

***L*-FUZZY İDEALLER VE *L*-FUZZY  
MODÜLLER ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR**

**SOME RESULTS ON *L*-FUZZY IDEALS AND  
*L*-FUZZY MODULES**

UMMAHAN ACAR

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ  
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetmeliğinin  
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2006

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne  
Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda  
DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan :.....  
Prof. Dr. L.Michael BROWN

Üye (Danışman) :.....  
Doç. Dr. Nuri ÇİMEN

Üye :.....  
Prof. Dr. Haydar EŞ

Üye :.....  
Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

Üye :.....  
Doç. Dr. Ali ERDOĞAN

Bu tez .../.../2006 tarihinde Enstitü yönetim kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri  
üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

.../.../2006

Prof. Dr. Ahmet R. ÖZDURAL  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

## *L*-Fuzzy İdealler ve *L*-Fuzzy Modüller Üzerine Bazı Sonuçlar

Ummahan Acar

### ÖZ

Bu tezin temel amacı klasik cebirdeki halka, ideal ve modül kavramlarına ilişkin temel sonuçların fuzzy halka, fuzzy ideal ve fuzzy modüllerdeki karşılıklarını incelemektir.

Bu çalışma, dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, tezde ihtiyacımız olduğu kadarıyla *l*-teori ve fuzzy kümeler ile ilgili temel kavramlardan oluşmaktadır. İkinci bölümde, çalışmamızın temelini oluşturan fuzzy ideallerle ilgili bilgiler derlenmiştir.

Üçüncü bölümde, fuzzy altmodül kavramı verildikten sonra [12]'de yapılan çalışmanın bir genellemesi olarak fuzzy asal altmodüller karakterize edilmiş [1] ve Fuzzy Nakayama Lemma ispatlanmıştır.

Tezin son bölümünde, bir fuzzy  $\rho$  halkası üzerindeki fuzzy modüller incelenmiş ve fuzzy altmodüller arasındaki homomorfizmalar genelleştirilmiştir. Daha sonra fuzzy  $\rho$ -rezidü ideal ve altmodül kavramları verilmiştir. Son olarakda 3. Bölümdeki fuzzy asal altmodüllerin herhangi bir fuzzy  $\rho$  halkası üzerine genellemesi olan fuzzy asal  $\rho$ -altmodüller tanımlanarak, bazı özellikleri verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Fuzzy asal altmodüller, Fuzzy Nakayama Lemma, Fuzzy  $\rho$ -rezidü ideal, Fuzzy  $\rho$ -rezidü altmodül, Fuzzy  $\rho$ -modül, Fuzzy asal  $\rho$ -altmodüller

**Danışman:** Doç. Dr. Nuri ÇİMEN

Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

## Some Results on $L$ -Fuzzy Ideals and $L$ -Fuzzy Modules

Ummahan Acar

### ABSTRACT

The purpose of this thesis is to study basic properties of fuzzy algebraic notions such as fuzzy ring, fuzzy ideal and fuzzy module which are fuzzy versions of ring, ideal and module of the classical algebra.

This thesis consists of four chapters. Chapter 1 deals with the basic concepts of lattice theory and fuzzy set theory which will be needed.

In the second chapter, basic material concerning fuzzy ideals which makes up the basis of the thesis are established.

In the third chapter the notion of fuzzy submodule and a characterization of fuzzy prime submodules [1] are given as a generalization of [12] and finally a proof of the Fuzzy Nakayama Lemma is given.

In the last chapter, fuzzy modules over a fuzzy ring are studied and their homomorphisms are generalized. The notions of fuzzy  $\rho$ -residual ideal and residual submodule are given. Finally fuzzy prime  $\rho$ -submodules, viewed as an extension of fuzzy prime submodules given in Chapter 3, are introduced and some of their properties are studied.

**Keywords:** Fuzzy prime submodule, Fuzzy Nakayama Lemma, Fuzzy  $\rho$ -residual ideal, Fuzzy  $\rho$ -residual submodule, Fuzzy  $\rho$ -module, Fuzzy prime  $\rho$ -submodule

**Advisor:** Doç. Dr. Nuri ÇİMEN

Hacettepe University, Faculty of Science, Department of Mathematics.

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleőmesinde değerli bilgileri ve deneyimlerinden yararlandığım, her zaman her konuda yol gösteren ve sabırla yardımcı olan, değerli hocam Doç. Dr. Nuri imen'e ;

Ayrıca bu çalışmanın gerçekleőmesi sırasında her türlü sıkıntıyı, zorluğu ve sevinci benimle yaőayan eőim Volkan'a ;

Desteęini hiç bir zaman esirgemeyen kardeőim Ruhan'a ve ailelerimize;  
sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

# İçindekiler

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
<b>1 GİRİŞ</b>	<b>1</b>
1.1 Latis Teori . . . . .	2
1.2 Fuzzy Kümeler . . . . .	4
<b>2 L-FUZZY İDEALLER</b>	<b>8</b>
2.1 Temel Tanımlar . . . . .	8
2.2 $L$ -Fuzzy Maksimal ve $L$ -Fuzzy Asal İdealler . . . . .	13
<b>3 L-FUZZY MODÜLLER</b>	<b>20</b>
3.1 Temel Tanımlar . . . . .	20
3.2 $L$ -Fuzzy Asal Altmodüller . . . . .	24
3.3 $R$ -Modül Homomorfizmaları Altında Fuzzy Asal Altmodüller . . .	28
3.4 Fuzzy Nakayama Lemma . . . . .	32
<b>4 L-FUZZY <math>\rho</math>-MODÜLLER</b>	<b>36</b>
4.1 $L$ -Fuzzy $\rho$ -idealler ve $L$ -Fuzzy $\rho$ -Modüller . . . . .	36
4.2 Fuzzy Küme ile Üretilmiş $L$ -Fuzzy $\rho$ -Altmodüller . . . . .	42
4.3 $L$ -Fuzzy $\rho$ -Altmodül $\varphi$ -Homomorfizmaları . . . . .	44
4.4 Fuzzy $\rho$ -Rezidü İdeal ve Fuzzy $\rho$ -Rezidü Altmodül . . . . .	47
4.5 $L$ -Fuzzy Asal $\rho$ -Altmodüller . . . . .	52
<b>KAYNAKLAR DİZİNİ</b>	<b>57</b>

**İNDEKS****60****ÖZGEÇMİŞ****61**

## SİMGELER DİZİNİ

$F(X)$	$X$ üzerindeki $L$ -fuzzy kümelerin kümesi
$H(R)$	$R$ halkası üzerindeki $L$ -fuzzy halkaların kümesi
$I(R)$	$R$ halkası üzerindeki $L$ -fuzzy ideallerin kümesi
$\mu_t$	$\{x \in X \mid \mu(x) \geq t\}$ kümesi
$\mu_*$	$\{x \in X \mid \mu(x) = \mu(0)\}$ kümesi
$\mathcal{B}$	Genelleştirilmiş fuzzy maksimal ideallerin kümesi
$FJR(R)$	Fuzzy Jacobson Radikali
$S(M)$	$M$ modülü üzerindeki $L$ -fuzzy modüllerin kümesi
$S_\theta(M)$	$\{\nu \in S(M) \mid \nu \subset \theta\}$ kümesi
$I_\rho(R)$	$L$ -fuzzy $\rho$ -ideallerin kümesi
$S_\rho(M)$	$L$ -fuzzy $\rho$ -modüllerin kümesi
$S_{\rho,\theta}(M)$	$\{\nu \in S_\rho(M) \mid \nu \subseteq \theta\}$ kümesi
$F_\theta(M)$	$\{\eta \in F(M) \mid \eta \subseteq \theta\}$ kümesi
$\langle \xi \rangle_\rho$	$\xi$ fuzzy kümesinin ürettiği fuzzy $\rho$ -ideal (modül)
$(\theta_1 :_\rho \theta)$	$\cup\{\mu \mid \mu \circ \theta \subseteq \theta_1, \mu \in I_\rho(R)\}$ kümesi
$(\theta_1 :_\theta \mu)$	$\cup\{\beta \mid \mu \circ \theta \subseteq \beta, \beta \in S_{\rho,\theta}(M)\}$ kümesi

# 1 GİRİŞ

Fuzzy küme kavramı ilk olarak 1965'de L. Zadeh [29] tarafından ortaya atılmış ve günümüzde de başta elektronik ve bilgisayar mühendislikleri olmak üzere bir çok alanda uygulama olanağı bulmuştur.

Bu kavram 1971'de A. Rosenfeld [26] tarafından cebirsel yapılara taşınarak, bir  $G$  gurubunun fuzzy gurubu kavramı tanımlanmıştır. 1980'li yıllarda bu tanım temel alınarak diğer fuzzy cebirsel yapıların (fuzzy normal altgurup, fuzzy halka, fuzzy ideal, fuzzy modül, v.b. ) tanımları verilmiş ve özellikleri incelenmiştir [2, 4, 8, 10].  $[0, 1]$  latisi üzerinde yapılan bu çalışmalar Liu [11] tarafından tamamen dağılımlı bir  $L$  latisine genelleştirilmiş ve  $L$ -fuzzy ideallerin bir karakterizasyonu verilmiştir. Daha sonra D.S. Malik ve J. N. Mordeson bir halkanın fuzzy althalkalarının, fuzzy ideallerinin ve fuzzy modüllerin bir çok karakterizasyonlarını vermişlerdir. Bu konuda [18] geniş bir kaynaktır. Ayrıca Zahedi [22, 30]'da bir  $M, R$ -modülünün  $L$ -fuzzy altmodülü kavramını,  $L$ -fuzzy asıl (primary) altmodüllere genişleterek çeşitli sonuçlar elde etmiştir. Bu kavramların özellikleri ve klasik cebirdekine benzer ilişkileri yoğun bir şekilde çalışılmaktadır.

Bu tezde klasik cebirin bazı kavramları fuzzy cebirsel yapılara aktarılmış ve  $L$ -fuzzy halkalar üzerinde  $L$ -fuzzy ideal,  $L$ -fuzzy asal altmodül kavramları incelenmiştir.

Tez çalışmamızda, öncelikle ihtiyaç duyulan latis kavramı, özellikleri ve fuzzy küme kavramı sırasıyla Kısım 1.1 ve 1.2'de açıklanmıştır.

2. Bölümde, [10, 11, 14, 18]'den yararlanılarak fuzzy cebirsel yapılara ilişkin temel bilgiler verilmiştir. Fuzzy ideal tanımı ve özellikleri verildikten sonra 3. ve 4. Bölümlerde gerekli olan fuzzy maksimal ideal ve fuzzy asal ideal tanımları, özellikleri ve bazı karakterizasyonları ayrıntılı olarak verilmiş ve bu konuda bazı örnekler sunulmuştur.

1987 yılında F. Z. Pan [25] tarafından  $[0, 1]$  üzerinde tanımlanan fuzzy modül kavramı 1992 yılında Zahedi [32] tarafından bir  $L$  latisine genelleştirilerek cebirsel özellikleri incelenmiştir. Tezin 3. Bölümünde öncelikle bu konuda yapılan

çalışmalara ilişkin temel tanım ve karakterizasyonlar verilmiştir. Kısım 3.2’de, [12]’de yapılan çalışmanın bir genellemesi olarak  $L$ -fuzzy asal altmodüller tanımlanmış, özellikleri incelenmiş ve bu altmodüllerin  $R$ -modül epimorfizmalar altında korundukları gösterilmiştir [1]. Kısım 3.3’de ise cebirdeki temel teoremlerden birisi olan Nakayama Lemma’nın fuzzy cebirdeki karşılığı ispatlanmıştır.

Tezin 4. Bölümü özgün sonuçlardan oluşmaktadır. Bu bölüm için temel çıkış noktası L. Martinez’in [19, 20, 21] çalışmalarıdır. Temel kavramlar Kısım 4.1 ve 4.2’de tanıtılmış ve [20, Teorem 8.3]’ün değişik bir ispatı verilmiştir. Kısım 4.3’de herhangi bir  $L$ -fuzzy  $\rho$  halkası üzerinde  $L$ -fuzzy  $\rho$ -altmodül  $\varphi$ -homomorfizmaları tanımlanmış, fuzzy  $\rho$ -altmodüllerin görüntü ve ters görüntüleri incelenmiştir. Kısım 4.4’de, [20, Tanım 5.6]’da verilenden farklı bir yol takip edilerek  $\rho$ -rezidü ideali ve altmodülü tanımlanmıştır. Daha sonra bu altmodüllerin [20]’deki ile benzerliği gösterilerek çeşitli cebirsel özellikleri elde edilmiştir. Kısım 4.5’de ise [1]’de yapılan çalışmanın genellemesi olarak fuzzy asal  $\rho$ -altmodül kavramı incelenmiş ve bu altmodüllerin 4.3 ve 4.4’de verilen kavramlarla ilişkili karakterizasyonları elde edilmiştir.

Tez, fuzzy asal  $\rho$ -altmodüllerin karakterizasyonuna ilişkin verilen bir açık soru ile bitirilmiştir.

## 1.1 Latis Teori

Bu kısım tez boyunca ihtiyaç duyulan latis ile ilgili tanım, teorem ve kavramları içermektedir ve kaynak olarak [3]’den yararlanılmıştır. Matematikteki önemli bağıntılardan birisi olan kısmi sıralama bağıntısı, küme kapsama ve reel sayılar üzerindeki sıralama bağıntısının bir genellemesidir. Boştan farklı bir  $X$  kümesi üzerinde, aşağıdaki koşulları sağlayan “ $\leq$ ” bağıntısına bir *kısmi sıralama bağıntısı* denir :

1. Her  $x \in X$  için  $x \leq x$  (yansıma),
2.  $x \leq y$  ve  $y \leq x$  olacak şekildeki her  $x, y \in X$  için  $x = y$  (ters simetri ),
3.  $x, y, z \in X$  için  $x \leq y$  ve  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$  (geçişlilik)

Bu durumda  $(X, \leq)$  ikilisine bir kısmi sıralı küme denir.

**Örnek 1.1.1**  $\mathbb{R}$  gerçel sayılar üzerindeki bilinen  $\leq$  bağıntısı kısmi sıralama bağıntısıdır.

$(X, \leq)$  kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer  $x \leq y$  veya  $y \leq x$  ise  $x, y \in X$  elemanlarına *karşılaştırılabilir* denir. Kısmi sıralı bir kümedeki her iki eleman karşılaştırılabilir ise bu kısmi sıralama bağıntısına *tam sıralama bağıntısı*, kümeye de *tam sıralı küme* denir.

$(X, \leq)$  kısmi sıralı bir küme ve  $n \in X$  olmak üzere,

$$“x \leq n \Rightarrow x = n”$$

koşulunu sağlayan her  $x \in X$  için  $n$ 'ye  $X$ 'in *minimal (küçükçe) elemanı* denir. Maksimal (büyükçe) elemanda benzer şekilde tanımlanır. Bunun yanı sıra, kısmi sıralı bir  $X$  kümesinde her  $x \in X$  için  $x \leq a$  koşulunu sağlayan  $a \in X$  elemanına *en büyük eleman* ve  $b \leq x$  koşulunu sağlayan  $b \in X$  elemanına *en küçük eleman* denir.

$A, (X, \leq)$  kısmi sıralı kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Bu durumda her  $a \in A$  için  $x \leq a$  olacak şekildeki bir  $x \in X$  elemanına  $A$ 'nın bir *alt sınırı* ve bu alt sınırların en büyüğüne de  $A$  kümesinin *en büyük alt sınırı* denir. Genellikle  $\inf A$  (*ebasA*) ile gösterilir. Benzer şekilde,  $A$ 'nın bir *üst sınırı* tanımlanır ve üst sınırlarının en küçüğüne de  $A$  kümesinin *en küçük üst sınırı* denir ve  $\sup A$  (*ekusA*) ile gösterilir.

**Tanım 1.1.2**  $(L, \leq)$  bir kısmi sıralı küme olsun. Her  $x, y \in L$  için  $\{x, y\}$  kümesinin  $L$ 'de “sup” ve “inf”'i varsa  $(L, \leq)$ 'ye bir *latis* denir. Bu durumda  $\sup\{x, y\}$  ve  $\inf\{x, y\}$  sırasıyla  $x \vee y$  ve  $x \wedge y$  sembolleri ile gösterilir.

Bundan sonra  $(L, \leq, \vee, \wedge)$  latisi için kısaca  $L$  gösterimi kullanılacaktır.

**Tanım 1.1.3**  $L$  bir *latis* olsun.  $L$ 'nin boştan farklı her alt kümesinin  $L$ 'de *sup* ve *inf*'i varsa  $L$ 'ye bir *tam (complete) latise* denir.

$X \neq \emptyset$  olmak üzere  $X \subseteq L$  için  $\sup X = \bigvee X$  ve  $\inf X = \bigwedge X$  ile gösterilir.

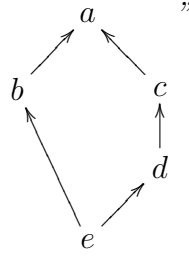
**Tanım 1.1.4** Aşağıdaki koşulları sağlayan bir  $(L, \leq)$  latisine dağılımlıdır denir:

$\forall x, y, z \in L$  için,

$$1. (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

$$2. (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

**Örnek 1.1.5** Aşağıdaki sıralanış ile verilen  $L = \{a, b, c, d, e\}$  latisi dağılımlı olmayan latis bir örnektir. “



**Tanım 1.1.6** [6] Aşağıdaki koşulu sağlayan bir  $(L, \leq)$  tam latisine (Goguen anlamında) tamamen dağılımlıdır denir:

Her  $I, J$  indeks kümesi,  $i \in I$  ve  $j \in J$  için  $a_i, b_j \in L$  olmak üzere

$$\left( \bigvee_{i \in I} a_i \right) \wedge \left( \bigvee_{j \in J} b_j \right) = \bigvee_{i, j \in IJ} (a_i \wedge b_j)$$

## 1.2 Fuzzy Kümeler

Bu kısımda fuzzy küme kavramı açıklanacak ve bu kümelerle ilgili özellikler verilecektir.

Klasik anlamda “küme” denildiğinde nesnelere iyi tanımlanmış bir topluluk düşünülür. Günlük hayatta bazen bu tanımlamaların sınırları belirsiz olabilir. Bu durumda bir nesnenin verilen ifadeyi sağlayıp sağlamadığına karar vermekte güçlük çekilebilir.

Örneğin;

$$A = \{\text{boyu 165 cm'den daha uzun olan insanlar}\}$$

$$B = \{\text{Uzun boylu insanlar}\}$$

olarak tanımlandığında, boyu 168 cm olan bir insanın  $A$  kümesine ait olduğu söylenebilmesine rağmen,  $B$ 'ye ait olup olmadığı hakkında karar verilemez. Bu

insanın  $B$  kümesi ile olan ilişkisi ancak derecelendirilebilir. Bu düşünceden hareketle, aşağıda tanımlanan fuzzy küme kavramı ortaya çıkmıştır. Bu çalışma boyunca “ $X$ ” bir küme denildiği zaman;  $X$ 'in boş kümeden farklı klasik bir küme olduğu anlaşılacaktır.

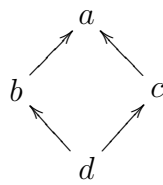
**Tanım 1.2.1** [29]  $X$  bir küme olmak üzere, bir  $\mu : X \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir fuzzy küme  $((X, \mu)$  ikilisine bir fuzzy küme) denir. Burada  $x \in X$  için  $\mu(x)$ ,  $x$ 'in üyelik derecesini temsil eder.

**Örnek 1.2.2**  $X = \mathbb{R}$  olsun. 1'den çok büyük olan sayıları  $\mu(0) = 0$ ,  $\mu(1) = 0$ ,  $\mu(5) = 0,001$ ,  $\mu(120) = 0,01$ ,  $\dots$ ,  $\mu(600) = 0,80$  ve  $n \geq 1000$  için  $\mu(n) = 1$  üyelik dereceleri ile temsil edersek  $(X, \mu)$  “1'den çok büyük olan reel sayıların” bir fuzzy kümesidir.

1967'de Goguen [6] fuzzy küme kavramını  $[0, 1]$ 'den herhangi bir  $L$  tamamen dağılımlı latisine taşımıştır. Şimdi Goguen'nin  $L$ -fuzzy küme tanımını verelim.

**Tanım 1.2.3**  $L$  tamamen dağılımlı bir latis ve  $X$  bir küme olmak üzere,  $X$  üzerindeki bir  $\mu$  fuzzy kümesi  $\mu : X \rightarrow L$  fonksiyonu ile karakterize edilir.

**Örnek 1.2.4**  $L = \{a, b, c, d\}$  “



” sıralanışı ile verilen bir latis ve

$X = \mathbb{Z}_5$  olsun.  $x \in \mathbb{Z}_5$  için

$$\theta(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ c, & x = 1, 2 \\ d, & x = 3 \\ b, & x = 4 \end{cases}$$

ile tanımlanan  $\theta$  bir  $L$ -fuzzy kümedir.

Bu çalışmada  $X$ 'in tüm  $L$ -fuzzy kümelerinin kümesi  $\mathbf{F}(X)$  ile gösterilecektir.  $F(X)$  üzerindeki temel işlemler aşağıdaki tanımda verilmiştir.

**Tanım 1.2.5**  $\mu, \nu \in F(X)$  ve  $L$  latisinin en küçük elemanı  $0$ , en büyük elemanı  $1$  olsun.

1. Eğer her  $x \in X$  için  $\mu(x) \leq \nu(x)$  ise  $\mu$ 'ye,  $\nu$ 'nün bir fuzzy altkümesidir denir ve  $\mu \subseteq \nu$  ile gösterilir.
2.  $\mu = \nu$  olması  $\mu \subseteq \nu$  ve  $\nu \subseteq \mu$  olmasıyla tanımlıdır.  $\mu \subseteq \nu$  ve  $\mu \neq \nu$  ise  $\mu \subset \nu$  ile gösterilir.
3.  $\mu$  ve  $\nu$ 'nün kesişimi (arakesiti)  $\mu \cap \nu$  ile gösterilir ve her  $x \in X$  için

$$(\mu \cap \nu)(x) = \inf\{\mu(x), \nu(x)\} = \mu(x) \wedge \nu(x)$$

şeklinde tanımlanır.

4.  $\mu$  ve  $\nu$ 'nün birleşimi  $\mu \cup \nu$  ile gösterilir ve her  $x \in X$  için

$$(\mu \cup \nu)(x) = \sup\{\mu(x), \nu(x)\} = \mu(x) \vee \nu(x)$$

şeklinde tanımlanır.

5. Her  $x \in X$  için  $\mathbf{1}(x) = 1$  ve  $\mathbf{0}(x) = 0$  ile tanımlanır.

**Örnek 1.2.6** 1.2.4'deki  $\theta$  fuzzy kümesini ve  $X = \mathbb{Z}_5$  kümesi üzerinde

$$\mu(x) = \begin{cases} b, & x = 0, 2, 4 \\ c, & x = 1, 3 \end{cases}$$

$L$ -fuzzy kümesini alalım. Bu durumda  $\mu \cap \theta$  ve  $\mu \cup \theta$  fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi bulunur; Her  $x \in X$  için,  $(\mu \cap \theta)(x) = \mu(x) \wedge \theta(x)$  değerleri bulunur.

$$\begin{aligned} (\mu \cap \theta)(0) &= \mu(0) \wedge \theta(0) = b \wedge a = b \\ (\mu \cap \theta)(1) &= \mu(1) \wedge \theta(1) = c \wedge c = c \\ (\mu \cap \theta)(2) &= \mu(2) \wedge \theta(2) = b \wedge c = d \\ (\mu \cap \theta)(3) &= \mu(3) \wedge \theta(3) = c \wedge d = d \\ (\mu \cap \theta)(4) &= \mu(4) \wedge \theta(4) = b \wedge b = b \end{aligned}$$

Böylece

$$(\mu \cap \theta)(x) = \begin{cases} b, & x = 0, 4 \\ c, & x = 1 \\ d, & x = 2, 3 \end{cases}$$

bir  $L$ -fuzzy kümedir.  $\mu \cup \theta$  fuzzy kümesi de, benzer şekilde hesaplanırsa;

$$(\mu \cup \theta)(x) = \begin{cases} a, & x = 0, 2 \\ c, & x = 1, 3 \\ b, & x = 4 \end{cases}$$

bulunur.

Klasik kümelerin özel fuzzy kümeler olarak düşünülmesinden dolayı yukarıda tanımlanan altküme, kesişim ve birleşim kavramlarının klasikteki tanımlarla uyduğu kolayca görülebilir. Fakat klasik küme teorisindeki tüm özellikler, fuzzy kümeler teorisinde geçerli değildir. Örneğin  $L = [0, 1]$  alındığında  $X$  üzerindeki bir  $\mu$  fuzzy kümesinin tümleyeni  $\mu^c$  ile gösterilir ve her  $x \in X$  için,  $\mu^c(x) = 1 - \mu(x)$  olarak tanımlanır.  $A$  herhangi bir küme olmak üzere klasik kümelerdeki  $A \cap A^c = \emptyset$  özelliğinin karşılığı fuzzy kümelerde korunmamaktadır.

**Örnek 1.2.7**  $\mathbb{Z}$  kümesi ve  $L = [0, 1]$  üzerinde

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in 2\mathbb{Z} \\ \frac{3}{4}, & x \notin 2\mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{fuzzy kümesi için} \quad \mu^c(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & x \in 2\mathbb{Z} \\ \frac{1}{4}, & x \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

ve

$$(\mu \cap \mu^c)(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in 2\mathbb{Z} \\ \frac{1}{4}, & x \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

dir.

Yani  $\mu \cap \mu^c \neq 0$  bulunur. Burada şunu not etmek gerekir ki klasikteki boş kümeyle karşılık 0 fuzzy kümesi, evrensel kümeyle karşılıkta 1 fuzzy kümesi alınır.

## 2 $L$ -FUZZY İDEALLER

Zadeh tarafından “fuzzy küme” kavramı tanımlandıktan sonra, bu yeni kavramın matematiğin diğer dallarına (cebir, topoloji, analiz, v.b) nasıl uygulanabileceği sorusu üzerine bir çok araştırmalar yapılmıştır. 1971’de ilk kez A. Rosenfeld [26] fuzzy küme kavramını cebirsel yapılara taşımıştır. Fuzzy cebirin temelini oluşturan fuzzy gurup kavramı aşağıdaki gibi verilmiştir.

**Fuzzy Gurup**[26]:  $(G, \cdot)$  bir gurup,  $\mu : G \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonu her  $x, y \in G$  için,

1.  $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
2.  $\mu(x) = \mu(x^{-1})$

koşullarını sağlıyorsa  $\mu$ 'ye  $G$ 'nin bir fuzzy gurubu denir.

Daha sonra bu tanım temel alınarak diğer fuzzy cebirsel yapıların (fuzzy normal altgurup, fuzzy halka ve fuzzy ideal) tanımları verilmiş, özellikleri incelenmiştir [2, 4, 8, 26]. Fuzzy altgruplarla ilgili tanım ve özellikler için [18]’den yararlanılabilir.

Bu tezde aksi söylenmedikçe  $(R, +, \cdot)$  değişmeli bir halka,  $(L, \leq, \vee, \wedge)$  en küçük elemanı 0, en büyük elemanı 1 olan tamamen dağılımlı bir latris olarak alınacaktır.

### 2.1 Temel Tanımlar

Bu kısımda çalışmamızın temelini oluşturan  $L$ -fuzzy halka ve  $L$ -fuzzy ideal tanımları ve özellikleri verilecektir.

**Tanım 2.1.1** [18]  $\rho \in F(R)$  olsun. Eğer her  $x, y \in R$  için,

1.  $\rho(x - y) \geq \rho(x) \wedge \rho(y)$
2.  $\rho(xy) \geq \rho(x) \wedge \rho(y)$

koşulları sağlanıyorsa  $\rho$ 'ya bir  $L$ -fuzzy halka denir.

$R$  halkası üzerindeki tüm  $L$ -fuzzy halkaların kümesi  $\mathbf{H}(\mathbf{R})$  ile gösterilecektir.

**Örnek 2.1.2**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  halkası ve  $L=[0,1]$  olmak üzere, her  $n \in \mathbb{Z}$  için

$$\rho(n) = \begin{cases} 1, & n \in 16\mathbb{Z} \\ \frac{1}{3}, & n \in 4\mathbb{Z} - 16\mathbb{Z} \\ 0, & n \notin 4\mathbb{Z} \end{cases}$$

ile tanımlanan  $\rho$  bir fuzzy halkadır.

Liu [11]  $L$ -fuzzy ideal tanımını verdikten sonra bu konuda birçok çalışma yapılmıştır [8, 10, 11, 16, 17]. Şimdi bu tanımları ve  $L$ -fuzzy idealler üzerindeki temel işlemleri vereceğiz.

**Tanım 2.1.3** [18]  $\mu \in F(R)$  olsun. Her  $x, y \in R$  için

1.  $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$
2.  $\mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$

koşulları sağlanıyorsa  $\mu$ 'ye  $R$  üzerinde bir  $L$ -fuzzy ideal denir.

$R$  halkası üzerindeki tüm  $L$ -fuzzy ideallerin kümesi  $\mathbf{I}(\mathbf{R})$  ile gösterilecektir.

**Örnek 2.1.4**  $R = \mathbb{Z}$  ve  $L = [0, 1]$  olarak alınırsa,

$$\mu(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \in 4\mathbb{Z} \\ \frac{1}{4}, & n \in \mathbb{Z} - 4\mathbb{Z} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fuzzy küme bir fuzzy idealdir.

**Tanım 2.1.5** [18]  $\mu, \eta \in I(R)$  olmak üzere  $L$ -fuzzy idealler üzerindeki temel işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır: Her  $r \in R$  için,

1.  $(-\mu)(r) = \mu(-r)$
2.  $(\mu + \eta)(r) = \sup\{\mu(u) \wedge \eta(v) \mid r = u + v, (u, v \in R)\}$

$$3. (\mu \circ \eta)(r) = \begin{cases} \sup\{\mu(u) \wedge \eta(v)\} & r = uv, (u, v \in R) \\ 0 & r \neq uv \end{cases}$$

4.

$$(\mu\eta)(r) = \begin{cases} \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \{\mu(u_i) \wedge \eta(v_i)\}\} & r = \sum_{i=1}^n u_i v_i, (u_i, v_i \in R, n \in \mathbb{N}) \\ 0 & r \neq \sum_{i=1}^n u_i v_i \end{cases}$$

Yukarıda tanımlanan işlemler ile  $\mu, \eta \in I(R)$  olmak üzere  $\mu \cap \eta$ ,  $\mu + \eta$ ,  $\mu\eta$   $L$ -fuzzy ideal olur [18]. Yukarıdaki işlemlerden (4)'ü bir örnek ile açıklayalım.

**Örnek 2.1.6**  $R = \mathbb{Z}_4$  ve  $L = [0, 1]$  olmak üzere

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, 2 \\ \frac{1}{2}, & x = 1, 3 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 2 \\ \frac{1}{5}, & x = 1, 3 \end{cases}$$

O zaman

$$\begin{aligned} (\mu\nu)(0) &= \sup\{\underbrace{\mu(0) \wedge \nu(0)}_{0=0.0}, \underbrace{\mu(2) \wedge \nu(2)}_{0=2.2}, \underbrace{\mu(1) \wedge \nu(1) \wedge \mu(1) \wedge \nu(3), \dots}_{0=1.1+1.3}\} \\ &= \sup\{1 \wedge \frac{1}{3}, 1 \wedge \frac{1}{4}, 1 \wedge \frac{1}{3} \wedge \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{5}, \dots\} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu\nu)(1) &= \sup\{\underbrace{\mu(1) \wedge \nu(1)}_{1=1.1}, \underbrace{\mu(3) \wedge \nu(3)}_{1=3.3}, \underbrace{\mu(1) \wedge \nu(2) \wedge \mu(1) \wedge \nu(3), \dots}_{1=1.2+1.3}\} \\ &= \sup\{\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{5}, \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{5}, \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{4} \wedge \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{5}, \dots\} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu\nu)(2) &= \sup\{\underbrace{\mu(2) \wedge \nu(1)}_{2=2.1}, \underbrace{\mu(2) \wedge \nu(3)}_{2=2.3}, \underbrace{\mu(3) \wedge \nu(2)}_{2=3.2}, \\ &\quad \underbrace{\mu(1) \wedge \nu(1) \wedge \mu(1) \wedge \nu(1), \dots}_{2=1.1+1.1}\} \\ &= \sup\{1 \wedge \frac{1}{5}, 1 \wedge \frac{1}{5}, 1 \wedge \frac{1}{5} \wedge 1 \wedge \frac{1}{5}, \dots\} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mu\nu)(3) &= \sup\{\underbrace{\mu(1) \wedge \nu(3)}_{3=1.3}, \underbrace{\mu(2) \wedge \nu(2) \wedge \mu(1) \wedge \nu(3)}_{3=2.2+1.3}, \\
&\quad \underbrace{\mu(1) \wedge \nu(1) \wedge \mu(1) \wedge \nu(1) \wedge \mu(1) \wedge \nu(1), \dots}_{3=1.1+1.1+1.1}\} \\
&= \sup\{\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{5}, 1 \wedge \frac{1}{4} \wedge \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{5}, \dots\} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

$$\text{Böylece } (\mu\nu)(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = 0, 2 \\ \frac{1}{5}, & x = 1, 3 \end{cases} \text{ bulunur.}$$

Fuzzy idealler ile klasik idealler arasındaki ilişkinin kurulabilmesi için yararlı araçlardan biriside “seviye altkümesi” kavramıdır [18, Tanım 1.1.8].

**Tanım 2.1.7**  $\mu \in F(R)$  olsun. Her  $t \in L$  için

$$\mu_t = \{x \in R \mid \mu(x) \geq t\}$$

kümesine  $\mu$ 'nün  $t$ -seviye kümesi denir.

Özel olarak  $0_R$ ,  $R$  halkasının sıfır elemanı olmak üzere  $t = \mu(0_R)$  alınırsa

$$\mu_\star = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0_R)\}$$

ile gösterilir. Aşağıdaki lemma, fuzzy ideallerin  $R$  halkasının idealleri ile karakterize edilmesini sağlar:

**Lemma 2.1.8** [31]  $\mu \in F(R)$  olsun.  $\mu \in I(R)$  olması için gerek ve yeter koşul  $\mu_t \neq \emptyset$  olacak şekilde her  $t \in L$  için  $\mu_t$  seviye kümesinin  $R$ 'de bir ideal olmasıdır.

*İspat.* ( $\Rightarrow$ ): Her  $x, y \in \mu_t$  için,  $L$ -fuzzy ideal tanımından  $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq t$  olduğundan  $x - y \in \mu_t$  ve benzer şekilde  $r \in R$  için  $\mu(rx) \geq t$  olduğundan  $rx \in \mu_t$  dir. Böylece  $\mu_t$ ,  $R$ 'de bir idealdir.

( $\Leftarrow$ ): Her  $x, y \in R$  için  $x \in \mu_{\mu(x)}$ ,  $y \in \mu_{\mu(y)}$  olup  $x, y \in \mu_{\mu(x) \wedge \mu(y)}$  dir. Ayrıca

$\mu_{\mu(x) \wedge \mu(y)}$ ,  $\mu_{\mu(x)}$   $R$ 'de idealler olduğundan sırasıyla  $x - y \in \mu_{\mu(x) \wedge \mu(x)}$  ve  $xy \in \mu_{\mu(x)}$  elde edilir. Yani  $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$  ve  $\mu(xy) \geq \mu(x)$  ve benzer şekilde  $\mu(xy) \geq \mu(y)$  olur. Böylece  $\mu \in I(R)$  dir.  $\square$

Bu lemma bir fuzzy kümenin fuzzy ideal olup olmadığına karar vermekte oldukça yararlıdır.

**Örnek 2.1.9**  $R = (\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$  üzerinde  $\mu(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{1}{3} & x = 2, 4 \\ \frac{1}{4} & x = 1, 3, 5 \end{cases}$

fuzzy kümesini alalım.

$0 \leq t \leq \frac{1}{4}$  için  $\mu_t = \{x \in \mathbb{Z}_6 \mid \mu(x) \geq t\} = \mathbb{Z}_6$ ,

$\frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{3}$  için  $\mu_t = \{x \in \mathbb{Z}_6 \mid \mu(x) \geq t\} = \{0, 2, 4\} = \langle 2 \rangle$  ve

$\frac{1}{3} < t \leq 1$  için  $\mu_t = \{x \in \mathbb{Z}_6 \mid \mu(x) \geq t\} = \langle 0 \rangle$ , altkümeleri  $\mathbb{Z}_6$  'nin idealleri olduğundan  $\mu$  bir fuzzy idealdir.

Şimdi vereceğimiz teorem fuzzy ideallerin özelliklerini vermektedir.

**Teorem 2.1.10** [18]  $\nu, \mu, \eta \in I(R)$  olsun.  $O$  zaman

1. Her  $r \in R$  için,  $\mu(0) \geq \mu(r)$  dir.
2. Eğer  $R$  birimli bir halka ise her  $r \in R$  için  $\mu(r) \geq \mu(1_R)$  dir.
3.  $\mu \circ \nu \subseteq \eta \Leftrightarrow \mu \cdot \nu \subseteq \eta$ .

*İspat.* (1)ve (2) ispatları tanımdan açıktır. (3)'ün ispatını verelim.

$\mu \circ \nu \subseteq \eta$  olsun. Her  $r \in R$  için,

$$\begin{aligned} (\mu \nu)(r) &= \sup \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \{\mu(u_i) \wedge \nu(v_i)\} \mid r = \sum_{i=1}^n u_i v_i, (u_i, v_i \in R, n \in \mathbb{N}) \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \bigwedge_{i=1}^n (\mu \circ \nu)(u_i v_i) \mid r = \sum_{i=1}^n u_i v_i, (u_i, v_i \in R, n \in \mathbb{N}) \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \eta(u_i v_i) \mid r = \sum_{i=1}^n u_i v_i, (u_i, v_i \in R, n \in \mathbb{N}) \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \eta \left( \sum_{i=1}^n u_i v_i \right) \mid r = \sum_{i=1}^n u_i v_i, (u_i, v_i \in R, n \in \mathbb{N}) \right\} \leq \eta(r) \end{aligned}$$

Tersine eğer  $\mu \nu \subseteq \eta$  ise  $\mu \circ \nu \subseteq \mu \nu$  olduğundan  $\mu \circ \nu \subseteq \eta$  dir.  $\square$

## 2.2 $L$ -Fuzzy Maksimal ve $L$ -Fuzzy Asal İdealler

Literatürde  $L$ -fuzzy maksimal ideal ve  $L$ -fuzzy asal ideal ile ilgili yapılmış bir çok araştırma bulunmaktadır [15, 16, 17, 18, 24, 28, 31]. Bu kavramlar 3. Bölümde kullanılacakları için, burada kısaca değinmek yararlı olacaktır.

**Tanım 2.2.1** [28]  $R$  üzerindeki sabit olmayan fuzzy idealler kümesinin varsa maksimal elemanına  $R$ 'nin bir  $L$ -fuzzy maksimal ideali denir.

Bu tanım ile fuzzy maksimal idealleri bulmak oldukça zordur. U. M. Swamy ve K. L. N. Swamy [28]'de bir  $R$  halkası üzerindeki tüm maksimal ideallerin karakterizasyonunu  $L$  latisi üzerindeki maksimal elemanlar yardımıyla vermişlerdir.

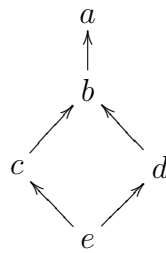
**Teorem 2.2.2**  $\mu \in F(R)$  olsun.  $\mu$ 'nün bir  $L$ -fuzzy maksimal ideal olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ \alpha, & x \notin I \end{cases}$$

olacak şekilde  $R$ 'de bir  $I$  maksimal idelinin ve  $L - \{1\}$  de bir  $\alpha$  maksimal elemanın var olmasıdır.

$L$ -fuzzy maksimal ideallere örnek verelim.

**Örnek 2.2.3**  $R = \mathbb{Z}_6$  ve “



latisini alalım.

$$\mu(x) = \begin{cases} a, & x \in \langle 2 \rangle \\ b, & x \notin \langle 2 \rangle \end{cases}$$

fuzzy ideali,  $\mu_{\star} = \langle 2 \rangle$ ,  $\mathbb{Z}_6$ 'nın bir maksimal ideali ve  $b \in L - \{a\}$  bir maksimal eleman olduğundan  $\mu$  bir  $L$ -fuzzy maksimal idealdir.

**Örnek 2.2.4**  $R = \mathbb{Z}_6$  ve  $L = [0, 1]$  latisini alalım.

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 2 \rangle \\ \frac{1}{2}, & x \notin \langle 2 \rangle \end{cases}$$

fuzzy ideali,  $\frac{1}{2}$ ,  $[0, 1]$ 'de maksimal eleman olmadığı için fuzzy maksimal ideal değildir.

Teorem 2.2.2, fuzzy maksimal idealin varlığını,  $R$ 'nin bir maksimal idealinin ve  $L - \{1\}$ 'de bir maksimal elemanın varlığı ile karakterize eder. Yukarıdaki örnekten hareketle  $L = [0, 1]$ 'in 1'den başka maksimal eleman olmadığı için  $R$  halkasında bir  $L$ -fuzzy maksimal idealin varlığından bahsedilemez. Bu nedenle Mordeson [16, 18],  $L$ -fuzzy maksimal ideal kavramını,  $L - \{1\}$ 'de bir maksimal elemanın varlığından bağımsız olarak “*genelleştirilmiş  $L$ -fuzzy maksimal ideal*” kavramına genişletmiştir [18, Tanım 3.3.4].

**Tanım 2.2.5** [18]  $\mu \in I(R)$  olsun. Eğer

1.  $\mu$  sabit değilse,
2. Herhangi bir  $\nu \in I(R)$  için eğer  $\mu \subseteq \nu$  olması  $\mu_\star = \nu_\star$  yada  $\nu = \chi_R$

olmasını gerektiriyorsa  $\mu$ 'ye bir genelleştirilmiş  $L$ -fuzzy maksimal ideal denir.

Burada  $A \subseteq R$  olmak üzere  $\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$  şeklinde tanımlı karakteristik fonksiyondur. Genelleştirilmiş  $L$ -fuzzy maksimal idealler ile halkanın maksimal idealleri arasındaki ilişki Lemma 2.2.6 ile verilmektedir.

**Lemma 2.2.6** [18]  $\mu$ 'nün  $R$ 'nin bir genelleştirilmiş  $L$ -fuzzy maksimal ideali olması için gerek ve yeter koşul  $\mu(0) = 1$ ,  $|Im\mu| = 2$  ve  $\mu_\star$ 'ın  $R$ 'de maksimal ideal olmasıdır.

Bu lemmada  $Im\mu = \{1, t\}$ ,  $1 \neq t \in L$  şeklinde olup  $t$ 'nin  $L - \{1\}$ 'de bir maksimal eleman olması durumunda  $I = \mu_\star$  dir. Böylece genelleştirilmiş fuzzy maksimal ideal ve fuzzy maksimal ideal kavramlarının çakıştığı gözlemlenir.

**Örnek 2.2.7**  $R = \mathbb{Z}_6$  ve  $L = [0, 1]$  olmak üzere

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 2 \rangle \\ \frac{1}{2}, & x \notin \langle 2 \rangle \end{cases}$$

fuzzy ideali için,  $\mu_\star = \langle 2 \rangle$ ,  $\mathbb{Z}_6$ 'nın bir maksimal ideali olup Lemma 2.2.6'dan  $\mu$  bir genelleştirilmiş  $L$ -fuzzy maksimal idealdir.

Bu tezin çalışma konularından birisi olan Fuzzy Nakayama Lemma için gerekli olan kavramlardan biride fuzzy Jacobson radikalidir.

**Tanım 2.2.8** [9]  $R$  üzerindeki tüm genelleştirilmiş  $L$ -fuzzy maksimal ideallerin arakesatine  $R$ 'nin fuzzy Jacobson radikali denir ve **FJR**( $R$ ) ile gösterilir.

Buna göre  $\mathcal{B}$  genelleştirilmiş fuzzy maksimal ideallerin kümesi olmak üzere

$$FJR(R) = \begin{cases} \bigcap_{\mu \in \mathcal{B}} \mu, & \mathcal{B} \neq \emptyset \\ 1, & \mathcal{B} = \emptyset \end{cases}$$

Üstelik  $R$  birimli, değişmeli bir halka ve  $J(R)$   $R$ 'nin Jacobson radikali olmak üzere

1.  $J(R) = \bigcap_{\mu \in \mathcal{B}} \mu_\star = \left( \bigcap_{\mu \in \mathcal{B}} \mu \right)_\star$  [16, Teorem 3.9],
2.  $FJR(R) = \chi_{J(R)}$  dir.

**Örnek 2.2.9**  $R = \mathbb{Z}_6$  ve  $L = [0, 1]$  olsun .  $\mathbb{Z}_6$  nin tüm maksimal idealleri

$I_1 = \langle 2 \rangle$ ,  $I_2 = \langle 3 \rangle$  olduğundan Lemma 2.2.6 kullanılarak  $\mathbb{Z}_6$ 'nın tüm genelleştirilmiş  $L$ -fuzzy maksimal idealleri  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ , and  $0 \leq \beta_j \leq 1$  olmak üzere her  $r \in R$  için ;

$$\mu_i(r) = \begin{cases} 1, & r \in \langle 2 \rangle \\ \alpha_i, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad v_j(r) = \begin{cases} 1, & r \in \langle 3 \rangle \\ \beta_j, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Böylece  $FJR(R) = \left( \bigcap_i \mu_i \right) \cap \left( \bigcap_j v_j \right)$  ve

$$FJR(R)(r) = \inf \{ \wedge_i \mu_i(r), \wedge_j v_j(r) \} = \begin{cases} 1, & r \in \langle 2 \rangle \cap \langle 3 \rangle = \langle 0 \rangle \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

dir.

Fuzzy cebirdeki önemli kavramlardan olan  $L$ -fuzzy asal idealler, yoğun bir çalışma konusu olup [10, 15, 16, 18, 23], aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 2.2.10** [18]  $\mu$  sabit olmayan bir  $L$ -fuzzy ideal olsun. Eğer herhangi  $\eta, \nu \in I(R)$  için,

$$\nu \circ \eta \subseteq \mu \Rightarrow \nu \subseteq \mu \text{ veya } \eta \subseteq \mu$$

koşulu sağlanıyorsa  $\mu$ 'ye bir  $L$ -fuzzy asal ideal denir.

Aşağıdaki teorem  $R$  halkası üzerindeki  $L$ -fuzzy asal idealleri latisdeki asal elemanlar yardımıyla karakterize eder. Bu nedenle öncelikle asal eleman tanımı verelim.

**Tanım 2.2.11**  $1 \neq \alpha \in L$  olsun. Eğer herhangi  $a, b \in L$  için  $a \wedge b \leq \alpha$  olduğunda  $a \leq \alpha$  veya  $b \leq \alpha$  oluyorsa  $\alpha$ 'ya  $L$ 'nin bir asal elemanı denir.

Örneğin  $L = [0, 1]$ 'de 1'den farklı her eleman asaldır.

**Teorem 2.2.12** [18] (a)  $I, R$ 'de bir asal ideal ve  $\alpha \in L$  bir asal eleman olsun. Her  $r \in R$  için

$$\mu(r) = \begin{cases} 1, & r \in I \\ \alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $\mu$  fuzzy kümesi bir  $L$ -fuzzy asal idealdir.

(b) Tersine her  $L$ -fuzzy asal ideali (a) daki gibi tanımlanır.

$L$ -fuzzy asal ideallerin önemli karakterizasyonlarından biriside fuzzy noktalar (singleton) yardımıyla verilir.

**Tanım 2.2.13** [18]  $X$  herhangi bir küme,  $x \in X$  ve  $r \in L$  olsun.

$$x_r(y) = \begin{cases} r, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlanan  $L$ -fuzzy kümeye bir  $L$ -fuzzy nokta denir.

Bu durumda  $x_r \in F(X)$  veya  $x_r \in X$  ile gösterilir. Ayrıca  $\mu \in F(X)$  için  $x_r \subseteq \mu$  olması  $x_r \in \mu$  ile gösterilir.

Şimdi tezde sıklıkla kullanılacak olan fuzzy noktalarla ilgili işlemler verilecektir.

Her  $x_r, y_s \in F(R)$ ,  $(x, y \in R, r, s \in L)$  için,

$$(x_r + y_s)(w) = \begin{cases} r \wedge s, & w = x + y \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$$(x_r \circ y_s)(w) = (x_r y_s)(w) = \begin{cases} r \wedge s, & w = xy \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Buna göre  $x_r + y_s = (x + y)_{r \wedge s}$  ve  $x_r y_s = (xy)_{r \wedge s}$  dir.

Aşağıdaki teorem klasik cebirdeki asal ideal tanımıyla, fuzzy asal ideallerin fuzzy noktalar cinsinden tanımlanması arasındaki benzerliği ortaya koyması açısından önemlidir.

**Teorem 2.2.14** [18]  $\mu \in F(R)$  olsun.  $\mu$ 'nün bir  $L$ -fuzzy asal ideal olması için gerek ve yeter koşul

1.  $\mu$  sabit değildir,
2. Her  $x_r, y_s \in R$  ( $x, y \in R$ , ve  $r, s \in L$ ) için,

$$x_r y_s \in \mu \Rightarrow x_r \in \mu \quad \text{yada} \quad y_s \in \mu$$

olmasıdır.

*İspat.* ( $\Leftarrow$ ):  $\nu, \eta \in I(R)$ ,  $\nu \circ \eta \subseteq \mu$  ve  $\nu \not\subseteq \mu$  olsun.

Bu durumda  $r = \nu(x) \not\subseteq \mu(x)$  olacak şekilde bir  $x \in R$  ve  $r \in L$  vardır.  $y \in R$  ve  $\eta(y) = t$  diyelim. Eğer her  $z \in R$  için,  $z = xy$  ise

$$(x_r \circ y_t)(xy) = \sup_{xy=uv} \{x_r(u) \wedge y_t(v)\} = r \wedge t = \nu(x) \wedge \eta(y) \leq (\nu \circ \eta)(xy) \leq \mu(xy)$$

dir.

Eğer  $z \neq xy$  ise  $(x_r \circ y_t)(z) = 0 \leq \mu(z)$ . Böylece  $(x_r \circ y_t) \subseteq \mu$  dir. Buradan  $(x_r y_t) \subseteq \mu$  ve hipotezden  $x_r \subseteq \mu$  veya  $y_t \subseteq \mu$  olur.  $x_r \subseteq \mu \Rightarrow \nu(x) = r \leq \mu(x)$  çelişki verir.

Bu nedenle  $y_t \subseteq \mu$  olmalıdır. O zaman  $\eta(y) = t \leq \mu(y) \Rightarrow \eta \subseteq \mu$  olur. Böylece  $\mu$  bir  $L$ -fuzzy asal idealdir.

( $\Rightarrow$ ):  $\mu$ ,  $L$ -fuzzy asal ideal olsun.  $(x_r \circ y_t) \subseteq \mu$  olacak şekilde  $x_r, y_t \in R$   $L$ -fuzzy noktalarını alalım.

$z \in R$  için,

$$(\nu)(z) = \begin{cases} r, & z \in \langle x \rangle \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$(\eta)(z) = \begin{cases} t, & z \in \langle y \rangle \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $\nu$  ve  $\eta$  fuzzy kümelerinin  $L$ -fuzzy idealler olduğu açıktır.

$u \in \langle x \rangle$  ve  $v \in \langle y \rangle$  olmak üzere  $z \neq uv$  ise  $(\nu \circ \eta)(z) = 0 \leq \mu(z)$  dir.

Şimdi  $z = uv$  olsun.  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $b, c \in R$  olmak üzere  $u = nx + xb$  ve  $v = mx + yc$  olduğundan

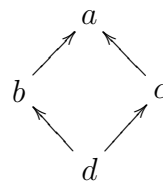
$$\begin{aligned} (\nu \circ \eta)(z) &= \sup_{z=uv} \{\nu(u) \wedge \eta(v)\} = r \wedge t \leq \mu(xy) \leq \mu(xyd) \wedge \mu(mnxy) \\ &\leq \mu(xyd + mnxy) = \mu(z) \end{aligned}$$

dir. Böylece  $\nu \circ \eta \subseteq \mu$  olur.  $\mu$  fuzzy asal ideal olduğundan  $\nu \subseteq \mu$  veya  $\eta \subseteq \mu$  dir.

Bu ise  $x_r(x) = r = \nu(x) \leq \mu(x)$  veya  $y_t(y) = t = \eta(y) \leq \mu(y)$  olmasını gerektirir.

Yani,  $x_r \in \mu$  veya  $y_t \in \mu$  olur.  $\square$

**Örnek 2.2.15**  $R = \mathbb{Z}_3$  ve  $L = \{a, b, c, d\}$  “



” latisi olsun.

$\xi(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ c, & x = 1, 2 \end{cases}$  ile tanımlanan fuzzy küme  $R$ 'de bir  $L$ -fuzzy asal idealdir.

Son olarak 3. Bölümde kullanılacak olan “ bir fuzzy kümenin ürettiği fuzzy ideal” kavramını verelim.

**Tanım 2.2.16** [28]  $\xi \in F(R)$  alalım. Her  $w \in R$  için

$$\langle \xi \rangle (w) = \inf_{\xi \subseteq \eta} \eta(w), \quad \eta \in I(R)$$

ile tanımlanan  $\langle \xi \rangle$  fuzzy kümesine  $\xi$ 'nin ürettiği  $L$ -fuzzy ideal denir.

Özel olarak,  $\xi = x_t$ , ( $x \in R, t \in L$ ) alırsak o zaman her  $w \in R$  için

$$\langle x_t \rangle (w) = \begin{cases} t, & w \in \langle x \rangle \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir.

### 3 L-FUZZY MODÜLLER

Bu bölümde  $R$  değişmeli bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olarak alınacaktır. Kısım 3.2 ve 3.3' de  $L$ -fuzzy asal altmodül kavramı tanıtılmış ve bunların karakterizasyonuna ilişkin özgün sonuçlar elde edilmiştir. Kısım 3.4' de ise Fuzzy Nakayama Lemma'nın değişik bir ispatı verilmiştir.

#### 3.1 Temel Tanımlar

Fuzzy modül kavramı ilk kez F. Z. Pan [25] tarafından  $L = [0, 1]$  üzerinde tanımlanmış ve Zahedi [22] tarafından  $L$ -fuzzy modül kavramına genişletilmiştir.

**Tanım 3.1.1** [22]  $\theta \in F(M)$  olsun. Eğer her  $x, y \in M$  ve  $r \in R$  için;

1.  $0_M$ ,  $M$ 'nin sıfır elemanı olmak üzere  $\theta(0_M) = 1$  dir,
2.  $\theta(x - y) \geq \theta(x) \wedge \theta(y)$  dir,
3.  $\theta(rx) \geq \theta(x)$  dir,

koşulları sağlanıyorsa  $\theta$ 'ya bir  $L$ -fuzzy modül denir.

Çalışmamızda  $M$ ,  $R$ -modülü üzerindeki tüm  $L$ -fuzzy modüllerin kümesi  $\mathbf{S}(M)$  ile gösterilecektir.

**Örnek 3.1.2**  $R = \mathbb{Z}$ ,  $M = \mathbb{Z}_6$  olsun.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{1}{3}, & x = 2, 4 \\ \frac{1}{4}, & x = 1, 3, 5 \end{cases}$$

bir  $L$ -fuzzy modüldür; (2.) ve (3.)'üncü koşulların işleyişini bir örnek ile açıklamak üzere,  $x = 5$ ,  $y = 2 \in M$ ,  $r = 11 \in R$  alınırsa,

$$\theta(x - y) = \frac{1}{4} = \theta(x) \wedge \theta(y) \quad \text{ve} \quad \theta(rx) = \frac{1}{4} = \theta(x)$$

dir.

Yukarıdaki tanımda  $M = R$  alınırsa,

$$\theta \in S(R) \Leftrightarrow \theta \in I(R) \quad \text{ve} \quad \theta(0) = 1$$

denkliği bulunur. Ayrıca fuzzy modüller ile  $M$ 'nin altmodülleri arasındaki bağlantı fuzzy ideallerdekine benzer olarak seviye kümeleri ile kurulur.

$\theta \in S(M)$  ve  $t \in L$  olsun.

$$\theta_t = \{x \in M \mid \theta(x) \geq t\}$$

kümesine  $\theta$ 'nın  $t$ -seviye kümesi denir. Özel olarak  $\theta_{\theta(0)}$ ,

$$\theta_\star = \{x \in M \mid \theta(x) = \theta(0_M)\}$$

ile gösterilir.

**Lemma 3.1.3** [22]  $\theta \in F(M)$  ve  $\theta(0) = 1$  olsun.  $\theta \in S(M)$  olması için gerek ve yeter koşul  $\theta_t \neq \emptyset$  olacak şekilde her  $t \in L$  için  $\theta_t$  seviye kümesinin  $M$ 'de bir altmodül olmasıdır.

*İspat.* Lemma 2.1.8'e benzer şekilde yapılır. □

Aşağıda halka ve modül üzerinde tanımlı fuzzy kümeler arasındaki temel işlemler verilecektir.

**Tanım 3.1.4**  $\mu \in F(R)$  ve  $\theta \in F(M)$  olsun. Bileşke ve çarpım işlemleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(\mu \circ \theta)(w) = \begin{cases} \sup\{\mu(r) \wedge \theta(x)\} , & w = rx, (r \in R, x \in M) \\ 0 & , \quad w \neq rx \end{cases}$$

$$(\mu\theta)(w) = \begin{cases} \sup_w \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu(r_i) \wedge \theta(x_i) \right\} , & w = \sum_{i=1}^n r_i x_i \quad (r_i \in R, x_i \in M) \\ 0 & , \quad w \neq \sum_{i=1}^n r_i x_i \end{cases}$$

$(\mu\theta)(w)$ 'yı daha açık bir şekilde

$$\begin{aligned} (\mu\theta)(w) &= \sup\{\inf\{\mu(r_1) \wedge \mu(r_2) \wedge \cdots \wedge \mu(r_n) \wedge \theta(x_1) \wedge \theta(x_2) \wedge \cdots \wedge \theta(x_n)\} \\ &\quad | w = \sum_{i=1}^n r_i x_i, (r_i \in R, x_i \in M), n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigvee_{i=1}^n \{\bigwedge_{i=1}^n \{\mu(r_i) \wedge \theta(x_i) | w = \sum_{i=1}^n r_i x_i, (r_i \in R, x_i \in M), n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

olarak ifade edebiliriz.  $\mu \circ \theta$ ,  $\mu\theta$  çarpımının özel bir durumu olup  $\mu \circ \theta \subseteq \mu\theta$  dır.

Ayrıca Teorem 2.1.10-(4)'e benzer olarak  $\mu \in I(R)$  ve  $\theta, \beta \in S(M)$  için

$$\mu \circ \theta \subseteq \beta \Leftrightarrow \mu\theta \subseteq \beta \text{ dir.}$$

**Örnek 3.1.5**  $R = \mathbb{Z}$  ve  $M = \mathbb{Z}_6$  ve  $L = [0, 1]$  olmak üzere

$$\mu(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & r \in 2\mathbb{Z} \\ \frac{1}{5}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{1}{3}, & x = 2, 4 \\ \frac{1}{4}, & x = 1, 3, 5 \end{cases} \quad \text{ile}$$

tanımlayalım.  $\mu \in F(R)$  ve  $\theta \in F(M)$  ve

$$\begin{aligned} (\mu\theta)(0) &= \sup\{\underbrace{\mu(0) \wedge \theta(1)}_{0=0.1}, \underbrace{\mu(2) \wedge \theta(3)}_{0=2.3}, \underbrace{\mu(2) \wedge \theta(1) \wedge \mu(-1) \wedge \theta(2), \dots}_{0=2.1-1.2}\} \\ &= \sup\{\frac{1}{2} \wedge 1, \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{4} \wedge \frac{1}{5}, \dots\} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu\theta)(1) &= \sup\{\underbrace{\mu(1) \wedge \theta(1)}_{1=1.1}, \underbrace{\mu(7) \wedge \theta(1)}_{1=7.1}, \underbrace{\mu(2) \wedge \theta(2) \wedge \mu(-1) \wedge \theta(3), \dots}_{1=2.2-1.3}\} \\ &= \sup\{\frac{1}{4} \wedge \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \wedge \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \wedge \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{5} \wedge \frac{1}{4}, \dots\} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu\theta)(2) &= \sup\{\underbrace{\mu(2) \wedge \theta(1)}_{2=2.1}, \underbrace{\mu(2) \wedge \theta(4)}_{2=2.4}, \underbrace{\mu(2) \wedge \theta(2) \wedge \mu(-1) \wedge \theta(2), \dots}_{2=2.2-1.2}\} \\ &= \sup\{\frac{1}{2} \wedge 1, \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{4} \wedge \frac{1}{5}, \dots\} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

⋮

$$\text{Böylece } (\mu\theta)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{3}, & x = 2, 4 \\ \frac{1}{5}, & x = 1, 3, 5 \end{cases} \quad \text{dir.}$$

**Teorem 3.1.6** [22]  $\mu \in I(R)$ ,  $\mu(0) = 1$  ve  $\theta \in S(M)$  ise  $\mu\theta \in S(M)$  dir.

Şimdi fuzzy noktalar ile fuzzy modüller arasındaki temel işlemleri tanımlayacağız;  
 $r_t \in R$ ,  $x_s \in M$ ,  $\theta \in S(M)$  ve  $w \in M$  için,

$$r_t \cdot x_s = (rx)_{t \wedge s}$$

ve

$$(r_t \circ \theta)(w) = (r_t \theta)(w) = \begin{cases} \sup\{t \wedge \theta(x)\} , & w = rx, (r \in R, x \in M) \\ 0 & , \quad w \neq rx \end{cases}$$

dir.

**Uyarı.**  $\theta \in S(M)$  ve  $x_t \in M$  için eğer  $x_t \subseteq \theta$  ise  $x_t \in \theta$  olarak yazacağız.

Fuzzy nokta ve fuzzy modülün çarpımına bir örnek verelim.

**Örnek 3.1.7**  $R = \mathbb{Z}$  ve  $M = \mathbb{Z}_6$  olmak üzere  $2_{\frac{1}{2}} \in R$  fuzzy noktasını ve

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 , & x = 0 \\ \frac{1}{3} , & x = 2, 4 \\ \frac{1}{4} , & x = 1, 3, 5 \end{cases}$$

fuzzy modülünü alalım.

$$\begin{aligned} (2_{\frac{1}{2}} \circ \mu)(2) &= \sup\{\underbrace{2_{\frac{1}{2}}(2) \wedge \mu(1)}_{2=2.1}, \underbrace{2_{\frac{1}{2}}(2) \wedge \mu(4)}_{2=2.4}, \underbrace{2_{\frac{1}{2}}(1) \wedge \mu(2)}_{2=1.2}, \underbrace{2_{\frac{1}{2}}(5) \wedge \mu(4)}_{2=5.4} \dots\} \\ &= \sup\{\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{3}, 0 \wedge \frac{1}{3}, 0 \wedge \frac{1}{3}, \dots\} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Diğer noktadaki değerlerde benzer şekilde hesaplanırsa,

$$(2_{\frac{1}{2}} \circ \mu)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} , & x = 0 \\ \frac{1}{3} , & x = 2, 4 \\ 0 , & x = 1, 3, 5 \end{cases} \quad \text{bulunur.}$$

**Lemma 3.1.8** [22]  $\theta \in S(M)$  ve  $r_t \in R$  için  $r_t \circ \theta = \langle r_t \rangle \circ \theta$  dir.

### 3.2 $L$ -Fuzzy Asal Altmodüller

Bu kısımda  $R$  birimli değişmeli bir halka ve  $M$  birimsel bir  $R$ -modül olarak alınacaktır.

**Tanım 3.2.1**  $\theta, \eta \in S(M)$  olsun.  $\eta \subseteq \theta$  ve  $\eta \neq \theta$  ise  $\eta$ 'ya  $\theta$ 'nın bir alt-modülü denir.

Özel olarak  $\theta = \chi_M$  ise  $\eta$ 'ya  $M$ 'nin bir fuzzy altmodülü denir.

$\theta$ 'nın bütün fuzzy altmodüllerinin kümesini  $\mathbf{S}(M)$  ile göstereceęiz.

Fuzzy asal altmodüller [12]'de  $L = [0, 1]$  alınarak tanımlanmıştır. Bu kısımda,  $L$  herhangi bir tam latis olmak üzere  $L$ -fuzzy asal altmodül tanımlanmış ve [12]'dekine benzer bir karakterizasyon verilmiştir.

**Tanım 3.2.2**  $\theta \in S(M)$  ve  $\nu \in S_\theta(M)$  olsun. Eğer her  $r_t \in R$  ve  $x_s \in M$  için

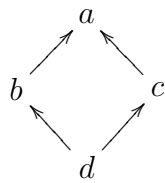
$$r_t x_s \in \nu \Rightarrow x_s \in \nu \quad \text{veya} \quad r_t \theta \subseteq \nu$$

koşulu sağlanıyorsa  $\nu$ 'ye  $\theta$ 'nın bir  $L$ -fuzzy asal altmodülü denir.

Özel olarak  $\theta = \chi_M$  alınırsa,  $\nu$ 'ye  $M$ 'nin bir  $L$ -fuzzy asal altmodülü denir.

Ayrıca  $M = R$  alınırsa  $L$ -fuzzy asal altmodüller ile  $L$ -fuzzy asal ideallerin çakıştığını gözlemleyebiliriz.

**Örnek 3.2.3**  $M = R = \mathbb{Z}_3$  ve “



” latisi olsun.  $\nu(m) = \begin{cases} a, & m = 0 \\ b, & m = 1, 2 \end{cases}$  fuzzy kümesi  $\mathbb{Z}_3$ 'ün bir  $L$ -fuzzy asal altmodülüdür.

Gerçektende her  $r_t \in R$  ve  $x_s \in M$  için  $r_t \cdot x_s \in \nu$  olduğunda  $x_s \in \nu$  veya  $r_t \chi_M \subseteq \nu$  olur.  $0_a, 0_b, 0_c, 0_d, 1_b, 1_d, 2_b, 2_d \in \nu$  olduğundan bu noktalar için  $r_t \cdot x_s \in \nu$  olduğu durumlar açıktır. Bu nedenle  $\nu$ 'nin kapsamadığı fuzzy noktaları incelemek yeterli olacaktır. Yani  $1_a, 1_c, 2_a, 2_c \notin \nu$  için işlemleri bir tablo ile verirsek;

$r_t \in R$	$x_s \in M$	$r_t.x_s$	$x_s \in \nu$	$r_t\chi_M \subseteq \nu$
$0_a$	$1_a$	$0_a \cdot 1_a = 0_a \in \nu$	-	$0_a\chi_M \subseteq \nu$
	$1_c$	$0_c \in \nu$	-	$0_a\chi_M \subseteq \nu$
	$2_a$	$0_a \in \nu$	-	$0_a\chi_M \subseteq \nu$
	$2_c$	$0_c \in \nu$	-	$0_a\chi_M \subseteq \nu$
$0_b, 0_c, 0_d$ için	1 . sıradaki ile benzerdir			
$1_a$	$1_a$	$1_a \notin \nu$	-	-
	$1_c$	$1_c \notin \nu$	-	-
	$2_a$	$2_a \notin \nu$	-	-
	$2_c$	$2_c \notin \nu$	-	-
$1_b$	$1_a$	$1_b \in \nu$	-	$1_b\chi_M \subseteq \nu$
	$1_c$	$1_d \in \nu$	-	$1_b\chi_M \subseteq \nu$
	$2_a$	$2_b \in \nu$	-	$1_b\chi_M \subseteq \nu$
	$2_c$	$2_d \in \nu$	-	$1_b\chi_M \subseteq \nu$
$1_c$	$1_a$	$1_c \notin \nu$	-	-
	$1_c$	$1_c \notin \nu$	-	-
	$2_a$	$2_c \notin \nu$	-	-
	$2_c$	$2_c \notin \nu$	-	-
$1_d$ için	$1_b$ satırındaki ile benzerdir			
$2_a$	$1_a$	$2_a \notin \nu$	-	-
	$1_c$	$2_c \notin \nu$	-	-
	$2_a$	$1_a \notin \nu$	-	-
	$2_c$	$1_c \notin \nu$	-	-
$2_b$	$1_a$	$2_b \in \nu$	-	$2_b\chi_M \subseteq \nu$
	$1_c$	$2_d \in \nu$	-	$2_b\chi_M \subseteq \nu$
	$2_a$	$1_b \in \nu$	-	$2_b\chi_M \subseteq \nu$
	$2_c$	$1_d \in \nu$	-	$2_b\chi_M \subseteq \nu$
$2_c$	$1_a$	$2_c \notin \nu$	-	-
	$1_c$	$2_c \notin \nu$	-	-
	$2_a$	$1_c \notin \nu$	-	-
	$2_c$	$1_c \notin \nu$	-	-
$2_d$ için	$1_b$ satırındaki ile benzerdir			

Bu örnekten de görülebileceği gibi bir fuzzy altmodülün asal olup olmadığına karar vermek oldukça zordur. Bu yüzden fuzzy asal altmodüllerin karakterizasyonuna ihtiyaç duyulmuştur. Öncelikle cebirdeki asal altmodül tanımını hatırlayalım.

**Asal Altmodül [5]:**  $R$  birimli, değişmeli bir halka,  $M$  birimsel bir  $R$ -modül ve  $N$ ,  $M$ 'nin öz altmodülü olsun.  $r \in R$  ve  $m \in M$  olmak üzere  $rm \in N$  iken  $m \in N$  veya  $rM \subseteq N$  oluyorsa  $N$ 'ye  $M$ 'nin asal altmodülü denir.

Şimdi vereceğimiz teorem  $L$ -fuzzy asal altmodülleri,  $M$ 'nin asal altmodülleri ile ilişkilendirme açısından önemlidir.

**Teorem 3.2.4 [1]**  $\theta \in S(M)$  ve  $\nu \in S_\theta(M)$  olsun. Eğer  $\nu$ ,  $\theta$ 'nın bir  $L$ -fuzzy asal altmodülü ve  $t \in \text{Im}\theta$  için  $\nu_t \neq \theta_t$  ise  $\nu_t$ ,  $\theta_t$ 'nin bir asal altmodülüdür.

Özel olarak  $\nu$ ,  $M$ 'nin fuzzy asal altmodülü ise  $\nu_*$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodüldür. Aşağıdaki teorem [12, Teorem 3.12]'nin bir  $L$  tam latisine genellemesi olup bu tezde elde edilen özgün sonuçlardan birisidir.

**Teorem 3.2.5 [1]**  $N$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodülü ve  $\alpha \in L$  bir asal eleman olsun. Her  $x \in M$  için

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & x \in N \\ \alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fuzzy küme  $M$ 'nin bir  $L$ -fuzzy asal altmodülüdür. Tersine  $M$ 'nin her  $L$ -fuzzy asal altmodülü yukarıdaki gibi elde edilir.

*İspat.*  $N$ ,  $M$ 'nin asal altmodülü ve  $\alpha \in L$  asal eleman olsun.  $N \neq M$  olduğundan  $\nu$ 'nün sabit olmayan bir  $L$ -fuzzy altmodül olduğu açıktır.  $\nu$ 'nün asallığı için;  $r_t \in R$ ,  $x_s \in M$ ,  $r_t x_s \in \nu$  ve  $x_s \notin \nu$  olsun.  $r_t \chi_M \subseteq \nu$  olduğunu göstermeliyiz.

Eğer  $w \in M$  için,  $r_t \chi_M(w) = 0 \Rightarrow r_t \chi_M \subseteq \nu$  olur.

Eğer  $w = rm$  olacak şekilde  $m \in M$  varsa  $r_t \chi_M(w) = t$  dir.

Şimdi  $t \leq \nu(rm)$  olduğunu gösterelim.

Eğer  $\nu(rm) = 1$  ise o zaman 1 en büyük eleman olduğundan  $r_t\chi_M(w) = t \leq \nu(rm) \Rightarrow r_t\chi_M \subseteq \nu$

Eğer  $\nu(rm) = \alpha$  ise o zaman  $r_tx_s = (rx)_{t\wedge s} \in \nu \Rightarrow t \wedge s \leq \nu(rx)$  dir. Bu durumda  $\nu(rx) = 1$  ise  $rx \in N$ ,  $x \notin N$  ve  $N$  asal altmodül olduğundan  $rM \subseteq N$  olur.

O zaman  $\forall m \in M$  için  $\nu(rm) = 1$  olur ki bu  $\nu(rm) = \alpha$  kabulümüz ile çelişir. Buradan  $\nu(rx) = \alpha$  dır.  $r_tx_s = (rx)_{t\wedge s} \in \nu \Rightarrow t \wedge s \leq \nu(rx) = \alpha$  ve  $s \not\leq \alpha \Rightarrow t \leq \alpha = \nu(rm) \Rightarrow r_t\chi_M \subseteq \nu$  olur.

Şimdi tersine  $\nu$   $M$ 'nin bir  $L$ -fuzzy asal altmodülü olsun.

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & x \in N \\ \alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $N$  asal altmodülü ve  $L$ 'de bir  $\alpha$  asal elemanın var olduğunu gösterelim.

Öncelikle iddiamız  $\nu_*$ 'in,  $M$ 'nin asal altmodülü olduğudur. Gerçekten  $\nu$  sabit olmadığından  $\nu_* = \{x \in M | \nu(x) = \nu(0_M) = 1\} \neq M$  dir.  $r \in R$ ,  $m \in M$ ,  $rm \in \nu_*$  olsun. Yani  $(rm)_{\nu(0_M)} \in \nu$  dir.

$(rm)_{\nu(0_M)} = r_{\nu(0_M)}m_{\nu(0_M)} \in \nu$  ve  $\nu$  fuzzy asal altmodül olduğundan  $r_{\nu(0_M)}\chi_M \subseteq \nu$  veya  $m_{\nu(0_M)} \in \nu$  dir. Eğer  $m_{\nu(0_M)} \in \nu$  ise  $\nu(0_M) \leq \nu(m)$  ve böylece  $m \in \nu_*$  olur. Eğer  $r_{\nu(0_M)}\chi_M \subseteq \nu$  ise her  $m \in M$  için  $\nu(0_M) \leq \nu(rm)$ , buradan  $rm \in \nu_*$  yani  $rM \subseteq \nu_*$  olur. Böylece  $\nu_*$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodülüdür.

Şimdi  $\nu_* = N$  diyelim. Bu durumda her  $x \in N$  için  $\nu(x) = 1$  olur.

Şimdi  $\nu'$  nün sadece iki değer aldığını gösterelim;  $\nu_* \neq M$  olduğundan  $z \notin \nu_*$  olacak şekilde bir  $z \in M$  vardır. Her  $y \notin \nu_*$  için  $\nu(y) = \nu(z)$  olduğunu gösterelim.

$z_1 \notin \nu$  ve  $z_{\nu(z)} = z_1 1_{\nu(z)} \in \nu \Rightarrow 1_{\nu(z)}\chi_M \subseteq \nu$  yani her  $w \in M$  için

$1_{\nu(z)}\chi_M(w) \leq \nu(w)$  ve özel olarak  $w = y = 1.y$  alırsak  $1_{\nu(z)}\chi_M(y) = \nu(z) \leq \nu(y)$  olur. Benzer şekilde  $\nu(y) \leq \nu(z)$  olduğu da gösterilir.

Böylece  $\nu(y) = \nu(z)$  bulunur.

Bir sonraki adım ise  $\nu(z) = \alpha$  dersek  $\alpha$ 'nın  $L$  latisinde bir asal eleman olduğunun gösterilmesi olacaktır.

$t \wedge s \leq \alpha$  ve  $s \not\leq \alpha$  olsun.  $z \notin \nu_*$  olduğundan  $z_s \notin \nu$  dir. Ayrıca  $\nu'$ 'nün asallığından

$$1_t z_s = z_{t\wedge s} \in \nu \Rightarrow 1_t\chi_M \subseteq \nu$$

elde edilir. Böylece her  $w \in M$  için  $1_t \chi_M(w) \leq \nu(w)$  özel olarak  $w = z$  alırsak  $t \leq \nu(z) = \alpha$  bulunur.  $\square$

Bu teorem ile verilen bir  $L$ -fuzzy modülün asal olup olmadığını anlamak kolaylaşmıştır. Örnek 3.2.3'de tanımlanan  $\theta$ 'nin asal olduğunu  $N = 0$ 'ın,  $M$ 'de asal ve  $b$ 'nin  $L$ 'de bir asal eleman olmasından kolaylıkla görebiliriz. Başka bir örnek aşağıda verilmiştir.

**Örnek 3.2.6**  $R = M = \mathbb{Z}$ ,  $L = [0, 1]$  ve

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in 3\mathbb{Z} \\ \frac{1}{4}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun.  $3\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}$ 'nin bir asal altmodülü ve  $\frac{1}{4}$  asal eleman olduğundan  $\mu$ ,  $\mathbb{Z}$ 'nin bir fuzzy asal altmodülüdür.

### 3.3 $R$ -Modül Homomorfizmaları Altında Fuzzy Asal Alt-modüller

İlk olarak  $L$ -fuzzy kümelerin görüntü ve ters görüntü kümelerinin tanımını verelim. Bu kısımda  $M$  ve  $M_1$   $R$ -modüller olarak alınacaktır.

**Tanım 3.3.1**  $f : M \rightarrow M_1$  bir  $R$ - modül homomorfizması,  $\theta \in F(M)$  ve  $\beta \in F(M_1)$  olsun.  $f(\theta) \in F(M_1)$  ve  $f^{-1}(\beta) \in F(M)$ , her  $w \in M_1$  için

$$f(\theta)(w) = \begin{cases} \sup_{m \in f^{-1}(w)} \theta(m), & f^{-1}(w) \neq \emptyset \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve  $u \in M$  için

$$f^{-1}(\beta)(u) = \beta(f(u))$$

olarak tanımlanır.

**Örnek 3.3.2**  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$   $f(x) = 2x$  ile tanımlanan modül homomorfizması ve

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \in 3\mathbb{Z} \\ \frac{1}{4} & x \notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$$

$\mathbb{Z}$  üzerinde bir fuzzy küme olsun.

$$\begin{aligned} f(\theta)(0) &= \sup\{\theta(0) \mid f(0) = 0\} = 1 \\ f(\theta)(1) &= 0, \quad (f^{-1}(1) = \emptyset) \\ f(\theta)(2) &= \sup\{\theta(1) \mid f(1) = 2\} = \frac{1}{4} \\ f(\theta)(3) &= 0, \quad (f^{-1}(3) = \emptyset) \\ f(\theta)(4) &= \sup\{\theta(2) \mid f(2) = 4\} = \frac{1}{4} \\ f(\theta)(5) &= 0, \quad (f^{-1}(5) = \emptyset) \\ f(\theta)(6) &= \sup\{\theta(3) \mid f(3) = 6\} = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$f(\theta)(x) = \begin{cases} 1 & x \in 6\mathbb{Z} \\ \frac{1}{4} & x \in 2\mathbb{Z} - 6\mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

bulunur.

Teorem 3.3.3 ve Teorem 3.3.5  $L$ -fuzzy asal altmodüllerin  $R$ -modül homomorfizmaları altındaki görüntülerinin hangi durumlarda tekrar fuzzy asal altmodül olduklarını ifade eder.

**Teorem 3.3.3**  $f : M \rightarrow M_1$   $R$ -modül epimorfizması olsun. Eğer  $\theta$ ,  $M$ 'nin bir  $L$ -fuzzy asal altmodülü ve  $\chi_{\ker f} \subseteq \theta$  ise o zaman  $f(\theta)$ ,  $M_1$ 'in bir  $L$ -fuzzy asal altmodülüdür.

*İspat.*  $f$  örten olduğundan  $f(\theta)(w) = \sup_{w=f(m)} \theta(m)$  dir.

*İddia 1:*  $f(\theta) \in S(M_1)$ .

(i)  $f(\theta)(0_{M_1}) = 1$  olduğu açıktır.

(ii) Her  $\omega_1, \omega_2 \in M_1$  için,

$$\begin{aligned} f(\theta)(\omega_1) \wedge f(\theta)(\omega_2) &= \left[ \sup_{\omega_1=f(m_1)} \theta(m_1) \right] \wedge \left[ \sup_{\omega_2=f(m_2)} \theta(m_2) \right] = \sup_{\omega_1, \omega_2} \{ \theta(m_1) \wedge \theta(m_2) \} \\ &\leq \sup_{\omega_1=f(m_1), \omega_2=f(m_2)} \theta(m_1 - m_2) \leq \sup_{\omega_1 - \omega_2 = f(m_1 - m_2)} \theta(m_1 - m_2) \\ &= f(\theta)(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned}$$

(iii) Her  $\omega_1 \in M_1$  ve  $r \in R$ ,

$$\begin{aligned} f(\theta)(\omega_1) &= \sup_{\omega_1=f(m)} \theta(m) \leq \sup_{\omega_1=f(m)} \theta(rm) = \sup_{r\omega_1=r f(m)=f(rm)} \theta(rm) \\ &= f(\theta)(r\omega_1). \end{aligned}$$

Böylece  $f(\theta) \in S(M_1)$  dir.

*İddia 2:*  $f(\theta)$   $M_1$ 'in  $L$ -fuzzy asal altmodülüdür.

$\theta$ ,  $M$ 'nin bir  $L$ -fuzzy asal altmodülü olduğundan, Teorem 3.2.5'den  $N = \theta_*$ ,  $M$ 'nin bir asal altmodülü ve  $\alpha$ ,  $L$ 'de bir asal eleman olmak üzere

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \theta_* \\ \alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde dir. Buradan  $y \in M_1$  için,

$$f(\theta)(y) = \begin{cases} 1, & y \in f(\theta_*) \\ \alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulunur. Bu nedenle sadece  $f(\theta_*)$ 'in,  $M_1$ 'in bir asal altmodülü olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

$r \in R, \omega \in M_1, r\omega \in f(\theta_*)$  olsun. Bu durumda  $r\omega = f(z)$  olacak şekilde bir  $z \in \theta_*$  vardır ve  $f$  bir epimorfizma olduğundan  $r\omega = rf(m) = f(z)$  olacak şekilde bir  $m \in M$  vardır. Ayrıca  $\chi_{\ker f} \subseteq \theta \Rightarrow \ker f \subseteq \theta_*$  olduğundan  $rm \in \theta_*$  dir.  $\theta_*$  asal altmodül olduğundan  $m \in \theta_*$  veya  $rM \subseteq \theta_*$  dir.

Eğer  $m \in \theta_*$  ise  $\omega = f(m) \in f(\theta_*)$  dir.

Eğer  $rM \subseteq \theta_*$  ise  $rM_1 = f(rM) \subseteq f(\theta_*)$  dir. Böylece  $f(\theta_*)$ ,  $M_1$ 'in asal altmodülüdür ve  $\alpha$ ,  $L$  de bir asal eleman olduğundan, Teorem 3.2.5'den  $f(\theta)$ ,  $M_1$ 'in bir  $L$ -fuzzy asal altmodülüdür.  $\square$

**Örnek 3.3.4** Örnek 3.3.2 deki

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \in 3\mathbb{Z} \\ \frac{1}{4}, & x \notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$$

$\mathbb{Z}$ 'nin bir fuzzy asal altmodülü olup,

$$f(\theta)(x) = \begin{cases} 1, & x \in 6\mathbb{Z} \\ \frac{1}{4}, & x \in 2\mathbb{Z} - 6\mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

fuzzy kümesi  $\mathbb{Z}$ 'nin  $L$ -fuzzy asal altmodülü değildir. Bu örnek ile  $f$ 'nin epimorfizma olması şartının kaldılamayacağını görürüz.

**Teorem 3.3.5**  $f : M \rightarrow M_1$   $R$ -modül epimorfizması ve  $\beta$ ,  $M_1$ 'in bir fuzzy asal altmodülü olsun.  $f^{-1}(\beta)$ ,  $M$ 'nin bir  $L$ -fuzzy asal altmodülüdür.

*İspat.* Teorem 3.2.5'den  $\beta_*$ ,  $M_1$ 'in asal altmodülü ve  $\alpha$ ,  $L$ 'de bir asal eleman olmak üzere  $m_1 \in M_1$  için

$$\beta(m_1) = \begin{cases} 1, & m_1 \in \beta_* \\ \alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir. Buradan

$$f^{-1}(\beta)(x) = \begin{cases} 1, & f(x) \in \beta_* \\ \alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in f^{-1}(\beta_*) \\ \alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulunur. Şimdi  $r \in R$ ,  $m \in M$  için,  $rm \in f^{-1}(\beta_*) \Rightarrow rf(m) \in \beta_*$ . Buradan  $f(m) \in \beta_*$  veya  $rM_1 \subseteq \beta_*$  dir. Eğer  $f(m) \in \beta_* \Rightarrow m \in f^{-1}(\beta_*)$  olur.

Eğer  $rM_1 \subseteq \beta_*$  ise  $f(rM) = rf(M) \subseteq \beta_* \Rightarrow rM \subseteq f^{-1}(\beta_*)$ . Böylece  $f^{-1}(\beta_*)$ ,  $M$ 'nin asal altmodülü olur ve  $f^{-1}(\beta)$   $M$ 'nin bir fuzzy asal altmodülüdür.  $\square$

### 3.4 Fuzzy Nakayama Lemma

$M$ , sonlu üretilmiş bir  $R$ -modül ve  $L = [0, 1]$  latisi olmak üzere M. Makamba ve V. Murali [13] Fuzzy Nakayama Lemma'yı ispatlamışlardır. Bu kısımda, bir  $M$  modülü üzerinde sonlu üretilmiş bir fuzzy modül için fuzzy Nakayama Lemma değişik bir yöntemle ispatlanmıştır. Sonlu üretilmiş fuzzy modül tanımı ve özellikleri [18]'de verilmiş olup bu özellikleri ispatsız olarak vereceğiz. Bu kısımda  $L = [0, 1]$  ve herhangi  $\mu \in I(R)$  için  $\mu(0) = 1$  olarak alınacaktır.

**Lemma 3.4.1** [18]  $\Lambda$  indeks kümesi olmak üzere ( $|\Lambda| > 1$ ),  $i \in \Lambda$  için,  $\theta_i \in S(M)$  olsun.  $\bigcap_{i \in \Lambda} \theta_i \in S(M)$  dir.

**Tanım 3.4.2** [18]  $0 \neq \xi \in F(M)$  olsun.  $\xi \subseteq \nu$  olacak şekildeki tüm fuzzy alt-modüllerin arakesitine  $\xi$ 'nin ürettiği fuzzy modül denir ve  $\langle \xi \rangle$  ile gösterilir.

$\mathcal{S}$  aşağıdaki özelliğe sahip bir fuzzy noktalar kümesi olsun.

“Eğer  $x_t, x_s \in \mathcal{S}$  ise  $s = t$  dir”

Bu durumda  $\xi \in F(M)$ ,

$$\xi(x) = \begin{cases} t, & x_t \in \mathcal{S} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlanmak üzere  $\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \xi \rangle$  olarak alınır ve  $\langle \mathcal{S} \rangle$ ,  $\mathcal{S}$  kümesinin ürettiği altmodül olarak adlandırılır.

Aşağıdaki teorem bir  $\xi$  fuzzy kümesinin ürettiği fuzzy modülün  $\xi$  tarafından kapsanan fuzzy noktalar cinsinden karakterizasyonunu verir.

**Teorem 3.4.3** [18]  $\xi \in F(M)$  olsun. Her  $x \in M$  için,

$$\sigma(x) = \sup \left\{ \left( \sum_{i=1}^m (r_i)_1 (x_i)_{t_i} \right) (x) \mid \xi(x_i) \geq t_i, x = \sum_{i=1}^m r_i x_i, m \in \mathbb{N} \right. \\ \left. r_i \in R, x_i \in M, t_i \in [0, 1] \right\}$$

şeklde tanımlanan fuzzy küme bir fuzzy modüldür ve  $\langle \xi \rangle = \sigma \cup 0_1$  dir.

**Örnek 3.4.4**  $R = \mathbb{Z}$  ve  $L = [0, 1]$  olsun.  $\mathcal{S} = \{6_1, 2_{\frac{1}{2}}, 5_{\frac{3}{4}}\}$  kümesinin ürettiği fuzzy küme

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x = 6 \\ \frac{3}{4}, & x = 5 \\ \frac{1}{2}, & x = 2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere  $\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \xi \rangle$  dir. Buradan  $x \in \mathbb{Z}$  için

$$\langle \xi \rangle (x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 6 \rangle \\ \frac{3}{4}, & \mathbb{Z} - \langle 6 \rangle \end{cases}$$

bulunur.

Cebirdeki temel sonuçlardan olan Nakayama Lemma [27];

“ $M$  sonlu üretilmiş bir modül,  $I$   $R$ 'nin Jacobson radikalinde ( $J(R)$ ) kapsanan bir ideali olmak üzere eğer  $IM = M$  ise  $M = 0$ ” olduğunu ifade eder.

Şimdi tezdeki özgün sonuçlardan birisi olan Fuzzy Nakayama Lemma'yı verelim.

**Teorem 3.4.5**  $\mu \in I(R)$ ,  $\mu \subseteq FJR(R)$ ,  $\theta \in S(M)$  ve

$\theta = \langle (x_1)_{\lambda_1}, (x_2)_{\lambda_2}, \dots, (x_n)_{\lambda_n} \rangle \cup 0_1 \in S(M)$ ,  $(x_i \in M, \lambda_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n)$  ve  $\lambda_j = \max\{\lambda_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  olsun.

Ayrıca  $x_j \notin \langle x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \rangle$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda eğer  $\mu\theta = \theta$  ise  $\theta$ ,  $M$ 'nin aşikar fuzzy modülüdür. Yani  $x \in M$  için

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \text{ dir.}$$

*İspat.* Eğer gerekirse yeniden indeksleyerek  $j = 1$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$  ve  $\mathcal{S} = \{(x_1)_{\lambda_1}, (x_2)_{\lambda_2}, \dots, (x_n)_{\lambda_n}\}$  şeklinde alınabilir. O zaman  $\theta = \langle \mathcal{S} \rangle \cup 0_1$  dir. Şimdi

$$\xi(w) = \begin{cases} t, & w_t \in \mathcal{S} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere Teorem 3.4.3'den

$$\theta(w) = \begin{cases} 1, & w = 0 \\ \sup\{(\sum_{i=1}^m (r_i)_1 (w_i)_{t_i})(w) \mid w = \sum_{i=1}^m r_i w_i, \xi(x_i) \geq t_i, m \in \mathbb{N}\}, & w \neq 0 \end{cases}$$

olur. Yani  $\theta = \langle \xi \rangle \cup 0_1$  dir.  $0 \neq x_1 \in \langle x_1 \rangle \setminus \langle x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$  olduğundan ve  $\theta$ 'nin tanımından  $\theta(x_1) = \lambda_1$ 'dir.

İddia:  $(\mu\theta)(x_1) = 0$ ' dir.

Bunun için  $(\mu\theta)(x_1)$ 'in tanımını gözönüne alarak  $x_1 = \sum_{i=1}^m r_i w_i$ ,  $m \in \mathbb{N}$  ifadesi

için  $\bigwedge_{i=1}^m \mu(r_i) \wedge \theta(w_i) = 0$  olduğu gösterilmelidir.

Eğer  $r_k \notin J(R)$  olacak şekilde bir  $1 \leq k \leq m$  varsa  $\mu \subseteq FJR(R)$  ve  $FJR(R)(r) = \begin{cases} 1, & r \in J(R) \\ 0, & r \notin J(R) \end{cases}$  olduğundan  $\mu(r_k) \leq FJR(R)(r_k) = 0$  yani

$\mu(r_k) = 0$  dir. Böylece  $\bigwedge_{i=1}^m \mu(r_i) \wedge \theta(w_i) = 0$  dir.

Şimdi her  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $r_i \in J(R)$  olsun. Burada iki farklı durum vardır.

**1.durum:**  $w_j \notin \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  olacak şekilde bir  $j = 1, 2, \dots, m \in \mathbb{N}$  varsa  $\theta$ 'nin tanımından  $\theta(w_j) = 0$  dir. Böylece  $\bigwedge_{i=1}^m \mu(r_i) \wedge \theta(w_i) = 0$  olur.

**2.durum:** Her  $i = 1, 2, \dots, m$  için,  $w_i \in \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  olsun.

Özel olarak  $i = 1$  için tekrar iki durum indirgenir.;

**a)**  $w_1 \in \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r} \rangle \setminus \langle x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_t} \rangle$ ,  $i_k \neq j_u$  ve

$\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \cup \{j_1, j_2, \dots, j_t\} = \{1, 2, \dots, n\}$  olsun.

$\alpha_{i_k} \in R$  ( $1 \leq k \leq r$ ) olmak üzere  $w_1 = \alpha_{i_1} x_{i_1} + \alpha_{i_2} x_{i_2} + \dots + \alpha_{i_r} x_{i_r}$  şeklindedir.

Eğer  $i_k = 1$  olacak şekilde bir  $1 \leq k \leq r$  varsa, bu durumda

$$(1 - r_1 \alpha_1) x_1 = r_1 \alpha_{i_1} x_{i_1} + r_1 \alpha_{i_2} x_{i_2} + \dots + r_1 \widehat{\alpha_{i_k} x_{i_k}} + \dots + r_1 \alpha_{i_r} x_{i_r} + r_2 w_2 + \dots + r_m w_m$$

olup “ $\widehat{\quad}$ ” ile gösterilen terim toplamda görünmez.

Buradan eğer  $w_2, \dots, w_m$ 'lerin hiçbirinin lineer ifadesi  $x_1$ 'i içermiyorsa  $1 - r_1 \alpha_1 \in R$  tersinir olduğundan  $x_1 \in \langle x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$  olur ki bu kabulümüz ile çelişir.

Eğer  $w_2, \dots, w_m$ 'lerin bazıları  $x_1$  çarpanını bulunduruyorsa, bunları eşitliğin sol tarafına alarak ve  $r_2, r_3, \dots, r_m \in J(R)$  olmasını kullanarak ya

$x_1 \in \langle x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$  yada  $x_1 = 0$  bulunur. Tekrar çelişki elde ederiz.

**b)** Eğer  $w_1 \in \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r} \rangle \cap \langle x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_t} \rangle$ , ise **(a)** da yapılan yorumlar burada da geçerli olup tekrar  $x_1 \in \langle x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$  elde edilir. Bu ise yine bir çelişkidir. Bu yüzden  $r_i \in J(R)$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$  olduğunda 2.durum gerçekleşemez.

Böylece her  $m \in \mathbb{N}$  için  $\bigwedge_{i=1}^m \mu(r_i) \wedge \theta(w_i) = 0$  dır.

Sonuç olarak  $\mu\theta(x_1) = 0 = \theta(x_1) = \lambda_1$  ve  $\lambda_1 = \max\{\lambda_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  olduğundan

$$\theta(w) = \begin{cases} 1, & w = 0 \\ 0, & w \neq 0 \end{cases} \quad \text{elde edilir.} \quad \square$$

## 4 L-FUZZY $\rho$ -MODÜLLER

Bu bölümde  $\rho$  sıfırdan farklı bir fuzzy halka olarak alınacaktır. Öncelikle [19, 20]'den,  $L$ -fuzzy  $\rho$ -ideal,  $L$ -fuzzy  $\rho$ -modül ve  $L$ -fuzzy  $\rho$ -altmodül tanımları hatırlatılacak ve bunlarla ilgili özellikler verilecektir. [20]'deki fuzzy  $\rho$ -altmodül homomorfizması tanımı genelleştirilip, fuzzy  $\rho$ -rezidü ideali ve rezidü altmodülü tanımı verilecek ve bunlarla ilgili özellikler incelenecektir. Son olarak da  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -altmodüllerin özellikleri incelenecektir.

### 4.1 $L$ -Fuzzy $\rho$ -idealler ve $L$ -Fuzzy $\rho$ -Modüller

**Tanım 4.1.1** [19]  $\rho \in H(R)$  ve  $\mu \in F(R)$  olsun. Eğer her  $x, y \in R$  için

- (i)  $\mu \neq 0$
- (ii)  $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ ,
- (iii)  $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \rho(y)$
- (iv)  $\mu(x) \leq \rho(x)$

koşulları sağlanıyorsa  $\mu$ 'ye  $\rho$  fuzzy halkası üzerinde bir  $L$ -fuzzy ideal denir.

Bundan sonra  $\rho$  fuzzy halkası üzerindeki  $L$ -fuzzy idealleri  $L$ -fuzzy  $\rho$ -ideal olarak isimlendireceğiz. Ayrıca bu ideallerin kümesi  $\mathbf{I}(\mathbf{R})$  ile gösterilecektir. Yukarıdaki tanımda  $\rho = 1$  alınırsa,  $L$ -fuzzy  $\rho$ -ideal kavramı 2.1.3'de tanımlanan  $L$ -fuzzy ideal kavramı ile çakışır.

**Örnek 4.1.2**  $R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$  halkası ve  $L = [0, 1]$  üzerinde, her  $n \in \mathbb{Z}$  için

$$\rho(n) = \begin{cases} 1, & n \in 16\mathbb{Z} \\ \frac{1}{3}, & n \in 2\mathbb{Z} - 16\mathbb{Z} \\ \frac{1}{4}, & n \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

ile tanımlanan  $\rho$  bir fuzzy halkadır. Bu halka üzerinde

$$\mu(n) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & n \in 8\mathbb{Z} \\ \frac{1}{5}, & n \in 2\mathbb{Z} - 8\mathbb{Z} \\ 0, & n \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

ile tanımlanan fuzzy küme bir fuzzy  $\rho$ -idealdir.

**Tanım 4.1.3** [21]  $\delta \in I_\rho(R)$  olsun. Eğer  $\delta \neq 1$  ve her  $x, y \in R$  için,

$$\delta(xy) \wedge \rho(x) \wedge \rho(y) \leq \delta(x) \vee \delta(y)$$

sağlanırsa  $\delta$ 'ya bir  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -ideal denir.

Şimdi  $\rho$  fuzzy halkası üzerinde fuzzy  $\rho$ -modül kavramını vereceğiz.

**Tanım 4.1.4** [20]  $\rho \in H(R)$  ve  $\theta \in F(M)$  olsun. Her  $x, y \in M$  ve her  $r \in R$  için,

(i)  $\theta \neq 0$

(ii)  $\theta(x - y) \geq \theta(x) \wedge \theta(y)$

(iii)  $\theta(rx) \geq \theta(x) \wedge \rho(r)$

koşulları sağlanırsa  $\theta$ 'ya  $\rho$  fuzzy halkası üzerinde bir  $L$ -fuzzy modül denir.

$\rho$  fuzzy halkası üzerinde  $L$ -fuzzy modülleri fuzzy  $\rho$ -modüller olarak isimlendirileceğiz. Tüm  $L$ -fuzzy  $\rho$ -modüllerin kümesini  $\mathbf{S}(\mathbf{M})$  ile gösterilecektir.

**Örnek 4.1.5**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  halkası ve  $L = [0, 1]$  üzerinde, her  $n \in \mathbb{Z}$  için

$$\rho(n) = \begin{cases} 1, & n \in 16\mathbb{Z} \\ \frac{1}{3}, & n \in 4\mathbb{Z} - 16\mathbb{Z} \\ 0, & n \notin 4\mathbb{Z} \end{cases}$$

ile tanımlanan  $\rho$  bir fuzzy halkadır.  $(\mathbb{Z}^3, +, \cdot)$   $\mathbb{Z}$ -modülü üzerinde her  $m \in \mathbb{Z}^3$  için

$$\theta(m) = \begin{cases} 1, & m \in (6\mathbb{Z})^3 \\ \frac{1}{2}, & m \in (2\mathbb{Z})^3 - (6\mathbb{Z})^3 \\ 0, & m \notin (2\mathbb{Z})^3 \end{cases}$$

ile tanımlanan  $\theta$  bir fuzzy  $\rho$ -modüldür.

Şimdide bir fuzzy  $\rho$ -modülün altmodülü tanımını verelim.

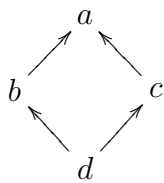
**Tanım 4.1.6**  $\theta, \theta_1 \in S_\rho(M)$  olsun. Eğer  $\theta_1 \subseteq \theta$  ise  $\theta_1$ 'e  $\theta$ 'nın fuzzy  $\rho$ -altmodülü denir.

$\theta$ 'nın tüm fuzzy  $\rho$ -altmodüllerinin kümesi  $\mathcal{S}$ ,  $(M)$  ile gösterilecektir. Yani

$$S_{\rho, \theta}(M) = \{\theta_1 \mid \theta_1 \in S_\rho(M) \text{ ve } \theta_1 \subseteq \theta\} \text{ dir.}$$

$\rho = 1, \theta = 1$  olması durumunda  $S_{\rho, \theta}(M) = S(M)$  dir. Ayrıca  $M = R$  ve  $\rho = \theta$  ise  $S_{\rho, \theta}(R) = I_\rho(R)$  olur.

**Örnek 4.1.7**  $R = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$  halkası üzerinde  $M$  modülü olarak halkanın kendisi ve “



$$\rho(P) = \begin{cases} a, & P = 0, 1 \\ b, & P = x, x + 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan  $\rho$  bir fuzzy halka ve

$$\theta(P) = \begin{cases} a, & P = 0 \\ c, & P = x \\ d, & P = 1, x + 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan  $\theta$  bir  $L$ -fuzzy  $\rho$ -modüldür. Ayrıca

$$\theta_1(P) = \begin{cases} a, & P = 0 \\ d, & P = 1, x, x + 1 \end{cases}$$

olmak üzere  $\theta_1 \in S_{\rho, \theta}(M)$  dir.

Halka üzerindeki modüller ile fuzzy  $\rho$ -modüller arasındaki ilişki aşağıdaki lemma ile verilir.

**Lemma 4.1.8** [20]  $\rho \in H(R)$  ve  $\theta \in F(M)$  olsun.

i) Eğer  $\theta \in S_\rho(M)$  ise  $t \leq \theta(0) \wedge \rho(0)$  olacak şekilde her  $t \in L$  için,

$$\theta_t = \{x \in M \mid \theta(x) \geq t\}$$

seviye kümesi  $M$ 'nin bir  $\rho_t$ -altmodülüdür.

ii)  $\theta_1 \neq 0$  ve  $\theta_1 \in F(M)$  olsun.  $\theta_1 \in S_{\rho,\theta}(M)$  olması için gerek ve yeter koşul her  $t \leq \theta_1(0) \wedge \rho(0)$  için,  $(\theta_1)_t$ 'in  $\theta_t$ 'nin bir  $\rho_t$ -altmodülü olmasıdır.

Bu lemmanın sağladığı kolaylığı görmek açısından Örnek 4.1.7'de verilen  $\theta_1$  için  $\theta_1 \in S_{\rho,\theta}(M)$  dir. Çünkü  $t = d$  için  $(\theta_1)_d = \{0, 1, x, x + 1\}$  ve  $t = a$  için  $(\theta_1)_a = \{0\}$ ,  $\theta_t$ 'nin  $\rho_t$ -altmodülleridir.

Şimdi  $\rho$ -altmodüller üzerindeki temel işlemleri tanımlayalım.

**Tanım 4.1.9** [20]  $\theta_1, \theta_2 \in S_{\rho,\theta}(M)$  ve  $\mu \in I_\rho(R)$  olsun. Fuzzy  $\rho$ -altmodüllerin; arakesiti, toplamı ve bir fuzzy  $\rho$ -ideal ile bileşkesi ve çarpımı sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır. Her  $w \in M$  için,

1.  $(\theta_1 \cap \theta_2)(w) = \inf\{\theta_1(w), \theta_2(w)\}$
2.  $(\theta_1 + \theta_2)(w) = \sup\{\theta_1(u) \wedge \theta_2(v) \mid w = u + v, u, v \in M\}$
3.  $(\mu \circ \theta_1)(w) = \sup\{\mu(r) \wedge \theta_1(m) \mid w = rm, r \in R, m \in M\}$
4.  $\mu\theta_1(w) = \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \mu(r_i) \wedge \theta_1(m_i) \mid w = \sum_{i=1}^n r_i m_i, r_i \in R, m_i \in M, n \in \mathbb{N}\}$

**Lemma 4.1.10** [20]  $\theta_1, \theta_2 \in S_{\rho,\theta}(M)$  ve  $\mu \in I_\rho(R)$  olsun. Eğer  $0$ ,  $L$ 'nin bir asal elemanı ise bu durumda

1.  $(\theta_1 \cap \theta_2) \in S_{\rho,\theta}(M)$ ,
2.  $(\theta_1 + \theta_2) \in S_{\rho,\theta}(M)$  ve
3.  $\mu\theta_1 \in S_{\rho,\theta}(M)$  olur.

*İspat.* Fuzzy modül tanımından  $\theta_1(0_M) \neq 0$  ve  $\theta_2(0_M) \neq 0$  dir. Ayrıca 0 asal eleman olduğundan  $\theta_1 \cap \theta_2 \neq \mathbf{0}$ ,  $\theta_1 + \theta_2 \neq \mathbf{0}$  ve  $\mu\theta_1 \neq \mathbf{0}$  olur. Üstelik tanımdan  $\theta_1 \cap \theta_2 \subseteq \theta$ ,  $\theta_1 + \theta_2 \subseteq \theta$  ve  $\mu\theta_1 \subseteq \theta$  dir.

(1)'in ispatı için,  $x, y \in M$  ve  $r \in R$  için,

$$\begin{aligned} (\theta_1 \cap \theta_2)(x - y) &= \theta_1(x - y) \wedge \theta_2(x - y) \\ &\geq \theta_1(x) \wedge \theta_1(y) \wedge \theta_2(x) \wedge \theta_2(y) \\ &= (\theta_1 \cap \theta_2)(x) \wedge (\theta_1 \cap \theta_2)(y) \end{aligned}$$

ve  $(\theta_1 \cap \theta_2)(rx) = \theta_1(rx) \wedge \theta_2(rx) \geq \theta_1(x) \wedge \rho(r) \wedge \theta_2(x) \wedge \rho(r) = (\theta_1 \cap \theta_2)(x) \wedge \rho(r)$  dir. (2)'nin ispatı için  $(\theta_1 + \beta_1)(x - y) \geq (\theta_1 + \theta_2)(x) \wedge (\theta_1 + \theta_2)(y)$ .

Gerçekten,  $x = u + v$  ve  $y = m + n$  olacak şekildeki her  $m, n, u, v \in M$  için,

$$\begin{aligned} (\theta_1 + \theta_2)(x) \wedge (\theta_1 + \theta_2)(y) &= \sup_{m=u+v} \{\theta_1(u) \wedge \theta_2(v)\} \wedge \sup_{y=m+n} \{\theta_1(m) \wedge \theta_2(n)\} \\ &= \sup_{x+y} \{\theta_1(u) \wedge \theta_2(v) \wedge \theta_1(m) \wedge \theta_2(n)\} \\ &\leq \sup_{m+n} \{\theta_1(u + m) \wedge \theta_2(v + n)\} \leq (\theta_1 + \theta_2)(x - y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\theta_1 + \theta_2)(x) \wedge \rho(r) &= \sup\{\theta_1(u) \wedge \theta_2(v) \mid x = u + v\} \wedge \rho(r) \\ &= \sup\{\theta_1(u) \wedge \theta_2(v) \wedge \rho(r) \mid x = u + v, r \in R\} \\ &= \sup\{\theta_1(u) \wedge \rho(r) \wedge \theta_2(v) \wedge \rho(r) \mid x = u + v, r \in R\} \\ &\leq \sup\{\theta_1(ru) \wedge \theta_2(rv) \mid rx = ru + rv, r \in R\} \\ &\leq \sup\{\theta_1(a) \wedge \theta_2(b) \mid rx = a + b\} = (\theta_1 + \theta_2)(rx) \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

Son olarak,  $\mu\theta_1(x - y) \geq \mu\theta_1(x) \wedge \mu\theta_1(y)$  olduğunda benzer şekilde gösterilir ve

$$\begin{aligned} (\mu\theta_1)(x) \wedge \rho(r) &= \sup\left\{\bigwedge_{i=1}^n \mu(\lambda_i) \wedge \theta_1(x_i) \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\} \wedge \rho(r) \\ &= \sup\left\{\bigwedge_{i=1}^n \mu(\lambda_i) \wedge \theta_1(x_i) \wedge \rho(r) \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\} \\ &\leq \sup\left\{\bigwedge_{i=1}^n \mu(\lambda_i) \wedge \theta_1(rx_i) \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(rx_i)\right\} \leq (\mu\theta_1)(rx) \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

□

Bu lemmanın bir tek  $\rho$  fuzzy halkasından  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  gibi farklı fuzzy halkalar üzerindeki fuzzy altmodüller ve ideallere genişlemesi aşağıdaki lemmada verilmiştir.

**Lemma 4.1.11**  $\rho_1, \rho_2 \in H(R)$ ,  $\theta \in S_{\rho_1}(M)$ ,  $\beta \in S_{\rho_2}(M)$ ,  $\theta_1 \in S_{\rho_1, \theta}(M)$ ,  $\beta_1 \in S_{\rho_2, \beta}(M)$  ve  $\mu \in I_{\rho_2}(R)$  olsun.  $0, L$ 'nin bir asal elemanı ise bu durumda

1.  $\theta \cap \beta \in S_{\rho_1 \cap \rho_2}(M)$ ,
2.  $\theta + \beta \in S_{\rho_1 \cap \rho_2}(M)$ ,
3.  $\mu\theta \in S_{\rho_1}(M) \cap S_{\rho_2}(M)$ ,
4.  $\theta_1 \cap \beta_1 \in S_{\rho_1 \cap \rho_2, \theta \cap \beta}(M)$ ,
5.  $\theta_1 + \beta_1 \in S_{\rho_1 \cap \rho_2, \theta + \beta}(M)$  dir.

*İspat.* (5)'in ispatını verelim. Diğerleride benzer şekilde yapılır.  $0$ 'ın asallığından

$$(\theta_1 + \beta_1)(0) = \sup\{\theta_1(u) \wedge \beta_1(v) \mid 0 = u + v, u, v \in M\} \neq 0,$$

yani  $\theta_1 + \beta_1 \neq 0$  dir. Şimdi  $m, n \in M$  olmak üzere

$$(\theta_1 + \beta_1)(m - n) \geq (\theta_1 + \beta_1)(m) \wedge (\theta_1 + \beta_1)(n)$$

olduğunu gösterelim. Gerçekten,  $m = u + v$  ve  $n = x + y$  olacak şekildeki her  $x, y, u, v \in M$  için,

$$\begin{aligned} (\theta_1 + \beta_1)(m) \wedge (\theta_1 + \beta_1)(n) &= \sup_{m=u+v} \{\theta_1(u) \wedge \beta_1(v)\} \wedge \sup_{n=x+y} \{\theta_1(x) \wedge \beta_1(y)\} \\ &= \sup_{m+n} \{\theta_1(u) \wedge \beta_1(v) \wedge \theta_1(x) \wedge \beta_1(y)\} \\ &\leq \sup_{m+n} \{\theta_1(u+x) \wedge \beta_1(v+y)\} \\ &\leq (\theta_1 + \beta_1)(m - n) \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

Son olarak, her  $r \in R$  and  $m \in M$  için,

$$\begin{aligned} (\rho_1 \cap \rho_2)(r) \wedge (\theta_1 + \beta_1)(m) &= (\rho_1)(r) \wedge (\rho_2)(r) \wedge \sup_{m=u+v} \{\theta_1(u) \wedge \beta_1(v)\} \\ &\leq \sup_{m=u+v} \{[(\rho_1)(r) \wedge \theta_1(u)] \wedge [(\rho_2)(r) \wedge \beta_1(v)]\} \\ &\leq (\theta_1 + \beta_1)(rm) \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

□

## 4.2 Fuzzy Küme ile Üretilmiş $L$ -Fuzzy $\rho$ -Altmodüller

Bu kısımda bir fuzzy  $\rho$ -modülün altkümesi tarafından üretilmiş fuzzy  $\rho$ -altmodül tanımını verilecektir ki bu 3. Bölümde verilen bir fuzzy kümenin ürettiği fuzzy modül kavramının genellemesidir.

Şimdi  $\rho \in H(R)$  ve  $\theta \in S_\rho(M)$  olmak üzere  $F_\theta(M) = \{\eta \in F(M) \mid \eta \subseteq \theta\}$  kümesini tanımlayalım.

**Tanım 4.2.1**  $\xi \in F_\theta(M)$  ve  $\xi \neq 0$  olsun.  $\xi \subseteq \nu$  olacak şekilde  $\nu \in S_{\rho,\theta}(M)$  altmodüllerinin arakesetine  $\xi$  fuzzy kümesinin ürettiği altmodül denir.

$\xi$  fuzzy kümesinin ürettiği fuzzy  $\rho$ -altmodülü  $\langle \xi \rangle$  ile gösterilir. Yani

$$\langle \xi \rangle_\rho = \bigcap_{\xi \subseteq \nu} \nu, \quad \nu \in S_{\rho,\theta}(M)$$

dir. Bir fuzzy kümenin ürettiği fuzzy  $\rho$ -altmodülün karakterizasyonu aşağıdaki teorem ile verilir.

**Teorem 4.2.2**  $R$  birimli ve değişmeli bir halka,  $M$  birimsel bir  $R$ -modül  $\rho \in H(R)$  ve  $\theta \in S_\rho(M)$  olsun. Eğer  $0 \neq \xi \in F_\theta(M)$  için  $\rho(0) \geq \theta(0)$ ,  $\rho(1) = \rho(0)$  ise  $\langle \xi \rangle_\rho = \rho.\xi$  dir.

*İspat.*  $\xi \subseteq \rho.\xi$  ve  $\rho.\xi \in S_{\rho,\theta}(M)$  olduğunu gösterirsek  $\langle \xi \rangle_\rho$ 'nin tanımından  $\langle \xi \rangle_\rho \subseteq \rho.\xi$  elde edilir.  $\xi(x) \leq \theta(x) \leq \theta(0) \leq \rho(0) = \rho(1)$  olduğundan  $\xi(x) = \xi(x) \wedge \rho(1) \leq (\rho.\xi)(1.x)$  yani  $\xi \subseteq \rho.\xi$  dir. Şimdi  $\rho.\xi \in S_{\rho,\theta}(M)$  olduğunu gösterelim: Her  $x \in M$  için,

$$\begin{aligned} 1. (\rho.\xi)(x) &= \sup\left\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(r_i) \wedge \xi(x_i) \mid x = \sum_{i=1}^n r_i x_i, r_i \in R, x_i \in M, n \in \mathbb{N}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(r_i) \wedge \theta(x_i) \mid x = \sum_{i=1}^n r_i x_i, r_i \in R, x_i \in M, n \in \mathbb{N}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\bigwedge_{i=1}^n \theta(r_i x_i) \mid x = \sum_{i=1}^n r_i x_i, r_i \in R, x_i \in M, n \in \mathbb{N}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\theta\left(\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) \mid x = \sum_{i=1}^n r_i x_i, r_i \in R, x_i \in M, n \in \mathbb{N}\right\} = \theta(x) \end{aligned}$$

böylece  $(\rho.\xi) \subseteq \theta$  dir.

2. Her  $x, y \in M$  için  $(\rho.\xi)(x - y) \geq (\rho.\xi)(x) \wedge (\rho.\xi)(y)$  olduğu açıktır.

3. Her  $x \in M$  ve her  $r \in R$  için

$$\begin{aligned}
\rho\xi(x) \wedge \rho(r) &= \\
&= \rho(r) \wedge \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(r_i) \wedge \xi(x_i) \mid x = \sum_{i=1}^n r_i x_i, r_i \in R, x_i \in M, n \in \mathbb{N}\} \\
&= \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(r_i) \wedge \xi(x_i) \wedge \rho(r) \mid x = \sum_{i=1}^n r_i x_i, r_i \in R, x_i \in M, n \in \mathbb{N}\} \\
&\leq \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(r.r_i) \wedge \xi(x_i) \mid rx = \sum_{i=1}^n rr_i x_i, r_i \in R, x_i \in M, n \in \mathbb{N}\} \\
&\leq (\rho.\xi)(rx)
\end{aligned}$$

Şimdi tersine  $\langle \xi \rangle_\rho \supseteq \rho.\xi$  olduğunu gösterelim. Bunun için  $\theta_1 \in S_{\rho,\theta}(M)$  ve  $\xi \subseteq \theta_1$  ise  $(\rho.\xi) \subseteq \theta_1$  olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}
(\rho.\xi)(x) &= \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(r_i) \wedge \xi(x_i) \mid x = \sum_{i=1}^n r_i x_i, r_i \in R, x_i \in M, n \in \mathbb{N}, \xi \subseteq \theta_1\} \\
&\leq \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(r_i) \wedge \theta_1(x_i) \mid x = \sum_{i=1}^n r_i x_i, r_i \in R, x_i \in M, n \in \mathbb{N}, \xi \subseteq \theta_1\} \\
&\leq \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \theta_1(r_i x_i) \mid x = \sum_{i=1}^n r_i x_i, r_i \in R, x_i \in M, n \in \mathbb{N}, \xi \subseteq \theta_1\} \\
&\leq \sup\{\theta_1(\sum_{i=1}^n r_i x_i) \mid x = \sum_{i=1}^n r_i x_i\} = \theta_1(x)
\end{aligned}$$

□

Yukarıdaki teoremden özel olarak,

1.  $\xi = x_t$ , ( $t \neq 0$ ) alınırsa  $m = \sum_{i=1}^n r_i x \in M$  için

$$\langle x_t \rangle_\rho(m) = \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(r_i) \wedge t\} \quad \text{olur.}$$

2.  $M = R$ ,  $\rho = \theta$ , ve  $r_t \in \rho$  ise  $w = \sum_{i=1}^n r_i r \in M$  için,

$$\langle r_t \rangle_\rho(w) = \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(r_i) \wedge t\} \quad \text{dir.}$$

(1) ve (2)  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -altmodüllerin karakterizasyonun da kullanılacaktır.

### 4.3 $L$ -Fuzzy $\rho$ -Altmodül $\varphi$ -Homomorfizmaları

Bu kısımda [20]'deki fuzzy  $\rho$ -altmodül homomorfizma tanımı genelleştirilmiş ve fuzzy  $\rho$ -altmodüllerin bu homomorfizmalar altındaki davranışları incelenmiştir.

Bu kısım da  $L$  tam sıralı latıs,  $M, N$   $R$ -modüller,  $\rho \in H(R)$ ,  $\theta \in S_\rho(M)$  ve  $\beta \in S_\rho(N)$  olarak alınacaktır. Ayrıca bir  $\varphi : L \rightarrow L$  fonksiyonu  $a, b \in L$  olmak üzere  $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$  koşulunu sağlıyorsa  $\varphi$ 'ye bir latıs homomorfizması denir.

**Tanım 4.3.1**  $\theta_1 \in S_{\rho, \theta}(M)$ ,  $\beta_1 \in S_{\rho, \beta}(N)$  ve  $\varphi : L \rightarrow L$  bir latıs homomorfizması olsun.  $\varphi \circ \theta_1 = \beta_1 \circ f$  koşulunu sağlayan bir  $f : M \rightarrow N$   $R$ -modül homomorfizmasına  $\theta_1$ 'den  $\beta_1$ 'e bir fuzzy  $\rho$ -altmodül  $\varphi$ -homomorfizması denir.

Burada  $\theta_1, \beta_1$  ve  $\varphi$  ile ilişkilendirmek üzere  $f_\varphi : \theta_1 \rightarrow \beta_1$  gösterimi kullanılır ve  $f_\varphi$ 'ye fuzzy  $\rho$ -altmodül  $\varphi$ -homomorfizması denir.

Bir başka deyişle  $\theta_1$ 'den  $\beta_1$ 'e bir fuzzy  $\rho$ -altmodül  $\varphi$ -homomorfizması aşağıdaki diagramı değişmeli yapacak şekildeki  $f : M \rightarrow N$   $R$ -modül homomorfizmasıdır.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \theta_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\ L & \xrightarrow{\varphi} & L \end{array}$$

**Not:** Eğer  $\varphi$  birim dönüşüm olarak alınırsa  $\rho$ -fuzzy altmodül  $\varphi$ -homomorfizması [20, Tanım 2.6]'deki tanıma indirgenir. Buna göre Tanım 4.3.1, [20]'de verilen tanımdan daha geneldir.

$\theta \in S_\rho(M)$  olmak üzere  $\theta$ 'nın sıfırdan farklı fuzzy noktalarının kümesini

$$\tilde{\theta} = \{x_\lambda \in F(M) \mid \theta(x) \geq \lambda, 0 \neq \lambda \in L, x \in M\}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda bir  $f_\varphi : \theta_1 \rightarrow \beta_1$  fuzzy  $\rho$ -altmodül  $\varphi$ -homomorfizması  $\tilde{\theta}_1$ 'den  $\tilde{\beta}_1$ 'e  $\tilde{f}(x_t) = f(x)_{\varphi(t)}$  ile tanımlanan bir  $\tilde{f} : \tilde{\theta}_1 \rightarrow \tilde{\beta}_1$  dönüşümünü indirger.

**Teorem 4.3.2**  $\theta_1, \theta \in F(M)$  ve  $\theta_1 \subseteq \theta$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1.  $\theta_1 \in S_{\rho, \theta}(M)$ ,
2.  $\forall x_t, y_s \in \tilde{\theta}_1$  ve  $r_k \in \rho$  olmak üzere  $x_t - y_s \in \tilde{\theta}_1$  ve  $r_k x_t \in \tilde{\theta}_1$  dir.

*İspat.* 1  $\Rightarrow$  2

$x_t, y_s \in \tilde{\theta}_1$  için,  $\theta_1(x-y) \geq \theta_1(x) \wedge \theta_1(y) \geq t \wedge s$  dir. Bu ise  $(x-y)_{t \wedge s} = x_t - y_s \in \tilde{\theta}_1$  demektir. Ayrıca  $r_k \in \rho$  olmak üzere  $\theta_1(rx) \geq \theta_1(x) \wedge \rho(r) \geq t \wedge k$  yani  $r_k x_t \in \tilde{\theta}_1$  dir.

2  $\Rightarrow$  1

$x, y \in M$  olsun. Eğer  $\theta_1(x) = 0$  veya  $\theta_1(y) = 0$  ise 0 latisin en küçük elemanı olduğundan  $\theta_1(x-y) \geq \theta_1(x) \wedge \theta_1(y)$  dir. Şimdi  $\theta_1(x) \neq 0$  ve  $\theta_1(y) \neq 0$  olsun.  $x_{\theta_1(x)}, y_{\theta_1(y)} \in \tilde{\theta}_1$  dir.  $x_{\theta_1(x)} - y_{\theta_1(y)} = (x-y)_{\theta_1(x) \wedge \theta_1(y)} \in \tilde{\theta}_1$  olduğundan  $\theta_1(x-y) \geq \theta_1(x) \wedge \theta_1(y)$  dir. Ayrıca  $r \in R$  olmak üzere  $r_{\rho(r)} \in \rho$  olduğundan,  $r_{\rho(r)} x_{\theta_1(x)} = (rx)_{\rho(r) \wedge \theta_1(x)} \in \tilde{\theta}_1$ . Yani  $\theta_1(rx) \geq \theta_1(x) \wedge \rho(r)$  olur.  $\square$

Şimdi fuzzy  $\rho$ -altmodül  $\varphi$ -homomorfizması altında görüntü ve ters görüntü kümelerini inceleyeceğiz.

**Tanım 4.3.3**  $f_\varphi : \theta_1 \rightarrow \beta_1$  bir fuzzy  $\rho$ -altmodül  $\varphi$ -homomorfizması ve  $\delta \in S_{\rho, \theta_1}(M)$  olsun.  $\delta$ 'nin  $f_\varphi$  altındaki görüntüsü  $f_\varphi(\delta) : N \rightarrow L$  fuzzy kümesi

$$f_\varphi(\delta)(n) = \begin{cases} \sup_{m \in f^{-1}(n)} \varphi(\delta(m)) & f^{-1}(n) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(n) = \emptyset \end{cases}$$

ile tanımlanır.

**Teorem 4.3.4**  $\varphi$  bir latis izomorfizması (birebir ve örten latis homomorfizması),  $f_\varphi : \theta_1 \rightarrow \beta_1$  bir fuzzy  $\rho$ -altmodül  $\varphi$ -epimorfizması ( $f$  epimorfizma) ve  $\delta \in S_{\rho, \theta_1}(M)$  olsun.  $\varphi_{I_{m\rho}} = I$  (birim dönüşüm) ise  $f_\varphi(\delta) \in S_{\rho, \beta_1}(N)$  dir.

*İspat.*  $\delta \subseteq \theta_1$  ve  $\varphi$  bir latis homomorfizması olduğundan her  $n \in N$  için,  $f_\varphi(\delta)(n) \leq \beta_1(n)$  dir. Ayrıca  $\varphi$  izomorfizma,  $f$  epimorfizma ve  $\delta(0) \neq 0$  olduğundan  $f_\varphi(\delta) \neq 0$  dir. Üstelik her  $n, n_1, n_2 \in N$  ve  $\lambda \in R$  için,

$$\begin{aligned}
f_\varphi(\delta)(n_1) \wedge f_\varphi(\delta)(n_2) &= [ \sup_{m_1 \in f^{-1}(n_1)} \varphi(\delta(m_1)) ] \wedge [ \sup_{m_2 \in f^{-1}(n_2)} \varphi(\delta(m_2)) ] \\
&= \sup_{m_1, m_2} [ \varphi(\delta(m_1)) \wedge \varphi(\delta(m_2)) ] \\
&= \sup_{m_1, m_2} [ \varphi(\delta(m_1) \wedge \delta(m_2)) ] \\
&\leq \sup_{f(m_1 - m_2)} \varphi(\delta(m_1 - m_2)) \\
&\leq f_\varphi(\delta)(n_1 - n_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_\varphi(\delta)(n) \wedge \rho(\lambda) &= [ \sup_{m \in f^{-1}(n)} \varphi(\delta(m)) ] \wedge \rho(\lambda) = [ \sup_{f(m)=n} \varphi(\delta(m)) \wedge \rho(\lambda) ] \\
&= [ \sup_{f(m)=n} \varphi(\delta(m)) \wedge \rho(\lambda) ] \\
&= [ \sup_{f(m)=n} \varphi(\delta(m)) \wedge \varphi(\varphi^{-1}(\rho(\lambda))) ], \\
&\leq \sup_{f(\lambda m)=n} \varphi(\delta(\lambda m)) \leq f_\varphi(\delta)(\lambda n) \quad \text{dir.}
\end{aligned}$$

□

**Tanım 4.3.5**  $\varphi$  bir latis izomorfizması,  $f_\varphi : \theta_1 \rightarrow \beta_1$  fuzzy  $\rho$ -altmodül  $\varphi$ -homomorfizması ve  $\tau \in S_{\rho, \beta_1}(N)$  olsun.  $\tau$ 'nin  $f_\varphi$  altındaki ters görüntüsü  $f_\varphi^{-1}(\tau) : M \rightarrow L$  fuzzy kümesi, her  $m \in M$  için

$$f_\varphi^{-1}(\tau)(m) = \varphi^{-1}(\tau(f(m)))$$

ile tanımlanır.

$\tau(f(m)) \leq \beta_1(f(m))$  ve  $\varphi$  bir latis izomorfizması olduğundan

$$\varphi^{-1}(\tau(f(m))) \leq \varphi^{-1}(\beta_1(f(m))) = \varphi^{-1}(\varphi(\theta_1(m)))$$

olup  $f_\varphi^{-1}(\tau)(m) \leq \theta_1(m)$  dir.

**Teorem 4.3.6**  $\varphi$  latis izomorfizması,  $f_\varphi : \theta_1 \rightarrow \beta_1$  bir fuzzy  $\rho$ -altmodül  $\varphi$ -homomorfizması ve  $\tau \in S_{\rho, \beta_1}(N)$  olsun.  $\varphi|_{I_{m\rho}} = I$  ise  $f_\varphi^{-1}(\tau) \in S_{\rho, \theta_1}(M)$  dir.

*İspat.* Teorem 4.3.4'e benzer şekilde yapılır. □

#### 4.4 Fuzzy $\rho$ -Rezidü İdeal ve Fuzzy $\rho$ -Rezidü Altmodül

Zahedi [30]'da fuzzy rezidü ideal ve fuzzy rezidü altmodül tanımlarını vermiştir. Daha sonra fuzzy halkalar üzerinde, Martinez [20]'de fuzzy  $\rho$ -rezidü ideal ve fuzzy  $\rho$ -rezidü altmodül kavramlarını Zorn lemma'yı kullanarak tanımlamıştır. Biz bu kavramları farklı şekilde tanımlayıp [20]'deki kısıtlamalar altında aynı tanıma indirgeyip, bunlarla ilgili özellikleri vereceğiz.

**Tanım 4.4.1**  $\theta \in S_\rho(M)$ ,  $\theta_1 \in S_{\rho,\theta}(M)$ ,  $\rho(0) \geq \theta(0)$  ve  $\theta(0) = \theta_1(0)$  olsun. Her  $r \in R$  için

$$(\theta_1 :_\rho \theta)(r) = \sup\{\mu(r) \mid \mu \circ \theta \subseteq \theta_1, \mu \in I_\rho(R)\}$$

şeklinde tanımlanan fuzzy kümeye  $\theta$  ve  $\theta_1$ 'in rezidü kümesi denir.

Tanımdaki  $\rho(0) \geq \theta(0)$  ve  $\theta_1(0) = \theta(0)$  koşulları [20]'de de verilmiş olup Zorn Lemma hipotezlerini sağlamak üzere kullanılmıştır. Bu koşullar

$$\{\mu(r) \mid \mu \circ \theta \subseteq \theta_1, \mu \in I_\rho(R)\}$$

kümesinin aşağıda açıklandığı şekilde boştan farklı olmasını sağlar. Bunun için

$$\nu(r) = \begin{cases} \rho(0) & r = 0 \\ 0 & r \neq 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan ile tanımlanan fuzzy küme bir  $\rho$ -ideal olup  $\nu \circ \theta \subseteq \theta_1$  şartını sağlar. Gerçekten,  $r = 0$  için  $\nu(0) = \rho(0)$  ve  $r \neq 0$  için  $\nu(r) = 0 \leq \rho(r)$  olduğundan  $\nu \subseteq \rho$ 'dir. Ayrıca  $\mu \in I_\rho(R)$  olduğu kolayca gösterilir.  $\nu \circ \theta \subseteq \theta_1$  olduğunu gösterelim.

$m = 0$  için

$$\begin{aligned} (\nu \circ \theta)(0) &= \sup\{\nu(0) \wedge \theta(m), \nu(r) \wedge \theta(0), \nu(0) \wedge \theta(0), \dots\} \\ &= \rho(0) \wedge \theta(0) = \theta(0) = \theta_1(0) \end{aligned}$$

ve  $m \neq 0$  için

$$(\nu \circ \theta)(m) = \sup\{\underbrace{\nu(r)}_0 \wedge \theta(m)\} = 0 \leq \theta_1(m) \text{ dir.}$$

Bundan sonra fuzzy rezidü  $(\theta_1 :_{\rho} \theta)$  gösterimi kullanıldığında  $\rho(0) \geq \theta(0)$  ve  $\theta_1(0) = \theta(0)$  koşullarının gerçekleştiği varsayılacaktır.

**Lemma 4.4.2**  $\theta \in S_{\rho}(M)$  ve  $\theta_1 \in S_{\rho, \theta}(M)$  olsun. O zaman  $(\theta_1 :_{\rho} \theta) \in I_{\rho}(R)$  dir.

*İspat.* Her  $r \in R$  için,

$$(\theta_1 :_{\rho} \theta)(r) = \sup\{\mu(r) \mid \mu \circ \theta \subseteq \theta_1, \mu \in I_{\rho}(R)\} \leq \rho(r) \text{ olduğundan}$$

$$(\theta_1 :_{\rho} \theta) \subseteq \rho \text{ dir.}$$

Önce  $(\mu + \xi) \circ \theta \subseteq (\mu \circ \theta) + (\xi \circ \theta)$  olduğunu gösterelim.  $w \in M$  için

$$\begin{aligned} ((\mu + \xi) \circ \theta)(w) &= \sup\{(\mu + \xi)(r) \wedge \theta(u) \mid w = rm, r \in R, m \in M\} \\ &= \sup\left\{ \sup_{r=r_1+r_2} \{\mu(r_1) \wedge \xi(r_2)\} \wedge \theta(m) \mid w = rm, r \in R, m \in M \right\} \\ &= \sup_{r_1m+r_2m} \{(\mu(r_1) \wedge \theta(m)) \wedge (\mu(r_2) \wedge \theta(m)) \mid r_1, r_2 \in R, m \in M\} \\ &\leq \sup_{w=r_1m+r_2m} \{(\mu \circ \theta)(r_1m) \wedge (\xi \circ \theta)(r_2m)\} \\ &\leq (\mu \circ \theta) + (\xi \circ \theta)(w) \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

Şimdi bu eşitsizlikten yararlanarak, her  $r, s \in R$  için,

$$\begin{aligned} (\theta_1 :_{\rho} \theta)(r) \wedge (\theta_1 :_{\rho} \theta)(s) &= \\ &= \sup\{\mu(r) \mid \mu \circ \theta \subseteq \theta_1, \mu \in I_{\rho}(R)\} \wedge \sup\{\xi(s) \mid \xi \circ \theta \subseteq \theta_1, \xi \in I_{\rho}(R)\} \\ &= \sup\{\mu(r) \wedge \xi(s) \mid \mu \circ \theta \subseteq \theta_1 \text{ ve } \xi \circ \theta \subseteq \theta_1, \mu, \xi \in I_{\rho}(R)\} \\ &\leq \sup\{(\mu + \xi)(r - s) \mid \mu \circ \theta \subseteq \theta_1 \text{ ve } \xi \circ \theta \subseteq \theta_1, \mu, \xi \in I_{\rho}(R)\} \\ &\leq \sup\{(\mu + \xi)(r - s) \mid (\mu \circ \theta) + (\xi \circ \theta) \subseteq \theta_1, \mu, \xi \in I_{\rho}(R)\} \\ &\leq \sup\{(\mu + \xi)(r - s) \mid (\mu + \xi) \circ \theta \subseteq \theta_1, \mu + \xi \in I_{\rho}(R)\} \\ &\leq (\theta_1 :_{\rho} \theta)(r - s) \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

Son olarak

$$\begin{aligned} (\theta_1 :_{\rho} \theta)(r) \wedge \rho(s) &= \sup\{\mu(r) \mid \mu \circ \theta \subseteq \theta_1, \mu \in I_{\rho}(R)\} \wedge \rho(s) \\ &= \sup\{\mu(r) \wedge \rho(s) \mid \mu \circ \theta \subseteq \theta_1, \mu \in I_{\rho}(R)\} \\ &\leq \sup\{\mu(rs) \mid \mu \circ \theta \subseteq \theta_1, \mu \in I_{\rho}(R)\} \leq (\theta_1 :_{\rho} \theta)(rs) \end{aligned}$$

ve böylece  $(\theta_1 :_{\rho} \theta) \in I_{\rho}(R)$  olur. □

Burada  $(\theta_1 :_{\rho} \theta)$ 'nin bir  $L$ - fuzzy  $\rho$ -ideal olması nedeniyle Tanım 4.4.1 ile [20, Tanım 5.3]'in aynı olduğu gözlemlenir.

**Tanım 4.4.3**  $\rho \in H(R)$ ,  $\theta \in S_{\rho}(M)$  ve  $\rho(0) \geq \theta(0)$  olsun.  $\mu \in I_{\rho}(R)$ ,  $\theta_1 \in S_{\rho, \theta}(M)$  ve  $\theta_1(0) = \theta(0)$  olmak üzere her  $x \in M$  için,

$$(\theta_1 :_{\theta} \mu)(x) = \sup\{\beta(x) \mid \mu \circ \beta \subseteq \theta_1, \beta \in S_{\rho, \theta}(M), \beta(0) = \theta(0)\}$$

şeklinde tanımlanan fuzzy kümeye  $\theta_1$  ve  $\mu$ 'nin fuzzy rezidü kümesi denir.

Fuzzy rezidü ideallerdekine benzer olarak

$$\{\beta(x) \mid \mu \circ \beta \subseteq \theta_1, \beta \in S_{\rho, \theta}(M), \beta(0) = \theta(0)\}$$

kümesinde boştan farklı olduğu gösterilebilir.

Bundan sonra fuzzy rezidü  $(\theta_1 :_{\theta} \mu)$  gösterimi kullanıldığında  $\rho(0) \geq \theta(0)$  ve  $\theta_1(0) = \theta(0)$  koşullarının gerçekleştiği varsayılacaktır.

**Lemma 4.4.4**  $\rho \in H(R)$ ,  $\theta \in S_{\rho}(M)$ ,  $\mu \in I_{\rho}(R)$  ve  $\theta_1 \in S_{\rho, \theta}(M)$  olsun. Bu durumda  $(\theta_1 :_{\theta} \mu) \in S_{\rho, \theta}(M)$  dir.

*İspat.* Lemma 4.4.2'e benzer şekilde yapılır. □

Eğer  $\rho = 1$  olması durumunda Lemma 4.4.4'deki koşullar altında rezidü alt-modül tanımı [18, Tanım 4.5.1]'e indirgenir.

**Lemma 4.4.5**  $\theta_1 \in S_{\rho, \theta}(M)$  ve  $\mu \in I_{\rho}(R)$  olsun. Bu durumda

1.  $\theta_1 \subseteq (\theta_1 :_{\theta} \mu)$ ,
2.  $\mu \cdot (\theta_1 :_{\theta} \mu) \subseteq \theta_1$ ,
3.  $(\theta_1 :_{\rho} \theta) \cdot \theta \subseteq \theta_1$  dir.

*İspat.*  $w \in M$  olsun.

$$\begin{aligned} 1. (\mu \circ \theta_1)(w) &= \sup\{\mu(r) \wedge \theta_1(u) \mid w = ru\} \leq \sup\{\rho(r) \wedge \theta_1(u) \mid w = ru\} \\ &\leq \sup\{\theta_1(ru) \mid w = ru\} = \theta_1(w) \end{aligned}$$

Tanımdan  $\theta_1 \subseteq (\theta_1 :_{\theta} \mu)$  olur.

$$\begin{aligned}
2. \quad [\mu.(\theta_1 :_{\theta} \mu)](w) &= \sup_{w=\sum_{i=1}^n r_i m_i} \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu(r_i) \wedge (\theta_1 :_{\theta} \mu)(m_i) \mid r_i \in R, m_i \in M, n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \sup_{w=\sum_{i=1}^n r_i m_i} \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu(r_i) \wedge \sup\{\beta(m_i) \mid \mu \circ \beta \subseteq \theta_1, \beta \in S_{\rho, \theta}(M)\} \right\} \\
&= \sup_{w=\sum_{i=1}^n r_i m_i} \left\{ \sup\left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu(r_i) \wedge \beta(m_i) \mid \mu \circ \beta \subseteq \theta_1, \beta \in S_{\rho, \theta}(M) \right\} \right\} \\
&\leq \sup_{w=\sum_{i=1}^n r_i m_i} \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu \circ \beta(r_i m_i) \mid \mu \circ \beta \subseteq \theta_1, \beta \in S_{\rho, \theta}(M) \right\} \\
&\leq \sup_{w=\sum_{i=1}^n r_i m_i} \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \theta_1(r_i m_i) \mid \mu \circ \beta \subseteq \theta_1, \beta \in S_{\rho, \theta}(M) \right\} \\
&\leq \sup_{w=\sum_{i=1}^n r_i m_i} \left\{ \theta_1\left(\sum_{i=1}^n r_i m_i\right) \mid \mu \circ \beta \subseteq \theta_1, \beta \in S_{\rho, \theta}(M) \right\} \leq \theta_1(w)
\end{aligned}$$

(3)'ün ispatı (2)'ye benzer şekilde yapılabilir.  $\square$

Şimdi vereceğimiz lemma fuzzy  $\rho$ -idealler ve  $\rho$ -altmodüller arasındaki kapsama ilişkisinin rezidü idealler ve rezidü altmodüller için nasıl korunduğunu açıklar.

**Lemma 4.4.6**  $\theta_1, \theta_2 \in S_{\rho, \theta}(M)$  ve  $\mu, \eta \in I_{\rho}(R)$  olsun. *O zaman*

1. Eğer  $\theta_1 \subseteq \theta_2$  ise  $(\theta_1 :_{\theta} \mu) \subseteq (\theta_2 :_{\theta} \mu)$  dir,
2. Eğer  $\mu \subseteq \eta$  ise  $(\theta_1 :_{\theta} \eta) \subseteq (\theta_1 :_{\theta} \mu)$  dir,
3.  $(\theta_1 \cap \theta_2 :_{\theta} \mu) \subseteq (\theta_1 :_{\theta} \mu) \cap (\theta_2 :_{\theta} \mu)$  dir.

*İspat.*  $m \in M$  olsun.

1.  $\theta_1 \subseteq \theta_2$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
(\theta_1 :_{\theta} \mu)(m) &= \sup\{\beta(m) \mid \mu \circ \beta \subseteq \theta_1, \beta \in S_{\rho, \theta}(M)\} \\
&\leq \sup\{\beta(m) \mid \mu \circ \beta \subseteq \theta_2, \beta \in S_{\rho, \theta}(M)\} = (\theta_2 :_{\theta} \mu)(m)
\end{aligned}$$

2. Eğer  $\mu \subseteq \eta$  ise herhangi bir  $\beta \in S_{\rho, \theta}(M)$  için  $\mu \circ \beta \subseteq \eta \circ \beta$  'dir. Bu kapsamayı kullanarak  $(\theta_1 :_{\theta} \eta) \subseteq (\theta_1 :_{\theta} \mu)$  olduğu kolayca gösterilir.

3. (1)'den açıktır.  $\square$

Lemma 4.4.7 fuzzy asal  $\rho$ -altmodüllerin karakterizasyonunda ve seviye altmodüllerin  $M$ 'nin asal altmodülü olduğunun ispatında kullanılacak olan temel özelliklerdendir.

**Lemma 4.4.7**  $R$  birimli, değişmeli bir halka,  $\rho \in H(R)$ ,  $\theta \in S_{\rho}(M)$  ve  $\rho(1) = \rho(0) \geq \theta(0)$  olsun. Eğer  $\theta_1 \in S_{\rho, \theta}(M)$  ve  $\theta(0) = \theta_1(0)$  ise

$$1. r_k \in (\theta_1 :_{\rho} \theta) \Leftrightarrow r_k \cdot \theta \subseteq \theta_1$$

2.  $\mu \in I_{\rho}(R)$  için

$$\mu \subseteq (\theta_1 :_{\rho} \theta) \Leftrightarrow \mu \theta \subseteq \theta_1 \text{ dir.}$$

*İspat.* 1. ( $\Leftarrow$ ) : Eğer  $k = \langle r_k \rangle_{\rho}(r)$  ve  $\langle r_k \rangle_{\rho} \circ \theta \subseteq \theta_1$  olduğunu gösterirsek  $(\theta_1 :_{\rho} \theta)$ 'nin tanımından  $r_k \in (\theta_1 :_{\rho} \theta)$  olur.

$$\begin{aligned} k &= k \wedge \rho(1) \leq (\rho \cdot r_k)(r) = \langle r_k \rangle_{\rho}(r) \\ &\leq \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(s_i) \wedge r_k(r) \mid r = \sum_{i=1}^n s_i r, s_i, r \in R\} \\ &\leq \sup\{\rho(\sum_{i=1}^n s_i) \wedge k \mid r = \sum_{i=1}^n s_i r, s_i, r \in R\} \\ &\leq k \end{aligned}$$

ve  $w \in M$  için

$$\begin{aligned} (\langle r_k \rangle_{\rho} \circ \theta)(w) &= \sup\{\langle r_k \rangle_{\rho}(s) \wedge \theta(u) \mid w = su, s = \sum_{i=1}^n s_i r \in R, u \in M\} \\ &= \sup\{\sup\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(s_i) \wedge k\} \wedge \theta(u) \mid w = \sum_{i=1}^n s_i \cdot r \cdot u, r \in R, u \in M\} \\ &\leq \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \rho(s_i) \wedge \theta(ru) \mid w = ru, r \in R, u \in M\} \\ &\leq \sup\{\theta(\sum_{i=1}^n s_i \cdot r \cdot u) \mid w = \sum_{i=1}^n s_i r u\} = \theta_1(w) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Böylece  $\langle r_k \rangle_\rho \circ \theta \subseteq \theta_1$  olur.

( $\Rightarrow$ ):  $r_k \in (\theta_1 :_\rho \theta)$  olsun.  $k \leq (\theta_1 :_\rho \theta)(r)$  dir.  $w \in M$  için,

$$\begin{aligned} (r_k \cdot \theta)(w) &= \sup \left\{ \bigwedge_{i=1}^n r_k \wedge \theta(w_i) \mid w = r \cdot \sum_{i=1}^n w_i, w_i \in M \right\} \\ &= \sup \left\{ \bigwedge_{i=1}^n k \wedge \theta(w_i) \mid w = r \cdot \sum_{i=1}^n w_i, w_i \in M \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \bigwedge_{i=1}^n (\theta_1 :_\rho \theta)(r) \wedge \theta(w_i) \mid w = r \cdot \sum_{i=1}^n w_i, w_i \in M \right\} \end{aligned}$$

Lemma 4.4.5 – (3)'den

$$\begin{aligned} &\leq \sup \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \theta_1(rw_i) \mid w = r \cdot \sum_{i=1}^n w_i, w_i \in M \right\} \\ &\leq \theta_1(w). \end{aligned}$$

2. ( $\Rightarrow$ ):  $\mu \subseteq (\theta_1 :_\rho \theta)$  olsun.  $r \in R$  için  $\mu(r) \leq (\theta_1 :_\rho \theta)(r)$  dir.

$$\begin{aligned} (\mu\theta)(m) &= \sup \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu(r_i) \wedge \theta(m_i) \mid m = \sum_{i=1}^n r_i m_i, r_i \in R, m_i \in M, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \bigwedge_{i=1}^n (\theta_1 :_\rho \theta)(r_i) \wedge \theta(m_i) \mid m = \sum_{i=1}^n r_i m_i, r_i \in R, m_i \in M, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq \theta_1(m) \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ):  $\mu\theta \subseteq \theta_1$  olsun.  $\mu \circ \theta \subseteq \theta_1$  ve böylece  $\mu \subseteq (\theta_1 :_\rho \theta)$  dir.

□

## 4.5 $L$ -Fuzzy Asal $\rho$ -Altmodüller

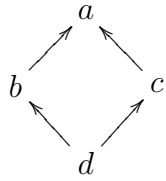
Bu kısımda  $R$  birimli, değişmeli bir halka olarak alınacak ve 3.Bölümde verdiğimiz  $L$ -fuzzy asal altmodül tanımı herhangi bir  $\rho$  fuzzy halkası üzerine genelleştirilecektir.

**Tanım 4.5.1**  $\theta_1 \in S_{\rho, \theta}(M)$  ve  $\theta_1 \neq \theta$  olsun. Eğer  $r_k \in \rho$  ( $r \in R, k \in L$ ) ve  $m_\lambda \in \theta$  için

$$"r_k \cdot m_\lambda \in \theta_1 \Rightarrow m_\lambda \in \theta_1 \text{ veya } r_k \cdot \theta \subseteq \theta_1"$$

koşulu sağlanırsa  $\theta_1$ 'e  $\theta$ 'nın bir  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -altmodülü denir.

**Örnek 4.5.2**  $R = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$  halkası üzerinde  $M$  modülü halkanın kendisi ve  $L$  latisi “



$$\rho(P) = \begin{cases} a, & P = 0, 1 \\ c, & P = x, x + 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan  $L$ -fuzzy  $\rho$ -halkası ve

$$\theta(P) = \begin{cases} a, & P = 0 \\ b, & P = 1, x, x + 1 \end{cases}$$

$L$ -fuzzy  $\rho$ -modül olmak üzere

$$\theta_1(P) = \begin{cases} a, & P = 0 \\ b, & P = x + 1 \\ d, & P = 1, x \end{cases}$$

ile tanımlanan  $\theta_1, \theta'$ 'nin bir  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -altmodülü olduğu Örnek 3.2.3'ye benzer şekilde gösterilebilir.

Tanım 4.5.1'de  $\rho = 1$  alınırsa 3.2.2'de  $L$ -fuzzy asal altmodül tanımı elde edilir.

Eğer  $\rho = 1$  ve  $L = [0, 1]$  olarak alınırsa fuzzy asal  $\rho$ -altmodül tanımı [12, Tanım 3.6] ile çakışır.

$M = R$  ve  $\rho = \theta = 1$  olması durumunda fuzzy asal  $\rho$ -altmodül tanımı [18, Tanım 3.5]'de verilen fuzzy asal ideal karakterizasyonunu verir.

Ayrıca  $M = R, \rho = \theta$  ise  $\rho(1) = \rho(0)$  koşulu altında her  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -altmodül bir  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -idealdir. Gerçekten  $M = R$  ve  $\rho = \theta$  alınırsa her fuzzy  $\rho$ -altmodül aynı zamanda bir fuzzy  $\rho$ -idealdir. Bundan dolayı sadece asallık şartının sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.  $\theta_1 \in S_{\rho, \theta}(M)$  fuzzy asal  $\rho$ -altmodül olsun.  $x, y \in R$  olmak üzere  $\theta_1(xy) \wedge \rho(x) \wedge \rho(y) = \alpha$  ( $\alpha \in L$ ) dersek  $\theta_1(xy) \geq \alpha$  ve  $\rho(x) \geq \alpha$  dir. Buradan  $(xy)_\alpha = x_\alpha \cdot y_\alpha \in \theta_1$  ve  $x_\alpha \in \rho$  ve  $\theta_1$  fuzzy asal  $\rho$ -altmodül olduğundan,  $y_\alpha \in \theta_1$  yada  $x_\alpha \cdot \theta \subseteq \theta_1$  dir.

Eğer  $y_\alpha \in \theta_1$  ise  $\alpha \leq \theta_1(y) \leq \theta_1(x) \vee \theta_1(y)$  olur. Şimdi  $x_\alpha \cdot \theta \subseteq \theta_1$  olsun.  $\alpha \leq \rho(x) \leq \rho(1) \leq \theta(1)$  olduğundan  $\alpha = \alpha \wedge \theta(1) = x_\alpha(x) \wedge \theta(1) \leq x_\alpha \theta(x) \leq \theta_1(x) \leq \theta_1(x) \leq \theta_1(x) \vee \theta_1(y)$  olur. Böylece  $\theta_1$  fuzzy asal  $\rho$ -idealdir.

Cebir de asal altmodül tanımını rezidü idealler kullanılarak verilir. Benzer şekilde  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -altmodüllerin fuzzy rezidü idealler ile karakterizasyonunuda aşağıdaki teorem ile verelim.

**Teorem 4.5.3**  $\rho \in H(R)$ ,  $\theta_1 \in S_{\rho, \theta}(M)$ ,  $\rho(1) = \rho(0)$  ve  $\theta_1 \neq \theta$  olsun.  $\theta_1$ 'in  $\theta$ 'nin bir fuzzy asal  $\rho$ -altmodülü olması için gerek ve yeter koşul  $\mu \in I_\rho(R)$  ve  $\beta \in S_{\rho, \theta}(M)$  olmak üzere  $\mu \circ \beta \subseteq \theta_1$  ise  $\beta \subseteq \theta_1$  veya  $\mu \subseteq (\theta_1 :_\rho \theta)$  olmasıdır.

*İspat.* ( $\Rightarrow$ ):  $\theta_1$   $\theta$ 'nin bir  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -altmodülü,  $\mu \circ \beta \subseteq \theta_1$ ,  $\beta \not\subseteq \theta_1$  ve  $\mu \not\subseteq (\theta_1 :_\rho \theta)$  olsun. Buradan  $\beta(m) \not\subseteq \theta_1(m)$  olacak şekilde bir  $m \in M$  ve  $\mu(r) \not\subseteq (\theta_1 :_\rho \theta)(r)$  olacak şekilde bir  $r \in R$  vardır.

$\mu(r) \wedge \beta(m) \leq \mu \circ \beta(rm) \leq \theta_1(rm)$  yani  $(rm)_{\mu(r) \wedge \beta(m)} = r_{\mu(r)} \cdot m_{\beta(m)} \in \theta_1$  dir.  $\theta_1$ 'in asallığından  $m_{\beta(m)} \in \theta_1$  yada  $r_{\mu(r)} \in (\theta_1 :_\rho \theta)$  dir. Bu ise sırasıyla  $\beta(m) \leq \theta_1(m)$  ve  $\mu(r) \leq (\theta_1 :_\rho \theta)(r)$  demek olur ki kabulümüz ile çelişir. Yani  $\beta \subseteq \theta_1$  veya  $\mu \subseteq (\theta_1 :_\rho \theta)$  dir.

( $\Leftarrow$ ):  $r_k \in \rho$ ,  $m_\lambda \in \theta$  için  $r_k \cdot m_\lambda \in \theta_1$  olsun.

$\langle r_k \rangle_\rho \in I_\rho(R)$  ve  $\langle m_\lambda \rangle_\rho \in S_{\rho, \theta}(M)$  dir. Ayrıca tanımdan

$$(\langle r_k \rangle_\rho \circ \langle m_\lambda \rangle_\rho)(w) = \sup\{\langle r_k \rangle_\rho(s) \wedge \langle m_\lambda \rangle_\rho(u) \mid w = su, s \in R, u \in M\}$$

olduğunu biliyoruz.

$w \notin R(rm)$  ise  $(\langle r_k \rangle_\rho \circ \langle m_\lambda \rangle_\rho)(w) = 0 \leq \theta_1(w)$ .

Eğer  $w \in R(rm)$  ise  $s = \sum_{i=1}^n t_i r \in R$  ve  $u = \sum_{j=1}^{n_1} a_j m \in M$  olmak üzere

$$\begin{aligned} (\langle r_k \rangle_\rho \circ \langle m_\lambda \rangle_\rho)(w) &= \left[ \bigwedge_{i=1}^n \rho(t_i) \wedge k \right] \wedge \left[ \bigwedge_{j=1}^{n_1} \rho(a_j) \wedge \lambda \right] \\ &\leq \bigwedge_{i,j} \rho(t_i a_j) \wedge (k \wedge \lambda) \\ &\leq \theta_1(w) \end{aligned}$$

Böylece  $(\langle r_k \rangle_\rho \circ \langle m_\lambda \rangle_\rho) \subseteq \theta_1$  olur. Hipotezden  $\langle m_\lambda \rangle_\rho \subseteq \theta_1$  veya  $\langle r_k \rangle_\rho \subseteq (\theta_1 :_\rho \theta)$  elde edilir. Bu ise  $m_\lambda \in \theta_1$  veya  $r_k \in (\theta_1 :_\rho \theta)$  olmasını gerektirir.  $\square$

**Lemma 4.5.4**  $\rho \in H(R)$ ,  $\theta_1 \in S_{\rho,\theta}(M)$ ,  $\rho(1) = \rho(0)$ ,  $\theta_1 \neq \theta$  ve  $\theta(0) = \theta_1(0)$  olsun. Eğer  $\theta_1, \theta$ 'nin bir  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -altmodülü ise  $t \leq \theta_1(0) \wedge \rho(0)$  ve  $(\theta_1)_t \subsetneq \theta_t$  olacak şekilde her  $t \in L$  için  $(\theta_1)_t, \theta_t$ 'nin bir asal  $\rho_t$ -altmodülüdür.

*İspat.* Lemma 4.1.8'den  $(\theta_1)_t, \theta_t$ 'nin  $\rho_t$ -altmodülüdür. Göstermemiz gereken  $(\theta_1)_t$ 'nin asal olduğudur. Bunun içinde  $rx \in (\theta_1)_t$  olacak şekilde her  $r \in \rho_t$  ve  $x \in \theta_t$  için ya  $x \in (\theta_1)_t$  ya da  $r.\theta_t \subseteq (\theta_1)_t$  olduğunu göstermeliyiz.

$rx \in (\theta_1)_t$  ise  $\theta_1(rx) \geq t$  dir.Yani  $r_t.x_t \in \theta_1$  olur.  $\theta_1$  fuzzy asal  $\rho$ -altmodül olduğundan ya  $x_t \in (\theta_1)_t$  yada  $r_t\theta \subseteq \theta_1$  dir.

Eğer  $x_t \in (\theta_1)_t$  ise  $t \leq \theta_1(x)$  yani  $x \in (\theta_1)_t$ .

Eğer  $r_t\theta \subseteq \theta_1$  ise her  $w \in \theta_t$  için,  $t \leq r_t(r) \wedge \theta(w) \leq r_t\theta(rw) \leq \theta_1(rw)$  olduğundan  $rw \in (\theta_1)_t$  dir.  $\square$

Cebir de asal altmodüllerin rezidü idealleri asal idealdir. Bu özelliğin fuzzy karşılığı da aşağıdaki teoremden ispatlanmıştır.

**Teorem 4.5.5**  $\rho \in H(R)$ ,  $\rho(1) = \rho(0)$  ve  $\theta_1 \in S_{\rho,\theta}(M)$ ,  $\theta_1 \neq \theta$  olsun. Eğer  $\theta_1, \theta$ 'nin bir  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -altmodülü ise  $(\theta_1 :_\rho \theta)$  bir  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -idealdir.

*İspat.* Lemma 4.4.2'den  $(\theta_1 :_\rho \theta) \in I_\rho(R)$  dir.  $r, s \in R$  için  $\alpha = (\theta_1 :_\rho \theta)(rs) \wedge \rho(r) \wedge \rho(s)$  dersek  $(\theta_1 :_\rho \theta)(rs) \geq \alpha$  yani  $(rs)_\alpha \in (\theta_1 :_\rho \theta)$  dir.  $\langle s_\alpha \rangle_\rho \theta \in S_{\rho,\theta}(M)$  olduğundan, Lemma 4.4.5'den

$$\begin{aligned} (\langle r_\alpha \rangle_\rho \circ \langle s_\alpha \rangle_\rho \theta)(w) &= \sup\{\langle r_\alpha \rangle_\rho(r) \wedge \langle s_\alpha \rangle_\rho \theta(u) \mid w = ru\} \\ &\leq \sup\{\bigwedge_{i=1}^n \alpha \wedge \theta(u_i) \mid w = rs \sum_{i=1}^n u_i\} \\ &\leq \sup\{\bigwedge_{i=1}^n (\theta_1 :_\rho \theta)(rs) \wedge \theta(u_i) \mid w = rs \sum_{i=1}^n u_i\} \\ &\leq \sup\{\bigwedge_{i=1}^n ((\theta_1 :_\rho \theta)\theta)(rsu_i) \mid w = rs \sum_{i=1}^n u_i\} \leq \theta_1(w) \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 4.5.3 'den  $\langle s_\alpha \rangle_\rho \theta \subseteq \theta_1$  veya  $\langle r_\alpha \rangle_\rho \subseteq (\theta_1 :_\rho \theta)$  dır.

Eğer  $\langle s_\alpha \rangle_\rho \theta \subseteq \theta_1$  ise  $\alpha \leq (\theta_1 :_\rho \theta)(r) \leq (\theta_1 :_\rho \theta)(r) \vee (\theta_1 :_\rho \theta)(s)$  olur.

Eğer  $\langle r_\alpha \rangle_\rho \subseteq (\theta_1 :_\rho \theta)$  ise  $\alpha \leq (\theta_1 :_\rho \theta)(s) \leq (\theta_1 :_\rho \theta)(r) \vee (\theta_1 :_\rho \theta)(s)$  olur.

Buradan  $(\theta_1 :_\rho \theta)(rs) \wedge \rho(r) \wedge \rho(s) \leq (\theta_1 :_\rho \theta)(r) \vee (\theta_1 :_\rho \theta)(s)$  dır. Yani  $(\theta_1 :_\rho \theta)$  bir  $L$ -fuzzy asal  $\rho$ -idealdir.  $\square$

**Açık Soru:** 3. Bölümünde verilen Teorem 3.2.5'in genellemesi olarak “  $\theta$  bir fuzzy  $\rho$ -modül ve  $\theta_1, \theta$ 'nin bir fuzzy asal  $\rho$ -altmodülü olmak üzere  $\theta_1; Im\theta_1, Im\theta$  ve seviye altkümeleri kullanılarak karakterize edilebilir mi? ” sorusu bu tezin devamı olarak ele alınabilir. Burada Örnek 4.5.2'ye göre  $|Im\theta_1| > 2$  olduğunu gözlemlemek yararlı olacaktır.

## Kaynaklar

- [1] Acar, U., On  $L$ -Fuzzy Prime Submodules, Hacettepe J.of Math and Stat., 34 (2005) 17-25
- [2] Akgül, M., Some Properties of Fuzzy Groups, J. Math. Anal. Appl., 133 (1988) 93-100
- [3] Birkoff, G., Lattice Theory, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967
- [4] Das, P.S, Fuzzy Groups and Level Subgroups, J. Math. Anal. Appl., 84 (1981) 264-269
- [5] Daus, J., Prime Submodules, J. of Reine Agrew Math, 298 (1978) 156-181
- [6] Goguen, J. A,  $L$ -Fuzzy Sets, J. Math Ana.App. 18 (1967) 147-174
- [7] Jaballah, A. and Mordeson, J.N., Minimal Generating Systems for Fuzzy Ideals, Soochow J.Math., 21 (1995) 183-192
- [8] Kumar R., Fuzzy Subgroups, Fuzzy Ideals and Fuzzy Cosets; Some Properties, Fuzzy Sets and Systems (FSS), 48 (1992) 267-274
- [9] Kumar R., Bhambri S.K., Kumar P., Fuzzy Submodules: Some Analogues and Deviations, FSS, 70 (1995) 125-130
- [10] Liu W., Fuzzy Invariant Subgroups and Fuzzy ideals, FSS, 8 (1982) 133-139
- [11] Liu W., Operations On Fuzzy Ideals, FSS, 11 (1983) 31-41
- [12] Makamma, B. B. and Murali, V. On Fuzzy Prime Submodules, J. of Fuzzy Math., 8 (2000) 4, 831-843
- [13] Makamma, B. B. and Murali, V. On Krull's Intersection Theorem of Fuzzy Ideals, IJMMS, 4 (2003) 251-262
- [14] Malik D. S., Fuzzy Ideals of Artinian Ring, FSS, 37 (1990) 111-115

- [15] Malik, D. S. and Mordeson, J. N., Fuzzy Prime Ideals of A Ring, FSS, 37 (1990) 93-98
- [16] Malik, D. S. and Mordeson, J. N., Fuzzy Maximal, Radicals and Primay Ideals of a Ring, Information Sciences, 53 (1991) 237-250
- [17] Malik, D. S. and Mordeson, J. N., Fuzzy Primary Representation of Fuzzy Ideals, Information Sciences, 55 (1991) 151-165
- [18] Malik, D. S. and Mordeson, J. N., Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing, Singapore, 1998
- [19] Martinez, L., Fuzzy Subgroups of Fuzy Groups and Fuzzy Ideals, J. Fuzzy Math. 3 (1995) 833-849
- [20] Martinez, L., Fuzzy Modules over Fuzzy Rings in Connection with Fuzzy Ideals of Fuzzy Rings, J. Fuzzy Math. 4 (1996) 843-857
- [21] Martinez, L., Prime and Primary  $L$ -Fuzzy Ideals over  $L$ -Fuzzy Rings, FSS, 101 (1999) 489-494
- [22] Mashinchi, M. and Zahedi M. M., On  $L$ - Fuzzy Primary Submodules, FSS, 48 (1992) 231-236
- [23] Mukherjee, T. K. and Sen, M. K., On Fuzzy Ideals of Ring 1, FSS, 32 (1987) 99-104
- [24] Mukherjee, T. K. and Sen, M. K., Prime Fuzzy Ideals of Rings, FSS, 32 (1989) 337-341
- [25] Pan, F. Z., Fuzzy Finitely Genereted Modules, FSS, 21 (1987) 105-113
- [26] Rosenfeld, A., Fuzzy Group, J. Math. Anal. Appl., 35 (1971) 512-517
- [27] Sharpe , Steps in Commutative Algebra, Cambridge University Press, 1990
- [28] Swammy, U. M. and Swammy, K. L. N., Fuzzy Prime Ideals, J. Math. Anal. Appl., 134 (1988) 94-103

- [29] Zadeh, L. A., Fuzzy Set, Inform. and Contr., 8 (1965) 338-353
- [30] Zahedi M. M, Fuzzy Residual Quotient Modules and  $\pi$ -Primary Submodules, FSS, 51 (1992) 333-344
- [31] Zahedi M. M, A Characterization of  $L$ -Fuzzy Prime Ideal, FSS, 44 (1991) 147-160
- [32] Zahedi M. M, A Note on  $L$ -Fuzzy Primary and Semiprime Ideal, FSS, 51 (1992) 243-247

## Dizin

- L*-Fuzzy  $\rho$ -altmodül, 38
  - fuzzy kümenin ürettiği, 42
  - homomorfizması, 44
  - asal, 52, 54
  - rezidü, 49
- L*-Fuzzy  $\rho$ -ideal, 36
  - asal , 37
  - rezidü, 48
- L*-Fuzzy  $\rho$ -modül, 37
- L*-fuzzy asal altmodül, 24, 26
- L*-fuzzy ideal, 9, 11
  - asal, 16
  - fuzzy kümenin ürettiği, 19
  - genelleştirilmiş maksimal, 14
  - maksimal, 13
- L*-fuzzy modül, 20
  - fuzzy kümenin ürettiği, 32
- L*-fuzzy nokta, 16
- Asal altmodül, 26
- asal eleman, 16
- Fuzzy gurup, 8
- Fuzzy halka, 8
- Fuzzy Jacobson Radikali, 15
- Fuzzy Nakayama Lemma, 33
- Nakayama Lemma, 33
- t-seviye kümesi, 11

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ummahan Acar

Doğum Yeri : İzmir

Doğum Tarihi : 1973

Medeni Hali : Evli

### Eğitim ve Akademik Durumu

Lise : 1987-1990 İzmir Selma Yiğitalp Lisesi

Üniversite (Lisans) : 1990-1994 Ege Üniversitesi,  
Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : 1994-1998 Muğla Üniversitesi,  
Fen Bilimleri Enstitüsü

Yabancı Dil : İngilizce

### İş Tecrübesi :

1995- 2000 Araştırma görevlisi, Muğla Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

2000- ... Araştırma görevlisi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü