattı. Belirli bir biçimde O, Lomonosov' un sorusunu, vektör fonksiyonlarının bir doğal uzayının belli bir vektör alt uzayının Branges tarafından sunulan lineer topolojiye göre yoğun olmadığının ispatına indirgedi.

Bu çalışmanın amacı, kuvvetli ve zayıf operatör topolojilerinin benzerleri olan topolojileri

sunarak adjoint operatörler için değişmez alt uzay probleminin karakterizasyonuna değişik bir yaklaşım sunmaktır. Burada, Lomonosov ve Branges'in yaklaşımında olduğu gibi, değişmez alt uzay problemiyle operatör cebirleri için çalışılmaktadır. Bir X Banach uzayını düşünelim ve X uzayının norm duali X' 'ye ait kapalı birim yuvarı S ile gösterelim. S' den X' 'ye giden tüm sürekli zayıf* fonksiyonların Banach uzayını $C(S, X')$ ile gösterelim. X üzerindeki sürekli operatörlerin bir $\mathcal{A}$ cebiri için; aşağıdaki iki sonucu kuralım.

1) X uzayının bir aşıkır olmayan kapalı $\mathcal{A}$ - değişmez alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul X üzerinde bir kompakt operatör K ve bir B operatörü için $K'B'$ operatörünün,

$\{ \alpha K'T' : \alpha \in C(S) \text{ ve } T \in \mathcal{A} \}$ koleksiyonu tarafından üretilen $C(S, X')$ 'ye ait norm kapalı vektör alt uzayına ait olmamasıdır.

2) X' 'nün bir aşıkır olmayan kapalı $\mathcal{A}'$ - değişmez alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul X üzerinde bir B operatörü ve bir kompakt K operatörü için $B'K'$ operatörünün,

$\{ \alpha T'K' : \alpha \in C(S) \text{ ve } T \in \mathcal{A} \}$ koleksiyonu tarafından üretilen vektör alt uzayının norm kapanışına ait olmamasıdır.

Yukarıdaki değişmez alt uzay problemi karakterizasyonları, değişmez alt uzayların varlığının kompakt operatörlerin bulunmasıyla yakından ilgili olduğunu gösterir.

Ayrıca, burada E bir Banach latis olmak üzere $L(E)$ 'de operatörlerin bir koleksiyonunun değişmez bıraktığı kapalı idealler üzerinde de çalıştık.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmamızda kullandığımız kavramların tanımlarını, teoremleri ve önermeleri vereceğiz.

Tanım 2.1

X bir normlu lineer uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisinin bu uzaya ait limiti varsa X' e Banach uzayı denir.

Tanım 2.2

E bir sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ için $\sup\{x, y\} \in E$ ve $\inf\{x, y\} \in E$ ise E' ye Riesz uzayı (veya vektör latis) denir. $\sup\{x, y\} = x \vee y$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde de gösterilir.

Ayrıca bir $x \in E$ elemanı için x' in mutlak değeri $|x| = \sup\{x, -x\} = x \vee (-x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3

$(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, $(E, \|\cdot\|, \leq)$ sıralı vektör uzayı olsun. $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa E' ye Banach latis denir.

Bu çalışmada Banach latisleri E ile göstereceğiz.

Tanım 2.4

E ve F Banach latis, $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. $x \geq 0$ iken $Tx \geq 0$ ise T' ye pozitif operatör denir.

Tanım 2.5

E bir Banach latis olmak üzere $x, y \in E$ için $x \wedge y = 0$ iken $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ oluyorsa E' ye bir AL- uzayı (Soyut L- uzayı) denir.

Tanım 2.6

E bir Banach latis olmak üzere $x, y \in E$ için $x \wedge y = 0$ iken

$\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ oluyorsa E' ye bir AM- uzayı (Soyut M- uzayı) denir.

Tanım 2.7

Bir E Riesz uzayını ve onun $A \subset E$ alt kümesini düşünelim. Eğer $|x| \leq |y|$ ifadesinde $y \in A$, $x \in E$ iken $x \in A$ oluyorsa A' ya solid (katı) denir. Bir Riesz uzayında solid alt uzaya ideal denir.

Tanım 2.8

Bir X Banach uzayı için $L(X)$ sınırlı lineer operatörler kümesini ve onun bir alt kümesini gözönüne alalım. Toplama, çarpma ve kompleks sayılarla çarpma altında kapalı kalan bu alt kümesine $L(X)'$ in bir alt cebiri denir.

Operatörlerin cebiri, bir X için $L(X)'$ in bir alt cebiridir.

Tanım 2.9

$T: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör, X ve Y normlu uzaylar olsun. X' deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\{Tx_n\}$ dizisinin Y' de bir yakınsak alt dizisi varsa T' ye bir kompakt operatör denir.

Tanım 2.10

X, Y Banach uzayı ve $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. X' deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\{Tx_n\}$ dizisinin Y' de zayıf yakınsak bir alt dizisi varsa T' ye zayıf kompakt operatör denir.

Tanım 2.11

X bir vektör uzayı olmak üzere, $\langle X, X' \rangle$ çiftine, iki- lineer formla birlikte aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa dual sistem denir.

(Yani, $\langle *, * \rangle : X \times X' \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her değişkende ayrı olarak lineerdir.)

1) Her $x \in X$ için $\langle x, x' \rangle = 0$ iken $x' = 0$ olur.

2) Her $x' \in X'$ için $\langle x, x' \rangle = 0$ iken $x = 0$ olur.

Tanım 2.12

Bir X vektör uzayı üzerindeki $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları gerçekleştiriyorsa yarı-norm adını alır.

1) Her $x \in X$ için $p(x) \geq 0$ dır.

2) Her $x, y \in X$ için $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ' dir.

3) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in X$ için $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$ ' dir.

Tanım 2.13

Bir E Banach latisi için $0 < u \in E$ olsun. u ile üretilen ideal:

$E_u = \{x \in E : \text{bir } \lambda > 0 \text{ için } |x| \leq \lambda u\}$ ' dir. $\overline{E_u} = E$ ise u ' ya yarı iç nokta denir.

Tanım 2.14

F bir konveks küme ve $e \in F$ olsun. $0 < \lambda < 1$ ve $x, y \in F$ için $e = \lambda x + (1 - \lambda)y$ iken $x = y = e$ oluyorsa e ' ye F ' nin bir uç noktası denir.

Tanım 2.15

Bir X vektör uzayındaki lineer topoloji sıfırda konveks kümeleri içeren bir tabana sahipse X uzayına yerel konveks uzay denir. Başka bir deyişle X , yarı normlarla üretilen uzaydır.

Tanım 2.16

X bir yerel konveks uzay olsun. Zayıf topoloji $\sigma(X, X')$, $p_{x'}(x) = |\langle x, x' \rangle|$ iken yarı normların ailesi $\{p_{x'} : x' \in X'\}$ ile üretilen topolojiye denir. Yani, $\{x_\alpha\} X'$ de bir net ve $x_\alpha \rightarrow x$ iken her $f \in X'$ için $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ olur.

Tanım 2.17

X bir yerel konveks uzay olsun. X' üzerindeki zayıf* topoloji $\sigma(X', X)$, her $x' \in X'$ için $p_x(x') = |\langle x, x' \rangle|$ iken yarı normların ailesi $\{p_x : x \in X\}$ ile üretilen topolojidir. Dolayısıyla $\{f_\alpha\} X'$ ' nde bir net ve $f_\alpha \rightarrow f$ iken her $x \in X$ için $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ ' dir.

Tanım 2.18

X bir yerel konveks uzay olsun ve $\langle X, X' \rangle$ dual sistemini alalım. X' in bir A alt kümesi için A' ' nın kutupsalı:

$A^0 = \{x' \in X' : \text{her } x \in A \text{ için } |\langle x, x' \rangle| \leq 1\}$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.19 (Banach- Alaoglu)

(X, τ) bir yerel konveks uzay ve V sıfırın bir τ - komşuluğu ise onun kutupsalı V^0 bir $\sigma(X', X)$ - kompakt kümedir (Aliprantis ve Burkinshaw , 1985).

Tanım 2.20

X bir yerel konveks uzay olsun. $\langle X, X' \rangle$ bir dual sistem, $\mathbb{S}$ de X' in $\sigma(X, X')$ - sınırlı alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Her $A \in \mathbb{S}$ için $p_A(x') = \sup\{|\langle x, x' \rangle| : x \in A\}$, $x' \in X'$ formülü X' üzerinde bir yarı norm tanımlar. Bu nedenle $\mathbb{S}$, X' üzerinde $\{p_A : A \in \mathbb{S}\}$ yarı normların ailesi ile bir yerel konveks topoloji üretir. Bu topoloji $\mathbb{S}$ - topoloji adını alır.

Tanım 2.21

X bir yerel konveks uzay ve $\langle X, X' \rangle$ bir dual sistem olsun. X' üzerindeki güçlü topoloji $\beta(X', X)$, $\mathbb{S}$ - topolojidir. Burada $\mathbb{S}$, X' in tüm $\sigma(X, X')$ - sınırlı alt kümelerinin koleksiyonudur.

Tanım 2.22

X bir yerel konveks uzay ve $\langle X, X' \rangle$ bir dual sistem olsun. Bu dual sistemde X üzerinde her zaman bir en büyük yerel konveks topoloji mevcuttur. Bu topoloji $\mathbb{S}$ - topolojisidir. $\mathbb{S}$ -topolojisi X' ' ye ait tüm konveks, çemberleşmiş ve $\sigma(X, X')$ kompakt alt kümelerin koleksiyonudur. Bu en büyük topoloji $\tau(X, X')$ ile gösterilir ve X' in Mackey topolojisi olarak adlandırılır.

Bu tanımlardan aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\sigma(X, X') \subseteq \tau(X, X').$$

Teorem 2.23 (Krein- Milman)

Bir X vektör uzayının bir F konveks kümesi X' deki bir yerel konveks topoloji τ için kompaktsa, o zaman F bir uç noktaya sahiptir. Ayrıca F , uç noktaların bir τ - kapalı konveks kabuğudur (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Teorem 2.24 (Eberlein- Smulian)

Bir X normlu uzayının bir A alt kümesinin zayıf kompakt olması için gerek ve yeter koşul A' daki her dizinin A' daki bir elemana zayıf yakınsayan bir alt dizisinin olmasıdır (Aliprantis ve

Burkinshaw, 1985).

Tanım 2.25

X bir Banach uzayı, $T: X \rightarrow X$ bir lineer operatör ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer T ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x_0\|^{1/n} = 0 \quad (2.1)$$

koşulunu sağlarsa x_0 ' da yarı nilpotent denir.

Tanım 2.26

X bir Banach uzayı olsun ve $\mathcal{A}$, X üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörlerin Banach cebirini yani $L(X)$ ' in bir alt cebirini gösterebilir. $\mathcal{A}'$ 'nin dual cebiri; T' , T 'nin norm adjointini ifade etmek üzere $\mathcal{A}' = \{ T' \in L(X') : T \in \mathcal{A} \}$ ile tanımlı, $L(X')$ 'nün bir alt cebiridir.

X 'in bir V alt uzayı, $\mathcal{A}$ 'daki tüm operatörler tarafından değişmez bırakılıyorsa $\mathcal{A}$ - değişmez olarak adlandırılır. Yani, her $T \in \mathcal{A}$ için $T(V) \subseteq V$ sağlanır. X ' in bir V alt uzayı, $T \in L(X)$ operatörü altında değişmez olması için gerek ve yeter koşul V 'nin $L(X)$ 'deki T ile üretilen cebir (birimli veya değil) altında değişmez olmasıdır. Genellikle, X 'in bir V alt uzayı eğer $V \neq \{0\}$ ve $V \neq X$ ise aşikar olmayan olarak adlandırılır.

Bu çalışmada X boyutu birden büyük olan bir kompleks veya reel Banach uzayını, X' de onun norm dualini gösterecektir.

Şimdi aşikar olmayan kapalı $\mathcal{A}$ - değişmez alt uzayların varlığının bir karakterizasyonunu verelim.

Önerme 2.27

X bir Banach uzayı olsun. $L(X)$ 'e ait bir $\mathcal{A}$ alt cebirinin aşikar olmayan kapalı bir $\mathcal{A}$ - değişmez alt uzayının olması için gerek ve yeter koşul her $T \in \mathcal{A}$ için

$$\langle x', Tx \rangle = 0 \quad (2.2)$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $x \in X$ vektörünün ve bir $0 \neq x' \in X'$ lineer fonksiyonelinin mevcut olmasıdır.

İspat : V aşık olmayan kapalı $\mathcal{A}$ - değışmez alt uzayı olsun. Bir $0 \neq x \in V$ vektörünü sabit turalım ve $\mathcal{A}x = \overline{\{Tx : T \in \mathcal{A}\}}$ kapalı alt uzayını düşünelim. $\mathcal{A}x \subseteq V$ ve bu nedenle $\mathcal{A}x \neq X'$ dir. Dolayısıyla, $\mathcal{A}x'$ i sıfırlayan bir sıfırdan farklı $x' \in X'$ mevcuttur. Yani, her $T \in \mathcal{A}$ için $\langle x', Tx \rangle = 0$ 'dır.

Karşıtı için; her $T \in \mathcal{A}$, sıfırdan farklı vektörler $x \in X$ ve $x' \in X'$ için $\langle x', Tx \rangle = 0$ eşitliğinin sağlandığını varsayalım. Buradan, $\mathcal{A}x = \overline{\{Tx : T \in \mathcal{A}\}}$ kapalı alt uzayı X içerisindeki norma göre yoğun değildir. Eğer $\mathcal{A}x \neq \{0\}$ ise $\mathcal{A}x$ bir aşık olmayan kapalı $\mathcal{A}$ - değışmez alt uzayıdır. Eğer $\mathcal{A}x = \{0\}$ ise aşık olmayan kapalı değışmez alt uzay $V = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$ $\mathcal{A}$ - değışmezdir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$$\langle x', Tx \rangle = \langle T'x', x \rangle \quad (2.3)$$

eşitliğinden, aşık olmayan bir kapalı $\mathcal{A}$ - değışmez alt uzayı mevcut olması durumunda aşık olmayan bir kapalı $\mathcal{A}'$ - değışmez alt uzayının var olduğunu söyleyebiliriz.

X' 'ye ait kapalı birim yuvarı S ile gösterelim. Yani, bu $S = \{x' \in X' : \|x'\| \leq 1\}$ kümesidir.

Burada, S zayıf* topolojisi ile donatılacaktır ve bundan dolayı S , Alaoglu teoreminden (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985), X' 'nün bir zayıf* kompakt alt kümesidir.

Tanım 2.28

X bir Banach uzayı olsun. S' den X' 'ye tüm sürekli fonksiyonların vektör uzayı, S ve X' üzerine zayıf* topoloji konulduğunda $C(S, X')$ ile gösteriyoruz.

Her $T \in L(X)$ için $T': S \rightarrow X'$ adjointinin kısıtlanışının $C(S, X')$ 'nün bir elemanı olduğuna dikkat edelim.

$$\|f\| = \sup_{s \in S} \|f(s)\| \quad (2.4)$$

Açıktır ki $\|f\|$, $f \in C(S, X')$ normu ile donatılmış $C(S, X')$ vektör uzayı bir Banach uzayıdır.

Lomonosov, Branges' in Stone- Weierstrass teoreminden esinlenerek, $C(S, X')$ 'nün norm dualine ait kapalı birim yuvarın uç noktalarını karakterize etmiştir. Sonrasında Branges, bu uç noktaların davranışı hakkında derin bir analiz sunmuş ve Stone-Weierstrass teoreminin bir

soyut versiyonunu bulmuştur. Lomonosov ve Branges' in analizleri değişmez alt uzay problemi karakterizasyonunda daha sonra yer alacaktır.

$C(S)$, S üzerinde tanımlı, kompleks değerli, sürekli fonksiyonların Banach uzayını gösterebilir. Her bir $\alpha \in C(S)$ fonksiyonu, $C(S, X')$ üzerinde aşağıdaki formüle göre bir etki (operatör)dir. $f \in C(S, X')$, $s \in S$ için

$$(\alpha f)(s) = \alpha(s)f(s) \quad (2.5)$$

ve

$$\|\alpha f\| \leq \|\alpha\|_{\infty} \cdot \|f\| \quad (2.6)$$

olduğu tanımdan görülür.

Cebirsel terminolojiye göre bu $C(S, X')$ 'nün bir $C(S)$ - modül olduğunu gösterir. Gerçekten;

$$C(S) \times C(S, X') \rightarrow C(S, X')$$

$$(\alpha, f) \rightarrow \alpha f$$

$$(\alpha f)(s) = \alpha(s)f(s) \quad (2.7)$$

ifadeleri için, $\alpha, \beta \in C(S)$, $f, g \in C(S, X')$, $k \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

1) $1.f = f$, $1 \in C(S)$ sabit bir fonksiyondur, şöyle ki;

$$(1.f)(s) = 1(s).f(s) = 1.f(s) = f(s) \quad (2.8)$$

$$2) (\alpha + \beta, f) = (\alpha + \beta).f = \alpha f + \beta f = (\alpha, f) + (\beta, f) \quad (2.9)$$

$$(k\alpha, f) = (k\alpha).f = k.(\alpha f) = k.(\alpha, f)$$

$$3) (\alpha, f + g) = (\alpha, f) + (\alpha, g) \quad (2.10)$$

$$(\alpha, kf) = k.(\alpha, f)$$

$$4) \alpha(\beta f) = (\alpha \cdot \beta)f \quad (2.11)$$

$$5) \|\alpha f\| \leq \|\alpha\| \cdot \|f\| \quad (2.12)$$

koşulları sağlanır.

X' in ikinci norm duali X'' ile gösterilsin. Her $x'' \in X''$ ve her $s \in S$, $C(S, X')$ üzerinde, aşağıdaki formül yoluyla bir $x'' \otimes s$ lineer fonksiyoneli tanımlar. $f \in C(S, X')$ için

$$\langle x'' \otimes s, f \rangle = (x'' \otimes s)(f) = \langle x'', f(s) \rangle = x''(f(s)) \quad (2.13)$$

şeklindedir. Bu durumda $x'' \otimes s$, $C(S, X')$ üzerinde bir norm sürekli lineer fonksiyoneldir.

$Y = C(S, X')$ 'ye ait norm dualinde $\{ x'' \otimes s : x'' \in X'' \text{ ve } s \in S \}$ ailesi tarafından üretilen vektör uzayı $Y^\#$ ile gösterilsin.

$$Y^\# = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i'' \otimes s_i : x_i'' \in X'' \text{ ve } s_i \in S \text{ her } i = 1, 2, \dots, n \text{ için} \right\} \quad (2.14)$$

$Y^\#$, Y' nin noktalarını ayırır ve bu nedenle $\langle Y, Y^\# \rangle$ doğal duallikleriyle bir dual çifttir. Norm topolojisinden ayrı olarak $C(S, X')$ Banach uzayı üzerinde diğer iki topolojiyi göz önüne alıp, değişmez alt uzay problemi çalışmamızda kullanacağız. Bunlar aşağıdaki şekilde tanımlanır;

1) $C(S, X')$ üzerindeki τ_w topolojisi, yarı-normların $\{ \rho_{x'', s} : x'' \in X'' \text{ ve } s \in S \}$ ailesi tarafından üretilmiş yerel konveks topolojidir ve her $f \in C(S, X')$ için

$$\rho_{x'', s}(f) = |(x'' \otimes s)(f)| = |\langle x'', f(s) \rangle| \quad (2.15)$$

şeklindedir. $\tau_w = \sigma(Y, Y^\#)$ zayıf topolojisidir.

2) $C(S, X')$ üzerindeki τ_s topolojisi, yarı-normların $\{ \rho_s : s \in S \}$ ailesi tarafından üretilmiş yerel konveks topolojidir ve her $f \in C(S, X')$ için

$$\rho_s(f) = \|f(s)\| \quad (2.16)$$

şeklindedir.

Bu topolojiler $L(X)$ üzerindeki bilinen zayıf ve kuvvetli topolojilerle benzerdir ve bunları da sırasıyla w ve s ile gösterelim. Bundan başka, klasik zayıf ve güçlü operatör topolojilerinin analizinde olduğu gibi τ_w ve τ_s topolojileri aynı sürekli, lineer fonksiyonellere sahiptir (Dunford ve Schwarz, 1958). Böylece ikisi de $\langle Y, Y^\# \rangle$ dual sistemiyle uyumludur.

Teorem 2.29

Yerel konveks topoloji τ_s , $\langle Y, Y^\# \rangle$ dual sistemiyle uyumludur ve aşağıdaki kapsama mevcuttur:

$\sigma(Y, Y^\#) \subseteq \tau_s \subseteq \tau(Y, Y^\#)$, burada $\tau(Y, Y^\#)$ Mackey topolojiyi göstermektedir.

İspat: Topolojinin tanımından $\sigma(Y, Y^\#) \subseteq \tau_s$ ' dir. İspat için $\tau_s \subseteq \tau(Y, Y^\#)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $s \in S$ ' yi sabit turalım. $\{f \in Y: \rho_s(f) = \|f(s)\| \leq 1\}$ kümesinin 0 ' ın $\tau(Y, Y^\#)$ - komşuluğu olduğunu göstermeliyiz. X'' ' nün kapalı birim yuvarını U'' ile gösterelim. Sonrasında

$$Rx'' = x'' \otimes s \quad (2.17)$$

ile tanımlanmış, $R: (X'', \sigma(X'', X')) \rightarrow (Y^\#, \sigma(Y^\#, Y))$ operatörü sürekli. U'' bir $\sigma(X'', X')$ - kompakt küme olduğundan konveks çemberleşmiş küme:

$D = R(U'') = \{x'' \otimes s: x'' \in U''\}$ ' nün $\sigma(Y^\#, Y)$ -kompakt olduğu görülür.

$$D^0 = \{f \in Y: |\langle x'' \otimes s, f \rangle| = |x''(f(s))| \leq 1 \text{ her } x'' \in U'' \text{ için}\} \quad (2.18)$$

sıfırın bir $\tau(Y, Y^\#)$ - komşuluğudur.

Bu teoremi aşağıdaki gibi bir başka biçimde de verebiliriz;

Teorem 2.30

X bir Banach uzayı olsun. $C(S, X')$ üzerinde tanımlı bir $\emptyset$ lineer fonksiyoneli için aşağıdaki ifadeler denktir;

$$1) \emptyset = \sum_{i=1}^n x_i'' \otimes s_i, \text{ burada } s_1, \dots, s_n \in S \text{ ve } x_1'', \dots, x_n'' \in X'' \text{ ' dir.}$$

2) $\emptyset, \tau_w$ - sürekli.

3) $\emptyset, \tau_s$ - sürekli.

Standart dualite teorisi aşağıdaki sonucu meydana getirir;

Sonuç 2.31

X bir Banach uzayı olsun $C(S, X')$ üzerindeki τ_w ve τ_s topolojileri aynı kapalı konveks kümelere sahiptir.

$C(S, X')$ ' nün bir M alt uzayı $C(S)$ - değişmezse, M' ' nin kapanışının dışında kalan elemanlarının $x'' \otimes s$ biçimindeki bir lineer fonksiyonel ile ayrıştırılabildiği ayrıştırma özelliğini M' nin sağlandığını kurabiliriz.

Yardımcı Özellik 2.32

X bir Banach uzayı, M de $C(S)$ ' nin elemanlarıyla çarpım altında değişmez kalan $C(S, X)$ ' nün bir vektör alt uzayı olsun. Bu durumda $f_0 \in C(S, X)$ elemanının M ' nin τ_s - kapanışına ait olmaması için gerek ve yeter koşul her $f \in M$ için

$$\langle x'' \otimes s, f_0 \rangle = 1 \text{ ve } \langle x'' \otimes s, f \rangle = 0 \quad (2.19)$$

koşulunu sağlayan $x'' \in X''$ ve $s \in S$ elemanlarının mevcut olmasıdır.

İspat: f_0 ' ın M ' nin τ_s - kapanışına ait olmadığını varsayalım. O zaman $\forall f \in M$ için $\langle f_0 \rangle \neq 0$ ve $\langle f \rangle = 0$ olacak şekilde $C(S, X)$ üzerinde τ_s - sürekli bir $\emptyset$ lineer fonksiyoneli vardır. Teorem 2.30' dan $i \neq j$ için $s_i \neq s_j$ olduğu durumlarda

$$\emptyset = \sum_{i=1}^n x_i'' \otimes s_i \quad (2.20)$$

biçimindedir. $\langle f_0 \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i'', f_0(s_i) \rangle \neq 0$ olduğundan $x_k'' \neq 0$ ve $\langle x_k'', f_0(s_k) \rangle \neq 0$

ifadelerini sağlayan bir k mevcuttur. $\langle x_k'', f_0(s_k) \rangle = 1$ olduğunu varsayabiliriz. Sonrasında, Urysohns' yardımcı özelliğinden, $i \neq k$ için $\alpha(s_i) = 0$ olacak şekilde $\alpha \in C(S)$ alalım. Her $f \in M$ için $\alpha f \in M$ olduğundan her $f \in M$ için

$$\langle x_k'' \otimes s_k, f \rangle = \langle x_k'', f(s_k) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i'', \alpha(s_i) f(s_i) \rangle = \emptyset(\alpha f) = 0 \quad (2.21)$$

ifadesi vardır.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.33

Bir Banach uzayında her zayıf yakınsak dizi norm yakınsaksa yani, $x_n \xrightarrow{w} 0$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0 \quad (2.22)$$

oluyorsa bu Banach uzayına Schur özelliğine sahiptir denir.

Örnek 2.34

ℓ_1 Schur özelliğine sahip bir Banach uzayıdır.

3. DEĞİŞMEZ ALT UZAY PROBLEMİ

X bir Banach uzayı olsun. $\mathcal{A}$, $L(X)'$ in bir alt cebirini gösterebiliriz. Bir sonraki sonuç, $T \in \mathcal{A}$ elemanlarıyla tüm T' adjoint (eşlenik) operatörleri için X' ' ye ait genel bir aşık olmaya kapalı değişmez alt uzayın varlığı için gerekli ve yeterli bir koşul sunmaktadır.

$\mathcal{A}' = \{T' \in L(X') : T \in \mathcal{A}\}$ şeklindedir. Görüleceği gibi bu koşul, fonksiyonların bir koleksiyonu olan $\{\alpha T' : \alpha \in C(S) \text{ ve } T \in \mathcal{A}\}$ tarafından $C(S, X')$ ' ünde üretilen vektör alt uzayının özellikleriyle yakından ilgilidir.

Teorem 3.1

X bir Banach uzayı olsun. $L(X)'$ in bir keyfi $\mathcal{A}$ alt cebiri için aşağıdaki iki ifade denktir.

1) Aşık olmaya kapalı bir $\mathcal{A}'$ - değişmez alt uzay mevcuttur.

2) Bir $B \in L(X)$ operatörü mevcuttur öyle ki; B' adjoint (eşlenik) operatörü,

$\{\alpha T' : \alpha \in C(S) \text{ ve } T \in \mathcal{A}\}$ kümesi tarafından üretilen vektör alt uzayının $C(S, X')$ ' ndeki τ_s - kapanışına ait değildir.

İspat: Fonksiyonların koleksiyonu $\{\alpha T' : \alpha \in C(S) \text{ ve } T \in \mathcal{A}\}$ tarafından üretilen $C(S, X')$ ' ye ait vektör alt uzayını M , M' nin τ_s - kapanışını da $\overline{M}$ ile gösterelim.

(1) $\Rightarrow$ (2): Önerme 2.27' den, her $T \in \mathcal{A}$ için $\langle x'', T's \rangle = 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı $x'' \in X''$ ve $s \in X'$ vardır. Genelliği bozmaksızın $s \in S$ kabul edebiliriz.

$\langle x'', b' \rangle = 1$ ve $\langle b, s \rangle = 1$ olacak şekilde $b' \in X'$ ve $b \in X$ alalım. Rank- bir operatörü

$B = b' \otimes b \in L(X)'$ in $B' \notin \overline{M}$ ifadesini gerçekleştirdiğini iddia ediyoruz. Bunu görmek için, her $T \in \mathcal{A}$ ve tüm $\alpha \in C(S)$ için

$$\langle x'' \otimes s, \alpha T' \rangle = \alpha(s) \langle x'', T's \rangle = 0 \quad (3.1)$$

olduğuna dikkat edelim. Yani, τ_s - sürekli lineer fonksiyoneli $x'' \otimes s$, M üzerinde sıfırlanır.

Diğer yandan,

$$\langle x'' \otimes s, B' \rangle = \langle x'' \otimes s, b \otimes b' \rangle = \langle x'', b' \rangle \langle b, s \rangle = 1 \quad (3.2)$$

bağıntısı $B' \notin \overline{M}$ olduğunu gösterir.

(2) $\Rightarrow$ (1): $B' \notin \overline{M}$ olacak şekilde bir $B \in L(X)$ alalım. $M, C(S)'$ nin elemanları ile çarpım altında değişmez olduğundan Yardımcı Teorem 2.32 ile her $T \in \mathcal{A}$ için

$$\langle x'', B's \rangle = 1 \text{ ve } \langle x'', T's \rangle = 0 \quad (3.3)$$

ifadelerini sağlayan $x'' \in X''$ ve $s \in S$ vardır. $\langle x'', B's \rangle = 1$ olduğundan $x'' \neq 0$ ve $s \neq 0$ 'dır ve Önerme 2.27 uygulanırsa ispat tamamlanmış olur.

Bir sonraki hedefimiz; norm topolojisinin terimlerinde değişmez alt uzay problemi için bir benzer karakterizasyonu bulmaktır. Bunu başarmak için, tam olarak sürekli fonksiyonların sınıfını tanıtmaya ihtiyacımız vardır.

Tanım 3.2

X bir Banach uzayı olsun. Bir $f \in C(S, X')$ fonksiyonu S üzerindeki zayıf* topolojisi ve X' üzerindeki norm topolojisi için sürekli ise tam sürekli olarak adlandırılır.

$C(S, X')$ 'ye ait tüm tam sürekli fonksiyonların vektör alt uzayı $K(S, X')$ ile gösterelim.

Başka bir deyişle, bir $f \in C(S, X')$ fonksiyonunun tam sürekli olması için gerek ve yeter koşul $s_\alpha \rightarrow s$ iken $\|f(s_\alpha) - f(s)\| \rightarrow 0$ olmasıdır. $T: X \rightarrow X$ bir kompakt operatörse $T': S \rightarrow X'$ operatörü tam süreklidir, yani; $T' \in K(S, X')$ olur.

$K(S, X'), C(S, X')$ 'nün bir normlu kapalı alt uzayıdır. $C(S, X')$ 'nün bir vektör alt uzayı olarak $K(S, X')$ uzayı, $C(S, X')$ üzerindeki üç topolojiye sahiptir. Bunlar norm topolojisi, τ_w ve τ_s topolojileridir. Açıkça görülür ki, ne τ_w ne de τ_s topolojisi $K(S, X')$ üzerindeki norm topolojisiyle uyumludur. Bununla beraber $K(S, X')$ üzerindeki $C(S)$ -değişmez alt uzaylar için durum farklıdır. Lomonosov ve Branges' in tekniği kullanılarak, bu topolojiler altında $K(S, X')$ 'nün $C(S)$ -değişmez alt uzaylarının kapanışlarını karakterize edebiliriz.

Teorem 3.3

X bir Banach uzayı olsun. $K(S, X')$ 'nün, $C(S)$ 'nin elemanlarıyla çarpım altında değişmez kalan bir M vektör uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

1) M vektör uzayı, $K(S, X')$ üzerinde τ_w -kapalıdır.

2) M vektör uzayı, $K(S, X')$ üzerinde τ_s - kapalıdır.

3) M vektör uzayı norm kapalıdır.

İspat : (3) $\Rightarrow$ (1) $f_0 \in K(S, X')$ M' nin τ_w -kapanışına ait olsun. $f_0 \in M$ olduğunu göstermek için f_0 ' ın M' nin norm kapanışına ait olduğu ispatlamak yeterlidir. Hahn- Banach teoreminden; $C(S, X')$ üzerindeki bir norm-sürekli $\emptyset$ lineer fonksiyonelinin her $f \in M$ için $\langle \emptyset, f \rangle = 0$ ve $\langle \emptyset, f_0 \rangle = 0$ olduğunu göstermemizle olur. O halde, her $f \in M$ için $\langle \emptyset, f \rangle = 0$ olsun. $\emptyset'$ nin normunun bir olduğunu farzedelim.

Her bir $\alpha \in C(S)$ için $Y = C(S, X')$ üzerinde, $f \in C(S, X')$ için

$$\emptyset_\alpha(f) = \emptyset(\alpha f) \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanan $\emptyset_\alpha$ sürekli lineer fonksiyonelin tanımlayalım. $M, C(S)'$ nin elemanlarının çarpımı altında değişmez olduğundan her $f \in M$ için

$$\langle \emptyset_\alpha, f \rangle = 0 \quad (3.5)$$

olur. Bu da, V' nin Y' ' nde $\emptyset_\alpha$ tarafından üretilen kapalı zayıf* alt uzayı iken her $\theta \in V$ ve $f \in M$ için,

$$\langle \theta, f \rangle = 0 \quad (3.6)$$

olmasını gerektirir. V ile Y' ' nün kapalı birim yuvarının kesişimini U ile gösterelim. $\emptyset = \emptyset_1 \in U$ olduğu açıktır. ψ, U' nun herhangi bir uç noktası olsun. (Branges, 1993)' den elde edilen uç noktalarının karakterizasyonu, her $f \in K(S, X')$ için

$$\psi(f) = \langle x'' \otimes s, f \rangle = \langle x'', f(s) \rangle \quad (3.7)$$

olacak şekilde bir $s \in S$ ve $x'' \in X''$ elemanı mevcuttur. Özellikle; her $f \in M$ için

$$\psi(f) = \langle x'', f(s) \rangle = 0 \quad (3.8)$$

olur. f_0, M' nin τ_w - kapanışında olduğundan $\psi(f_0) = \langle x'', f_0(s) \rangle = 0$ olur. Böylelikle, U' nun her bir ψ uç noktası için $\psi(f_0) = 0$ olduğunu ispatlamış olduk. $\emptyset \in U$ ve Krein-Milman teoremiyle U , uç noktalarının zayıf* kapalı konveks kabuğu olduğundan $\emptyset(f_0) = 0$ sonucuna varırız. (1) $\Rightarrow$ (2) ve (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmeleri topolojinin özelliğinden dolayı açıktır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1' deki τ_s ' yi norm topolojisiyle yer değiştirerek, bu çalışmayı oldukça geliştiren ana sonuçlardan birini verelim.

Teorem 3.4

X bir Banach uzayı olsun. $\mathcal{A}$, $L(X)$ ' in bir alt cebiriyse, aşağıdaki ifadeler denktir:

1) Aşıkır olmayan kapalı bir $\mathcal{A}'$ - değişmez alt uzayı vardır.

2) K kompakt bir operatör olmak üzere; $B, K \in L(X)$ operatörleri vardır ki $B'K'$,

$\{ \alpha T'K' : \alpha \in C(S) \text{ ve } T \in \mathcal{A} \}$ kümesiyle üretilen M vektör uzayının $C(S, X')$ ' ndeki norm kapanışına ait değildir.

İspat : (1) $\Rightarrow$ (2) Önerme 2.27' den; her $T \in \mathcal{A}$ için $\langle x'', T's \rangle = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $x'' \in X''$ ve $s \in X'$ mevcuttur. $s \in S$ olduğunu varsayalım. $\langle s, b \rangle = 1$ ve $\langle x'', b' \rangle = 1$ olacak şekilde $b \in X$ ve $b' \in X'$ elemanlarını alalım. Sonra, $K = s \otimes b$ ve $B = b' \otimes b$ rank-1 operatörlerini göz önüne alalım ve

$$K's = \langle s, b \rangle s = s \quad (3.9)$$

ve

$$B's = \langle s, b \rangle b' = b' \quad (3.10)$$

olduğuna dikkat edelim. $B'K'$ ' nün M' nin norm kapanışı $\overline{M'}$ ' ye ait olmadığını iddia ediyoruz.

Bunu görebilmek için, $C(S, X')$ üzerindeki $\emptyset = x'' \otimes s$ norm sürekli fonksiyonelinin her $T \in \mathcal{A}$ ve $\alpha \in C(S)$ için

$$\langle \emptyset, \alpha T'K' \rangle = \alpha(s) \langle x'', T'K's \rangle = \alpha(s) \langle x'', T's \rangle = 0 \quad (3.11)$$

ifadesini gerçeklediğine dikkat edelim. Yani, $\emptyset, M$ üzerinde sıfırlanır. Diğer taraftan;

$$\emptyset(B'K') = \langle x'', B'K's \rangle = \langle x'', b' \rangle = 1 \quad (3.12)$$

ifadesi $B'K' \notin \overline{M'}$ olduğunu gösterir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $B, K \in L(X)$ istediğimiz özellikleri sağlayan iki operatör olsun. Açıkça, $B'K'$

$K(S, X')$ ' ne aittir ve $M \subseteq K(S, X')$ dür. Ayrıca, M bir $C(S)$ - değişmezdir.

$B'K'$, M' nin norm kapanışına ait olmadığından, Teorem 3.3' den $B'K'$, M' nin $K(S, X')$ ' ndeki τ_w kapanışına ait değildir. Bu nedenle, Yardımcı Teorem 2.32' den her $T \in \mathcal{A}$ için

$$\langle x'', B'K's \rangle = 1, \quad \langle x'', T'K's \rangle = 0 \quad (3.13)$$

koşulunu sağlayan $x'' \in X''$ ve $s \in S$ mevcuttur. Önceki koşul $K's \neq 0$ olmasını gerektirir ve bu nedenden dolayı ikinci koşul da Önerme 2.27' nin $\mathcal{A}'$ ' ne uygulanabileceğini gösterir.

Dual değişmez alt uzay probleminde kastedilmiş olan yaklaşım Branges (1993) tarafından önerilmiştir. Sonra, yukarıdaki düşüncemiz, $\mathcal{A}$ cebiri için ortak bir aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayın varlığı için gerek ve yeter koşul elde etmemizi sağlar. Tek fark, önceki teoremdaki sağdan çarpıma karşıt olarak kompakt operatörü soldan uygulamalıyız.

Teorem 3.5

X bir Banach uzayı olsun. $L(X)'$ in bir $\mathcal{A}$ alt cebiri için aşağıdaki ifadeler denktir.

1) Aşikar olmayan kapalı bir $\mathcal{A}$ - değişmez alt uzay vardır.

2) K kompakt bir operatör olmak üzere $B, K \in L(X)$ operatörleri vardır ki; $K'B'$,

$\{ \alpha K'T' : \alpha \in C(S) \text{ ve } T \in \mathcal{A} \}$ kümesiyle üretilen alt uzayın $C(S, X')$ ' ndeki norm kapanışına ait değildir.

İspat : (1) $\Rightarrow$ (2) Önerme 2.27' den her $T \in \mathcal{A}$ için $\langle x', Tx \rangle = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $x \in X$ ve $x' \in X'$ elemanları vardır. $x' \in S$ olduğunu varsayalım. $\langle b', x \rangle = 1$ olacak şekilde bir $b' \in X'$ alalım ve $K = b' \otimes x \in L(X)$ rank-1 operatörünü dikkate alalım.

$$Kx = \langle b', x \rangle x = x \quad (3.14)$$

olduğunu gözlemleyelim. Sonrasında, $\langle x', b \rangle = 1$ olacak şekilde herhangi bir $b \in X$ seçelim. Şimdi $B = b' \otimes b \in L(X)$ operatörünü tanımlayalım. Açıktır ki; adjoint operatör B' ,

$$B'x' = \langle x', b \rangle b' = b' \quad (3.15)$$

koşulunu gerçekler.

$\{ \alpha K'T' : \alpha \in C(S) \text{ ve } T \in \mathcal{A} \}$ koleksiyonu tarafından üretilen vektör uzayını N ile gösterelim.

$K'B'$ ' nün N' nin norm kapanışına ait olmadığını iddia ediyoruz. Bunun için, $\emptyset = x \otimes x'$ lineer fonksiyonelinin $C(S, X')$ ' nde norm sürekli olduğuna ve her $T \in \mathcal{A}$ ve $\alpha \in C(S)$ ' nin

$$\langle \emptyset, \alpha K'T' \rangle = \alpha(x') \langle x, K'T'x' \rangle = \alpha(x') \langle TKx, x' \rangle = \alpha(x') \langle Tx, x' \rangle = 0 \quad (3.16)$$

ifadesini sağladığına dikkat edelim. Yani $\emptyset = x \otimes x'$, N üzerinde sıfırlanır. Diğer taraftan

$B'x' = b'$ eşitliği;

$$\emptyset(K'B') = \langle x, K'B'x' \rangle = \langle x, K'b' \rangle = \langle Kx, b' \rangle = \langle x, b' \rangle = 1 \quad (3.17)$$

ifadesini üretir. Bu da $K'B'$ ' nün, N' nin norm kapanışına ait olmadığını gösterir.

(2) $\Rightarrow$ (1) B ve K istediğimiz özellikleri sağlayan iki operatör olsun. Yine N , $C(S, X')$ ' nde

$\{ \alpha K'T' : \alpha \in C(S) \text{ ve } T \in \mathcal{A} \}$ koleksiyonu tarafından üretilmiş vektör uzayını gösterebiliriz.

Açıktır ki; $K'B' \in K(S, X')$ ve $N \subseteq K(S, X')$ ' dür. Ayrıca N , $C(S)$ - değişmezdir.

$K'B'$ kompakt operatörü N' nin norm kapanışına ait olmadığından dolayı Teorem 3.3' den $K'B'$, N' nin $K(S, X')$ ' ndeki τ_s kapanışında değildir. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 2.32' den her $T \in \mathcal{A}$ için

$$\langle x'', K'B's \rangle = 1 \text{ ve } \langle x'', K'T's \rangle = 0 \quad (3.18)$$

olacak şekilde $x'' \in X''$ ve $s \in S$ vardır. $\langle x'', K'B's \rangle = 1$ olduğundan $x_0 = K''x'' \neq 0$ olur. Ayrıca

K' nin kompaktlığı $x_0 = K''x'' \in X$ ifadesini gerektirir. Bu nedenle her $T \in \mathcal{A}$ için

$$\langle Tx_0, s \rangle = \langle TK''x'', s \rangle = \langle K''x'', T's \rangle = \langle x'', K'T's \rangle = 0 \quad (3.19)$$

olur ve Önerme 2.27' den ispat tamamlanmış olur.

Bu bölümü sonlandırırken, çalışmamız boyunca verilmiş olan önemli bir gerçeği tekrar vurgulamak istiyoruz. X' in bir aşık olmayan kapalı $\mathcal{A}$ - değişmez alt uzayının varlığı hakkındaki soruyu sormaya başlar başlamaz (veya X' ' ye ait bir kapalı, aşık olmayan $\mathcal{A}'$ - değişmez alt uzayın varlığı hakkında) verilen $\mathcal{A}$ cebirinin kompaktlıkla ilişkilendirilmeye ihtiyacı olmasa da bir kompakt operatörün varlığına ihtiyaç vardır.

4. UYGULAMA

Bu bölümde amacımız, elde ettiğimiz sonuçları ℓ_∞ üzerine etki eden dual cebirler için bir değişmez alt uzay varlık teoremi sunarak örneklendirmektir. Sonucu ifade etmeden önce bir yardımcı teoreme ihtiyacımız var.

Yardımcı Teorem 4.1

X bir Banach uzayı olsun. $L(X)'$ in bir $\mathcal{A}$ alt cebiri için sıfırdan farklı bir $T_0 \in L(X)$ operatörünün varolduğunu varsayalım öyle ki;

1) $T_0, \mathcal{A}'$ nin her elemanı ile değişmelidir.

2) Bir $B \in L(X)$ için adjoint operatör $B', C(S, X)'$ ndeki $\{ \alpha T' T_0' : \alpha \in C(S) \text{ ve } T \in \mathcal{A} \}$

tarafından üretilen vektör uzayının τ_s kapanışına ait değildir. O zaman, aşık olmaya kapalı bir $\mathcal{A}'$ - değişmez alt uzayı vardır.

İspat : Yardımcı Teorem 2.32' den, her $T \in \mathcal{A}$ için

$$\langle x'' \otimes s, B' \rangle = x''(B's) = 1 \quad (4.1)$$

ve

$$\langle x'' \otimes s, T' T_0' \rangle = \langle x'', T' T_0' s \rangle = 0 \quad (4.2)$$

koşulunu sağlayan $x'' \in X''$ ve $s \in S$ vektörleri mevcuttur. $x' = T_0' s \neq 0$ ise o zaman, her $T \in \mathcal{A}$ için $\langle x'', T' x' \rangle = 0$ bağıntısı Önerme 2.27 ile birlikte bir aşık olmaya kapalı $\mathcal{A}'$ - değişmez alt uzayının olduğunu gösterir.

$T_0' s = 0$ olduğunu varsayalım ve N ile T_0' ' nün sıfır uzayını gösterelim. $T_0, \mathcal{A}'$ nin her elemanı ile değişmeli olduğundan N bir kapalı $\mathcal{A}'$ - değişmez alt uzaydır. $x''(B's) = 1$ ' den $s \neq 0$ sonucunu çıkarırız. $s \in N$ olduğundan N' nin sıfırdan farklı olduğu görülür. Diğer taraftan, $N = X'$ ise $T_0' = 0$ ve bu yüzden $T_0 = 0$ olur, bu bir çelişkidir. Bu nedenle N aşık olmaya kapalı bir $\mathcal{A}'$ - değişmez alt uzaydır.

Önceden bahsettiğimiz gibi, ℓ_∞ Banach uzayı (ayrılabilir olmayan) üzerindeki her sürekli lineer operatör, aşık olmaya kapalı bir değişmez alt uzaya sahiptir. ℓ_1 ' deki sınırlı operatörlerin bir değişmeli cebirinin dual cebirinin aşık olmaya kapalı bir değişmez alt uzaya sahip olması açıktır. Bu durum (Honor, 1985)' de ispat edilmiştir. Bu çalışmadaki teknikleri kullanarak bu ilginç sonuca değişik bir ispat sunmaya hazırız.

Teorem 4.2 : Eğer $\mathcal{A}$, ℓ_1 üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin bir değişmeli cebiriye, ℓ_∞ üzerindeki lineer sınırlı operatörlerin $\mathcal{A}'$ dual cebiri aşık olmaya kapalı $\mathcal{A}'$ - değişmez alt uzaya sahiptir.

İspat : $\mathcal{A}$, ℓ_1 üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin bir değişmeli cebiri olsun. Eğer $\mathcal{A}$, ℓ_1 üzerindeki I birim operatörüyle üretilen cebirle uyuyorsa sonuç aşıkardır. Bu nedenle, her λ kompleks sayısı için $T \neq \lambda I$ olacak şekilde en az bir $T \in \mathcal{A}$ olduğunu varsayalım. T' nin bir yaklaşıklık noktası spektrumunda bir λ_0 ' ı sabit tutalım ve

$$T_0 = T - \lambda_0 I \quad (4.3)$$

operatörünü dikkate alalım. Ayrıca, ℓ_1 ' in birim vektörlerinin bir $\{x_n\}$ dizisini seçelim (yani, her n doğal sayısı için $\|x_n\|_1 = 1$ ' dir) ve bu,

$$\|T_0 x_n\|_1 = \|T x_n - \lambda_0 x_n\|_1 \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

koşulunu sağlasın. Açıktır ki, T_0 , $\mathcal{A}'$ ' nin her elemanı ile değişmelidir.

Sonra, $\{\alpha T' T_0' : \alpha \in C(S) \text{ ve } T \in \mathcal{A}\}$ fonksiyonlarının bir koleksiyonu tarafından üretilen $C(S, X')$ ' nün M alt uzayını düşünelim. $I' : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ (S ' ye kısıtlanmış) birim operatörünün, M' nin τ_s - kapanışına ait olmadığını iddia ediyoruz.

Bunu görmek için, I' ' nün M' nin τ_s kapanışına ait olduğunu varsayalım. O halde, eğer $\varepsilon > 0$ ve $s \in S$ sabit alırsak

$$\|(I' - \sum_{i=1}^m \alpha_i T_i' T_0')(s)\| < \varepsilon \quad (4.5)$$

olacak şekilde $\alpha_i \in C(S)$ ve $T_i \in \mathcal{A}$ ($i = 1, \dots, m$) mevcuttur. Bu, $\|x\| \leq 1$ koşulunu sağlayan

her $x \in X$ için

$$| \langle x, s \rangle - \sum_{i=1}^m \alpha_i(s) \langle x, T_i' T_0' s \rangle | < \varepsilon \quad (4.6)$$

olmasını gerektirir. $\mathcal{A}'$ nın değişmeli bir cebir olduğunu hesaba katarsak, (4.6) ifadesinden her $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ için

$$| \langle x, s \rangle - \sum_{i=1}^m \alpha_i(s) \langle T_0 x, T_i' s \rangle | < \varepsilon \quad (4.7)$$

elde edilir. Özellikle, (4.4) ifadesinden her n için

$$| \langle x_n, s \rangle - \sum_{i=1}^m \alpha_i(s) \langle T_0 x_n, T_i' s \rangle | < \varepsilon \quad (4.8)$$

olur. Bu da yeterince büyük her n için

$$| \langle x_n, s \rangle | < \varepsilon \quad (4.9)$$

ifadesini üretir. Başka bir deyişle $\{x_n\}$ dizisi ℓ_1 'de sıfıra zayıf yakınsar. ℓ_1 Schur özelliğine sahip olduğundan $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$ elde edilir, bu da her n için $\|x_n\|_1 = 1$ ifadesiyle çelişir. Bu nedenle I' birim operatörü M' nin τ_s kapanışına ait değildir ve Yardımcı Teorem 4.1' den sonuç elde edilir.

Bu yaptığımız ispat aşağıda vereceğimiz genel neticeyi üretir.

Sonuç 4.3

X Schur özelliğini sağlayan bir Banach uzayı ve $\mathcal{A}, L(X)'$ in bir değişmeli alt cebiriyse, $L(X)'$ nün $\mathcal{A}'$ dual cebirinin aşıkarak olmayan kapalı bir $\mathcal{A}'$ - değişmez alt uzayı vardır.

5. BANACH LATİSLERDE DEĞİŞMEZ KAPALI İDEALLER

Bu bölümde E bir Banach latis, X de bir Banach uzayı olmak üzere $L(E)$ ' ye ait operatörlerin bir koleksiyonunun değişmez bıraktığı aşıkak olmayan kapalı idealler üzerinde çalışacağız.

Tanım 5.1

E bir reel Banach latis olmak üzere, $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ kümesine E ' nin pozitif konisi denir.

Tanım 5.2

E bir Banach latis ve bir ışıın $R_{x_0} = \{\lambda x_0 : \lambda \geq 0\}$, $0 \neq x_0 \in E_+$ olsun. Eğer $x \in R_{x_0}$, $x = y + z$ ve $y, z \in E_+$ ifadeleri $y, z \in R_{x_0}$ ' ı içeriyorsa R_{x_0} ' a pozitif koni E_+ için bir uç ışıın denir.

Tanım 5.3

Bir Banach latisde tanımlı, verilen lineer operatör tarafından kendi içine alınan kapalı bir ideale kapalı değişmez ideal denir. Yani, J bir ideal ve T bir lineer operatör olsun, $T(J) \subseteq J$ olur. E bir Banach latis olmak üzere, $L(E)$ ' ye ait olan operatörlerin Γ alt kümesi için, Γ ' daki tüm operatörlerle değişmez kalan aşıkak olmayan kapalı bir ideal varsa Γ ' ya ayrıştırılabilir denir, aksi takdirde ayrıştırılmaz olarak adlandırılır. $L(E)$ ' nin Γ alt kümesine ait olan tüm kapalı değişmez ideallerin koleksiyonu $\text{Lat}(\Gamma)$ ile gösterilir. X bir Banach uzayı ise Γ ' ya ait olan tüm kapalı değişmez alt uzayların koleksiyonu $\text{Lat}(\Gamma)$ ile gösterilir. Eğer $T \in L(X)$ iken $\Gamma = \{T\}$ ise Γ yerine T kullanacağız.

Tanım 5.4

Bir Banach latis E ' deki pozitif bir T operatörü için E ' nin bir kapalı ideali, E ' nin T ile değişmeli olan tüm S pozitif operatörleri altında değişmez kalırsa p - hiperdeğişmez adını alır. E üzerinde bir pozitif operatörün pozitif komutantı $\{T\}_+^C$ ile gösterilir ve E ' ye ait, T ile değişmeli tüm S pozitif operatörlerin koleksiyonudur.

Önerme 5.5

Bir Banach latis E ' nin herhangi bir J ideali için E ' den E/J ' ye giden kanonik dönüşüm pozitif ise E/J , en iyi sıralaması altında bir vektör latistir. Eğer J kapalı ise E/J Banach latistir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 5.6

X bir Banach uzayı olsun. Eğer $T \in L(X)$ ve $M \in \text{Lat}(T)$ ise, o zaman T' nin X/M' ye sıkıştırması $\hat{T}$ ile gösterilir ve

$$\hat{T}(x + M) = Tx + M \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır ve $\hat{T}$, X/M üzerinde iyi tanımlı bir operatördür.

Şimdi T ile ilgili birkaç yardımcı teorem ifade edelim.

Yardımcı Teorem 5.7

E bir Banach latis olsun. Eğer $T \in L(E)$ operatörü pozitif ve $I \in \text{Lat}(T)$ ise $\hat{T}$ da E/I üzerinde bir pozitif operatördür (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Yardımcı Teorem 5.8

X bir Banach uzayı olsun. $T \in L(X)$ ve $M \in \text{Lat}(T)$ olduğunu varsayalım.

- (a) T yarı nilpotentse $\hat{T}$ da X/M üzerinde bir yarı nilpotent operatördür.
- (b) T kompaktsa $\hat{T}$ da X/M üzerinde bir kompakt operatördür.
- (c) T zayıf kompaktsa $\hat{T}$ da X/M üzerinde bir zayıf kompakt operatördür.

Yardımcı Teorem 5.9

E bir Banach latis olmak üzere, $S, T \in L(E)$ ve $I \in \text{Lat}(\{S, T\})$ olduğunu varsayalım. $\hat{S}$ ve $\hat{T}$ da sırasıyla S ve T' nin E/I' ya sıkıştırması olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (a) T, S' yi domine eden bir pozitif operatörse $\hat{T}$ da $\hat{S}'$ yi domine eder.
- (b) $S \leq T$ ise $\hat{S} \leq \hat{T}$ olur.

Yardımcı Teorem 5.10

Eğer I , AL veya AM- uzayı olan E' nin bir kapalı ideali ise I ve E/I sırasıyla AL veya AM-uzaylarıdır (Schaefer, 1974).

Yardımcı Teorem 5.11

Eğer e , bir AM-uzayı olan E' nin birimi ve I da E' nin bir kapalı ideali ise $e + I$ da E/I' nin

birimidir (Jahandideh , 1997).

Teorem 5.12

Eğer E birimli bir AM- uzayının kapalı idealiyse veya E, pozitif konisi uç ışını kapsayan bir Banach latis ve $T \in L(E)$ bir yarı nilpotent operatör ise T ayrıştırılabilir (Schaefer, 1974).

Teorem 5.13

Bir Banach latis üzerindeki her kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatör ayrıştırılabilir (Pagter, 1986).

Teorem 5.14

Bir Banach latis üzerindeki her kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatörün aşık olmaya bir p- hiperdeğişmez kapalı ideali vardır (Abramovich vd. , 1992).

Sonuç 5.15

E bir Banach latis olsun. $T \in L(E)$ ' nin bir zayıf kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatörü ve E' nin bir AL veya AM- uzay olduğunu varsayalım. O zaman, T^2 bir aşık olmaya bir p- hiperdeğişmez kapalı ideali sahiptir. Özellikle, T' nin aşık olmaya bir p- hiperdeğişmez kapalı bir ideali vardır.

İspat : T^2 bir kompakt operatördür (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985). Teorem 5.14' den ve $\{T\}^C \subseteq \{T^2\}^C$ kapsamasından sonuca ulaşırız.

Sonuç 5.16

E bir Banach latis olsun. Γ , E üzerindeki pozitif operatörlerin bir değişmeli koleksiyonu ve T bir yarı nilpotent pozitif operatör olsun. O zaman aşağıdaki her bir durumda Γ ayrıştırılabilir.

(a) T kompakt ve $T \in \Gamma'$ dur.

(b) T bir kompakt operatör tarafından domine edilmiş ve $T^3 \in \Gamma'$ dur.

(c) E bir AM veya AL- uzayı, T zayıf kompakt ve $T^2 \in \Gamma'$ dur.

(d) E bir AM veya AL- uzayı, T bir zayıf kompakt operatör tarafından domine edilmiş ve $T^4 \in \Gamma'$ dur.

İspat : (a) $\Gamma \subseteq \{T\}_+^C$ olduğundan, Teorem 5.14' den istenilen sonuç elde edilir.

(b) T^3 kompaktır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) ve (a)' dan Γ ayrıştırılabilir.

(c) Sonuç 5.15' de ispatlandığı gibi T^2 kompaktır ve (a)' yı uygularsak sonuç elde edilir.

(d) T^2 zayıf kompaktır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) ve bu nedenle Γ ayrıştırılabilir.

Teorem 5.17

E bir Banach latis olsun. $T \in L(E)$ sıfırdan farklı pozitif bir kompakt operatör olsun. Eğer T, E' deki bir $x_0 > 0$ noktasında yarı nilpotent ise o zaman, T bir aşık olmaya p- hiperdeğişmez kapalı ideale sahiptir.

İspat : Sıfır ideal $N_T = \{x \in E : T(|x|) = 0\}$, T için bir p- hiperdeğişmez kapalı ideal olduğundan $Tx_0 = 0$ için teoremi gerçekleştirebiliriz. $Tx_0 \neq 0$ için devam edelim.

$$F = \overline{\{x \in E : \exists y \geq 0 \text{ öyle ki } |x| \leq Ty\}} \quad (5.2)$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n \|x_n\|} > 0 \quad (5.3)$$

ve $\{x_n\}$, $T(E)$ ' de bir norm yoğun dizi iken $\overline{E_u} = F$ dir (Abramovich vd., 1992). Bundan dolayı, eğer E bir yarı iç nokta içermiyorsa F, T için bir aşık olmaya p- hiperdeğişmez kapalı idealdir. Aksi takdirde (Pagter, 1986)' daki çalışmada olduğu gibidir.

Her bir $f > 0$ için, $\overline{T[f]}$, $T[f] = \{Sf : S \in T\}$, $T = \{S_1 - S_2 : S_1, S_2 \in T^+\}$ ve

$$T^+ = \{S \in L(E) : 0 \leq S \leq R, \text{ bir } R \in \{T\}_+^C \text{ için}\} \quad (5.4)$$

iken, T altında değişmez kalan bir sıfırdan farklı kapalı idealdir.

$\overline{T[f]}$, T için bir p- hiperdeğişmez kapalı idealdir (Abramovich vd., 1992), bu nedenle $\overline{T[f]} \neq E$ olacak şekilde E' de $f \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. Aksini kabul edelim, E' deki tüm $f \neq 0$ ' lar için $\overline{T[f]} = E$ olsun. x_0 ve Tx_0 sıfıra eşit olmadığından, $0 \neq \overline{T(U)}$ ve $0 \neq \overline{U}$ olacak şekilde x_0 merkezli U açık yuvarını seçebiliriz. Bir n doğal sayısı, $\{1, 2, \dots, n\}$ içinde

bir $\{j_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi ve her m için T' de $g_m = S_{j_m} T S_{j_{m-1}} T \dots S_{j_1} T x_0 \in U$ olacak şekilde bir $\{S_j\}_{j=1}^n$ dizisi bulabiliriz (Pagter, 1986).

$$\|g_m\| \leq (2C)^m \|T^m x_0\| \quad (5.5)$$

olduğunu görelim, burada

$$C = \max \left\{ \|R_j^{(i)}\| : j = 1, \dots, n ; i = 1, 2 \right\} \quad (5.6)$$

şeklindedir. T, x_0 ' da yarı nilpotent olduğundan $\|g_m\| \rightarrow 0$ olur, dolayısıyla $0 \in \overline{U}$ elde edilir bu da U ' nun seçimiyle çelişir.

Yardımcı Teorem 5.18

E bir Banach latis olsun. $\Gamma \subseteq L(E)$, $T \in L(E)$, T bir pozitif operatör ve $I \in \text{Ilat}(T)$ olsun. O zaman T, Γ ' daki tüm operatörleri domine ediyorsa veya Γ ' daki tüm elemanlar pozitifse ve her $S \in \Gamma$ için $S \leq T$ ise $I \in \text{Ilat}(\Gamma)$ ' dir.

Bu yardımcı teorem ve önceki tüm sonuçlardan diğer ayrıştırılabilirlik neticelerini kolaylıkla elde edebiliriz. Bunlardan birkaç örnek verelim.

Sonuç 5.19

E bir Banach latis olsun. $\Gamma \subseteq L(E)$ ve T ' nin E ' de bir yarı nilpotent pozitif operatör olduğunu varsayalım. T, Γ ' nun tüm elemanlarını domine etsin veya T, Γ ' yu majorize etsin. O zaman aşağıdaki koşulların her birinde Γ ayrıştırılabilir.

- (a) E bir AM- uzayının kapalı bir idealidir.
- (b) E , pozitif konisi uç ışını içeren bir Banach latistir.
- (c) E bir AL- uzaydır ve T zayıf kompakttır.
- (d) E herhangi bir Banach uzaydır ve T kompakttır.

6. SIKIŞTIRMALI AYRIŞTIRILABİLİRLİK

Bu bölümde amacımız sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirlik konusunu tanım ve önermelerle inceleyerek sonuçlar elde etmektir. Bir önceki bölümden hatırlayacağımız gibi Γ , E Banach latisi üzerindeki pozitif operatörlerin bir değişmeli koleksiyonu ve $\text{Ilat}(\Gamma)$ da $L(E)$ 'nin Γ alt kümesine ait olan tüm kapalı değişmez ideallerin koleksiyonudur.

Tanım 6.1

E bir Banach latis olsun. $L(E)$ 'nin bir Γ alt kümesi için, $I \subseteq J$ koşulunu sağlayan herhangi $I, J \in \text{Ilat}(\Gamma)$ için $\text{Boy}(J/I) \geq 2$ ve Γ 'nin J/I 'ya sıkıştırılması $\hat{T}$ ayrıştırılabilir ise Γ sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir denir.

Önerme 6.2

E, f birimli bir AM- uzayı F 'nin bir kapalı ideali olsun. $T \in L(E)$ bir yarı nilpotent pozitif operatör ise o zaman T sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir.

İspat : Teorem 5.12' den T ayrıştırılabilir. $I \subseteq J$ ve $\text{Boy}(J/I) \geq 2$ olacak şekilde $I, J \in \text{Ilat}(T)$ olsun. E , AM- uzayı olduğundan J de bir AM- uzayıdır. I , hem J hem de F 'nin bir kapalı ideali olduğundan $J/I, F/I$ 'nin bir kapalı idealidir, J/I ve F/I Yardımcı Teorem 5.10' dan AM- uzayıdır. Ayrıca Yardımcı Teorem 5.11' den $f + I, F/I$ için bir birimdir.

T, E üzerinde yarı nilpotent pozitif operatör olduğundan T, J üzerinde bir yarı nilpotent pozitif operatördür. Bu nedenle $\hat{T}$ da Yardımcı Teorem 5.7 ve Yardımcı Teorem 5.8(a) ile J/I üzerinde bir yarı nilpotent pozitif operatördür. O halde Teorem 5.12 $\hat{T}$ 'nin ayrıştırılabilir olmasını gerektirir.

Önerme 6.3

E bir Banach latis olsun. $K \in L(E)$ bir kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatör ise o zaman K ve $\Gamma = \{K\}_+^C$ sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir.

İspat : Teorem 5.14' den K ve Γ ayrıştırılabilir. $I \subseteq J$ ve $\text{Boy}(J/I) \geq 2$ koşullarını sağlayan $I, J \in \text{Ilat}(K)$ veya $\text{Ilat}(\Gamma)$ alalım. Yardımcı Teorem 5.7, Yardımcı Teorem 5.8 (a) ve Yardımcı Teorem 5.8 (b)' den $\hat{K}$ 'nin J/I üzerinde bir kompakt, yarı nilpotent, pozitif

operatör olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla Teorem 5.14' den, $\widehat{\Gamma} \subseteq \{\widehat{K}\}^c$ olduğundan $\widehat{K}$ ve Γ' nun J/I' ya sıkıştırması olan $\widehat{\Gamma}$ ayrıştırılabilirdir.

Önerme 6.4

E bir Banach latis olsun. $K \in L(E)'$ nin bir zayıf kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatör olduğunu ve E' nin AL veya AM- uzayı olduğunu varsayalım. O zaman K ve $\{K^2\}_+^c$ sıkıştırmalı ayrıştırılabilirdir. Özellikle $\{K\}_+^c$ sıkıştırmalı ayrıştırılabilirdir.

İspat : Sonuç 5.15, Yardımcı Teorem 5.7, Yardımcı Teorem 5.8 ve Yardımcı Teorem 5.10 uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 6.5

E bir Banach latis olsun. $T \in L(E)$ bir sıfırdan farklı yarı nilpotent, pozitif operatör ve bir sıfırdan farklı kompakt $K \in L(E)$ operatörünü domine eden sıfırdan farklı bir $S \in \{T\}_+^c$ operatörü mevcutsa $\{S, T\}$ sıkıştırmalı ayrıştırılabilirdir.

İspat : T bir yarı nilpotent pozitif operatör olduğundan E' de öyle bir $x_0 > 0$ vardır ki T, x_0' da yarı nilpotenttir. Dolayısıyla, $\{S, T\}$ ayrıştırılabilirdir (Abramovich vd., 1994). $I, J \in \text{Ilat}(\{S, T\})$ olduğunu varsayalım. $I, J \in \text{Ilat}(K)$ olduğu açıktır ve Yardımcı Teorem 5.9' dan S' nin J/I' ya sıkıştırması olan $\widehat{S}$, K' nin J/I' ya sıkıştırması olan $\widehat{K}'$ yi domine eder. Boy $(J/I) \geq 2$ için $\{\widehat{S}, \widehat{T}\}$ ayrıştırılabilirdir (Abramovich vd., 1994). Bu yüzden $\{S, T\}$ sıkıştırmalı ayrıştırılabilirdir.

Önerme 6.6

E bir Banach latis olsun. $\Gamma \subseteq L(E)$ ve $T \in \Gamma'$ nun bir sıkıştırmalı ayrıştırılabilir pozitif operatör olduğunu varsayalım. O zaman eğer T, Γ' nun tüm elemanlarını domine ediyorsa veya Γ' nun tüm elemanları pozitif operatörler ve T, Γ' yu majorize ediyorsa Γ sıkıştırmalı ayrıştırılabilirdir.

Sonuç 6.7

E bir Banach latis olsun. $\Gamma \subseteq L(E)$, $T \in \Gamma$ bir yarı nilpotent pozitif operatör olsun; T , Γ' 'nin tüm elemanlarını domine etsin veya Γ' 'nin tüm elemanları pozitif olsun ve T , Γ' 'yu majorize etsin. O zaman aşağıdaki durumların her birinde Γ sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir.

- (i) E bir AM- uzayının kapalı bir idealidir.
- (ii) E bir AL- uzayı ve T zayıf kompaktır.
- (iii) E herhangi bir Banach latis ve T kompaktır.

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada çoğu Banach uzaylarında operatör teorisiyle uğraşan matematikçilerin çözmeye çalıştığı değişmez alt uzay problemi üzerinde çalıştık. Bir X Banach uzayı için $L(X)$ ' in bir $\mathcal{A}$ alt cebiri için aşıkâr olmayan $\mathcal{A}$ - değişmez alt uzayın varlığını gördük. Sonrasında elde ettiğimiz bu sonucu ℓ_∞ üzerine etki eden dual cebirlerde uyguladık.

Banach latislerde de değişmez alt uzay probleminin değişmez ideal versiyonu ile ilgilendik. Buradaki çalışmanın ana neticelerinden biri yarı nilpotent pozitif operatörler veya kompakt pozitif operatörlerin belli bir koleksiyonu altında değişmez kalan kapalı ideallerin varlığıdır.

Son olarak da Banach latislerde sıkıştırılabilir ayrıştırılabilirlik konusunu inceledik. Burada elde ettiğimiz sonuçlardan biri de AL veya AM - uzayı olan bir E Banach latisi için $L(E)$ ' ye ait olan zayıf kompakt, yarı nilpotent, pozitif operatörün sıkıştırılabilir ayrıştırılabilir olduğudur.

KAYNAKLAR

- Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1992), "On The Spectral Radius Of Positive Operators", Math., 211:593-607.
- Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1994), "Invariant Subspace Theorems For Positive Operators", J. Funct. Anal., 124:95-111.
- Abramovich, Y. A., Aliprantis, C.D ve Burkinshaw, O., (1995), "Another Characterization Of The Invariant Subspace Problem", American Math. Soc., 75:15-31.
- Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1985), Positive Operators, Academic Pres, New York/ London.
- Branges, L., (1959), "The Stone-Weierstrass Theorem", Proc. Amer. Math. Soc., 10:822-824.
- Branges, L., (1993), "A Construction Of Invariant Subspaces", Math. Nachr., 163:163-175.
- Dunford, N. ve Schwartz, J.T., (1958), Linear Operators I, Wiley, New York.
- Enflo, P., (1975-1976), "On The Invariant Subspace Problem For Banach Spaces", Seminaire Maurey-Schwarz, 158:213-313.
- Honor, R.B., (1985), "Density And Transitivity Results On ℓ_∞ and ℓ_1 ", J. London Math. Soc., 32:521-527.
- Jahandideh, M.T., (1997), "On The Ideal-Triangularizability Of Positive Operators On Banach Lattices", Proceedings Of The American Mathematical Society, 125:2661-2670.
- Lomonosov, V.I., (1973), "Invariant Subspaces For Operators Commuting With Compact Operators", Funktsional. Anal. I Prilozhen, 7:55-56 (Russian); Functional Anal. Appl. , 7:213-214 (English).
- Lomonosov, V.I., (1991), "An Extension Of Burnside's Theorem To Infinite-Dimensional Spaces", Israel J. Math., 75:329-339.
- Pagter, B., (1986), "Irreducible Compact Operators", Math., 192:149-153.
- Read, C.J., (1985), "A Solution To The Invariant Subspace Problem On The Space ℓ_1 ", Bull. London Math. Soc., 17:305-317.
- Schaefer, H.H., (1974), Banach Lattices And Positive Operators, Springer-Verlag, Berlin/ New York.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 23.11.1981

Doğum Yeri İstanbul

Lise 1995-1999

Pertevniyal Lisesi

Lisans 1999-2004

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Çalıştığı Kurumlar

2003-2004

Pev Dersanesi

2005-Devam ediyor

YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi