

**ÇOK GRUPLU NÖTRON DİFÜZYON DENKLEMİNİN  
KUADRATİK SINIR ELEMANLARI  
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Menekşe KAYA  
(304951057)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 8 Mayıs 2006  
Tezin Savunulduğu Tarih : 15 Haziran 2006**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Bilge ÖZGENER  
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Melih GEÇKİNLİ (İ.T.Ü.)  
Prof.Dr. Cemal YILDIZ (İ.T.Ü.)**

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada çok emeği geçen, sabırla anlatan ve bilgilerinden yararlandığım çok değerli hocam Prof. Dr. Bilge Özgener'e teşekkür ederim. Ayrıca öğrenim hayatım boyunca emeği geçen tüm hocalarıma saygılarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca beni destekleyen aileme, özellikle babama sevgi ve teşekkürlerimi sunarım. Zeynep ve Selim' e sevgilerimle.

Mayıs 2006

Menekşe KAYA

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖNSÖZ</b>	<b>ii</b>
<b>KISALTMALAR</b>	<b>v</b>
<b>TABLO LİSTESİ</b>	<b>vi</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	<b>vii</b>
<b>SEMBOL LİSTESİ</b>	<b>viii</b>
<b>ÖZET</b>	<b>ix</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>x</b>
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2. ÇOK GRUPLU NÖTRON DİFÜZYON PROBLEMLERİNDE SINIR ELEMENLARI YÖNTEMİ</b>	<b>3</b>
2.1. Üç Gruplu Sınır İntegral Denklemi Türetimi	4
2.2. Çok Gruplu İki Boyutlu Nötron Difüzyon Denklemi Eşdeğer Sınır İntegral Denklemi Türetimi	14
2.3. Sınır İntegral Denklemine Kuadratik Sınır Elemanları Yöntemi İle Ayrıklaştırılması	18
2.4. Sınır İntegrallerinin Hesabı	22
2.4.1. h İntegrallerinin Hesabı	25
2.4.2. g İntegrallerinin Hesabı	26
2.5. Kaynak Teriminin Hesabı	35
2.6. İç Akıların Hesabı	40
<b>3. SAYISAL UYGULAMALAR</b>	<b>43</b>
3.1. Sonsuz Ortam Sabit Kaynak Problemi	44
3.2. Sonsuz Ortam Yetkinlik-Özdeğer Problemi	46
3.3. Üç Gruplu Silindir Problemi	52
3.4. Altı Gruplu Sonlu Ortam Yetkinlik-Özdeğer Problemi	58
<b>4. SONUÇLAR</b>	<b>61</b>
<b>KAYNAKLAR</b>	<b>62</b>
<b>EKLER</b>	
<b>EK.A ÜÇ GRUPLU SONSUZ ORTAM PROBLEMİ SONUÇLARI</b>	<b>64</b>
<b>EK.B ÜÇ GRUPLU SİLİNDİR PROBLEMİNE AİT SONUÇLARI</b>	<b>67</b>
<b>EK.C GAUSS İNTEGRASYONU</b>	<b>71</b>
<b>EK.D İKİ BOYUTLU GREEN FONKSİYONU TEMEL ÇÖZÜMÜ</b>	<b>74</b>

<b>EK.E BEMGQ PROGRAMINA AİT BİLGİLER</b>	<b>76</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	<b>82</b>

## **KISALTMALAR**

**BEM** : Sınır Elemanlar Yöntemi ( Boundary Element Method)

## TABLO LİSTESİ

No		<u>Sayfa</u>
<b>Tablo 2.1.</b>	İkinci derece Lagrange baz fonksiyonları.....	24
<b>Tablo 3.1.</b>	Üç gruplu sonsuz ortam probleminde kullanılan sabitler...	45
<b>Tablo 3.2.</b>	Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminin analitik sonuçları.....	46
<b>Tablo 3.3.</b>	Üç gruplu sonsuz ortam yetkinlik-özdeğer problemi $k_{\infty}$ sonuçları.....	48
<b>Tablo 3.4.</b>	Üç gruplu sonsuz ortam analitik akı sonuçları.....	51
<b>Tablo 3.5.</b>	Üç gruplu sonsuz ortam problemi için BEMGQ ile bulunan ortalama akı sonuçları ve %hataları.....	51
<b>Tablo 3.6.</b>	Üç gruplu sonlu ortam silindir probleminde kullanılan gruptan gruba saçılma sabitleri.....	54
<b>Tablo 3.7.</b>	Üç gruplu silindir probleminde kullanılan sabitler.....	54
<b>Tablo 3.8.</b>	Üç gruplu silindir probleminde BEMGQ programı ile hesaplanan $k_{etk}$ sonuçları.....	55
<b>Tablo 3.9.</b>	Altı gruplu sonlu ortam yetkinlik-özdeğer probleminde kullanılan sabitler.....	58
<b>Tablo 3.10.</b>	Altı grup için sabit, lineer ve kuadratik sınır elemanları kullanılarak elde edilen $k_{etk}$ sonuç tablosu.....	59
<b>Tablo A.1.</b>	Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ programı ile bulunan birinci grup akı ortalamaları..	64
<b>Tablo A.2.</b>	Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ programı ile bulunan ikinci grup akı ortalamaları..	65
<b>Tablo A.3.</b>	Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ programı ile bulunan üçüncü grup akı ortalamaları..	66

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : İki boyutlu probleme ait tanım bölgesi ve sınır koşulları	4
Şekil 2.2 : Sistem sınırının kuadratik sınır elemanlarına bölünmesi	18
Şekil 2.3 : Katsayılar matrisi hesabı için gerekli eleman dönüşümü	23
Şekil 2.4 : Sistemin alt bölgelere ayrılması	35
Şekil 2.5 : İki boyutta dörtgen eleman dönüşümü	36
Şekil 2.6 : İki boyutta üçgen eleman dönüşümü	37
Şekil 3.1 : 1/8' lik kare sistem gösterimi	45
Şekil 3.2 : Üç gruplu sonsuz ortam yetkinlik-özdeğer problemi $k_{\infty}$ sonuçları	49
Şekil 3.3 : Altı grup için sabit, lineer ve kuadratik sınır elemanları kullanılarak elde edilen yetkinlik-özdeğer sonuçları grafiği	60
Şekil A.1 : Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ programı ile bulunan birinci grup ortalama akıları grafiği	64
Şekil A.2 : Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ programı ile bulunan ikinci grup ortalama akıları grafiği	65
Şekil A.3 : Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ programı ile bulunan üçüncü grup ortalama akıları grafiği	66
Şekil B.1 : 8 adet sınır elemanı kullanılarak elde edilen birinci grup akıları sonuçları grafiği	67
Şekil B.2 : 8 adet sınır elemanı kullanılarak elde edilen ikinci grup akıları sonuçları grafiği	68
Şekil B.3 : 8 adet sınır elemanı kullanılarak elde edilen üçüncü grup akıları sonuçları grafiği	68
Şekil B.4 : 15 adet sınır elemanı kullanılarak elde edilen birinci grup akıları sonuçları grafiği	69
Şekil B.5 : 15 adet sınır elemanı kullanılarak elde edilen ikinci grup akıları sonuçları grafiği	69
Şekil B.6 : 15 adet sınır elemanı kullanılarak elde edilen üçüncü grup akıları sonuçları grafiği	70

## SEMBOL LİSTESİ

$S_g(\vec{r})$	: Nötron Kaynağı ( $cm^{-3}sn^{-1}$ )
$\Phi_g(\vec{r})$	: g grubuna ait nötron Akısı ( $cm^{-2}sn^{-1}$ )
$D_g$	: g grubuna ait difüzyon Sabiti ( $cm$ )
$h_g^{ij}$	: H matrisinin elemanları
$g_g^{ij}$	: G matrisinin elemanları
$P_n$	: G matrisinin köşegen elemanlarının hesabında kullanılan Bessel katsayıları
$\xi$	: Gauss İntegrasyon noktalarının koordinatları
$\xi'$	: Logaritmik Gauss İntegrasyon noktalarının koordinatları
$w$	: Gauss İntegrasyon ağırlıkları
$w'$	: Logaritmik Gauss İntegrasyon ağırlıkları
$\psi(\zeta)$	: Sınır Elemanları Şekil Fonksiyonu
$\Sigma_{r,g}$	: g' inci grup çıkartma tesir kesiti
$\Sigma_{r,g \leftarrow g'}$	: g' 'ncü gruptan g_inci gruba saçılma tesir kesiti
$\Sigma_{f,g}$	: g' inci grup fisyon tesir kesiti
$\chi_g$	: fisyonunda yayınlanan bir nötronun g_inci gruba ait olma olasılığı
$\nu_g$	: g' inci grup nötronları tarafından yol açılan fisyonlarda yayınlanan ortalama nötron sayısı
$G(r, \rho)$	: Green Fonksiyonu

## ÇOK GRUPLU NÖTRON DİFÜZYON DENKLEMİNİN KUADRATİK SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

### ÖZET

Bu çalışmada çok gruplu nötron difüzyon denklemi, sınır elemanlar yönteminin kuadratik tipli elemanı ile çözülmüştür. Sınır elemanlar yöntemi, ele alınan geometrinin sadece sınırlarında ele alınan ve problem boyutunun bir düşmesini sağlayan bir yöntemdir. Öte yandan çözüme ulaşabilmek için temel çözüm fonksiyonuna ihtiyaç duyar. Sonsuz ortam Green fonksiyonu temel çözümdür.

İki boyutlu, çok gruplu difüzyon denklemi, sınırlarda tek boyutlu Gauss integrasyonu kullanılarak çözülmüştür. İlk bölümde sınır elemanlar yöntemi (BEM) hakkında bilgi ve gelişimleri verilmiştir. İkinci bölümde üç gruplu nötron difüzyon denkleminin türetimi ve çok gruplu nötron difüzyon denklemi teorisi verilmiştir. Çok gruplu difüzyon denkleminin sınır elemanları ile çözümünde kaynak terimi için hacim integrasyonunun çözümüne gerek vardır. Kaynak terimi içinde iki ayrı katkı elemanı vardır, bunlar; fisyon ve saçılma kaynaklarının katkılarıdır. Bu çalışmada saçılma kaynağı hacim integrasyonunu, sınır integrasyonuna dönüştürecek bir yöntem kullanılmıştır. Ayrıca, kuadratik sınır elemanlarının kullanılma sebebi eğri yüzeylerin modellenmesinin mümkün olmasıdır. Çünkü sabit ve lineer sınır elemanları düzgün geometrilerde kullanmak mümkündür. Dolayısıyla kuadratik elemanlar her türlü yüzeyin modellenmesine izin vermektedir. Bununla birlikte uygulamalardan da görüleceği gibi kuadratik elemanların, sabit ve lineer sınır elemanlarına göre daha hızlı yakınsama sağlamasının yanında hata oranının da düşük olduğu tespit edilmiştir. Üçüncü bölümde kuadratik sınır elemanlar yönteminin, üç gruplu ve altı gruplu iki boyutlu serbest kaynak nötron difüzyon denklemine uygulaması ele alınmıştır. Ayrıca sonsuz ortam yetkinlik-özdeğer problemleri çözümlenerek analitik karşılaştırma ve hata hesapları yapılmıştır. Son olarak üç grup için silindir problemi çözülmüştür.

Çok gruplu nötron difüzyon denklemini kuadratik sınır elemanlarıyla çözmek için FORTRAN 77 kullanılarak yazılan BEMGQ programı kullanılmış ve LINUX işletim sistemi altında çalıştırılmıştır. BEMGQ programı eğri yüzeylerde çözüm yapabilen bir programdır. Az sayıda sınır elemanı kullanılmasına rağmen çok yaklaşık sonuçlar elde edilmiştir.

# **THE SOLUTION OF THE MULTIGROUP NEUTRON DIFFUSION EQUATION WITH QUADRATIC BOUNDARY ELEMENT METHODS**

## **SUMMARY**

In this study, the boundary element method is used to solve multi group, two dimensional neutron diffusion equation. Boundary element methods are efficient numerical tools for solving problems which have two and three dimensions. Boundary element method solves problems of infinite domains. Boundary element method, in which the governing equations are converted into a set of integral equations on the surface, is solved by a suitable method. The main advantage of this method is the reduction of the dimensionality of the problem.

Two dimensional Multigroup diffusion method is solved by using the Gauss quadrature method on the boundaries. In the first section, BEM and its developments are explained. In the second section, the derivation of the of the three group neutron diffusion equation and Multigroup neutron diffusion theory were given. Because of the source term includes volume integration, a method was used to reduce volume integration into the boundary integration. With the use of the multigroup boundary integral equation, scattering volume integrals are transformed into surface integrals and, thus, the computational requirements are reduced. Quadratic boundary elements is used curved boundaries. That's why it is used in large area. The results of the quadratic boundary elements are better than constant and linear elements. In the third section, three and six group problems were solved. The programme can be used for solving curved boundaries (i.e. cylinder). BEMGQ programme can be used for solving fixed source, criticality eigenvalue problems for nuclear systems which has curved boundaries.

To solve Multigroup neutron diffusion equation, BEMGQ programme has been written in FORTRAN 77. The programme run on personel computer under LINUX operating system. The quadratic boundary element method has given approximate values despite using not many boundary elements on curved boundaries.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Sınır elemanlar yöntemi (boundary element method, BEM) sınır değer problemlerinin, sonsuz ortam Green fonksiyonları aracılığı ile sınır integral denklemlerine dönüştürülmesi ilkesine dayanmaktadır. Türetilen sınır integral denklemi sadece homojen bölge sınırlarında fonksiyon değerlerini bilinmeyen olarak içerdiğinden bölgenin içinin ayrıklaştırılması gerekmekte, sadece sistem sınırlarının ayrıklaştırılması yeterli olmaktadır. Sistem sınırlarının ayrıklaştırılması için üretilen ızgara, sınır elemanlarından oluşmaktadır. Fonksiyon ve normal türevin her bir sınır elemanı içinde sabit, lineer veya kuadratik sınır elemanı yaklaşımını ortaya çıkarmaktadır. Bu çalışmanın da konusu olan iki boyutlu sistemlerde, sistem sınırları tek boyutlu olduğundan, her bir sınır elemanı içinde fonksiyon ( ki bu çalışmada nötron akısı ) ile normal türevi ( ki bu çalışmada normal yöndeki akıma ) sabit, lineer, kuadratik ya da daha yüksek dereceli Lagrange polinomları ile ifade edilebilmektedir.

Sınır elemanları yönteminin genel olarak sınır değer problemlerinin çözümünde kullanımı çok sayıda kaynak [1, 2, 3] tarafından dolaylı olarak ele alınmıştır. Sınır elemanları yönteminin difüzyon sahasına ilk uygulaması yaklaşık 20 yıl öncesine dayanmaktadır [4]. Daha sonra yapılan çalışmalar difüzyon hesaplarında özdeğer hesabı [5], dış kaynak hacim integrallerinin sınır integrallerine dönüşümü [6], saçılma integrallerinin sınır integrallerine dönüşümü gibi [7] konularda sürdürüldü. Nötron difüzyon teorisi sınır elemanları uygulamalarının çok bölgeli sistemlere genişletilmesi [8, 9, 10, 11] son beş yılın araştırma konuları arasında yer aldı.

Yapılan bu çalışmalarda genellikle sabit ya da lineer sınır elemanları uygulamalarına ağırlık verildi. Fakat eğri yüzeyli sistemlerin analizi ise en azından kuadratik sınır elemanlarının kullanımını gerektirmektedir. Kuadratik sınır elemanlarının nötron difüzyon hesaplarında kullanımı konusunda yapılan çalışmalar, bir [12] ve iki [13] gruplu teori ile sınırlı kaldı.

Bu çalışmada çok gruplu sınır integral denklemi kavramı [7] ile kuadratik sınır elemanları birleştirilerek, çok gruplu difüzyon hesapları için bir kuadratik sınır

elemanları formülasyonu geliştirilmiştir. Bu formülasyon doğrultusunda yazılan FORTRAN programı BEMGQ, koşullarını doğrulanmış ve irdelenmiştir.

Bu tez çalışmasında ikinci bölümde üç gruplu nötron difüzyon denklemi için sınır integral denklemi türetimi yapılmış, genelleştirilerek  $g$  grup sayısı için formülasyon verilmiştir. Ele alınan sistem sınırları kuadratik sınır elemanlarına parçalanarak, elde edilen integral denklemler Gauss karelemesi kullanılarak hesaplandı, sınır şartları da kullanılarak sistem katsayılar matrisi elde edildi. Bulunan denklem sistemi Crout yöntemiyle çözülmüştür.

Üçüncü bölümde sayısal uygulamalara yer verilmiştir. Dolayısıyla elde edilen analitik sonuçlarla BEMGQ programı kullanılarak bulunan sonuçlar karşılaştırılarak grafik ve hata tablolarıyla gösterilmiştir. İlk olarak sonsuz ortam sabit kaynak problemi ele alınmış, grup analitik akı ile BEMGQ kullanılarak elde edilen grup akıları karşılaştırılmıştır. İkinci olarak sonsuz ortam yetkinlik-özdeğer problemi için  $k_{\infty}$  ve ortalama akı karşılaştırılmıştır. Üçüncü olarak üç gruplu sonlu ortam silindir problemi irdelenmiştir. Tüm gruplara ait akı hesapları yapılarak, analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Son olarak altı gruplu sonlu ortam yetkinlik-özdeğer problemi çözülmüş ve ayrıca sabit, lineer ve kuadratik sınır elemanları kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Son bölümde elde edilen sonuçlar ışığında, kuadratik sınır elemanları kullanılarak elde edilen sonuçların değerlendirilmesi yapılmıştır.

## BÖLÜM 2. ÇOK GRUPLU NÖTRON DİFÜZYON PROBLEMLERİNDE SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

Çok gruplu nöron difüzyon denklemi

$$-\vec{\nabla} D_g(\vec{r}) \vec{\nabla} \Phi_g(\vec{r}) + \Sigma_{r,g} \Phi_g(\vec{r}) = S_g(\vec{r}), (g = 1, 2, \dots, G), \vec{r} \in V \quad (2.1)$$

şeklindedir. Denklemin sağ tarafında bulunan kaynak terimi, saçılma ve fisyon kaynaklarının toplamı olarak,

$$S_g(\vec{r}) = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{s,g \leftarrow g'}(\vec{r}) \Phi_{g'}(\vec{r}) + \frac{\chi_g(\vec{r})}{k_{etk}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'} \Phi_{g'}(\vec{r}), (g = 1, 2, \dots, G) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlıdır. Saçılma kaynağı tanımında alt gruplardan üst gruplara saçılma (yukarı saçılma) olmadığı varsayılmıştır. Difüzyon denklemi ve kaynak terimindeki nükleer sabitler ise;

$D_g$  : g'inci grup difüzyon sabiti

$\Sigma_{r,g}$  : g'inci grup çıkartma tesir kesiti

$\Sigma_{r,g \leftarrow g'}$  : g' ncü gruptan g\_inci gruba saçılma tesir kesiti

$\Sigma_{f,g}$  : g'inci grup fisyon tesir kesiti

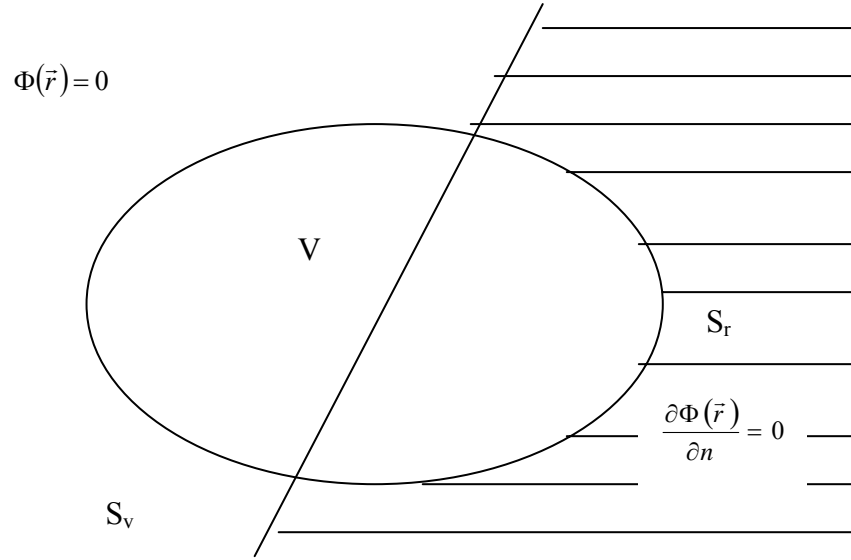
$\chi_g$  : fisyonda yayınlanan bir nötronun g'inci gruba ait olma olasılığı

$\nu_g$  : g'inci grup nötronları tarafından yol açılan fisyonlarda yayınlanan ortalama nötron sayısı

olarak tanımlıdır. (2.1) denklemi V hacimli homojen bir nükleer sistemin S sınırı,  $S_r$  ve  $S_v$  olarak ayrılarak;  $S_r$  dış yüzeyinde yansıtıcı ve  $S_v$  dış yüzeyinde boşluk sınır koşulu uygulanarak çözülmek istenmektedir.

(i)  $\Phi(\vec{r}) = 0$ ,  $\vec{r} \in S_r$  Dirichlet Sınır Koşulu (Boşluk Sınır Koşulu)

(ii)  $\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n} = 0$ ,  $\vec{r} \in S_v$  Neumann Sınır Koşulu (Yansıtıcı Sınır Koşulu) (2.3)



**Şekil 2.1:** Probleme ait tanım bölgesi ve sınır koşulları

Bu çalışmanın amacı; çok gruplu nötron difüzyon denklemlerini (2.3)'de verilen sınır koşulları ile kuadratik sınır elemanları yöntemi ile çözmektir. Bu amaçla önce sınır integral denklemlerinin türetimi gerekmektedir. Daha önce yapılan çalışmalarda [14,15] bir ve iki gruplu sınır integral denklemlerinin türetimi verilmiştir. Çok gruplu sınır integral türetimi önce üç gruplu nötron difüzyon denklemine uygulanacak, daha sonra ise çok gruba genelleme yapılacaktır.

## 2.1. Üç Gruplu Sınır İntegral Denklemi Türetimi

Birinci ve ikinci gruba ait sınır integral denklemleri [15] daha önce türetildiği için bu gruplara ait türetimler tekrarlanmayacak, burada sadece üçüncü gruba ait sınır integral denklemleri türetilecektir.

Üçüncü gruba ait nötron difüzyon denklemi V hacimli homojen bir sistem için;

$$-D_3 \nabla^2 \Phi_3(\vec{r}) + \Sigma_{r,3} \Phi_3(\vec{r}) = s_3(\vec{r}) \quad (2.4)$$

şeklindedir. (2.4) denkleminde yeniden, 3. grup difüzyon uzunluğunun tersi;

$$k_3^2 = \frac{\Sigma_{r,3}}{D_3}$$

tanımıyla,

$$\nabla^2 \Phi_3(\vec{r}) - k_3^2 \Phi_3(\vec{r}) = -\frac{s_3(\vec{r})}{D_3} \quad (2.5)$$

olarak yazılabilir. Sınır integral denklemi türetiminde sonsuz ortam Green fonksiyonundan yararlanılmaktadır. Üçüncü grup sonsuz ortam Green fonksiyonu

$$\nabla^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) - k_3^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) = -\delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad (2.6)$$

denkleminin çözümüdür. (2.5) denklemi üçüncü grup Green fonksiyonu ile çarpılıp sistem, V, hacmi üzerinden integrale edilirse;

$$\int_V \nabla^2 \Phi_3(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV - k_3^2 \int_V \Phi_3(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV = -\int_V \frac{s_3(\vec{r})}{D_3} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.7)$$

denklemi elde edilir. (2.7) denkleminin sol tarafındaki ilk terim Green II. teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \int_V \nabla^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_3(\vec{r}) dV + \int_{S_V} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_3(\vec{r})}{\partial n} dS - \int_{S_r} \Phi_3(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS \\ & - k_3^2 \int_V \Phi_3(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV = -\int_V \frac{s_3(\vec{r})}{D_3} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde edilir. Denklem sol tarafındaki hacim integralleri birleştirilirse,

$$\begin{aligned} & \int_V [\nabla^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) - k_3^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho})] \Phi_3(\vec{r}) dV + \int_{S_V} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_3(\vec{r})}{\partial n} dS - \int_{S_r} \Phi_3(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS \\ & = -\int_V \frac{s_3(\vec{r})}{D_3} dV \end{aligned} \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.6) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& - \int_V \delta(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_3(\vec{r}) dV - \int_{S_r} \Phi_3(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS + \int_{S_v} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_3(\vec{r})}{\partial n} dS \\
& = - \int_V \frac{s_3(\vec{r})}{D_3} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV
\end{aligned} \tag{2.10}$$

bulunur. Burada Dirac-delta fonksiyonunun

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_3 dV = \begin{cases} \Phi_3(\vec{\rho}) & , \vec{\rho} \in V, \vec{\rho} \notin S \\ c\Phi_3(\vec{\rho}) & , \vec{\rho} \in S \end{cases} \tag{2.11}$$

tanımı kullanılırsa, üçüncü grup sınır integral denklemi;

$$c\Phi_3(\vec{\rho}) dV - \int_{S_r} \Phi_3(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS + \int_{S_v} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_3(\vec{r})}{\partial n} dS = - \int_V \frac{s_3(\vec{r})}{D_3} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \tag{2.12}$$

elde edilir. Üçüncü gruba ait nötron difüzyon denkleminde kaynak terimi aşağıdaki gibidir:

$$s_3(\vec{r}) = q_3(\vec{r}) + \Sigma_{s,3 \leftarrow 1} \Phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{s,3 \leftarrow 2} \Phi_2(\vec{r}) \tag{2.13}$$

burada  $q_3(\vec{r})$  üçüncü grup fisyon kaynağını göstermektedir. (2.13) kaynak terimi (2.12) denkleminde açıkça yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& c\Phi_3(\vec{\rho}) dV + \int_{S_r} \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} \Phi_3(\vec{r}) dS - \int_{S_v} \frac{\partial \Phi_3(\vec{r})}{\partial n} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dS = \\
& \int_V \frac{q_3(\vec{r})}{D_3} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 1}}{D_3} \int_V G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_1(\vec{r}) dV + \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 2}}{D_3} \int_V \Phi_2(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV
\end{aligned} \tag{2.14}$$

elde edilir. Bu aşamada daha önce iki gruplu türetiminde [13] olduğu gibi saçılma terimlerindeki hacim integralleri yüzey integrallerine dönüştürülmeye çalışılacaktır.

Bu amaçla,

$$S_{3 \leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 1}}{D_3} \int_V G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_1(\vec{r}) dV \tag{2.15}$$

tanımını yapalım. (2.6) denkleminde yararlanarak,

$$G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) = \frac{\delta(\vec{r}, \vec{\rho})}{k_3^2} + \frac{\nabla^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{k_3^2} \quad (2.16)$$

yazılabilir. Bu ifade (2.15)'te kullanılırsa,

$$S_{3\leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{s,3\leftarrow 1}}{D_3} \int_V \left( \frac{\delta(\vec{r}, \vec{\rho})}{k_3^2} + \frac{\nabla^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{k_3^2} \right) \Phi_1(\vec{r}) dV \quad (2.17)$$

elde edilir. Bu ifade daha açık olarak,

$$S_{3\leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} \int_V \delta(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_1(\vec{r}) dV + \frac{\sum_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} \int_V \nabla^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_1(\vec{r}) dV \quad (2.18)$$

şeklinde yazılabilir. Yine Dirac-delta fonksiyonu

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_1 dV = \begin{cases} \Phi_1(\vec{\rho}) & , \vec{\rho} \in V, \vec{\rho} \notin S \\ c \Phi_1(\vec{\rho}) & , \vec{\rho} \in S \end{cases} \quad (2.19)$$

integrasyon özeliğinden yararlanarak, (2.15) denklemi

$$S_{3\leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} c_\rho \Phi_1(\vec{r}) dV + \frac{\sum_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} \left[ \int_V \nabla^2 \Phi_1(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \int_{S_r} \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1(\vec{r})}{\partial n} dS \right] \quad (2.20)$$

olarak yazılabilir. Öte yandan birinci grup difüzyon denklemi,

$$\nabla^2 \Phi_1(\vec{r}) - k_1^2 \Phi_1(\vec{r}) = -\frac{q_1(\vec{r})}{D_1} \quad (2.21)$$

denklemi göz önüne alınarak,

$$\nabla^2 \Phi_1(\vec{r}) = -\frac{q_1(\vec{r})}{D_1} + k_1^2 \Phi_1(\vec{r}) \quad (2.22)$$

yazılabilir. (2.22) eşitliği  $S_{3,1}(\vec{\rho})$  denkleminde kullanılırsa,

$$S_{3\leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} c(\vec{\rho}) \Phi_1(\vec{\rho}) + \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} \int_V G_3(r, \vec{\rho}) \left[ -\frac{q_1(\vec{r})}{D_1} + k_1^2 \Phi_1(\vec{r}) \right] dV +$$

$$+ \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} \left[ \int_{S_r} \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1(\vec{r})}{\partial n} dS \right] \quad (2.23)$$

elde edilir. (2.23) denklemi yeniden düzenlenirse,

$$S_{3\leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3} \int_V G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_1(\vec{r}) dV = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} c(\vec{\rho}) \Phi_1(\vec{\rho}) +$$

$$+ \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} k_1^2 \int_V G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_1(\vec{r}) dV - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_1 D_3 k_3^2} \int_V q_1(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.24)$$

$$+ \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} \left[ \int_{S_r} \Phi_1(r) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1(\vec{r})}{\partial n} dS \right]$$

bulunur. (2.24) denkleminin ikinci teriminin katsayıları düzenlenirse  $S_{3,1}(\vec{\rho})$ ' i içerdiği kolayca görülebilir. İkinci ifade sol tarafa geçirilip katsayılar da gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\left( \frac{k_3^2 - k_1^2}{k_3^2} \right) S_{3\leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} c(\vec{\rho}) \Phi_1(\vec{\rho}) - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} \int_V q_1(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV +$$

$$+ \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 k_3^2} \left[ \int_{S_r} \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1(\vec{r})}{\partial n} dS \right] \quad (2.25)$$

(2.25) denklemi düzenlenerek,

$$S_{3\leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 (k_3^2 - k_1^2)} \left[ c(\vec{\rho}) \Phi_1(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_1(\vec{r})}{D_1} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \right.$$

$$\left. + \int_{S_r} \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1(\vec{r})}{\partial n} dS \right] \quad (2.26)$$

ifadesi elde edilir.(2.26) denkleminde, saçılma kaynağı hacim integrallerinin sınır integrallerine dönüştürülmüş olduğu görülebilir. Benzer şekilde

$$S_{3\leftarrow 2}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3} \int_V \Phi_2(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.27)$$

tanımı yapılır ve üçüncü grup sonsuz ortam Green fonksiyonu kullanılarak,

$$\nabla^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) - k_3^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) = -\delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad (2.28)$$

$$G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) = \frac{\delta(\vec{r} - \vec{\rho})}{k_3^2} + \frac{\nabla^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{k_3^2} \quad (2.29)$$

ve (2.29) denklemini (2.27) da yerine yazılırsa,

$$S_{3\leftarrow 2}(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} \int_V \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_2(\vec{r}) dV + \frac{\sum_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} \int_V \nabla^2 G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_2(\vec{r}) dV \quad (2.30)$$

elde edilir. (2.30) denkleminin ikinci teriminde ikinci Green özdeşliğini ve

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_2(\vec{r}) dV = \begin{cases} \Phi_2(\vec{\rho}) & , \vec{\rho} \in V, \vec{\rho} \notin S \\ c(\vec{\rho}) \Phi_2(\vec{\rho}) & , \vec{\rho} \in S \end{cases} \quad (2.31)$$

tanımını kullanırsak:

$$S_{3\leftarrow 2}(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} c(\vec{\rho}) \Phi_2(\vec{\rho}) + \frac{\sum_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} \int_V G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \nabla^2 \Phi_2(\vec{r}) dV + \frac{\sum_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} \left[ \int_{S_r} \Phi_2(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_2(\vec{r})}{\partial n} dS \right] \quad (2.32)$$

elde edilir. Bu kez ikinci grup difüzyon denklemini;

$$\nabla^2 \Phi_2(\vec{r}) - k_2^2 \Phi_2(\vec{r}) = -\frac{q_2(\vec{r})}{D_2} - \frac{\sum_{s,2\leftarrow 1}}{D_2} \Phi_1(\vec{r}) \quad (2.33)$$

yazılıp,

$$\nabla^2 \Phi_2(\vec{r}) = k_2^2 \Phi_2(\vec{r}) - \frac{q_2(\vec{r})}{D_2} - \frac{\sum_{s,2\leftarrow 1}}{D_2} \Phi_1(\vec{r}) \quad (2.34)$$

şeklinde düzenlenerek (2.32) denkleminde kullanılırsa,

$$S_{3\leftarrow 2}(\bar{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} c(\bar{\rho}) \Phi_2(\bar{\rho}) + \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} \int_V G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) \left[ k_2^2 \Phi_2(\bar{r}) - \frac{q_2(\bar{r})}{D_2} - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2} \Phi_1(\bar{r}) \right] dV +$$

$$+ \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} \left[ \int_{S_r} \Phi_2(\bar{r}) \frac{\partial G_3(\bar{r}, \bar{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) \frac{\partial \Phi_2(\bar{r})}{\partial n} dS \right] \quad (2.35)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.35) denklemini düzenlenirse;

$$S_{3\leftarrow 2} = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} c(\bar{\rho}) \Phi_2(\bar{\rho}) + \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} k_2^2 \int_V G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) \Phi_2(\bar{r}) dV - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2 D_3 k_3^2} \int_V q_2(\bar{r}) G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) dV$$

$$- \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2} \Sigma_{s,2\leftarrow 1}}{D_2 D_3 k_3^2} \int_V G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) \Phi_1(\bar{r}) dV + \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} \left[ \int_{S_r} \Phi_2(\bar{r}) \frac{\partial G_3(\bar{r}, \bar{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) \frac{\partial \Phi_2(\bar{r})}{\partial n} dS \right] \quad (2.36)$$

olur. (2.36) denkleminin sağ tarafındaki ikinci ve dördüncü terimlerin katsayılarında gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$S_{3\leftarrow 2}(\bar{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} c(\bar{\rho}) \Phi_2(\bar{\rho}) + \frac{k_2^2}{k_3^2} \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3} \int_V G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) \Phi_2(\bar{r}) dV - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2 D_3 k_3^2} \int_V q_2(\bar{r}) G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) dV$$

$$- \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2} \Sigma_{s,2\leftarrow 1}}{\Sigma_{s,3\leftarrow 1} D_3 k_3^2} \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_1} \int_V G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) \Phi_1(\bar{r}) dV +$$

$$\frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} \left[ \int_{S_r} \Phi_2(\bar{r}) \frac{\partial G_3(\bar{r}, \bar{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) \frac{\partial \Phi_2(\bar{r})}{\partial n} dS \right] \quad (2.37)$$

elde edilir. Bu denklem incelenirse sağ tarafındaki ikinci ve dördüncü terimlerinin  $S_{3\leftarrow 1}(\bar{\rho})$  ve  $S_{3\leftarrow 2}(\bar{\rho})$  tanımlarını içerdiği görülür. Bu tanımlar kullanılırsa;

$$S_{3\leftarrow 2}(\bar{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} c(\bar{\rho}) \Phi_2(\bar{\rho}) + \frac{k_2^2}{k_3^2} S_{3\leftarrow 2}(\bar{\rho}) - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2 D_3 k_3^2} \int_V q_2(\bar{r}) G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) dV$$

$$- \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2} \Sigma_{s,2\leftarrow 1}}{\Sigma_{s,3\leftarrow 1} D_3 k_3^2} S_{3\leftarrow 1}(\bar{\rho}) + \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} \left[ \int_{S_r} \Phi_2(\bar{r}) \frac{\partial G_3(\bar{r}, \bar{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\bar{r}, \bar{\rho}) \frac{\partial \Phi_2(\bar{r})}{\partial n} dS \right] \quad (2.38)$$

eşitliği bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{k_2^2}{k_3^2}\right) S_{3\leftarrow 2}(\vec{\rho}) &= \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} c(\vec{\rho}) \Phi_2(\vec{\rho}) - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2 D_3 k_3^2} \int_V q_2(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\
- \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2} \Sigma_{s,2\leftarrow 1}}{\Sigma_{s,3\leftarrow 1} D_3 k_3^2} S_{3\leftarrow 1}(\vec{\rho}) &+ \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 k_3^2} \left[ \int_{S_r} \Phi_2(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_2(\vec{r})}{\partial n} dS \right]
\end{aligned} \tag{2.39}$$

ifadesine ulaşılır.

(2.39) denklemi düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
S_{3\leftarrow 2}(\vec{\rho}) &= \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{k_3^2 - k_2^2} \frac{1}{D_3} \left[ c(\vec{\rho}) \Phi_2(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_2(\vec{r})}{D_2} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \right. \\
&\quad \left. \int_S \Phi_2(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS - \int_S G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_2(\vec{r})}{\partial n} dS \right] \\
- \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{(k_3^2 - k_2^2) D_2} \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1}}{\Sigma_{s,3\leftarrow 1} D_3} S_{3\leftarrow 1}(\vec{\rho})
\end{aligned} \tag{2.40}$$

denklemi elde edilir.

Şimdi  $S_3(\vec{\rho}) = S_{3\leftarrow 2}(\vec{\rho}) + S_{3\leftarrow 1}(\vec{\rho})$  tanımını yapalım.  $S_{3\leftarrow 2}(\vec{\rho})$  ve  $S_{3\leftarrow 1}(\vec{\rho})$  ifadeleri bu tanıma yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
S_3(\vec{\rho}) &= \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 (k_3^2 - k_2^2)} c(\vec{\rho}) \Phi_2(\vec{\rho}) - \left( \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 (k_3^2 - k_2^2)} - \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1} \Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2 D_3 (k_3^2 - k_2^2) (k_3^2 - k_1^2)} \right) c(\vec{\rho}) \Phi_1(\vec{\rho}) \\
&\quad - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2 D_3 (k_3^2 - k_2^2)} \int_V q_2(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\
&\quad - \left( \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_1 D_3 (k_3^2 - k_2^2)} - \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1} \Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_1 D_2 D_3 (k_3^2 - k_2^2) (k_3^2 - k_1^2)} \right) \int_V q_1(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\
&\quad + \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3 (k_3^2 - k_2^2)} \left[ \int_{S_r} \Phi_2(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_v} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_2(\vec{r})}{\partial n} dS \right] \\
&\quad + \left( \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3 (k_3^2 - k_1^2)} - \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1} \Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2 D_3 (k_3^2 - k_2^2) (k_3^2 - k_1^2)} \right) \left[ \int_S \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS - \int_S G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1(\vec{r})}{\partial n} dS \right]
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$S_3(\vec{\rho})$  için elde edilen bu ifade (2.8) denkleminde yerleştirilirse, (2.41) denklemi her üç gruba ait akı ve akı türevleri bir araya getirilecek şekilde yeniden düzenlenirse:

$$\begin{aligned}
& c(\vec{\rho}) \left[ \Phi_3(\vec{\rho}) - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3(k_3^2 - k_2^2)} \Phi_2(\vec{\rho}) - \left( \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3(k_3^2 - k_1^2)} - \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1} \Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2 D_3 (k_3^2 - k_1^2)(k_3^2 - k_2^2)} \right) \Phi_1(\vec{\rho}) \right] + \\
& + \left\{ \int_{S_r} \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} \left[ \Phi_3(\vec{r}) - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3(k_3^2 - k_2^2)} \Phi_2(\vec{r}) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3(k_3^2 - k_1^2)} - \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1} \Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2 D_3 (k_3^2 - k_1^2)(k_3^2 - k_2^2)} \right) \Phi_1(\vec{r}) \right] dS \right\} \\
& - \left\{ \int_{S_r} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \left[ \frac{\partial \Phi_3(\vec{r})}{\partial n} - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3(k_3^2 - k_2^2)} \frac{\partial \Phi_2(\vec{r})}{\partial n} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3(k_3^2 - k_1^2)} - \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1} \Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2 D_3 (k_3^2 - k_1^2)(k_3^2 - k_2^2)} \right) \frac{\partial \Phi_1(\vec{r})}{\partial n} \right] dS \right\} \\
& = \left\{ \int_V G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \left[ \frac{q_3(\vec{r})}{D_3} - \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_3(k_3^2 - k_2^2)} \frac{q_2(\vec{r})}{D_2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3(k_3^2 - k_1^2)} - \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1} \Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{D_2 D_3 (k_3^2 - k_1^2)(k_3^2 - k_2^2)} \right) \frac{q_1(\vec{r})}{D_1} \right] dV \right\} \quad (2.42)
\end{aligned}$$

denkleminde ulaşılr. Bu aşamada;

$$S_{12} = \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1}}{D_2(k_2^2 - k_1^2)};$$

$$S_{13} = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3(k_3^2 - k_1^2)};$$

$$S_{23} = \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 1}}{D_3(k_3^2 - k_2^2)} \quad (2.43)$$

tanımları yapılrırsa, (2.42) denkleminde;

$$\begin{aligned}
& c(\vec{\rho}) \left[ \Phi_3(\vec{\rho}) - S_{23} \Phi_2(\vec{\rho}) - \left( S_{13} - S_{12} S_{23} \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{(k_3^2 - k_1^2)} \right) \Phi_1(\vec{\rho}) \right] + \\
& + \left\{ \int_{S_r} \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} \left[ \Phi_3(\vec{r}) - S_{23} \Phi_2(\vec{r}) - \left( S_{13} - S_{12} S_{23} \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{(k_3^2 - k_1^2)} \right) \Phi_1(\vec{r}) \right] dS \right\} \\
& - \left\{ \int_{S_r} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \left[ \frac{\partial \Phi_3(\vec{r})}{\partial n} - S_{23} \frac{\partial \Phi_2(\vec{r})}{\partial n} - \left( S_{13} - S_{12} S_{23} \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{(k_3^2 - k_1^2)} \right) \frac{\partial \Phi_1(\vec{r})}{\partial n} \right] dS \right\} \\
& = \left\{ \int_V G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) \left[ \frac{q_3(\vec{r})}{D_3} - S_{23} \frac{q_2(\vec{r})}{D_2} - \left( S_{13} - S_{12} S_{23} \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{(k_3^2 - k_1^2)} \right) \frac{q_1(\vec{r})}{D_1} \right] dV \right\} \quad (2.44)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem;

$$\varphi_3(\vec{r}) = \left\{ \left[ \Phi_3(\vec{r}) - S_{23} \Phi_2(\vec{r}) - \left( S_{13} - S_{12} S_{23} \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{(k_3^2 - k_1^2)} \right) \Phi_1(\vec{r}) \right] \right\} \quad (2.45)$$

ve

$$z_3(\vec{r}) = \left\{ \left[ \frac{q_3(\vec{r})}{D_3} - S_{23} \frac{q_2(\vec{r})}{D_2} - \left( S_{13} - S_{12} S_{23} \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{(k_3^2 - k_1^2)} \right) \frac{q_1(\vec{r})}{D_1} \right] \right\} \quad (2.46)$$

tanımlarıyla;

$$c(\vec{\rho}) \varphi_3(\vec{\rho}) + \int_{S_r} \varphi_3(\vec{r}) \frac{\partial G_3(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} dS - \int_{S_r} \frac{\partial \varphi_3(\vec{r})}{\partial n} G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dS = \int_V z_3(\vec{r}) G_3(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.47)$$

sınır integral denklemini elde edilir. Bu denklem şekilsel olarak tek grup için türetilen sınır integral denkleminin [6] tam aynısıdır, fakat üçüncü gruba ait akı ve akı türevlerinin yerinde, üçüncü ve kendisinden önce gelen ikinci ve birinci gruba ait akı ve akı türevlerinin lineer bir kombinasyonu yer almaktadır. Yine aynı şekilde üçüncü gruba ait fisyon kaynağı, üçüncü, ikinci ve birinci gruba ait fisyon kaynaklarının lineer bir kombinasyonu olarak değişim göstermektedir.

## 2.2. Çok Gruplu İki Boyutlu Nötron Difüzyon Denklemi Eşdeğer Sınır İntegral Denklemi Türetimi

Bu bölümde bölüm (2.1) de sunulan türetim çok gruplu nötron difüzyon denklemi için genelleştirilecektir[16]. Bir önceki bölümde sunulan türetime benzer şekilde sınır integral denklemi:

$$\begin{aligned} c(\vec{\rho})\Phi_g(\vec{\rho}) + \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g(\vec{r})}{\partial n} dS + \int_{S_r} \frac{\partial G_g(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} \Phi_g(\vec{r}) dS \\ = \int_V \frac{G_g(\vec{r}, \vec{\rho})}{D_g} q_g(\vec{r}) dV + S_g(\vec{\rho}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

yazılabilir. Yine benzer şekilde;

$$S_g(\vec{\rho}) = \sum_{g'=1}^{g-1} S_{g \leftarrow g'}(\vec{\rho}) \quad (2.49)$$

tanımını yapabiliriz. Burada:

$$S_{g \leftarrow g'}(\vec{\rho}) = J_{g \leftarrow g'}(\vec{\rho}) - (1 - \delta_{g'1}) c_{gg'} \sum_{h=1}^{g'-1} \frac{\sum_{s, g' \leftarrow h}}{\sum_{s, g \leftarrow h}} S_{g \leftarrow h}(\vec{\rho}) \quad (2.50)$$

olarak tanımlıdır.  $J_{g \leftarrow g'}(\vec{\rho})$  ise;

$$J_{g \leftarrow g'}(\vec{\rho}) = c_{gg'} \frac{D_{g'}}{D_g} \left[ c(\vec{\rho})\Phi_{g'}(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_{g'}(\vec{r})}{D_{g'}} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_{g'}(\vec{r})}{\partial n} dS + \int_{S_r} \frac{\partial G_g(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} \Phi_{g'}(\vec{r}) dS \right] \quad (2.51)$$

tanımı ile hesaplanmaktadır.  $c_{gg'}(\vec{\rho})$  sabiti:

$$c_{gg'}(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{s, g \leftarrow g'}}{(k_g^2 - k_{g'}^2) D_{g'}} \quad (2.52)$$

olarak tanımlıdır. Bu aşamada (2.50) denkleminin sağ tarafındaki toplam içinde yer alan  $S_{g \leftarrow h}(\vec{\rho})$  ifadeleri için tanımları kullanarak daha genel bir ifade türetmek yoluna gidilebilir[16].  $S_{g \leftarrow h}(\vec{\rho})$  tanımı yine (2.50) denkleminde kullanılarak

$$S_{g \leftarrow g'}(\vec{\rho}) = J_{g \leftarrow g'}(\vec{\rho}) - c_{gg'} \sum_{h=1}^{g'-1} b_{g'h} \frac{J_{g \leftarrow h}(\vec{\rho})}{\sum_{s, g \leftarrow h}} \quad (2.53)$$

ifadesine ulaşılabilir. Bu denklemdeki  $b_{g'h}$  katsayıları bir  $h$  grubundan  $g'$  grubuna olan saçılmaları göstermektedirler. Bu saçılmalar;

$$b_{g'h} = \sum_{n=1}^{g'-h} (-1)^{n-1} b_{g'h}^{(n)} \quad (2.54)$$

$b_{g'h}^{(n)}$  katsayıları  $h$ 'inci gruptan  $g'$ 'üncü gruba geçişin  $n$  adet saçılma yoluyla gerçekleştirilebileceğini göstermektedir. Bu katsayılar

$$b_{g'h}^{(1)} = \sum_{s, g' \leftarrow h} \quad (2.55)$$

olmak üzere

$$b_{g'h}^{(n)} = \sum_{m=1}^{\binom{g'-h-1}{n-1}} b_{g'h,m}^{(n)} \quad (2.56)$$

olarak tanımlanırlar. Burada toplamın alabileceği maksimum değer olan binom katsayısı  $h$ 'inci gruptan  $g'$ 'üncü gruba  $n$  saçılma yoluyla mümkün olabilen tüm geçişlerin toplam sayısını vermektedir.

$b_{g'h,m}^{(n)}$  katsayıları,  $h$ 'inci gruptan  $g$ 'inci gruba  $n$  tane saçılmanın,  $m$  farklı yolla olacağını gösterir ve

$$b_{g'h,m}^{(n)} = \frac{\sum_{s, g' \leftarrow h_{n-1}} \sum_{s, h_{n-1} \leftarrow h_{n-2}} \cdots \sum_{s, h_2 \leftarrow h_1} \sum_{s, h_1 \leftarrow h}}{\prod_{j=1}^{n-1} (k_g^2 - k_{h_j}^2) D_{h_j}} \quad (2.57)$$

Burada  $h_j, j = 1, 2, 3, \dots, n-1, h_j > h_{j-1}$  olmak üzere  $h$ 'den  $g'$ 'ne  $n$  saçılmalı geçişte uğranılan ara grup numaralarıdır. (2.49) denklemini tek bir toplam altında birleştirilecek şekilde düzenlenirse,

$$S_g(\vec{\rho}) = \sum_{g'=1}^{g-1} a_{gg'} J_{g \leftarrow g'}(\vec{\rho}) \quad (2.58)$$

olarak yazılabilir. Burada  $a_{gg'}$  katsayıları

$$a_{gg'} = 1 - (1 - \delta_{g', g-1}) \sum_{h=g'+1}^{g-1} c_{gh} b_{hg'} \quad (2.59)$$

(2.51) tanımı (2.58) denkleminde yerine yazılırsa,

$$S_g(\vec{\rho}) = \sum_{g'=1}^{g-1} s_{gg'} \left[ \begin{aligned} & c(\vec{\rho}) \Phi_{g'}(\vec{\rho}') - \int_V \frac{G_g(\vec{r}, \vec{\rho})}{D_{g'}} q_{g'}(\vec{r}) dV - \int_S G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_{g'}(\vec{r})}{\partial n} dS \\ & + \int_S \frac{\partial G_g(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} \Phi_{g'}(\vec{r}) dS \end{aligned} \right] \quad (2.60)$$

elde edilir. Burada,

$$s_{gg'} = \frac{\sum_{s, g \leftarrow g'}}{(k_g^2 - k_{g'}^2) D_g} a_{gg'} \quad (2.61)$$

olarak tanımlıdır. (2.60) denklemini (2.59) deki grup integral denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & c(\vec{\rho}) \Phi_g(\vec{\rho}) - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g(\vec{r})}{\partial n} dS + \int_{S_r} \frac{\partial G_g(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} \Phi_g(\vec{r}) dS = \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) z_g(\vec{r}) dV \\ & \sum_{h=1}^{g-1} s_{gh} \left[ c(\vec{\rho}) \Phi_h(\vec{\rho}) - \int_{S_v} G_h(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_h(\vec{r})}{\partial n} dS + \int_{S_r} \frac{\partial G_h(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} \Phi_h(\vec{r}) dS \right] \end{aligned} \quad (2.62)$$

(2.62) denkleminde,

$$z_g(\vec{r}) = \frac{q_g(\vec{r})}{D_g} - \sum_{h=1}^{g-1} s_{gh} \frac{q_h(\vec{r})}{D_h} \quad (2.63)$$

biçiminde tanımlıdır. (2.62) denklemindeki tüm enerji grupları için saçılma hacim integralleri, sınır integraline dönüştürülmüş; denklemde sadece dış kaynak veya fisyon kaynağı hacim integralleri yer almaktadır. Bu hacim integralini, sınır integraline dönüştürmek için literatürde çeşitli yöntemler, örneğin çoktan karşılıklık yöntemi kullanılmıştır[3,4,6]. (2.62) denklemi

$$\varphi_g(\vec{r}) = \Phi_g(\vec{r}) - (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} s_{gh} \Phi_h(\vec{r}) \quad (2.64)$$

$$\varphi'_g(\vec{r}) = \Phi'_g(\vec{r}) - (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} s_{gh} \Phi'_h(\vec{r}) \quad (2.65)$$

tanımları ile, daha da basit bir formda

$$c(\vec{\rho})\varphi_g(\vec{\rho}) - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho})\varphi'_g(\vec{r})dS + \int_{S_r} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho})dS = \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho})z_g(\vec{r})dV \quad (2.66)$$

(2.62) denklemi yukarıdaki biçime dönüşür. Yetkinlik-Özdeğer problemleri için grup fisyon terimi,

$$q_g(\vec{r}) = \frac{\chi_g}{k_{eff}} f(\vec{r}) \quad (2.67)$$

biçimindedir. Burada,

$$f(\vec{r}) = \sum_{h=1}^G v\Sigma_{f,h}(\vec{r})\Phi_h(\vec{r}) \quad (2.68)$$

dır. Bu durumda (2.63) denklemi daha basit bir hale indirgenir,

$$z_g(\vec{r}) = \frac{w_g}{k_{eff}} f(\vec{r}) \quad (2.69)$$

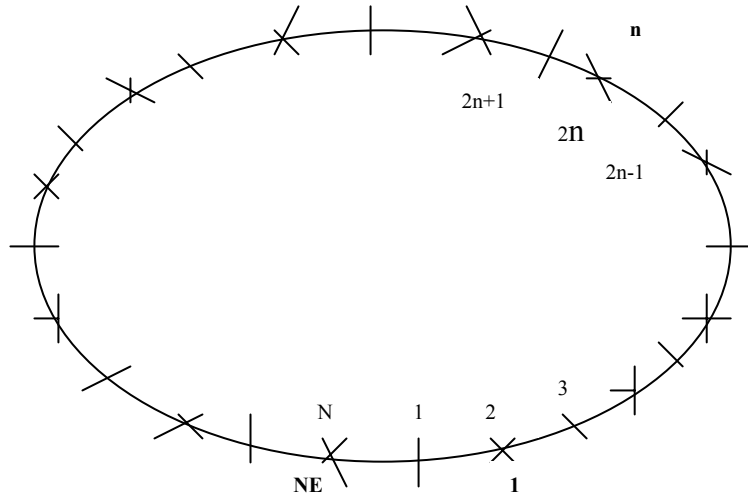
(2.69) denkleminde,

$$w_g(\vec{r}) = \frac{\chi_g}{D_g} - \sum_{h=1}^{g-1} \frac{\chi_h}{D_h} s_{gh} \quad (2.70)$$

biçiminde tanımlıdır[6].

### 2.3. Sınır İntegral Denkleminin Kuadratik Sınır Elemanları Yöntemi İle Ayrıklaştırılması

Şekil 2.2' de  $V$  hacimli bir nükleer sistemin  $S$  sınırı  $N$  adet kuadratik (ikinci derece) sınır elemanına  $S^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  ayrılmıştır. Her bir elemanın ikisi uçlarında diğeri ise elemanın tam orta noktasında olmak üzere üç adet düğüm noktası (nodu) bulunmaktadır. Toplam düğüm noktası sayısı ise eleman sayısının tam iki katıdır.



**Şekil 2.2:** Sistem sınırının kuadratik sınır elemanlarına bölünmesi

Kuadratik sınır elemanları yaklaşımında, her bir sınır elemanı içinde hem çözüm aranan fonksiyonun  $\varphi_g(\vec{r})$ , hem de bu fonksiyonun türevinin  $\varphi'_g(\vec{r})$  ikinci dereceden bir polinom olduğu varsayılır. Yani;

$$\varphi_g(\vec{r}) = \sum_{n'=2n-1}^{2n+1} \varphi_g^{n'} \Psi^{n'}(\vec{r}), \quad r \in S^n, n = 1, 2, \dots, N \quad (2.71)$$

$$\varphi'_g(\vec{r}) = \sum_{n'=2n-1}^{2n+1} \varphi_g'^{n'} \Psi^{n'}(\vec{r}), \quad r \in S^n, n = 1, 2, \dots, N \quad (2.72)$$

yazılabilir. Burada  $\psi^n(\vec{r})$ , n'inci noda ait baz fonksiyonlarıdır. Bu baz fonksiyonları ikinci derece Lagrange interpolasyon polinomları olup, n'inci nodun ait olduğu elemanlarda ikinci dereceden bir polinom, diğer tüm elemanlarda ise sıfır değerini alırlar. Ayrıca,

$$\Psi^n(r_{n'}) = \delta_{nn'}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad n' = 1, 2, \dots, N \quad (2.73)$$

şeklinde tanımlanırlar. Bölüm 2.1'de türetilen (2.66) sınır İntegral denkleminde  $\vec{\rho} = \rho_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  alınır ve (2.71) ve (2.72) denklemleriyle tanımlanan kuadratik sınır elemanları yaklaşımı kullanılırsa;

$$c_i \varphi_g^i = \sum_{j=1}^N \sum_{k=2j-1}^{2j+1} h_{ij}^{kg} \varphi_g^k + \sum_{j=1}^N g_{ij}^{kg} \varphi_g'^k = q_g^i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.74)$$

elde edilir. Burada,

$$h_{ik}^{j,g} = \int_{S^j} \frac{\partial G_g(\vec{r}, \vec{\rho})}{\partial n} \Psi_k(\vec{r}) dS \quad (2.75)$$

$$g_{ik}^{j,g} = - \int_{S^j} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) \Psi_k(\vec{r}) dS \quad (2.76)$$

ve

$$g_{ik}^{j,g} = \int_V z_g(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dV \quad (2.77)$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca,

$$\varphi_g^i(\vec{r}) = \varphi_g(\vec{\rho}_i) \quad (2.78)$$

$$c_i = c(\vec{\rho}_i) \quad (2.79)$$

olarak tanımlanmışlardır. (2.74) denklemi, sınır elemanı numaraları baz alınarak yazılmışlardır. Oysa lineer sistem oluşturulması düğüm noktaları baz alınarak gerçekleştirildiğinde (2.74) denklemi yeni bir notasyonla;

$$\sum_{j=1}^{2N} h_{ij}^g \varphi_g^i + \sum_{j=1}^{2N} g_{ij}^g \varphi_g^i = q_g^i, \quad i = 1, 2, \dots, 2N \quad (2.80)$$

olarak yazılabilir. Burada köşe nodların iki elemana ait olduğu orta nodların ise sadece tek elemana ait olduğu göz önüne alınırsa;

$$h_{ij}^g = \begin{cases} c_i \delta_{ij} + h_{ij}^{j/2,g} & j, \text{ çift} \\ c_i \delta_{ij} + h_{ij}^{(j-1)/2,g} + h_{ij}^{(j+1)/2,g} & j, \text{ tek} \quad j \neq 1 \\ c_i \delta_{i1} + h_{i1}^{1,g} + h_{i1}^{N,g} & j = 1 \end{cases} \quad (2.81)$$

$$g_{ij}^g = \begin{cases} g_{ij}^{j/2,g} & j, \text{ çift} \\ g_{ij}^{(j-1)/2,g} + g_{ij}^{(j+1)/2,g} & j, \text{ tek} \quad j \neq 1 \\ g_{i1}^{1,g} + g_{i1}^{N,g} & j = 1 \end{cases} \quad (2.82)$$

şeklinde yazılabilir. (2.80) denkleminde  $\varphi_i^g$  ve  $\varphi_i'^g$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2N$  olmak üzere  $2N$  adet bilinmeyen bulunmaktadır. Oysa denklem sayısı matris boyutu ile aynı olup  $2N$  adettir. Bilinmeyen sayısının denklem sayısına eşitlenmesi ancak sınır koşullarının uygulanması ile mümkündür. Yansıtıcı sınır koşulunun uygulandığı dış yüzey  $S_r$  üzerinde

$$\frac{\partial \Phi_g(\vec{r})}{\partial n} = 0, \quad \vec{r} \in S_r \quad (2.83)$$

ve boşluk sınır koşulunun uygulandığı  $S_v$  dış yüzeyi üzerinde

$$\Phi_g(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in S_v \quad (2.84)$$

olmaktadır. Böylece  $2N$  bilinmeyen yok olacağından denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşitlenmiş olacaktır. (2.80) denklemi matris notasyonu ile yazılırsa;

$$\underline{\underline{H}}^g \underline{\varphi}^g + \underline{\underline{G}}^g \underline{\varphi}'^g = \underline{q}^g, \quad g = 1, 2, \dots, G \quad (2.85)$$

denklemini elde edilir. Burada boşluk ve yansıtıcı sınır koşulunun uygulandığı dış yüzeylerdeki  $\underline{\varphi}$  ve  $\underline{\varphi}'$  vektörlerini birbirlerinden ayırırsak,

$$\underline{\varphi}^g = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_r^g \\ \underline{\varphi}_v^g \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

ve

$$\underline{\varphi}'^g = \begin{bmatrix} \varphi_r'^g \\ \underline{\varphi}_v'^g \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

yazabiliriz. (2.83) ve (2.84) denklemleriyle verilen sınır koşulları nedeniyle  $\underline{\varphi}_v^g = 0$

ve  $\varphi_r'^g = 0$  olacaktır. (2.85) denklemini;

$$\underline{\underline{A}}^g = \begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}_{rr}^g & \underline{\underline{G}}_{rv}^g \\ \underline{\underline{H}}_{vr}^g & \underline{\underline{G}}_{vv}^g \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

blok matrisi ve

$$\underline{\underline{u}}^g = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_r^g \\ \varphi_r'^g \\ \underline{\varphi}_v^g \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{q}}^g = \begin{bmatrix} \underline{q}_r^g \\ \underline{q}_v^g \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

blok vektörleri tanımlarıyla,

$$\underline{\underline{A}}^g \underline{\underline{u}}^g = \underline{\underline{q}}^g, \quad g = 1, 2, \dots, G \quad (2.90)$$

lineer sistemine dönüştürülebilir. Burada  $rr$  alt indisi yansıtıcı sınır koşulunun uygulandığı sistem dış yüzünde yer alan nodların birbirleri ile kupaajlarını;  $rv$  alt indisi yansıtıcı sınır koşulunun uygulandığı sistem dış yüzeyinde yer alan nodlarla boşluk sınır koşulunun uygulandığı sistem dış yüzeyinde yer alan nodların kupaajlarını simgelendirmektedir.  $vv$  ve  $vr$  alt indisleri için de benzer yorumlar yapılabilir. (2.90) lineer sistemi  $2N$  boyutludur ve birinci gruptan başlanarak  $G$ ' inci gruba kadar sırası ile çözülürler. Bu lineer sistemdeki katsayılar matrisi; sadece sistem sınırlarında yer alan düğüm noktası sayısı,  $2N$ , boyutlu bir matris olmasına karşın dolu ve simetrik olmayan bir yapıdadır. Almasıık yöntemlerde (sonlu farklar, sonlu elemanlar gibi) ortaya çıkan matrislerin simetrik ve seyrek yapılı özellikleri sınır elemanlar yönteminde ortadan kalkmaktadır. (2.90) lineer sistemi almasıık

sistemlerde ortaya çıkan lineer sistemlere göre çok daha küçük boyutta olduğundan direkt yöntemler kullanılarak çözülebilmektedir. Bu çalışmada çözüm yöntemi olarak doğrudan bir yöntem olan Crout algoritması kullanılmıştır.

#### 2.4. Sınır İntegrallerinin Hesabı

Bu bölümde (2.3)'de tanımlanan  $h_{ij}^{k,g}$  ve  $g_{ij}^{k,g}$  integrallerinin hesabı detaylı olarak verilecektir.

$$g_{ij}^{k,g} = \int_{S_r^j} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) \Psi_k(\vec{r}) dS \quad (2.91)$$

$$h_{ij}^{k,g} = \int_{S_r^j} \frac{\partial G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i)}{\partial n} \Psi_k(\vec{r}) dS \quad (2.92)$$

tanımlarından görüldüğü gibi bu ifadeler sonsuz ortam Green fonksiyonlarının ve türevlerinin Lagrange baz fonksiyonları ile çarpımlarının integrallerinin hesabını gerektirmektedir. Sonsuz ortam Green fonksiyonu iki boyutlu sonsuz ortam Green fonksiyonu denkleminin çözümüdür, çözüm EK.D'de verilmiştir.

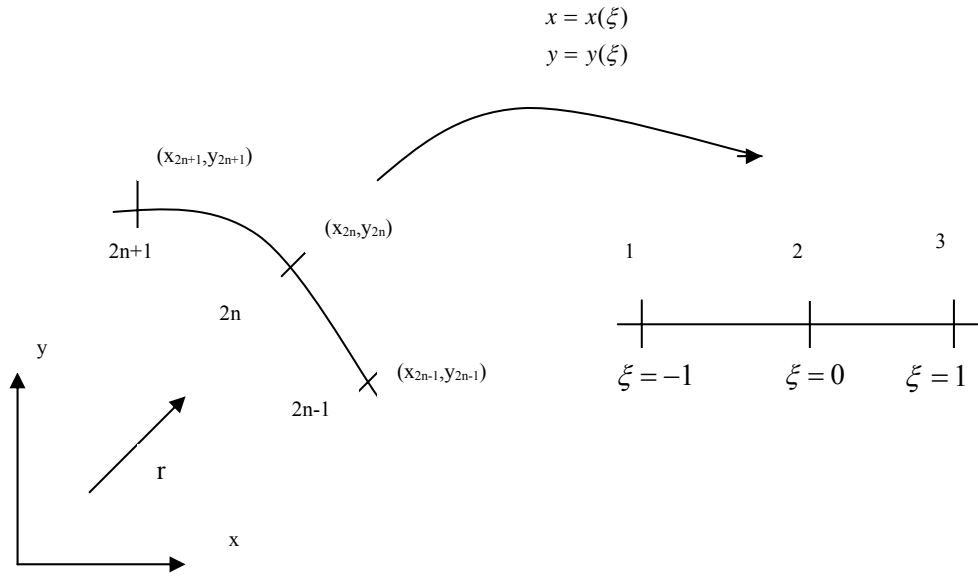
$$G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = \frac{1}{2\pi} K_0(k_g r) \quad (2.93)$$

Burada  $K_0(k_g r)$  ikinci çeşit sıfırncı mertebe değiştirilmiş Bessel fonksiyonudur.  $k_g$ ,  $g$ 'inci grup difüzyon uzunluğunun tersi, ve  $r$ ;

$$r = |\vec{r} - \vec{\rho}_i| \quad (2.94)$$

olarak tanımlıdır.

Katsayılar matrisinin bileşenleri sayısal integrasyon yoluyla hesaplanacaktır. Çalışmamızda eğrisel kenarlara sahip sistemlerde modelleneceği için, bu hesaplamalar eleman dönüşümünü gerektirmektedir. Eleman dönüşümünde eğri kenara sahip bir sınır, bir koordinat dönüşümüyle bir çizgi üzerine taşınır ve tüm integrasyonlar doğrusal çizgi üstünde gerçekleştirilir.



**Şekil 2.3:** Katsayılar matrisi elemanlarının hesabı için gerekli eleman dönüşümü

Şekil 2.3’de  $(x,y)$  koordinat sistemindeki kuadratik bir sınır elemanının;  $\xi$  yerel koordinat sistemindeki doğrusal bir çizgiye dönüşümü gösterilmektedir.  $(x,y)$  evrensel koordinatında  $n-1$ ,  $n$  ve  $n+1$  numaralı düğüm noktaları  $\xi$  yerel koordinatında 1, 2 ve 3 numaraları ile simgelenilecektir. Bu dönüşüm;

$$x = x(\xi) = \sum_{k=1}^3 x_k \Psi_k(\xi)$$

$$y = y(\xi) = \sum_{k=1}^3 y_k \Psi_k(\xi) \quad (2.95)$$

bağıntıları ile gerçekleştirilir. Burada  $\Psi_k(\xi)$  Tablo 2.1’de verilmektedir. Bu fonksiyonlar Lagrange baz fonksiyonlarıdır.

**Tablo 2.1:** İkinci derece Lagrange baz fonksiyonları

Düğüm, i	$\Psi_i(\xi)$
1	$\frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$
2	$(1 - \xi^2)$
3	$\frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$

Tablo 2.1’de ikinci derece Lagrange baz fonksiyonlarıdır verilmektedir. Bu fonksiyonlar, kendilerine ait düğüm noktalarında 1, diğer noktalarda sıfır değeri alırlar.

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(-x_1 + x_2)\xi + x_2$$

$$y(\xi) = \frac{1}{2}(y_1 - 2y_2 + y_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(-y_1 + y_2)\xi + y_2 \quad (2.96)$$

tanımlanan bu yerel koordinatlar kullanılırsa  $\underline{H}$  ve  $\underline{G}$  matrislerinin elemanları;

$$g_{ij}^{k,g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Psi_k[r(\xi)] K_0[k_g r(\xi)] J(\xi) d\xi \quad (2.97)$$

$$h_{ij}^{k,g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Psi_k[r(\xi)] \frac{d}{dn} K_0[k_g r(\xi)] J(\xi) d\xi \quad (2.98)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $|J(\xi)|$  dönüşümün Jakobian’ı olarak adlandırılır ve

$$|J(\xi)| = \left[ \left( \frac{dx(\xi)}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2}$$

olarak tanımlıdır,

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(-x_1 + x_2)\xi + x_2$$

$$y(\xi) = \frac{1}{2}(y_1 - 2y_2 + y_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(-y_1 + y_2)\xi + y_2 \quad (2.99)$$

idi ve

$$|J(\xi)| = \sqrt{\left[ (x_1 - 2x_2 + x_3)\xi + \frac{1}{2}(x_3 - x_1) \right]^2 + \left[ (y_1 - 2y_2 + y_3)\xi + \frac{1}{2}(y_3 - y_1) \right]^2} \quad (2.100)$$

şeklinde tanımlıdır,  $r(\xi)$  ise;

$$r(\xi) = \sqrt{[x(\xi) - x_i]^2 + [y(\xi) - y_i]^2} \quad (2.101)$$

ifadesi ile verilmektedir.

#### 2.4.1 $h_{ij}$ İntegrallerinin Hesabı

(2.98) denklemini ele alalım,

$$h_{ij}^{k,g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Psi_k[r(\xi)] \frac{d}{dn} K_0[k_g r(\xi)] J(\xi) d\xi \quad (2.102)$$

Önce (2.102) integrali içinde yer alan Bessel fonksiyonunun normal türevi ile işe başlayalım.

$$\frac{dK_0}{dr}(k_g r) = \frac{d}{dr} [K_0(k_g r)] \frac{dr}{dn} = -k_g K_1(k_g r) \frac{dr}{dn} \quad (2.103)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $K_1(k_g r)$  birinci mertebe değiştirilmiş Bessel fonksiyonudur.

(2.96) ifadesinde her iki yanın karesi alınarak, diferansiyeli alınıp daha sonra eşitliğin her iki yanı '2r dn' ile bölünürse:

$$\frac{dr}{dn} = \frac{x - x_i}{r} \frac{dx}{dn} + \frac{y - y_i}{r} \frac{dy}{dn} \quad (2.104)$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki ifadede,

$$\frac{dx}{dn} = \frac{1}{|J(\xi)|} \frac{dy}{dn}$$

$$\frac{dy}{dn} = -\frac{1}{|J(\xi)|} \frac{dx}{dn} \quad (2.105)$$

şeklinde tanımlanır. (2.100) ile tanımlanan ifadeler (2.99) denkleminde yazılırsa,

$$\frac{dr}{dn} = \frac{1}{|J(\xi)|} \left( \frac{x-x_i}{r} \frac{dy}{d\xi} - \frac{y-y_i}{r} \frac{dx}{d\xi} \right) \quad (2.106)$$

elde edilir. (2.98) ve (2.101) eşitlikleri (2.90) denkleminde kullanılırsa integral sınırları  $[-1,+1]$  aralığına dönüştürüldüğünden;

$$h_{i,j}^{k,g} = -\frac{k_g}{2\pi} \int_{-1}^{+1} K_1(k_g r(\xi)) \Psi_k(\xi) J(\xi) \frac{1}{|J(\xi)|} \left( \frac{x-x_i}{r} \frac{dy}{d\xi} + \frac{y-y_i}{r} \frac{dx}{d\xi} \right) d\xi \quad (2.107)$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki integral hesabında sayısal integrasyon kullanılırsa;

$$h_{ij}^{k,g} = -\frac{k_g}{2\pi} \sum_{l=1}^L K_1(k_g r(\xi_l)) \Psi_k(\xi_l) J(\xi_l) \left( \frac{x(\xi_l)-x_i}{r(\xi)} \frac{1}{|J(\xi_l)|} \frac{dy(\xi_l)}{d\xi} + \frac{y(\xi_l)-y_i}{r} \frac{1}{|J(\xi_l)|} \frac{dx}{d\xi} \right) \omega_l \quad (2.108)$$

elde edilir.

Çalışmamızda bu integral 10 noktalı Gauss karelemesi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. (2.108) denklemini  $i$  numaralı düğüm noktasının,  $j$  numaralı eleman üzerinde yer almadığı varsayılmıştır.  $i$  numaralı düğüm noktası  $j$  numaralı eleman üzerinde yer aldığından  $\frac{dr(\xi)}{dn}$  ifadesi sıfır değerini aldığından  $h_{ii}^{k,g}$  elemanları sıfır değeri alır.

#### 2.4.2 $g_{ij}$ İntegrallerinin Hesabı

(2.92) ifadesi (2.89) eşitliğinde yazılırsa,

$$g_{ij}^{k,g} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_V} K_0(k_g r) \Psi_k(r) d\Gamma \quad (2.109)$$

eşitliği elde edilir. Koordinat dönüşümünden dolayı  $g_{ij}^{k,g}$  ifadesi jacobian tanımı kullanılarak aşağıdaki biçimde yazılır.

$$g_{ij}^{k,g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} K_0(k_g r(\xi)) \Psi_m(r) |J(\xi)| d\xi \quad (2.110)$$

$K_0(r)$ ' nin  $r=0$ ' da sonsuz değeri alması nedeniyle bu integral tekillik içermektedir. Bu nedenle bu integral iki ayrı durumda ele alınacaktır.

1)  $i$  numaralı düğüm noktası  $j$  numaralı eleman üzerinde yer almıyorsa  $r=0$

durumu gerçekleşmeyeceğinden  $g_{ij}^{k,g}$  hesabı basittir ve yine 10 noktalı Gauss karelemesi ile bu integral yeterli duyarlılıkta hesaplanabilmektedir.

$$g_{ij}^{k,g} = \sum_{l=1}^{10} \Psi_k(\xi_l) K_0[k_g r(\xi_l)] J(\xi_l) |\omega_l| \quad (2.111)$$

denklemi ile bu sayısal integrasyon kolaylıkla gerçekleştirilir.

2)  $i$  numaralı düğüm noktası  $j$  numaralı eleman üzerinde yer alıyorsa  $r=0$  durumu gerçekleştirilebileceğinden tekil integrallerin hesabı sorunu ortaya çıkacaktır. Bu durumda  $K_0(r)$ , Bessel fonksiyonu için aşağıda verilen açılım kullanılacaktır.

$$K_0(x) = \ell n \frac{2}{x} I_0(x) + \sum_{n=1}^7 P_n \left( \frac{x}{2} \right)^{2n-2} \quad (2.112)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $I_0(x)$  birinci çeşit sıfırcı mertebe değiştirilmiş Bessel fonksiyonudur. (2.112) denklemi P katsayıları kullanılarak açık yazılırsa,

$$K_0 = \ell n \frac{2}{x} I_0(x) - 0,57721566 + 0,4227842 \left( \frac{x}{2} \right)^2 + 0,23069756 \left( \frac{x}{2} \right)^4 + 0,0348859 \left( \frac{x}{2} \right)^6 \\ + 0,00262698 \left( \frac{x}{2} \right)^8 + 0,0001075 \left( \frac{x}{2} \right)^{10} + 0,0000074 \left( \frac{x}{2} \right)^{12} \quad (2.113)$$

biçimindedir. Bu açılımı kullanmamızın nedeni tekilliğin logaritmik fonksiyon üzerine atılması ve böylece literatürde [2] yer alan logaritmik Gauss karelerinden yararlanmaktır. Bu tekil integrallerin hesabında  $i$  numaralı düğüm noktasının  $j$

numaralı elemanın farklı üç düğüm noktasında yer alması durumlarında farklılık görüldüğünden bu üç durum için ayrı ayrı ele alınacaktır.

i) i düğüm noktasının j elemanının ilk nodunda yer alması durumu:

$$r = \sqrt{(x(\xi) - x_1)^2 + (y(\xi) - y_1)^2} \quad (2.114)$$

olur. (2.104) denklemi

$$g_{ij}^{k,g} = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln 2 \int_{-1}^{+1} I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi + \int_{-1}^{+1} \ln \left( \frac{1}{k_g r(\xi)} \right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \right] \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^7 P_n \int_{-1}^{+1} \left( \frac{k_g r(\xi)}{2} \right)^{2n-2} \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \quad (2.115)$$

biçiminde olur. (2.115) denkleminin ilk ve son terimleri tekil olmadığından standart Gauss integrasyonu kullanılabilir. Fakat ikinci terim tekillik içerdiğinden ayrıca incelenir.

$$I = \left[ \int_{-1}^{+1} \ln \left( \frac{1}{k_g r(\xi)} \right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \right] \quad (2.116)$$

tanımı yapıлып,  $\eta \in [0,1]$  olmak üzere yeniden  $\xi \rightarrow \eta$  dönüşümü uygulanırsa,

$$\eta = \frac{1}{2}(\xi + 1), d\xi = 2d\eta \quad (2.117)$$

olur. (2.117) eşitlikleri I integralinde yerine yazılırsa,

$$I = \left[ \int_0^1 \ln \left( \frac{1}{k_g r(\eta)} \right) I_0(k_g r(\eta)) \psi_k(\eta) |J(\eta)| 2d\eta \right] \quad (2.118)$$

elde edilir.

Burada,

$$r(\eta) = \eta \sqrt{[(2x_1 - 4x_2 + 2x_3)\eta + (-3x_1 + 4x_2 - x_3)]^2 + [(2y_1 - 4y_2 + 2y_3)\eta + (-3y_1 + 4y_2 - y_3)]^2}$$

$$\psi_j(\eta) = \begin{cases} (\eta - 1)(2\eta - 1), & j = 1 \\ 4\eta(1 - \eta), & j = 2 \\ \eta(2\eta - 1), & j = 3 \end{cases}$$

$$|J(\eta)| = \sqrt{\left[ (2x_1 - 4x_2 + 2x_3)\eta + \left( -\frac{3}{2}x_1 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right) \right]^2 + \left[ (2y_1 - 4y_2 + 2y_3)\eta + \left( -\frac{3}{2}y_1 + 2y_2 - \frac{1}{2}y_3 \right) \right]^2} \quad (2.119)$$

biçimindedir.

$$r(\eta) = \eta s(\eta) \quad (2.120)$$

alınırsa, (2.116) denklemi,

$$I = 2 \left[ \int_0^1 \ell n \left( \frac{1}{\eta} \right) I_0(k_g r(\eta)) \psi_k(\eta) |J(\eta)| d\eta \right] + 2 \left[ \int_0^1 \ell n \left( \frac{1}{k_g r(\eta)} \right) I_0(k_g r(\eta)) \psi_k(\eta) |J(r)| d\eta \right] \quad (2.121)$$

biçimine dönüşür. Yine yukarıdaki eşitliğin ikinci terimi tekillik içermeyip, ilk terimi tekil olduğundan bir kez daha dönüşüm uygulanır. Bu dönüşümde  $\eta \rightarrow \xi$  iken integral  $[-1, +1]$  aralığına taşınır. Bunun için  $\eta \in [0, 1]$  ve  $\xi \in [-1, +1]$  olmak üzere (2.116) bağıntıları  $I$  denkleminde yazılırsa,

$$II = \left[ \int_{-1}^1 \ell n \left( \frac{1}{k_g s(\xi)} \right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \right] \quad (2.122)$$

elde edilir. Daha önceki tanımlar kullanılırsa,

$$s(\xi) = \sqrt{[(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi + (-2x_1 + 2x_2)]^2 + [(y_1 - 2y_2 + y_3)\eta + (-2y_1 + 2y_2)]^2} \quad (2.123)$$

bulunur.

Elde edilen  $I$  integrali (2.115) denkleminde tekrar yazılırsa;

$$g_{ij}^{k,g} = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln 2 \int_{-1}^{+1} I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi + \int_{-1}^{+1} \ln \left( \frac{1}{k_g s(\xi)} \right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \right] \\ + \frac{1}{2\pi} \left[ 2 \int_0^1 \ln \left( \frac{1}{n} \right) I_0(k_g r(\eta)) \psi_k(\eta) |J(\eta)| d\eta \right] + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^7 P_n \int_{-1}^{+1} \left( \frac{k_g r(\xi)}{2} \right)^{2n-2} \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \quad (2.124)$$

Yukarıdaki ifadede ilk integrale logaritmik Gauss integrasyonu, diğerlerine Gauss integrasyonu uygulandığında;

$$g_{ij}^{k,g} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{aligned} & 2 \sum_{l=1}^{L^*} I_0(k_g r(\eta_{l^*})) \psi_k(\eta_{l^*}) |J(\eta_{l^*})| \omega_{l^*} + \sum_{l=1}^L \ln \left( \frac{1}{k_g s(\xi_l)} \right) I_0(k_g r(\xi_l)) \psi_k(\xi_l) |J(\xi_l)| \omega_l \\ & + \ln 2 \sum_{l=1}^L I_0(k_g r(\xi_l)) \psi_k(\xi_l) |J(\xi_l)| \omega_l + \sum_{l=1}^L \left( \sum_{n=1}^7 P_n \left( \frac{k_g r(\xi_l)}{2} \right)^{2n-2} \right) \psi_k(\xi_l) |J(\xi_l)| \omega_l \end{aligned} \right\} \quad (2.125)$$

elde edilir.  $\eta_{l^*}$  ve  $\omega_{l^*}$  değerleri logaritmik Gauss noktaları ve ağırlıkları,  $\xi_l$  ve  $\omega_l$  değerleri ise Gauss integrasyon noktaları ve ağırlıklarıdır.

ii) i düğüm noktasının j elemanının ikinci nodu üzerinde yer alması durumu:

$$r = \sqrt{(x(\xi) - x_2)^2 + (y(\xi) - y_2)^2} \quad (2.126)$$

olur. Aynı şekilde  $g_{ij}^{k,g}$  ifadesinde tekilliğe neden olan kısım I integrali göz önüne alınır ve tekilliği ortadan kaldıracak değişken dönüşümleri yapılır. Bunun için  $[-1,+1]$  aralığında tanımlı ve  $\xi$  değişkenine bağlı I integrali  $[-1,0]$  ve  $[0,+1]$  aralıklarına parçalanır.

$$I = \left[ \int_0^{+1} \ln \left( \frac{1}{k_g r(\xi)} \right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \right] + \left[ \int_{-1}^0 \ln \left( \frac{1}{k_g r(\xi)} \right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \right] \quad (2.127)$$

yukarıdaki ifadenin ilk terimi alınır;

$$I = \left[ \int_{-1}^0 \ln \left( \frac{1}{k_g r(\xi)} \right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \right] + \left[ \int_0^1 \ln \left( \frac{1}{k_g r(\xi)} \right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \right] \quad (2.128)$$

(2.128) ifadesinin ilk teriminde;

$$\begin{aligned}\eta &= -\xi \\ d\eta &= -d\xi\end{aligned}\tag{2.129}$$

değişken dönüşümünü yapırsa,

$$I = \left[ \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{k_g r(\eta)}\right) I_0(k_g r(\eta)) \psi_k(\eta) |J(\eta)| d\eta \right] + \left[ \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{k_g r(\xi)}\right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \right]\tag{2.130}$$

elde edilir. (2.129) eşitlikleri kullanılarak (2.126) denklemi aşağıdaki biçimde yazılır.

$$r(\eta) = \eta s(\eta)\tag{2.131}$$

yukarıdaki tanım kullanılırsa

$$\ln \frac{1}{\eta k_g s(\eta)} = \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) + \ln \frac{1}{k_g s(\eta)}\tag{2.132}$$

elde edilir. (2.128) eşitliğinde ilk integrale  $I_1$ , ikincisine  $I_2$  denilirse,

$$I_1 = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) I_0(k_g r(\eta)) \psi_k(\eta) |J(\eta)| d\eta - \int_0^1 \ln(k_g r(\eta)) I_0(k_g r(\eta)) \psi_k(\eta) |J(\eta)| d\eta\tag{2.133}$$

elde edilir. Yukarıdaki integralin ikinci terimine yeniden,

$$\begin{aligned}\eta &= -\bar{\xi} \\ d\eta &= -d\bar{\xi}\end{aligned}\tag{2.134}$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$I_1 = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) I_0(k_g r(\eta)) \psi_k(\eta) |J(\eta)| d\eta - \int_0^1 \ln(k_g r(\bar{\xi})) I_0(k_g r(\bar{\xi})) \psi_k(\bar{\xi}) |J(\bar{\xi})| d\bar{\xi}\tag{2.135}$$

(2.128) integralindeki ikinci terim için benzer işlemler uygulanırsa,

$$r(\xi) = \xi s(\xi)\tag{2.136}$$

$$\ln\left(\frac{1}{k_g r(\xi)}\right) = \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) + \ln\left(\frac{1}{k_g s(\xi)}\right)\tag{2.137}$$

elde edilir yukarıdaki tanımlar kullanılırsa,

$$I_2 = \int_0^1 \ell n \left( \frac{1}{\xi} \right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi - \int_0^1 \ell n(k_g s(\xi)) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \quad (2.138)$$

bulunur. Yapılan dönüşümler sonucu elde edilen  $I_1$  ve  $I_2$  ifadeleri toplanırsa,  $I$  integrali elde edilir. Bu toplam (2.115) denkleminde yazılırsa;

$$g_{g,m}^{ij} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \ell n \int_{-1}^{+1} I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi + \int_0^1 \ell n \left( \frac{1}{\eta} \right) I_0(k_g r(\eta)) \psi_k(\eta) |J(\eta)| d\eta \\ + \int_0^1 \ell n \left( \frac{1}{\xi} \right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi - \int_{-1}^{+1} \ell n(k_g s(\bar{\xi})) I_0(k_g r(\bar{\xi})) \psi_k(\bar{\xi}) |J(\bar{\xi})| d\bar{\xi} \\ + \sum_{n=1}^7 P_n \int_{-1}^{+1} \left( \frac{k_g r(\xi)}{2} \right)^{2n-2} \psi_k(\xi) |J(\xi)| d\xi \end{array} \right\} \quad (2.139)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemden de Standart Gauss ve Logaritmik Gauss integrasyonu kullanılırsa;

$$g_{ij}^{k,g} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{l^*}^L I_0(k_g r(\eta_{l^*})) \psi_k(\eta_{l^*}) |J(\eta_{l^*})| \omega_{l^*} + \sum_{l=1}^L \ell n \left( \frac{1}{k_g l(\xi_l)} \right) I_0(k_g r(\xi_l)) \psi_k(\xi_l) |J(\xi_l)| \omega_l \\ + \ell n 2 \sum_{l=1}^L I_0(k_g r(\xi_l)) \psi_k(\xi_l) |J(\xi_l)| \omega_l - \sum_{l^*}^L I_0(k_g r(\xi_{l^*})) \psi_k(\xi_{l^*}) |J(\xi_{l^*})| \omega_{l^*} \\ + \sum_{n=1}^7 P_n \int_{-1}^{+1} \left( \frac{k_g r(\xi_l)}{2} \right)^{2n-2} \psi_k(\xi_l) |J(\xi_l)| \omega_l \end{array} \right\} \quad (2.140)$$

elde edilir. Burada,

$$s(\xi_l) = \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2} x_1 - x_2 + \frac{1}{2} x_3 \right) \xi + \frac{1}{2} (-x_1 + x_2) \right]^2 + \left[ \left( \frac{1}{2} y_1 - y_2 + \frac{1}{2} y_3 \right) \eta + \frac{1}{2} (-y_1 + y_2) \right]^2} \quad (2.141)$$

$$|J(\xi_l)| = \sqrt{\left[ (x_1 - 2x_2 + x_3) \xi_l + (-x_1 + x_2) \right]^2 + \left[ (y_1 - 2y_2 + y_3) \xi_l + (-y_1 + y_2) \right]^2} \quad (2.142)$$

$$\psi_m(\xi_l) = \begin{cases} \frac{1}{2} \xi_l (\xi_l - 1) & , m = 1 \\ 1 - \xi_l^2 & , m = 2 \\ \frac{1}{2} \xi_l (\xi_l - 1) & , m = 3 \end{cases} \quad (2.143)$$

$$s(\eta_{l^*}) = \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{2} x_1 - x_2 + \frac{1}{2} x_3 \right) \eta_{l^*} + \frac{1}{2} (-x_1 + x_2) \right]^2 + \left[ \left( \frac{1}{2} y_1 - y_2 + \frac{1}{2} y_3 \right) \eta_{l^*} + \frac{1}{2} (-y_1 + y_2) \right]^2} \quad (2.144)$$

$$|J(\eta_r)| = \sqrt{\left[ (x_1 - 2x_2 + x_3)\eta_r + \frac{1}{2}(-x_1 + x_2) \right]^2 + \left[ (y_1 - 2y_2 + y_3)\eta_r + \frac{1}{2}(-y_1 + y_2) \right]^2} \quad (2.145)$$

$$\psi_k(\xi_l) = \begin{cases} \frac{1}{2}\eta_r(\eta_r - 1) & , k=1 \\ 1 - \eta_r^2 & , k=2 \\ \frac{1}{2}\eta_r(\eta_r - 1) & , k=3 \end{cases} \quad (2.146)$$

ifade etmektedir.

iii) i düğüm noktasının j elemanının üçüncü nodu üzerinde yer alması durumu:

Bu durumda r,

$$r = \sqrt{(x(\xi) - x_3)^2 + (y(\xi) - y_3)^2} \quad (2.147)$$

olur. Daha önceki durumlarda kullanılan Jacobian tanımı kullanılarak, tekil olan I integrali göz önüne alınır; yine burada değişken dönüşümü yapıldığında  $\eta \in [-1, +1]$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - 2\eta \\ d\xi &= -2d\eta \end{aligned} \quad (2.148)$$

olur ve

$$r(\eta) = \eta p(\eta) \quad (2.149)$$

tanımı yapıldığında,

$$I = \int_0^1 \ell n\left(\frac{1}{\eta}\right) I_0(k_g r(\eta)) \psi_m(\eta) |J(\eta)| d\eta - \int_0^1 \ell n(k_g p(\eta)) I_0(k_g r(\eta)) \psi_m(\eta) |J(\eta)| d\eta \quad (2.150)$$

bulunur. I ifadesinin ikinci integralinde  $[0,1]$  aralığından  $[-1,+1]$  aralığına (2.149) tanımları kullanılarak dönüşüm yapılırsa,

$$I_1 = \int_0^1 \ell n\left(\frac{1}{\eta}\right) I_0(k_g r(\eta)) \psi_m(\eta) |J(\eta)| d\eta - \int_0^1 \ell n(k_g p(\xi)) I_0(k_g r(\xi)) \psi_m(\xi) |J(\xi)| d\xi \quad (2.151)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeler (2.115) eşitliğinde yerin yazılırsa;

$$g_{g,m}^{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[ \ell n 2 \int_{-1}^{+1} I_0(k_g r(\xi)) \psi_m(\xi) |J(\xi)| d\xi + \int_{-1}^{+1} \ell n \left( \frac{1}{k_g p(\xi)} \right) I_0(k_g r(\xi)) \psi_m(\xi) |J(\xi)| d\xi \right] \\ + \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^1 \ell n \left( \frac{1}{n} \right) I_0(k_g r(\eta)) \psi_m(\eta) |J(\eta)| d\eta \right] + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^7 P_n \int_{-1}^{+1} \left( \frac{k_g r(\xi)}{2} \right)^{2n-2} \psi_m(\xi) |J(\xi)| d\xi \quad (2.152)$$

elde edilir. Yukarıdaki integrallerin çözümü için yine logaritmik Gauss ve Gauss integrasyonu kullanılırsa;

$$g_{ij}^{k,g} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{l^*} I_0(k_g r(\eta_{l^*})) \psi_k(\eta_{l^*}) |J(\eta_{l^*})| \omega_{l^*} + \sum_{l=1}^L \ell n \left( \frac{1}{k_g p(\xi_l)} \right) I_0(k_g r(\xi_l)) \psi_k(\xi_l) |J(\xi_l)| \omega_l \\ & + \ell n 2 \sum_{l=1}^L I_0(k_g r(\xi_l)) \psi_k(\xi_l) |J(\xi_l)| \omega_l + \sum_{n=1}^7 P_n \int_{-1}^{+1} \left( \frac{k_g r(\xi_l)}{2} \right)^{2n-2} \psi_k(\xi_l) |J(\xi_l)| \omega_l \end{aligned} \right\} \quad (2.153)$$

Burada;

$$p(\xi_l) = \sqrt{[(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi_l + 2(-x_1 + x_3)]^2 + [(y_1 - 2y_2 + y_3)\xi_l + 2(-y_1 + y_3)]^2}$$

$$|J(\xi_l)| = \sqrt{\left[ (x_1 - 2x_2 + x_3)\xi_l + \frac{1}{2}(-x_1 + x_3) \right]^2 + [(y_1 - 2y_2 + y_3)\xi_l + (-y_1 + y_3)]^2}$$

$$|J(\eta_{l^*})| = \sqrt{[4(x_1 - 2x_2 + x_3)\eta_{l^*} - (x_1 - 4x_2 + 3x_3)]^2 + [4(y_1 - 2y_2 + y_3)\eta_{l^*} - (y_1 - 4y_2 + 3y_3)]^2}$$

$$\psi_m(\xi_l) = \begin{cases} \frac{1}{2} \xi_l (\xi_l - 1) & , m = 1 \\ 1 - \xi_l^2 & , m = 2 \\ \frac{1}{2} \xi_l (\xi_l - 1) & , m = 3 \end{cases}$$

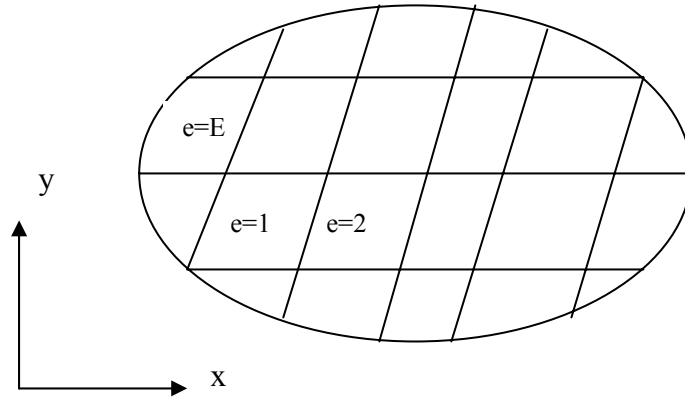
$$\psi_m(\eta_{l^*}) = \begin{cases} \eta_{l^*} (2\eta_{l^*} - 1) & , m = 1 \\ 4\eta_{l^*} (1 - \eta_{l^*}) & , m = 2 \\ (\eta_{l^*} - 1)(2\eta_{l^*} - 1) & , m = 3 \end{cases} \quad (2.154)$$

## 2.5 Kaynak Teriminin Hesabı

Lineer sisteminin sağ tarafında yer alan kaynak teriminin hesabı için hacim integrasyonu gerekmektedir. Kaynak terimi,

$$q_g^i = \int_V z_g(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dV \quad (2.155)$$

şeklindedir.



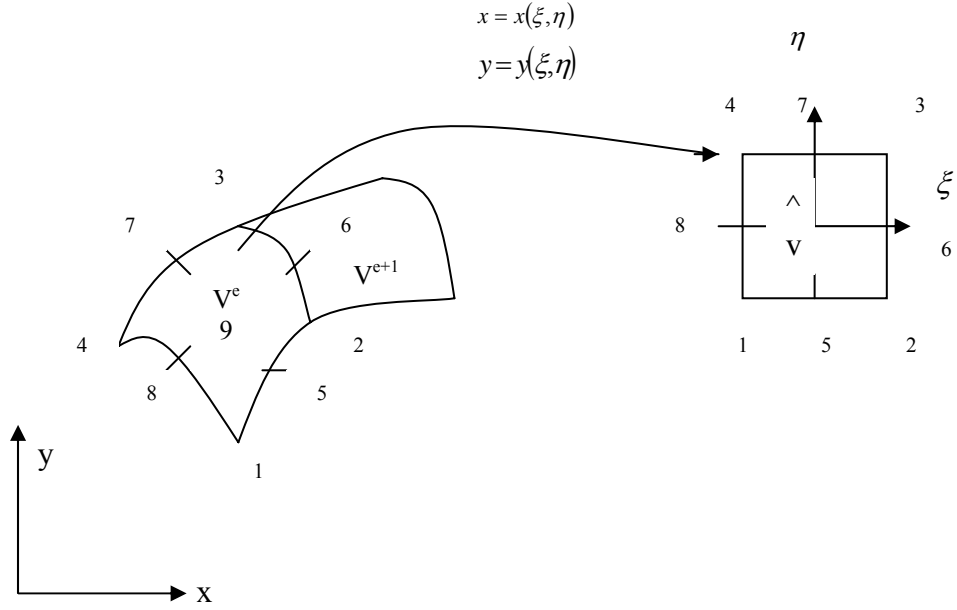
Şekil 2.4: Sistemin alt bölgelere ayrılması

(2.155) denklemindeki integrallerin gerçekleştirilebilmesi için  $V$  hacmine sahip sistemi,  $E$  adet küçük alt bölgelere, elemanlara ayıralım.

Bu durumda (2.155) denklemini

$$q_g^i = \sum_{e=1}^E \int_{V^e} z_g(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dV \quad (2.156)$$

şeklinde yazılabilir. Çalışmamız eğrisel kenarlı sistemlerin modellenmesini de içerdiğinden yine katsayılar matrisinin bileşenlerinin hesabında olduğu gibi en azından ikinci dereceden bir koordinat dönüşümüne gereksinim olmaktadır. Fakat bu kez dönüşüm iki boyutludur ve seçilen eleman tipinin geometrik şekline göre farklılık göstermektedir. Çalışmamız üçgen ve dörtgen elemanlarla sınırlandırıldığından burada sadece üçgen ve dörtgen eleman koordinat dönüşümleri sunulacaktır.



**Şekil 2.5:** İki boyutta dörtgen eleman dönüşümü

İki boyutta ikinci derece koordinat dönüşümü yine Lagrange baz fonksiyonlarından yararlanılarak

$$x = x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^g x_i \Psi_i(\xi, \eta)$$

$$y = y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^g y_i \Psi_i(\xi, \eta) \quad (2.157)$$

şeklinde ifade edilebilirler. İki boyutta Lagrange baz fonksiyonları literatürde [17] verilmektedir. Kaynak terimi integrasyonları (x,y) evrensel koordinat sisteminde eğrisel kenarlara sahip eleman üzerinde değil, basit bir geometrik şekil olan, kare üzerinde gerçekleştirilecektir. Bu durumda;

$$q_{g,e}^i = \int_{V^e} z_g(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dx dy \quad (2.158)$$

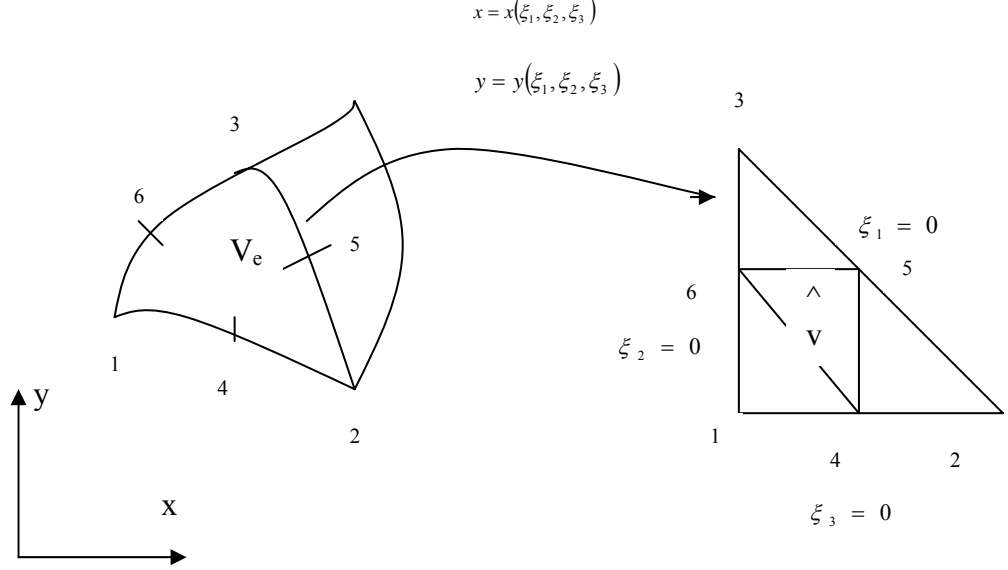
integrali,

$$q_{g,e}^i = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} z_g(r(\xi, \eta)) K_0[k_g r(\xi, \eta)] J(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (2.159)$$

basit formuna dönüşmüş olacaktır. Burada  $|J(\xi, \eta)|$  yine dönüşümün jacobianı olup,

$$|J(\xi, \eta)| = \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (2.160)$$

şeklinde tanımlıdır.



**Şekil 2.6:** İki boyutta üçgen eleman dönüşümleri

Üçgen eleman dönüşümlerinde integrallerin hesabı çok daha kolaylıkla gerçekleştirildiğinden alan koordinatları kullanılmaktadır [17]. Bu durumda koordinat dönüşümü,

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^6 x_i \Psi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

$$y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^6 y_i \Psi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (2.161)$$

bağıntıları ile gerçekleştirilir. Alan koordinatları kullanılması durumunda kaynak terimi;

$$q_{g,e}^i = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{V}} \hat{z}_g [r(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] K_0 [k_g r(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] J(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (2.162)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Serbest ya da dış kaynak olması durumunda;

$$z_g(\vec{r}) = s_g(\vec{r}) \quad (2.163)$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda her bir eleman içinde dış kaynak sabit varsayılarak,  $s^e$ , dörtgen elemanlar için kaynak terimi,

$$q_{g,e}^i = \frac{s^e}{2\pi} \sum_{l=1}^L K_0 [k_g r(\xi_l, \eta_l)] J(\xi_l, \eta_l) \omega_l \quad (2.164)$$

16 noktalı Gauss karelemesi [18] kullanılarak hesaplanmışlardır.

Üçgen elemanlar için ise;

$$q_{g,e}^i = \frac{s^e}{2\pi} \sum_{l=1}^L K_0 [k_g r(\xi_{1,l}, \xi_{2,l}, \xi_{3,l})] J(\xi_{1,l}, \xi_{2,l}, \xi_{3,l}) \bar{\omega}_l \quad (2.165)$$

12 noktalı üçgensel Gauss karelemesi [18] kullanılarak hesaplanmışlardır.

Yetkinlik-özdeğer problemlerinde,

$$z_g(\vec{r}) = \frac{1}{k_{etk}} \left[ \frac{\chi_g}{D_g} \sum_{g'=1}^G v_{\Sigma_{fg'}} \tilde{\Phi}_{g'}(\vec{r}) - \sum_{g'=1}^{g-1} \frac{\chi_{g'}}{D_{g'}} s_{gg'} \sum_{h=1}^G v_{\Sigma_{fh}} \tilde{\Phi}_h(\vec{r}) \right] \quad (2.166)$$

olarak tanımlıdır. (2.166) denkleminde yer alan  $\tilde{\Phi}_g(\vec{r})$  fonksiyonları iç akılardır. Oysa (2.90) lineer sistemi çözülerek önce sınır akılarının ve bu akılar yardımıyla iç akıların saptanması gerekmektedir. 1. gruptan başlayarak G' inci gruba kadar (2.90) lineer sisteminin çözülerek grup sınır akılarının saptanması için önce  $k_{etk}$  ve tüm grup iç akıları için bir öngöründe bulunulur. Bu öngörü yardımıyla tüm grup sınır akıları (2.90) lineer sistemi çözülerek hesaplanır. Daha sonraki bölümde sunulacak yöntemle yeni grup iç akıları hesaplanır. Bulunan bu akılar kullanılarak yeni kaynak vektörü ve  $k_{etk}$  hesaplanarak lineer sistem yeniden çözülüp yeni sınır akıları hesaplanır. Bu iterasyon  $k_{etk}$  ' de istenilen ölçütte bir yakınsama sağlanana kadar sürdürülür. Her bir iterasyonda katsayılar matrisi değişmediği için, katsayılar matrisi hesaplandığı anda Crout algoritması yardımıyla alt ve üst matrislerin çarpımı olarak ayrıştırılmakta ve bellekte yeni yer ayırmadan yine katsayılar matrisi altında

depolanmaktadır. Her iterasyon sırasında iç akılar hesaplandıktan sonra yeni kaynak vektörü, yani lineer sistemin sağ tarafı oluşturulmakta ve bir kez yukarıdan aşağıya bir kez de aşağıdan yukarıya yürünerek grup sınır akıları saptanmaktadır.

Bu aşamada grup iç akılarının ve etkin çoğaltma katsayısının bilindiğini varsayarak lineer sistemin sağ tarafının nasıl oluşturulacağını saptayalım.

Kaynak terimi;

$$q_{g,e}^i(\vec{r}) = \frac{1}{k_{etik}} \left[ \frac{\chi_g}{D_g} \sum_{g'=1}^G v_{fg'} \int_{V^e} \tilde{\Phi}_{g'}(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dV - \sum_{g'=1}^{g-1} \frac{\chi_{g'}}{D_{g'}} s_{gg'} \sum_{h=1}^G v_{fh} \int_{V^e} \tilde{\Phi}_h(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dV \right] \quad (2.167)$$

şeklinde ifade edilmektedir. (2.167) denkleminde görüldüğü gibi sonsuz ortam Green fonksiyonları ile akı dağılımının  $V^e$  eleman hacmi üzerinden integrali gerekmektedir. Bu integralin hesabında iç akılara ait fonksiyonun,  $\tilde{\Phi}_h(\vec{r})$ , yine kuadratik sınır elemanları yaklaşımında olduğu gibi her bir eleman içinde ikinci dereceden bir polinom olduğu varsayımı yapılmaktadır. Yani;

$$\tilde{\Phi}_h(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{n=1}^9 \tilde{\Phi}_{h,n} \Psi_n(\xi, \eta) & , \text{dörtgen eleman} \\ \sum_{n=1}^6 \tilde{\Phi}_{h,n} \Psi_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & , \text{üçgen eleman} \end{cases} \quad (2.168)$$

yaklaşımı kullanılmıştır. Burada  $\Psi_n(\xi, \eta)$  ve  $\Psi_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  daha önce eleman dönüşümlerinde sunulan iki boyutlu dörtgensel ve üçgensel bölge üzerinde tanımlı Lagrange baz fonksiyonlarıdır. (2.168) denkleminde  $\tilde{\Phi}_{h,n}(\vec{r})$ , h' inci grup akısının n' inci iç düğüm noktasında aldığı değeri göstermektedir. Bu aşamada,

$$P_{ij}^{k,g} = \int_{V^e} \Psi_k(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dV \quad (2.169)$$

tanımını yapalım. (2.168) yaklaşımı ve sonsuz ortam Green fonksiyonu (2.169) denkleminde yerleştirilirse;

$$P_{ij}^g = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Psi_n(\xi, \eta) K_0[k_g r(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) d\xi d\eta & \text{dörtgen eleman} \\ \frac{1}{2\pi} \tilde{\Phi}_{h,n} \int_{\hat{A}} \Psi_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) K_0[k_g r(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 & \text{üçgen eleman} \end{cases} \quad (2.170)$$

(2.170) denklemindeki integraller, dörtgen elemanlar için 16 noktalı dörtgensel Gauss karelemesi ve üçgen elemanlar için 12 noktalı üçgensel karelemeler [18] kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

## 2.6 İç Akıların Hesabı

Dış kaynak problemlerinde sağ taraf vektörü oluşturulup lineer sistem çözülerek sınır akıları saptandıktan sonra, bu sınır akıları yardımıyla sistem iç noktalarındaki akılar da hesaplanabilir. Yetkinlik özdeğer problemlerinde ise her iterasyonda iç akıların hesaplanması gerekliliği vardır. İç akıların hesabı için yine sistem içi belirli sayıda,  $L$ , iç düğüm noktasından oluşan bir ızgaraya ayrılır. Bu kez  $i$  noktası sistem içinde bir nokta olmak üzere sınır integral denklemi;

$$\begin{aligned} \varphi_g(\rho_i) + \sum_{j=1}^{2N} \int_{S_j} \varphi_g(\vec{r}) \frac{\partial G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i)}{\partial n} dS - \sum_{j=1}^{2N} \int_{S_j} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) \frac{\partial \varphi_g(\vec{r})}{\partial n} dS \\ = \sum_{e=1}^E \int_{V^e} z_g(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dV, \quad i = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (2.171)$$

olarak yazılabilir. Akı ve akı türevlerine karşılık gelen fonksiyonların yine ikinci dereceden birer fonksiyon oldukları kabul edilirse,

$$t_{ij}^{k,g} = \int_{S_j} \Psi_k(\vec{r}) \frac{\partial G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i)}{\partial n} dS, \quad \begin{matrix} k = 1, 2, 3 \\ i = 1, 2, \dots, L \\ j = 1, 2, \dots, 2N \end{matrix} \quad (2.172)$$

ve

$$S_{ij}^{k,g} = \int_{S_j} \Psi_k(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dS \quad (2.173)$$

tanımları yapılabilir. Çalışmamızda bu integraller 10 noktalı Gauss karelemesi ile gerçekleştirilmiştir.

(2.171) denkleminin sağ tarafında yer alan hacim integralinin hesabı dış kaynak ve yetkinlik özdeğer problemlerinde bir önceki bölümde de anlatıldığı üzere farklılık göstermektedir. Dış kaynak problemlerinde kaynak fonksiyonu her bir iç eleman içinde sabit alınmakta ve sadece sonsuz ortam Green fonksiyonunun integrasyonu gerekmektedir. Bu durumda;

$$r_{ij}^g = \int_{V^e} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dV, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (2.174)$$

tanımı yapılabilir. Yetkinlik özdeğer problemlerinde ise  $z_g(\vec{r})$  fonksiyonu iç akıları içermektedir. Bu durumda yine iç akıların eleman içinde ikinci dereceden bir polinom oldukları varsayımı yapılarak;

$$r_{ij}^{k,g} = \int_{V^e} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) \Psi_k(\vec{r}) dV, \quad i = 1, 2, \dots, L \text{ ve } j = 1, 2, \dots, L \quad (2.175)$$

tanımlanabilir. Bu tanımları kullanarak (2.171) denklemini matris notasyonu ile yazarsak, dış kaynak problemleri için;

$$\underline{\tilde{\varphi}}_g + \underline{T}_g \underline{\varphi}_g - \underline{S}_g \underline{\varphi}'_g = \underline{R}_g \underline{\tilde{\varphi}}_g \quad (2.176)$$

Yetkinlik özdeğer problemleri için;

$$\underline{\tilde{\varphi}}_g + \underline{T}_g \underline{\varphi}_g - \underline{S}_g \underline{\varphi}'_g = \frac{1}{k_{etk}} \underline{R}_g \underline{\tilde{\varphi}}_g \quad (2.177)$$

elde edilir. Bu denklemlerde daha önce sunulduğu gibi sınır akı ve akımları bir araya getirilerek;

$$\underline{\tilde{\varphi}}_g + \underline{B}_g \underline{u}_g = \frac{1}{k_{etk}} \underline{R}_g \underline{\tilde{\varphi}}_g \quad (2.178)$$

matrisyel denklemleri elde edilir. Burada  $\underline{B}_g$  matrisi  $2N \times L$  boyutlu bir dikdörtgen matristir. Yani satır sayısı sistemdeki sınır düğüm noktasına, sütun sayısı ise sistemdeki iç düğüm noktası sayısına eşittir.  $\underline{R}_g$  matrisi ise  $L \times L$  boyutlu kare bir matristir. Sistem iç nod sayısı sınır nodu sayısından çok daha fazla olduğundan  $\underline{R}_g$  matrisinin depolanması bilgisayar bellek yükünü oldukça arttırmaktadır.  $\underline{u}_g$  sınır

akıları ve akı türevleri bilindiğinden (2.178) denklemi çözümlenerek iç düğüm noktalarındaki akılar kolaylıkla hesaplanabilir.

### **BÖLÜM 3. SAYISAL UYGULAMALAR**

Bölüm 2’de çok gruplu nötron difüzyon denklemi kuadratik sınır elemanları türetimine dayalı olarak BEMGQ programı geliştirilmiştir. Bu program FORTRAN 77 dilinde yazılmış ve LINUX işletim sistemi altında koşular gerçekleştirilmiştir. Bu bölümde geliştirilen BEMGQ programı analitik çözümü olan problemler için koşularak doğrulanmıştır. Programın önce dış kaynak problemlerinin çözümünde etkinliği sınanmıştır. Bu amaçla sonsuz ortam dış kaynak problemi üç gruplu bir yapı içinde ele alınmış, akılar analitik akılarla karşılaştırılarak sonuçlar irdelenmiştir.

Daha sonra programın yetkinlik-özdeğer problemlerindeki etkinliği irdelenmiştir. Önce üç gruplu sonsuz ortam yetkinlik problemi değişik ızgaralarla çözümlenmiştir. Sonuçlar analitik sonuçlarla karşılaştırılarak ızgara yapısı incelendiğinde gerek çoğaltma katsayısının gerekse grup akılarının analitik sonuçlara yakınsadığı gösterilmiştir. Programın eğrisel sistemleri modelleyebilmesi yeteneğini göstermek amacıyla üç gruplu sonsuz uzunlukta silindirik bir problem ele alınmıştır. Problemin analitik çözümü yapılmış program sonuçları analitik sonuçlarla karşılaştırılarak programın eğrisel kenarlı sistemleri de modelleyebildiği kanıtlanmıştır. Son olarak altı gruplu bir yetkinlik özdeğer problemi ele alınmış, BEMGQ sonuçları sabit ve lineer sınır elemanları kullanan programlarla karşılaştırma yapılmıştır.

### 3.1. Sonsuz Ortam Sabit Kaynak Problemi

Sistemin sonsuz ortam olduğu aynı zamanda fisil malzeme içermediği ve her yerde aynı değere sahip nötron kaynağı içerdiği durum için birinci, ikinci, üçüncü grup nötron difüzyon denklemleri;

$$\begin{aligned}\Sigma_{r,1}\Phi_1(\vec{r}) &= S_1 \\ \Sigma_{r,2}\Phi_2(\vec{r}) - \Sigma_{s,2\leftarrow 1}\Phi_1(\vec{r}) &= S_2 \\ \Sigma_{r,3}\Phi_3(\vec{r}) - \Sigma_{s,3\leftarrow 2}\Phi_2(\vec{r}) - \Sigma_{s,3\leftarrow 1}\Phi_1(\vec{r}) &= S_3\end{aligned}\quad (3.1)$$

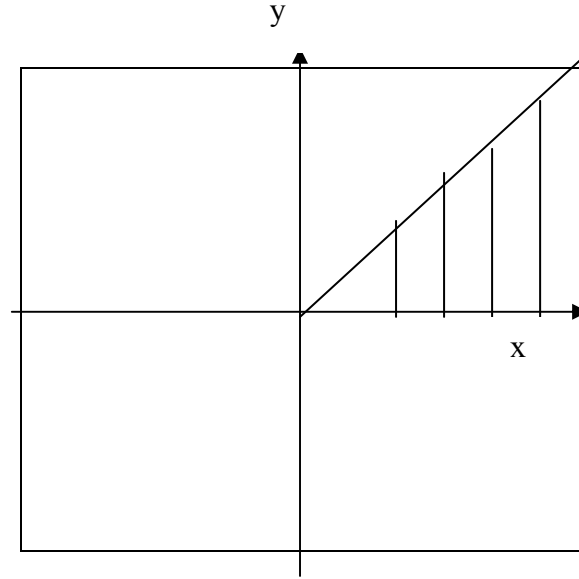
biçimindedir. Bu denklemlerde  $\Sigma_{r,g}$  grup çıkartma tesir kesitidir. Ayrıca denklemlerde yer alan  $S_g$  grup serbest nötron kaynağı,  $\Sigma_{s,g'\rightarrow g}$   $g'$  üncü gruptan  $g$ 'inci gruba saçılma tesir kesiti,  $D_g$  grup difüzyon sabiti,  $\Phi_g(\vec{r})$  grup akısını göstermektedir. Yukarıda verilen denklemlerde her bir grubun akıları çekilirse,

$$\begin{aligned}\Phi_1(\vec{r}) &= \frac{S_1}{\Sigma_{r,1}} \\ \Phi_2 &= \left(S_2 + \Sigma_{s,2\leftarrow 1}\Phi_1(\vec{r})\right) \frac{1}{\Sigma_{r,2}} = \frac{S_2}{\Sigma_{r,2}} + \frac{S_1\Sigma_{s,2\leftarrow 1}}{\Sigma_{r,1}\Sigma_{r,2}} \\ \Phi_3(\vec{r}) &= \frac{S_3}{\Sigma_{r,3}} + \frac{\Sigma_{s,3\leftarrow 2}}{\Sigma_{r,3}}\Phi_2(\vec{r}) + \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1}}{\Sigma_{r,3}}\Phi_1(\vec{r})\end{aligned}\quad (3.2)$$

biçiminde elde edilir. Grup akılarının konumdan bağımsız olduğu ve sistemin her noktasında aynı değere sahip olduğu görülmektedir. Bu problemde kenar uzunluğu 5 cm olan kare bir sistem ele alınmış ve sonsuz ortam karenin her tarafına yansıtma sınır koşulu uygulanarak sağlanmıştır. Ele alınan sistem için tabloda sunulan üç gruplu nötron difüzyon denklemini çözümünü gerçekleştirecek Tablo 3.1'deki grup sabitleri kullanılmıştır.

Gruptan gruba saçılmalar;

$$\Sigma_{s,2\leftarrow 1} = 0.04239, \Sigma_{s,3\leftarrow 1} = 0, \Sigma_{s,3\leftarrow 2} = 0.06756$$



**Şekil 3.1:** 1/8' lik kare sistem

**Tablo 3.1:** Üç gruplu sonsuz ortam probleminde kullanılan sabitler

Sabitler	1. grup	2. grup	3. grup
$D_g$	1.664	0.648	0.3512
$L_g$	6.01774	2.674	1.6689
$\nu \Sigma_{f,g}$	0.0040715	0.00848	0.181
$\Sigma_{f,g}$	0.001835	0.00424	0.07481
$\chi_g$	1	0	0
$\Sigma_{r,g}$	0.04595	0.090625	0.1261
$\Sigma_{a,g}$	0.0035605	0.0223	0.1261

Yukarıdaki grup sabitleri kullanılarak analitik olarak elde edilen grup akı değerleri Tablo 3.2'de verilmiştir. Kare geometride sistem simetrisi nedeniyle 1/8'lik sistem alınmış ve tüm sistem modellenmiştir.

**Tablo 3.2:** Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminin analitik sonuçları

$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_3$
21.76278564	21.21429735	19.30286713

Analitik çözümlerle karşılaştırabilmek için aynı problem verileri için BEMGQ programı kullanılarak sonuçlar elde edilmiştir. Problem kenar başına 2, 4, 8 ve 16 sınır elemanına bölünerek değişik ızgaralar oluşturulmuştur.

Tüm gruplara ait analitik akıllarla BEMGQ programı kullanılarak hesaplanan akıllara ait sonuçlar ve %hata tabloları Ek. A da verilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçların grafikleri de Ek.A'da verilmiştir. Görüleceği gibi eleman sayısı arttıkça analitik sonuca daha yakın sonuçlar elde edilmiştir.

### 3.2. Sonsuz Ortam Yetkinlik-Özdeğer Problemi

Sonsuz ortam için üç gruplu nötron difüzyon denklemleri;

$$\begin{aligned}\Sigma_{r,1}\Phi_1(\vec{r}) &= \frac{\chi_1}{k_\infty} \left[ \nu\Sigma_{f_1}\Phi_1(\vec{r}) + \nu\Sigma_{f_2}\Phi_2(\vec{r}) + \nu\Sigma_{f_3}\Phi_3(\vec{r}) \right] \\ \Sigma_{r,2}\Phi_2(\vec{r}) &= \Sigma_{s,2\leftarrow 1}\Phi_1(\vec{r}) + \frac{\chi_2}{k_\infty} \left[ \nu\Sigma_{f_1}\Phi_1(\vec{r}) + \nu\Sigma_{f_2}\Phi_2(\vec{r}) + \nu\Sigma_{f_3}\Phi_3(\vec{r}) \right] \\ \Sigma_{a,3}\Phi_3(\vec{r}) &= \Sigma_{s,3\leftarrow 2}\Phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{s,3\leftarrow 1}\Phi_1(\vec{r}) + \frac{\chi_3}{k_\infty} \left[ \nu\Sigma_{f_1}\Phi_1(\vec{r}) + \nu\Sigma_{f_2}\Phi_2(\vec{r}) + \nu\Sigma_{f_3}\Phi_3(\vec{r}) \right]\end{aligned}\tag{3.3}$$

biçimindedir. Bu problemde serbest kaynak problemindeki nükleer sabitler kullanılmıştır. Nükleer sabitlerden  $\chi_2 = \chi_3 = 0, \chi_1 = 1$  ve  $\Sigma_{s,1\rightarrow 3} = 0$  olduğu için difüzyon denklemleri basitleşmekte,

$$\begin{aligned}\Sigma_{r,1}\Phi_1(\vec{r}) &= \frac{1}{k_\infty} \left[ \nu\Sigma_{f_1}\Phi_1(\vec{r}) + \nu\Sigma_{f_2}\Phi_2(\vec{r}) + \nu\Sigma_{f_3}\Phi_3(\vec{r}) \right] \\ \Sigma_{r,2}\Phi_2(\vec{r}) &= \Sigma_{s,1\rightarrow 2}\Phi_1(\vec{r}) \\ \Sigma_{a,3}\Phi_3(\vec{r}) &= \Sigma_{s,2\rightarrow 3}\Phi_2(\vec{r})\end{aligned}\quad (3.4)$$

şeklini almaktadır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa, denklem sistemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\left[ \Sigma_{r,1} - \frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_1} \right] \Phi_1(\vec{r}) - \frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_2} \Phi_2(\vec{r}) - \frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_3} \Phi_3(\vec{r}) &= 0 \\ -\Sigma_{s,2\leftarrow 1} \Phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{r,2} \Phi_2(\vec{r}) &= 0 \\ -\Sigma_{s,3\leftarrow 2} \Phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{a,3} \Phi_3(\vec{r}) &= 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

yukarıdaki denklem sistemi matrisel biçimde yazılacak olursa,

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{r,1} - \frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_1} & -\frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_2} & -\frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_3} \\ -\Sigma_{s,2\leftarrow 1} & \Sigma_{r,2} & 0 \\ 0 & -\Sigma_{s,3\leftarrow 2} & \Sigma_{a,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(\vec{r}) \\ \Phi_2(\vec{r}) \\ \Phi_3(\vec{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (3.6)$$

biçimini alır. Sistemin çözümünün olabilmesi için, sistem katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması gerekir. Dolayısıyla,

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{r,1} - \frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_1} & -\frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_2} & -\frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_3} \\ -\Sigma_{s,2\leftarrow 1} & \Sigma_{r,2} & 0 \\ 0 & -\Sigma_{s,3\leftarrow 2} & \Sigma_{a,3} \end{vmatrix} = 0\quad (3.7)$$

$3 \times 3$  lük bu determinant hesaplanırsa,

$$\left( \Sigma_{r,1} - \frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_1} \right) \Sigma_{r,2} \Sigma_{a,3} - \left( \frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_3} \right) \Sigma_{s,2\rightarrow 3} \Sigma_{s,1\rightarrow 2} - \left( \frac{1}{k_\infty} \nu\Sigma_{f_2} \right) \Sigma_{s,1\rightarrow 2} \Sigma_{a,3} = 0\quad (3.8)$$

$$\Sigma_{r,1}\Sigma_{r,2}\Sigma_{a,3} - \frac{1}{k_\infty} \nu \Sigma_{f_1} \Sigma_{r,2} \Sigma_{a,3} - \frac{1}{k_\infty} \nu \Sigma_{f_3} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \Sigma_{s,2 \rightarrow 3} - \frac{1}{k_\infty} \nu \Sigma_{f_2} \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \Sigma_{a,3} = 0 \quad (3.9)$$

$$\Sigma_{r,1}\Sigma_{r,2}\Sigma_{a,3} = \frac{1}{k_\infty} \left[ \nu \Sigma_{f_1} \Sigma_{r,2} \Sigma_{a,3} + \nu \Sigma_{f_3} \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \Sigma_{s,3 \leftarrow 2} + \nu \Sigma_{f_2} \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \Sigma_{a,3} \right] \quad (3.10)$$

denklemden sonsuz ortam çoğaltma katsayısı çekilirse;

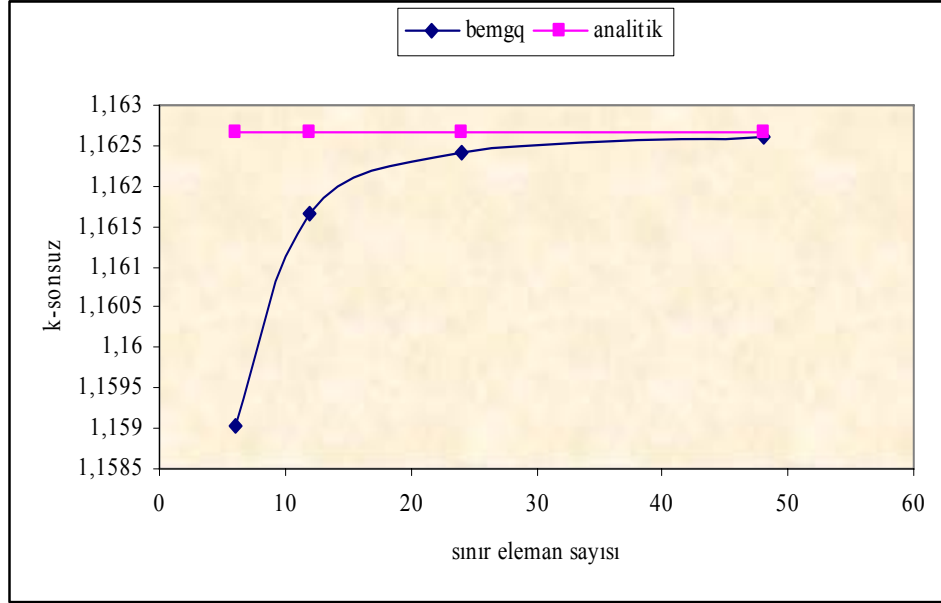
$$k_\infty = \frac{\nu \Sigma_{f_1}}{\Sigma_{r,1}} + \frac{\nu \Sigma_{f_2} \Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{\Sigma_{r,1} \Sigma_{r,2}} + \frac{\nu \Sigma_{f_3} \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \Sigma_{s,3 \leftarrow 2}}{\Sigma_{r,1} \Sigma_{r,2} \Sigma_{a,3}} \quad (3.11)$$

elde edilir. Bir önceki problemdeki veriler kullanıldığında analitik sonuç  $k_\infty = 1.162676$  elde edilir.

**Tablo 3.3:** Üç gruplu sonsuz ortam yetkinlik özdeğer problemi  $k_\infty$  sonuçları

Sınır eleman sayısı	$k_\infty$	% hata
6	1.159041	0.3126
12	1.161658	0.0875
24	1.162401	0.0237
48	1.162604	0.0062

Şekil 3.2' de Tablo 3.3' deki sonuçların grafiği verilmiştir. Burada sınır eleman sayısı arttıkça analitik sonuca yakınsama görülmektedir.



**Şekil 3.2:** Üç gruplu sonsuz ortam yetkinlik-özdeğer problemi  $k_\infty$  sonuçları

(3.4) denklemlerinden;

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = S_{12} = \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1}}{\Sigma_{r,2}} \text{ ve}$$

$$\frac{\Phi_3}{\Phi_1} = S_{13} = \frac{1}{\Sigma_{r,3}} (\Sigma_{s,3\leftarrow 1} + S_{12} \Sigma_{s,3\leftarrow 2}) \quad (3.12)$$

Tanımlarılar,  $\Sigma_{s,1\rightarrow 3} = 0$  olduğundan,

$$S_{13} = \frac{1}{\Sigma_{r,3}} (S_{12} \Sigma_{s,3\leftarrow 2}) \quad (3.13)$$

bulunur.

Sistem gücü;

$$P = w_f (\Sigma_{f1} \Phi_1 + \Sigma_{f2} \Phi_2 + \Sigma_{f3} \Phi_3) \int_V \Psi(r) dV \quad (3.14)$$

ile elde edilir. Ele alınan problem sonsuz ortam olduğundan akıllar sistemin her yerinde aynıdır. Dolayısıyla güç ifadesi yeniden yazılırsa;

$$P = w_f \int_V \sum_{g=1}^3 \sum_{fg} \Phi_g \Psi(r) dV \quad (3.15)$$

biçimindedir. Daha açık bir şekilde yazarsak;

$$P = w_f \left( \sum_{f1} \Phi_1 + \sum_{f2} \Phi_2 + \sum_{f3} \Phi_3 \right) \int_V \Psi(r) dV \quad (3.16)$$

burada,

$$\Phi_2 = S_{12} \Phi_1$$

$$\Phi_3 = S_{13} \Phi_1 \quad (3.17)$$

tanımları, güç denkleminde yerine yazılırsa;

$$P = w_f \left( \sum_{f1} \Phi_1 + \sum_{f2} S_{12} \Phi_1 + \sum_{f3} S_{13} \Phi_1 \right) \int_V \Psi(r) dV \quad (3.18)$$

$$P = w_f \Phi_1 \left( \sum_{f1} + \sum_{f2} S_{12} + \sum_{f3} S_{13} \right) \int_V \Psi(r) dV \quad (3.19)$$

buradan  $\Phi_1$ 'i çekersek;

$$\Phi_1 = \frac{P}{w_f \left( \sum_{f1} + \sum_{f2} S_{12} + \sum_{f3} S_{13} \right) \int_V \Psi(r) dV}$$

yukarıdaki denklemde;

$$P = 16000 \text{ watt}$$

$$w_f = 3.204200014 \times 10^{-11}$$

alınırsa ve diğer ifadeler grup sabitleri tablosundan elde edilirse, ortalama akı sonuçları Tablo 3.4'de verildiği gibidir.

**Tablo 3.4:** Üç gruplu sonsuz ortam analitik akı sonuçları

$\bar{\Phi}_1$	$\bar{\Phi}_2$	$\bar{\Phi}_3$
$2.212814914 \times 10^{14}$	$1.035047999 \times 10^{14}$	$0.55454276 \times 10^{14}$

Tablo 3.5’de tüm gruplara ait akı ve hatalar verilmiştir. Aynı şekilde sınır eleman sayısı arttıkça analitik oldukça yakın sonuçlar elde edilmiştir.

**Tablo 3.5:** Üç gruplu sonsuz ortam problemi için BEMGQ programı ile bulunan ortalama akı sonuçları ve %hataları

Eleman	1. grup	2. grup	3. grup
6	$2.209951026 \times 10^{14}$	$1.03454863 \times 10^{14}$	$0.554665927 \times 10^{14}$
%hata	0.1294	0.0483	0.0222
12	$2.21101471 \times 10^{14}$	$1.03454017 \times 10^{14}$	$0.554617026 \times 10^{14}$
%hata	0.0813	0.0491	0.0134
24	$2.21151276 \times 10^{14}$	$1.03453992 \times 10^{14}$	$0.554603398 \times 10^{14}$
%hata	0.0588	0.0491	0.0109
48	$2.21165645 \times 10^{14}$	$1.03454031 \times 10^{14}$	$0.554599938 \times 10^{14}$
%hata	0.0524	0.0490	0.0103

### 3.3. Üç Gruplu Silindir Problemi

Üç gruplu nötron difüzyon denklemleri:

$$\begin{aligned}
 -D_1 \nabla^2 \Phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{r,1} \Phi_1(\vec{r}) &= \frac{\chi_1}{k_{etk}} \left[ \nu \Sigma_{f_1} \Phi_1(\vec{r}) + \nu \Sigma_{f_2} \Phi_2(\vec{r}) + \nu \Sigma_{f_3} \Phi_3(\vec{r}) \right] \\
 -D_2 \nabla^2 \Phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{r,2} \Phi_2(\vec{r}) &= \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \Phi_1(\vec{r}) + \frac{\chi_2}{k_{etk}} \left[ \nu \Sigma_{f_1} \Phi_1(\vec{r}) + \nu \Sigma_{f_2} \Phi_2(\vec{r}) + \nu \Sigma_{f_3} \Phi_3(\vec{r}) \right] \\
 -D_3 \nabla^2 \Phi_3(\vec{r}) + \Sigma_{r,3} \Phi_3(\vec{r}) &= \Sigma_{s,3 \leftarrow 2} \Phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{s,3 \leftarrow 1} \Phi_1(\vec{r}) \\
 + \frac{\chi_3}{k_{etk}} \left[ \nu \Sigma_{f_1} \Phi_1(\vec{r}) + \nu \Sigma_{f_2} \Phi_2(\vec{r}) + \nu \Sigma_{f_3} \Phi_3(\vec{r}) \right] & \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

şeklinindedir. Bu denklemler sonsuz uzunlukta homojen silindirik bir nükleer sistem için analitik olarak çözümlenerek etkin çoğaltma katsayısı ve akı dağılımları saptanacaktır. Önce analitik  $k_{etk}$  değerini hesaplayalım. Bu amaçla:

$\Phi_g(\vec{r}) = \Phi_g \psi(r)$  ve  $\nabla^2 \psi(\vec{r}) + B_g^2 \psi(\vec{r}) = 0$  varsayımlarını yapalım. Bu varsayımlar (3.20) denkleminde kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
 D_1 B_g^2 \Phi_1 + \Sigma_{r,1} \Phi_1 &= \frac{\chi_1}{k_{etk}} \left[ \nu \Sigma_{f_1} \Phi_1 + \nu \Sigma_{f_2} \Phi_2 + \nu \Sigma_{f_3} \Phi_3 \right] \\
 D_2 B_g^2 \Phi_2 + \Sigma_{r,2} \Phi_2 &= \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \Phi_1 + \frac{\chi_2}{k_{etk}} \left[ \nu \Sigma_{f_1} \Phi_1 + \nu \Sigma_{f_2} \Phi_2 + \nu \Sigma_{f_3} \Phi_3 \right] \\
 D_3 B_g^2 \Phi_3 + \Sigma_{r,3} \Phi_3 &= \Sigma_{s,3 \leftarrow 2} \Phi_2 + \Sigma_{s,3 \leftarrow 1} \Phi_1 + \frac{\chi_3}{k_{etk}} \left[ \nu \Sigma_{f_1} \Phi_1 + \nu \Sigma_{f_2} \Phi_2 + \nu \Sigma_{f_3} \Phi_3 \right] \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem sistemi matrisyel formda yazılırsa, sıfırdan başka çözüm elde etme koşulu:

$$\det \begin{bmatrix} D_1 B_g^2 - \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{r,1} & \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 \nu \Sigma_{f,2} & \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 \nu \Sigma_{f,3} \\ -\left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \right) & D_2 B_g^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 \nu \Sigma_{f,2} & \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 \nu \Sigma_{f,3} \\ -\left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_3 \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,3 \leftarrow 1} \right) & -\left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_3 \nu \Sigma_{f,2} - \Sigma_{s,3 \leftarrow 2} \right) & D_3 B_g^2 + \Sigma_{r,3} - \frac{1}{k_{etk}} \chi_3 \nu \Sigma_{f,3} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki determinan açılırsa:

$$\begin{aligned} & (D_1 B_g^2 - \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{r,1})(D_2 B_g^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 \nu \Sigma_{f,2})(D_3 B_g^2 + \Sigma_{r,3} - \frac{1}{k_{etk}} \chi_3 \nu \Sigma_{f,3}) \\ & - \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 \nu \Sigma_{f,2} \right) \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 \nu \Sigma_{f,3} \right) \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_3 \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,3 \leftarrow 1} \right) \\ & + \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 \nu \Sigma_{f,3} \right) \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \right) \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_3 \nu \Sigma_{f,1} - \Sigma_{s,3 \leftarrow 2} \right) \\ & + \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 \nu \Sigma_{f,3} \right) \left( D_2 B_g^2 + \Sigma_{r,2} + \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 \nu \Sigma_{f,2} \right) \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_3 \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{s,3 \leftarrow 1} \right) \\ & + \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 \nu \Sigma_{f,3} \right) \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_3 \nu \Sigma_{f,2} - \Sigma_{s,3 \leftarrow 2} \right) \left( D_1 B_g^2 - \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 \nu \Sigma_{f,3} + \Sigma_{r,1} \right) \\ & + \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 \nu \Sigma_{f,2} \right) \left( \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 \nu \Sigma_{f,2} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \right) \left( D_3 B_g^2 + \Sigma_{r,3} - \frac{1}{k_{etk}} \chi_3 \nu \Sigma_{f,3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

bulunur. (3.23) denklemi  $k_{etk}$  bilinmeyenini cinsinden üçüncü derece cebirsel bir denklemdir. Bu denklem çözülerek sistemin etkin çoğaltma katsayısı hesaplanabilir.

**Tablo 3.6:** Üç gruplu sonlu ortam silindir probleminde kullanılan gruptan gruba saçılmalar

$\Sigma_{s,2\leftarrow 1}$	0.02705
$\Sigma_{s,3\leftarrow 1}$	0.01181
$\Sigma_{s,3\leftarrow 2}$	0.00822

Tablo 3.6 ve Tablo 3.7’deki üç gruplu nötron difüzyon sabitleri kullanılır ve söz konusu üçüncü derece cebirsel denklem çözülürse analitik  $k_{\text{etk}}$  sonucu 0.839708793 olarak bulunur.

**Tablo 3.7:** Üç gruplu silindirik problemde kullanılan sabitler

Sabitler	1. grup	2. grup	3. grup
$D_g$	3.0034	2.2297	1.4627
$L_g$	7.537772206	11.55348424	10.17074875
$\nu\Sigma_{f,g}$	0.034735	0.01543	0.020542
$\Sigma_{f,g}$	0.0131267	0.006102	0.008317
$\chi_g$	0.575	0.326	0.099
$\Sigma_{r,g}$	0.05286	0.016704	0.01414

Bu problem geliştirilen yazılımla iki değişik ızgara ile koşulmuştur. Sistem simetrisi göz önüne alınarak sistemin sadece 1/8’lik kısmı ayrıklaştırılmıştır. 1/8’lik sistemde 8 ve 15 kuadratik sınır elemanı kullanılarak elde edilen ızgaralarla hesaplanan sayısal  $k_{\text{etk}}$  değerleri ve analitik sonuca göre yüzde hatalar Tablo 3.8’ de sunulmuştur.

**Tablo 3.8:** Üç gruplu sonlu ortam silindir probleminde BEMGQ programı ile hesaplanan  $k_{etk}$  sonuçları ve % hatalar

Sınır eleman sayısı	$k_{etk}$	%hata
8	0.835199268	0.5370
15	0.837289104	0.2880

Tablo 3.8'den de anlaşıldığı gibi az sayıda sınır elemanı alınmasına rağmen analitik değere çok yakın sonuçlar elde edilmiştir.

Analitik akı dağılımlarının saptanabilmesi,

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}) + B_g^2 \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (3.24)$$

denkleminin çözümünün,

$$\Phi_g(\vec{r}) = \Phi_g \Psi(\vec{r}), \quad g = 1, 2, 3 \quad (3.25)$$

denklemine yerleştirilmesi ile mümkündür. (3.24) denkleminin silindirik bir sistem için çözümü[19],

$$\Psi(\vec{r}) = J_0 \left( \frac{2.405}{R} r \right)$$

şeklindedir.  $\Phi_g$ 'lerin saptanması ise (3.21) denklemlerinin çözümü ile gerçekleştirilebilir. (3.21) denklemlerinin son ikisinde,

$$S_{21} = \frac{\Phi_2(\vec{r})}{\Phi_1(\vec{r})} \quad \text{ve} \quad S_{31} = \frac{\Phi_2(\vec{r})}{\Phi_1(\vec{r})} \quad (3.26)$$

tanımları yapılır ve bu tanımlar bu denklemlerde kullanılırsa;

$$(D_2 B_g^2 + \Sigma_{r,2} - \frac{\chi_2}{k_{etk}} \nu \Sigma_{f2}) S_{21} - \frac{\chi_2}{k_{etk}} \nu \Sigma_{f3} S_{31} = \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} + \frac{\chi_2}{k_{etk}} \nu \Sigma_{f1} \quad (3.27)$$

$$-(\Sigma_{s,3\leftarrow 2} - \frac{\chi_3}{k_{etk}} \nu \Sigma_{f2}) S_{21} + (D_3 B_g^2 + \Sigma_{r,3} - \frac{\chi_3}{k_{etk}} \nu \Sigma_{f3}) S_{31} = \Sigma_{s,3\leftarrow 1} + \frac{\chi_3}{k_{etk}} \nu \Sigma_{f1} \quad (3.28)$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler iki bilinmeyen (  $S_{21}$  ve  $S_{31}$  ) içermektedir. Tablo 3.6 ve Tablo 3.7'deki nükleer sabitler kullanılarak  $S_{21}$  ve  $S_{31}$  saptanır. Hesaplanan bu değerler:

$$S_{21} = 2.189970943, S_{31} = 1.794196249$$

şeklindedir.  $\Phi_1$  bilinmeyeni ise sistem gücünden yararlanılarak saptanabilir. Sistem nükleer gücü;

$$P = w_f \int_V [\Sigma_{f1} \Phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{f2} \Phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{f3} \Phi_3(\vec{r})] dV \quad (3.29)$$

Burada  $w_f = 3.2042 \times 10^{-11}$  alınmış ve sistemin toplam gücü 2400 w/cm seçilmiştir.

(3.29) denklemini (3.26) kullanılarak;

$$P = w_f [\Sigma_{f1} \Phi_1 + \Sigma_{f2} \Phi_2 + \Sigma_{f3} \Phi_3] \int_V \Psi(r) dV \quad (3.30)$$

elde edilir, (3.26) tanımlarından,

$$\Phi_2 = S_{21} \Phi_1, \Phi_3 = S_{31} \Phi_1$$

yazabiliriz. Böylece

$$P = w_f \Phi_1 [\Sigma_{f1} + S_{21} \Sigma_{f2} + S_{31} \Sigma_{f3}] \int_0^R J_0 \left( \frac{2.405}{R} r \right) 2\pi r dr \quad (3.31)$$

$$P = 2\pi w_f \Phi_1 [\Sigma_{f1} + S_{21} \Sigma_{f2} + S_{31} \Sigma_{f3}] \int_0^{30} r J_0 \left( \frac{2.405}{30} r \right) dr \quad (3.32)$$

elde edilir. Denklemden  $\Phi_1$  çekilirse,

$$\Phi_1 = \frac{P}{2\pi w_f \left[ \Sigma_{f1} + S_{21} \Sigma_{f2} + S_{31} \Sigma_{f3} \right] \int_0^R r J_0 \left( \frac{2.405}{R} r \right) dr} \quad (3.33)$$

bulunur. Bu problemde kullanılan nükleer sabitlerle

$$\Phi_1 = 1.481823353 \times 10^{12}, \quad \Phi_2 = 3.245150086 \times 10^{12}, \quad \Phi_3 = 2.658681902 \times 10^{12}$$

olarak hesaplanır.

Grup analitik akı dağılımları;

$$\Phi_1(\vec{r}) = (1.481823353 \times 10^{12}) J_0 \left( \frac{2.405}{R} r \right)$$

$$\Phi_2(\vec{r}) = (3.245150086 \times 10^{12}) J_0 \left( \frac{2.405}{R} r \right)$$

$$\Phi_3(\vec{r}) = (2.658681902 \times 10^{12}) J_0 \left( \frac{2.405}{R} r \right)$$

bulunmuştur.

BEMGQ programı 8 ve 15 kuadratik sınır elemanı kullanılarak koşulmuş ve düğüm noktalarındaki akı değerleri saptanmıştır. Geliştirilen programın akıları hangi doğrulukta hesapladığını saptamak amacıyla 1/8'lik dilimin x-ekseni ile pozitif yönde 45 derecelik açı yapan yarıçap üzerindeki nodlardaki grup akıları ile analitik grup akıları grafiksel olarak karşılaştırılmıştır. Şekillerde 1., 2. ve 3. grup akılarının 8 sınır elemanlı sonuçları verilmektedir. Grafikler Ek.B'de verilmiştir.

Aynı şekilde 1/8'lik kısmın x-ekseniyle 45 derece açı yapan yarıçapı üzerindeki nodlarda grup akı dağılımları, 15 kuadratik sınır elemanı kullanılarak hesaplanmıştır. Grafikler Ek.B'de verilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi analitik sonuçlara oldukça yakın sonuçlar elde edilmiştir.

### 3.4. Altı Gruplu Sonlu Ortam Yetkinlik-Özdeğer Problemi

Çalışmamızda son olarak 6 gruplu kare bir nükleer sistem ele alınmıştır. Bir kenarının uzunluğu 12.5 cm olan kare sistemin yine sistem simetrisi göz önüne alınarak 1/8'lik bölümü modellenmiştir. Problemden kullanılan grup sabitleri Tablo 3.9'da verilmiştir.

Gruptan gruba olan saçılmalar aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$\Sigma_{s,2\leftarrow 1} = 9,878 \cdot 10^{-3}, \Sigma_{s,3\leftarrow 1} = 0,0133353, \Sigma_{s,2\leftarrow 1} = 8,8902 \cdot 10^{-3}$$

$$\Sigma_{s,4\leftarrow 1} = 2,22255 \cdot 10^{-2}, \Sigma_{s,4\leftarrow 2} = 0,024895, \Sigma_{s,4\leftarrow 3} = 2,2255 \cdot 10^{-2}$$

$$\Sigma_{s,5\leftarrow 1} = 1,53109 \cdot 10^{-2}, \Sigma_{s,5\leftarrow 2} = 1,72865 \cdot 10^{-2}, \Sigma_{s,5\leftarrow 3} = 1,4817 \cdot 10^{-2},$$

$$\Sigma_{s,5\leftarrow 4} = 1,43231 \cdot 10^{-2}$$

$$\Sigma_{s,6\leftarrow 1} = 1,9756 \cdot 10^{-3}, \Sigma_{s,6\leftarrow 2} = 2,4695 \cdot 10^{-3}, \Sigma_{s,6\leftarrow 3} = 2,9634 \cdot 10^{-3},$$

$$\Sigma_{s,6\leftarrow 4} = 2,4695 \cdot 10^{-3}, \Sigma_{s,6\leftarrow 5} = 2,4695 \cdot 10^{-3}$$

**Tablo 3.9:** Altı Gruplu sonlu ortam yetkinlik-özdeğer probleminde kullanılan nükleer sabitler

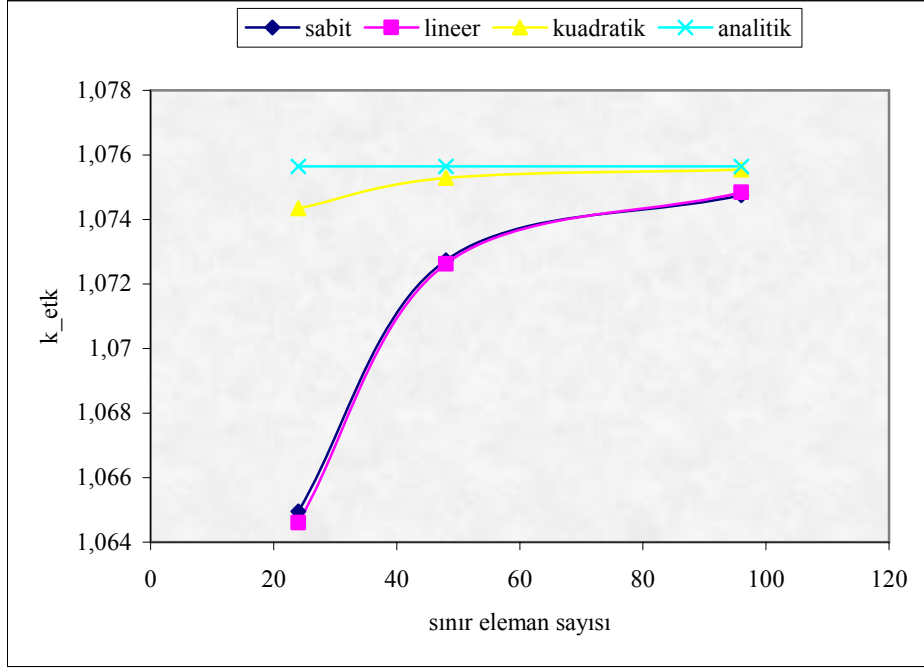
Grup	$D_g$	$L_g$	$\nu_g \Sigma_{f,g}$	$\Sigma_{f,g}$	$\chi_g$
1	1,588001064	3,169792929	0,32656668	0,093841	0,204
2	1,499778783	3,139921072	0,297599445	0,0963105	0,344
3	1,406042609	3,241119788	0,270247263	0,0903837	0,168
4	1,184035881	3,339209664	0,24601159	0,083963	0,180
5	0,803452919	2,933795251	0,237546144	0,0824813	0,090
6	0,562147043	2,113195285	0,28957357	0,1012495	0,014

Grup sabitlerinden görüldüğü gibi ele alınan sistem hızlı bir nükleer sistemdir. Bu problemin analitik  $k_{etk}$  değeri 1,07564 olarak hesaplanmıştır.

Bu problemde BEMGQ sonuçları, sabit ve lineer sınır elemanlarla üretilen [7] sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Kenar başına eleman sayısı 8, 16 ve 32 seçilerek değişik ızgaralar oluşturulmuştur. Her üç eleman tipi için elde edilen  $k_{etk}$  değerleri ve  $k_{etk}$  'deki yüzde hatalar Tablo 3.10' da sunulmuştur. Tablo 3.10 incelendiğinde  $k_{etk}$  'deki yüzde hataların sabit ve lineer elemanlarda hemen hemen aynı olduğu, fakat kuadratik elemanlardaki yüzde hataların çok daha küçük olduğu gözlemlenmektedir. Hatta sabit ve lineer elemanlardaki % hatalar kuadratik elemanlardaki hataların yaklaşık 10 katı mertebesinde olduğu gözlemlenmektedir. Kuadratik sınır elemanları yönteminin daha az hata içermesi beklenen bir sonuçtur. Bu büyük farklılık lineer ve sabit elemanlarda aynı sayıda düğüm noktası varken, kuadratik elemanların tam iki katı düğüm noktası içermesinden kaynaklandığı düşünülebilir.

**Tablo 3.10** Altı grup için sabit, lineer ve kuadratik elemanlar kullanılarak elde edilen  $k_{etk}$  sonuç tablosu

Sınır eleman	Sabit eleman	%hata	Lineer eleman	%hata	Kuadratik eleman	%hata
24	1,06495	0,99	1,06460	1,03	1,07435	0,12
48	1,07273	0,27	1,07262	0,28	1,07529	0,03
96	1,07475	0,083	1,07484	0,074	1,07554	0,009



**Şekil 3.3:** Altı grup için sabit, lineer ve kuadratik elemanlar kullanılarak elde edilen yetkinlik-özdeğer sonuçları grafiği

#### **BÖLÜM 4. SONUÇLAR**

Bu çalışmada çok gruplu nötron difüzyon denklemi kuadratik sınır elemanları yöntemiyle çözülmüştür. Kuadratik sınır elemanları kullanılması sebebiyle eğrisel geometrilere de çözüm elde edilmiştir. Sabit ve lineer sınır elemanları ile düzgün geometrilere hesaplama yapılabilmektedir. Üç gruplu problemlerde değişik sayıda sınır elemanı kullanılarak sonsuz ortam  $k_{\infty}$  hesapları ile ortalama grup akıları hesabı yapılmıştır. Analitik sonuca oldukça yaklaşan sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca sınır eleman sayısı arttıkça yakınsaklığın büyük olduğu görülür. Altı grup sonlu ortam  $k_{\text{eff}}$  hesapları çeşitli sayıda sabit, lineer ve kuadratik sınır elemanları kullanılarak elde edilmiş ve karşılaştırmalı hata tabloları verilmiştir. Sonuç olarak kuadratik sınır elemanları ile daha iyi ve yaklaşık sonuçlar elde edilmiştir. Silindirik problemin çözümünde sonlu ortam sınır koşulları kullanılmıştır, az sayıda sınır elemanı kullanılmasına rağmen sonuca oldukça yakınsama olduğu görülmüştür. Tüm bu çalışmaların sonunda kuadratik sınır elemanlarının hacim integrallerini sınır integrallerine dönüştürdüğü ve eğrisel geometrilere çok yaklaşık sonuçlar verdiği görülmüştür.

## KAYNAKLAR

- [1] **Benarjee, P.K. and Butterfield, R.**, 1981. Boundary Element Methods in Engineering Science, Mc Grow Hill Book Company (UK).
- [2] **Brebbia, C. A. And Dominguez, J.**, 1989. Boundary Elements: An Introductory Course, Computational Mechanics Publications, Avon, Great Britain.
- [3] **Brebbia, C. A., Telles J.C.F., and Wrobel L.C.**, 1984. Boundary Element Techniques, Springer-Verlag.
- [4] **Itagaki, M.J.**, 1985. Boundary Element Methods Applied to Two Dimensional Neutron Diffusion Problems, *Journal of Nuclear Science and Technology*, 22, 565-583.
- [5] **Özgener, B. and Özgener H.A.**, 1993. The Solution of The Criticality Eigenvalue Problems in The Application of The Boundary Element Method to The Neutron Diffusion Equation, *Annals of Nuclear Energy*, 20, 503-518.
- [6] **Özgener, B. and Özgener H.A.**, 1994. The Application of The Multiple Reciprocity Method to The Boundary Element Formulation of The Neutron Diffusion Equation, *Annals of Nuclear Energy*, 21, 711-723.
- [7] **Özgener, B.**, 1998. A Boundary İntegral Equation for Boundary Element Applications in Multigroup Neutron Diffusion Equation, *Annals of Nuclear Energy*, 25, 347-357.
- [8] **Özgener, H.A. and Özgener, B.**, 2001. A Multiregion Boundary Element Method for Multigroup Neutron Diffusion Calculation, *Annals of Nuclear Energy*, 28, 585-616.
- [9] **Maiani, M., Montagnini, B.**, 1999. A Boundary Element Response Matrix Method for The Multigroup Neutron Diffusion Equations, *Annals of Nuclear Energy*, 26, 1341-1369.
- [10] **Chiba, G., Tsuji, M, Shimazo Y.**, 2001. A Hierachical Domain Decomposition Boundary Element Method With a Higher Order Polynomial Expansion for Solving 2-D Multiregion Neutron Diffusion Equations, *Annals of Nuclear Energy*, 28, 895-912.

- [11] **Maiani, M., Montagnini, B.,**2004. A Galerkin Approach to The Boundary Element–Response Matrix Method for The Multigroup Neutron Diffusion Equations, *Annals of Nuclear Energy*, 31, 1447-1475.
- [12] **Özgener, B., Işıklı, H.,** 2002. A Quadratic Boundary Element Formulation for Neutron Diffusion Equation, *Turkish Journal of Physics*, 26, 225-228.
- [13] **Özgener B., İzgi N,** 2001. Kuadratik Sınır Elemanları Yönteminin İki Gruplu İki Boyutlu Nötron Difüzyon Teorisine Uygulanması, *XII Ulusal Mekanik Kongresi Bildiriler Kitabı*, 689-698.
- [14] **Işıklı, H.,** Tek Gruplu Nötron Difüzyon Denkleminin Kuadratik Sınır Elemanları Metodu ile Çözümü. *Y. Lisans tezi*, 1999.
- [15] **İzgi, N.,** İki Boyutlu İki Gruplu Difüzyon Denkleminin Kuadratik Sınır Elemanları Metodu ile Çözümü., *Y. Lisans Tezi*, İtu Nükleer Enerji Enstitüsü, 2001.
- [16] **Özgener B.,** A Boundary İntegral Equation for Boundary Element Applications in Multigroup Neutron Diffusion Theory, *Annals of Nuclear Energy*, 25(6), 1997.
- [17] **Becker, B., Carey, F. And Oden, J. T.,** 1983. Finite Elements An Introduction, Prentice-Hall, 1, New Jersey.
- [18] **Zienkiewicz, O. C.,** 1982. Finite Element Method, Mc Graw Hill, England.
- [19] **Özgener, H. A.,** 1987. Reaktör Teorisi Ders Notları, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- [20] **Beer, G., Watson, J. O.,** 1992. Introduction to Finite Element Methods for Engineers, Chichester: John Wiley, 1992.

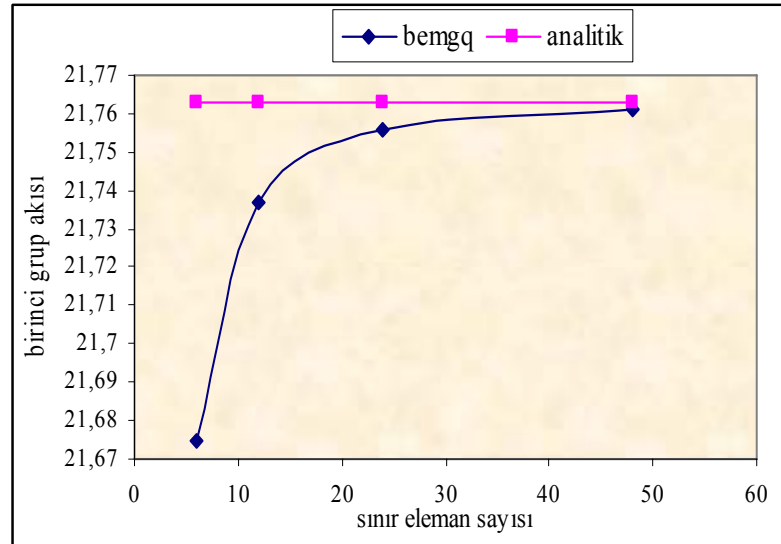
## EK.A ÜÇ GRUPLU SONSUZ ORTAM PROBLEMİ GRAFİKLERİ

Bölüm 3.1’de verilen üç gruplu sonsuz ortam probleminde BEMGQ programı ile hesaplanan her bir grup akıları ve analitik karşılaştırmaları ile grafikleri bu bölümde verilmiştir.

**Tablo A.1:** Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ programı ile bulunan birinci grup akı ortalamaları

Eleman sayısı	1.grup ortalama akısı	%hata
6	21.674470	0.406
12	21.737121	0.118
24	21.755770	0.0322
48	21.760968	0.0084

Tablo A.1 incelenirse, birinci grup akılarının en küçük ızgarada bile analitik çözüme oldukça yakın sonuç verdiği görülebilir. Ayrıca ızgara incelidikçe analitik sonuca göre hatalar giderek azalmaktadır. Tablo A.1’e ait grafik Şekil A.1’de verilmiştir.

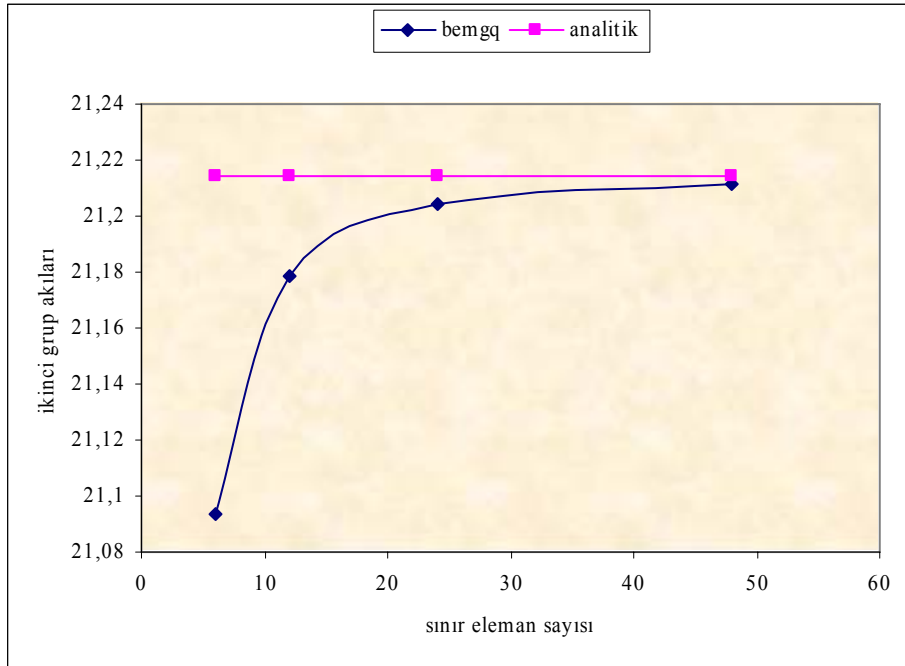


**Şekil A.1:** Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ ile bulunan birinci grup ortalama akıları grafiği

**Tablo A.2:** Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ programı ile bulunan ikinci grup akı ortalamaları

Eleman sayısı	2.grup ortalama akısı	%hata
6	21,093504	0.569
12	21,1783657	0.170
24	21,2043538	0.0469
48	21,2116601	0.0124

Tablo A.2’de programın ürettiği 2. grup akıları ve analitik sonuca göre %hatalar verilmiştir. Tablo A.2’ye ait grafik Şekil A.2’de görüldüğü gibi ızgara inceldikçe 2. grup akılarının analitik değere yakınsadığı açıkça görülmektedir.

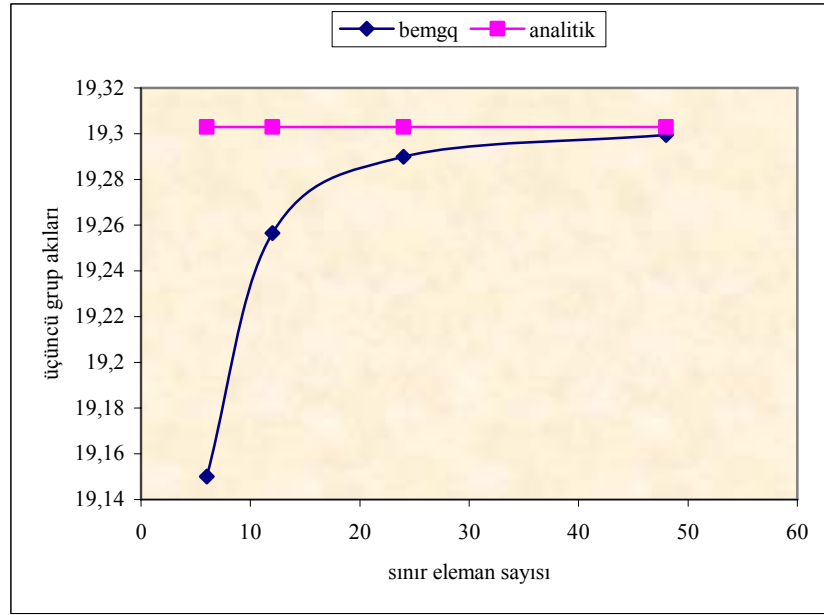


**Şekil A.2:** Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ ile bulunan ikinci grup ortalama akıları grafiği

**Tablo A.3:** Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ programı ile bulunan üçüncü grup akı ortalamaları

Eleman sayısı	3. grup ortalama akısı	%hata
6	19,150130	0.791
12	19,256539	0.240
24	19,289924	0.0671
48	19,2993942	0.0180

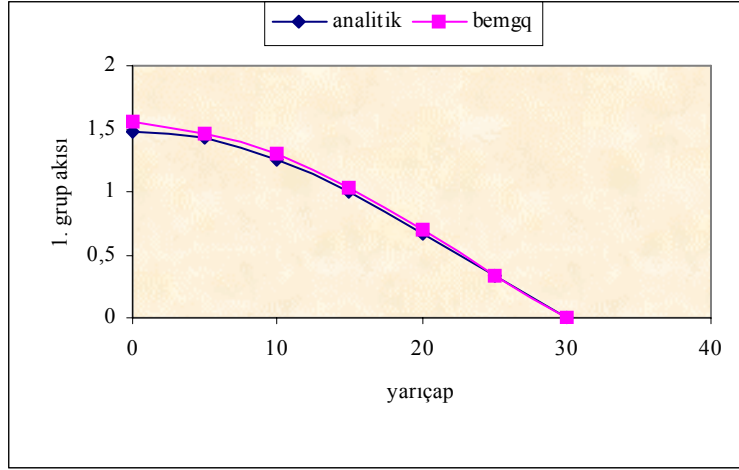
Tablo A.3’de 3. gruba ait ortalama akıları ile analitik sonuca göre %hatalar verilmiştir. Üçüncü grup ortalama akılarındaki hatalar ile bir ve ikinci grup ortalama akılarındaki hataların hemen hemen aynı mertebede olduğu gözlenmektedir.



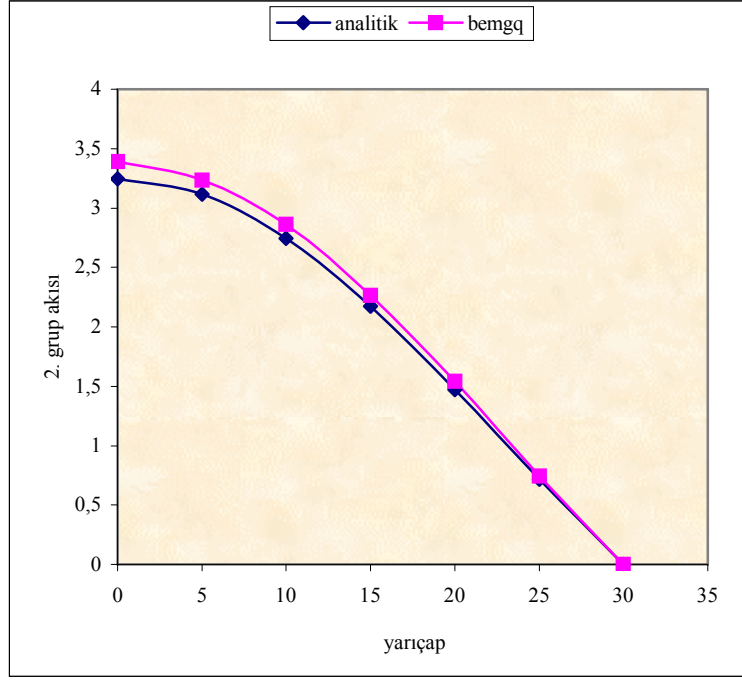
**Şekil A. 3:** Üç gruplu sonsuz ortam serbest kaynak probleminde BEMGQ ile bulunan üçüncü grup ortalama akıları grafiği

## EK.B ÜÇ GRUPLU SİLİNDİR PROBLEMİNE AİT GRAFİKLER

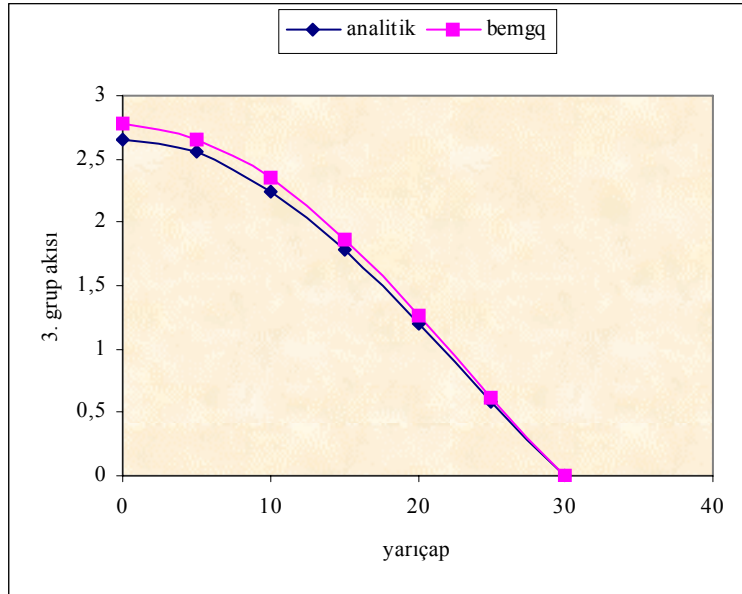
Bölüm 3.3’de ele alınan üç gruplu sonlu ortam silindir problemi analitik ve BEMGQ programı akı sonuçları grafikleri bu bölümde verilmiştir. Sırasıyla Şekil B.1, Şekil B.2 ve Şekil B.3’te 8 adet kuadratik sınır elemanı kullanılarak elde edilen birinci, ikinci ve üçüncü gruba ait akı grafikleri verilmiştir. Aynı şekilde sırasıyla Şekil B.4, Şekil B.5 ve Şekil B.6’da 15 adet kuadratik sınır elemanı kullanılarak elde edilen birinci, ikinci ve üçüncü gruba ait akı grafikleri sunulmuştur.



**Şekil B.1:** 8 sınır eleman kullanılarak elde edilen birinci grup akıları ile BEMGQ ile edilen akıların sonuçları grafiği

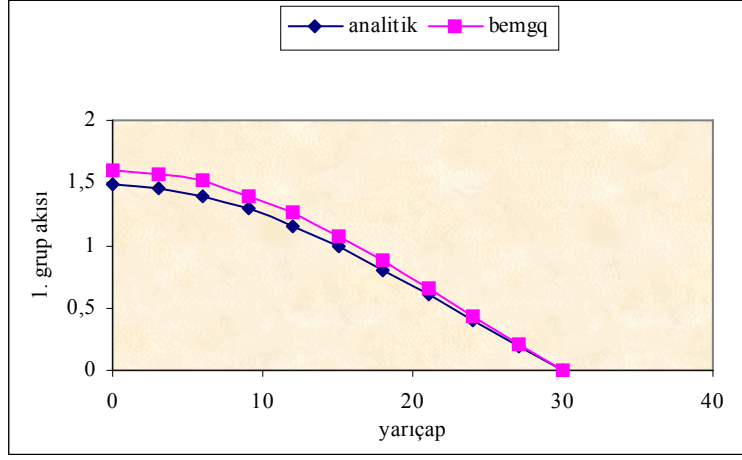


**Şekil B.2:** 8 sınır elemanı kullanılarak elde edilen ikinci grup akıları ile BEMGQ ile edilen akıların sonuçları grafiği

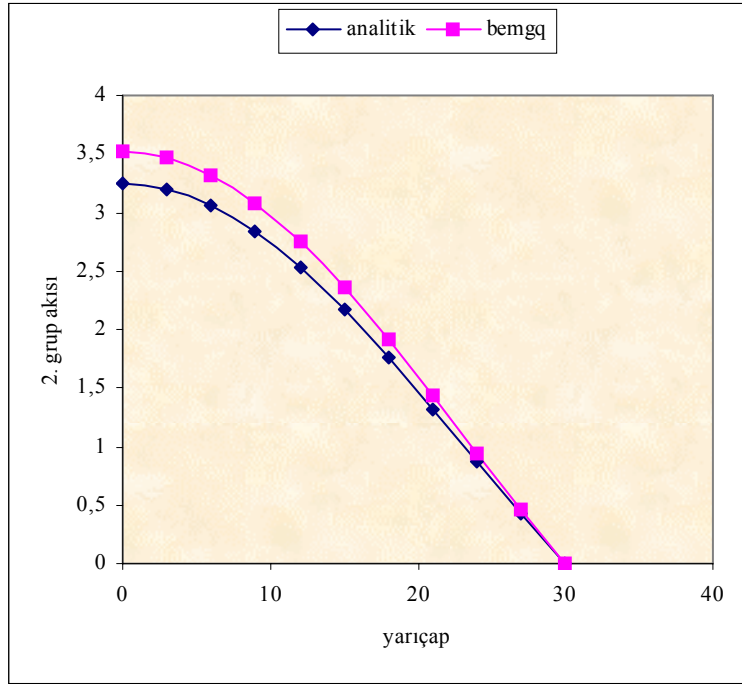


**Şekil B.3:** 8 sınır elemanı kullanılarak elde edilen üçüncü grup akıları ile BEMGQ ile elde edilen akıların sonuçları grafiği

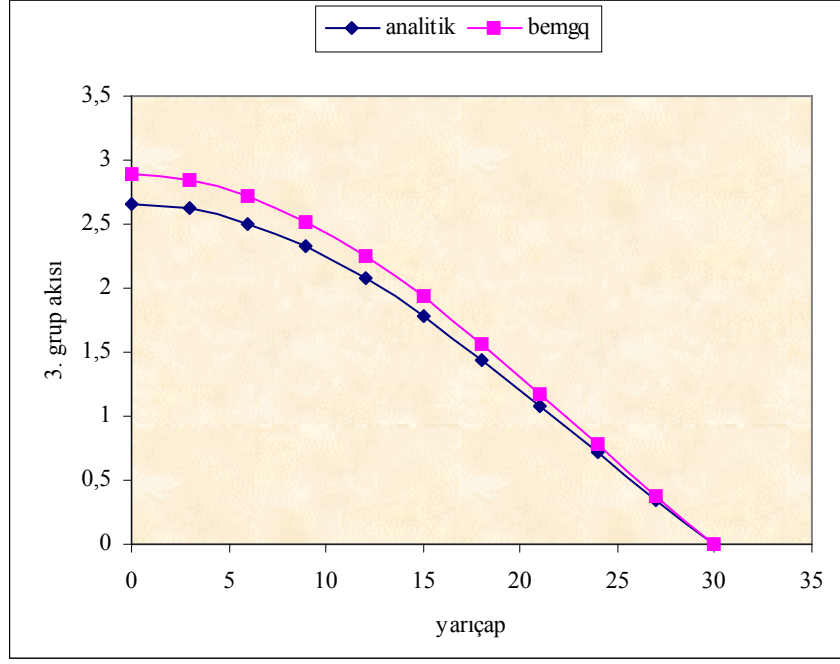
Aynı şekilde 1/8'lik kısmın x-ekseniyle 45 derece açı yapan yarıçapı üzerindeki nodlarda grup akı dağılımları, 15 kuadratik sınır elemanı kullanılarak hesaplanmıştır.



**Şekil B.4:** 15 sınır elemanı kullanılarak elde edilen birinci grup akıları ile BEMGQ ile edilen akıların sonuçları grafiği



**Şekil B.5:** 15 sınır elemanı kullanılarak elde edilen ikinci grup akıları ile BEMGQ ile edilen akıların sonuçları grafiği



**Şekil B.6:** 15 sınır elemanı kullanılarak elde edilen üçüncü grup akıları ile BEMGQ ile elde edilen akıların sonuçları grafiği

Silindir probleminde az sayıda sınır elemanı kullanılmasına rağmen analitik sonuçlara, hem etkin çoğaltma katsayısı hesaplanırken hem de grup akıları hesaplanırken, yeterince yakın sonuçlar elde edilmiştir. Izgaralar uygun bir biçimde seçilip, sayısı arttırılırsa daha iyi sonuçlar elde edilebilir.

## EK.C GAUSS İNTEGRASYONU

### Bir Boyutlu İntegrallerde Gauss İntegrasyonu

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \quad (C.1)$$

Bir boyutlu integrali göz önüne alınsın. (C.1) eşitliğinin çözümü için Gauss İntegrasyonu yöntemi kullanılır. Bu yöntemde integrali alının fonksiyonun uygun noktalarda ki değerleri ile yine bu noktalara uygun ağırlık fonksiyonları çarpılarak, toplanır. Elde edilen toplam integralin yaklaşık çözümüdür, şayet nokta sayısı yeterince büyük seçilirse kesin çözüme yaklaşım sağlanır.

n\_noktalı yaklaşım için;

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \dots + w_n f(\xi_n) \quad (C.2)$$

(C.1) eşitliği için (C.2) yardımıyla yaklaşık çözüm elde edilir. Burada  $w_1, w_2, \dots, w_n$  ağırlıklar,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  Gauss noktalarıdır. Gauss integrasyonunda kullanılan nokta sayısı arttıkça (C.2) eşitliğinin kesin çözümüne olan yaklaşıklık artar.

Tek nokta formülü; n=1 için,

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) \quad (C.3)$$

(C.3) eşitliğinde iki parametre,  $w_1$  ve  $\xi_1$ , olduğu için,  $f(\xi)$ 'in polinom derecesini bir seçersek kesin çözümü elde ederiz. Dolayısıyla,  $f(\xi) = a_0 + a_1 \xi$  için;

hata=I – Gauss İntegrasyonu

$$hata = \varepsilon = \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1 \xi) d\xi - w_1 f(\xi_1) = 0 \quad (C.4a)$$

$$\varepsilon = 2a_0 - w_1(a_0 + a_1 \xi_1) = 0 \quad (C.4b)$$

$$\varepsilon = a_0(2 - w_1) - w_1 a_1 \xi_1 = 0 \quad (\text{C.4c})$$

(C.4c) eşitliğinde  $w_1 = 2$  ve  $\xi_1 = 0$  alınrsa,  $\varepsilon = 0$  elde edilir. Burada herhangi bir f fonksiyonu için;

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx 2f(0) \quad (\text{C.5})$$

elde edilir. İki nokta formülü; n=2 için (C.1) eşitliği,

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) \quad (\text{C.6})$$

(C.6) eşitliğinde  $w_1, w_2$  ve  $\xi_1, \xi_2$  olmak üzere dört parametre vardır. Kesin çözüm için kübik polinom kullanılır;

$$f(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 \quad (\text{C.7})$$

$$\varepsilon = \left[ \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3) d\xi \right] - [w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2)] \quad (\text{C.8})$$

(C.8) eşitliğinde  $\varepsilon = 0$  olması için

$$w_1 + w_2 = 2$$

$$w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 = 0$$

$$w_1 \xi_1^2 + w_2 \xi_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$w_1 \xi_1^3 + w_2 \xi_2^3 = 0 \quad (\text{C.9})$$

olmalıdır. Burada;

$$w_1 = w_2 = 1, \quad \xi_1 = -\xi_2 = 1/\sqrt{3} = 0.5773502651 \text{ sayılarıdır.}$$

Gauss integrasyonu genelleştirilecek olursa;  $(2n-1)$  veya daha düşük dereceli polinomları kesin çözümü için n noktalı Gauss integrasyonu kullanmak yeterlidir. Gauss noktaları simetrik olarak yerleştirilir ve bu noktalarda aynı ağırlıklara sahiptir [20].

## İki Boyutlu İntegrallerde Gauss İntegrasyonu

İki boyutlu Gauss integrasyonunda;

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$I \approx \int_{-1}^{+1} \left[ \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta) \right] d\eta$$

$$\approx \sum_{j=1}^n w_j \left[ \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta_j) \right]$$

$$I \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{C.10})$$

elde edilir [20].

## EK. D İKİ BOYUTLU GREEN FONKSİYONU TEMEL ÇÖZÜMÜ

Sonsuz ortam Green fonksiyonu,

$$\nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) - k_g^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = -\delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad (D.1)$$

denkleminin çözümüdür.

(D.1) denklemini sağlayan  $G_g(\vec{r}, \vec{\rho})$  temel çözümünü bulmak için, herhangi bir  $i$  düğüm noktasının  $r$  civarı alınır. Dolayısıyla burada  $r, i$  noktasından eşit uzaklıkta bulunan noktaları temsil eder.  $r$  uzaklığının çok küçük olduğu varsayılarak farklı değerleri için çözüm yapılabilir.

1.  $r \neq 0$  ise; bu durumda,

$$\nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) - k_g^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = 0 \quad (D.2)$$

denklemi  $i$  merkezli  $r$  yarıçaplı sonsuz silindir için,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dG_g(\vec{r}, \vec{\rho})}{dr} \right) - k_g^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = 0 \quad (D.3)$$

biçimindedir. Burada;

$$G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = AK_0(k_g r) + BI_0(k_g r) \quad (D.4)$$

Şeklindedir.  $K_0$  ve  $I_0$ , 0. mertebe modifiye Bessel fonksiyonlarıdır. (D.4) denkleminin sınır koşulları uygulanırsa;  $r \rightarrow \infty$  için  $G_g(r)$  sonlu olmalıdır.

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_0(k_g r) \rightarrow \infty \quad (D.5)$$

olduğundan  $I_0(k_g r)$  ifadesinin katsayısı sıfır olmalıdır. Dolayısıyla  $B=0$  olur. Bu durumda (D.4) denklemi,

$$G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = AK_0(k_g r) \quad (D.6)$$

eşitliğine indirgenir.  $r = |\vec{r} - \vec{\rho}|$  tanımı yapılırsa,

$$G_g(r) = AK_0(k_g r) \quad (D.7)$$

2.  $r=0$  için (D.1) denklemi V hacmi üzerinden integre edilirse,

$$\int_V \nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV - k_g^2 \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV = - \int_V \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) dV \quad (D.8)$$

i noktasından r uzaklıktaki çember üzerinde herhangi bir noktanın normal birim vektörü ile yarıçap aynı doğrultulu olduğundan,  $n \equiv r$  alınabilir. Gauss teoreminden

$$\frac{\partial G_g(r)}{\partial r} 2\pi r = -1 \quad (D.9)$$

$$\frac{\partial G_g(r)}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r} \quad (D.10)$$

$$dG_g(r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{dr}{r} \quad (D.11)$$

$$G_g(r) = -\frac{1}{2\pi} \ell nr \quad (D.12)$$

olur. (D.6) ve (D.12) denklemlerinden,

$$AK_0(k_g r) = -\frac{1}{2\pi} \ell nr \quad (D.13)$$

$r \rightarrow 0$  için,

$$\lim_{r \rightarrow 0} [AK_0(k_g r)] = \lim_{r \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{2\pi} \ell nr \right) \quad (D.14)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[ AK_0(k_g r) + \frac{1}{2\pi} \ell nr \right] = 0 \quad (D.15)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[ -A \ell nr + \frac{1}{2\pi} \ell nr \right] = 0 \quad (D.16)$$

şekline dönüşür. Bu durumda;

$$A = \frac{1}{2\pi} \quad (D.17)$$

elde edilir. Sonuç olarak temel çözüm,

$$G_g(r) = \frac{1}{2\pi} K_0(k_g r) \quad (D.18)$$

olarak bulunur.

## EK. E BEMGQ PROGRAMINA AİT BİLGİLER

Aşağıda BEMGQ programında kullanılan alt programlar ve işlevleri verilmiştir.

SETINT	: Gauss integrasyonunda ve Logaritmik Gauss İntegrasyonunda kullanılan integrasyon noktaları ve ağırlıkları okur.
INPUTQ	: Probleme ait, sırasıyla, sınır nokta sayısını, grup sayısını, tesir kesitlerini, saçılmaları okur.
RNODE	: Düğüm noktalarının koordinatlarını okur.
RELEM	: Eleman verilerini okur.
GHMATPQ	: G ve H matrisini hesaplar. Bunları hesaplamak için EXTINPQ ve LOCINPQ alt programlarını çağırır.
EXTINPQ	: G ve H matrislerinin, G matrisinin köşegen dışında kalan elemanlarını hesaplar.
LOCINPQ	: G matrisinin köşegen elemanlarını hesaplar.
FORM	: Fiyon kaynağı teriminin ve iç akıların hesaplanması için gerekli matrisleri oluşturur.
QUAD	: Kuadratik dörtgen elemanlar için hesaplama yapar.
TRI	: Kuadratik üçgen elemanlar için integral hesabı yapar.
FISOR	: Fiyon kaynağı iterasyonu yapılıır.
INTERPQ	: Sınır ve iç akıları hesaplar.
OUTPUTPQ	: Sınır ve iç akı değerlerini ekrana yazar.

BEMGQ programında yer alan INPUTPQ, RNODE ve RELEM alt programlarında kullanılan değişkenler:

### INPUTPQ

N	: Sınır düğüm nokta sayısı
NGT	: Enerji grup sayısı
DIF(I)	: Difüzyon sabiti
DIFL(I)	: Difüzyon uzunluğu
SIGF(I)	: Fiyon saçılma tesir kesiti
XF(I)	: Fiyon tesir kesiti
XKSI(I)	: Fiyon spektrum kesri
ANGLE(I)	: Düğüm nodu açısı
XSECT(I)	: Bir gruba diğer gruplardan saçılma tesir kesitleri
X(I),Y(I)	: Sınır elemanlarının uç noktalarının koordinatları
KODE(I)	: Sınır koşulu; 0 ise boşluk koşulu, 1 ise yansıtıcı koşulu
NNODE(I)	: İç nod sayısı

NELEM : İç eleman sayısı (üçgen veya dörtgen eleman)  
NETSOR : 0 ise serbest nötron kaynağı yok, 1 ise var  
NFISOR : 0 ise fisil malzeme yok, 1 ise var.  
ITMAX :  $k_{\text{etk}}$  hesabında maksimum iterasyon sayısı  
EPS :  $k_{\text{etk}}$  hesabında yakınsama kriteri  
ENGEN1 : Normalizasyon parametresi  
FINOR :  $k_{\text{etk}}$  başlangıç öngörüsü

### **RNODE**

N1 : Satır başlangıç nodu numarası  
NUM : Satırdaki nod sayısı  
INC : Nod numaralarının artış sayısı  
X1, Y1 : Satırın ilk nodunun başlangıç koordinatları  
XN, YN : Satırın son nodunun bitiş koordinatları

### **RELEM**

NUM : Seçilen satırdaki iç eleman sayısı  
INC : Nod numaralarının artış sayısı  
NEE : İç elemandaki nod sayısı (üçgen eleman ise 6, dörtgen eleman ise 9)

BEMGQ programına ait örnek girdi dosyaları ilk dosya sonsuz ortam hesabı yapmak için kullanılan veri girdi dosyası, diğeri sonlu ortam problemi hesabı yapmak için kullanılan veri girdi dosyasıdır.

1.) Üç gruplu 12 sınır elemanına sahip sonsuz ortam  
12 3  
1.664 6.0177746696 0.0040715 0.001835 1.  
0.648 2.674027623 0.00848 0.00424 0.  
0.04239  
0.3512 1.66885925 0.181 0.07481 0.  
0. 0.0676  
45. 180. 180. 180. 90. 180. 180. 180. 45. 180. 180. 180.  
0. 0.  
1.25 0.  
2.50 0.  
3.75 0.  
5.0 0.  
5.0 1.25  
5.0 2.50  
5.0 3.75  
5.0 5.0  
3.75 3.75  
2.50 2.50  
1.25 1.25  
1 1 1  
1 1 1  
1 1 1  
1 1 1  
1 1 1  
1 1 1  
1 1 1  
15 3 1 0  
5  
1 5 1 0. 0. 5. 0.  
6 4 1 1.25 1.25 5. 1.25  
10 3 1 2.50 2.50 5. 2.50  
13 2 1 3.75 3.75 5. 3.75  
15 1 1 5. 5. 5. 5.  
14  
1 1  
1 2  
1 3  
1 4  
1 5  
1 1 2  
2 0  
1 6  
1 1 1  
1 0  
1 7  
1 1 0  
1 8  
1 9

3  
1 1 6 1 3 10 2 7 6  
1 1 9 3 5 12 10 4 9 11 7 8  
1 1 6 10 12 15 11 14 13  
0  
1  
3 1. 1. 1.

2.) Üç gruplu 12 sınır elemanına sahip sonlu ortam

12 3  
1.664 6.0177746696 0.0040715 0.001835 1.  
0.648 2.674027623 0.00848 0.00424 0.  
0.04239  
0.3512 1.66885925 0.181 0.07481 0.  
0. 0.0676  
45. 180. 180. 180. 90. 180. 180. 180. 45. 180. 180. 180.  
0. 0.  
1.25 0.  
2.50 0.  
3.75 0.  
5.0 0.  
5.0 1.25  
5.0 2.50  
5.0 3.75  
5.0 5.0  
3.75 3.75  
2.50 2.50  
1.25 1.25  
1 1 1  
1 1 1  
1 1 1  
1 1 1  
1 1 1  
1 1 1  
1 1 1  
15 3 0 1  
30 0.000001 1. 1.  
5  
1 5 1 0. 0. 5. 0.  
6 4 1 1.25 1.25 5. 1.25  
10 3 1 2.50 2.50 5. 2.50  
13 2 1 3.75 3.75 5. 3.75  
15 1 1 5. 5. 5. 5.  
14  
1 1  
1 2  
1 3  
1 4  
1 5  
1 12  
2 0  
1 6  
1 11  
1 0  
1 7  
1 10

18  
19  
3  
1 1 6 1 3 10 2 7 6  
1 1 9 3 5 12 10 4 9 11 7 8  
1 1 6 10 12 15 11 14 13  
2000.

## **ÖZGEÇMİŞ**

1973 yılında İstanbul'da dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 1995 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. İstanbul Teknik Üniversitesi'nde bir yıl İngilizce hazırlık aldıktan sonra Nükleer enerji bölümüne devam etti. Halen bir devlet lisesinde Matematik Öğretmenliği yapmaktadır.