

TC  
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SOLİTON DALGA SÜREÇLERİNİN MATEMATİKSEL MODELLERİ VE  
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Ramazan TEKİN  
DANIŞMAN : Prof. Dr. Gabil AMİRALI

VAN - 2006

TC  
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SOLİTON DALGA SÜREÇLERİNİN MATEMATİKSEL MODELLERİ VE  
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Ramazan TEKİN

VAN - 2006

## ÖZET

### SOLİTON DALGA SÜREÇLERİNİN MATEMATİKSEL MODELLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

TEKİN, Ramazan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Şubat 2006, 28 sayfa

Bu çalışma non-lineer dalgalar olarak bilinen soliton dalgalarının nümerik çözümleri üzerine yapıldı. 1884 yılında ilk defa İskoçyalı mühendis John Scott Russel tarafından fark edilen soliton dalgalarının çözümü için sonraları bir çok bilim adamı farklı çözümler ortaya koymuştur.

Yapılan çalışmada 1965 yılında Zabusky ve Kruskal tarafından ortaya konulan nümerik çözümler, Korteweg-de Vries (KdV) denklemi için Split Step Fourier ve modifiye edilmiş KdV eşitliği için Sonlu Fark Şemaları kullanılarak, bilgisayar ortamında simülasyon yapıldı. Simülasyonda tek dalga ilerleyişi ve iki dalganın etkileşimleri gösterildi. Nümerik çözümler, gerçek çözümlere yakın değerler bulmak amacı ile uygulanmaktadır. Yapmış olduğumuz “**Soliton dalga süreçlerinin matematiksel modelleri ve nümerik çözümleri**” isimli tez çalışması da bu amaca hizmet etme çabasıdır.

Yapılan çalışma sonunda soliton dalgaların etkileşimlerinde özelliklerini kaybetmeden bir birleri içinden geçebildikleri ve farklı başlangıç değerlerine bağlı olarak farklı nümerik çözümlerin meydana geldiği fark edildi.

**Anahtar kelimeler:** Kısmi diferansiyel denklemler, Nümerik çözüm, Solitonlar, Ters yayılım dönüşümleri



## ABSTRACT

### MATHEMATICAL MODELS AND NUMERIC SOLUTION OF SOLITARY WAVES PROGRESS

TEKIN, Ramazan  
MSc, Mathematical Science  
Supervisor: Prof. Dr. Gabil AMİRALI  
February-2006, 28 pages

The present study was carried out on solution of non-linear waves that known as solitary waves.

Solitary waves was first noticed by Scottish engineer John Scott Russel, However, later many different solution on the solitary waves has been put forward by other researchers. Present study simulated with using simulation model, for KdV equation Split Step Fourier model and for modified KdV equation, Finite Difference Scheme were used, that was produced by Zabusky and Kruskal in 1965. One wave advancing and two waves interaction were demonstrated via simulation. Numerical solution has been used to find out the approximate value to reel solution. The present study was aimed to help this target.

As a result, it has been shown that the interacted solitary waves pass from inside of each other without loosing their identity and different numerical solutions was produced with different initial conditions.

**Key words:** Partial differential equation, Numeric solution, Solitons, Inverse scattering transform

## ÖNSÖZ

Bizim dalga hareketinde ilk algıladığımız olay beklide suyun yüzeyinde gözlediğimiz dalgalardan ileri gelmektedir. Bu aynı zamanda doğal dünyadaki bizim zihinsel modellerimizin büyük bir kısmını oluşturmaktadır. Ancak biz bu olağanüstü olayın (fenomen) zamanına dönebilir ve dalga yayılımlarının farklı formlarının algılanmasını sağlayabiliriz. Su dalgalarının en göze çarpan özelliğini havuzda oynayan çocuklardan gemideki denizcilere kadar çoğu insan nitel olarak fark edebilmektedir. Bu olay dalgaları seyreden herhangi birinin merakını uyandırır. Beklide bu yüzden su dalgalarının nicel olarak anlaşılması hala sınırlı kalmaktadır. Bu alandaki bilgimiz çokta belirgin olmayan ve göz önünde olan dalgaların hareketinde saklıdır. Bizim burada amacımız, doğrusal olmayan durumların çözümünden yola çıkarak nümerik analizlerle gerçek çözümleri bilgisayar ortamında yazılacak bir uygulamayla karşılaştırmaktır. “Soliton Dalga Süreçlerinin Matematiksel Modelleri ve Nümerik Çözümleri” adlı çalışmamız da aynı amaca yönelik olarak önem taşımaktadır.

Bu konuda bana çalışma fikri veren ve yüksek lisans çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen tez yöneticisi kıymetli hocam Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye bana verdikleri destekten ötürü aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ramazan TEKİN

## İÇİNDEKİLER

|  | <b>sayfa</b> |
|--|--------------|
| ÖZET                                   | i            |
| ABSTRACT                               | iii          |
| ÖNSÖZ                                  | v            |
| İÇİNDEKİLER                            | vii          |
| ŞEKİLLER DİZİNİ                        | ix           |
| ÇİZELGELER DİZİNİ                      | xi           |
| SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ         | xiii         |
| 1. GİRİŞ                               | 1            |
| 2. LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ              | 4            |
| 3. MATERYAL ve YÖNTEM                  | 7            |
| 3.1. Zabusky ve Kruskal'ın Çalışmaları | 7            |
| 3.2. Split Step ve Sonlu Fark Şemaları | 9            |
| 3.2.1. Split step şeması               | 9            |
| 3.2.2. Sonlu farklar şeması            | 11           |
| 3.3. Program Kodu                      | 14           |
| 4. BULGULAR                            | 17           |
| 5. TARTIŞMA ve SONUÇ                   | 25           |
| KAYNAKLAR                              | 27           |
| ÖZGEÇMİŞ                               |              |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|   | <b>Sayfa</b> |
|---|--------------|
| Şekil 4.1. Soliton dalga oluşumlarının başlangıç formu.             | 17           |
| Şekil 4.2. Küçük dalga formlarının ortaya çıkış anı.                | 18           |
| Şekil 4.3. Soliton dalga formunun son basamaktaki ilerleyişi.       | 18           |
| Şekil 4.4. Soliton dalgalarının ilk etkileşim anları.               | 19           |
| Şekil 4.5. Soliton dalgaların etkileşimden sonraki durumları.       | 19           |
| Şekil 4.6. Soliton dalga formunun zamana bağlı gelişimi.            | 20           |
| Şekil 4.7. Lineer yayılım dalgasının $t = 0$ anındaki görünümü.     | 21           |
| Şekil 4.8. Lineer yayılım dalgasının $t = 15.72$ anındaki görünümü. | 22           |
| Şekil 4.9. Lineer yayılım dalgasının $t = 51.42$ anındaki görünümü. | 22           |
| Şekil 4.10. Lineer yayılım dalgası.                                 | 23           |
| Şekil 4.11. Soltary dalga.  | 23           |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

|  | <b>Sayfa</b> |
|--|--------------|
| Çizelge 4.1. Solitonların gözlenen ve hesaplanan değerleri | 20           |

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

|            |         |
|------------|---------|
| $\alpha$   | Alfa    |
| $\beta$    | Beta    |
| $\gamma$   | Gama    |
| $\delta$   | Delta   |
| $\lambda$  | Lamda   |
| $\mu$      | Mü      |
| $\pi$      | Pi      |
| $\tau$     | Tau     |
| $\theta$   | Teta    |
| $\xi$      | Ksi     |
| $\eta$     | Eta     |
| $\omega$   | Omega   |
| $\upsilon$ | Upsilon |

### Kısaltmalar

|      |                               |
|------|-------------------------------|
| CI   | Characteristic Interpolation  |
| CN   | Crank Nicholson Şeması        |
| CNLS | Non-linear Çalışmalar Merkezi |
| FFD  | Farklı Fourier Dönüşümü       |
| IST  | Ters Dağılım Dönüşümü         |
| KdV  | Korteweg-deVries              |
| LF   | Leap-Frog Şeması              |
| NS   | Non-linear Schroedinger       |
| PDE  | Kısmi Diferansiyel Denklemler |
| RK   | Runga-Kutta                   |
| RLW  | Düzenli uzun Dalga            |

## 1. GİRİŞ

Solitonlar şekil ve hız özelliklerini kaybetmeden yayılan ve herhangi bir çarpışma esnasında kendilerine has özelliklerini koruyabilen dalgalardır (Wadati, 1983). Soliton dalgaları olarak ta bilinen bu doğrusal olmayan hareketli dalgalar 150 yıldır bilim adamlarının dikkatini çekmiştir. Solitonlar 1834'te fiziğin yeni bir alanı olarak ortaya çıktı. Bu kavramı ilk olarak ortaya atan İskoçyalı mühendis olan John Scott Russell'dır. Solitonların ilk keşfi olarak ta bilinen ve Russell'ın kanal botlarıyla yapmış olduğu deneyin hikayesi oldukça ilginç ve etkileyicidir (Russell, 1845).

Çoğu doğal sistem non-lineerdir ve bu yüzden non-lineer sistem denklemleri ile modellenmiştir. Lineer ve lineer olmayan denklemler arasındaki fark lineer sistemleri basit süperpozisyon ilkeleri karşılamaktadır. Bu, lineer sistemlerin herhangi iki çözümü (birbirine eklenmesi) aynı denklem için yeni çözümü oluşturur (Bullough 1988). Bu çözüm lineer olmayan problemler için geçerli değildir. Lineer problemlerin çözümünü içeren bu süperpozisyon ilkeleri parçalara ayrılabilir ki bunlar daha sonra bağımsız olarak çözülebilirler.

*“Ben çift beygir gücüyle giden bir botun, dar bir kanaldan geçerken, hareketini gözliüyordum. Bot aniden durunca kanalda hareketli olan su kitlesinin birikmediğini gördüm. Bu su kitlesi, botun uç kısmının etrafında birikti. Ve daha sonra aniden arkaya doğru yayıldı. Büyük bir hızla öne doğru tek başına bir su dalgasının meydana geldiğini fark ettim. Bu yuvarlanmış belirgin su kitlesinin hızının azalmadan ve formunun değişmeden kanal boyunca ilerleyişine devam ettiğini fark ettim. Onu at sırtında takip ettim, ona yetiştiğimde saatte yaklaşık 8-9 mil hızla ilerleyişine devam ettiğini gördüm. Onu 1-2 mil takip ettikten sonra kanalın dönüşünde kaybettim. Böylece 1834'ün Ağustos ayında benim Translasyon Dalgası olarak adlandırdığım ilk görüşümü tanıtma şansım oldu.”*

Russell, yaptığı seri çalışmalarla bu dalgaların anlamını ortaya koydu. Russell'dan öncede gelgit olaylarında meydana gelen bu dalgaların kimse farkına varmamıştı. Russell hayatı boyunca bu su dalgalarının önemine inanmıştır. Ancak bilim adamları 19. ve 20. yüzyıllarda bu dalgaların farklı özelliklerini keşfedebilmiş, dalgaların yayılış ve birbirleri içinden geçiş özellikleri üzerinde durmuşlardır. Russell, su dalgalarının kendi içinde yeterli dinamizme sahip olduğunu ve bu dalgaların nesne parçalarının özelliklerinden dolayı ortaya çıktığına inanmıştır. Şuan, halen 1960'ların ortasında değiliz. Russell'ın değerli fikirleriyle başlayan doğrusal olmayan dalgaların çözümleri için günümüzde modern bilgisayarlar kullanılmaktadır (Wolfram, 1999).

Russell dalga hızının (c), dalga genişliğine (A), suyun derinliğine (h) ve yerçekimine bağlı olduğunu söyledi. Buna göre:

$$c = \sqrt{g(A+h)} \quad (1.1)$$

Hızın dalga genişliğine bağlı olduğu gerçeği oldukça önemlidir. Çünkü bu, dalga denkleminin lineer olmadığını gösterir. Klasik lineer dalga denklemiyle karşılaştırıldığında lineer olmayan dalga denkleminin farklı olduğu kolayca görülebilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (1.2)$$

Buradan da açıkça görülebileceği gibi, Russell'ın dalgaları için geliştirdiği dalga denklemi lineer olmayan bir özelliğe sahiptir. Bilim adamları lineer olmayan özelliklerinden dolayı bu dalgaları Soliton olarak adlandırmışlardır. Bu kavram lineer olmayan dalgaların karakteristik özelliklerinden ileri gelmektedir (Drazin, 1983). Russell'ın keşfinden 60 yıl sonra Alman matematikçiler olan Korteweg ve de Vries nihayet soliton dalga denklemlerini açıkça ortaya koymuşlardır. Bugünde KdV denklemi olarak bilinen teoremi ortaya koymuşlardır (Korteweg ve de Vries, 1895).

$$u_t(x,t) + 6u(x,t)u_x(x,t) + u_{xxx}(x,t) = 0 . \quad (1.3)$$

Bu formülde  $x$  ve  $t$  değişkenlerine bağlı olan  $u$  fonksiyonu açıklanacaktır.  $u(x,t)$ ,  $x$  boyutunda  $t$  zamanında dalganın yüksekliğini ifade etmek için kullanılır. Burada kullanılan 6 faktörü sadece çözümü daha basit yapabilmek için kullanılan bir sabittir.

Buradaki amaç analitik çözümlerin nümerik yöntemlerle dorusal olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlere (KDD) uygulanmasını açıklamaktır. Russell tarafından açıklanan olayda, dorusal olmayan parça değişimlerini ifade etmektedir. Kısaca KDD; farklı değişken fonksiyonlar ile yönelen, birden fazla bilinmeyenli farklı fonksiyonlara sahip olan matematiksel bir denklemdir. Bu farklı fonksiyonlardan birinin açıklanması için KDD'in pratik uygulamalarının, zamanı nitelendiren ( $t$ ) ve diğer değişkenleri ( $x,y,z$ ) üzerine bir uygulama yapılırsa, uygulamanın basit olabilmesi için tek bir değişken boyutta ( $x$ ) düşünmek gerekir. Bu yüzden yalnız  $x$  ve  $t$  değişkenlerine bağlı olan  $u$  fonksiyonunu bulmak için KdV'in basit formu olan:

$$u(x,t) = f(x - ct) , \quad (1.4)$$

formunda düşünmemiz gerekir (burada  $c$  dalganın hızını niteler) (Fermi ve ark., 1955). Burada iki yönde de hareketi ifade edebilmek için:

$$f(x - ct) \text{ ve } f(x + ct) \text{ formu kullanılır.}$$

Bu formüllerden yola çıkarak dalganın daha büyük ilerleyişleri için daha yüksek genişliğe sahip olması gerektiği ortaya konabilir. Bu değişimi sahildeki su dalgalarının tepe kısmının önde giden çukur kısmından daha hızlı hareket ettiği durumda gözleyebiliriz. Çukur kısım ile tepe kısmı başlangıçta beraber hareket ederler. Önde giden tepe kısım yükselir ve uç kısım genişler ve sonunda çukur kısım içinde dağılır. Ancak ilerleyiş devam ettiği zaman arkadan gelen dalganın önündeki dalgayla karşılaşmasından sonra her iki dalganın da şekillerini kaybetmedikleri ve aynı hızlarıyla ilerleyişlerine devam ettikleri görüldü bu durum sahilde ardı ardına giden dalgalarda ve gelgit olaylarında rahatlıkla görülebilir. Yukarıya doğru yayılan ve daha sonra yükselişe sebep olan bu olayı dağılım olarak nitelendirmek yanlış olur çünkü bu olay normal dalga dağılımı ile ters bir durumdur. Doğal olarak bu iki etkenin birbiri içinde sönme durumu akla gelir. Ancak bu olay da klasik dalgalardan çok farklı bir olaydır. İşte KdV denklemi de lineer olmadan

ilerleyen her iki dalga teriminin hesaplanmasını kapsamaktadır. Lineer dalgalardan farklı olan bu olay, Russell'ın dalgalarında olduğu gibi soliton dalgaların kendilerine has özelliklerinin sonucudur. KdV denkleminde soliton dalgaların çözümünün ilginç bir yönü de birbirleri içinden geçtikleri zaman herhangi bir şekil ve anlam değişikliğine uğramamalarıdır.

Bugün solitonlar çoğu yerde kullanılmaktadır. Herhangi bir sinyal iletiminde, sinyalin zarara uğramadan ve yeterli büyüklükte hedefe ulaşması önemlidir. Normal sinyallerin durumları değişebilir ve genişliklerinde farklılıklar olabilir. Bu lineer dalgalar etrafa yayılabilir ve sinyalleri zayıflayabilir. Elektromanyetik dalgaları otomatik olarak yineleyen aletlere ihtiyaç kalmayacaktır. Çünkü solitonlar sıradan dalgalara göre genişliklerini değiştirmeden sabit tutabilmektedirler. Soliton dalgalar ile 10.000 km' ye kadar özellikleri değişmeden başarıyla sinyal iletilebilmektedir. Bununla birlikte çarpıştıklarında birbirlerinden etkilenmemekte ve sinyaller optik fiberler boyunca her iki yönde iletilebilmektedir. Sinyaller, gideceği yere orijinal durumlarında ve yeterince anlaşılabilir büyüklükte ulaştırılabilir (Vvedenskii, 1992).

Süperpozisyon ilkeleri yokluğu ile meydana gelen zorluktan dolayı son 40 yılda non- lineer sistemlerde devrimsel işlemlerin olduğu görülmüştür. Bunlara, deneylerdeki ilerlemeler, non-lineer sistemlerin bilgisayar simülasyonundaki olağanüstü başarılar ve hamilton sistemleri üzerine yapılandırılmış metotlarla, ters spectral transformların da kullanıldığı yeni matematiksel analitik araçlar öncülük etmiştir. Olayların tam olarak anlaşılabilmesi için teorik bilgisayar ve deneysel bilim arasındaki sinerji, yeni araştırmaları beraberinde getirecektir

Doğal sistemler üzerindeki araştırmalar genelde, sıvı dinamiğinde yapılan denemelerden, materyal bilimi ve sıvıların kimyasal aktivitelerinden türevlenen tek kısımlı PDE'ler ile başlamıştır. Bunların çoğu non-lineer dalga çözümleri veya soliton çözümleri olarak bilinir. Bu sınırlı bilgiler daha sonraları nümerik simülasyonlarla genişletilmiştir. Modeller, dağılma, ilerleme terimleri veya başlangıçta ihmal edilen etkilerinde katılması ile daha da zenginleştirilmiştir. Günümüzde bilgisayar bu işlemlerin çözümünde en büyük role sahiptir, analitik ve deneysel araştırmalara öncülük etmektedir.

## 2. LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Bu güne kadar Soliton dalgaların ilerleyişleri ve etkileşimleri üzerine değişik birçok çalışma yapılmıştır. Lineer olmayan alanlardaki çalışmalarda son zamanlarda büyük gelişmeler kaydedilmiştir. Özellikle lineer olmayan dalga yayılımıyla, fiber optik iletişim sistemleri gibi yeni uygulamaların başlatılması ve sıvıların dinamiğinde çözülmemiş bir çok klasik uygulama alanında yeni veriler elde edilmiştir.

KdV denklemi belirli yapıdaki su dalgalarının yayılımını açıklayan bir model olarak ortaya atılmıştır. Bu eşitlikte;  $u = u(x,t)$  terimi dalga genişliğini,  $t$  zaman dilimini  $x$  ise mesafeyi ifade etmektedir.  $x$  ile birlikte dalganın yayılım yönü artmakta ve dalga ilerlemektedir. Bu denklem değişmeden ayrılan solitary dalga denklem çiftlerinin lineer olmayan etkileşim sonuçları özelliğine sahip olan dalga çözümü olarak kabul edilmektedir. Bu yüzden soliton özellikleri üzerine ilk defa nümerik çalışmaların Zabusky ve Kruskal tarafından yapıldığı söylenebilir ve bu çalışmaların kanıtı olarak KDD denklemlerinin çözümü için kullanılan ters yayılım metodunun başarısı gösterilebilir (Zabusky ve Kruskal, 1965).

Su dalgaları için alternatif bir modelde Peregrine ve ark. tarafından ortaya konulmuştur (Peregrine, 1966).

$$u_t + u_x + (u^2)_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.1)$$

bu model solitary dalga çözümü olarak kabul edildi.

KdV denklemi yüzeysel su dalgalarının kesintisiz olarak yayılımını açıklayan ilk model olarak ortaya atılmıştır. Daha sonra plazmadaki iyon ses dalgaları, plazmadaki manyetohidrodinamik dalgalar, elastik çubuklarda boyamsal dağılan dalgalar, sıvı-gaz baloncuk karışımlarındaki basınç dalgaları, tüplerdeki aşağıya doğru dönüş hareketi, lineer olmayan ses dalgaları ve ısısal hareketlerde kullanıldığı görüldü (Scott ve ark., 1973).

Son zamanlarda Benjamin, Bona ve Mahoni alternatif bir denklem üzerinde tartıştılar. Bu düzenlenmiş uzun dalga denklemi (RLW) olarak adlandırıldı:

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0. \quad (2.2)$$

RLW denklemiyle KdV denklemi yaklaşık olarak aynı bilgisel yapılar içermektedir. RLW denklemi, KdV denkleminin problemsel yönlerine engel olduğu ve genel olarak daha fazla matematiksel özelliklere sahip olduğu ileri sürülmüştür (Benjamin ve ark., 1972).

KdV denklemindeki yorumlanabilir farklar Vliegthart tarafından tartışılmıştır (Vliegthart, 1971). RLW denklemi için yorumlanabilir farklar ise Peregrine tarafından öne atılmış ve aynı zamanda Hammack tarafından da kullanılmıştır (Hammack, 1973).

1970'lerin başında Zakharov ve Shabat, Kaup ve arkadaşları lineer olmayan KDD'lerin geniş bir alanında kullanılan ters yayılım metodunu geliştirdiler. Bu gelişme yoğunlaşmış madde fiziği ve elementer parça fiziğinden lineer olmayan optiklere kadar farklı bilim dallarında kabul edildi. Kısmen de olsa solitonlar klasik

ve kuantum fiziği alanında ayrıca optik iletişim aletlerinde sayısız uygulamalar gösterdi.

1974'te soliton dalgaları alanında meydana gelen gelişim basamaklarından biride tamamıyla integre edilebilir soliton denklemleridir. Bu periyottan önce lineer olmayan denklemlerdeki kapsamlar ters yayılım metotlarının uzaysal çözümleri için sınırlayıcı olmaktadır. 1974 ve 1975'te ters yayılım metodu periyodik KdV denklemlerinin kuasi periyodik yayılımla karşılaştırılması sonucu geliştirildi. Bu yeni yaklaşım kısmen ters yayılım teorisine kısmen de cebirsel metotlar üzerine kuruldu. Bu gelişmelerden sonra bu alanda hızlı gelişmeler yaşandı. Bu gelişmeler, integre edilebilir sistemlerin görüş açısını değiştirdi (Zakharov ve Shabat, 1979).

1980'lerin başlarında integre edilebilir denklemlerin kuasi periyodik fonksiyonlarında gerçek  $\theta$  fonksiyonunun bulunuşu bu alanda yeni cebirsel geometrik teknikler üretmiştir. Bununla birlikte bu yeni etkili sonuçlar cebirsel geometride olduğu kadar doğrusal olmayan KDD'lerin çözümünde de etkili olmuştur (Moerbeke, 1994).

Soliton denklemlerinin çözümü için kullanılan bazı modeller; çoklu soliton çözümleri, KDD ile açıklanan akışın değişim hiyerarşisi, ters yayılım teorisi, ters yayılan geçişler, farklı boyutlardaki periyodik solitonların cebirsel geometrik açıklaması, Lax çiftleri, Bäcklaund dönüştürücüsü olarak sayılabilir.

Bäcklaund, KdV çözümünü kendi geliştirdiği dönüşüm ile yeniden oluşturdu ve bu teknik doğrusal olmayan süperpozisyonlarda kullanıldı. Bugün nümerik analizlerin sonuçları Bäcklaund dönüşümü ile yorumlanarak gerçek solitonlarla karşılaştırma yapılmaktadır (Beals ve Sattinger, 1993).

Lineer olmayan sistemlerin dönüm noktası bundan 40 yıl önce Los Alamosta gerçekleşmiş ve bunun öncülüğünü Fermi , Pasta ve Ulam'ın nümerik simülasyonları oluşturmuştur. Bundan 10 yıl sonra, bu çalışma tam olarak integre edilebilir sistemlerin motivasyonunu sağlayan Zabusky ve Kruskal'ın yaptığı temel ilerlemeyi başlatmıştır. Bu anlamda 1997'nin mayısında Los Alamos doğal laboratuvarlarında Lineer olmayan çalışmalar merkezi (CNLS) tarafından organize edilen fiziksel sistemlerde non-lineer dalgalar üzerine konferans düzenlenmiştir. Konferansta yapılan uygulamalar özel bir sayı olan *physica A* dergisinde toplanmıştır. Bu sayı konferanstaki özel çalışmalara katkıda bulunma amacı ile yayınlanmıştır.

Gardner, Greene, Kruskal ve Miura'nın 1967 de ilan edilen yayınlarında şimdi KdV'nin başlangıç değer problemini çözmek için kullanılan ve ters dağılım transformu (IST) olarak bilinen bir metodu tanıtıldı. Bu metot,  $U(x,0)$  başlangıç değeri bir sabiti yeterince hızlı bir şekilde  $x \rightarrow \pm\infty$  yaklaştırdığını kabul etmektedir.

Solitary dalgaların yayınlanan ilk incelemesi İskoçya'da sığ bir kanalda kayıkla ilerleyen John Scott Russel tarafından yapılmıştır. Ancak dalga yayılımındaki belirgin değişiklikleri tam olarak fark edemediğinden 10 yıl süren uzun denemeler sonucu ünlü yayını olan "dalgalar üzerine kayıtlar" adlı derlemelerini 1844'te yayınladı. Onun yayınından kısa bir süre sonra çalışması büyük oranda fark edildi ve bilimsel çevrelerde bazı durumların yeniden oluşturulması zorunluluğu ortaya çıktı. Bu çalışmaların referansında lineer olmayan dalgalar konusunda derlemeler yapılmaya başlandı. KdV eşitliği Korteweg ve de Vries tarafından 1895 yılında yayınlandı. KdV eşitliği genel yönsüz formlar için yazılmıştır.

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.3)$$

1960'ların ortalarında Zabusky ve Kruskal'ın çalışmaları tüm non-linear dalga modelleri paradigmasında yerini aldı. O zamanda bilgisayar uygulamaları onların ilk bilimsel araştırmalarının ortaya çıkmasını sağladı ve ilgili matematik dalındaki en önemli dönemeç deneysel bilimdeki fonksiyonların gelişimi oldu. Onlar bu solitary dalganın başka bir solitary dalgasıyla çarpıştığında değişmediğini ortaya çıkardılar.

KdV ve BO modellerinde olduğu gibi eşitlikler integre edilebilirse ters dağılım dönüşümü (Inverse Scattering Transform) solitary dalgalarının çözümleri ve özelliklerinin analitik açıklamaları için büyük fayda sağlayacaktır (Toland, 1981). İki yönlü yayılımı açıklamak isteyen sistemler için ise durum tatmin edici değildir. Zaten 1871'lerde Boussinesq'un çalışmaları da bu alanda olmuştur ve bunu takip eden yüzyılda da fazla çalışma yapılmamıştır. Bugün ise spesifik bir sistem olan Boussinesq tipi sistemler için bazı global sonuçlar vardır (Bona ve ark., 1996). Tek yönlü yayılım durumlarında tüm sistemlerin tahmini oluşu gerçeği vardır. Parametrelerin Euler eşitleri tahminidir ve bunların gerçek soliton dalga eşitlikleri olduğu varsayılır.

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + (\eta u)_x + au_{xxx} - b\eta_{xx} = 0, \\ u_t + \eta_x + uu_x + c\eta_{xxx} - du_{xxx} = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Burada  $x \in R$  yayılım hattındaki uzunluğu,  $t \geq 0$  zamanı,  $\eta(x,t)$  dalganın yüksekliğini,  $u(x,t)$  yatay hızı a,b,c ve d  $\theta$  değerine bağlı sabit parametreleri ifade eder. Farklı modellerde elde edilen farklı parametrelerin hepsi tahminidir (Focas, 1996).

Bona Smith sistemi:

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + (\eta u)_x - \frac{1}{3}u_{xxx} = 0, \\ u_t + \eta_x + uu_x - \frac{1}{3}(u_t + \eta_x)_{xx} = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Bu sistemde Cauchy problemleri için tam bir kabul bulunmamaktadır ve standart olmayan nümerik yaklaşımlar Winther tarafından analiz edilmiştir (Winther, 1982).

Spektral kodlar periyodik fonksiyonları içermekte ve periyodik çözümleri hesaplamaktadır. Ancak pratik olarak bu Cauchy problemlerini tam olarak ortaya koymamaktadır. Yapılan çalışmada dalga formları iyi lokalize olmuş ve sifıra doğru hızlı bir şekilde ilerlemektedir. Bu yüzden bilgisayar kullanılarak periyodik uzunluklar ve tahminlemeler için spektral sahneler kullanıldı (Schonbeck, 1981). Periyodiklik aralıklarında hesaplanan periyodik çözümler orijinal Cauchy probleminin çözümüne uygun yaklaşımlardır.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1. Zabusky ve Kruskal'ın Çalışmaları

Solitonların güçlü etkileşimlerin üstesinden gelebilmelerinin ölçüsü , dalga tepesini oluşturan lineersizliğe doğru eğim ve dalganın düzleşmesine yol açan lineer yayılım arasındaki ince dengeden ileri gelmektedir. Dengenin bu tipinin oluşumu sıvı mekaniğinde oldukça yaygındır.

Biz non-linear ortamda, solitary dalga yayılımlarının etkileşimleri gözledik ve bu fenomenin KdV eşitliğindeki nümerik çözümlerini analiz ettik.

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0. \quad (3.1)$$

Bu eşitlik tek boyutlu sığ su dalgaları için açıklanmıştır (Stoker, 1957). Buna ilave olarak KdV'in uzaysal, periyodik ve nümerik çözümleri momentumun ve enerjinin korunumu ile elde edilmiştir (Gardner ve ark., 1960). Ancak 1.0 genişlikte ve küçük  $\delta^2$  ye göre uyarlanmış farklı başlangıç şartları için bu fenomenin hesaplanması üç zaman aralığında Zabusky ve Kruskal'a göre açıklanmıştır.

- I. Başlangıçta KdV eşitliğinin yalnızca ilk iki terimi geçerli olmakta ve klasik oluşum görülmektedir. Burada  $u$  negatife doğrudur.
- II. İkinci basamakta ise  $u$  belirgin bir düzeye geldikten sonra, eşitlikteki 3. terimde önem kazanmakta ve süreklilik formunun önlenmesini sağlamaktadır. Küçük dalga boylarının ilerleyişi ön tarafın solundan gelişmeye başlar. Bu yayılımın genişliği zamanla büyür ve nihayet her bir yayılım belirgin bir genişliğe ulaşır ki bu gelişim soldan sağa doğru lineer olarak artar. Sonuç olarak KdV eşitliğinin tek solitary dalga çözümünü açıklayan formuna sahip olur.
- III. Son olarak her bir "solitary dalgası" veya bilinen adıyla "solitonlar" genişlikleriyle orantılı olarak belli oranda muntazam bir şekilde hareket etmeye başlarlar. Buradaki  $u$  'nun değeri dalga sinyaliyle ilişkilidir. Böylece periyodiklik iki veya daha fazla solitonun uzaysal olarak birbirleri üzerinden atlamalarını ve non-linear olarak etkileşimlerinden dolayı solitonlar birbirlerinden ayrılmaya başlarlar. Kısacası etkileşimlerinden sonra bile solitonlar ölçü ve şekilleri etkilenmeksizin tekrar aynı şekilde ortaya çıkarlar. Başka bir ifadeyle solitonlar bir diğerrinin içinden geçerken özelliklerini kaybetmezler.

Bizim yapacağımız çalışmada da lineer olmayan fiziksel bir işlem işlenecek ve bu işlemin nümerik analizi yapılacaktır. KdV eşitliğindeki  $c$  hızlı sabit çözümlere bakıldığında

$$u = U(x - ct), \quad (3.2)$$

formülü ortaya çıkmaktadır. Bu denklem bize dalga ilerleyişlerinin periyodik çözümlerini verir. Ancak biz burada sonsuzdaki asimtotik sabit çözümler ile ilgilenmekteyiz.

$$x = \pm\infty \text{ da } u = u_\infty$$

Böyle bir hesaplamamın çözümü ise ;

$$u = u_\infty + (u_0 - u_\infty) \sec h^2[(x - x_0)/\Delta], \quad (3.3)$$

Burada  $u_0$ ,  $u_\infty$  ve  $x_0$  rasgele kullanılan sabitlerdir. Buradan

$$\Delta = \delta[(u_0 - u_\infty)/12]^{-1/2}, \quad (3.4)$$

ve

$$c = u_\infty + (u_0 - u_\infty)/3, \quad (3.5)$$

Bu formüllerde önemli olan ve çözümler de ayırıcı olan dalga sinyallerinin çok yakın aralıklarla oluşturulmasına rağmen dalgaların formlarını ve özelliklerini kaybetmemesidir. Bu fenomendeki nümerik hesaplamalar  $\delta = 0.022$  değeri ile hesaplanmış ve periyodik başlangıç şartları

$$u|_0 = \cos \pi x. \quad (3.6)$$

Kabul edilmiştir. Böylece başlangıç olarak  $\max|\delta^2 u_{xxx}| / \max|uu_x| = 0.004$  olduğundan eşitlikteki 3. terim ihmal edilebilir ve  $u_t + uu_x = 0$  eşitliğiyle işlem yapılabilir. Bu formülün nümerik çözümü tam bir ilişkinin elde edilmesiyle çözülebilir.

$$u = \cos \pi(x - ut), \quad (3.7)$$

ve sonuç olarak  $x = \frac{1}{2}$  ve  $t = T_B = 1/\pi$  durumunda  $u$  süreksizliğe doğru yönelir.

Hesaplanan tüm bu formülasyon sistemlerine uygun olarak bilgisayar ortamında yazılan kodlarla olay simüle edilmeye çalışılmıştır.

Simülasyonda; kullanılan KdV fonksiyonun nümerik şeması:

$$U_i^{j+1} = U_i^{j-1} - \Delta t \frac{U_{i+1}^j + U_i^j + U_{i-1}^j}{3} \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{\Delta x} - \delta^2 \Delta t \frac{U_{i+2}^j - 2U_{i+1}^j + 2U_{i-1}^j - U_{i-2}^j}{(\Delta x)^3} \quad (3.8)$$

Burada  $i = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $U_{i+N}^j = U_i^j$  ve  $U_i^j = u(i\Delta x, j\Delta t)$  koşulları kabul edilmiştir. Ayrıca periyodik sınır şartı  $0 \leq x < 2$  olarak kabul edildi.

Parametreler;

$$\Delta x = L/N, \quad \Delta t = 0.1(\Delta x)^3 / \delta^2,$$

N=128 ve L=2 olarak alındı.

### 3.2. Split Step ve Sonlu Fark Şemaları

#### 3.2.1. Split step şeması

Bu bölümde KdV eşitliği için Split-Step şeması açıklanmıştır. Bu şema fiberlerdeki optik yayılım modelinde kullanılan Non-linear Schroedinger (NS) (Agrawal, 1995) eşitliğinin bir varyasyonudur. KdV eşitliği aşağıdaki formda yazılabilir

$$\partial_t u = (L + N)u, \quad (3.9)$$

operatörler ise;

$$L = -\partial_x^2 - \partial_{xxx}^3, \quad (3.10)$$

$$N = -u\partial_x u. \quad (3.11)$$

Her bir zaman anında yayılım ve dağılım eşzamanlı olarak etkindir. Operatörlerin ayrılma fikri, yayılımın ve dağılım bağımsız olarak etkilendiği durumlarda kısmi basamakların sekanslarıyla, her bir integral basamağının yer değiştirmesinden ileri gelmektedir.

$$\partial_t u = Lu, \quad (3.12)$$

$$\partial_t u = Nu. \quad (3.13)$$

Yayılım anını ( $\delta L$ ) takip eden dağılım anının ( $\delta N$ ) bulunduğu en basit splitting şeması,  $\delta^2$  sırasında lokal olarak  $\delta t$  sırasında global olarak hata göstermektedir. Bu yüzden bu şema pratik uygulamalar için yeterli değildir. Herhangi bir yarı adımlı yayılımı ( $\delta L/2$ ) takip eden non-linear adım ( $\delta N$ ) ve diğer bir yarı adımlı yayılım ( $\delta L/2$ ) ile, lokal hata ( $\delta^3$ ) ve global hata ( $\delta^2$ ) olur. Buna Simetrik Splitting şeması denmekte ve bizim kodlarımızda buna dayanmaktadır.

#### A. Dağılım Anı

(3.12) deki eşitlik lineer olduğundan bunun çözümü için Fourier dönüşüm metodu kullanılabilir. Başlangıç dalga genişliğinin dönüşümü

$$\bar{u}(0, k) = F[u(0, x)], \quad (3.14)$$

burada  $F$  dönüşüm operatörünü ifade eder. (3.12) deki eşitliğin dönüştürülmüş versiyonunun çözümü

$$\bar{u}(\delta t, k) = \bar{u}(0, k) \exp[-i\omega(k)\delta t], \quad (3.15)$$

yayılım fonksiyonu

$$\omega(k) = k - k^3. \quad (3.16)$$

son dalga genişliği

$$u(\delta t, x) = F^{-1}[\bar{u}(\delta t, k)]. \quad (3.17)$$

bu metodun nümerik uygulamalarında  $F$  farklı bir Fourier dönüşümünü ifade etmektedir (DFT). DFT teorisi Press ve ark. (1992) tarafından açıklanmıştır. Biz bu yayılım şemasını (3.12) deki eşitliği kullanarak test ettik. Başlangıç değeri olarak,

$$u(0, x) = a \exp(-x^2 / 2l^2), \quad (3.18)$$

test işleminde  $l$  ve  $t$  için belir sabit değerler seçilerek başlangıç ve son dalga genişlikleri gösterilmeye çalışıldı.

### B.Yayımlı anı

Runga-Kutta (RK) şemaları genellikle (3.13) teki eşitliğin NS versiyonunu çözmek için kullanılmıştır. Ancak RK şemaları (3.13) deki eşitliğe uygulandığında kararlı olmamaktadır. Bu nedenle eşitliğin çözümü için  $u$ 'nun değerinin karakteristik dalgalarda yer değiştiren üç noktalı Lagrange formülü kullanıldı. Şuan, bizim içinde gerekli olan bu noktalar Eulerian grid noktaları olarak bilinmektedir. Bu şema Characteristic-Interpolation (CI) olarak isimlendirilmektedir.

Bazıları CI şemasını lineer yayılım eşitliklerinin uygulamalarında değerlendirebilir.

$$\partial_t u + \partial_x u = 0. \quad (3.19)$$

$u$  değerinin  $i\delta t$  zamanında  $x_j^E = j\delta x$  Eulerian pozisyonunda bir değer olduğunu varsayalım. Daha sonra  $u$  değeri  $(i+1)\delta t$  zamanında  $x_j^L = x_j^E + \delta t$  Lagrangian pozisyonunda olur. Şimdi  $u_{j-1}^L, u_j^L$  ve  $u_{j+1}^L$  sırasıyla  $x_{j-1}^L, x_j^L$  ve  $x_{j+1}^L$  Lagrangian pozisyonlarında  $u$  değerini ifade etmelidir.  $x_{j-1}^L \leq x \leq x_{j+1}^L$  zaman aralığında birileri  $u$  değerini üç-noktalı polinomial interpolasyon ile tahmin edilebilir.

$$u^{(3)}(x) = u_j^L + \left( \frac{u_{j+1}^L - u_{j-1}^L}{2\delta x} \right) (x - x_j^L) + \left( \frac{u_{j+1}^L - 2u_j^L + u_{j-1}^L}{\delta x^2} \right) \frac{(x - x_j^L)^2}{2}. \quad (3.20)$$

(3.20) deki eşitliği takiben  $x_j^E = x_j^L - \delta t$  arasındaki ilişki

$$u_j^{i+1} = u_j^i - c \left( \frac{u_{j+1}^i - u_{j-1}^i}{2} \right) + c^2 \left( \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{2} \right), \quad (3.21)$$

Burada  $c = \delta t / \delta x$  yayılım sayısıdır. Zaten bizim çözüm metodumuzda Lax ve Wendroff metotlarından (Press ve ark., 1992; Hoffman, 1992) ayrıdır. (3.21) deki eşitliğin kararlılık analizini yapmak için

$$u_j^i \propto r^i \exp(ikj\delta x), \quad (3.22)$$

burada  $k$  dalga sayısıdır. (3.22) deki eşitlik formülünün (3.21) de yerine konmasıyla

$$r = 1 - c^2 [1 - \cos(k\delta x)] - ic \sin(k\delta x). \quad (3.23)$$

ve bunu takiben

$$|r|^2 = 1 - 4c^2(1 - c^2) \sin^4(k\delta x/2). \quad (3.24)$$

Böylece  $c \leq 1$  için CI şeması kararlıdır.  $c = 1$  gibi özel durumlarda (3.21) deki formül  $u_j^{i+1} = u_{j-1}^i$  gerçek formülüne dönüştürülebilir. (3.24) teki formülden yola çıkarak  $\tau$  büyüklüğü 1 den  $(k\delta x)^4$  sırasına kadar farklılık gösterebilir. Dalga sayısının iyi bir çözümü için bu farklılık göz ardı edilebilir ( $k\delta x \ll 1$ ). (3.23) deki formülde  $r = \exp(-i\omega\delta t)$  değeri yerine konursa

$$\sin(\omega\delta t) \approx c \sin(k\delta x) \quad (3.25)$$

ve böylece

$$\omega \approx k - [(1 - c^2)\delta x^2/6]k^3. \quad (3.26)$$

Böylece  $c < 1$  için CI şeması zayıf bir yayılım gösterir.  $c = 1$  özel durumunda ise CI şeması yayılım göstermemektedir.

Daha önceki analizler non-linear yayılım eşitliklerine direkt uygulanamamaktaydı. Bunun sebebi lineer ve non-linear eşitlikler arasındaki benzerliklerden kaynaklanmaktadır. Bazıları CI metodunu  $|u|c \ll 1$  durumunda ve  $|u|$  en büyük dalga genişliğindeyken kararlı olmasını umabilir. Bu beklentiler nümerik olarak ta doğrulanmalıydı.

### 3.2.2. Sonlu farklar şeması

Üst kısımdaki sonuçlar split step şemasının çok iyi çalıştığını göstermiştir. Bu şemanın en büyük dezavantajı Fourier dönüşümünü kullanımına has olan periyodik sınırlayıcı faktörlere ihtiyaç duymasıdır. Bu bölümde periyodik ve aperiodyk sınırlayıcı şartların kullanımını açıklayan sonlu fark şeması açıklanmıştır.

#### A. Crank-Nicholson şeması

KdV eşitliği dağılan dalga yayılımında model olduğundan beri bu eşitliğin çözümü için (Press ve ark., 1992; Hoffman, 1992) Crank-Nicholson (CN) şemasını kullanılmıştır. CN şemasını lineer KdV eşitliklerine uygulayarak değerlendirilebiliriz. Bu eşitliğin sonlu farklar versiyonu

$$\begin{aligned} & u_j^{i+1} + c(u_{j+1}^{i+1} - u_{j-1}^{i+1})/4 + d(u_{j+2}^{i+1} - 2u_{j-1}^{i+1} + 2u_{j-1}^{i+1} - u_{j-2}^{i+1})/4 \\ & = u_j^i - c(u_{j+1}^i - u_{j-1}^i)/4 - d(u_{j+2}^i - 2u_{j-1}^i + 2u_{j-1}^i - u_{j-2}^i)/4 \end{aligned} \quad (3.27)$$

burada yayılım sayısı  $c = \delta t/\delta x$  ve dağılım sayısı  $c = \delta t/\delta x^3$ . Ansatz 'ın (3.21) deki formülü (3.26) daki formüle uygulandığında

$$r = \frac{1 - ic \sin(k\delta x)/2 - id [\sin(2k\delta x) - 2 \sin(k\delta x)]/2}{1 + ic \sin(k\delta x)/2 + id [\sin(2k\delta x) - 2 \sin(k\delta x)]/2}. \quad (3.28)$$

bu durumda CN şeması herhangi bir şart olmadan kararlıdır. Bu özellik CN şemasının avantajıdır. Ancak asıl önemli olan CN şeması ile ilişkili olarak nümerik dağılımın elde edilmesidir.  $r = \exp(-i\omega\delta t)$  değerinin (3.28) de yerine koyulmasıyla

$$\sin(\omega\delta t) = \frac{c \sin(k\delta x) + d \sin(2k\delta x) - 2d \sin(k\delta x)}{1 + [c \sin(k\delta x) + d \sin(2k\delta x) - 2d \sin(k\delta x)]^2 / 4}. \quad (3.29)$$

iyi çözümlenmiş bir dalga sayısı elde edilebilmesi için  $(k\delta x \ll 1)$  (3.29) eşitliği

$$\omega \approx k - k^3 - [(2 + c^2)\delta x^2/12]k^3. \quad (3.30)$$

eşitlik (3.30) deki zayıf nümerik dağılım  $c$ 'nin her bir değeri için CN şemasıyla oluşturulmuştur. Bu gerçek olmayan dağılımın asıl nedeni (3.27) deki eşitliğin yayılım terimidir. Bunun yanı sıra  $c \sim 1$  ile dağılım katsayısının büyüklüğü sınırlanabilir. Hatta bu zayıf dağılım bizimde ilgilendiğimiz uzun zaman değerlerinde dalgayı değiştirerek bozabilir. Bu özellikse CN şemasının dezavantajlarını ortaya koymaktadır. Bunun yanında CN şeması kesin olduğundan, non-lineer yayılım terimi içeren KdV eşitliklerinin uygulama alanları için daha fazla çalışma gerekmektedir.

### B. Leap Frog şeması

Alternatif olarak Leap-frog (LF) şeması kullanılabilir. KdV fonksiyonun

$$\partial_t u + \partial_x u + \partial_{xxx} u = 0. \quad (3.31)$$

sonlu farklar versiyonu

$$u_j^{i+1} = u_j^{i-1} - c(u_{j+1}^i - u_{j-1}^i) - d(u_{j-2}^i - 2u_{j+1}^i + 2u_{j-1}^i - u_{j-2}^i). \quad (3.32)$$

(3.22) deki Ansatz'ın ifadesini (3.34) teki eşitlikte  $r - 1/r = -2i \sin(\omega\delta t)$  gerçekliği kullanılarak yerine koyarsak

$$\sin(\omega\delta t) = c \sin(k\delta x) + d[\sin(2k\delta x) - 2 \sin(k\delta x)]. \quad (3.33)$$

yayılmının olmadığı ( $d = 0$ ) durumunda, LF şeması (3.33) teki eşitliğe bağlı olarak  $c \leq 1$  için kararlıdır. (3.31) deki eşitliğin yayılım terimlerinde iyi çözümlenmiş dalga sayıları için

$$\omega \approx k - [(1 - c^2)\delta x^2/6]k^3 \quad (3.34)$$

$c = 1$  gibi özel durumlar için nümerik dağılım yoktur ve (3.30) daki eşitlik  $u_j^{i+1} - u_{j-1}^i = -(u_{j+1}^i - u_j^{i-1})$  olur, ki bu uygun olan gerçek formüldür. Yayılmının olmadığı ( $c=0$ ) durumlarda  $d \leq 2/(3\sqrt{3})$  için LF şeması kararlılık göstermiştir. (3.31) deki eşitlikte dağılım teriminin dalga sayısını çözülmesi için

$$\omega \approx -k^3. \quad (3.35)$$

(3.34) ve (3.35) teki eşitliklerden sonra LF şemasıyla ilişkili nümerik dağılım elemine edilebilir. Bunun yanı sıra LF şeması kesin olduğundan onun non-lineer yayılım eşitliklerine uygulanmasının bir önemi yoktur. Bu özellikler onun avantajıdır. Bunla birlikte ikinci kararlılık şartlarıyla ilişkili  $\delta t$  deki sınırlamalar LF şemasının elverişsiz kullanılmasına yol açmaktadır.

### C. Hibrit şema

Tekrar hatırlamak gerekirse sıvı hareketlerinden türetilen KdV eşitliği, dalga genişliğinin küçük ve dalga uzunluğunun fazla olduğu durumlarda gerçekleşmiştir. Bu kabullenmeyle birlikte  $\partial_t u \approx -\partial_x u$  ile KdV eşitliğinin fiziksel eşitliği

$$(1 - \partial_{xx}^2) \partial_t u + \partial_x (u + u^2/2) = 0. \quad (3.36)$$

(3.36) daki eşitlik modifiye edilmiş KdV eşitliği olarak bilinir. Yayılım terimlerine LF şemasının uygulanması mümkündür. Bu şemanın tüm eşitliklere yayılmasının düşünülmesi modifikasyonlardaki avantajları ortaya koyar. İlk olarak,  $\partial_{xxx}^3$  terimi CN şemasında olduğu gibi LF şemasını kesin hale getirmektedir. İkinci olarak, (3.27) deki pentadiagonal eşitlik sistemini tridiagonal sisteme dönüştürmektedir. Modifiye olmuş KdV eşitliğinin sonlu farklar versiyonu

$$-eu_{j-1}^{i+1} + (1+2e)u_j^{i+1} - eu_{j+1}^{i+1} = -eu_{j-1}^{i-1} + (1+2e)u_j^{i-1} - eu_{j+1}^{i-1} - c[f(u_{j+1}^i) - f(u_{j-1}^i)] \quad (3.37)$$

burada  $e = 1/\delta x^2$  ve  $f(u) = u + u^2/2$ . (3.21) deki Ansatz fonksiyonunu (3.35) deki eşitliğin lineer versiyonun da yerine koyarsak

$$\sin(\omega \delta t) = \frac{c \sin(k \delta x)}{1 + 4e \sin^2(k \delta x/2)}. \quad (3.38)$$

doğru çözümlenmiş dalga sayıları için

$$\omega \approx k - k^3 - [(1 - c^2) \delta x^2 / 6] k^3. \quad (3.39)$$

böylece (3.37) deki formülle ilişkili nümerik dağılım elemine edilebilir ve elverişli zaman adımları eşzamanlı olarak sürdürülebilir. Bu özellik hibrit şemasının üçüncü avantajıdır.

(3.35) deki formül şemanın iki adımını da açıkladığından ilk adım için ayrı bir formüle ihtiyaç vardır. Kesin formül olarak

$$u_j^1 = u_j^0 - c[f(u_{j+1}^0) - f(u_{j-1}^0)]/2 - d(u_{j+2}^0 - 2u_{j+1}^0 + 2u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0)/2, \quad (3.40)$$

bu formül orijinal KdV eşitliğinin sonlu farklar versiyonudur.

### E. Periyodik Olmayan Sınırlayıcı Şartlar

Sonlu farklar şemasının temel avantajı periyodik olmayan sınırlayıcı şartlar ile de kullanılabilmesidir. (3.36) deki eşitlikte görüldüğü gibi KdV eşitliği ile modellenen fiziksel dalgalar soldan sağa doğru ilerler. Dolayısıyla sol sınırlayıcıda kullandığımız şart

$$u_0^{i+1} = u_b [(i+1)\delta t], \quad (3.41)$$

burada  $u_b$  isteğe bağlı bir fonksiyondur. Sağ sınırlayıcılarda KdV eşitliğini lineer yayılım eşitlikleriyle  $(\partial_t + \partial_x)u = 0$  yer değiştirdik ve zaman içindeki ileriki farkları ve geçmişteki mesafe farklarını sonlu farklar eşitliğini elde etmek için kullandık

$$u_n^{i+1} = u_n^i - c(u_n^i - u_{n-1}^i). \quad (3.42)$$

$c = 1$  olduğu zaman (3.42) teki eşitlik modeli tamamıyla lineer yayılım gösterir. Bu modifikasyonlarla, (3.37) deki eşitlikteki sistem tridiagonaldır.

Benzer bir çok sınırlayıcı şart Durran tarafından ortaya konulmuştur. KdV eşitliğinde olduğu gibi fiziksel dalgalar sağa doğru ilerlemesine rağmen (3.37) deki eşitlikle hesaplanan dalgalar sola doğru hareket eder. (3.37) ve (3.42) eşitliklerindeki dağılım ilişkisi bunu göstermektedir. Fiziksel dalgalar ilerlediğinde enerjilerin bir kısmı sola doğru yayılım gösteren hesaplanabilir dalgalara transfer edilir. Sol sınırlayıcılarda hesaplanabilir dalgalarla birleşen enerji (3.42) deki şartla fiziksel dalgalara transfer edilir ve yansıma işlemi devam eder. Eğer sınırlayıcı şartlar seçilir ve düzgün bir şekilde yerine getirilirse tutulan enerji olay enerjisinin küçük bir fraksiyonu olabilir ve bu zamanın değişmeyen fonksiyonudur.

### 3.3. Program Kodu

Çalışmamızda, java geliştirdiğimiz Applet'te önceki bölümlerde bahsettiğimiz şemaları kodlayarak modellerin doğruluğu lineer yayılım ve dağılımları, non-lineer yayılımları ve solitary dalga ilerleyişleri bilgisayar ortamında simüle edildi. Bu uygulamada kullanılan program kodlarının bir kısmı aşağıdaki gibidir;

Uygulamada kullanılacak parametrelerin hazırlandığı kodlar;

```
double xmin = 0.0;
double xmax = 2.0;
. . .
dx = (xmax - xmin)/grid;

// dt = 0.01*dx*dx*dx/ZKKdVeq.delta/ZKKdVeq.delta;
// dt = 0.02*dx*dx*dx/ZKKdVeq.delta/ZKKdVeq.delta;
// dt = 0.05*dx*dx*dx/ZKKdVeq.delta/ZKKdVeq.delta;
dt = 0.1*dx*dx*dx/ZKKdVeq.delta/ZKKdVeq.delta;

kdv_eq = new ZKKdVeq(grid, dx, dt);
setDataSine(kdv_eq.u);
kdv_eq.setInitialValues();
this.data = new double[num_data][grid+1];
```

Sinüs dalgası;

```
public void setDataSine(double u[]){
    for(int i=0; i<=grid; i++){
        u[i] = Math.cos(2*Math.PI*i/grid);
    }
}
```

Gauss;

```
public void setDataGauss(double u[]){
    for(int i=0; i<=grid; i++){
        u[i] = Math.exp((double)-(i-grid/2.)*(i-grid/2.)/400.);
    }
}
```

Soliton başlangıç şartları;

```
for(int i = 0; i <= grid; i++){
    double x = dx * (i-(double)grid/2);
    double D = delta / Math.sqrt(p/12.);
    double e = Math.exp(x / D);
    double s = 2.0 / (e + 1.0/e);
    u[i] = p * s * s;
}
}
```

Zabusky ve Kruskal çalışmalarına göre  $u$ 'nun hesaplandığı kodlar;

```
for(int i = 0; i <= grid; i++){ u2[i] = u1[i]; u1[i] = u[i]; }
double a = (1./3.)*dt/dx;
double b = delta*delta*dt/dx/dx/dx;
u[0] = u2[0] - a*(u1[1]+u1[0]+u1[grid-1])*(u1[1]-
u1[grid-1])
        - b*(u1[2]-2*u1[1]+2*u1[grid-1]-u1[grid-
2]);
u[1] = u2[1] - a*(u1[2]+u1[1]+u1[0])*(u1[2]-u1[0])
        - b*(u1[3]-2*u1[2]+2*u1[0]-u1[grid-1]);
for(int i = 2; i <= grid-2; i++){
u[i] = u2[i] - a*(u1[i+1]+u1[i]+u1[i-1])*(u1[i+1]-u1[i-1])
        - b*(u1[i+2]-2*u1[i+1]+2*u1[i-1]-u1[i-2]);
}
u[grid-1] = u2[grid-1]
        - a*(u1[grid]+u1[grid-1]+u1[grid-2])*(u1[grid]-
u1[grid-2])
        - b*(u1[1]-2*u1[grid]+2*u1[grid-2]-u1[grid-3]);
u[grid] = u[0];
Time++;
```

CI şemasına göre  $u$ 'nun hesaplandığı kodlar;

```
for(int i = 0; i <= grid; i++){ u2[i] = u1[i]; u1[i] = u[i]; }
double a = dt/dx;
double b = a*a;
u[0] = u2[0] - a*(u1[1]-u1[grid-1])
```

```

        - b*(u1[2]-2*u1[grid-1]+2*u1[grid-1]-
        u1[grid-2]);
    u[1] = u2[1] - a*(u1[2]-u1[0]) - b*(u1[3]-
    2*u1[0]+2*u1[0]-u1[grid-1]);
    for(int i = 2; i <= grid-2; i++){
        u[i] = u2[i] - a*(u1[i+1]-u1[i-1])
    + b*(u1[i+2]-2*u1[i-1]+2*u1[i-1]-u1[i-2]);
    }
    u[grid-1] = u1[grid-1]
        - a*(u1[grid]-u1[grid-2])/2
        + b*(u1[grid]-2*u1[grid-1]+u1[grid-2])/2;
    u[grid] = u[0];
    Time++;

```

LF şemasına göre göre  $u$  'nun hesaplandığı kodlar;

```

for(int i = 0; i <= grid; i++){ u2[i] = u1[i]; u1[i] = u[i]; }
double a = 1;//dt/dx;
double b = dt/(dx*dx*dx);
u[0] = u2[0] - a*(u1[1]-u1[grid-1])
        - b*(u1[2]-2*u1[grid-1]+2*u1[1]-u1[grid-
        2]);
u[1] = u2[1] - a*(u1[2]-u1[0])
        - b*(u1[3]-2*u1[0]+2*u1[2]-u1[grid-1]);
for(int i = 2; i <= grid-2; i++){
    u[i] = u2[i] - a*(u1[i+1]-u1[i-1])
        - b*(u1[i+2]-2*u1[i-1]+2*u1[i+1]-u1[i-2]);
}
u[grid-1] = u2[grid-1] - a*(u1[0]-u1[grid-2])
        - b*(u1[1]-2*u1[grid-2]+2*u1[0]-u1[grid-
        3]);
u[grid] = u[0];
Time++;

```

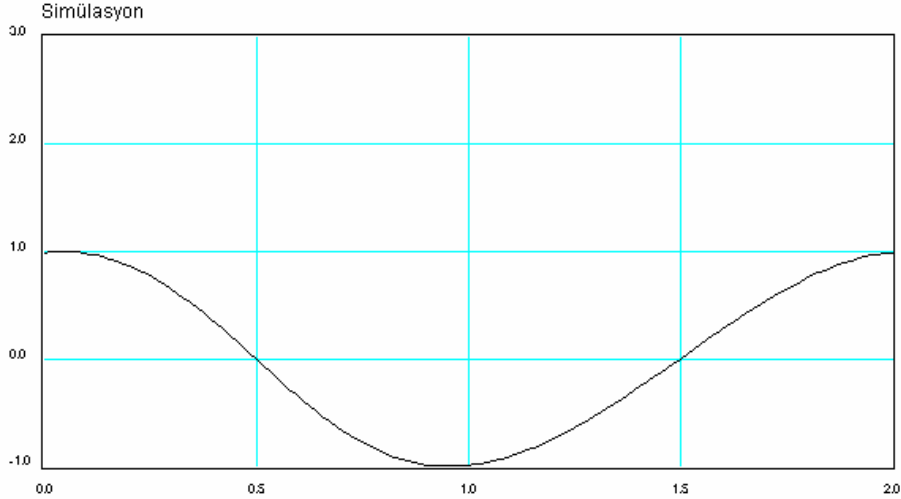
#### 4. BULGULAR

İlk çalışmamız olan Zabusky ve Kruskal'ın çalışmaları için; KdV fonksiyonun nümerik çözümü kullanılan şema,

$$U_i^{j+1} = U_i^{j-1} - \Delta t \frac{U_{i+1}^j + U_i^j + U_{i-1}^j}{3} \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{\Delta x} - \delta^2 \Delta t \frac{U_{i+2}^j - 2U_{i+1}^j + 2U_{i-1}^j - U_{i-2}^j}{(\Delta x)^3}, \quad (4.1)$$

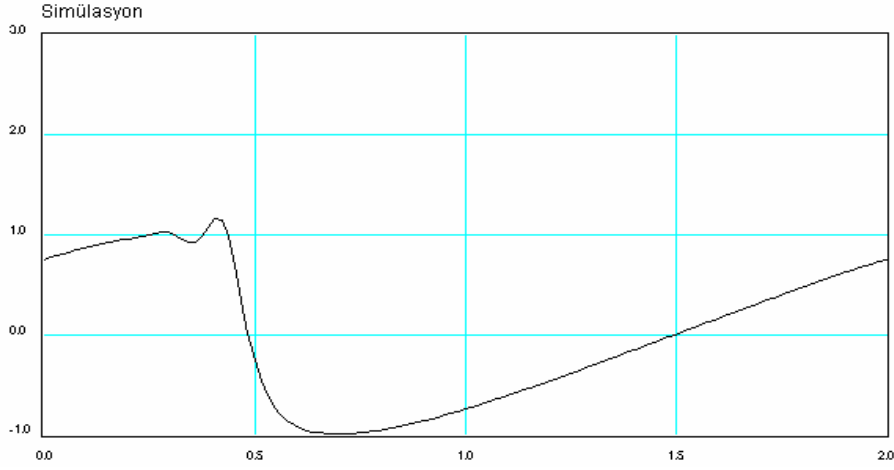
Bu çalışmada elde edilen sonuçlar tek boyutta ve sığ su dalgaları için geçerlidir. Buna ilaveten KdV'nin uzaysal, periyodik ve nümerik çözümleri momentumun ve enerjinin korunumu ile elde dılmıştır. 1.0 genlikle ve küçük  $\delta^2$ 'ye göre uyarlanmış farklı başlangıç şartları için 3 zaman aralığı incelendi.

1. Başlangıçta, KdV eşitliğinin ilk iki terimi etkin olmakta klasik olay oluşumu gözlenmiştir. Burada  $u$  negatife (-) doğrudur.



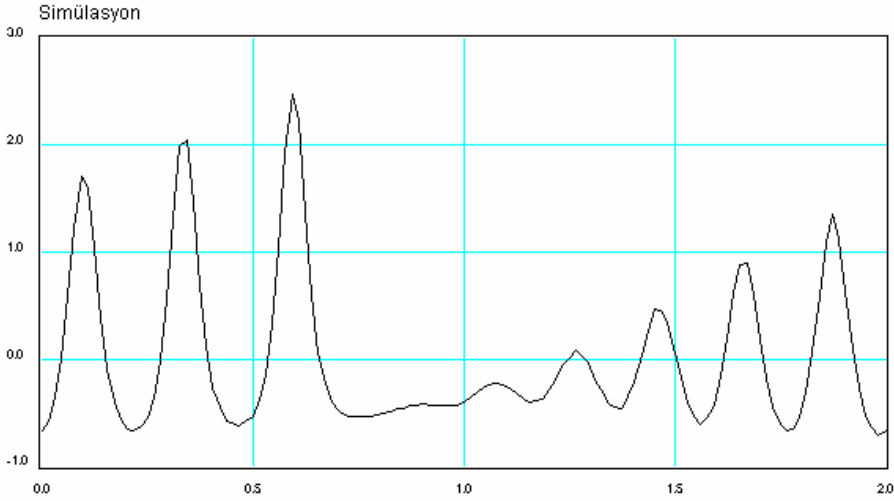
Şekil 4.1. Soliton dalga oluşumlarının başlangıç formu.

2. İkinci basamakta,  $u$  belirli bir düzeye geldikten sonra eşitliğin KdV denkleminin 3. terimi önem kazanmakta süreksizlik formunu engellemektedir. Küçük dalga boylarının ilerleyişi ön tarafın solundan gelişmeye başlar. Bu yayılışın genişliği büyür ve nihayet her bir yayılım sabit bir genişliğe ulaşır (bu sağdan sola doğru lineer artar). Son olarak, KdV eşitliğinin Solitary dalga çözümünün şeklini alır.



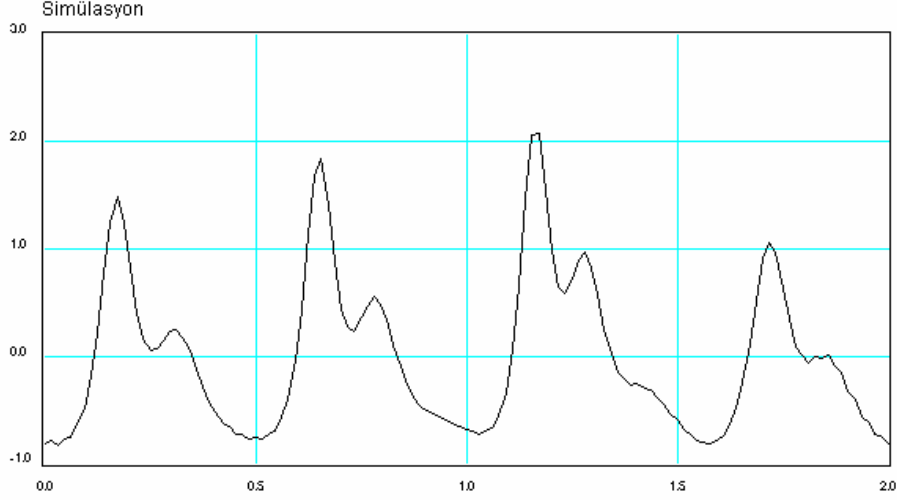
Şekil 4.2. Küçük dalga formlarının ortaya çıkış anı.

3. Son adımda, her bir “solitary-dalga sinyali” veya soliton belli oranda muntazam bir şekilde (genişlikle orantılı olarak) hareket etmeye başlar. Bu solitonların farklı yayılım göstermesini sağlar. Periyodik olarak, iki veya daha fazla soliton uzaysal olarak birbirleri üzerinden geçer ve non-lineer şekilde etkileşirler.



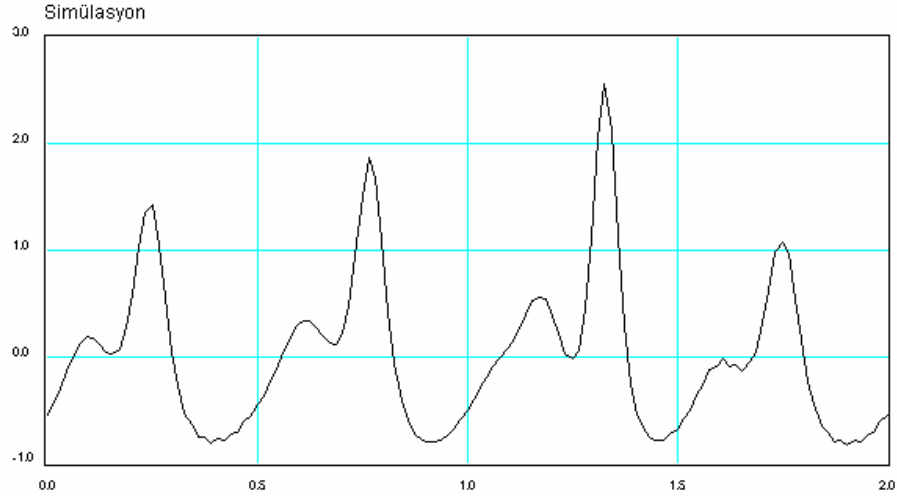
Şekil 4.3. Soliton dalga formunun son basamaktaki ilerleyişi.

Solitonlar etkileşimlerden sonra ölçü ve şekillerinde değişim olmaksızın tekrar ortaya çıkarlar. Başka bir ifadeyle bir diğerinden geçerken özdeşliklerini kaybetmezler.



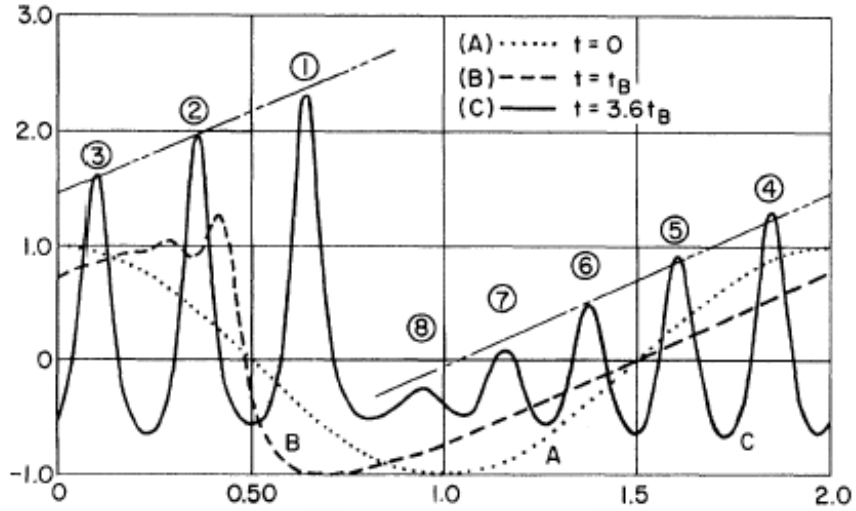
Şekil 4.4. Soliton dalgalarının ilk etkileşim anları.

İlk etkileşim anlarında dalga hızlarında bir değişim olmadığı, tam olarak birbirleri içinden geçerken dalga genişliği ve yüksekliğinin etkileştiği dalga boyutuna göre farklılaştığı gözlenmiştir.



Şekil 4.5. Soliton dalgaların etkileşimden sonraki durumları.

Soliton dalgalarının etkileşimden sonra tekrar eski formlarını kazanarak ilerleyişlerine devam ettiği ve her etkileşimde sahip oldukları formların değişmediği fark edilmiştir.



Şekil 4.6. Soliton dalga formunun zamana bağlı gelişimi.

Şekilde A eğrisi başlangıç değerlerini, B eğrisi ise  $T_B$  zamanındaki fonksiyonunu gösterir  $x < 1/2$  için yayılım yapısı yaklaşık çözüme ulaşabilmek için ihmal edilen 3. türedden ileri gelmektedir.  $t=3.6T_B$  zamanında C eğrisi yayılımdan gelişen 1 den 8'e kadar numaralandırılmış soliton dizilerini gösterir. Bu çözümlerin açıklanamayan özellikleri, dalga sinyallerindeki genişliğin lineer değişimlerinden kaynaklanmaktadır.

Çizelge 4.1. Solitonların gözlenen ve hesaplanan değerleri ( $\delta = 0.022$ ,  $t=3.6T_B$ ).

| Sinyal no | Gözlenen Genlik |                  | Genişlik |            | Hız (c)  |            |
|-----------|-----------------|------------------|----------|------------|----------|------------|
|           | $-u_\infty$     | $u_0 - u_\infty$ | Gözlenen | Hesaplanan | Gözlenen | Hesaplanan |
| 1         | 325             | 1739             | 0.0445   | 0.0456     | 227      | 254        |
| 2         | 401             | 1597             | 0.0475   | 0.0476     | 110      | 131        |
| 3         | 491             | 1485             | 0.0492   | 0.0493     | 0        | 4          |
| 4         | 544             | 1318             | 0.0522   | 0.0516     | -99      | -105       |
| 5         | 574             | 1115             | 0.0567   | 0.0568     | -169     | -202       |
| 6         | 584             | 885              | 0.0636   | 0.0639     | -273     | -289       |
| 7         | 558             | 610              | 0.0769   | 0.0767     | -361     | -354       |
| 8         | 453             | 302              | 0.099    | 0.109      | -443     | -353       |

Çizelgede sinyallerin genişliğini onların gözlenen ve hesaplanan enleri verilmektedir. Tabloda görüldüğü gibi ilk 7 soliton için dalga genişlikleri ve hızları birbirleri ile uygunluk göstermektedir.

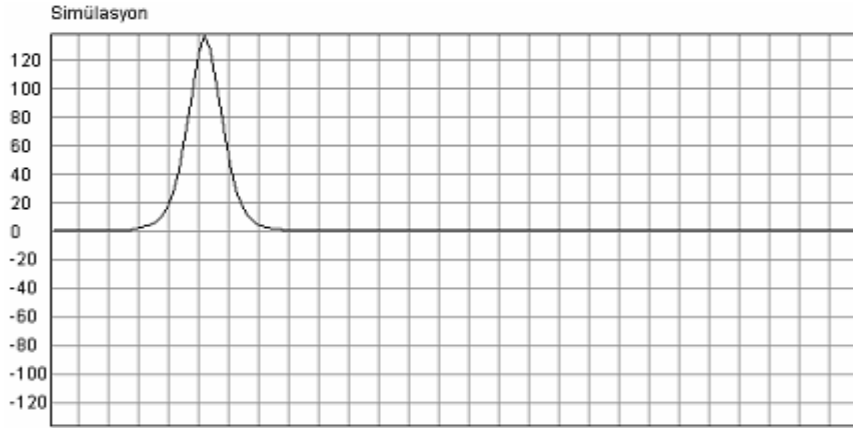
Gözlenen değerler ( $c$  dışında)  $t=3.6T_B$  de  $u$  ve  $u_{xx}$ 'in nümerik değerlerinden elde edilmiştir.  $u_0$  her bir sinyalin gözlenen maksimum değeridir;  $u_0 - u_\infty$  (ve böylece  $u_\infty$ ) ve  $\Delta_{gözlem}$   $u_{xx}$ 'in elde edilen minimum değerinden elde edilmiştir.

$$\Delta_{gözlem} = \left(24\delta^2 \left| \min u_{xx} \Big|_{x=x_0} \right| \right)^{1/4}, \quad (4.2)$$

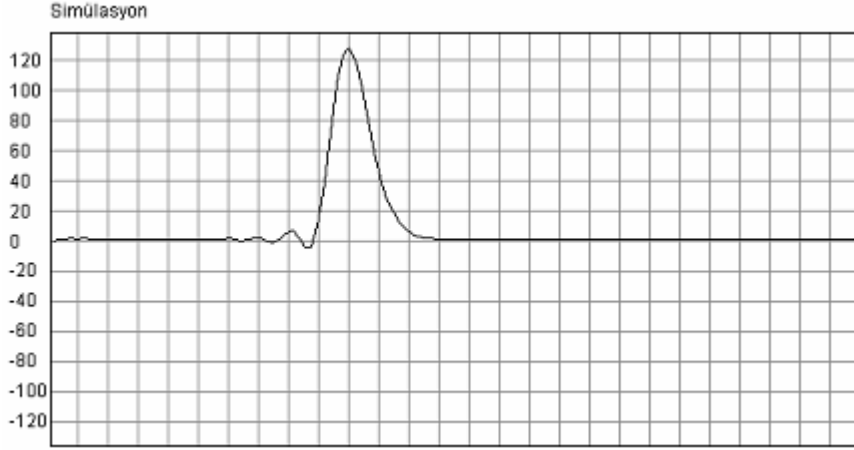
$$u_0 - u_\infty = 12\delta^2 / \Delta_{gözlem}^2. \quad (4.3)$$

Sonraki çalışmalarımız olan Split Step ve Sonlu Fark şemaları için;

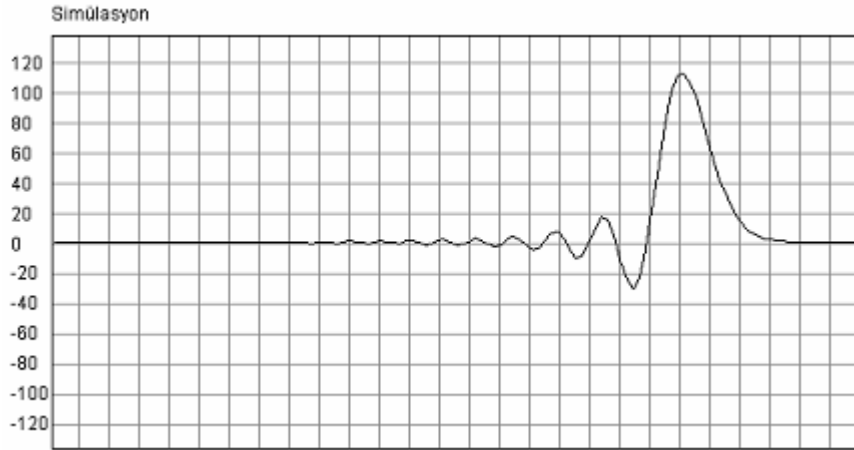
Split-Step şemasının tamamını kontrol edebilmek için KdV eşitliğini nümerik olarak çözümledik. Solitary dalga çözümleriyle ilişkili başlangıç değerleri için (4.4)  $a=0.1$  ve  $t=1320$  olarak alındı. Başlangıç ve sonraki dalga genişliklerinin görünüşleri aşağıda Şekil 4.7, Şekil 4.8 ve Şekil 4.9 da gösterilmiştir. Bunun yanı sıra split-step şemasıyla elde edilen nümerik dalga hızının gerçek dalga hızından çok az bir farkta olsa  $(1+a)$  düşük olduğu gözlenmesine rağmen dalga profili çok iyi korundu.



Şekil 4.7. Lineer yayılım dalgasının  $t = 0$  anındaki görünümü.



Şekil 4.8. Lineer yayılım dalgasının  $t = 15.72$  anındaki görünümü.



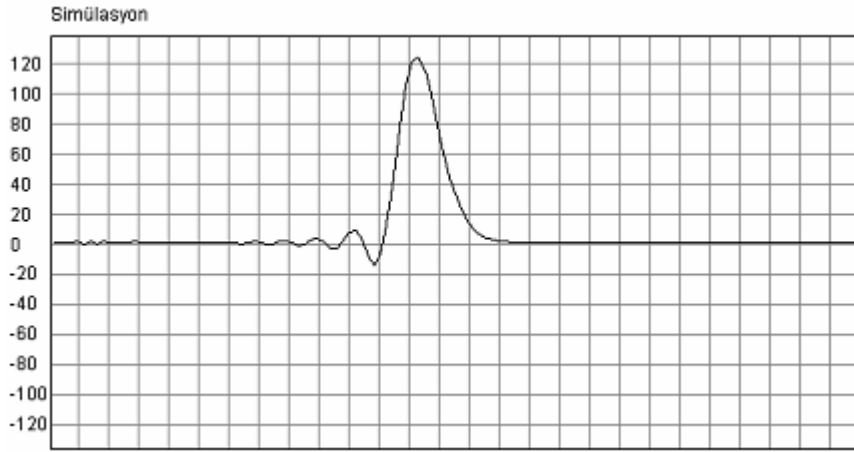
Şekil 4.9. Lineer yayılım dalgasının  $t = 51.42$  anındaki görünümü.

Bizim hibrid sonlu farklar şemasını test etmemiz için, 3.2.1 kısmındaki periyodik sınırlayıcı şartlar kullanılarak yapılan testleri tekrarladık. Bununla birlikte bu şartlar (3.37) deki eşitlikle ilişkili tridiagonal sistemi periyodik hale getirdi. Bunu Thomas algoritmasına basit modifikasyonlar uygulayarak (Hoffman, 1992; Durran 1999) çözebiliriz. İlk teste aynı veri nokta sayısını ve aynı başlangıç şartlarını kullandık. Sonraki teste ise aynı veri nokta sayısını ancak modifiye edilmiş üç başlangıç şartı kullanıldı. Çünkü modifiye edilmiş KdV eşitliğinin solitary dalga çözümü

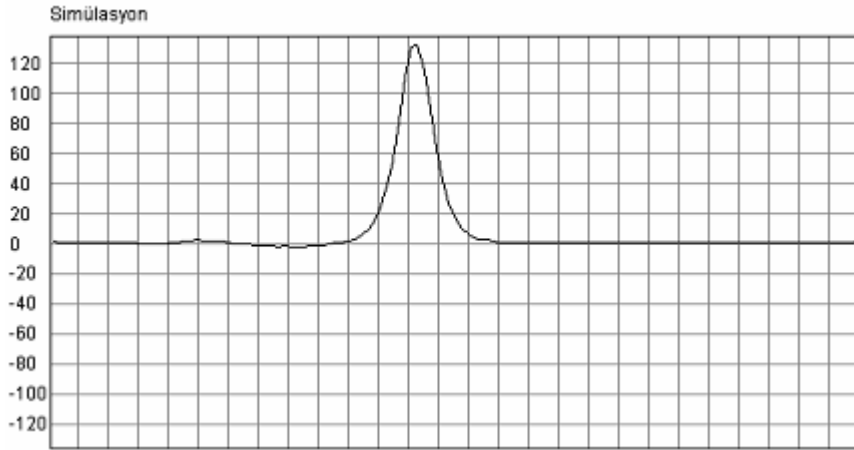
$$u(t, x) = 3a \operatorname{sech}^2(k\xi), \quad (4.4)$$

burada  $k = (a/4v)^{1/2}$ ,  $\xi = x - vt$  ve  $v = (1 + a)$ . Eğer modifiye edilmiş solitary dalga modifiye edilmemiş solitary dalga ile aynı genişliğe sahip olsaydı aynı hızla yayılırdı, ancak genişlerdi. Son dalganın genişliklerinin görünümü Şekil 4.10 ve

Şekil 4.11 de gösterilmiştir. (a)Lineer dağılım ve iletim, burada analitik ve nümerik ilerleyişler arasında belirgin farklar bulunmasına rağmen sonlu farklar şema modeli lineer yayılım ve dağılım için uygundur. (b) solitary dalga ilerleyişlerinin testi; sonlu farklar şeması ile ilişkili nümerik dalga hızı gerçek dalga hızından biraz daha fazla olmasına rağmen bu şemada da dalga profili oldukça iyi korunmaktadır. Hepsinin ötesinde sonlu farklar şeması iyi çalışmaktadır.



Şekil 4.10. Lineer yayılım dalgası.



Şekil 4.11. Solitary dalga.

Son olarak (3.41) ve (3.42) teki sınırlayıcı şartları test etmek için solitary dalgalarını (4.4) deki eşitlik ile sol sınırı  $t=-96$  dan başlattık. Diğer simülasyon parametreleri Şekil 4.10 ve Şekil 4.11 de kullanılan parametrelerle aynıdır.  $t = 0$  anında dalga resminin tam ortasında düzgün bir biçimde bulunmaktadır.  $t=96$  zamanıyla birlikte dalga sağ sınırlayıcıya doğru gidiş göstermektedir. Bu anda enerjinin yansımaları  $0.7 \times 10^{-5}$ 'dir. Son olarak yansımaları  $10^{-5}$  değerinin altında

kalabilir. Sınırlayıcı şartların basitliğinden dolayı dalga gelişimi ve geçişleri bizim amaçlarımız doğrultusunda yeterli derecede iyi çalışmaktadır.

## 5.TARTIŞMA ve SONUÇ

Zabusky ve Kruskal'ın çalışmalarında görüldü ki belirli bir  $T_R$  zamanında tüm solitonlar hemen hemen aynı duruma ulaşmakta ve non-linear etkileşimlerden sonra başlangıç durumlarını ve formlarını korumaktadır. Bu olağanüstü doğa olayını anlaşılması için 1987'deki Los Alamos laboratuvarlarındaki çalışmalardan, günümüze kadar bir çok araştırmacı benzer problemlere farklı çözüm yolları ortaya koymaya çalışmışlardır. Biz bu olayı anlayabilmek için solitonların etkileşimleri üzerinde yoğunlaşmaya çalıştık. Bu etkileşimler bilgisayar ortamında simüle edilerek Zabusky ve Kruskal'ın formülleri kullanılarak numerik çözümlere ulaşıldı. Yapılan simülasyonlar Zabusky ve Kruskal'ın formülasyonları ile uygunluk göstermektedir.

$$u|_0 = \cos \pi x \quad u = \cos \pi(x - ut) \quad u_t + uu_x = 0$$

Başlangıç değerleri formüle uygun olarak

$$\max|\delta^2 u_{xxx}| / \max|uu_x| = 0.004 \quad x = \frac{1}{2} \quad t = T_B = 1 / \pi \quad \text{değerleri dikkate alındı.}$$

Burada önemli olan (Fermi ve ark., 1955) belirttikleri gibi solitonların birbirleri ile etkileşimleri esnasında farklı formlara sahip olmalarına rağmen girişimden sonra tekrar aynı durumlarını korumalarıdır. Buna ilave olarak Benjamin ve ark.'larının belirttikleri gibi solitonlar stabil bir durum göstermektedir.

Diğer çalışmamız da non-linear olarak yayılan dalgaların ilerleyişleri iki nümerik şema ile simüle edilmiştir. İlki KdV eşitliği için Split-Step fourier şemasıdır, ikincisi ise modifiye edilmiş KdV eşitliğinde sonlu farklar şemasıdır. Her bir şemanın kararlılığı tartışıldı ve her bir şemadaki modellerin doğruluğu lineer yayılım ve dağılımları, non-linear yayılımları ve solitary dalga ilerleyişleri çalışıldı. Tüm bunların ötesinde her iki şemada iyi bir şekilde çalıştı. Split Step şema modeli dağılım ve yayılımın sonlu farklar şemasından daha düzgün olduğu görüldü. Ancak bu sadece periyodik sınırlayıcı şartlar için kullanılabilir. Bunun yanı sıra sonlu farklar şeması hem periyodik hem de periyodik olmayan sınırlayıcı şartlar için kullanılabilir. Sonlu farklar şeması için geçişteki sınırlayıcı şartların ortaya konması kısaca tartışıldı. Bu basit şemalar non-linear dağılım gösteren dalgaları içeren farklı fizik işlemleri içinde kullanılabilir.

Yapılan tüm çalışmalar 1844'de John Scoot Russel'in kanalda yaptığı basit gözlemler ile başlamış ve 1895'te KdV denklemi olarak bilinen teorem ile devam etmiştir (Korteweg ve de Vries, 1895).

$$u_t(x,t) + 6u(x,t)u_x(x,t) + u_{xxx}(x,t) = 0 .$$

Bu formülde  $x$  ve  $t$  değişkenlerine bağlı olarak  $u(x,t)$ ,  $x$  boyutunda  $t$  zamanında dalganın yüksekliğini ifade etmek için kullanıldı. 6 faktörü ise sadece çözümü daha basit yapabilmek için kullanılan bir sabittir.

Tüm bu gelişmelerden sonra solitonların çözümü için oluşturulan tüm denklemler bu formülden türetilmiş ve bir çok araştırmacı farklı başlangıç değerleri için farklı formüller ortaya atmıştır.

Biz non-lineer olarak yayılan dalgaların üzerine yapılan çalışmalarını açıklamaya çalıştık Bu ilkin sularda fark edilen ve solitary dalgaları olarak bilinen dalgalarıdır. Belirgin oluşumları, kararlılığı ve bu dalgaların etkileşimlerinin yanı sıra çarpıştıklarında derinliğin değişimi analitiksel bilgisayar ve deneysel olarak çalışıldı. Bu üç uygulama arasındaki etkileşim çok etkileyicidir. Aynı görüşte olmasalar bile faydalı sonuçlar ortaya çıkmasını sağlamakta ve yeni yaklaşımlar oluşmasına neden olmaktadır.

Bugünkü matematik okyanus dalgalarının gelişimlerini anlayarak bilimsel yapılarının stabilitesinin açıklanmasına yönelik olarak kullanılabilir. Bizler bu dalga özelliklerindeki sistemi termalizasyonda, enerjinin normal modlarda tam olarak yayılması, fiber optik iletişim sistemlerinde iletimlerin kesintisiz ve tam olarak hedef bölgeye iletilmesi gibi birçok alanda kullanılacağı umudu ve inancındayız.

Bugün modern perspektiften bakıldığında, bilimde dalga sistemlerinin kompleks dinamik durumlarının formüle edilebilmesi için yapısal elementlerin ve bununla ilişkili birçok etkenin varlığı fark edildi: hidrodinamiklerden doğrusal olmayan optiklere, plazmalardan şok dalgalarına, kasırgalardan Jüpiter'in etrafındaki müthiş kırmızı noktalara, maddenin elementer parçalarından sesin elementer parçalarına, su dalgalarından optik fiberlere kadar birçok alanda farklı özelliklerinin var olduğu görüldü.

Yapılan tüm çalışmalar ve denemeler soliton dalgalarının gerçek değerlerine ulaşabilme amacı ile yapılmıştır. Doğa olaylarının matematiksel olarak çözüm yollarının anlaşılması bize bu olayları teknolojinin gelişimde nasıl kullanacağımız konusunda fikir vereceği kanaatindeyiz.

## KAYNAKLAR

- Agrawal, G. P., 1995. *Nonlinear Fiber Optics*, 2nd Edition, Academic, San Diego.
- Beals, R., Sattinger, D. H., 1993. Integrable systems and isomonodromy deformations, *J. Physica D* **65**, 17-47.
- Benjamin, T. B., 1972. The stability of solitary waves, *J. Proc. Roy. Soc.* **328**, 153-183.
- Benjamin, T. B., Bona, J. L., Mahony, J. J., 1972. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **272**, 47-78.
- Bona, J. L. Saut, J.C. Toland, J.F., 1996. Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in non-linear dispersive media. *J. Pre-physic* **19**:220-224.
- Bullough, R. K., 1988. "The Wave par excellence", the solitary, progressive great wave of equilibrium of the fluid - an early history of the solitary wave. In Solitons (M. Lakshmanan, Ed.), *Springer Series in Nonlinear Dynamics*, **150-281**, New York, Berlin, Heidelberg etc.: Springer.
- Drazin, P. G., 1983. *Solitons*. London: Cambridge University Press (London Mathematical Society), Lecture Note Series 85.
- Duran, D. R., 1999. *Numerical Methods for wave Equations in Geophysical Fluids Dynamics*, Springer-Verlag, New York.
- Fermi, E., Pasta J. R., Ulam, S. M., 1955. Studies of nonlinear Problems, *Los Alamos Scientific Laboratory Report*. LA-1940.
- Fokas A. S., Liu, Q.M., 1996. Asymptotic integrability of water waves. *Phys. Rev. Lett.* **77** 2347-2351.
- Gardner C.S., Morikawa, G.K., 1960. *Courant Institute of Mathematical Sciences*. Report on London Press.
- Gardner, G. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., Miura., R. M., 1967. A method for solving the Korteweg-deVries equation. *Phys. Rev. Lett.*, **19**:1095.
- Hammack, J. L., 1973. A note on tsunamis: Their generation and propagation in an ocean of uniform depth. *J. Fluid Mech.* **60**, 769-799.
- Hoffman, J. D., 1992. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York.
- Korteweg D. J., Vries, G. D., 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves., *Philos. Mag.* **39**, 422-443.
- Moerbeke, P. V., 1994. Integrable foundations of string theory, Lectures on Integrable Systems (*Sophia-Antipolis, 1991*), *J. World Sci. Publ.*, **19**: 163-267.
- Peregrine, D. H., 1966. Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid Mech.* **25**, 321-330.
- Russell, J. S., 1845. Report on Waves. *Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science*, September, pp 311-390, London.
- Schonbeck, M. E., 1981. Existence of solitons for the Boussinesq system of equations, *J. Differential Equations* **42** 325-352.
- Scott, A. C., Chu, F. Y. F., Mc Laughlin, D. W., 1973. The Soliton, a new concept in applied science. *J. Proc. IEEE* **61**, 1443-1483.

- Stoker, J. J., 1957. *Water Waves* (Interscience Publishers), Inc., New York.
- Toland, J. F., 1981. Solitary wave solutions for a model of the two-way propagation of water waves in a channel. *J. Math. Proc. Camb. Phil.* **90** 343-360.
- Vliegthart, A. C., 1971. On Finite-Difference Methods for the Korteweg-de Vries Equation. *J. Eng. Math.* **5**, 137-155.
- Vvedenskii, D., 1992. *Partial Differential Equations with Mathematica. Wokingham* (England) etc.: Addison-Wesley.
- Wadati, M., 1983. Stochastic Korteweg–de Vries equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, 2642-2648.
- Winther, R., 1982. *A finite element method for a version of the Boussinesq equation*, SIAM J. Numer. Anal. **19** 561-570.
- Wolfram, S., 1999. The Mathematica Book. Cambridge (UK): *Cambridge University Press*.
- Zabusky, N. J., Kruskal, M. D., 1965. Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, *J. Phys. Rev. Lett.* **15**, 240.
- Zakharov, V. E. Shabat, A. B., 1979. Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the inverse scattering method, II, *Funct. Anal. Appl.* **13**, 166–174.

## ÖZGEÇMİŞ

Ramazan TEKİN 1979'de Mardin'de doğdu. İlk, Orta ve Lise tahsilini Batman'da tamamladı. Yüksek öğrenimini Selçuk Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümünde 2001 yılında tamamladı. 2002 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Bilgisayar Bilimleri Araştırma ve Uygulama Merkezinde Uzman olarak göreve başladı. 2003 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. Yüksek lisans eğitimi hala devam etmektedir.