



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**RASTGELE GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM
DAVRANIŞLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdullah AYDEMİR

**AĞUSTOS 2020
GÜMÜŞHANE**

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

RASTGELE GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM
DAVRANIŞLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdullah AYDEMİR

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
“Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı”
Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29.06.2020
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 06.08.2020

AĞUSTOS 2020

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Rastgele Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Davranışları” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Mehmet MERDAN’ ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 29.06.2020



Abdullah AYDEMİR

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**RASTGELE GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM
DAVRANIŞLARI**

Abdullah AYDEMİR

Gümüşhane Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

2020, 131 sayfa

Tez çalışmasının birinci bölümünde tez konusu ile ilgili güncel literatür verilmektedir. Daha sonra bu çalışmanın literatüre yapacağı katkı ele alınmaktadır. Tez çalışmasının ikinci bölümünde ise tez çalışması ile alakalı temel kavramlara değinilmiş ve rastgele gecikmeli diferansiyel denklemin oluşturulması için eklenecek olan rastgele etki terimleri ve parametrelerinin denklemini nasıl rastgele hale getirdiği sunulmuştur. Daha sonra olasılık dağılımlarının rastgele etkilerinin benzer değişkenlik katsayısına sahip olabilmeleri için sağlaması gereken koşullar belirtilmektedir. Son olarak rastgele ve stokastik süreçlere değinilmiştir. Tez çalışmasının üçüncü bölümünde rastgele gecikmeli diferansiyel denklemlerin bazı yarı analitik çözüm yöntemleri, örneğin Varyasyonel İterasyon Yöntemi (VIM), Sumudu Yöntemi ve Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY) ele alınmıştır. Daha sonra rastgele gecikmeli diferansiyel denklemlerin davranışları incelenmiştir. Farklı olasılık dağılımları için beklenen değer, varyans, standart sapma, değişim katsayısı elde

edilmektedir. Bu sayısal karakteristiklerin grafikleri ve tabloları verilmektedir. Kullanılan dağılımların çözümlere etkisinin yorumlanması için bulunan sonuçlar karşılaştırılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Analitik Çözüm, Beklenen Değer, Gecikmeli Diferansiyel Denklem, Lagrange Çarpanı, Moment Çıkaran Fonksiyon, Momentler, Olasılık Karakteristikleri, Rastgele Değişken, Varyans.

ABSTRACT
MS THESIS

SOLUTION BEHAVIORS OF RANDOM DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abdullah AYDEMİR

Gümüşhane University

The Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

2020, 131 pages

In the first part of the thesis study, current literature related to the topic of thesis is given. Then it is handled that this study contributed literature. In the second part of the thesis study, the basic concepts related to the thesis study are mentioned and It is presented how random effect terms and parameters that will be added to create the delay differential equation make the equation random. Then, the conditions that must be supply in order for the random effects of probability distributions to have similar variability coefficients are determined. Finally, random and stochastic processes are mentioned. In the third part of the thesis study, some semi-analytical solution methods of random delay differential equations, such as the Variational Iteration Method Method (VIM), Sumudu Method and Differential Transformation Method (DTM) are handled. Then, the behaviors of random delay differential equations are investigated. Expected value, variance, standard deviation, coefficient of variation are obtained for different probability distributions. Graphs and tables

of these numerical characteristics are given. The results found for interpreting the effect of the distributions used on the solutions are compared.

Keywords: Analytical Solution, Delayed Differential Equation, Expected Value, Lagrange Multiplier, Moment Generating Function, Moments, Probability Characteristics, Random Variable, Variance.

TEŞEKKÜR

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar yardımını ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Mehmet MERDAN' a saygılarımı sunar, emeği için teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans öğrenimimde ve tez çalışmamda yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Arş. Gör. Halil ANAÇ'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu süre içerisinde, desteğini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Abdullah AYDEMİR
Gümüşhane, 2020

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET	IV
ABSTRACT	VI
TEŞEKKÜR	VIII
İÇİNDEKİLER	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	XI
TABLolar DİZİNİ	XIII
SEMBOLLER DİZİNİ	XIV
1. GİRİŞ	1
1.1. Literatür Özeti	4
2. TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1. Matematiksel Modelleme	10
2.2. Gecikmeli denklemler	10
2.3. Fonksiyonel	11
2.4. Fonksiyonel Denklem	11
2.5. Fonksiyonel Diferansiyel Denklem(FDD)	12
2.6. Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması	13
2.7. Olasılık Teorisi İle İlgili Temel Kavramlar	15
2.7.1. Bazı Olasılık Dağılımları	20
2.7.1.1. Düzgün Dağılım ve Özellikleri	20
2.7.1.2. Geometrik Dağılımın Özellikleri	20
2.7.1.3. Normal Dağılım	21
2.7.1.4. Beta Dağılımı	21
2.7.1.3. Üçgensel Dağılım	23
2.7.1.4. Laplace Dağılımı	24
2.7.1.5. Gamma Dağılımı	26
2.8. Rastgele ve Stokastik Süreçler	26
2.8.1. Gauss Süreçleri	27
2.8.2. Değerleri Bağımsız Süreçler	28
2.8.2.1. Wiener Süreci	28
2.8.2.2. Wiener Sürecinin Sonlu Boyutlu Dağılımları	29

3.	YAPILAN ÇALIŞMALAR	31
3.1.	Rastgele (Random) Sabit Gecikmeli Diferansiyel Denklemler.....	31
3.2.	Doğrusal Gecikmeli Diferansiyel Denklemler	32
3.2.1.	Doğrusal Gecikmeli Diferansiyel Denklemler Sistemleri	33
3.3.	Adımlar Yöntemi.....	35
3.3.1.	Adımlar Yöntemi Metodu ve Adımları	36
3.4.	VIM Yöntemi	48
3.5.	Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi(DDY)	65
3.5.1.	Birinci Mertebeden Gecikmeli Adi Diferansiyel Denklemler için Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	67
3.6.	Sumudu Dönüşümü Yöntemi	94
3.6.1.	Sumudu Dönüşümünün Varlığı.....	95
3.6.2.	Sumudu Dönüşümünün Özellikleri	96
3.6.3.	Sumudu Dönüşümünün Gecikmeli Denklemlere Uygulanması.....	101
3.6.4.	Sumudu Varyasyonel İterasyon Yöntemi (SVIM).....	103
3.6.5.	Sumudu VIM Dönüşüm Yöntemi (Hibrit Yöntem)(SVIM).....	104
4.	İRDELEME	119
5.	ÖNERİLER	120
6.	SONUÇLAR.....	121
7.	KAYNAKLAR.....	122
	ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 2.1.	x_t fonksiyonunun tanımı.....	8
Şekil 3.1.	$t \in [-1,3]$ için $y(t)$ fonksiyonunun grafiği.....	40
Şekil 3.2.	$t \in [-1,3]$ için $y(t)$ fonksiyonunun beklenen değer grafiği.....	47
Şekil 3.3.	x_t fonksiyonunun tanımı.....	47
Şekil 3.4.	$A \sim N(3, 4)$ özel değeri için $y_3(x)$ 'in beklenen değeri.....	55
Şekil 3.5.	$A \sim N(3, 4)$ özel değeri için $y_3(x)$ 'in varyans değeri.....	56
Şekil 3.6.	$A \sim G(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ özel değeri için $y_3(x)$ 'in beklenen değeri.....	59
Şekil 3.7.	$A \sim G(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ özel değeri için $y_3(x)$ 'in varyans değeri.....	59
Şekil 3.8.	$A \sim B(1, 2)$ özel değeri için $y_1(x)$ 'in beklenen değeri.....	65
Şekil 3.9.	$A \sim B(1, 2)$ özel değeri için $y_1(x)$ 'in varyans değeri.....	65
Şekil 3.10.	$A \sim U(2, 1)$ özel değeri için $y(t)$ 'nin beklenen değeri.....	75
Şekil 3.11.	$A \sim U(2, 1)$ özel değeri için $y(t)$ 'nin varyans değeri.....	76
Şekil 3.12.	$A \sim N(3, 1)$ özel değeri için $y(x)$ 'nin beklenen değeri.....	80
Şekil 3.13.	$A \sim N(3, 1)$ özel değeri için $y(x)$ 'nin varyans değeri.....	80
Şekil 3.14.	$A \sim B(1, 2)$ özel değeri için $u(t)$ 'nin beklenen değeri.....	84
Şekil 3.15.	$A \sim B(1, 2)$ özel değeri için $u(t)$ 'nin varyans değeri.....	84
Şekil 3.16.	$B \sim \text{Triangular}(1, 2, 3)$ özel değeri için $u(t)$ 'nin beklenen değeri.....	87
Şekil 3.17.	$B \sim \text{Triangular}(1, 2, 3)$ özel değeri için $u(t)$ 'nin varyans değeri.....	88
Şekil 3.18.	$A \sim \text{Laplace}(1, 1)$, özel değeri için $u(t)$ 'nin beklenen değeri.....	91
Şekil 3.19.	$A \sim \text{Laplace}(1, 1)$, özel değeri için $u(t)$ 'nin varyans değeri.....	91
Şekil 3.20.	$A \sim G(2, 4)$ özel değeri için $y(t)$ 'nin beklenen değeri.....	94
Şekil 3.21.	$A \sim G(2, 4)$ özel değeri için $y(t)$ 'nin varyans değeri.....	94
Şekil 3.22.	$A \sim G(2, 4)$ özel değeri için $v_2(t)$ 'in beklenen değeri.....	109
Şekil 3.23.	$A \sim G(2, 4)$ özel değeri için $v_2(t)$ 'in varyans değeri.....	110

Şekil 3.24. $A \sim N(3, 4)$ özel değeri için $v_3(t)$ ‘in beklenen değeri.....	114
Şekil 3.25. $A \sim N(3, 4)$ özel değeri için $v_3(t)$ ‘in varyans değeri.....	114
Şekil 3.26. $A \sim G(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ özel değeri için $v_2(t)$ ‘in beklenen değeri.....	118
Şekil 3.27. $A \sim G(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ özel değeri için $v_2(t)$ ‘in varyans değeri.....	118

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1. DDY' yle gerçekleştirilen temel matematik işlemleri.....	66
Tablo 3.2. Bazı fonksiyonların Sumudu dönüşümleri.....	100

SEMBOLLER DİZİNİ

$E(Y)$: Y rastgele değişkeninin beklenen değeri
$Var(Y)$: Y rastgele değişkeninin varyansı
S	: Sumudu operatörü
D	: IR^n 'nin bir açık alt kümesi
C_h	: $[-h, 0]$ aralığından D 'ye tanımlı olan sürekli fonksiyonların kümesi
C	: $[t, t + h]$ aralığından D 'ye tanımlı olan sürekli fonksiyonların kümesi
J	: IR 'nin bir açık alt kümesi
IR^n	: n boyutlu reel sayılar kümesi
IR	: Reel sayılar kümesi
IR^+	: Pozitif reel sayılar kümesi
$C'[a, b]$: $[a, b]$ aralığında hem kendisi hem birinci türevleri sürekli fonksiyonlar kümesi
$x'(t)$: $x(t)$ 'nin birinci türevi
$x^{(n)}(t)$: $x(t)$ 'nin n . türevi
$\xi(\omega, t)$: Stokastik süreç
$\varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n)$: n boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu
K_ξ	: Karakteristik fonksiyon
$m_\xi(t)$: Birinci moment
$p_{t_1, t_2}(x_1, x_2)$: İki boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1}(x_1)F_{t_2}(x_2) \dots F_{t_n}(x_n)$: n boyutlu dağılım fonksiyonu
$\Omega,$: Örnek uzay
\mathfrak{F}	: Sigma cebiri
P	: Olasılık ölçüsü
Γ	: Gama fonksiyonu operatörü
τ	: Gecikme operatörü
$W(\omega, t)$: Wiener süreci

1. GİRİŞ

Gecikmeli Diferansiyel Denklemler alanında önemli ve güncel çalışmaların büyük bir kısmı Erneux (2009), Shampine ve Thomson'a (2009) ait kitaplarda yer almaktadır (Erneux, 2009; Shampine ve Thompson, 2009; Bahşı, 2019).

Herhangi bir geri bildirim kontrolü içeren bir sistem kesinlikle zaman gecikmesi içermektedir. Sonlu zamandan kaynaklanan bu durum nedeniyle zaman gecikmesi de hesaba katılarak hassas çözüm gerekmektedir ve bu nedenle zaman gecikmeli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinden elde edilecek sonuçların hassasiyeti büyük önem taşımaktadır. Bocharov ve Rihan (2000) biyobilimlerde kullanılan ve dinamiklerinin anlaşılmasında sayısal yaklaşımların temel bir araç olduğu gecikmeli diferansiyel denklemlerin matematiksel modellerini incelemiş ve bu modelleri araştırmak için kullanılan sayısal teknikleri yorumlamışlardır (Bocharov ve Rihan, 2000). Buna gerekçe olarak da doğadaki belli biyolojik işlemlerde, biyosistemlerin analizinde, adi diferansiyel denklemlere göre gecikmeli diferansiyel denklemlerin daha uygun ve gerçekçi olmasını göstermişlerdir. Insperger ve Stépán (2002) lineer gecikmeli sistemlerin kararlılık analizi için etkili bir sayısal yöntem sunmuşlardır (Insperger ve Stépán, 2002). Yöntem, sürekli zaman gecikmesi olan Mathieu denklemine de uygulanmıştır. Asl ve Ulsoy (2003) gecikmeli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için Lambert fonksiyonları kavramına dayalı yeni bir analitik yaklaşım sunmuşlardır (Asl ve Ulsoy, 2003). Gülsu ve Sezer (2005, 2006) geliştirdikleri matris işlemlerine dayalı Taylor matris yöntemini kullanarak lineer fark denklemleri ve lineer diferansiyel-fark denklemleri için sayısal çözümler bulmuşlardır (Gülsu ve Sezer, 2005; Gülsu ve Sezer, 2006). Gülsu vd. (2006) benzer bir çalışmayı Legendre ve Taylor polinomlarını hibrit ederek matris yöntemiyle lineer fark denklemlerinin sayısal çözümünü bulmuşlardır (Gülsu vd. 2006). Matris işlemlerine dayalı bu seri çözüm yöntemi sıralama yöntemi ile birleştirilerek farklı seriler ile çözüm yöntemlerinin önü açılmıştır. Bu konuda, Gülsu vd. (2011, 2012) Hermit ve Chebyshev polinomları ile lineer diferansiyel-fark denklemlerinin, Yüzbaşı (2011, 2012) Bessel polinomlarını kullanarak lineer tekil diferansiyel-fark denklemlerinin ve retarted ve advanced tipi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir (Gülsu vd. 2011; Gülsu vd. 2012; Yüzbaşı, 2011; Yüzbaşı, 2012). Çözüm Lambert fonksiyonları cinsinden yazılmış modların sonsuz serisi formunda bulunmuştur. Farklı örneklerdeki gecikme denklemleri için tekil modlar, serbest ve zorlamalı tepkiler incelenmiş ve sonuçlar sunulmuştur. Xu vd. (2007)

negatif sönümlleme ve gecikmeli geri besleme kontrolü olan gecikmeli bir osilatörün dinamik analizini yapmışlardır (Xu vd. 2007). Çalışma sonucunda, düzgün ayarlanmış gecikme sayesinde kontrollü gecikmeli sistemin kararlı dengeye, periyodik çözümlere, yarı-periyodik çözümlere veya birlikte var olan kararlı çözümlere sahip olabileceğini göstermişlerdir. Vanani ve Aminataei (2008) gecikmeli diferansiyel denklemlerin bir alt sınıfı için çoklu karesel yaklaşım ile sayısal çözümler elde etmişlerdir (Vanani ve Aminataei, 2008). Yu (2008) varyasyonel iterasyon yöntemi ile çoklu-pantograf tipi gecikmeli denklemleri, Wang ve Wang (2010) ise Legendre-Gauss sıralama yöntemi ile lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemleri çözmüşlerdir (Yu, 2008; Wang ve Wang, 2010). Dehghan ve Salehi (2010) biyolojideki doğrusal olmayan zaman gecikmeli bir modelin varyasyonel iterasyon yöntemi ve Adomian ayrıştırma metodu gibi yarı-analitik yaklaşımlarla çözümlerini elde etmişlerdir (Dehghan ve Salehi, 2010). Bu yöntemler küçük perturbasyonlara, doğrusallaştırmaya ve değişkenlerin ayrıklaştırılmasına gerek duymadıkları için işlem hacmini azaltmaktadırlar. Saeed ve Rahman (2010) gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerini, Evans ve Raslan (2005) gecikmeli diferansiyel denklemleri, Adomian decomposition yöntemi ile çözmüşlerdir (Evans ve Raslan, 2005; Saeed ve Rahman, 2010). Liu vd. (2013) ikinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerini elde etmek için VIM yönteminden yararlanmıştır (Liu vd. 2013). Yakınsama sonuçları elde edilmiş ve çözüm sürecinde makul bir Lagrange çarpanı seçebilmek için etkin bir teknik tasarlanmıştır. Anakira vd. (2013) gecikmeli fark denklemlerinin yaklaşık analitik çözüm algoritmasını bulmak için ilk kez optimal homotopi asimtotik yöntemini kullanmışlardır (Anakira vd. 2013). Bu yaklaşım, diğer perturbasyon yöntemlerinin aksine küçük veya büyük parametrelere bağlı değildir ve yaklaşım serilerinin yakınsamasının kontrol edilebilmesine imkân vermektedir. Erdem ve Yalçınbaş (2012) diferansiyel-fark denklemleri için sayısal çözüm algoritmasını Bernoulli serileri ile matris işlemlerine dayalı sıralama metodu kullanarak geliştirmişlerdir (Erdem ve Yalçınbaş, 2012). Gökmen ve Sezer (2013) Taylor polinomlarını kullanarak fark denklemleri için, Kurt vd. (2013) Fibonacci polinomlarını kullanarak diferansiyel-fark denklemleri için matrise dayalı sıralama yöntemini kullanmışlardır (Gökmen ve Sezer, 2013; Kurt vd. 2013). Yüzbaşı ve Sezer (2015) lineer gecikmeli diferansiyel denklemler için Legendre serilerini kullanarak sayısal çözümler elde etmişler ve residüel hata fonksiyonuna dayalı hata tahmin algoritmaları geliştirmişlerdir (Yüzbaşı ve Sezer, 2015). Yüzbaşı ve Sezer (2013a) başka bir çalışmalarında ise gecikmeli diferansiyel denklemlerin sınır değer problemleri için hata

tahmin algoritmaları ve sayısal çözüm yöntemleri geliştirmişlerdir (Yüzbaşı ve Sezer, 2013a). Yüzbaşı vd. (2013b, 2014) lineer gecikmeli diferansiyel denklemler için hata tahmin algoritmaları ve sayısal çözüm yöntemleri geliştirmişlerdir (Yüzbaşı ve Sezer, 2013b; Yüzbaşı vd. 2014). Bu hata tahmin algoritmalarını kullanarak tam çözümü bilinmeyen gecikmeli tek serbestlik dereceli kütle yay sisteminin matematiksel modeli için, Çevik vd. (2014) üstel formdaki serileri kullanarak sıralama yöntemi ile bazı modellerin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir (Çevik vd. 2014). Bu çalışma ile yöntem ve hata tahmin algoritmaları bir mühendislik problemi için uygulanmıştır. Bahşı vd. (2015) ortogonal üstel fonksiyonlara dayalı sıralama yöntemi ile gecikmeli ve pantograf tipi denklemler için sayısal çözümler elde etmiş ve hata tahmin algoritmaları sunmuşlardır (Bahşı vd. 2015).

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümü için bu yöntemlerin dışında perturbasyon yöntemleri de geliştirilmiştir (Erneux, 2009). Wang ve Hu (2003) ikinci mertebe gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümü için çok ölçekli perturbasyon yöntemini ve Lindstedt-Poincaré yöntemini kullanmıştır (Wang ve Hu, 2003). Shakeri ve Dehghan (2008) gecikmeli diferansiyel denklemlere ve Biazar ve Ghanbari (2012) ise pantograf tipi gecikmeli denklemlere, homotopi perturbasyon yöntemini uygulamışlardır (Shakeri ve Dehghan, 2008; Biazar ve Ghanbari, 2012). Ayrıca perturbasyon yöntemleri fark denklemleri, diferansiyel denklemler, integro diferansiyel denklemler ve cebirsel denklemler için de sıkça kullanılmıştır (Nayfeh, 1981). Perturbasyon yöntemlerinin temel kısıtlaması küçük bir parametrenin olma zorunluluğudur. Bu parametre, verilen denklemden kaynaklanan fiziksel parametre ya da alternatif olarak suni eklenen bir parametredir. Birçok yöntem bu kısıtlamanın üzerine kurulmuştur. Bu kısıtlamanın kaldırılması için perturbasyon yöntemlerinin hibrit olarak kullanıldığı birçok yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan biri çok ölçekli metot (multiple scales) ile Lindstedt-Poincaré yönteminin beraber kullanıldığı çok ölçekli Lindstedt-Poincaré (MSLP) yöntemidir (Pakdemirli vd. 2009). Diğer bir hibrit perturbasyon yöntemi ise, direk perturbasyon yöntemi ve iterasyon yöntemlerinin birleşimi olan iterasyon perturbasyon yöntemleridir (He, 2001; Mickens, 2006; Marinca ve Herisanu, 2006; Öziş ve Yıldırım, 2009; Ganji vd. 2009; Pakdemirli, 2013). İterasyon perturbasyon yöntemlerini, Yüzbaşı ve Sezer (2013a) kuvvetli lineer olmayan salınım problemine, Öziş ve Yıldırım (2009) van der Pol denklemine ve Ganji vd. (2009) tek serbestlik dereceli lineer olmayan salınımlı mekanik sistemin denklemi gibi temel mühendislik problemlerine uygulamıştır (Öziş ve Yıldırım, 2009; Ganji vd. 2009; Yüzbaşı ve Sezer, 2013a). İterasyon perturbasyon yöntemlerine alternatif ve daha etkili bir hibrit yöntem, Pakdemirli (2013)

tarafından perturbasyon iterasyon yöntemi olarak sunulmuştur (Pakdemirli, 2013). Perturbasyon-iterasyon yöntemi, perturbasyon açılımındaki düzeltme teriminin sayısına ve Taylor serisine açılımının, türevinin mertebesine göre perturbasyon iterasyon algoritmaları (PIA) ile sunulmuştur. Bu yeni perturbasyon-iterasyon yöntemi ilk olarak cebirsel denklemler için kök bulma algoritması olarak sunulmuştur (Pakdemirli ve Boyacı, 2007). Sonrasında yöntem, yüksek dereceli cebirsel denklemler için geliştirilmiştir (Pakdemirli vd. 2007; Pakdemirli vd. 2008). Daha sonrasında, Aksoy ve Pakdemirli (2010) bir fizik problemi olan Bratu tipi diferansiyel denklemlere ve Dolapçı vd. (2013) Fredholm ve Volterra tipi integral denklemlere uygulamıştır (Aksoy ve Pakdemirli, 2010; Dolapçı vd. 2013). Bunun dışında kabul gören bu yeni yöntem birçok araştırmacı tarafından farklı problemler için geliştirilmektedir. Yıldız vd. (2016) değişken viskoziteye sahip bir Newton akışkanı ve üçüncü mertebe akışkanın, paralel plaka akışı problemi için, geliştirdikleri perturbasyon-iterasyon yöntemi ile direk perturbasyon yöntemine göre daha iyi sonuçlar elde etmişlerdir (Yıldız vd. 2016). Ayrıca yöntem fin denklemine Aksoy ve Pakdemirli (2016), ikinci mertebe sinüs hiperbolik lineer olmayan Troesch denklemine Bahşı, Çevik (2017) ve LotkaVolterra denklemine Aksoy vd. (2016) uygulanmıştır (Aksoy ve Pakdemirli, 2016; Bahşı, Çevik, 2017; Aksoy vd. (2016). Bildik ve Deniz perturbasyon-iterasyon yöntemini modifiye ederek yöntemin etkinliğini arttıran çalışmalar yayınlamışlardır. Bildik ve Deniz (2018a) modifiye edilmiş perturbasyon-iterasyon yöntemi ile lineer olmayan diferansiyel denklemlerin bazı sınıfları, Bildik ve Deniz (2020) Klein-Gordon denklemi, Bildik ve Deniz (2018b) Burger ve dalga denklemleri için perturbasyon-iterasyon algoritmaları geliştirmişlerdir (Bildik ve Deniz, 2018a; Bildik ve Deniz, 2018b; Bildik ve Deniz, 2020). Bahşı ve Çevik (2015) pantograf tipi gecikmeli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için perturbasyon-iterasyon yöntemini sunmuşlardır (Bahşı ve Çevik, 2015). Kovacic vd. (2018) Mathieu denklemlerinin farklı sınıfları ile ilgili genel bir çalışma sunmuşlardır (Kovacic vd. 2018; Bahşı, 2019).

1.1. Literatür Özeti

Gecikme gündelik yaşantımızda sık sık karşılaştığımız bir gerçekliktir. Fiziksel sistemlerin çoğunda farklı zamanlı uyarıcılarla ilgili tepkilerin meydana gelmesi esnasında kısa olmakla birlikte bir zaman arası olması muhtemeldir. Biyolojik sistemlerde gecikme birkaç yüz milisaniye sürede gerçekleşir ki bu insandaki tepki sürecine yakındır. Bir

antenden sinyallerin iletilmesiyle, uzak bir nesneden yansımaları alması arasındaki gecikmenin kısa süreli olması temel özelliğidir.

Birinci Dünya Savaşı'ndan sonra, otomatik kontrol sistemlerinin geliştirilmesi ve kullanılması, gecikmeli diferansiyel denklemler (GDD) olarak tamamen farklı bir diferansiyel denklem sınıfı çalışmalarıyla sonuçlanmıştır. Geri bildirim kontrolü içeren herhangi bir sistem zaman gecikmesini içermek zorundadır. Bilgiyi algılamak ve buna tepki vermek için sınırlı bir süre gerekir bu yüzden bir zaman gecikmesi meydana gelir. Bununla birlikte, birden fazla mekanizmanın aynı anda kontrol edilmesi gerektiğinde ciddi denge sorunları ortaya çıkar. Örneğin, pilotun uçağı kontrol etme çabalarının sonucu olarak kasıtsız sürekli salınımlar oluşur (Mitchell ve Klyde, 2006). Daha kompleks sistemlerde birden çok gecikme de meydana gelebilir.

Teorik bir zaman gecikmesi bir makineye verilen enerji ile alınan tepki aynı formda bir özelliktir. Uyarıcı $x(t)$, $y(t)$ tepkisiyle sonuçlanır. Burada t zaman, h gecikme olmak üzere $y(t)$ tepkisi, $x(t - h)$ ' ye eşit olur.

Gecikmeli diferansiyel denklemler birçok problemin modellenmesinde kullanılmaktadır. Makine mühendisliği, kimya ve biyoloji, Fowler (1982, 1997, 2005), McDonald (1989), Stépán (1989), ve Kuang (1993), Epstein ve Pojman (1998), Murray (2002), Fall, Marland, Wagner ve Tyson (2002), Beuter, Glass, Mackey, Titcombe ve Britton (2003), Solow (1966), Boucekkine vd. (1997), Glass ve Mackey (1979), Kuang (1993), Caberlin (2002), Grossman (1998), Baker vd. (1999), Kermack ve McKendrick (1927) gibi pek çok uygulaması mevcuttur (Fowler, 1982; Fowler, 1997; Fowler, 2005; MacDonald, 1989; Stépán, 1989; Kuang, 1993; Epstein ve Pojman, 1998; Murray, 2002; Fall vd. 2002; Beuter vd. 2003; Britton, 2003; Solow, 1966; Boucekkine vd. 1997; Glass ve Mackey, 1979; Kuang, 1993; Caberlin, 2002; Grossman, 1998; Baker vd. 1999; Kermack ve McKendrick, 1927). Gecikmeli diferansiyel denklemlerin fiziksel ve biyolojik sistemlerde birçok uygulama alanına sahip olması da bu teoriyi matematiğin en hızlı gelişen dallarından biri haline getirmiştir.

Literatürde son yıllarda gecikmeli adi diferansiyel denklemler ile ilgili yapılan çalışmalardan, düzensiz otonom gecikmeli diferansiyel denklemler için yarı periyodik çözümler Li ve Yuan (2012), gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerinde türevlerin sayısal hesabı Lenz vd. (2014), üçüncü mertebeden splineler ve gecikmeli diferansiyel denkleminin çözümü Burova ve Abdurakhimova (2015), dürtüsel gecikmeli diferansiyel denklemler için doğrusal çok aşamalı yöntemler Liu ve Zeng (2018), doğrusal nötr gecikme-diferansiyel

denklem sistemleri için spline yaklaşımı Fabiano ve Payne (2018), rasgele gürültülü normal gecikmeli diferansiyel denklemler için sayısal şemalar Asai ve Kloeden (2019), tek bir sabit gecikmeli, stokastik gecikmeli diferansiyel denklem için S-ROCK yöntemi Komori vd. (2019), gecikmeli doğrusal diferansiyel denklemler için çözüm tahminleri (Berezansky ve Braverman (2020) dir (Li ve Yuan, 2012; Lenz vd. 2014; Burova ve Abdurakhimova, 2015; Liu ve Zeng, 2018; Fabiano ve Payne, 2018; Asai ve Kloeden, 2019; Komori vd. 2019; Berezansky ve Braverman, 2020).

Bu tez çalışmasında Sabit ve Oransal Gecikmeli Adi Diferansiyel Denklemler ve Denklem Sistemleri, bazı olasılık dağılımlarına sahip, rastgele etki terimleri kullanılarak incelenecektir. Geometrik Dağılım, Düzgün Dağılım, Normal Dağılım, Üçgensel Dağılım, Laplace Dağılımı ve Beta Dağılımı ile rastgele hale getirilebilen gecikmeli diferansiyel denklemlerin sayısal karakteristikleri analiz edilerek bu dağılımlar için oluşan rastgele davranışların karşılaştırılması yapılacaktır.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. t bir bağımsız değişken olmak üzere, bilinmeyen fonksiyon $x(t)$ 'yi, $x(t)$ 'nin türevini ve bağımsız değişkenin başka bir fonksiyonu $u(t)$ 'ye bağlı şekilde $x(u(t))$ 'yi içeren diferansiyel denkleme fonksiyonel diferansiyel denklem denir (Driver, 1977). Fonksiyonel diferansiyel denklemlerin mertebesi, adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi denklemde bulunan en yüksek merteben türevin mertebesidir. Bu durumda, birinci mertebeden fonksiyonel diferansiyel denklemin genel ifadesi

$$x'(t) = f \left(t, x(t), x(u(t)) \right) \quad (2.1)$$

şeklinde verilir (Erman, 2016).

Tanım 2.2. Bir diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden türev içeren terimin argümanı, düşük mertebeden terimlerin argümanından daha küçük değilse bu diferansiyel denkleme gecikmeli diferansiyel denklem denir (Driver, 1977). Gecikmeli diferansiyel denklemler, fonksiyonel diferansiyel denklemlerin özel bir halidir. Birinci mertebeden ve tek zaman gecikmeli diferansiyel denklemin genel ifadesi

$$x'(t) = f \left(t, x(t), x(t - h) \right), h \in IR^+ \quad (2.2)$$

(2.2) şeklindedir. Eğer birden fazla zaman gecikmesi varsa denklemin genel ifadesi, $n \in Z$ ve

$i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$x'(t) = f \left(t, x(t), x(t - h_1), x(t - h_2), \dots, x(t - h_n) \right), h_i \in IR^+ \quad (2.3)$$

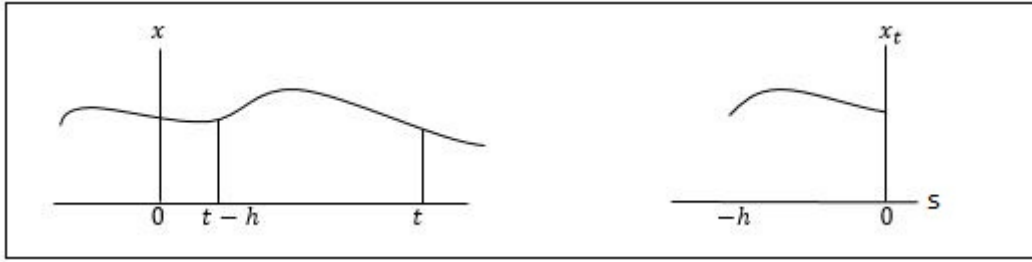
(2.3)' teki gibi olur. Gecikme terimi durum değişkenine bağlı ise denklemin genel ifadesi

$$x'(t) = f \left(t, x(t), x \left(t - \tau \left(x(t) \right) \right) \right) \quad (2.4)$$

(2.4) şeklindedir. Burada $\tau: \mathbb{R} \rightarrow [0, h]$ sürekli bir fonksiyondur ve gecikme terimi olarak adlandırılır (Erman, 2016). Denklem (2.4) lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir. Eğer $x: [t - h, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ise yeni bir $x_t: [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu tanımlayabiliriz öyle ki;

$$x_t(s) = x(t + s), -h \leq s \leq 0. \quad (2.5)$$

dir. Şekil 2.1' den açıkça görüldüğü gibi eğer $x, [t - h, t]$ üzerinde sürekli ise $x_t, [-h, 0]$ üzerinde süreklidir.



Şekil 2.1. x_t fonksiyonunun tanımı

Diğer taraftan, $J \subseteq \mathbb{R}$ ve $D \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümeleri, $C = C([t, t + h], D)$ ile $[t, t + h]$ aralığından D 'ye tanımlı olan sürekli fonksiyonların kümesini ve $C_h = C([-h, 0], D)$ ile $[-h, 0]$ aralığından D 'ye tanımlı olan sürekli fonksiyonların kümesini gösterelim (Erman, 2016). Bu durumda $F: J \times C \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyoneli olmak üzere Denklem (2.2) ve Denklem (2.4)

$$x'(t) = F(t, x, x_t) \quad (2.6)$$

(2.6) genel formunda yazılabilir. Burada $u \in C$ ve $v \in C_h$ için eğer $F(t, u, v) = f(t, u, v(-h))$ veya $F(t, u, v) = f\left(t, u, v\left(-\tau(v(0))\right)\right)$ alınırsa, Denklem(2.6), sırasıyla, Denklem (2.2) veya Denklem (2.4)'ün genel formu olur.

Tanım 2.3. $F: J \times C \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise

- (i) $x \in C([t_0 - h, \beta], D)$,
- (ii) $[t_0 - h, \beta] \subset J$,

- (iii) $x(t)$ fonksiyonu, $t \in [t_0 - h, \beta)$ için Denklem (2.6)' yı sağlayacak şekilde $t_0 \in \mathbb{R}$ ve $\beta > t_0$ vardır,

$x(t)$ fonksiyonu Denklem (2.6)' nın $t \in [t_0 - h, \beta]$ aralığında bir çözümüdür denir.

Durum 2.1. Birinci mertebeden, lineer, reel katsayılı homojen gecikmeli diferansiyel denklemler aşikar olmayan salınımlı bir çözüme sahip olabilir. Yani sıfırdan farklı $x(t)$ çözümü, yeterince büyük t_0 değeri için $x(t_0) = 0$ ve $t \neq t_0$ için $x(t) \neq 0$ 'dır. Bu durum adi diferansiyel denklemler için imkansızdır (Driver, 1977).

Örnek 2.1 (Erman, 2016).

$$\begin{cases} x'(t) = x(t - h), & t > 0 \\ x(t) = k, & -h \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

problemini ele alalım. $k \neq 0$ olmak üzere $x'(0^-) = 0$ ve $x'(0^+) = k$ olduğundan dolayı çözümün $t = 0$ da türevi yoktur.

Durum 2.2. Örnek 2.1.'in başlangıç koşulu sürekli olsun. $t \leq t_0$ için sürekli bir çözüm fonksiyonu bulunamayabilir. Bu durum, geçmişe doğru süreksizlik olarak tanımlanır. Geçmişe doğru süreksizliğin olması, sistemin sürekli bir geçmiş bilgisinin oluşturulamaması demektir. Dolayısıyla $t > t_0$ için elde edilecek çözüm \mathbb{R}' nin yarı açık alt aralıklarında parçalı bir fonksiyon formunda olur.

Örnek 2.2 (Erman, 2016).

$$x'(t) = -x(t - |x(t)|) \quad (2.8)$$

durum gecikmeli diferansiyel denklem için $\varphi(t)$ başlangıç fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1, & t \leq -1, \\ \frac{3}{2}(t+1)^{\frac{1}{3}} - 1, & -1 < t \leq -\frac{7}{8} \\ \frac{10}{7}t + 1, & -\frac{7}{8} < t \leq 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

$t > 0$ için $x(t) = t + 1$ ve $x(t) = t + 1 - t^{3/2}$ fonksiyonlarının ikisi de çözüm fonksiyonudur (Winston, 1970).

Durum 2.3. Örnek 2.2. 'nin çözümünün, $t = t_0$ anında türevi olmayabilir. Dahası sabit h gecikmeli diferansiyel denklemlerde böyle bir durum, $t = t_0 + h, t = t_0 + 2h, t = t_0 + 3h, \dots$ noktalarında da türevin olmamasına neden olur.

Teorem 2.1. $F: [t_0, \alpha] \times C \times C_h \rightarrow IR^n$ sürekli, yerel Lipschitz sürekli ve quasi sınırlı olsun. Her φ_0 başlangıç koşulu için bir $\beta > 0$ vardır öyle ki Başlangıç Değer Problemi (Örnek 2.1.) için $[t_0 - h, \beta]$ üzerinde genişletilemez tek x çözümü vardır (Driver, 1977).

2.1. Matematiksel Modelleme

Matematiksel modelleme gerçek hayattaki olayların ve sistemlerin matematiksel bir biçimde gösterilmesi işlemidir (Karaaslan, 2019). Mühendislik bilimleri, temel bilimler ve sağlık bilimlerinin yanı sıra ekonomi ve sosyal bilimler alanlarında da birçok olay matematiksel araçlar yardımıyla modellenmektedir (Karaaslan, 2019). İncelenmekte olan sistemin yapısı ve sistem hakkında sahip olunan bilgi miktarı göz önünde bulundurularak sistemin en uygun şekilde temsil edilmesini sağlayan denklem veya denklem sistemi oluşturulur. Adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, integral denklemler, stokastik diferansiyel denklemler ve kesirli türevli diferansiyel denklemler ile bu denklemlerin yüksek mertebeden halleri kullanılarak birçok olayın analiz edilmesine imkan sağlayan matematiksel modellerin kurulması olasıdır (Karaaslan, 2019).

2.2. Gecikmeli denklemler

Matematiksel modellemelerin bir olası sınıflandırılması da rastgele olaylara dayanır. Modellenen olay deterministik, rastgele veya stokastik yani olasılığa dayalı olabilir, dolayısıyla modeller de deterministik veya rastgele olarak sınıflandırılabilir. Aynı koşullar altında bir olay her denemede aynı sonucu veriyorsa bu olaya deterministik denir. Sağlık bilimlerinde ve tıp alanında kullanılan çoğu modeller deterministiktir. Fakat doğada aynı koşullar altında aynı sonuçları vermeyen pek çok olay vardır. Örneğin yazı tura atmak: paranın belli bir denemeden sonra yazı mı yoksa tura mı geleceği kesin olarak bilinemez.

Bazı olaylardaki rastgeleliği, rastgele değişkenleri ya da stokastik (rastgele) süreçleri kullanarak denklemlerle modellenebilir. Bu şekilde oluşturulan rastgele denklemleri kapsayan stokastik modeller, finans, sigorta ve benzeri alanlarda sık sık kullanılır (Karaaslan, 2019).

2.3. Fonksiyonel

$M, y(t)$ fonksiyonlarının bir uzayı olsun. Eğer M 'nin her $y(t)$ elemanını belirli bir sayıya götüren bir kural varsa buna bir fonksiyonel denir (Şencan, 2001). Başka bir deyişle değer bölgesi R ya da C olan bir fonksiyonsa fonksiyonel denir. Bunu J ile adlandırırsak;

$$J: M \rightarrow R$$

$$J: y(t) \rightarrow \text{sayı}$$

Örneğin;

$$M = C'[a, b], \quad J[y(t)] = y'(t_0), \quad t_0 \in [a, b] \quad (2.10)$$

sabit nokta olsun. J bir fonksiyoneldir. Yine

$$M = C'[a, b], \quad J[y(t)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt \quad (2.11)$$

(yay uzunluğu) bir fonksiyoneldir. Burada $C'[a, b]$, $[a, b]$ aralığında hem kendisi hem birinci türevleri sürekli fonksiyonlar kümesidir.

2.4. Fonksiyonel Denklem

Matematik, gerçek hayattaki olayları denklem formatına dönüştürür ve bu denklemin çözümlerini bulmaya çalışır. Bir denklem aynı uzayın ya da farklı uzayların elemanları arasında bir eşlemeyi ifade eder.

Fonksiyonel denklemler, fonksiyon uzaylarında ortaya çıkarlar ve yapılarında, türev, integral, fark ve bunun çeşitli kombinezonları gibi operatörleri bulundurulur. Örneğin bir topluluğun herhangi bir t anındaki nüfusunun, bir önceki yıl nüfusuyla, iki yıl önceki ve üç

yıl önceki nüfusun toplamına eşit olduğu biliniyorsa $y(t)$ herhangi bir t anındaki nüfus olmak üzere;

$$y(t) = y(t-1) + y(t-2) + y(t-3) \quad (2.12)$$

fark denklemi bir fonksiyonel denklemdir (Şencan, 2001).

2.5. Fonksiyonel Diferansiyel Denklem(FDD)

Matematiksel olaylar

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \geq t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

şeklinde başlangıç değer problemi kullanarak da modellenenir. Burada t_0 başlangıç noktası, y_0 başlangıç değeridir. t_0 ve y_0 reel sabit sayılardır. Belirli koşullar altında (2.10) başlangıç değer probleminin tek bir çözümü vardır. Bu problem;

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad t \geq t_0 \quad (2.14)$$

(2.14) integral denklemine eşdeğerdir. Örneğin herhangi bir t anındaki nüfus değişiminin, o andaki nüfus ile orantılı olduğu biliniyorsa, nüfus modeli olarak

$$y'(t) = ay(t) \quad (2.15)$$

(2.15) diferansiyel denklemi alınabilir. $y(t_0) = y_0$ koşulu ile çözüm

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)} \quad (2.16)$$

(2.16) denklemi olur.

2.6. Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Sapmalı Argümentli Diferansiyel Denklemler (SADD) bilinmeyen fonksiyonun içerdiği gecikmeli değişkene göre tanımlanabilirler. İlerlemeli Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler (İFDD), bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, argümentinin yalnız bir değeri için ifade edildiği bir diferansiyel denklemdir. Bu argüment diğer bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin argümentlerinden büyük değildir.

$$F(t, y(f_{01}(t)), \dots, y(f_{0m}(t)), y'(f_{11}(t)), \dots, y'(f_{1m}(t)), \dots, y^{(n)}(f_{n1}(t)), \dots, y^{(n)}(f_{nm}(t))) = 0 \quad (2.17)$$

(2.17) formunda bir SADD'de $j = 1, 2, \dots, m$ için $f_{nj}(t) = f(t)$ ve $i = 0, 1, \dots, n - 1$ olsun. $j = 1, 2, \dots, m$ için $f_{ij}(t) \geq f(t)$ ise buna ilerlemeli diferansiyel denklem (İDD) denir (Şencan, 2001).

Örnek 2.6.1.

$$y'(t) = -y(t + t^3) + y(t + 3) - 4t + 5 \quad (2.18)$$

Tarafsız (Neutral) Fonksiyonel Diferansiyel Denklem (FDD), bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, sapma argümentli ve sapma argümentsiz terimlerini içerdiği diferansiyel denklemlerdir.

Örnek 2.6.2.

$$y''(t) = y(t) + 2y'(t - 2) - y''(t + 2) \quad (2.19)$$

Mixed(Karışık) FDD, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, argümentinin yalnız bir değeri için ifade edildiği bir diferansiyel denklemdir. Bu argümentten daha küçük ve daha büyük olan argümentler vardır.

Örnek 2.6.3.

$$y'(t) = y(t - 1) - 5t^2y(t + 1) + 6 \quad (2.20)$$

Gecikmeli FDD, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, argümentinin yalnız bir değeri için ifade edilen bir diferansiyel denklemdir. Bu argüment bilinmeyen fonksiyonun ve onun denklemdaki türevlerinin argümentlerinden daha küçük değildir. Yani (2.17) formundaki bir SADD'de $j = 1, 2, \dots, m$ için $f_{nj}(t) = f(t)$ ve $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$ aralığında alındığında $f_{ij}(t) \leq f(t)$ oluyorsa buna gecikmeli diferansiyel denklem(GDD) denir (Şencan, 2001).

Örnek 2.6.4.

$$y'(t) + ty(t^2 e^{-t}) + \cos t = 0 \quad (2.21)$$

$$y''(t) = y'(t) - 2y(t - \sin^2 t) \quad (2.22)$$

(2.21) ve (2.22) ifadeleri birer GDD' dir. Bir başka nüfus modeli örneğinde herhangi bir anda doğanların sayısının, o andaki nüfus ile orantılı olduğu biliniyorsa, τ ortalama ömür olmak üzere

$$y'(t) = a[y(t) - y(t - \tau)] \quad (2.23)$$

(2.23) ifadesi gecikmeli diferansiyel denklem ile gösterilebilen bir nüfus modelidir. Bir GDD $i = 0, 1, \dots, n - 1$, $j = 1, 2, \dots, m$ ve $r_{ij} > 0$ olmak üzere

$$F(t, y^{(i)}(f_{ij}(t - r_{ij})), y^{(n)}(t)) = 0 \quad (2.24)$$

(2.24) şeklinde gösterilebilir. Burada $r_{ij}(t)$ ' lere gecikme denir (Şencan, 2001). Herbir gecikme bir r_{ij} sabitiyse GDD, bir diferansiyel fark denklemi olur. Yukarıda yapılan sınıflamalar FDD'ler için yeterli değildir. Öyle FDD' ler vardır ki hangi tipte olduğu belli değildir. Örneğin;

$$y'(t + 1) = ty(t + 2\cos t) + t^2 y(t + 1) \quad (2.25)$$

(2.25) FDD' i verilsin. Eğer $\cos t \leq \frac{1}{2}$ olursa GDD, $\cos t \geq \frac{1}{2}$ olursa İDD olacaktır (Şencan, 2001).

2.7. Olasılık Teorisi İle İlgili Temel Kavramlar

Olasılık kuramının ve stokastik süreçlerin temeli belirsizlik ilkesine dayanmaktadır. Günlük hayatımızda doğa ve toplum olaylarına, ekonomiye, finansa, meteorolojiye, biyolojiye, tıp ve kimya alanlarına genellikle belirsizlikler hakimdir. Bu belirsizlik durumlarını bilimsel olarak ifade etmek için, olasılık, istatistik ve stokastik süreçler gibi alanlar ortaya çıkmıştır. Belirsizliklerin uzun dönemli davranışları, bir düzgünlük ve bir belirlilik çerçevesinde belli bir örüntüyü takip etmektedir. Bu özellikler dolayısıyla olasılık kuramı ve stokastik süreçler matematik dalı olarak gelişmişlerdir (Çapar, 2013).

Bu bölümde tezdeki problemlerin çözümünden sonra olasılık karakteristiklerini incelemek için kullanılan olasılık dağılımlarının tanımları verilmektedir.

Tanım 2.7.1. Sonuçları önceden kestirilemeyen gerçek bir deney (laboratuvar deneyi gibi) veya belirsizlik taşıyan bir gözlem, ölçüm veya herhangi bir etkinliği ifade eden işleme stokastik veya rasgele deney adı verilir (Çelenkli, 2019).

Tanım 2.7.2. Bir rastgele deneyinin olası tüm sonuçlarının topluluğunu oluşturan kümeye örnek uzay denir. Örnek uzayın herhangi bir alt kümesine olay adı verilir (Çelenkli, 2019).

Tanım 2.7.3. Bir deney eşit olasılıklı N tane farklı sonuç verirse ve bu sonuçların M tanesi bir A olayına uygun ise, bu A olayının $P(A)$ ile gösterilen gerçekleşme olasılığı

$$P(A) = \frac{\text{Uygun sonuçların sayısı}}{\text{Örnek uzaydaki tüm sonuçların sayısı}} = \frac{M}{N}$$

şeklinde yazılır (Akdeniz, 2014). Olasılıklar genelde, rassal bir deneyin sonucunda değişik sonuçların gözlenebilmelerine olanak sağlayan sayısal değerlerdir. Olasılık fonksiyonu

$$P: \{\text{olaylar kümesi}\} \Rightarrow [0,1]$$

biçiminde bir küme fonksiyonudur. Bu fonksiyonun tanım kümesi, söz konusu rassal deneyin bütün olaylarını içine alan bir küme, değer kümesi ise kapalı $[0,1]$ aralığındadır. Fonksiyonun yapısı 1933 yılında Rus matematikçisi A.N. Kolmogrov (1903-1987) tarafından ortaya atılan aksiyomlarla şekillenmiştir (Kolmogorov, 1956). Olasılık uzayını incelemeden önce bazı notasyonları açıklayalım.

- **Ω örnekleme uzayı:** İyi bir şekilde tanımlanmış rassal bir deneyin mümkün olan bütün sonuçlarından oluşan kümedir. Bu kümenin elemanları (deney sonuçları) w, s, x, y, z gibi harflerle gösterilecektir.
- **Olaylar:** A, B, C, D, E gibi büyük harflerle ifade edilecektir.
- **Olaylar topluluğu, elemanları küme olan kümeler:** B, F, G gibi büyük harflerle belirtilecektir.

Böylece bu semboller arasında $w \in A \in \mathcal{F}$ şeklinde bir hiyerarşi oluşmaktadır (Çapar, 2013).

Tanım 2.7.4. \mathcal{F} bir Ω kümesinin herhangi bir alt kümeler topluluğu olsun. Aşağıdaki özellikleri göz önüne alalım:

- I) $\Omega \in \mathcal{F}_i$
- II) $A \in \mathcal{F}$ olsun. O takdirde $A^c \in \mathcal{F}_i$;
- III) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ ise o takdirde $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$;
- IV) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ ise o takdirde $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Eğer \mathcal{F} topluluğu **İlk koşulları** sağlıyorsa **Boole Cebri**, **I , II ve IV** koşullarını sağlıyorsa bir sigma-cebir(σ -cebir) adını alır. Cebir veya σ -cebrin Ω 'nın alt kümelerinden oluştuğu belirtilmek isteniyorsa “ Ω içinde bir σ -cebir(veya cebir) dir” ifadesi kullanılabilir. Ayrıca (Ω, \mathcal{F}) çiftine de ölçülebilir bir uzay denir (Çapar, 2013).

Lemma

- i) Bir σ -cebir ayrıca bir cebirdir,
- ii) Sonlu sayıda kümesi olan \mathcal{F} topluluğunun σ -cebir oluşu ile cebir oluşu özdeştir.

Tanım 2.7.5. Bir (Ω, \mathcal{F}, P) üçlüsü aşağıdaki şartlar altında bir olasılık uzayıdır.

- i) Ω soyut bir küme (örnekleme uzayı gibi);
- ii) \mathcal{F} , Ω içinde bir σ -cebiri;
- iii) $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir küme fonksiyonu:
 - a) Her $A \in \mathcal{F}$ için $P(A) \geq 0$;
 - b) $P(\Omega) = 1$
 - c) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ olayları ayrık olaylar ($A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$) ise

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

olsun. Ω rassal bir deneyin örnekleme uzayı ise, A veya \mathcal{F} elemanları rassal deneyle ilgili olaylardır. Burada P ' ye olasılık fonksiyonu, olasılık ölçüsü veya kısaca olasılık denir (Çapar, 2013; Khaniyev vd. 2017).

Tanım 2.7.6. (Ω, \mathcal{F}, P) bir olasılık uzayı ve $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ ise X fonksiyonuna rastgele değişken denir (Nasırova vd. 2009). Diğer bir deyişle rastgele değişken, örnekleme uzayı üzerinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyondur (Çapar, 2013).

Tanım 2.7.7. X bir rastgele değişken olmak üzere X' in alabileceği değerlerin kümesi, sonlu yada sayılabilir sonsuz bir küme ise X' e bir kesikli rasgele değişken denir. X rastgele değişkeninin alabileceği değerlerin kümesi bir aralık yada aralıkların birleşimi şeklinde ise X' e sürekli rastgele değişken adı verilir (Akdeniz, 2014).

Tanım 2.7.8. X , sonlu sayıdaki x_1, x_2, \dots, x_N değerlerini $f(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$ olasılıklarını alabilen kesikli rastgele değişken olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X' in olasılık fonksiyonu denir (Akdeniz, 2014).

- i) $f(x) \geq 0$, tüm x 'ler için
- ii) $\sum_{i=1}^N f(x_i) = 1$

Tanım 2.7.9. Bir kesikli X rastgele değişkenin x e eşit ya da küçük olması olasılığına, X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir. Dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile gösterilir. O halde

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

dir (Akdeniz, 2014).

Tanım 2.7.10. $X, (-\infty, \infty)$ aralığında sürekli rastgele değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna, X rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir (Akdeniz, 2014).

- i) $f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Tanım 2.7.11. $X, f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip, sürekli rastgele değişken olsun. X ' in dağılım fonksiyonu

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds$$

olarak tanımlanmaktadır (Akdeniz, 2014).

Tanım 2.7.12. (Ω, \mathcal{F}, P) olasılık uzayında $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ rastgele değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu $f(x)$ olmak üzere, X kesikli rastgele değişkenin beklenen değeri

$$E(X) = \sum_i x_i f(x_i)$$

olarak tanımlanırken, X sürekli rastgele değişkenin beklenen değeri

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Çapar, 2013).

Tanım 2.7.13. Bir X rastgele değişkeninin $V(X)$ veya σ^2 ile gösterilen varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$V(X) = \sigma^2 = E[X - E(X)]^2$$

Bu şekilde tanımlanan $V(X)$ sayısının pozitif kareköküne ise X rastgele değişkeninin standart sapması denir (Akdeniz, 2014). Burada X kesikli veya sürekli rastgele değişkenler için, $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu için,

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.7.14. Eğer $E(|X|^n) < \infty$ ise $a_n = E(X^n)$ sayısına, X rastgele değişkeninin n . mertebeden (başlangıç) momenti denir.

Tanım 2.7.15. Eğer $\forall t \in (-\alpha, \beta); \alpha > 0, \beta > 0$ için $E(e^{tX}) < \infty$ ise

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} dF_X(x)$$

ifadesine, X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu denir. Moment çıkaran fonksiyon kullanılarak, $|E(X^n)| = |\alpha_n| < \infty$ ise

$$M_X^{(n)}(t) \Big|_{t=0} = E(X^n) = \alpha_n, n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde bir X rastgele değişkeninin momentleri hesaplanabilmektedir (Khaniyev vd. 2017).

2.7.1. Bazı Olasılık Dağılımları

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılmakta olan bazı olasılık dağılımları ile ilgili tanımlar verilmektedir.

2.7.1.1. Düzgün Dağılım ve Özellikleri

Düzgün dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim U(\alpha, \beta)$ ' dır. Düzgün dağılımın,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t} \quad (2.49)$$

moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak, $X \sim U(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci moment ve varyansı

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}, Var[X] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \quad (2.50)$$

bulunur (Feller, 1968).

2.7.1.2. Geometrik Dağılımın Özellikleri

Geometrik dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim G(p, q)$ ' dır. Geometrik dağılımın

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{pe^t}{1 - qe^t} \quad (2.51)$$

moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak $X \sim G(p, q)$ rastgele değişkeninin birinci moment ve varyansı

$$E[X] = \frac{1}{p}, Var[X] = \frac{q}{p^2} \quad (2.52)$$

bulunur (Feller, 1968).

2.7.1.3. Normal Dağılım

Normal dağılım olasılık ve istatistikte çok önemli bir yere sahiptir. Normal dağılım, tüm olasılık dağılımlarının en çok kullanılanıdır. Dağılım ilk kez 1733’ te De Moivre, daha sonra 1809 da Gauss tarafından bulundu. Normal dağılım, ayrıca “Gauss dağılımı” olarak da bilinir. Normal dağılım grafiğine normal eğri denir. Normal dağılımın kullanılış açısından uygun matematiksel özellikleri vardır. Normal dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)} \quad (2.53)$$

moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri

$$E[X] = \mu, \quad E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2 \quad (2.54)$$

ve varyansı

$$Var[X] = \sigma^2 \quad (2.55)$$

bulunur (Feller, 1968). Buradaki momentler kullanılarak, X ve Y bağımsız rastgele değişkenler için beklenen değer $E[XY] = E[X]E[Y]$ olur.

2.7.1.4. Beta Dağılımı

Tanım 2.7.1.1. u ve v değişkenlerinin bütün pozitif değerleri için tanımlanan

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1} \cdot (1-x)^{v-1} \cdot dx \quad (2.56)$$

(2.56) fonsiyonuna, beta fonksiyonu denir (Akdeniz, 2014). Ayrıca gösterilebilir ki

$$B(u, v) = B(v, u) \quad (2.57)$$

ve

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}, u, v > 0 \quad (2.58)$$

dir.

Tanım 2.7.1.2. (Beta dağılımı) Aşağıdaki yoğunluk fonsiyonuna sahip X rastgele değişkeni, beta dağılımına sahiptir denir (Akdeniz, 2014).

$$f(x; \theta, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{B(\theta, \xi)} x^{\theta-1} (1-x)^{\xi-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{Aralığın dışında} \end{cases} \quad (2.59)$$

Burada θ ve ξ parametreleri pozitif reel sayılardır. Özel olarak $\theta = \xi = 1$ alınırsa dikdörtgensel dağılım elde edilir. $\theta = 1, \xi = 2$ veya $\theta = 2, \xi = 1$ alınırsa üçgensel dağılım bulunur:

$$f(x; 1, 2) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Aralığın dışında} \end{cases} \quad (2.60)$$

$$f(x; 2, 1) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{Aralığın dışında} \end{cases} \quad (2.61)$$

Beta dağılımına sahip X rasgele değişkeninin, beklenen değeri ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$E(X) = \frac{\theta}{\theta + \xi} \quad (2.62)$$

$$Var(X) = \frac{\theta\xi}{(\theta + \xi)^2(\theta + \xi + 1)} \quad (2.63)$$

2.7.1.5. Üçgensel Dağılım

Bir X rastgele değişkeni,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-c)(c-a)}, & a < x < c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & c \leq x < b \end{cases} \quad (2.64)$$

şeklinde olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse genelleştirilmiş Üçgensel dağılıma sahiptir. Burada a ve b sırasıyla rastgele değişkenin (olasılık yoğunluk fonksiyonunun) alabileceği en küçük ve en büyük değerler, c dağılımın mod değeridir. $X \sim \text{Triangular}(a, b, c)$ ile gösterilir. Beklenen değer ve varyansı

$$E(X) = \frac{(a + b + c)}{3} \quad (2.65)$$

$$Var(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \quad (2.66)$$

(2.65) ve (2.66) ile verilir. Üçgensel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu:

$$M_x(t) = 2 \frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2} \quad (2.67)$$

(2.67)' dir. Karakteristik fonksiyon, moment çıkaran fonksiyon içindeki t teriminin it ile değiştirilmesi ile elde edilir. Bir üçgensel dağılımın karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_x = -2 \frac{(b-c)e^{iat} - (b-a)e^{ict} + (c-a)e^{ibt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2} \quad (2.68)$$

Üçgensel dağılım, $(-1,1)$ aralığında değerler alan ve 0 mod değerine sahip olan, standart üçgensel dağılımın herhangi bir (a,b) aralığına genelleştirilmiş halidir. Simetrik olan standart üçgensel dağılım, tepe değer c ' nin seçimine göre simetrik olmayacak şekilde de genelleştirilebilir. Bir Y rastgele değişkeni

$$f(y) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad (2.69)$$

(2.69) şeklinde olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse, standart üçgensel dağılıma sahiptir. Standart üçgensel dağılım için beklenen değer ve varyans

$$E(Y) = 0, \quad (2.70)$$

$$Var(Y) = \frac{1}{6} \quad (2.71)$$

(2.70) ve (2.71) şeklindedir. Standart üçgensel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu:

$$M_x(t) = 2 \frac{(1-0)e^t - (1+1)e^{0t} + (0+1)e^t}{(1+1)(0+1)(1-0)t^2} = \frac{e^{-t} - 2 + e^t}{t^2} \quad (2.72)$$

(2.72) dir. Bir standart üçgensel dağılımın karakteristik fonksiyonu şöyledir:

$$\varphi_x = -2 \frac{(1-0)e^{it} - (1+1)e^{i0t} + (0+1)e^{it}}{(1+1)(0+1)(1-0)t^2} = \frac{e^{-it} - 2 + e^{it}}{t^2} \quad (2.73)$$

2.7.1.6. Laplace Dağılımı

Bir X rastgele değişkeni,

$$f(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right), x \in R \quad (2.74)$$

(2.74) şeklindeki bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse Laplace dağılımına sahiptir. Bu rastgele değişken, $X \sim \text{Laplace}(\mu, b)$ ile gösterilir. Burada μ dağılımın konumunu, b ise dağılımın ölçeğini belirten parametrelerdir. Laplace dağılımının, beklenen değer ve varyansı $E(X) = \mu$,

$$(2.75)$$

$$\text{Var}(X) = 2b^2 \quad (2.76)$$

(2.75) ve (2.76) şeklindedir. Laplace dağılımının moment çıkaran fonksiyonu, X , ortalaması μ ve varyansı $2b^2$ olan bir rastgele değişken olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$M_x(t) = \frac{\exp(\mu t)}{1 - b^2 t^2}, \quad |t| < \frac{1}{b}. \quad (2.77)$$

Karakteristik fonksiyon, i sanal birim ile gösterilen $\exp(itX)$ ifadesinin beklenen değeri olarak tanımlanmıştır. Bu nedenle karakteristik fonksiyon, moment çıkaran fonksiyon içindeki t teriminin it ile değiştirilmesi ile elde edilir. Bir Laplace dağılımının karakteristik fonksiyonu şöyledir:

$$\varphi_x(t) = \frac{\exp(\mu it)}{1 + b^2 t^2}, \quad |it| < \frac{1}{b} \quad (2.78)$$

Laplace dağılımı, $\mu = 0$ konum ve $b = 1$ ölçek parametresine sahip olan standart Laplace dağılımının genelleştirilmiş halidir. Bir Y rastgele değişkeni

$$f(y) = \frac{1}{2} \exp(-|u|), \quad u \in R \quad (2.79)$$

(2.79) şeklindeki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse, standart Laplace dağılımına sahiptir. Bu rastgele değişken $Y \sim \text{Laplace}(0,1)$ ile gösterilir. Standart Laplace dağılımı için beklenen değer ve varyans

$$E(Y) = 0, \quad (2.80)$$

$$\text{Var}(Y) = 2 \quad (2.81)$$

(2.80) ve (2.81) şeklindedir. Standart Laplace dağılımının moment çıkaran fonksiyonu, X , ortalaması $\mu = 0$ ve varyansı $2b^2 = 2 \times 1^2 = 2$ olan bir rastgele değişken olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$M_x(t) = \frac{\exp(0)}{1 + t^2} = \frac{1}{1 + t^2}, \quad |it| < 1 \quad (2.82)$$

Bir standart Laplace dağılımının karakteristik fonksiyonu şöyledir:

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad |it| < 1 \quad (2.83)$$

2.7.1.7. Gamma Dağılımı

Gamma dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ dir. Gamma dağılımının moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha} \quad (2.84)$$

(2.84) ifadesi bulunur (Feller, 1968). $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin, birinci momenti ve varyansı

$$E[X] = \alpha\beta, \text{Var}[X] = \alpha\beta^2 \quad (2.85)$$

(2.85)' dir (Feller, 1968).

2.8. Rastgele ve Stokastik Süreçler

Literatürde verilen bazı stokastik süreçler ile ilgili temel bilgiler aşağıda sunulmuştur.

2.8.1. Gauss Süreçleri

Tanım 2.8.1.1. Sonlu boyutlu dağılımları normal dağılım olan $\xi(\omega, t)$ sürecine Gauss süreci denir (Aliyev, 2010). Gauss sürecinin karakteristik fonksiyonu

$$\begin{aligned}\varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) &= E \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n u_k \xi(t_k) \right\} \\ &= \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n u_k m(t_k) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n K_\xi(t_i, t_j) u_i u_j \right\}\end{aligned}\quad (2.86)$$

(2.86) ifadesindeki gibidir, burada beklenen değeri

$$m_\xi(t) = E(\xi(\omega, t)) \quad (2.87)$$

(2.87) ve kovaryans fonksiyonu

$$K_\xi(t_1, t_2) = E(\xi(t_1)\xi(t_2)) - m_\xi(t_1)m_\xi(t_2) \quad (2.88)$$

(2.88)' dir. Olasılık teorisinden de bilindiği gibi, karakteristik fonksiyonun dağılım fonksiyonunu bire bir tanımlamaktadır. İfadesinden görüldüğü gibi, Gauss sürecinin karakteristik fonksiyonu yalnız sürecin beklenen değeri ve kovaryans fonksiyonu yardımı ile tanımlanmaktadır. Sürecin beklenen değeri, bir boyutlu, kovaryans fonksiyonu ise iki boyutlu dağılım yardımı ile tanımlandığından Gauss sürecinin verilebilmesi için, yalnız iki boyutlu dağılımın verilmesi yeterli olmaktadır (Aliyev, 2010). Örneğin,

$$p_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} ((x + \sin t_1)^2 + (y + \sin t_2)^2) \right\} \quad (2.89)$$

(2.89) ifadesi, iki boyutlu yoğunluk fonksiyonu ile verilen $\xi(w, t)$ stokastik sürecinin beklenen değeri $m_\xi(t) = -\sin t$, varyansı $Var \xi(t) = 1$ olan bir Gauss sürecidir. Gauss sürecine diğer bir örnek olarak, Wiener sürecini göstermek mümkündür.

2.8.2. Değerleri Bağımsız Süreçler

Tanım 2.8.2.1. $\xi(t) \equiv \xi(\omega, t)$ stokastik sürecinin, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty, n = 1, 2, \dots$ noktalarındaki değerlerini, $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n), n = 1, 2, \dots$ ile gösterelim. Eğer $\forall n$ için $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ rastgele değişkenleri tam bağımsız ise bu durumda bu sürece değerleri bağımsız stokastik süreç denir (Aliyev, 2010). Diğerleri bağımsız olan stokastik süreçlerin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1}(x_1)F_{t_2}(x_2) \dots F_{t_n}(x_n). \quad (2.90)$$

2.8.2.1. Wiener Süreci

Artışları bağımsız olan süreçlerden biri de Wiener sürecidir. Brown hareketinin matematiksel modeli 1923 yılında Amerikalı bilim adamı Norbert Wiener tarafından kurulmuştur.

Tanım 2.8.2.1. (Ω, \mathcal{F}, P) bir olasılık uzayında, $\omega \in \Omega, t \geq 0$ olmak üzere, $W(t) = W(\omega, t)$ sürecinin aşağıdaki koşulları sağladığı varsayalım:

- 1) $W(0) = 0$.
- 2) $W(t)$ sürecinin artışları bağımsızdır. Yani $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty, n = 1, 2, \dots$ için

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}) \quad (2.91)$$

(2.91) ifadesinin artışları bağımsızdır.

- 3) $\forall 0 < s < t$ için $W(t) - W(s)$ artışı $(0, t - s)$ parametrelili normal dağılıma sahiptir:

$$F_{t-s}(x) = P\{W(t) - W(s) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du \quad (2.92)$$

Bu durumda $W(t)$ sürecine, Wiener süreci denir. Wiener sürecinin $\forall 0 < s < t$ için $W(t) - W(s)$ artışının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p_{t-s}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}. \quad (2.93)$$

Wiener süreci aynı zamanda Gauss sürecidir. Çünkü bilindiği gibi, normal dağılıma sahip vektörün lineer dönüşümü, tekrar normal dağılıma sahiptir. Wiener sürecinin artışları normal dağılıma sahip olduğundan, sonlu boyutlu dağılımları da normal dağılıma sahiptir, yani Wiener süreci hem de Gauss sürecidir. Wiener süreci, fizikte Brown hareketi gibi bilinen hareketin matematiksel modelidir. Wiener süreci hem de finans pazarında fiyatların değişmesinin incelenmesinde de kullanılmaktadır (Aliyev, 2010).

2.8.2.2. Wiener Sürecinin Sonlu Boyutlu Dağılımları

Şimdi Wiener sürecinin n boyutlu dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu, yani

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{W(t_1) \leq x_1, W(t_2) \leq x_2, \dots, W(t_n) \leq x_n\} \quad (2.94)$$

(2.94) ve

$$p_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (2.95)$$

(2.95) hesaplanacaktır. Öncelikle (2.92)' de $s = 0$ alınırsa, Wiener sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu elde edilir:

$$F_t(x) = P\{W(t) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2t}} du, \forall x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (2.96)$$

Yukarıdaki (2.96) ifadesinin x 'e göre türevini alırsak, sürecin bir boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir (Aliyev, 2010):

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \tag{2.97}$$

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Rastgele sabit veya rastgele değişkenler içeren diferansiyel denklemler olarak adlandırılan rastgele diferansiyel denklemler, günümüzde çok çalışılan konulardır.

3.1. Rastgele (Random) Sabit Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

Rastgele bileşenli diferansiyel denklemler, mühendislik, matematiksel biyoloji ve fiziksel problemlerdeki pek çok uygulamada büyük önemi nedeniyle, güncel ilgi alanlarından biridir. Bu denklemlerin çoğu, analitik olarak çözülemediğinden, etkili nümerik metotlar gereklidir. Bu yöntemlerin birkaçı; Khudair vd. (2011a) Adomian Ayırıştırma Metodu (ADM), Merdan vd. (2012b), Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY), Inokuti vd. (1978), Eugene vd. (2002), He (2007), Abassy vd. (2007), Momani vd. (2008), Wu ve Lee (2010), Jafari ve Tajadodi (2010), Merdan (2010), Khudair vd. (2011a), Khudair vd. (2011b), Sakar vd. (2012), Merdan (2012a), Merdan vd. (2012b), Elbeleze vd. (2013) Varyasyonel İterasyon Yöntemi (VIM) ve Wu ve Lee (2010), Kesirli Varyasyonel İterasyon Yöntemi (FVIM) dir (Khudair vd. 2011a; Merdan vd. 2012b; Inokuti vd. 1978; Eugene vd. 2002; He, 2007; Abassy vd. 2007; Momani vd. 2008; Wu ve Lee, 2010; Jafari ve Tajadodi, 2010; Merdan, 2010; Khudair vd. 2011a; Khudair vd. 2011b; Sakar vd. 2012; Merdan, 2012a; Merdan vd. 2012b; Elbeleze vd. 2013; Wu ve Lee, 2010). Literatürdeki matematiksel modelleme çalışmalarının önemli bir kısmı, deterministik, yani rastgele olmayan, denklemler kullanılarak yürütülmektedir. Adi, kısmi, kesirli türevli vb. türden diferansiyel denklem sistemlerindeki, başlangıç değerleri, katsayılar ve diğer bazı denklem bileşenlerinin rastgele yapıya sahip olma ihtimalini göz ardı eden bu yaklaşım, birçok durumda olayın tam anlamıyla modellenmesine engel olabilmektedir. Doğadaki olayların, rastgele yapılarının denklem sistemlerinde temsiline imkan veren en önemli araçlar ise rastgele diferansiyel denklemler ve stokastik süreçlerdir. Rastgele değişkenler kullanılarak oluşturulan rastgele diferansiyel denklemler, yapıları itibariyle olayların rastgele dinamiklerinin ölçümüne imkan sağlamaktadırlar. Tez çalışmasında kullanılan rastgele modeller, literatürde var olan deterministik diferansiyel denklemler, rastgele etki terimlerinin eklenmesi aracılığıyla, elde edilen denklemlerdir. Temel olarak deterministik diferansiyel denklemler kullanılarak, aşağıdaki üç şekilde rastgele diferansiyel denklemler elde edilebilmektedir. Başlangıç koşullarını, denklemin katsayılarını ve denklemin sağ tarafındaki kuvvet terimi rastgele

seçilerek denklem rastgele hale dönüştürülecektir. Gecikmeli rastgele diferansiyel denklemler (GRDD)' ler:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(at)), & 0 \leq t \leq T, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), & 0 \leq t \leq T, \\ y(t) = g(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

(3.1), (3.2), (3.3) ifadeleridir. y_0 başlangıç koşulu ve $g(t)$ başlangıç fonksiyonu rastgele seçilerek gecikmeli denklemler rastgele getirilebilir.

3.2. Doğrusal Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

f ve a_{ij} ler belirli fonksiyonlar olmak üzere

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m a_{ij}(t) x^{(i)}(t - r_j(t)) + f(t) \quad (3.4)$$

(3.4) şeklindeki GDD'lere n . mertebeden doğrusal gecikmeli diferansiyel denklem (DGDD) denir (Şencan, 2001). $f(t) \equiv 0$ ise denklem homojendir. Bu denklemlerin doğrusallığı ispatlanabilir.

Teorem 3.2.1. C^n, n kere türevlenebilir fonksiyonların doğrusal uzayı olmak üzere

$$L: R \times C^n \rightarrow C^n \quad (3.5)$$

$$L(t, x) = x^{(n)}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m a_{ij}(t) x^{(i)}(t - r_j(t)) \quad (3.6)$$

operatörü doğrusaldır.

3.2.1. Doğrusal Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

$k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$x'_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kij}(t) x_i(t - r_j(t)) + f_k(t) \quad (3.7)$$

(3.7) formundaki n denklemden oluşan ve n bilinmeyen fonksiyon içeren bir denklem sistemine, birinci mertebeden n bilinmeyenli doğrusal gecikmeli diferansiyel denklem sistemi (DGDDS) denir (Şencan, 2001). (3.7) denklemi;

$$x(t) = [x_k(t)]_{n \times 1} \quad A_j(t) = [a_{kij}]_{n \times n} \quad H(t) = [f_k(t)]_{n \times 1} \quad (3.8)$$

(3.8) ifadesi ile birlikte

$$X'(t) = \sum_{j=1}^m A_j(t) X(t - r_j(t)) + H(t) \quad (3.9)$$

(3.9) vektörel formunda yazılabilir. $H(t) \equiv 0$ ise homojen DGDDS elde edilir.

Teorem 3.2.1.1. n . mertebeden her DGDD, birinci mertebeden n denklem ve n bilinmeyen fonksiyon içeren bir DGDDS'ne dönüştürülebilir. Böylece (3.9) formunda bir denklem elde edilir. Doğrusal adi diferansiyel denklemlerde, birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebiliyordu. Gecikmeli sistemlerde de benzer şekilde n . mertebeden bir DGDD, birinci mertebeden bir DGDDS' ne dönüştürülebilir. Bunu bir örnek üzerinde gösterelim:

$$x^{(iv)}(t) = x'''(t) + 2x'''(t-1) + x''(t) + x''(t-2) + 2x'(t) - 4x'(t-1) - x(t-2) + t^2 \quad (3.10)$$

(3.10) ifadesindeki dördüncü mertebeden, sabit gecikmeli, sabit katsayılı, homojen olmayan DGDD' ni ele alalım. Öncelikle; $x^{i-1}(t) = x_i(t)$ dönüşümünü yapalım. $i = 1, 2, 3, 4$ için

$$x(t) = x_1(t)$$

$$x'(t) = x_2(t)$$

$$x''(t) = x_3(t)$$

$$x'''(t) = x_4(t) \tag{3.11}$$

olur. Buradan da

$$x(t) = x_1(t) \Rightarrow x'(t) = x'_1(t)$$

$$x'(t) = x_2(t) \Rightarrow x'_1(t) = x_2(t)$$

$$x''(t) = x'_2(t) \Rightarrow x'_2(t) = x_3(t)$$

$$x'''(t) = x''_2(t) = x'_3(t) \Rightarrow x'_3(t) = x_4(t)$$

$$x^{iv}(t) = x'''_3(t) \Rightarrow x'_4(t) = x^{iv}(t) \tag{3.12}$$

elde edilir. Böylece

$$x'_1(t) = x_2(t)$$

$$x'_2(t) = x_3(t)$$

$$x'_3(t) = x_4(t)$$

$$x'_4(t) = x_4 + 2x_4(t-1) + x_3(t) + x_3(t-2)$$

$$+ 2x_2(t) - 4x_2(t-1) - x_1(t-2) + 2t \tag{3.13}$$

(3.13) ifadesindeki DGDSS veya

$$X'(t) = \sum_{j=1}^3 A_j X(t-j+1) + H(t) \quad (3.14)$$

(3.14) ifadesindeki vektörel denklem bulunur.

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad H(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad X'(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \\ x'_4(t) \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad (3.15)$$

olur (Şencan, 2001).

3.3. Adımlar Yöntemi

$\tau > 0$ sabit gecikmesi ile skaler doğrusal gecikmeli diferansiyel denklem

$$\frac{d}{dt}y(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t-\tau) \quad (3.16)$$

ile gösterilir (Becker, 2009). Burada $a, b: [T, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. Burada (3.16)'nın çözümlerini hesaplamak için Maple' da Adımlar Yöntemi kullanılacaktır. τ gecikmesinin özel değeri için, $a(t)$ ve $b(t)$ fonksiyonları, $T \geq 0$ olmak üzere $[T-\tau, T]$ başlangıç aralığında, $\varphi: [T-\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli başlangıç fonksiyonu ve pozitif n tamsayısı için

$$T-\tau \leq t \leq T \text{ için } y(t) = \varphi(t) \quad (3.17)$$

(3.17) başlangıç koşulunu sağlayan $[T, T+n\tau]$ aralığında (3.16)'nın çözümü bulunabilir. $t = T$ de $y'(T)$ 'nin sağdan türev olduğu kabul edilir (Becker, 2009).

3.3.1. Adımlar Yöntemi Metodu ve Adımları

Aşağıdaki örnek yardımıyla adımlar yöntemini açıklayalım.

Örnek 3.4.1.1.

$t \in [0,1]$ için $y(t) = -4t$ başlangıç koşulunu sağlayan $[0,3]$ aralığı üzerindeki

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) + y(t-1) \quad (3.18)$$

(3.18) denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm: Problem, $t \in [-1,0]$ için $y(t) = -4t$ olmak üzere $t \in [0,3]$ için (3.18) denklemini sağlayan $y(t)$ fonksiyonunun belirlenmesidir. $t \in [0,1]$ için, $-1 \leq t-1 \leq 0$ ve (3.18) denkleminin sağ tarafındaki ikinci terim

$$y(t-1) = -4(t-1) \quad (3.19)$$

(3.19) dur. Öncelikle $y(t) = -4t$ başlangıç fonksiyonu ile $[0,1]$ ' daki (3.18)' in çözümünü bulmak için $y(0) = -4(0) = 0$ başlangıç koşulunu sağlayan

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - 4(t-1) \quad (3.20)$$

(3.20) lineer birinci mertebeden adi diferansiyel denklemi (ADD)' nin çözümünü bulmamız gerekir. Bu çözüm Maple paket programı yardımıyla aşağıdaki gibi basit şekilde elde edilir:

$$> dd1 := \frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - 4(t-1):$$

$$> \text{çözüm} := dsolve([dd1, y(0) = 0], y(t))$$

$$\text{çözüm} := y(t) = -4t + 8 - 8e^{-t} \quad (3.21)$$

$[0, 1]$ aralığı üzerinde başlangıç koşulunu sağlayan (3.18)'ün çözümü

$$y(t) = 8 - 4t - 8e^{-t} \quad (3.22)$$

(3.22) dir. $[-1, 3]$ aralığında tüm çözüm parçalarını göstermek için öncelikle $[-1, 0]$ aralığı üzerinde başlangıç fonksiyonu s_0

$$> s[0] := t \rightarrow -4t$$

$$> s[0](t)$$

$$s_0 := t \rightarrow -4t$$

$$-4t \quad (3.23)$$

tanımlanır. Daha sonra $[0,1]$ aralığı üzerinde başlangıç koşulunu sağlayan (3.18)'in çözümü s_1

$$> s[1] := unapply(rhs(\text{çözüm}), t)$$

$$> s[1](t)$$

$$s_1 := t \rightarrow -4t + 8 - 8e^{-t}$$

$$-4t + 8 - 8e^{-t} \quad (3.24)$$

tanımlanır. Ancak $y(t)$ ' nin $[1,2]$ aralığındaki çözümünü bulmak için $[0,1]$ aralığındaki çözümünü bulmamız gerekir. $t \in [1,2]$ için $t - 1 \in [0,1]$ alınırsa

$$y(t - 1) = 8 - 4(t - 1) - 8e^{-(t-1)} \quad (3.25)$$

(3.25) bulunur. Buradan, $y(1) = 4 - 8e^{-1}$ başlangıç koşulunu sağlayan

$$y'(t) = -y(t) + 8 - 4(t - 1) - 8e^{-(t-1)} \quad (3.26)$$

(3.26)'nın çözümü

$$> dd2 := \frac{d}{dt} x(t) = -y(t) + 8 - 4(t - 1) - 8\exp(-(t - 1))$$

$$> \text{çözüm2} := dsolve([dd2, y(1) = 4 - 8\exp(-1)], y(t))$$

$$\text{çözüm2} := y(t) = -8te^{-t+1} - 4t + 16 - 8e^{-t}$$

$$y(t) = 16 - 4t - 8te^{-t+1} - 8e^{-t}. \quad (3.27)$$

(3.27) elde edilir. s_2 ile $[1, 2]$ aralığındaki $y(t)$ çözümünü tanımladık:

$$s[2] := unapply(rhs(\text{çözüm2}), t)$$

$$s_2 := t \rightarrow 8te^{-t+1} - 4t + 16 - 8e^{-t} \quad (3.28)$$

Bu süreç devam ettirilirse, $[2, 3]$ aralığındaki çözüm

$$y'(t) = -y(t) + y(t - 1) = -y(t) + 16 - 4(t - 1) - 8(t - 1)e^{2-t} - 8e^{-(t-1)} \quad (3.29)$$

(3.29) başlangıç koşulu ile

$$y(2) = 16 - 4(2) - 8(2)e^{-1} - 8e^{-2} = 8 - 16e^{-1} - 8e^{-2} \quad (3.30)$$

bulunabilir. Maple komutları çalıştırılırsa

$$> dd3 := \frac{d}{dt} x(t) = -y(t) + 16 - 4(t - 1) - 8(t - 1)e^{2-t} - 8e^{-(t-1)};$$

$$> \text{çözüm3} := dsolve([dd3, x(2) = 8 - 16e^{-1} - 8e^{-2}], y(t))$$

$$\text{çözüm3} := y(t) = (-4t^2e^2 + 8te^2 - 8et - 4e^t t + 24e^t$$

$$- \frac{8(2e^{-2}e^2 - 2e^{-2}e + e^{-2} + 2e^{-1} - 1)}{e^{-2}}) \quad (3.31)$$

(3.31) çözümü elde edilir. $[2, 3]$ aralığındaki $y(t)$ çözümü

$> \text{simplify}(\text{çözüm3})$

$$y(t) = -4(t^2 e^2 - 2te^2 + 2e^2 + 2et + e^t t - 6e^t + 2)e^{-t} \quad (3.32)$$

(3.32) dir. $[2, 3]$ aralığındaki $y(t)$ çözümünü s_3 ile tanımladık:

$> s[3] := \text{unapply}(\text{simplify}(\text{rhs}(\text{çözüm3})), t)$

$$s[3] := t \rightarrow -4(t^2 e^2 - 2te^2 + 2e^2 + 2et + e^t t - 6e^t + 2)e^{-t} \quad (3.33)$$

Sonuç olarak, Heaviside Fonksiyonu (Birim Basamak Fonksiyonu) yardımıyla $[-1, 3]$ aralığındaki $y(t)$ çözümü, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$ ve $[2, 3]$, aralıklarındaki çözümler birleştirilerek dört parçalı olarak elde edilir.

$> \text{NumericEventHandler}(\text{invalid_operation} = ' \text{Heaviside}$

$/\text{EventHandler}'(\text{value_at_zero} = 0))$: (3.34)

$y(t)$ birleştirilmiş tek bir ifade ile gösterilirse,

$> h := 1$:

$> y := t \rightarrow s[0](t) + \sum_{j=0}^2 (s[j+1] - s[j])(t) \cdot \text{Heaviside}(t - j \cdot h)$:

$> 'y(t)' = y(t)$

$$y(t) = -4t + (8 - 8e^{-t})\text{Heaviside}(t) + (-8te^{-t+1} + 8)\text{Heaviside}(t - 1)$$

$$+ (-4(t^2 e^2 - 2te^2 + 2e^2 + 2et - 6e^t + 2)e^{-t}$$

$$+ 8te^{-t+1} + 4t - 16 + 8e^{-t})\text{Heaviside}(t - 2) \quad (3.35)$$

(3.35) elde edilir veya çözümünü $[-1, 3]$ ' te parçalı olarak tanımlanmış fonksiyon olarak ifade edebiliriz:

$$> p := \text{simplify}(\text{convert}(y(t), \text{piecewise}, t)):$$

$$> y := \text{unapply}(p, t):$$

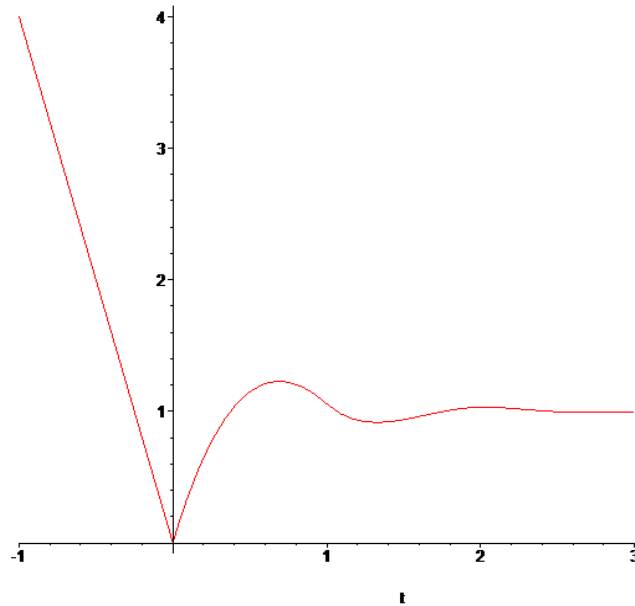
$$>' y(t)' = y(t)$$

$$y(t) = \begin{cases} -4t & t \leq 0 \\ -4t + 8 - 8e^{-t} & 0 < t \leq 1 \\ -8te^{-t+1} - 4t + 16 - 8e^{-t} & 1 < t \leq 2 \\ -4(t^2e^2 - 2te^2 + 2et + e^t t - 6e^t + 2)e^{-t} & 2 < t \end{cases} \quad (3.36)$$

$t \in [-1, 3]$ için (3.36)' ün grafiği

$$\text{plot}(y(t), t = -h..3 \cdot h, \text{discont} = \text{true}, \text{labels} = [t, y], \text{labelfont} = [\text{TIMES}, \text{BOLD}, 12])$$

yukarıdaki komut yardımıyla çizdirilirse aşağıdaki şekil 3.1 elde edilir.



Şekil 3.1. $t \in [-1, 3]$ için $y(t)$ fonksiyonunun grafiği

Örnek 3.3.1.2.

$t \in [0,1]$ için $y(t) = At^2 + Bt + C$ denkleminde, $A \sim U(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim U(1,2)$ düzgün dağılıma sahip, $B \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow B \sim N(0,1)$ normal dağılıma sahip, $C \sim B(\theta, \xi) \rightarrow C \sim B(2,3)$ beta dağılımına sahip

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t) - y(t-1) \quad (3.37)$$

(3.37) denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm: Problem, $t \in [0,1]$ için $y(t) = At^2 + Bt + C$ olmak üzere $t \in [0,3]$ için (3.37) denklemini sağlayan $y(t)$ fonksiyonunun belirlenmesidir. $t \in [0,1]$ için $-1 \leq t-1 \leq 0$ aralığında (3.37) 'in sağ tarafındaki ikinci terim

$$y(t-1) = A(t-1)^2 + B(t-1) + C. \quad (3.38)$$

(3.38) dir. $y(t) = At^2 + Bt + C$ başlangıç fonksiyonu ile $[0,1]$ aralığında (3.37)'nin çözümünü bulmak için $y(0) = A(0)^2 + B(0) + C = C$ başlangıç koşulunu sağlayan

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t) - A(t-1)^2 - B(t-1) - C \quad (3.39)$$

(3.39) lineer birinci mertebeden ADD' nin çözümünü bulmamız gerekir. Bu çözüm Maple paket programı yardımıyla aşağıdaki gibi basit şekilde elde edilir:

$$> dd1 := \frac{d}{dt}y(t) = y(t) - A(t-1)^2 - B(t-1) - C$$

$$> \text{çözüm} := dsolve([dd1, y(0) = C], y(t))$$

$$\text{çözüm} := y(t) = C + A + Bt + At^2 - e^t A \quad (3.40)$$

$[0, 1]$ aralığı üzerinde başlangıç koşulunu sağlayan (3.37)' nin çözümü

$$y(t) = C + A + Bt + At^2 - e^t A. \quad (3.41)$$

(3.41)' dir. $[-1, 3]$ aralığında tüm çözüm parçalarını göstermek için öncelikle $[-1, 0]$ aralığı üzerinde başlangıç fonksiyonu s_0

$$> s[0] := t \rightarrow At$$

$$> s[0](t)$$

$$s_0 := t \rightarrow At$$

$$At \tag{3.42}$$

(3.42) olarak tanımlanır. Daha sonra $[0, 1]$ aralığı üzerinde başlangıç koşulunu sağlayan $y(t)$ çözümü s_1 olarak tanımlanır:

$$> s[1] := unapply(rhs(\text{çözüm}), t)$$

$$> [1](t)$$

$$s_1 := t \rightarrow At$$

$$At \tag{3.43}$$

$[1, 2]$ aralığındaki çözümü bulmak için $[0, 1]$ aralığındaki çözümün bulunması gerekir. $t \in [1, 2]$ için, $t - 1 \in [0, 1]$ alınırsa

$$y(t - 1) = C + A + B(t - 1) + A(t - 1)^2 - e^{t-1}A \tag{3.44}$$

(3.44) bulunur. Buradan, $y(1) = C + 2A + B - Ae$ başlangıç koşulunu sağlayan

$$y'(t) = y(t) - (C + A + B(t - 1) + A(t - 1)^2 - e^{t-1}A) \tag{3.45}$$

(3.45) çözümünü bulacağız:

$$> dd2 := \frac{d}{dt}x(t) = y(t) - (C + A + B(t - 1) + A(t - 1)^2 - e^{t-1}A)$$

$$\begin{aligned} &> \text{çözüm2} := \text{dsolve}([dd2, y(1) = y(1) = C + 2A + B - A], y(t)) \\ &\text{çözüm2} := y(t) \end{aligned}$$

$$= Bt + At^2 + 2A + C + Ate^{t-1} - e^{t-1}(2A + Ae) \quad (3.46)$$

$$y(t) = Bt + At^2 + 2A + C + Ate^{t-1} - e^{t-1}(2A + Ae) \quad (3.47)$$

s_2 ile $[1, 2]$ aralığındaki $y(t)$ çözümünü tanımladık:

$$s[2] := \text{unapply}(\text{rhs}(\text{çözüm2}), t)$$

$$s_2 := t \rightarrow Bt + At^2 + 2A + C + Ate^{t-1} - e^{t-1}(2A + Ae) \quad (3.48)$$

Bu sürece devam edilirse, $[2, 3]$ aralığındaki çözüm,

$$y'(t) = y(t) - y(t-1)$$

$$= y(t) - (B(t-1) + A(t-1)^2 + 2A + C + A(t-1)e^{t-2} - e^{t-2}(2A + Ae)) \quad (3.49)$$

(3.49) başlangıç koşulu ile

$$y(2) = 2B + 4A + 2A + C + 2Ae - e(2A + Ae) = 6A + 2B + C - Ae^2 \quad (3.50)$$

bulunabilir. Maple komutları çalıştırılırsa,

$$> dd3 := \frac{d}{dt}y(t) = y(t)$$

$$-(B(t-1) + A(t-1)^2 + 2A + C + A(t-1)e^{t-2} - e^{t-2}(2A + Ae))$$

$$> \text{çözüm3} := \text{dsolve}([dd3, x(2) = 6A + 2B + C - Ae^2], y(t))$$

$$\text{çözüm3} := y(t) = (At^2 + 3A + C + Bt - \frac{A}{2}t^2e^{-2+t}$$

$$+Ate^{-2+t} - e^{t-2}(A + Ae^2)) \quad (3.51)$$

(3.51) çözümü elde edilir. $[2, 3]$ aralığındaki çözümü ise

$> \text{simplify}(\text{çözüm3})$

$$y(t) = At^2 + 3A + C + Bt - \frac{A}{2}t^2e^{-2+t} + Ate^{-2+t} - e^{t-2}(A + Ae^2) \quad (3.52)$$

(3.52)' dir. $[2, 3]$ aralığındaki $y(t)$ çözümünü s_3 ile tanımladık:

$> s[3] := \text{unapply}(\text{simplify}(\text{rhs}(\text{çözüm3})), t)$

$$s[3] := t \rightarrow At^2 + 3A + C + Bt - \frac{A}{2}t^2e^{-2+t} + Ate^{-2+t} - e^{t-2}(A + Ae^2) \quad (3.53)$$

Sonuç olarak, Heaviside Fonksiyonu (Birim Basamak Fonksiyonu) yardımıyla $[-1, 3]$ aralığındaki $y(t)$ çözümü, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$ ve $[2, 3]$, aralıklarındaki çözümler birleştirilerek dört parçalı olarak elde edilir:

$$> \text{NumericEventHandler} \left(\frac{\text{invalid_operation} = ' \text{Heaviside} }{\text{EventHandler}'(\text{value}_{\text{at_zero}} = 0)} \right): \quad (3.54)$$

$y(t)$ birleştirilmiş tek bir ifade ile gösterilirse,

$> h := 1:$

$$> y := t \rightarrow s[0](t) + \sum_{j=0}^2 (s[j+1] - s[j])(t). \text{Heaviside}(t - j.h):$$

$> 'y(t)' = y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) = & At^2 + Bt + C + (C + A + Bt + At^2 - e^t A) \text{Heaviside}(t) \\ & + (Bt + At^2 + 2A + C + Ate^{t-1} - e^{t-1}(2A + Ae)) \text{Heaviside}(t - 1) \\ & + (At^2 + 3A + C \end{aligned}$$

$$+ Bt - \frac{A}{2}t^2e^{-2+t} + Ate^{-2+t} - e^{t-2}(A + Ae^2)) \text{Heaviside}(t - 2) \quad (3.55)$$

(3.55) bulunur yada çözümünü $[-1, 3]$ ' te parçalı olarak tanımlanmış fonksiyon olarak ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}
& > p := \text{simplify}(\text{convert}(y(t), \text{piecewise}, t)): \\
& > y := \text{unapply}(p, t): \\
& >' y(t)' = y(t)
\end{aligned}$$

$$y(t) = \begin{cases} At^2 + Bt + C & t \leq 0 \\ C + A + Bt + At^2 - e^t A & t \leq 1 \\ Bt + At^2 + 2A + C + Ate^{t-1} - e^{t-1}(2A + Ae) & t \leq 2 \\ At^2 + 3A + C + Bt - \frac{A}{2}t^2e^{-2+t} + Ate^{-2+t} - e^{t-2}(A + Ae^2) & 2 < t \end{cases} \quad (3.56)$$

A için düzgün dağılım, B için normal dağılım, C için beta dağılımı kullanılırsa beklenen değer,

$$\begin{aligned}
& E(y(t)) \\
& = \begin{cases} t^2E(A) + tE(B) + E(C) & t \leq 0 \\ E(C) + E(A) + tE(B) + t^2E(A) - e^tE(A) & t \leq 1 \\ tE(B) + t^2E(A) + 2E(A) + E(C) + te^{t-1}E(A) - 2e^{t-1}E(A) - e^tE(A) & t \leq 2 \\ t^2E(A) + 3E(A) + E(C) + tE(B) - \frac{1}{2}t^2e^{-2+t}E(A) + te^{-2+t}E(A) - e^{t-2}E(A) - e^tE(A) & 2 < t \end{cases} \quad (3.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E(y(t)) \\
& = \begin{cases} t^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + t(\mu) + \left(\frac{\theta}{\theta+\xi}\right) & t \leq 0 \\ \left(\frac{\theta}{\theta+\xi}\right) + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + t(\mu) + t^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - e^t\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) & t \leq 1 \\ t(\mu) + t^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\theta}{\theta+\xi}\right) + te^{t-1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - 2e^{t-1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - e^t\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) & t \leq 2 \\ t^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 3 + \left(\frac{\theta}{\theta+\xi}\right) + t(\mu) - \frac{1}{2}t^2e^{-2+t}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + te^{-2+t}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - e^{t-2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - e^t\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) & 2 < t \end{cases} \quad (3.58)
\end{aligned}$$

(3.58) bulunur. Varyans değeri

$$\begin{aligned}
& \text{Var}(y(t)) \\
& = \begin{cases} t^4\text{Var}(A) + t^2\text{Var}(B) & t \leq 0 \\ t^2\text{Var}(B) + t^4\text{Var}(A) + e^{2t}\text{Var}(A) & t \leq 1 \\ t^2\text{Var}(B) + t^4\text{Var}(A) + t^2e^{2t-2}\text{Var}(A) + 4e^{2t-2}\text{Var}(A) + e^{2t}\text{Var}(A) & t \leq 2 \\ t^4\text{Var}(A) + t^2\text{Var}(B) + \frac{1}{4}t^4e^{2t-4}\text{Var}(A) + t^2e^{2t-4}\text{Var}(A) + e^{2t-4}\text{Var}(A) + e^{2t}\text{Var}(A) & 2 < t \end{cases} \quad (3.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Var(y(t)) \\
& = \begin{cases} t^4 \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) + t^2(\sigma^2) & t \leq 0 \\ t^2(\sigma^2) + t^4 \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) + e^{2t} \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) & t \leq 1 \\ t^2(\sigma^2) + t^4 \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) + t^2 e^{2t-2} \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) + 4e^{2t-2} \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) + e^{2t} \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) & t \leq 2 \\ t^4 \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) + t^2(\sigma^2) + \frac{1}{4} t^4 e^{2t-4} \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) + e^{2t-4} \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) + e^{2t} \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \right) & 2 < t \end{cases} \quad (3.60)
\end{aligned}$$

(3.60) bulunur. Düzgün dağılıma sahip, $A \sim U(\alpha, \beta) \rightarrow A \sim U(1, 2)$, normal dağılıma sahip, $B \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow B \sim N(0, 1)$, beta dağılımına sahip, $C \sim B(\theta, \xi) \rightarrow C \sim B(2, 3)$ özel değerleri için beklenen değer ve varyans

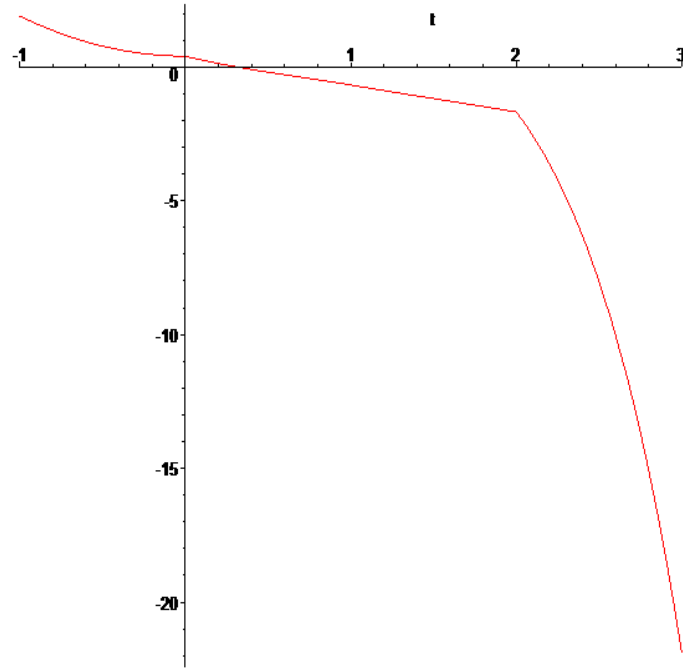
$$E(y(t)) = \begin{cases} \frac{3t^2}{2} + \frac{2}{5} & t \leq 0 \\ \frac{19}{10} + \frac{3}{2}(t^2 - e^t) & t \leq 1 \\ \frac{34}{10} + \frac{3}{2}(t^2 - e^t + te^{t-1} - 2e^{t-1}) & t \leq 2 \\ \frac{49}{10} + \frac{3}{2}(t^2 - \frac{1}{2}t^2 e^{t-2} + te^{t-2} - e^{t-2} - e^t) & 2 < t \end{cases} \quad (3.61)$$

$$Var(y(t)) = \begin{cases} \frac{t^4}{12} + t^2 & t \leq 0 \\ t^2 + \frac{t^4}{12} + \frac{e^{2t}}{12} & t \leq 1 \\ t^2 + \frac{t^4}{12} + \frac{t^2 e^{2t-2}}{12} + \frac{e^{2t-2}}{3} + \frac{e^{2t}}{12} & t \leq 2 \\ \frac{t^4}{12} + t^2 + \frac{t^4 e^{2t-4}}{48} + \frac{e^{2t-4}}{12} + \frac{e^{2t}}{12} & 2 < t \end{cases} \quad (3.62)$$

(3.61) ve (3.62) şeklinde bulunur. $-1 \leq t \leq 3$ için (3.61) beklenen değer ve (3.62) varyans değerinin grafiği, aşağıdaki komut yardımıyla çizdirilirse,

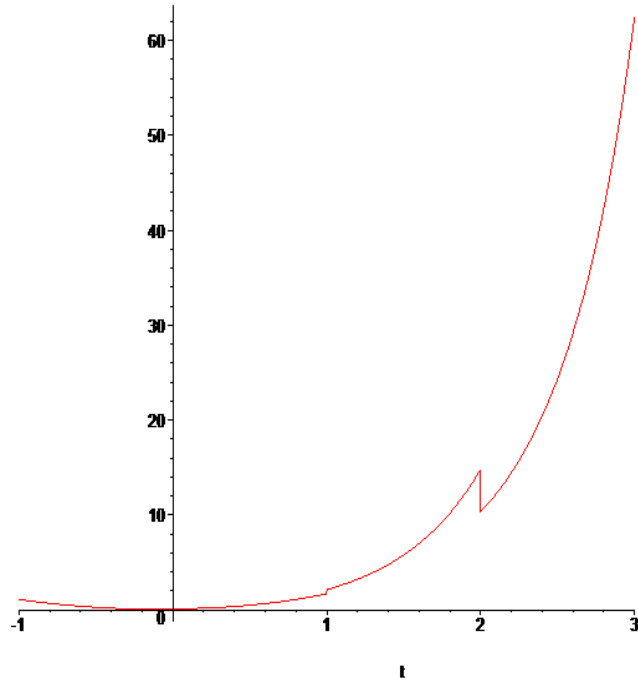
$$\begin{aligned}
& plot(y(t), t = -h..3 \cdot h, \text{discont} = \text{true}, \text{labels} = [t, y], \text{labelfont} \\
& = [\text{TIMES}, \text{BOL}, 12])
\end{aligned}$$

y(t) fonksiyonunun beklenen değer grafiği Şekil 3.2'deki gibi,



Şekil 3.2. $t \in [-1,3]$ için $y(t)$ fonksiyonunun beklenen değer grafiği

varyans grafiği Şekil 3.3’ teki gibi bulunur (Becker, 2009).



Şekil 3.3. $t \in [-1,3]$ için $y(t)$ fonksiyonunun varyans değer grafiği

3.4. VIM Yöntemi

1978 yılında M. Inokuti, H. Sekine ve T. Mura tarafından matematiksel fizikte lineer olmayan problemlerin çözümü için genel Lagrange çarpanı yöntemi önerilmiştir (Ünlü, 2014). Daha sonra Ji-Huan He, söz konusu yöntemi modifiye ederek varyasyonel iterasyon yöntemini vermiştir (Tatari ve Dehghan, 2007). Tam çözüme hızlı bir şekilde yakınsayan yaklaşımlarla, pek çok lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için bu yöntemin kullanıldığı çok sayıda bilimsel çalışmalar mevcuttur (Ünlü, 2014). Ayrıca varyasyonel iterasyon yöntemi ilk olarak 1998’de kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için önerilmiştir (He, 1998). Pek çok yazar, hem lineer hem de lineer olmayan kesirli türevli denklemleri çözmek için bu yöntemin etkili bir yol olduğunu gösteren çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalara örnek olarak Elbeleze vd. (2013), Molliq vd. (2011), Wu ve Baleanu (2013), Elsaid (2010), Jafari ve Tajadodi (2010), Hong ve Lu (2014), Neamah (2014), İbiş ve Bayram (2014) Molliq, Noorani (2012) Elbeleze vd. (2012), Kadem ve Kılıçman (2012) verilebilir (Elbeleze vd. 2013; Molliq vd. 2011; Wu ve Baleanu, 2013; Elsaid, 2010; Jafari ve Tajadodi, 2010; Hong ve Lu, 2014; Neamah, 2014; İbiş ve Bayram, 2014; Molliq, Noorani, 2012; Elbeleze, vd. 2012; Kadem ve Kılıçman, 2012). Varyasyonel iterasyon yönteminin söz konusu bu genel Lagrange çarpanı yöntemiyle olan ilişkisi aşağıda açıklanmıştır. L lineer, N lineer olmayan operatör olmak üzere,

$$Lu + Nu = f(x) \quad (3.63)$$

(3.63) genel lineer olmayan denklemi verilsin. $u_0(x)$ ’ in $Lu = 0$ denkleminin bir çözümü olduğu varsayılarak, u fonksiyonunun x_0 gibi bir özel noktadaki doğru (correct) değerini ifade etmek için,

$$u_{cor}(x_0) = u_0(x_0) + \int_0^{x_0} \lambda (Lu_0(x) + Nu_0(x) - f) dx \quad (3.64)$$

(3.64) şeklindeki ifade yazılabilir (Ünlü, 2014). Burada λ , lagrange çarpanıdır ve varyasyonel teori yardımıyla elde edilir. Sağ taraftaki ikinci terim düzeltme olarak adlandırılır. Örneğin, $x_0 = 1$ için,

$$u_{cor}(1) = u_0(1) + \int_0^1 \lambda(Lu_0(x) + Nu_0(x) - f)dx \quad (3.65)$$

(3.65) yazılır (He, 1999). Ji-Huan He, yukarıdaki yöntemi bir iterasyon yöntemi içine,

$$u_{n+1}(x_0) = u_n(x_0) + \int_0^{x_0} \lambda(Lu_n(x) + N\tilde{u}_n(x) - f)dx \quad (3.66)$$

(3.66) şeklinde modifiye etmiştir. Burada \tilde{u}_n , sınırlı (restricted) varyasyon olarak düşünülür ve $\delta\tilde{u}_n = 0$ olarak alınır. Bu denklem,

$$u_{n+1}(x_0) = u_n(x) + \int_0^{x_0} \lambda(Lu_n(\varepsilon) + N\tilde{u}_n(\varepsilon) - f(\varepsilon))d\varepsilon \quad (3.67)$$

(3.67) olarak yeniden yazılabilir (He, 1999). Varyasyonel iterasyon yönteminde problem,

$$Lu(x, t) + Nu(x, t) = f(x, t) \quad (3.68)$$

(3.68) şeklinde lineer olmayan bir diferansiyel denklem olarak düşünülür. Burada L lineer operatör, N lineer olmayan operatör, $f(x, t)$ bilinen sürekli fonksiyondur (Ünlü, 2014). Varyasyonel iterasyon yöntemine göre fonksiyonel

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_{t_0}^t \lambda\{(Lu_n(x, \varepsilon)) + N(\tilde{u}_n(x, \varepsilon)) - f(x, \varepsilon)\}d\varepsilon \quad (3.69)$$

şeklinde düşünülür. Bu denkleme düzeltme (correction) fonksiyoneli adı verilir. Yani VIM'in amacı böyle bir düzeltme fonksiyoneli oluşturmaktır. Bu formüldeki λ , varyasyonel teori yardımıyla elde edilen lagrange çarpanıdır (Ünlü, 2014). Alt indis n , n .mertebeden yaklaşımı tanımlar. Dolayısıyla u_n , n .yaklaşık çözümdür. $\delta\tilde{u}_n = 0$ olmak üzere \tilde{u}_n ise sınırlı (restricted) varyasyon olarak düşünülür (He vd. 2010). Düzeltme fonksiyonelinin her iki tarafının varyasyonu alınarak,

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \delta \int_{t_0}^t \lambda \{ (Lu_n(x, \varepsilon)) + N(\tilde{u}_n(x, \varepsilon)) - f(x, \varepsilon) \} d\varepsilon \quad (3.70)$$

(3.70) elde edilir. Daha sonra $\delta u_{n+1} = 0$ alınarak,

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \delta \int_{t_0}^t \lambda \{ (Lu_n(x, \varepsilon)) + N(\tilde{u}_n(x, \varepsilon)) - f(x, \varepsilon) \} d\varepsilon = 0$$

yazılır ve böylece ekstremum şartlar (stationary conditions) elde edilir (Ünlü, 2014). Ekstreum şartlar kullanılarak λ 'nın optimal değeri bulunur (Tatari ve Dehghan, 2007). Ekstreum şartların elde edilmesi için $\delta u_{n+1} = 0$ ifadesinde kısmi integrasyon uygulanır. Lagrange çarpanını kolay bir şekilde belirlemek için, lineer olmayan terimler sınırlı (restricted) varyasyon olarak düşünülür. Lagrange çarpanının daha doğru tesbiti, yaklaşımların tam çözüme daha hızlı yakınsamasına neden olur. Bulunan Lagrange çarpanının değeri,

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_{t_0}^t \lambda \{ L(u_n(x, \varepsilon)) + N(u_n(x, \varepsilon)) - f(x, \varepsilon) \} d\varepsilon \quad (3.71)$$

(3.71) iterasyon formülünde yerine yazılır ($n \geq 0$). Uygun bir başlangıç yaklaşımının seçiminden sonra ardışık (succesive) yaklaşımlar elde edilir. Aranan çözüm $u(x, t)$ bulunan bu yaklaşımlar yardımıyla,

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) \quad (3.72)$$

(3.72) olarak elde edilir. m tane denklem olması durumunda ise yukarıdaki lineer olmayan denklem,

$$L_i(u_i) + N_i(u_1, u_2, \dots, u_m) = f_i(x, t) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.73)$$

(3.73) şeklinde yazılır. Bu denklem L_i, i . denklemin u_i 'ye göre lineer kısmı, N_i ise i . denklemin lineer olmayan kısmıdır. Bu durumda fonksiyonel,

$$u_{i(n+1)} = u_{in} + \int_{t_0}^t \lambda_i \{L_i(u_{in}(x, \varepsilon)) + N(\tilde{u}_{1n}(x, \varepsilon), \dots, \tilde{u}_{mn}(x, \varepsilon)) - f(x, \varepsilon)\} d\varepsilon \quad (3.74)$$

(3.74) olarak yazılır. $i = 1, 2, \dots, m$ için λ_i 'nin değerleri, bu fonksiyonelin her iki tarafının varyasyonunun alınması ve daha sonra $\delta u_{i(n+1)} = 0$ yazılıp ekstremum şartların bulunmasıyla elde edilir (Tatari ve Deghan, 2007). Yukarıda alınan lineer olmayan diferansiyel denklem,

$$L[u(t)] + N[u(t)] = f(t) \quad (3.75)$$

(3.75) olarak alınırsa, bu durumda düzeltme fonksiyoneli,

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_{t_0}^t \lambda \{Lu_n(\varepsilon) + N\tilde{u}_n(\varepsilon) - f(\varepsilon)\} d\varepsilon \quad (3.76)$$

(3.76) şeklinde yazılır (He vd. 2010).

Örnek 3.4.1.

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{7}{8} y(x)^2 - y\left(\frac{x}{2}\right)^2 - Ax^3 + 6Ax \quad (3.77)$$

başlangıç koşulu $y(0) = 0, y'(0) = 0$ olan $A \sim N(\mu, \sigma^2)$, A normal dağılıma sahip rastgele bağımsız değişken olmak üzere rastgele oransal gecikmeli diferansiyel denkleminin, varyasyonel iterasyon yöntemi ile yaklaşık analitik çözümünü ve olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

Çözüm : Bu problemin tam çözümü

$$y(x) = Ax^3 \quad (3.78)$$

(3.78) dir. Düzeltme fonksiyoneli,

$$y_{n+1} = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\tau) \left[\frac{d^2 y_n(\tau)}{d\tau^2} - \frac{7}{8} y_n^2(\tau) + y_n^2\left(\frac{\tau}{2}\right) + A\tau^3 - 6A\tau \right] d\tau \quad (3.79)$$

(3.79) denklemindeki ifadedir.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\tau) \left[\frac{d^2 y_n(\tau)}{d\tau^2} - \frac{7}{8} y_n^2(\tau) + y_n^2\left(\frac{\tau}{2}\right) + A\tau^3 - 6A\tau \right] d\tau, \quad n \geq 0 \quad (3.80)$$

(3.80) ifadesindeki düzeltme fonksiyoneli stasyoner olduğu için

$$\delta \widetilde{y}_n(\tau) = 0, \delta \widetilde{y}_n\left(\frac{\tau}{2}\right) = 0 \quad (3.81)$$

(3.81) olur.

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(\tau) \left[\frac{d^2 y_n(\tau)}{d\tau^2} - \frac{7}{8} \widetilde{y}_n(\tau) + \widetilde{y}_n\left(\frac{\tau}{2}\right) + A\tau^3 - 6A\tau \right] d\tau \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} &= \delta y_n(x) + [\lambda(\tau) \delta \dot{y}_n]_{\tau=x} - \int_0^x \lambda'(\tau) \delta \dot{y}_n d\tau \\ &= \delta y_n(x) + \lambda(\tau) \delta \dot{y}_n|_{\tau=x} - [\lambda'(\tau) \delta y_n]_{\tau=x} - \int_0^x \lambda''(\tau) \delta y_n d\tau \\ &= \delta y_n(x) + \lambda(\tau) \delta \dot{y}_n - \lambda'(\tau) \delta y_n|_{\tau=x} - \int_0^x \lambda''(\tau) \delta y_n d\tau = 0 \end{aligned}$$

$$\delta y_n(1 - \lambda'(\tau))|_{\tau=x} = 0$$

$$\lambda(\tau)|_{\tau=x} = 0$$

$$\lambda''(\tau) = 0$$

$$\lambda'(\tau) = a$$

$$\lambda(\tau) = a\tau + b$$

$$\lambda(\tau)|_{\tau=x} = ax + b = 0$$

$$b = -ax$$

$$1 - \lambda'(\tau)|_{\tau=x} = 0$$

$$1 - a = 0$$

$$a = 1$$

$$\lambda(\tau) = a(\tau - x)$$

$$= \tau - x \quad (3.83)$$

(3.82) ifadesinden elde edilen (3.83) integral çarpanı (3.80) ifadesinde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir,

$$y_{n+1}(x) = y_n(x)$$

$$+ \int_0^x (\tau - x) \left[\frac{d^2 y_n(\tau)}{d\tau^2} - \frac{7}{8} y_n^2(\tau) + y_n^2\left(\frac{\tau}{2}\right) + A\tau^3 - 6A\tau \right] d\tau, \quad n \geq 0 \quad (3.84)$$

(3.84) ifadesinde başlangıç çözümleri yerine yazılarak, aşağıdaki çözümler bulunabilir.

$$y_2(x) = -\frac{1}{20} Ax^5 + Ax^3 \quad (3.85)$$

$$y_3(x) = -\frac{1}{20} Ax^5 + Ax^3 + \frac{179}{10813440} A^2 x^{12} - \frac{223}{230400} A^2 x^{10} + \frac{55}{3584} A^2 x^8 \quad (3.86)$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılımına sahip Gauss rastgele bağımsız değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}, \quad (3.87)$$

(3.87) dir. Birinci, ikinci moment ve varyansı

$$E[X] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2, Var[X] = \sigma^2 \quad (3.88)$$

(3.88) dir (Feller, 1968). Bu sonuçlar kullanılarak,

$$\begin{aligned} E(y_3(x)) &= E\left(-\frac{1}{20}Ax^5 + Ax^3 + \frac{179}{10813440}A^2x^{12} - \frac{223}{230400}A^2x^{10} + \frac{55}{3584}A^2x^8\right) \\ &= \left(-\frac{1}{20}x^5 + x^3\right)E(A) \\ &\quad + \left(\frac{179}{10813440}x^{12} - \frac{223}{230400}x^{10} + \frac{55}{3584}x^8\right)E(A^2) \\ &= \left(-\frac{1}{20}x^5 + x^3\right)\mu \\ &\quad + \left(\frac{179}{10813440}x^{12} - \frac{223}{230400}x^{10} + \frac{55}{3584}x^8\right)(\mu^2 + \sigma^2) \end{aligned} \quad (3.89)$$

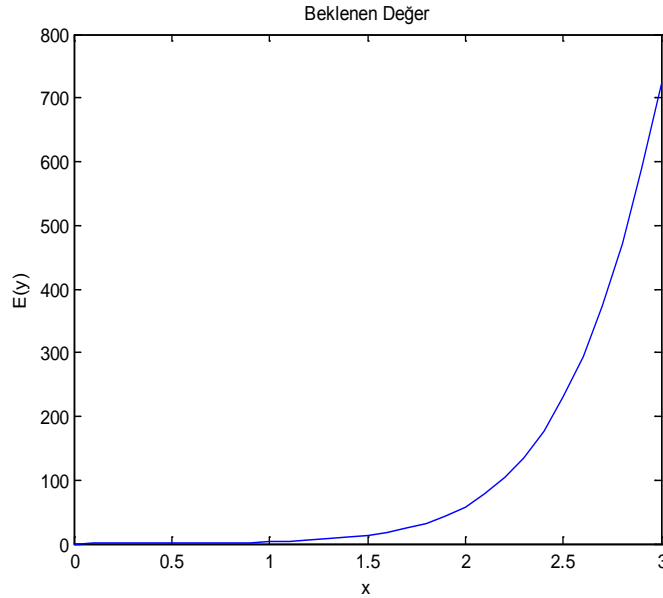
$$\begin{aligned} Var(y_3(x)) &= E(y_3(x)^2) - E(y_3(x))^2 \\ &= Var\left(-\frac{1}{20}Ax^5 + Ax^3 + \frac{179}{10813440}A^2x^{12} - \frac{223}{230400}A^2x^{10} + \frac{55}{3584}A^2x^8\right) \\ &= \left(-\frac{1}{20}x^5 + x^3\right)^2 Var(A) \\ &\quad + \left(\frac{179}{10813440}x^{12} - \frac{223}{230400}x^{10} + \frac{55}{3584}x^8\right)^2 Var(A^2) \\ &= \left(-\frac{1}{20}x^5 + x^3\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{179}{10813440}x^{12} - \frac{223}{230400}x^{10} + \frac{55}{3584}x^8\right)^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.90)$$

(3.89) beklenen değer, (3.90) varyans elde edilir. Özel olarak $A \sim N(3,4)$ seçilirse, (3.89) ifadesindeki beklenen değer ve (3.90) ifadesindeki varyans aşağıdaki gibi bulunur,

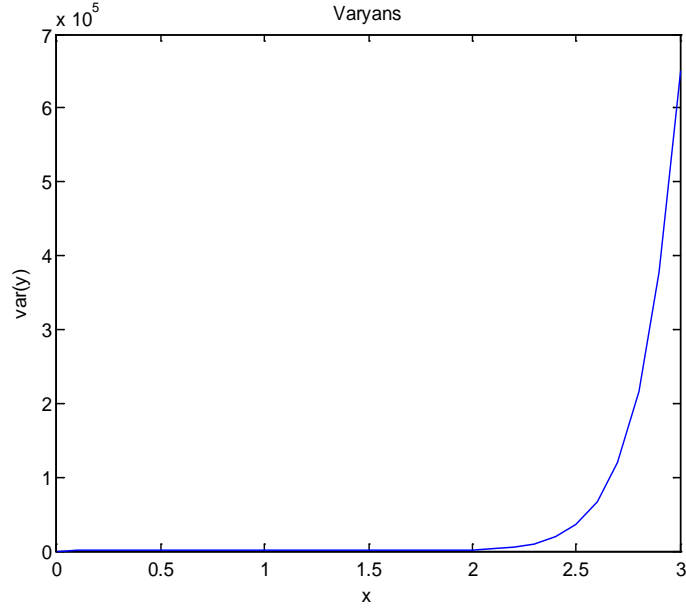
$$E(y_3(x)) = \left(-\frac{3}{20}x^5 + 3x^3\right) + \left(\frac{2327}{10813440}x^{12} - \frac{2899}{230400}x^{10} + \frac{715}{3584}x^8\right) \quad (3.91)$$

$$Var(y_3(x)) = 4\left(-\frac{1}{20}x^5 + x^3\right)^2 + 4\left(\frac{716}{10813440}x^{12} - \frac{892}{230400}x^{10} + \frac{220}{3584}x^8\right)^2 \quad (3.92)$$

(3.91) beklenen ve (3.92) varyans değerleri matlab yardımıyla $[0,3]$ aralığında $A \sim N(3,4)$ özel değerleri için çizdirilirse aşağıdaki şekil 3.4 ve şekil 3.5 elde edilir.



şekil 3.4. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değeri için $y_3(x)$ 'in beklenen değeri



Şekil 3.5. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değeri için $y_3(x)$ 'in varyans değeri

Örnek 3.4.2.

$$y'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} y\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} y(x), 0 \leq x < 1 \quad (3.93)$$

başlangıç koşulu $y(0) = A$ olan $A \sim G(p, q)$, A geometrik dağılıma sahip rastgele bağımsız değişken olmak üzere rastgele oransal gecikmeli diferensiyel denkleminin, varyasyonel iterasyon yöntemi ile yaklaşık analitik çözümünü ve olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

Çözüm:

Bu denklemin tam çözümü $y(x) = Ae^{-x}$ dir. VIM yöntemiyle (3.93) denklemini çözmek için düzeltme fonksiyoneli oluşturalım.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\tau) \left[\frac{d}{d\tau} y_n + \frac{1}{2} e^{-\frac{\tau}{2}} \widetilde{y_n}\left(\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{2} \widetilde{y_n}(\tau) \right] d\tau, \quad n \geq 0 \quad (3.94)$$

$$\delta y_{n+1}(x) + \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(\tau) \left[\frac{d}{d\tau} y_n - \frac{1}{2} e^{\frac{\tau}{2}} \widetilde{y}_n \left(\frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{2} \widetilde{y}_n(\tau) \right] d\tau$$

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + [\lambda(\tau) \delta y_n]_{\tau=x} - \int_0^x \lambda'(\tau) [\delta y_n] d\tau = 0 \quad (3.95)$$

$\widetilde{\delta y}_n$ bir sınırlandırılmış varyasyon olarak düşünülürse $\widetilde{\delta y}_n = 0$

$$\lambda'(\tau) = 0, \quad 1 + \lambda(\tau)|_{\tau=x} = 0, \quad \lambda(\tau) = -1(\text{lagrange çarpanı})$$

(3.95) ifadesinde yerine yazılırsa, aşağıdaki varyasyonel iterasyon

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_0^x \left[\frac{d}{d\tau} y_n + \frac{1}{2} e^{-\frac{\tau}{2}} \dot{y}_n \left(\frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{2} y_n(\tau) \right] d\tau \quad (3.96)$$

$$y_0(x) = y(0) = A$$

elde edilir. (3.96) ifadesinde başlangıç çözümleri yerine yazılarak, aşağıdaki çözümler bulunabilir.

$$y_1(x) = \frac{1}{2} A \left(2e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} - x \right) \quad (3.97)$$

$$y_2 = \frac{1}{24} A \left(12e^{-\frac{x}{2}} - 4 + 16e^{-\frac{3x}{4}} - 6xe^{-\frac{x}{2}} + 3x^2 \right) \quad (3.98)$$

$$y_3(x) = -\frac{1}{672} A \left(-56e^{-\frac{x}{2}} + 88 - 448e^{-\frac{3x}{4}} \right.$$

$$\left. + 84xe^{-\frac{x}{2}} - 256e^{-\frac{7x}{8}} + 56xe^{-\frac{3x}{4}} - 21x^2e^{-\frac{x}{2}} - 56x + 14x^3 \right) \quad (3.99)$$

$X \sim G(p, q)$ geometrik dağılıma sahip rastgele bağımsız değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{pe^t}{1 - qe^t}. \quad (3.100)$$

Birinci moment ve varyansı,

$$E[X] = \frac{1}{p}, Var[X] = \frac{q}{p^2}, \quad (3.101)$$

dir (Feller, 1968). (3.100) ve (3.101) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} E(y_3(x)) &= -\frac{1}{672} \left(-56e^{-\frac{x}{2}} + 88 - 448e^{-\frac{3x}{4}} + 84xe^{-\frac{x}{2}} - 256e^{-\frac{7x}{8}} + 56xe^{-\frac{3x}{4}} \right. \\ &\quad \left. - 21x^2e^{-\frac{x}{2}} - 56x + 14x^3 \right) E(A) \\ &= -\frac{1}{672} (-56e^{-\frac{x}{2}} + 88 - 448e^{-\frac{3x}{4}} \\ &\quad + 84xe^{-\frac{x}{2}} - 256e^{-\frac{7x}{8}} + 56xe^{-\frac{3x}{4}} - 21x^2e^{-\frac{x}{2}} - 56x + 14x^3) \frac{1}{p} \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} Var(y_3(x)) &= E(y_3(x)^2) - E(y_3(x))^2 \\ &= \frac{1}{451584} \left(-56e^{-\frac{x}{2}} + 88 - 448e^{-\frac{3x}{4}} + 84xe^{-\frac{x}{2}} - 256e^{-\frac{7x}{8}} + 56xe^{-\frac{3x}{4}} \right. \\ &\quad \left. - 21x^2e^{-\frac{x}{2}} - 56x + 14x^3 \right)^2 Var(A) \\ &= \frac{1}{451584} (-56e^{-\frac{x}{2}} + 88 - 448e^{-\frac{3x}{4}} \\ &\quad + 84xe^{-\frac{x}{2}} - 256e^{-\frac{7x}{8}} + 56xe^{-\frac{3x}{4}} - 21x^2e^{-\frac{x}{2}} - 56x + 14x^3)^2 \frac{q}{p^2} \end{aligned} \quad (3.103)$$

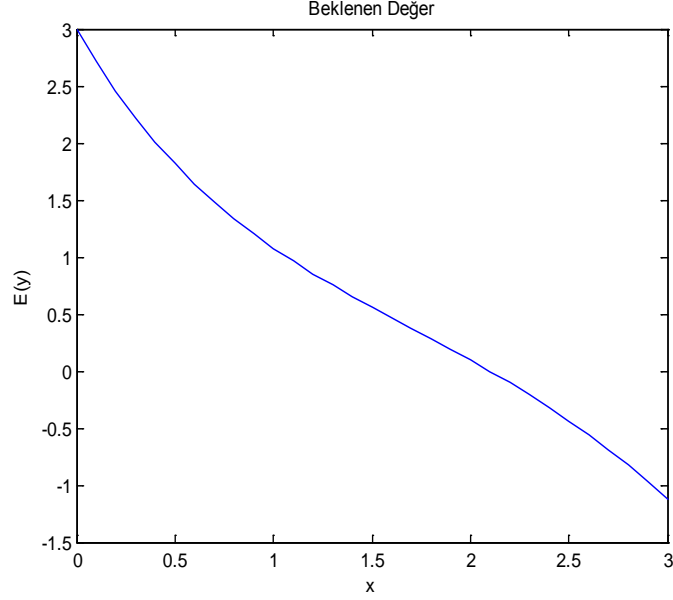
(3.102) başlangıç değeri ve (3.103) varyans değeri hesaplanır. Özel olarak $X \sim G(p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3})$ seçilirse, beklenen değeri ve varyans aşağıdaki gibi bulunur,

$$\begin{aligned} E(y_3(x)) &= -\frac{1}{224} (-56e^{-\frac{x}{2}} + 88 - 448e^{-\frac{3x}{4}} \\ &\quad + 84xe^{-\frac{x}{2}} - 256e^{-\frac{7x}{8}} + 56xe^{-\frac{3x}{4}} - 21x^2e^{-\frac{x}{2}} - 56x + 14x^3) \end{aligned} \quad (3.104)$$

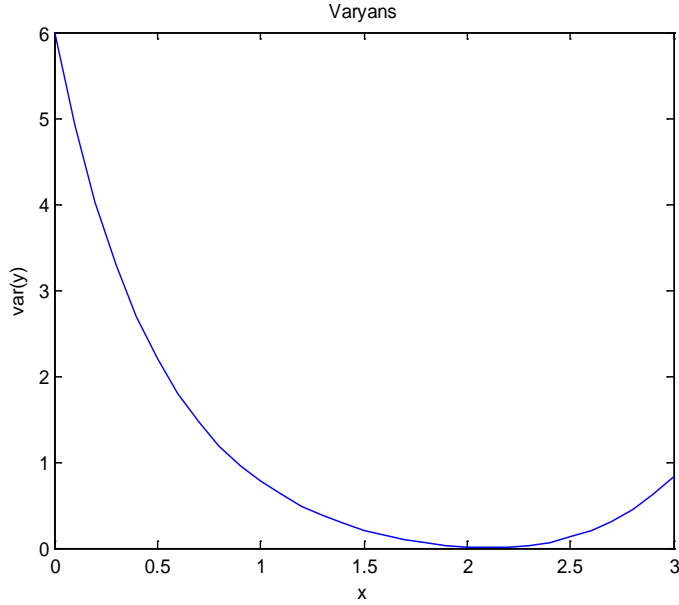
$$Var(y_3(x)) = \frac{1}{75264} (-56e^{-\frac{x}{2}} + 88 - 448e^{-\frac{3x}{4}} + 84xe^{-\frac{x}{2}} - 256e^{-\frac{7x}{8}} + 56xe^{-\frac{3x}{4}} - 21x^2e^{-\frac{x}{2}} - 56x + 14x^3)^2 \frac{q}{p^2}$$

$$+84xe^{-\frac{x}{2}} - 256e^{-\frac{7x}{8}} + 56xe^{-\frac{3x}{4}} - 21x^2e^{-\frac{x}{2}} - 56x + 14x^3)^2 \quad (3.105)$$

(3.104) beklenen ve (3.105) varyans değerleri matlab yardımıyla $[0,3]$ aralığında $X \sim G(p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3})$ özel değerleri için çizdirilirse aşağıdaki Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 elde edilir.



Şekil 3.6. $A \sim G(p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3})$ özel değeri için $y_3(x)$ 'in beklenen değeri



Şekil 3.7. $A \sim G(p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3})$ özel değeri için $y_3(x)$ 'in varyans değeri

Örnek 3.4.3.

$$y'''(x) = -y(x) - y(x - 0.3) + Ae^{-x+0.3}, 0 \leq x \leq 1 \quad (3.106)$$

başlangıç koşulları $y(0) = A$, $y'(0) = -A$, $y''(0) = A$, $x \leq 0$ olan $A \sim B(\theta, \xi)$, A beta dağılımına sahip rastgele bağımsız değişken olmak üzere rastgele sabit gecikmeli diferensiyel denklemini, varyasyonel iterasyon yöntemi ile yaklaşık analitik çözümünü ve olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

Çözüm:

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\tau) \left[\frac{d^3 y_n}{d\tau^3} + \widetilde{y}_n(\tau) + \widetilde{y}_n(\tau - 0.3) - Ae^{-\tau+0.3} \right] d\tau \quad (3.107)$$

(3.107) ifadesindeki düzeltme fonksiyoneli stasyoner yapmak için, $\delta y(0) = 0$ alınırsa,

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(\tau) [y_{n\tau\tau\tau} - \widetilde{y}_n(\tau) - \widetilde{y}_n(\tau - 0.3) + Ae^{-\tau+0.3}] d\tau \quad (3.108)$$

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \lambda(\tau) \delta \ddot{y}_n|_{\tau=x} - \delta \int_0^x \dot{\lambda}(\tau) y_{n\tau\tau} d\tau - [\dot{\lambda}(\tau) \delta \dot{y}_n|_{\tau=x} - \delta \int_0^x \dot{\lambda}(p) y_{n\tau} d\tau$$

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \lambda(\tau) \delta \ddot{y}_n|_{\tau=x} - \dot{\lambda}(\tau) \delta \dot{y}_n|_{\tau=x} + \delta \int_0^x \dot{\lambda}(p) y_{\tau} d\tau + \ddot{\lambda}(\tau) \delta y_n|_{\tau=x}$$

$$- \delta \int_0^x \ddot{\lambda}(\tau) \delta y_n d\tau$$

$$\delta y_n [1 + \ddot{\lambda}(\tau)|_{\tau=x}] = 0$$

$$\lambda(\tau)|_{\tau=x} = 0, \quad -\lambda'(\tau)|_{\tau=x} = 0, \quad \ddot{\lambda}(\tau) = 0, \quad \ddot{\lambda}(\tau) = a, \quad \dot{\lambda}(\tau) = a\tau + b$$

$$\lambda(\tau) = \frac{a\tau^2}{2} + b\tau + c$$

$$\lambda(\tau)|_{\tau=1} = 0, \quad \frac{ax^2}{2} + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{2} - ax^2 + c = 0$$

$$-ax^2 + c = 0$$

$$-\frac{ax^2}{2} + c = 0$$

$$c = \frac{ax^2}{2}$$

$$c = -\frac{x^2}{2}$$

$$\lambda'(\tau)|_{\tau=x} = 0, \quad ax + b = 0, \quad b = -ax$$

$$1 + \ddot{\lambda}(\tau)|_{\tau=x} = 0$$

$$1 + a = 0$$

$$a = -1$$

$$\lambda(\tau) = \frac{a\tau^2}{2} + ax\tau + c$$

$$\lambda(\tau) = \frac{-\tau^2}{2} + x\tau - \frac{x^2}{2}$$

$$\lambda(\tau) = -\frac{1}{2}[\tau^2 - 2x\tau + x^2]$$

$$\lambda(\tau) = -\frac{1}{2}(\tau - x)^2 \quad (3.109)$$

(3.109) elde edilir. Lagrange çarpanı (3.107)'de yerine yazılırsa

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x -\frac{1}{2}(\tau - x)^2[y_{n\tau\tau\tau} + y_n(\tau) + y_n(\tau - 0.3) - Ae^{-\tau+0.3}]d\tau, \quad n \geq 0$$

elde edilir.

$$y(0) = A, \quad y'(0) = -A, \quad y''(0) = A,$$

$$y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (3.110)$$

(3.110) ifadesinde a_0 bulmak için $x = 0$ yazılırsa

$$y(0) = A = a_0 \quad (3.111)$$

(3.111) ifadesi bulunur. a_0 değeri (3.110) yerine yazılırsa

$$y(x) = a_2x^2 + a_1x + A \quad (3.112)$$

(3.112) ifadesi elde edilir. a_1 değerini bulmak için (3.112) ifadesinin türevi alınır

$$y'(x) = 2a_2x + a_1 \quad (3.113)$$

(3.113) ifadesi elde edilir. (3.113) ifadesinde $x = 0$ yazılırsa

$$y'(0) = a_1 = -A \quad (3.114)$$

(3.114) ifadesi elde edilir. Bulunan a_0 ve a_1 değerleri (3.110) ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(x) = a_2x^2 - Ax + A \quad (3.115)$$

(3.115) ifadesi elde edilir. (3.115) ifadesinin türevi alınır

$$y'(x) = 2a_2x - A \quad (3.116)$$

(3.116) ifadesi elde edilir. İkinci kez türev alınarak a_2 yalnız bırakılarak

$$y''(x) = 2a_2 \quad (3.117)$$

değeri elde edilir. (3.117) ifadesinde $x = 0$ yazılırsa

$$y''(0) = 2a_2 = A \quad (3.118)$$

ifadesi elde edilir.

$$a_2 = \frac{A}{2} \quad (3.119)$$

bulunur. $= 0$ için

$$y_0 = A - Ax + \frac{Ax^2}{2} \quad (3.120)$$

(3.120) bulunur. $n = 1$ için

$$y_1 = 2.349858808A - 2.349858808Ax + 1.174929404Ax^2 - Ae^{0.3-x} \\ - 0.3908333333Ax^3 + 0.9583333333Ax^4 - 0.1666666667Ax^5 \quad (3.121)$$

(3.121) bulunur. Beta dağılımının moment çıkaran fonksiyonu:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\theta + r}{\theta + \xi + r} \right) t^k / k! \quad (3.122)$$

Beta dağılımına sahip rastgele bağımsız değişkeninin birinci, ikinci moment ve varyansı :

$$E[X] = \frac{\theta}{\theta + \xi}, E[X^2] = \frac{\theta(\theta + 1)}{(\theta + \xi + 1)(\theta + \xi)} \quad (3.123)$$

$$Var[X] = \frac{\theta\xi}{(\theta + \xi)^2(\theta + \xi + 1)} \quad (3.124)$$

dir (Feller, 1968). (3.123) ve (3.124) ifadeleri kullanılarak,

$$E(y_1(x)) = (2.349858808 - 2.349858808x + 1.174929404x^2 - e^{0.3-x} \\ - 0.3908333333x^3 + 0.9583333333x^4 - 0.1666666667x^5) E(A) \\ = (2.349858808 - 2.349858808x + 1.174929404x^2 - e^{0.3-x} - 0.3908333333x^3$$

$$+0.9583333333x^4 - 0.1666666667x^5) \frac{\theta}{\theta + \xi} \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} Var(y_1(x)) &= E(y_1(x)^2) - E(y_1(x))^2 \\ &= (2.349858808 - 2.349858808x + 1.174929404x^2 - e^{0.3-x} \\ &\quad - 0.3908333333x^3 + 0.9583333333x^4 - 0.1666666667x^5)^2 Var(A) \\ &= (2.349858808 - 2.349858808x + 1.174929404x^2 - e^{0.3-x} - 0.3908333333x^3 \end{aligned}$$

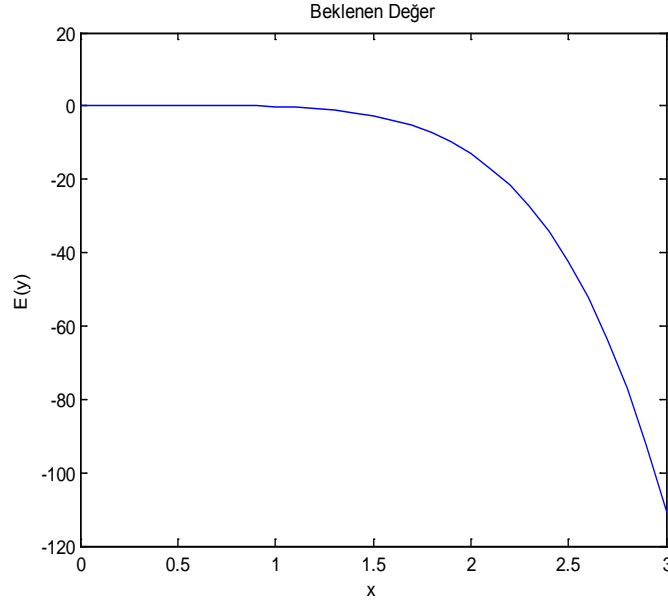
$$+0.9583333333x^4 - 0.1666666667x^5)^2 \frac{\theta\xi}{(\theta + \xi)^2(\theta + \xi + 1)} \quad (3.126)$$

(3.125) beklenen değer (3.126) varyans değeri hesaplanır. Özel olarak $X \sim B(\theta = 1, \xi = 2)$ seçilirse, beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi bulunur,

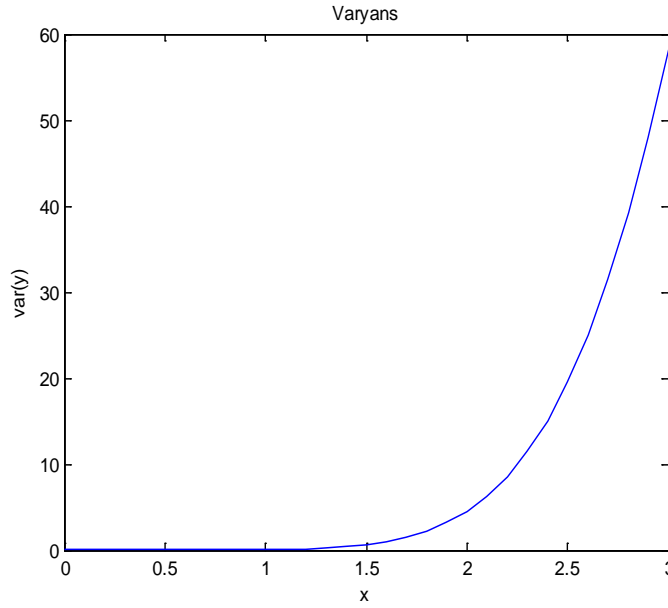
$$\begin{aligned} E(y_1(x)) &= \left(0.7832862693 - 0.7832862693x + 0.3916431347x^2 - \frac{1}{3}e^{0.3-x} \right. \\ &\quad \left. - 0.1302777778x^3 + 0.3194444444x^4 - 0.5555555557x^5 \right) \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} Var(y_1(x)) &= \frac{1}{18} (2.349858808 - 2.349858808x + 1.174929404x^2 - e^{0.3-x} \\ &\quad - 0.3908333333x^3 + 0.9583333333x^4 - 0.1666666667x^5)^2. \end{aligned} \quad (3.128)$$

(3.127) beklenen ve (3.128) varyans değerleri matlab yardımıyla $[0,3]$ aralığında $A \sim B(\theta = 1, \xi = 2)$ özel değerleri için çizdirilirse aşağıdaki şekil 3.8 ve şekil 3.9 elde edilir.



Şekil 3.8. $A \sim B(\theta = 1, \xi = 2)$ özel değeri için $y_1(x)$ 'in beklenen değeri



Şekil 3.9. $A \sim B(\theta = 1, \xi = 2)$ özel değeri için $y_1(x)$ 'in varyans değeri

3.5. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi(DDY)

$y(t)$ analitik bir fonksiyon ve $t_0 \in I$ olsun. $y(t)$ fonksiyonu t_0 'da bir kuvvet serisi ile temsil edilebilir. $y(t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü formu

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=t_0} \quad (3.129)$$

şeklindedir. Burada $Y(k)$, $y(t)$ orijinal fonksiyonunun dönüştürülmüş fonksiyonudur. Diferansiyel ters dönüşümü $Y(k)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Liu vd. 2015):

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)(t - t_0)^k \quad (3.130)$$

(3.129) ve (3.130) ifadelerinden, diferansiyel dönüşüm kavramının Taylor serisi açılımından elde edildiğini görülür. Eğer, t_0 sıfır alınır ve $y(t)$ fonksiyonu sonlu bir seri ile ifade edilirse aşağıdaki ifade bulunur (Liu vd. 2015).

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)t^k \quad (3.131)$$

DDY' yle gerçekleştirilen temel matematik işlemleri Tablo 3.1'de listelenmiştir.

Tablo 3.1. DDY' yle gerçekleştirilen temel matematik işlemleri

Orijinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$y(x) = u(x) \pm v(x)$	$Y(x) = U(x) \pm V(k)$
$y(x) = cu(x), c \in R$	$Y(k) = cU(k)$
$y(x) = u(x)v(x)$	$Y(k) = \sum_{l=0}^k V(l)U(k-l)$
$y(x) = \frac{d^n u(x)}{dx^n}, n \in N$	$Y(k) = \frac{(k+n)!}{k!} U(k+n)$
$y(x) = x^n$	$Y(k) = \delta(k-n)$
$y(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in R$	$Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$
$y(x) = f(x+a)$	$Y(k) = \sum_{h_1=k}^N \binom{h_1}{k} a^{h_1-k} F(h_1) \text{ for } N \rightarrow \infty$

Tablo 3.1. (devamı)

$y(x)$ $= f_1(x)f_2(x) \cdots f_{n-1}(x)f_n(x)$	$Y(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} F_1(k_1) \\ \times F_2(k_2 - k_1) \cdots F_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) F_2(k_n - k_{n-1})$
$y(x) = f(x/a), a \geq 1$	$Y(k) = \frac{1}{a^k} F(k)$
$y(x) = f_1(x/a_1)f_2(x/a_2)$	$Y(k) = \sum_{l=0}^k \frac{1}{a_2^l} F_2(l) \frac{1}{a_1^{k-l}} F_1(k-l)$
$y(x) = f_1(x/a)f_2(x/a)$	$Y(k) = \sum_{l=0}^k \frac{1}{a^l} F_2(l) \frac{1}{a^{k-l}} F_1(k-l)$
$y(x) = f_1(x/a_1)f_2(x/a_2)$ $\cdots f_{n-1}(x/a_{n-1})f_n(x/a_n),$ $a_i \geq 1 (i = 1(1)n)$	$Y(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \frac{1}{a_1^{k_1}} F_1(k_1) \frac{1}{a_2^{k_2-k_1}} F_2(k_2 - k_1) \cdots \frac{1}{a_{n-1}^{k_{n-1}-k_{n-2}}} \times F_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) \frac{1}{a_n^{k-k_{n-1}}} F_n(k - k_{n-1})$
$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ $F_1(k) = F_2(k) = \cdots F_n(k) = F(k)$	$Y(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \frac{1}{a^k} F(k_1) \\ \times F(k_2 - k_1) \cdots F(k_{n-1} - k_{n-2}) F(k - k_{n-1})$

3.5.1. Birinci Mertebeden Gecikmeli Adi Diferansiyel Denklemler için

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

(3.3) tipi gecikmeli diferansiyel denklemleri çözmek için birçok yöntem vardır. Örneğin, doğrusal çok adımlı (LM) yöntemi, Runge-Kutta (RK) yöntemi, dalga formu gevşeme (WR) yöntemi, ve benzeri yöntemler vardır (Liu vd. 2015). Ancak (3.3)' deki GDD' leri çözmek için, aşağıdaki adımlar takip edilmelidir:

$$y_i'(t) = f(t, y_i(t), y_{i-1}(t - \tau)), i = 1, 2, 3 \cdots, t \in [(i-1)\tau, i\tau] \quad (3.132)$$

$y_0(t) = g(t)$ ile kısaca, bu fikir aralığı $[(i-1)\tau, i\tau]$ 'den $[i\tau, (i+1)\tau]$ ' e kaydırmak ve çözümü $[0, i\tau]$ 'den $[0, (i+1)\tau]$ ' ye çıkarmaktır. Geçerli aralıktaki bileşenleri kullanarak bu işlem, prensip olarak, istenilen ölçüde devam edebilir. Bu işleme, adım yöntemi denir (Driver, 1977). Adımlar yöntemini kullanarak aşağıdaki ADD' nin çözümünü bulmak için DDY' ni uyguluyoruz:

$$y_1'(t) = f(t, y_1(t), g(t - \tau)) \quad (3.133)$$

$t \in [0, \tau]$ ile yaklaşık çözümün,

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} t^k, t \in [0, \tau] \quad (3.134)$$

eğer $\tau > T$ için $y_1(t)$, (3.133) denkleminin bir çözümüdür. Aksi halde, çözümü $[\tau, 2\tau]$ aralığında bulmaya devam etmeliyiz. Şu anda, aşağıdaki ADD' leri çözmeliyiz:

$$y_2'(t) = f(t, y_2(t), y_1(t - \tau)), t \in [\tau, 2\tau] \quad (3.135)$$

DDY' ini yukarıdaki diferansiyel denkleme tekrar uygulayarak, aşağıdaki çözümü elde edilir:

$$y_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} (t - \tau)^k, t \in [\tau, 2\tau] \quad (3.136)$$

Eğer $2\tau < T$ olursa çözüme devam edilir. Genel olarak, DDY' i (3.131) ifadesini ADD' lere uygulayarak, analitik çözüm elde edilebilir.

$$y_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (t - n\tau)^k, t \in [n\tau, (n+1)\tau] \quad (3.137)$$

Gerekli adımlardan sonra, aşağıdaki çözüm elde edilir:

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in [0, \tau] \\ y_2(t), & t \in [\tau, 2\tau] \\ \vdots \\ y_{n+1}(t), & t \in [n\tau, T]. \end{cases} \quad (3.138)$$

Not 3.5.1.1. $y_1(t) = g(t)$, ise, $y = g(t)$ ' nin doğrudan (3.133) denkleminin analitik çözümü olduğu sonucuna varabiliriz (Liu vd. 2015).

Not 3.5.1.2. Eğer bazı i tamsayıları için $y_{i+1}(t) = y_i(t)$ ise,

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in [0, \tau], \\ \vdots \\ y_{i-1}(t), & t \in [(i-2)\tau, (i-1)\tau] \\ y_i(t), & t \in [(i-1)\tau, T] \end{cases} \quad (3.139)$$

(3.133) denkleminin analitik çözümü olduğu sonucuna varabiliriz (Liu vd. 2015).

Not 3.5.1.3. Eğer her aralıktaki yaklaşık çözümün doğruluğunu arttırmak istiyorsak Odibat vd. (2010) tarafından verilen çok adımlı yöntemle yukarıdaki yöntemi birleştirebiliriz (Odibat vd. 2010).

Not 3.5.1.4. Aslında, adımlar yöntemine dayalı DDY kullanılarak aşağıdaki nötr gecikmeli diferansiyel denklemler çözülebilir (Liu vd. 2015)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau), y'(t-\tau)), & 0 \leq t \leq T \\ y(t) = g(t), & t \leq 0. \end{cases} \quad (3.140)$$

Örnek 3.5.1.1.

$$y'(t) = Ay(t-1), \quad t \geq 0 \quad (3.141)$$

$$y(t) = B, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (3.142)$$

(3.142) başlangıç şartına sahip (3.141) denklemi $A, B \sim U(\alpha, \beta)$, A, B düzgün dağılıma sahip rastgele bağımsız değişkenler olmak üzere (3.141) denkleme DDY' ni uygulayarak yaklaşık analitik çözümünü ve rastgele çözümün karakteristiklerini belirleyiniz.

Çözüm :

İlk olarak $\tau = 1$ de $[0,1]$ aralığındaki çözümü elde etmek için DDY uygulayalım. Bu aralıkta (3.142) ifadesi (3.141) de yerine yazılırsa

$$y'(t) = AB, \quad Y(0) = B \quad (3.143)$$

elde edilir. (3.143) denkleme DDY uygulanırsa

$$(k + 1)Y(k + 1) = AB\delta(k) \quad (3.144)$$

elde edilir. Başlangıç koşulu $Y(0) = B$, kullanılarak iteratif olarak aşağıdaki eşitlikler bulunur

$$k = 0 \text{ için } 1 Y(1) = AB\delta(0) = AB$$

$$k = 1 \text{ için } 2 Y(2) = AB\delta(1) = 0$$

$$k = 2 \text{ için } 3Y(3) = AB\delta(2) = 0$$

\vdots

$$Y(n) = 0 \quad (3.145)$$

Bunların sonucu olarak

$$Y(k) = \begin{cases} B, & k = 0 \\ AB, & k = 1 \\ 0, & k = 2 \end{cases} \quad (3.146)$$

$$Y(0) = B, \quad Y(1) = AB$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.131) bağıntısında yerine yazılırsa,

$$y(t) = \sum_{k=0}^n Y(k)t^k = Y(0) + Y(1)t + Y(2)t^2 + \dots$$

$$= B + ABt$$

$$= B(1 + At) \quad (3.147)$$

(3.147) çözümü elde edilir. $[0,1]$ aralığında tanımlanan (3.141) denkleminin analitik çözümü $y(t) = B(1 + At)$ dir. İkinci olarak aşağıdaki GDD' ini ele alalım.

$$y'(t) = Ay(t - 1), \quad 1 \leq t \leq 2 \quad (3.148)$$

$$y(t) = B(1 + At), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.149)$$

(3.149) ifadesi (3.148) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$y'(t) = A.B(1 + A(t - 1)) = AB(1 + A(t - 1))$$

$$= AB + BA^2(t - 1), \quad 1 \leq t \leq 2 \quad (3.150)$$

(3.150) ifadesi elde edilir. (3.150) ifadesine DDY uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$(k + 1)Y(k + 1) = AB\delta(k) + BA^2\delta(k - 1), \quad Y(0) = B(1 + A) \quad (3.151)$$

(3.151) ifadesinde

$$k = 0 \text{ için} \quad 1. Y(1) = AB\delta(0) + BA^2\delta(-1)$$

$$Y(1) = AB$$

$$k = 1 \text{ için} \quad 2. Y(2) = AB\delta(1) + BA^2\delta(0)$$

$$Y(2) = \frac{BA^2}{2}$$

$k \geq 2$ için

$$Y(k) = 0 \quad (3.152)$$

bulunur.

$$Y(k) = \begin{cases} B(1+A), & k=0 \\ AB, & k=1 \\ \frac{BA^2}{2}, & k=2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases} \quad (3.153)$$

(3.153) için analitik çözüm (3.130) ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)(t-1)^k = Y(0) + Y(1)(t-1) + Y(2)(t-1)^2$$

$$y(t) = B(1+A) + AB(t-1) + \frac{BA^2}{2}(t-1)^2, \quad 1 \leq t \leq 2 \quad (3.154)$$

(3.154) çözümü elde edilir. Şimdi $[2, 3]$ aralığındaki çözümü elde etmek istersek, aşağıdaki GDD' leri ele alalım.

$$y'(t) = Ay(t-1), \quad 2 \leq t \leq 3 \quad (3.155)$$

$$y(t) = B(1+A) + AB(t-1) + \frac{BA^2}{2}(t-1)^2, \quad 1 \leq t \leq 2 \quad (3.156)$$

(3.156) ifadesinde (3.155) ifadesi yerine yazılırsa

$$y'(t) = A \left[B(1+A) + AB(t-2) + \frac{BA^2}{2}(t-2)^2 \right], \quad 2 \leq t \leq 3 \quad (3.157)$$

(3.157) ifadesi bulunur. (3.157) ifadesine DDY uygulanırsa,

$$(k+1)Y(k+1) = A(1+A)B\delta(k) + A^2B\delta(k-1) + \frac{BA^3}{2}\delta(k-2) \quad (3.158)$$

(3.158) ifadesi elde edilir. (3.158) ifadesinde

$k=0$ için

$$1. Y(1) = A(1+A)B\delta(0) + A^2B\delta(-1) + \frac{BA^3}{2}\delta(-2)$$

$$Y(1) = A(1+A)B$$

$k = 1$ için

$$2.Y(2) = A(1 + A)B\delta(1) + A^2B\delta(0) + \frac{BA^3}{2}\delta(-1)$$

$$Y(2) = \frac{A^2B}{2}$$

$k = 2$ için

$$3.Y(3) = A(1 + A)B\delta(2) + A^2B\delta(1) + \frac{BA^3}{2}\delta(0)$$

$$Y(3) = \frac{A^3B}{6} \quad (3.159)$$

elde edilir. $[2, 3]$ aralığında tanımlı analitik çözüm (3.130) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)(t-2)^k \\ &= B \left[(1+A) + A + \frac{A^2}{2} \right] + A(1+A)B(t-2) + \frac{A^2B}{2}(t-2)^2 \\ &\quad + \frac{BA^3}{6}(t-2)^3, \quad 2 \leq t \leq 3 \end{aligned} \quad (3.160)$$

(3.160) ifadesi elde edilir. Ortalama kare anlamında kalkülüs ve DDY kullanılması ile herhangi bir rastgele fonksiyonun beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi elde edilir (Fakharzadeh vd. 2015; Golmankhaneh, Porghoveh, 2013).

$$E[u(x)] = \sum_{k=0}^n E[U(k)]x^k \quad (3.161)$$

$$Var[u(x)] = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n cov(U(i), U(j))x^{i+j} \quad (3.162)$$

$X \sim U(\alpha, \beta)$ parametrelili düzgün dağılıma sahip X rastgele bağımsız değişkeninin momentleri, düzgün dağılımın moment çıkarıcı fonksiyonundan elde edilir (Feller, 1968).

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}. \quad (3.163)$$

(3.163) ifadesinden $X \sim U(\alpha, \beta)$ rastgele bağımsız değişkenin birinci, ikinci ve n.inci momentleri ve varyansı elde edilir:

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad E[X^2] = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}$$

$$E[X^n] = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{(n+1)(\beta - \alpha)}, \quad Var[X] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \quad (3.164)$$

Bu momentlerin kullanılması ile X ve Y bağımsız rastgele bağımsız değişkenleri için $E[XY] = E[X]E[Y]$, beklenen değer ve varyans formülleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} E(y(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(Y(k))t^k \\ &= E\left(B\left[\left(1+A\right)+A+\frac{A^2}{2}\right]\right)+E(A(1+A)B)(t-2)+E\left(\frac{A^2B}{2}\right)(t-2)^2 \\ &\quad +E\left(\frac{BA^3}{6}\right)(t-2)^3 \\ &= E(B)+2E(B)E(A)+\frac{1}{2}E(B)E(A^2) \\ &\quad +\left(E(A)E(B)+E(A^2)E(B)\right)(t-2)+\frac{1}{2}E(A^2)E(B)(-2)^2 \\ &\quad +\frac{1}{6}E(A^3)E(B)(t-2)^3 \end{aligned} \quad (3.165)$$

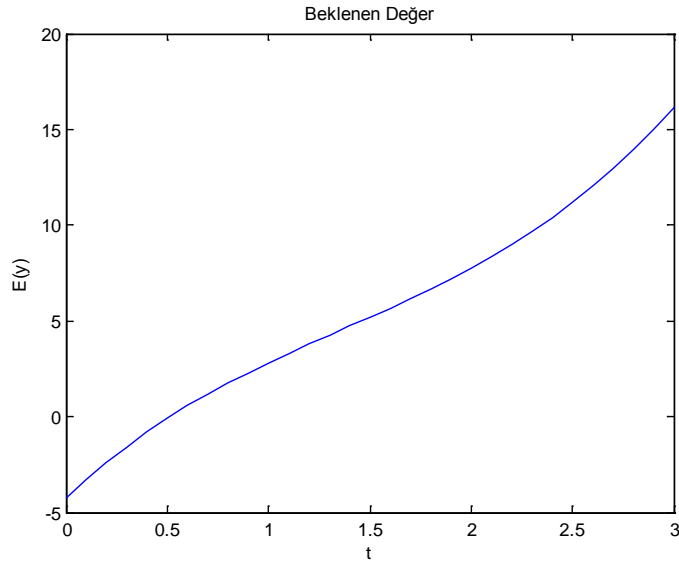
$$\begin{aligned} Var(y(t)) &= E(y(t)^2) - E(y(t))^2 \\ &= Var(B)+2Var(B)Var(A)+\frac{1}{2}Var(A^2) \\ &\quad +\left(Var(A)Var(B)+Var(A^2)Var(B)\right)(t-2) \\ &\quad +\frac{1}{2}Var(A^2)Var(B)(t-2)^2+\frac{1}{6}Var(A^3)Var(B)(t-2)^3 \end{aligned} \quad (3.166)$$

(3.165) beklenen değeri ve (3.166) varyans $A, B \sim U(\alpha = 2, \beta = 1)$ parametre değerleri için hesaplanırsa,

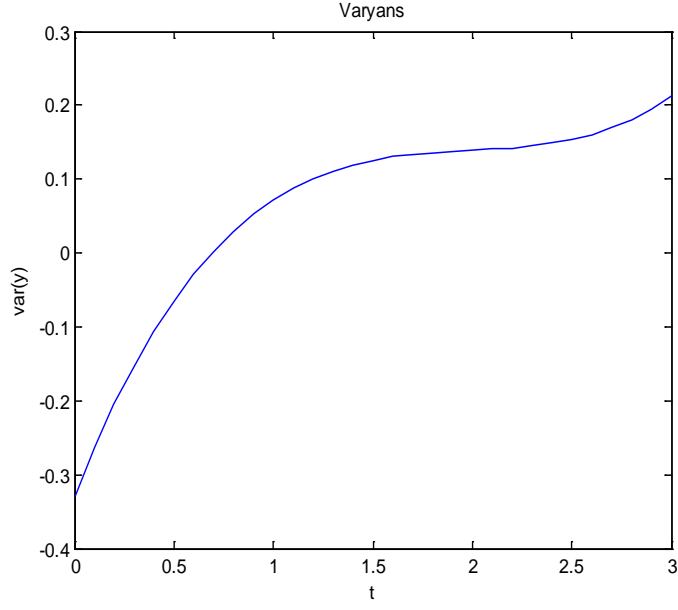
$$E(y(t)) = -\frac{15}{4} + \frac{23}{4}t + \frac{7}{4}(t-2)^2 + \frac{15}{16}(t-2)^3$$

$$Var(y(t)) = \frac{1}{9} + \frac{1}{72}t + \frac{1}{288}(t-2)^2 + \frac{457}{8064}(t-2)^3$$

elde edilir. Beklenen değeri ve varyans verilen parametre değerleri için Matlab' de çizdirilirse aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 3.10. $A \sim U(\alpha = 2, \beta = 1)$ özel değeri için $y(t)$ 'nin beklenen değeri



Şekil 3.11 $A \sim U(\alpha = 2, \beta = 1)$ özel değeri için $y(t)$ 'nin varyans değeri

Örnek 3.6.1.2.

$$y'(x) = 2ey'(x-1) - y(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.167)$$

$$y(x) = Ae^x, x \leq 0 \quad (3.168)$$

(3.168) başlangıç şartına sahip (3.167) denklemi $A \sim N(\mu, \sigma^2)$, A normal dağılıma sahip rastgele bağımsız değişkenler olmak üzere, (3.167) denklemine DTM yöntemi uygulayarak yaklaşık analitik çözümünü ve rastgele çözümün karakteristiklerini belirleyiniz.

Çözüm :

$$y(x) = Ae^x$$

$$y'(x) = Ae^x$$

$$y'(x-1) = Ae^x e^{-1}$$

adım yöntemine göre hesaplanırsa

$$y'(x) = Ae^x e^{-1} - y(x) \quad (3.169)$$

(3.169) ifadesi elde edilir. (3.169) denkleminde DTM uygulanırsa,

$$(k + 1)Y(k + 1) = 2e^{-1} \cdot \frac{1^k}{k!} - Y(k), y(0) = A \quad (3.170)$$

(3.170) ifadesi elde edilir. (3.170) ifadesi

$$Y(k + 1) = \frac{1}{(k + 1)} \left[\frac{2e^{-1}1^k}{k!} - Y(k) \right] \quad (3.171)$$

(3.171) şeklinde düzenlenir. (3.171) ifadesinde

$k = 0$ için

$$Y(1) = \frac{1}{1} \left[\frac{2e^{-1}1^0}{0!} - Y(0) \right]$$

$$= 1[2e^{-1} - A] = 2e^{-1} - A \quad (3.172)$$

$k = 1$ için

$$Y(2) = \frac{1}{2} \left[\frac{2e^{-1}1^1}{1!} - Y(1) \right] = \frac{1}{2} [2e^{-1} - 2e^{-1} + A]$$

$$= \frac{A}{2} = \frac{A}{2!} \quad (3.173)$$

$k = 2$ için

$$Y(3) = \frac{1}{3} \left[\frac{2e^{-1}1^2}{2!} - Y(2) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[e^{-1} - \frac{A}{2} \right] = \frac{e^{-1}}{3} - \frac{A}{3!} \quad (3.174)$$

$k = 3$ için

$$\begin{aligned}
Y(4) &= \frac{1}{4} \left[\frac{2e^{-1}1^3}{3!} - Y(3) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{e^{-1}}{3} - \frac{e^{-1}}{3} + \frac{A}{3!} \right] = \frac{A}{24} = \frac{A}{4!}
\end{aligned} \tag{3.175}$$

$k = 4$ için

$$\begin{aligned}
Y(5) &= \frac{1}{5} \left[\frac{2e^{-1}1^4}{4!} - Y(4) \right] \\
&= \frac{1}{5} \left[\frac{e^{-1}}{12} - \frac{A}{4!} \right] = \frac{e^{-1}}{60} - \frac{A}{5!}
\end{aligned} \tag{3.176}$$

$k = 0,1,2,3,4$ için (3.172), (3.173), (3.174), (3.175), (3.176) ifadeleri elde edilir. Analitik çözüm (3.131) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = A + (2e^{-1} - A)x + \frac{A}{2!}x^2 + \left(\frac{e^{-1}}{3} - \frac{A}{3!} \right)x^3 \\
&\quad + \frac{A}{4!}x^4 + \left(\frac{e^{-1}}{60} - \frac{A}{5!} \right)x^5 + \dots \\
&= A - Ax + \frac{A}{2!}x^2 - \frac{Ax^3}{3!} + \frac{Ax^4}{4!} - \frac{Ax^5}{5!} + \dots \\
&\quad + 2e^{-1}x + \frac{e^{-1}}{3}x^3 + \frac{e^{-1}}{60}x^5 + \dots = A \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \\
&\quad + 2e^{-1} \left[\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right] \\
y(x) &= Ae^{-x} + 2e^{-1}[e^x - e^{-x}]
\end{aligned}$$

$$y(x) = Ae^{-x} + \frac{2}{e} \sinh(x) \tag{3.177}$$

(3.177) ifadesi elde edilir. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ parametrelili normal dağılımlı X rastgele bağımsız değişkenin momentleri, genel normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan elde edilir (Feller, 1968).

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}. \quad (3.178)$$

Bu yüzden, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele bağımsız değişkenin birinci, ikinci momenti ve varyansı:

$$E[X] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2, Var[X] = \sigma^2. \quad (3.179)$$

(3.179) bulunur. Bu momentlerin kullanılması ile X ve Y bağımsız rastgele bağımsız değişkenleri için $E[XY] = E[X]E[Y]$, beklenen değer ve varyans formülleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir

$$E(y(x)) = E\left[Ae^{-x} + \frac{2}{e}\sinh(x)\right] = e^{-x}E(A) + \frac{2}{e}\sinh(x) \quad (3.180)$$

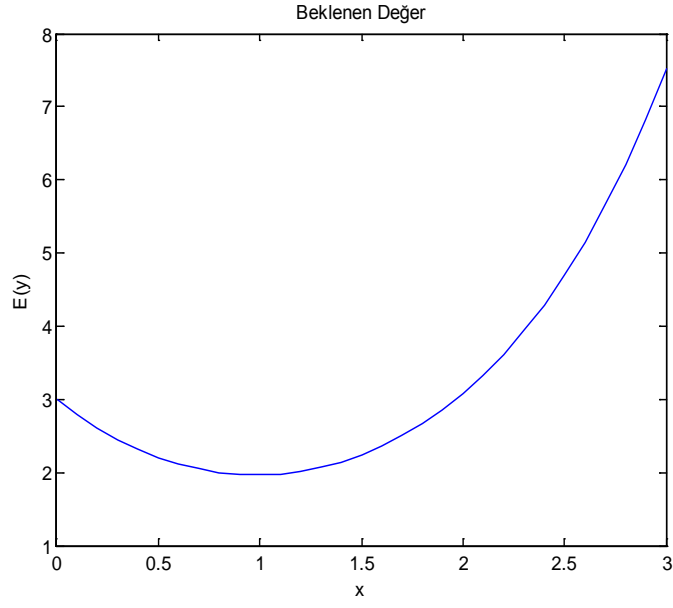
$$Var(y(x)) = E(y(x)^2) - E(y(x))^2 = Var\left[Ae^{-x} + \frac{2}{e}\sinh(x)\right] = e^{2x}Var[A] \quad (3.181)$$

(3.180) beklenen değer ve (3.181) varyans, $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$ parametre değerleri için hesaplanırsa

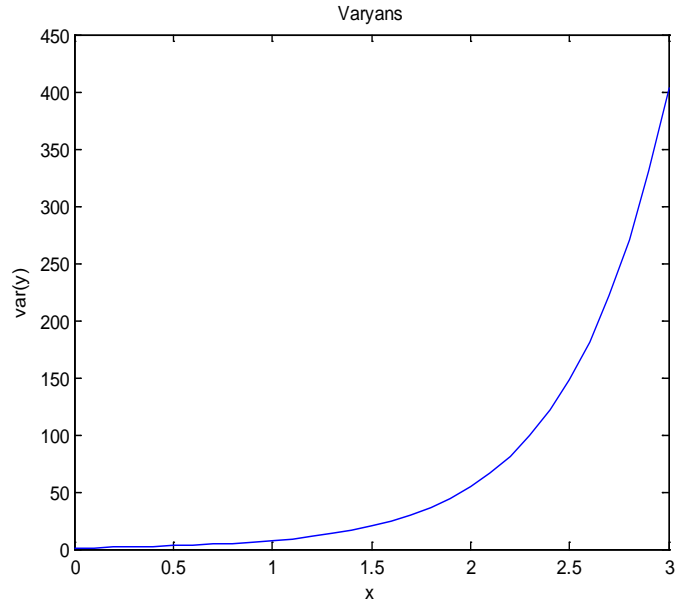
$$E(y(x)) = 3e^{-x} + \frac{2}{e}\sinh(x)$$

$$Var(y(x)) = e^{2x}$$

elde edilir. Şekil 3.12 beklenen değer ve Şekil 3.13 varyans grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.12. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$, özel değeri için $y(x)$ 'nin beklenen değeri



Şekil 3.13. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$, özel değeri için $y(x)$ 'nin varyans değeri

Örnek 3.5.1.3. (Evans ve Raslan, 2005)

$$u'(t) = -\frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}u\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1, u(0) = A \quad (3.182)$$

başlangıç koşulu $u(0) = A$, $A \sim B(\theta, \xi)$, A beta dağılımına sahip rastgele bağımsız değişkenler olmak üzere (3.182) denkleminde DDY' ni uygulayarak yaklaşık analitik çözümünü, ve rastgele çözümün karakteristiklerini belirleyiniz.

Çözüm :

(3.182) ifadesine DDY uygulanırsa :

$$(k+1)u(k+1) = -\frac{1}{4}u(k) - \frac{1}{4} \sum_{k_1=0}^k \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{k_1}}{k_1!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-k_1} u(k-k_1) \quad (3.183)$$

(3.183) ifadesi elde edilir. (3.183) ifadesinde

$$k=0 \text{ için } 1. u(1) = -\frac{1}{4}u(0) - \frac{1}{4}u(0) = -\frac{A}{4} - \frac{A}{4} = -\frac{A}{2}$$

$$u(1) = -\frac{A}{2} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} k=1 \text{ için } 2. u(2) &= -\frac{1}{4} \sum_{k_1=0}^1 \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{k_1}}{k_1!} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-k_1} u(1-k_1) \\ &= 2. u(2) - \frac{1}{2} \left[\frac{A}{8} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} u(1) - \frac{1}{4} u(0) \right] \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{A}{8} - \frac{1}{4} \left[-\frac{A}{4} - \frac{A}{4} \right] \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{A}{8} + \frac{A}{8} \right] = \frac{A}{8} \end{aligned}$$

$$u(2) = \frac{A}{8} \quad (3.185)$$

$$\begin{aligned} k=2 \text{ için } 3. u(3) &= \frac{1}{4} [u(2)] - \frac{1}{4} \sum_{k_1=0}^2 \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{k_1}}{k_1!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k_1} u(2-k_1) \\ u(3) &= \frac{1}{3} \left[-\frac{A}{32} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} u(2) - \frac{1}{8} u(1) + \frac{1}{32} u(0) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left[-\frac{A}{32} - \frac{1}{4} \left(\frac{A}{32} + \frac{A}{16} + \frac{A}{32} \right) \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[-\frac{A}{32} - \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{A}{8} \right] \right] = -\frac{A}{48}
\end{aligned}$$

$$u(3) = -\frac{A}{48} \quad (3.186)$$

$$\begin{aligned}
k=3 \text{ için } 4. u(4) &= \frac{1}{4} [u(3)] - \frac{1}{4} \sum_{k_1=0}^3 \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{k_1}}{k_1!} \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k_1} u(3-k_1) \\
u(4) &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{4} \cdot -\frac{A}{48} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8} u(3) - \frac{1}{16} u(2) + \frac{1}{64} u(1) - \frac{1}{192} u(0) \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{A}{192} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{8} \cdot \frac{A}{48} - \frac{1}{16} \cdot \frac{A}{8} + \frac{1}{64} \cdot \left(-\frac{A}{2} \right) - \frac{A}{192} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{A}{192} - \frac{1}{4} \left(\frac{-A - 3A - 3A -}{384} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{A}{192} - \frac{1}{4} \cdot \frac{(-8A)}{8 \cdot 48} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{A}{192} + \frac{A}{192} \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{A}{96} = \frac{A}{384}
\end{aligned}$$

$$u(4) = \frac{A}{384} \quad (3.187)$$

$k = 0, 1, 2, 3$ için (3.184), (3.185), (3.186), (3.187) ifadeleri bulunur. Analitik çözüm (3.131) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k) t^k = u(0) + u(1)t + u(2)t^2 + u(3)t^3 + u(4)t^4 + \dots \\
&= A - \frac{A}{2}t + \frac{A}{8}t^2 - \frac{A}{48}t^3 + \frac{A}{384}t^4 + \dots \\
&= A \left[1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} - \frac{t^3}{48} + \frac{t^4}{384} - \dots \right] \\
&= A \left[1 - \frac{\left(\frac{t}{2}\right)}{1!} + \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^4}{4!} - \dots \right]
\end{aligned}$$

$$u(t) = Ae^{-\frac{t}{2}} \quad (3.188)$$

(3.188) elde edilir. Beta dağılımının moment çıkaran fonksiyonu:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\theta + r}{\theta + \xi + r} \right) t^k / k! \quad (3.189)$$

(3.189) ifadesinden beta dağılımına sahip rastgele bağımsız değişkeninin birinci, ikinci moment ve varyansı:

$$E[X] = \frac{\theta}{\theta + \xi}, \quad E[X^2] = \frac{\theta(\theta + 1)}{(\theta + \xi + 1)(\theta + \xi)}, \quad (3.190)$$

$$Var[X] = \frac{\theta\xi}{(\theta + \xi)^2(\theta + \xi + 1)}. \quad (3.191)$$

dir (Feller, 1968). Bu sonuçlar kullanılarak,

$$E(u(t)) = E \left[Ae^{-\frac{t}{2}} \right] = E[A]e^{-\frac{t}{2}} \quad (3.192)$$

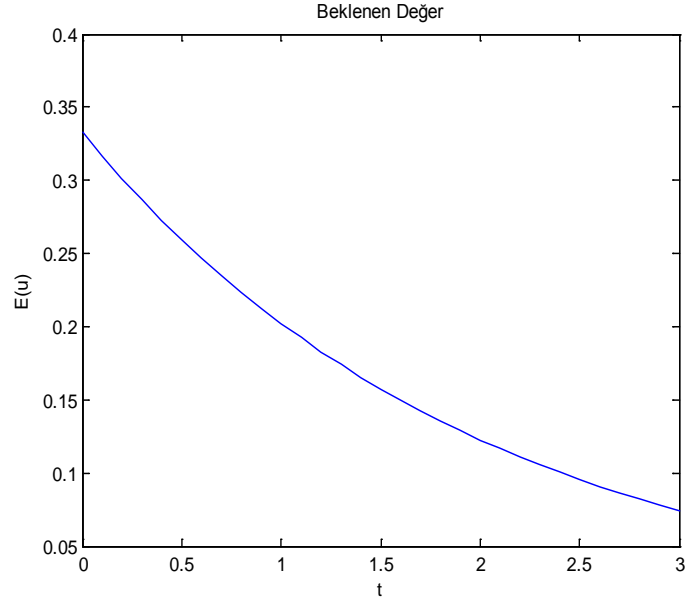
$$Var(u(t)) = E(u(t)^2) - E(u(t))^2$$

$$= Var \left[Ae^{-\frac{t}{2}} \right] = e^{-t} Var[A] \quad (3.193)$$

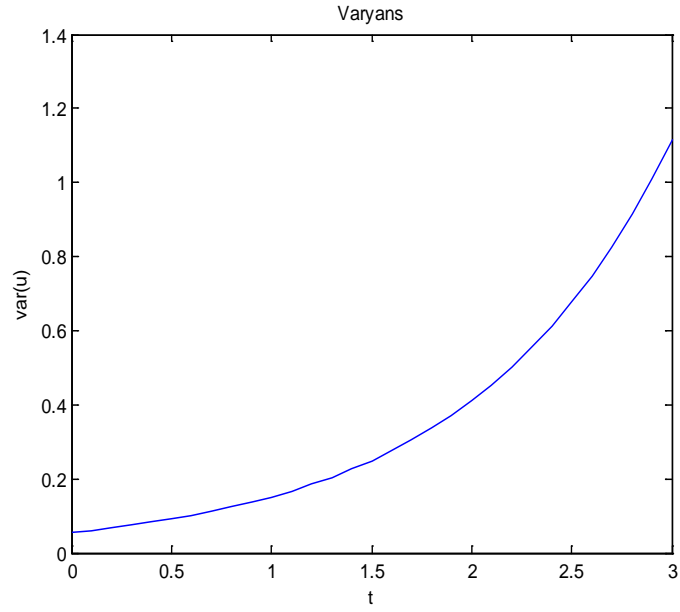
(3.192) beklenen değer ve (3.193) varyans formülleri hesaplanır. Beklenen değer ve varyans $A \sim Beta(\theta = 1, \xi = 2)$ parametre değerleri için

$$E(u(t)) = \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{2}}, \quad Var(u(t)) = \frac{1}{18} e^{-t} \quad (3.194)$$

(3.194) elde edilir. Beklenen değer ve varyans verilen parametre değerleri için Matlab' de çizdirilirse aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 3.14. $A \sim B(\theta = 1, \xi = 2)$ özel değeri için $u(t)$ 'nin beklenen değeri



Şekil 3.15. $A \sim B(\theta = 1, \xi = 2)$ özel değeri için $u(t)$ 'nin varyans değeri

Örnek 3.5.1.4. (Sezer ve Daşcıoğlu, 2007)

$$u'(t) = u(t) + \frac{q}{2}u(qt) - \frac{qB}{2}e^{qt}, 0 < q < 1 \quad (3.195)$$

başlangıç koşulu $u(0) = B$, $B \sim \text{Triangular}(a, b, c)$, B üçgensel dağılıma sahip rastgele bağımsız değişkenler olmak üzere (3.195) denkleminde DDY' ni uygulayarak yaklaşık analitik çözümünü ve rastgele çözümün karakteristiklerini belirleyiniz.

Çözüm :

(3.195) denkleminde DDY uygulanırsa :

$$(k + 1)u(k + 1) = u(k) + \frac{q}{2}q^k u(k) - \frac{qB}{2} \cdot \frac{q^k}{k!} \quad (3.196)$$

(3.196) ifadesi elde edilir. (3.196) ifadesinde

$$k = 0 \text{ için} \quad 1. u(1) = u(0) + \frac{q}{2}u(0) - \frac{qB}{2}$$

$$u(1) = B \quad (3.197)$$

$$k = 1 \text{ için} \quad 2. u(2) = u(1) + \frac{q}{2}qu(1) - \frac{qB}{2} \cdot \frac{q}{1!}$$

$$2. u(2) = B + \frac{q^2B}{2} - \frac{q^2B}{2}$$

$$u(2) = \frac{B}{2} \quad (3.198)$$

$$k = 2 \text{ için} \quad 3u(3) = u(2) + \frac{q}{2}q^2u(2) - \frac{qB}{2} \frac{q^2}{2!}$$

$$3u(3) = \frac{B}{2} + \frac{Bq^3}{4} - \frac{Bq^3}{4} \quad \Rightarrow \quad u(3) = \frac{B}{6} \quad (3.199)$$

⋮

$$k = n \text{ için} \quad u(n) = \frac{B}{n!} \quad (3.200)$$

$k = 0, 1, 2, n$ değerleri için (3.200), (3.199), (3.198), (3.197) elde edilir. Analitik çözüm (3.131) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=0}^n u(t)t^k = u(0) + u(1)t + u(2)t^2 + u(3)t^3 + \dots \\ u(t) &= B + Bt + \frac{B}{2}t^2 + \frac{B}{2}t^3 + \dots + \frac{B}{n!}t^n + \dots \\ &= B \left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$u(t) = Be^t \quad (3.201)$$

(3.201) elde edilir. Üçgensel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu:

$$M_X(t) = 2 \frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2}. \quad (3.202)$$

$X \sim \text{Triangular}(a, b, c)$ parametrelili üçgensel dağılıma sahip X rastgele bağımsız değişkenin momentleri, Üçgensel dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan elde edilir (Feller, 1968).

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = 2 \frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2}. \quad (3.203)$$

(3.203) ifadesinden $X \sim \text{Triangular}(a, b, c)$ rastgele bağımsız değişkenin birinci momenti ve varyansı

$$E(X) = \frac{(a+b+c)}{3}, \quad Var(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}. \quad (3.204)$$

(3.204) bulunur. Bu momentlerin kullanılması ile X ve Y bağımsız rastgele bağımsız değişkenleri için $E[XY] = E[X]E[Y]$, beklenen değer ve varyans formülleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir

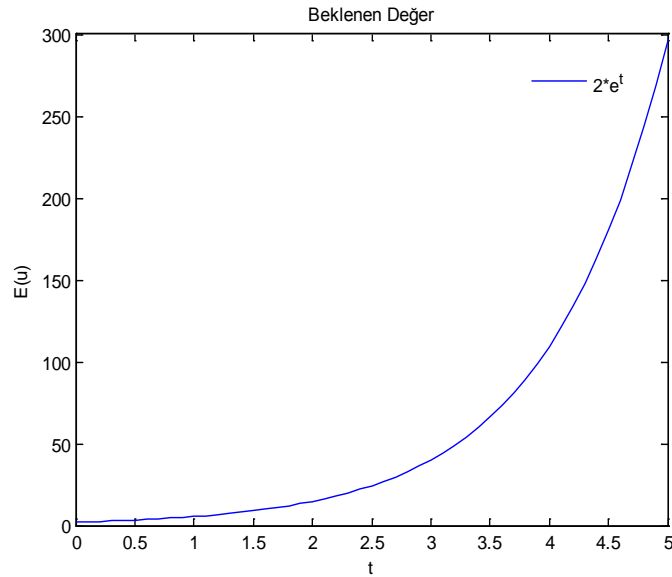
$$E(u(t)) = E[Be^t] = E[B]e^t \quad (3.205)$$

$$Var(u(t)) = E(u(t)^2) - E(u(t))^2 = Var[Be^t] = Var[B]e^{2t} \quad (3.206)$$

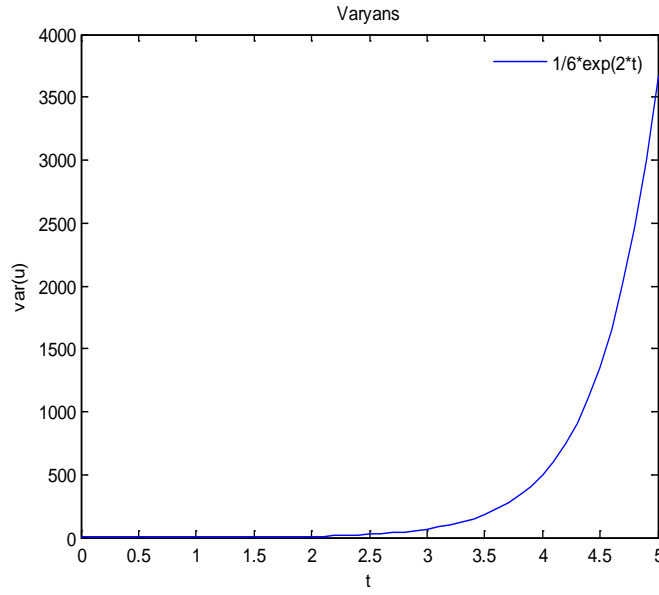
(3.205) beklenen değeri ve (3.206) varyans formüllerinde $B \sim \text{Triangular}(a = 1, b = 2, c = 3)$ parametre değerleri kullanılırsa

$$E(u(t)) = 2e^t, Var(u(t)) = \frac{1}{6}e^{2t} \quad (3.207)$$

(3.207) beklenen değeri ve varyans hesaplanır. Beklenen değeri ve varyans verilen parametre değerleri için Matlab’de çizdirilirse aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 3.16. $B \sim \text{Triangular}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değeri için $u(t)$ ‘nin beklenen değeri



Şekil 3.17. $B \sim \text{Triangular}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değeri için $u(t)$ 'nin varyans değeri

Örnek 3.5.1.5. (Saadatmondi ve Dehghan, 2009)

$$u'''(t) = \frac{7}{8}u(t) + u\left(\frac{t}{2}\right) - At^3 + 6A, 0 \leq t \leq 1 \quad (3.208)$$

başlangıç koşulları $u(t) = At^3, u(0) = 0, u'(0) = 0, u''(0) = 0, A \sim \text{Laplace}(\mu, b)$, A Laplace dağılıma sahip rastgele bağımsız değişkenler olmak üzere (3.208) rastgele oransal gecikmeli diferensiyel denkleminin karakteristiklerini elde ediniz.

Çözüm :

(3.208) ifadesine DDY uygulanırsa:

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)(k+3)u(k+3) \\ &= \frac{7}{8}u(k) + A\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) - A\delta(k-3) + 6A\delta(k) \end{aligned} \quad (3.209)$$

(3.209) ifadesi elde edilir. (3.209) ifadesinde $(k+1)(k+2)(k+3)$ ifadesi yerine $\frac{(k+3)!}{k!}$ yazılırsa

$$u(k+3) = \frac{k!}{(k+3)!} \left[\frac{7}{8} u(k) + A \left(\frac{1}{2} \right)^k u(k) - A\delta(k-3) + 6A\delta(k) \right] \quad (3.210)$$

(3.210) ifadesi elde edilir. (3.209) ifadesinde

$$k = 0 \text{ için} \quad 2.3. u(3) = \left[\frac{7}{8} u(0) + Au(0) - A\delta(-3) + 6A\delta(0) \right]$$

$$6u(3) = 6A \Rightarrow u(3) = A \quad (3.211)$$

$$k = 1 \text{ için} \quad 2.3.4. u(4) = \left[\frac{7}{8} u(1) + A \left(\frac{1}{2} \right) u(1) - A\delta(-2) + 6A\delta(1) \right]$$

$$u(4) = 0 \quad (3.212)$$

$$k = 2 \text{ için} \quad 3.4.5. u(5) = \left[\frac{7}{8} u(2) + \frac{A}{4} u(2) - A\delta(-1) + 6A\delta(2) \right]$$

$$u(5) = 0 \quad (3.213)$$

$$k = 3 \text{ için} \quad 4.5.6. u(6) = \left[\frac{7}{8} u(3) + A \left(\frac{1}{2} \right)^3 u(3) - A\delta(0) + 6A\delta(3) \right]$$

$$u(6) = \frac{1}{120} \left[\frac{7A}{8} + \frac{A^2}{8} - A \right] \quad (3.214)$$

$k = 0, 1, 2, 3$ için (3.211), (3.212), (3.213), (3.214) ifadeleri bulunur. Bu değerler (3.131) ifadesinde yerine yazılırsa

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)t^k = u(0) + u(1)t + u(2)t^2 + u(3)t^3 + u(4)t^4 + u(5)t^5 + u(6)t^6 + \dots$$

Bazı terimler ihmal edildiğinde

$$u(t) \cong At^3 \quad (3.215)$$

(3.215) ifadesi elde edilir. Laplace dağılımının beklenen değer ve varyansı

$$E(X) = \mu, Var(X) = 2b^2 \quad (3.216)$$

(3.216) dır. Laplace dağılımının moment çıkaran fonksiyonu X , ortalaması μ ve varyansı $2b^2$ olan bir rastgele bağımsız değişken olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$M_X(t) = \frac{\exp(\mu t)}{1 - b^2 t^2}, \quad |t| < \frac{1}{b} \quad (3.217)$$

Bu momentlerin kullanılması ile X ve Y bağımsız rastgele bağımsız değişkenleri için $E[XY] = E[X]E[Y]$ beklenen değer ve varyans formülleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir. (3.215) ifadesinin

$$E(u(t)) = E[At^3] = E[A]t^3 \quad (3.218)$$

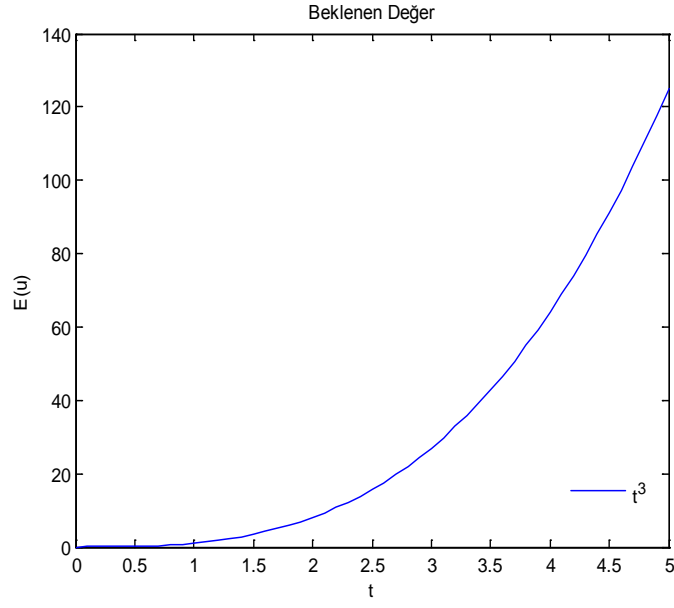
$$Var(u(t)) = E(u(t)^2) - E(u(t))^2 = Var[At^3] = Var[A]t^6 \quad (3.219)$$

(3.218) beklenen değer, (3.219) varyans karakteristik formülleri bulunur. Özel olarak $A \sim Laplace(\mu = 1, b = 1)$ parametre değerleri için,

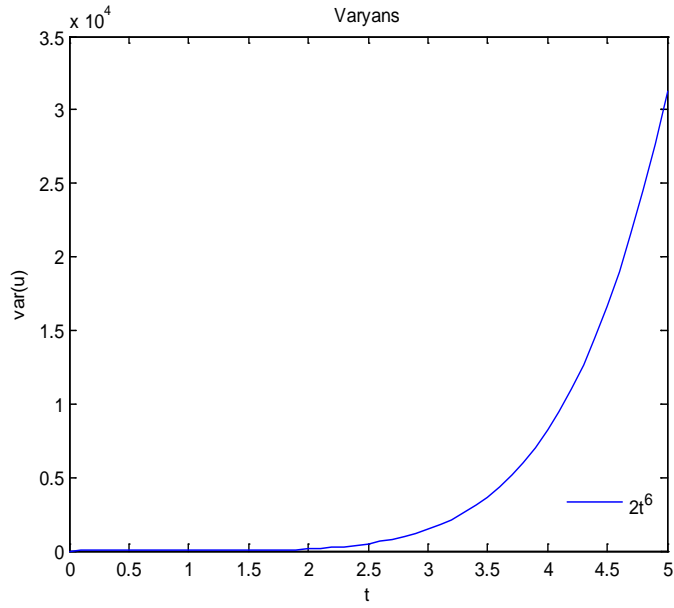
$$E(u(t)) = t^3$$

$$Var(u(t)) = 2t^6$$

beklenen değer ve varyans hesaplanır. Beklenen değer ve varyans verilen parametre değerleri için Matlab' de çizidrilirse aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 3.18. $A \sim Laplace(\mu = 1, b = 1)$, özel değeri için $u(t)$ 'nin beklenen değeri



Şekil 3.19. $A \sim Laplace(\mu = 1, b = 1)$, özel değeri için $u(t)$ 'nin varyans değeri

Örnek 3.5.1.6. (Ishiwata ve Muraya, 2007)

$$y'(t) = y(t) + \frac{1}{2}y\left(\frac{t}{2}\right) - A\cos t - A\sin t - \frac{A}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right), 0 \leq t \leq T \quad (3.220)$$

başlangıç koşulu $y(0) = A$, $A \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, A gamma dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere (3.220) rastgele oransal gecikmeli diferansiyel denkleminin karakteristiklerini elde ediniz.

Çözüm :

(3.220) ifadesindeki gecikmeli diferansiyel denkleme DDY uygulanırsa:

$$(k + 1)Y(k + 1)$$

$$= Y(k) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k Y(k) - \frac{A}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{A}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{A}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad (3.221)$$

(3.221) ifadesi elde edilir. (3.221) ifadesinde

$$k = 0 \text{ için} \quad 1. Y(1) = Y(0) + \frac{1}{2}Y(0) - \frac{A}{0!} - \frac{A}{2}$$

$$Y(1) = A + \frac{A}{2} - A - \frac{A}{2}$$

$$Y(1) = 0 \quad (3.222)$$

$$k = 1 \text{ için} \quad 2Y(2) = Y(1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) Y(1) + A$$

$$Y(2) = \frac{A}{2} \quad (3.223)$$

$k = 0, 1$ için (3.222), (3.223) ifadeleri bulunur. Diğer k değerleri için (3.221) ifadesinden Maple programı yardımıyla çözüm elde edilirse:

$$Y(4) = \frac{A}{24}, Y(6) = \frac{-A}{720}$$

bulunur. Analitik çözüm (3.131) ifadesinde yerine yazılırsa

$$y(t) = \sum_{k=0}^n Y(k)t^k = A - \frac{A}{2}t^2 + \frac{A}{24}t^4 - \dots$$

$$= A \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \right) = A \cos t \quad (3.224)$$

(3.224) ifadesi elde edilir. Gamma dağılımına sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $A \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ dir. Gamma dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}. \quad (3.225)$$

(3.225) ifadesinden $A \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci momenti ve varyansı

$$E[A] = \alpha\beta, \text{Var}[A] = \alpha\beta^2 \quad (3.226)$$

(3.226) olarak hesaplanır (Feller, 1968). Bu momentlerin kullanılması ile X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[XY] = E[X]E[Y]$, (3.224) denkleminin beklenen değer ve varyans formülleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

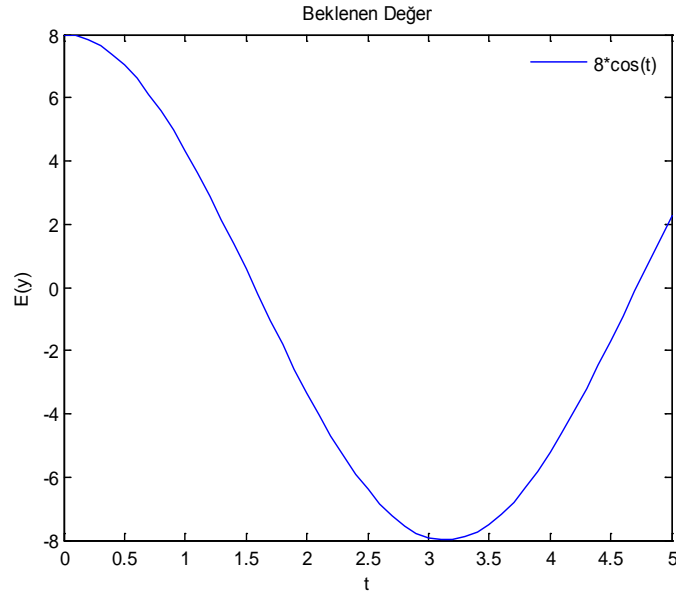
$$E(y(t)) = E[A \cos t] = E[A] \cos t \quad (3.227)$$

$$\text{Var}(y(t)) = E(y(t)^2) - E(y(t))^2 = \text{Var}[A \cos t] = \text{Var}[A] \cos^2 t \quad (3.228)$$

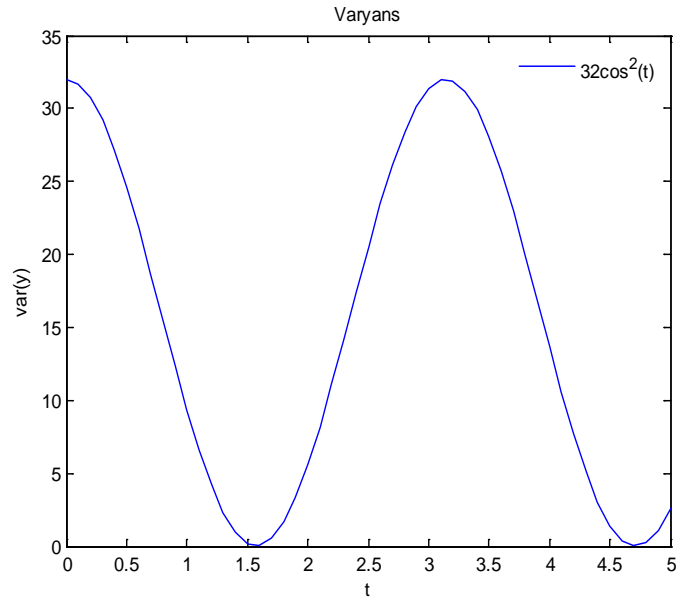
(3.227) beklenen değer ve (3.228) varyans formülleri $A \sim \text{Gamma}(2, 4)$ parametre değerleri için hesaplanırsa

$$E(y(t)) = 8 \cos t, \text{Var}(y(t)) = 32 \cos^2 t \quad (3.229)$$

(3.229) elde edilir. Beklenen değer ve varyans verilen parametre değerleri için Matlab' de çizdirilirse aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 3.20. $A \sim \text{Gamma}(\alpha = 2 \text{ ve } \beta = 4)$ özel değeri için $y(t)$ 'nin beklenen değeri



Şekil 3.21. $A \sim \text{Gamma}(\alpha = 2 \text{ ve } \beta = 4)$ özel değeri için $y(t)$ 'nin varyans değeri

3.6. Sumudu Dönüşümü Yöntemi

Bir $f(t)$ fonksiyonun Sumudu Dönüşüm metodu Watugala tarafından 1993 yılında aşağıdaki gibi tanımlamıştır (Watugala, 1993). Bir A fonksiyonlar kümesi

$$A = \left\{ f(t): \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{\tau}}, t \in (-1)^j x[0, \infty) \right\},$$

biçiminde tanımlanmak üzere

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(ut) dt, \quad u \in (-\tau_1, \tau_2), \quad (3.230)$$

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{u}\right) e^{\frac{-t}{u}} f(t) dt, \quad (3.231)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Küçük, 2017). (3.230) eşitliği verilen diferansiyel denklemlere uygulanarak $F(u)$ Sumudu dönüşümü elde edilir. Ters Sumudu dönüşümü ise aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{e-i\infty}^{e+i\infty} e^{st} F\left(\frac{1}{s}\right) \frac{ds}{s}. \quad (3.232)$$

Formülde belirtilen integral hesabı bazı fonksiyonlar için oldukça güç ve zaman alıcı olabilir. Bu sebepten, ters Laplace dönüşümlerinde olduğu gibi ters Sumudu dönüşümlerinde sık karşılaşılan fonksiyonlarının Sumudu dönüşüm tabloları hazırlanmıştır (Belgacem vd. 2003; Belgacem vd. 2006; Belgacem, 2006). Verilen bir diferansiyel denklemin çözümünün araştırılmasında ilk olarak denklemin Sumudu dönüşümü alınarak cebirsel bir denkleme indirgenir, sonrasında ise bu denklemden bağımlı değişken çekilerek ters Sumudu dönüşümü uygulandığında çözüm elde edilmiş olur. Bu tezde kullanılan ve literatürdeki birçok çalışmada da sıklıkla karşılaşılan bazı fonksiyonların Sumudu dönüşümleri aşağıdaki teoremlerle ifade edilebilir.

3.6.1. Sumudu Dönüşümünün Varlığı

Teorem 3.6.1.1. $f(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve $t > t_0$ için $\alpha -$ üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. $\frac{1}{u} > \alpha$ olmak üzere $S[f(t)]$ mevcuttur.

3.6.2. Sumudu Dönüşümünün Özellikleri

Teorem 3.6.2.2. $f(t) \in A$ fonksiyonunun, Laplace dönüşümü $F(s)$, Sumudu dönüşümü $G(u)$ olmak üzere,

$$G(u) = \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u} \quad (3.233)$$

olacak şekilde bir bağlantı vardır (Belgacem vd. 2003).

Teorem 3.6.2.3. Sumudu dönüşümü lineerdir. C_1, C_2 keyfi sabitler ve f_1, f_2 de Sumudu dönüşümü mevcut iki fonksiyon ise

$$S[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 S[f_1(t)] + C_2 S[f_2(t)] \quad (3.234)$$

şeklindedir.

Teorem 3.6.2.4. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olmak üzere

$$S[e^{at} f(t)] = \frac{1}{1-au} G\left(\frac{u}{1-au}\right) \quad (3.235)$$

geçerlidir.

Teorem 3.6.2.5. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü ve Laplace dönüşümü sırasıyla $G(u)$ ve $F(s)$ olmak üzere,

$$h(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ f(t-a), & t > a \end{cases} \quad (3.236)$$

fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $S[h(t)] = e^{\frac{a}{u}} G(u)$ dur.

Teorem 3.6.2.6. $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü ve Sumudu dönüşümü sırasıyla $F(s)$ ve $G(u)$ olmak üzere,

$$S[f(at)] = G(au) \quad (3.237)$$

şeklindedir.

Teorem 3.6.2.7. $f(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli, üstel mertebeden ve $f'(t)$, $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli olsun. $\frac{1}{u} > \alpha$ için

$$S[f'(t)] = \frac{S[f(t)] - f(0)}{u} \quad (3.238)$$

şeklindedir.

Teorem 3.6.2.8. $F(s)$ ve $G(u)$ sırasıyla $f(t)$ fonksiyonunun Laplace ve Sumudu dönüşümleri olmak üzere $F_1(s)$ ve $G_1(u)$, $f(t)$ fonksiyonunun birinci türevinin sırasıyla Laplace ve Sumudu dönüşümleri olsun. Buna göre,

$$G_1(u) = \frac{G(u) - f(0)}{u} \quad (3.239)$$

şeklindedir.

Teorem 3.6.2.9. $f(t)$ fonksiyonunun n . Türevi $f^{(n)}(t)$ olsun. $G_n(u)$, $n \geq 1$ için $f^{(n)}(t)$ nin Sumudu dönüşümü olmak üzere,

$$G_n(u) = \frac{G(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}} \quad (3.240)$$

geçerlidir (Belgacem vd. 2003).

Teorem 3.6.2.10. $n \geq 1$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun n . türevi $f^{(n)}(t)$ olsun. $G_n(u)$ ve $F_n(s)$, $f^{(n)}(t)$ fonksiyonunun sırasıyla Sumudu ve Laplace dönüşümleri olmak üzere;

$$G_n(u) = \frac{G(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}} \quad (3.241)$$

geçerlidir (Belgacem vd. 2003).

Teorem 3.6.2.11. $S[f(t)] = G(u)$ olmak üzere,

$$S[tf(t)] = u^2 \frac{d}{du} G(u) + uG(u) \quad (3.242)$$

geçerlidir (Belgacem, 2006).

Teorem 3.6.2.12. $S[f(t)] = G(u)$ olmak üzere,

$$S[t^2 f(t)] = u^4 \frac{d^2}{du^2} G(u) + 4u^3 \frac{d}{du} G(u) + 2u^2 G(u) \quad (3.243)$$

geçerlidir (Belgacem, 2006).

Teorem 3.6.2.13. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olsun. $G^{(k)}(u)$, $G(u)$ nun u ya göre k . türevi olmak üzere, $t^n f(t)$ fonksiyonunun, Sumudu dönüşümü

$$S[t^n f(t)] = u^n \sum_{k=0}^n a_k^n u^k G^{(k)}(u) \quad (3.244)$$

$$a_0^n = n!, a_n^n = 1, a_1^n = n! n, a_{n-1}^n = n^2 \text{ ve } k = 2, 3, \dots, n-2$$

$$a_k^n = a_{k-1}^{n-1} + (n+k) a_k^{n-1} \quad (3.245)$$

şeklindedir (Belgacem ve Karaballi, 2006).

Teorem 3.6.2.14. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ ve $u(-1, 1)$ aralığında olmak üzere,

$$S[e^t f(t)] = \frac{G(u/(1-u))}{1-u} \quad (3.246)$$

gerçeklenir (Belgacem, 2006).

Teorem 3.6.2.15. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olsun. $f^{(n)}(t), f(t)$ nin t ye göre n . türevi; $G^{(n)}(u), G(u)$ nun u ya göre n . türevi olmak üzere $t^n f^{(n)}(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü,

$$S[t^n f^{(n)}(t)] = u^n G^{(n)}(u) \quad (3.247)$$

şeklindedir (Belgacem ve Karaballi, 2006).

Teorem 3.6.2.16. $f(t) \in A$ olmak üzere $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ veya $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ limitinin var olduğu kabul edilirse,

$$\lim_{u \rightarrow 0} G(u) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad (3.248)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} G(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (3.249)$$

olacaktır.

Teorem 3.6.2.17. $f(t) \in A, T$ periyotlu bir fonksiyon olsun. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü;

$$S[f(t)] = \frac{\int_0^{\frac{T}{u}} e^{-t} f(ut) dt}{1 - e^{-\frac{T}{u}}} \quad (3.250)$$

şeklindedir (Belgacem vd. 2003).

Teorem 3.6.2.18. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları Laplace dönüşümleri $F(s)$ ve $G(s)$ Sumudu dönüşümleri $M(u)$ ve $N(u)$ olmak üzere,

$$(f * g)(t) = \int_0^{\infty} f(t)g(t - \tau)d\tau \quad (3.251)$$

$$S[(f * g)(t)] = uM(u)N(u) \quad (3.252)$$

gerçeklenir (Belgacem vd. 2003). Bu tezde kullanılan bazı fonksiyonların Sumudu dönüşümleri Tablo 3.2' de verilmiştir.

Tablo 3.2. Bazı fonksiyonların Sumudu dönüşümleri

Orijinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
1	1
t	u
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1, 2, \dots$	u^{n-1}
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}, n > 0$	u^{n-1}
e^{at}	$\frac{1}{1-au}$
$\frac{\sin(at)}{a}$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
$\cos(at)$	$\frac{1}{1+a^2u^2}$
$S\left[\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right]$	$\frac{1}{u}[S[U(x,t)] - U(x,0)]$
$S\left[\frac{\partial^n U(x,t)}{\partial t^n}\right]$	$\frac{1}{u^n}\left[S[U(x,t)] - \sum_{k=0}^{n-1} u^k U(x,0)^{(k)}\right]$

3.6.3. Sumudu Dönüşümünün Gecikmeli Denklemlere Uygulanması

Örnek 3.6.3.1.

$$G_2(u) = S(f''(t)) = \frac{G(u) - f(0)}{u^2} - \frac{f'(0)}{u} \quad (3.253)$$

ikinci mertebeden denklemin genel çözümü

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + w^2 y(t) = 0 \quad (3.254)$$

(3.254)' tür. (3.254) denkleminin sumudu dönüşümü alırsa,

$$\frac{G(u) - y(0)}{u^2} - \frac{y'(0)}{u} + \frac{w^2 G(u)}{u^2} = 0$$

$$G(u) + w^2 G(u) = u y'(0) + y(0)$$

$$G(u)(1 + w^2) = u y'(0) + y(0)$$

$$G(u) = \frac{u y'(0) + y(0)}{1 + w^2}$$

$$G(u) = \frac{y'(0)u}{1 + w^2} + y(0) \frac{1}{1 + w^2}$$

$$y(t) = y(0) \cos(wt) + y'(0) \sin(wt) \quad (3.255)$$

elde edilir.

Örnek 3.6.3.2.

$$V''(t) = \frac{3}{4}V(t) + V\left(\frac{t}{2}\right) - t^2 + 2, \quad V(0) = 0, V'(0) = 0, \quad (3.256)$$

$$V(t) = t^2 \rightarrow \text{tam çözüm} \quad (3.257)$$

(3.256) ifadesinin Sumudu dönüşümü alınırsa,

$$V_{n+1}(u) = V_n(u) + \lambda(u) \left[\frac{V(u)}{u^2} - \frac{V(0)}{u} - \frac{V'(0)}{u} - S \left(\frac{3}{4} V(t) + V\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t^2}{2} \right) \right] \quad (3.258)$$

(3.258) ifadesi elde edilir.

$$\lambda(u) = -u^2 \rightarrow \text{Lagrange çarpanı} \quad (3.259)$$

(3.258) ifadesine Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$V_{n+1}(t) = V_n(t) + S^{-1} \left[u^2 \left(S \left(\frac{3}{4} V_n(t) + V_n\left(\frac{t}{2}\right) - t^2 + 2 \right) \right) \right] \quad (3.260)$$

(3.260) ifadesi elde edilir. $V_0(t) = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} n = 0 \text{ için } V_1 &= V_0 + S^{-1}[u^2(-2u^2 + 2)] \\ &= S^{-1}[-2u^4 + 2u^2] \\ &= -\frac{2t^4}{4!} + \frac{2t^2}{2} \\ &= t^2 - \frac{t^4}{12} \end{aligned} \quad (3.261)$$

(3.261) ifadesi elde edilir. $n = 1$ için,

$$\begin{aligned} V_2(t) &= V_1(t) + S^{-1} \left[u^2 \left(S \left(\frac{3}{4} V_1(t) + V_1\left(\frac{t}{2}\right) - t^2 + 2 \right) \right) \right] \\ &= t^2 - \frac{t^4}{12} + S^{-1} \left[u^2 \left(S \left(\frac{3}{4} \left(t^2 - \frac{t^4}{12} \right) + \left(\frac{t}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{2} \right)^4 - t^2 + 2 \right) \right) \right] \\ &= t^2 - \frac{t^4}{12} + S^{-1} \left[u^2 \left(S \left(\frac{3}{4} t^2 - \frac{3}{48} t^4 + \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{16 \cdot 12} - t^2 + 2 \right) \right) \right] \\ &= t^2 - \frac{t^4}{12} + S^{-1} \left[u^2 \left(\frac{3}{2} u^2 - \frac{3}{2} u^4 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{8} - 2u^2 + 2 \right) \right] \\ &= t^2 - \frac{t^4}{12} + S^{-1} \left[2u^2 - \frac{11}{8} u^6 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t^2 - \frac{t^4}{12} + t^2 - \frac{11}{8} \frac{t^6}{6!} \\
&= 2t^2 - \frac{t^4}{12} - \frac{11}{5760} t^6
\end{aligned} \tag{3.262}$$

(3.262) elde edilir.

3.6.4. Sumudu Varyasyonel İterasyon Yöntemi (SVIM)

GDD en basit şekliyle

$$v'_i(t) = f(t, v_i(t), v_i(qt)), \tag{3.263}$$

(3.263) şeklinde ifade edilebilir. Burada $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ve q sabit bir gecikmedir (Vilu vd. 2019). İlk olarak, GDD' ler ve VIM' in ana fikrini göstermek için genel doğrusal olmayan diferansiyel denklemi Goswami ve Alqahtani (2016) ele alalım,

$$\frac{d^m v(t)}{dt^m} + R[v(t)] + N[v(t)] = f(t), \tag{3.264}$$

aşağıdaki başlangıç koşullarıyla:

$$v^{(k)}(0) = v_0^k, k = 0, 1, 2, \dots, (m-1), \tag{3.265}$$

burada $v = v(t)$, R bir lineer operatördür, N doğrusal olmayan bir operatördür, $f(t)$ bilinen bir sürekli dış kuvvet ve $d^m v(t)/dt^m$ en yüksek mertebeden türev terimidir (Goswami ve Alqahtani, 2016; Vilu vd. 2019). VIM' in ana fikri, (3.264) ifadesi için bir düzeltme fonksiyoneli oluşturmaktır.

$$v_{(n+1)}(t) = v_n(t) + \int \lambda(t, \tau) \left(\frac{d^m v_n}{dt^m} + R(\tilde{v}_n) + N(\tilde{v}_n) - f(\tau) \right) d\tau. \tag{3.266}$$

Ardışık $v_n, n \geq 1$ yaklaşımı, varyasyon teorisi ile en iyi şekilde bilinen genel bir Lagrange çarpanı $\lambda(\tau)$ bulunarak elde edilebilir. \tilde{v}_n fonksiyonu, $\delta \tilde{v}_n = 0'$ ı gösteren sınırlı bir varyasyon olarak kabul edilir. İlk olarak, ardışık yaklaşımların $v(t)$, $v_n(t)$ iyi bir başlangıç yaklaşımı $v_0(t)$ ile elde edilmesini sağlayan Lagrange çarpanını belirlemek için kısmi integrasyon dan faydalanılır. (3.265) 'deki başlangıç koşulları tipik olarak ilk yaklaşımı verir. Son olarak, $n \rightarrow \infty$ yaklaştığında, $v_n(t)$ tam olarak $v(t)$ ye yakınsar (Vilu vd. 2019).

3.6.5. Sumudu VIM Dönüşüm Yöntemi (Hibrit Yöntem)(SVIM)

Lagrange çarpanlarının tam ifadesi, $f(x) = 0$ çözümünün cebirsel denklemi yardımı ile ifade edilebilir (Vilu vd. 2019).

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n). \quad (3.267)$$

En uç terimi $\delta x_{n+1}/\delta x_n = 0$ için optimal koşul sayesinde

$$\lambda = -\frac{1}{f'(x_n)} \quad (3.268)$$

bulunur (Vilu vd. 2019). Burada δ geleneksel varyasyonel operatörü temsil eder. x_0 başlangıç koşulu uygulandığında, (3.267) ve (3.268) ifadelerinden gelecek yeni iterasyon yaklaşımları ile x_{n+1} yaklaşık çözüm elde edilebilir.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_0) \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.269)$$

(3.269)'daki formül quadratik yakınsaklığa sahip meşhur Newton-Raphson formülüdür (Vilu vd. 2019). Başlangıç adımı olarak, He (2007) temel özelliklerini Sumudu dönüşümü ile beraber (3.264) denkleminde uygulayalım (He, 2007). Ardından, aşağıdaki doğrusal denklem:

$$u^{-m}\bar{v}(s) - u^{-m}v(0) - \dots - u^{-1}v^{m-1}(0) + S(R[v] + N[v]) = S(f(t)). \quad (3.270)$$

elde edilir. Sumudu Varyasyonel İterasyon Yöntemi (SVIM) algoritması aşağıda verilmiştir:

(3.263) ifadesine Sumudu dönüşümü uygulanırsa (3.264) denklemindeki fonksiyonel düzeltmeyi verir:

$$\bar{v}_{n+1}(u) = \bar{v}_n(u) + \lambda(u)[u^{-m}\bar{v}(u) - u^{-m}v(0) - \dots$$

$$-u^{-1}v^{m-1}(0) + S(R[v] + N[v] - S(f(t))), \quad (3.271)$$

Sumudu dönüşümü belirtmek için S notasyonu kullanıldı. (3.264) ifadesindeki, $S(R(\bar{v}_n) + N(\bar{v}_n)) - S(f(t))$, terimleri dikkate alındığında, (3.271) ifadesinin \bar{v}_n denklemine göre durağan olması sağlandı.

$$\delta \bar{v}_{n+1}(u) = \delta \bar{v}_n(u) + \lambda(u) \left(\frac{1}{u^m} \delta \bar{v}_n(u) \right). \quad (3.272)$$

(3.271) 'den Lagrange çarpanı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lambda(u) = -u^m. \quad (3.273)$$

(3.265) ifadesinden, (3.270)' in her iki tarafına S^{-1} ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} v_{n+1}(t) = v_n(t) \\ - S^{-1} [u^m \{ u^{-m} \bar{v}(u) - u^{-m} v(0) - \dots - u^{-1} v^{m-1}(0) \\ + S(R(v_n) + N(v_n)) - S(f(t)) \}], \end{aligned}$$

$$= S^{-1} (v(0) + \dots + u^{m-1} v^{m-1}(0)) + S^{-1} [u^m (S[R(v_n) + N(v_n) - f(t)])], \quad (3.274)$$

elde edilir. ilk yaklaşımla

$$v_0(t) = S^{-1} (v(0) + \dots + u^{m-1} v^{m-1}(0))$$

$$= v(0) + v'(0)t + \dots + \frac{t^{m-1}v^{m-1}(0)}{(m-1)!} \quad (3.275)$$

(3.274) denklemi, ilk iterasyonun Taylor serisi tarafından oluşturulan geleneksel VIM' deki gibi yapıldığını göstermektedir.

Örnek 3.6.5.1.

$$v'''(t) = \frac{7}{8}v(t) + v\left(\frac{t}{2}\right) - At^3 + 6A, \quad (3.276)$$

başlangıç koşulları $v(0) = 0, v'(0) = 0, v''(0) = 0$ olmak üzere bu denklemin tam çözümü

$$v(t) = At^3 \quad (3.277)$$

(3.277) olan $A \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, A gamma dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere rastgele oransal gecikmeli diferensiyel denkleminin Sumudu VİM yöntemi ile yaklaşık analitik çözümünü ve olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

Çözüm:

Sumudu ile VİM' i birlikte uygulayalım

$$S[v'''(t)] = \frac{v(u)}{u^3} - \frac{v(0)}{u^3} - \frac{v'(0)}{u^2} - \frac{v''(0)}{u} \quad (3.278)$$

Sumudu dönüşümü alınırsa,

$$v_{n+1}(u) = v_n(u)$$

$$+ \lambda(u) \left[\frac{v(u)}{u^3} - \frac{v(0)}{u^3} - \frac{v'(0)}{u^2} - \frac{v''(0)}{u} - S\left(\frac{7}{8}v(t) + v\left(\frac{t}{2}\right) - At^3 + 6A\right) \right] \quad (3.279)$$

$$\lambda(u) = -u^2 \rightarrow \text{lagrange çarpanı} \quad (3.280)$$

elde edilir. Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + S^{-1} \left[u^2 \left(S \left(\frac{7}{8} v_n(t) + v_n \left(\frac{t}{2} \right) - At^3 + 6A \right) \right) \right] \quad (3.281)$$

elde edilir. $v_0(t) = 0$ alınırsa, $n = 0$ için;

$$\begin{aligned} v_1(t) &= S^{-1}[u^2(-At^3 + 6A)] \\ &= S^{-1}[u^2[-Au^3 3! + 6A]] \\ &= S^{-1}(-6Au^5 + 6Au^2) \end{aligned}$$

$$v_1(t) = -\frac{6At^5}{\Gamma(6)} + \frac{6At^2}{\Gamma(3)} = -\frac{6At^5}{5!} + \frac{6At^2}{2!} \quad (3.282)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} S^{-1}[u^{n-1}] &= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ S^{-1}[u^n] &= \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$S[t^{n-1}] = \Gamma(n)u^{n-1} \quad (3.283)$$

$n = 1$ için;

$$\begin{aligned} v_2(t) &= v_1(t) + S^{-1} \left[u^2 \left(S \left(\frac{7}{8} v_1(t) + v_1 \left(\frac{t}{2} \right) - At^3 + 6A \right) \right) \right] \\ &= -\frac{6At^5}{5!} + 3At^2 \\ &\quad + S^{-1} \left[u^2 \left(S \left(\frac{7}{8} \left(-\frac{At^5}{4} + 3At^2 \right) - \frac{A}{4} \left(\frac{t}{2} \right)^5 + 3A \left(\frac{t}{2} \right)^2 - At^3 + 6A \right) \right) \right] \\ &= -\frac{6A}{5!} t^5 + 3At^2 \\ &\quad + S^{-1} \left[u^2 \left(-\frac{7A}{32} \Gamma(6)u^5 + \frac{21A}{8} \Gamma(3)u^2 - \frac{A}{128} \Gamma(6)u^5 + \frac{3A}{4} \Gamma(3)u^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - A\Gamma(4)u^3 + 6A \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{6A}{5!}t^5 + 3At^2 \\
&+ S^{-1} \left[-\frac{105}{4}u^7 + \frac{21A}{4}u^4 - \frac{15A}{16}u^7 + \frac{3A}{2}u^4 - 6Au^5 + 6Au^2 \right] \\
&= -\frac{6A}{5!}t^5 + 3At^2 + \left(-\frac{105A}{4} \right) \frac{t^7}{7!} + \frac{21A}{4} \frac{t^4}{4!} \\
&- \frac{15A}{16} \frac{t^7}{7!} + \frac{3A}{2} \frac{t^4}{4!} - 6A \frac{t^5}{5!} + \frac{6At^2}{2}
\end{aligned} \tag{3.284}$$

elde edilir. Gamma dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ dir. Gamma dağılımının moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}. \tag{3.285}$$

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci momenti ve varyansı

$$E[X] = \alpha\beta, \text{Var}[X] = \alpha\beta^2 \tag{3.286}$$

bulunur (Feller, 1968). Bu momentlerin kullanılması ile X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[XY] = E[X]E[Y]$, beklenen değer ve varyans formülleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned}
E(v_2(t)) &= E \left[-\frac{6A}{5!}t^5 + 3At^2 - \frac{105}{4} \frac{t^7}{7!} + \frac{21A}{4} \frac{t^4}{4!} - \frac{15A}{16} \frac{t^7}{7!} + \frac{3A}{2} \frac{t^4}{4!} - 6A \frac{t^5}{5!} + \frac{6At^2}{2} \right] \\
&= \left[-\frac{6}{5!}t^5 + 3t^2 - \frac{105}{4} \frac{t^7}{7!} + \frac{21}{4} \frac{t^4}{4!} - \frac{15}{16} \frac{t^7}{7!} + \frac{3}{2} \frac{t^4}{4!} - \frac{6t^5}{5!} + \frac{6t^2}{2} \right] E[A]
\end{aligned} \tag{3.287}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(y(t)) &= E(y(t)^2) - E(y(t))^2 \\
&= \text{Var} \left[-\frac{6A}{5!}t^5 + 3At^2 - \frac{105}{4} \frac{t^7}{7!} + \frac{21A}{4} \frac{t^4}{4!} - \frac{15A}{16} \frac{t^7}{7!} + \frac{3A}{2} \frac{t^4}{4!} - 6A \frac{t^5}{5!} + \frac{6At^2}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$= \left[-\frac{6}{5!}t^5 + 3t^2 - \frac{105}{4} \frac{t^7}{7!} + \frac{21}{4} \frac{t^4}{4!} - \frac{15}{16} \frac{t^7}{7!} + \frac{3}{2} \frac{t^4}{4!} - \frac{6t^5}{5!} + \frac{6t^2}{2} \right]^2 Var[A] \quad (3.288)$$

(3.287) beklenen değer ve (3.288) varyans $A \sim Gamma(2,4)$, parametre değerleri için hesaplanırsa,

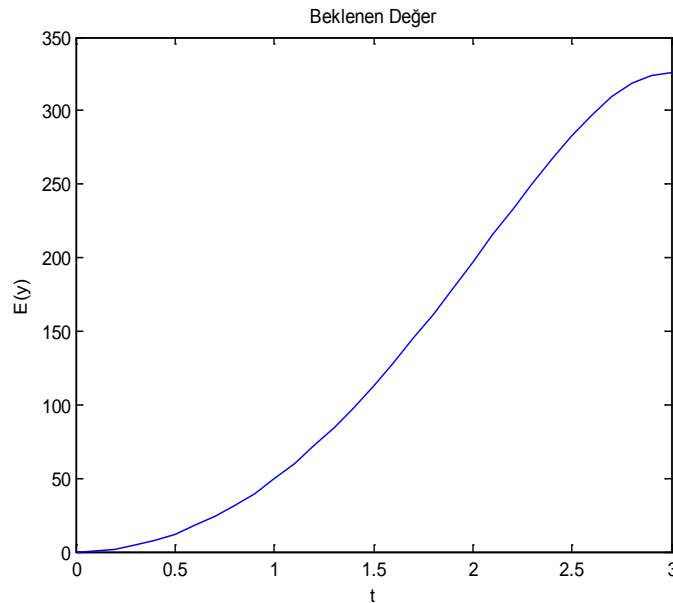
$$E(v_2(t)) = \left[-\frac{6}{5!}t^5 + 3t^2 - \frac{105}{4} \frac{t^7}{7!} + \frac{21}{4} \frac{t^4}{4!} - \frac{15}{16} \frac{t^7}{7!} + \frac{3}{2} \frac{t^4}{4!} - \frac{6t^5}{5!} + \frac{6t^2}{2} \right] \alpha \beta \quad (3.289)$$

$$Var(v_2(t)) = \left[-\frac{6}{5!}t^5 + 3t^2 - \frac{105}{4} \frac{t^7}{7!} + \frac{21}{4} \frac{t^4}{4!} - \frac{15}{16} \frac{t^7}{7!} + \frac{3}{2} \frac{t^4}{4!} - \frac{6t^5}{5!} + \frac{6t^2}{2} \right]^2 \alpha \beta^2 \quad (3.290)$$

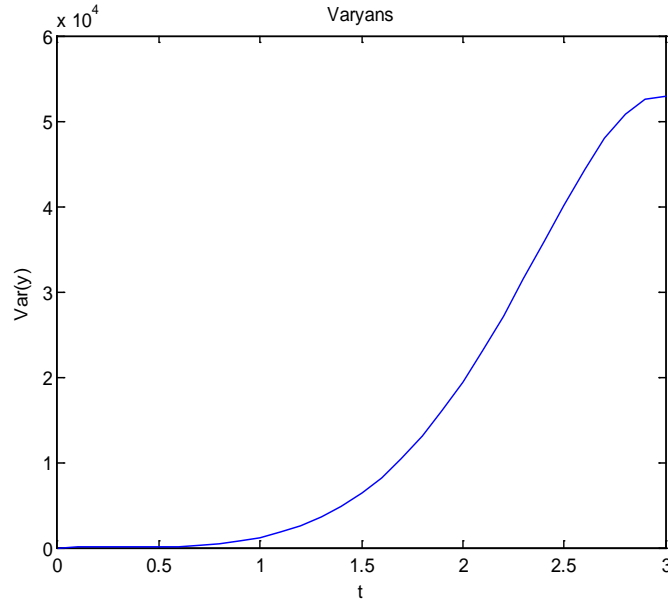
$$E(v_2(t)) = 8 \left[-\frac{6}{5!}t^5 + 3t^2 - \frac{105}{4} \frac{t^7}{7!} + \frac{21}{4} \frac{t^4}{4!} - \frac{15}{16} \frac{t^7}{7!} + \frac{3}{2} \frac{t^4}{4!} - \frac{6t^5}{5!} + \frac{6t^2}{2} \right] \quad (3.291)$$

$$Var(v_2(t)) = 32 \left[-\frac{6}{5!}t^5 + 3t^2 - \frac{105}{4} \frac{t^7}{7!} + \frac{21}{4} \frac{t^4}{4!} - \frac{15}{16} \frac{t^7}{7!} + \frac{3}{2} \frac{t^4}{4!} - \frac{6t^5}{5!} + \frac{6t^2}{2} \right]^2 \quad (3.292)$$

elde edilir. Beklenen değer ve varyans verilen parametre değerleri için Matlab' de çizidirilirse aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 3.22. $A \sim Gamma(\alpha = 2, \beta = 4)$ özel değeri için $v_2(t)$ 'in beklenen değeri



Şekil 3.23. $A \sim \text{Gamma}(\alpha = 2, \beta = 4)$ özel değeri için $v_2(t)$ 'in varyans değeri

Örnek 3.6.5.2.

$$v'''(t) = \frac{7}{8}v(t) + v\left(\frac{t}{2}\right) - At^3 + 6A \quad (3.293)$$

başlangıç koşulları $v(0) = 0, v'(0) = 0, v''(0) = 0$ olmak üzere $A \sim N(\mu, \sigma^2)$, A normal dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere rastgele oransal gecikmeli diferensiyel denkleminin Sumudu VİM yöntemi ile yaklaşık analitik çözümünü ve olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

Çözüm :

$$S[v'''(t)] = \frac{v(u)}{u^3} - \frac{v(0)}{u^3} - \frac{v'(0)}{u^2} - \frac{v''(0)}{u} \quad (3.294)$$

olmak üzere (3.293) denkleminde Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$v_{n+1}(u) = v_n(u)$$

$$+\lambda(u) \left[\frac{v(u)}{u^3} - \frac{v(0)}{u^3} - \frac{v'(0)}{u^2} - \frac{v''(0)}{u} - S \left(\frac{7}{8} v(t) + v \left(\frac{t}{2} \right) - At^3 + 6A \right) \right] \quad (3.295)$$

$$\lambda(u) = -u^3 \rightarrow \text{lagrange çarpanı} \quad (3.296)$$

elde edilir. Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + S^{-1} \left[u^3 \left(S \left(\frac{7}{8} v_n(t) + v_n \left(\frac{t}{2} \right) - At^3 + 6A \right) \right) \right] \quad (3.297)$$

elde edilir. $v_0(t) = 0$ alınırsa, $n = 0$ için;

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v_0(t) + S^{-1} \left[u^3 \left(S \left(\frac{7}{8} v_0(t) + v_0 \left(\frac{t}{2} \right) - At^3 + 6A \right) \right) \right] \\ &= S^{-1} [u^3 [-Au^3 3! + 6A]] \\ &= S^{-1} (-3! Au^6 + 6Au^3) \\ &= -\frac{6At^6}{6!} + \frac{6At^3}{3!} \\ &= -\frac{At^6}{120} + At^3 \end{aligned}$$

$$v_1(t) = -\frac{At^6}{120} + At^3 \quad (3.298)$$

$n = 1$ için;

$$\begin{aligned} v_2(t) &= v_1(t) + S^{-1} \left[u^3 \left(S \left(\frac{7}{8} v_1(t) + v_1 \left(\frac{t}{2} \right) - At^3 + 6A \right) \right) \right] \\ v_2(t) &= v_1(t) + S^{-1} \left[u^3 \left(S \left(\frac{7}{8} \left(-\frac{At^6}{120} + At^3 \right) - \frac{A}{120} \frac{t^6}{64} + \frac{At^3}{8} - At^3 + 6A \right) \right) \right] \\ v_2(t) &= -\frac{At^6}{120} + At^3 + S^{-1} \left[u^3 \left(S \left(-\frac{7}{960} At^6 + \frac{7}{8} At^3 - \frac{A}{120} \frac{t^6}{64} + \frac{At^3}{8} - At^3 + 6A \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{At^6}{120} + At^3 + S^{-1} \left[u^3 \left(-\frac{171Au^6}{32} + 6A \right) \right] \\
&= -\frac{At^6}{120} + At^3 + S^{-1} \left[-\frac{171A}{32} u^9 + 6Au^3 \right] \\
&= -\frac{19A}{1290240} t^9 - \frac{1}{120} At^6 + 2At^3
\end{aligned}$$

$$v_2(t) = -\frac{19A}{1290240} t^9 - \frac{1}{120} At^6 + 2At^3 \quad (3.299)$$

$n = 2$ için;

$$v_3(t) = v_2(t) + S^{-1} \left[u^3 \left(S \left(\frac{7}{8} v_2(t) + v_2 \left(\frac{t}{2} \right) - At^3 + 6A \right) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
v_3(t) &= v_2(t) + S^{-1} \left[u^3 \left(S \left(\frac{7}{8} \left(-\frac{19A}{1290240} t^9 - \frac{A}{120} t^6 + 2At^3 \right) - \frac{19A}{660602880} t^9 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{A}{7680} t^6 + \frac{A}{4} t^3 - At^3 + 6A \right) \right) \right] \\
&= v_2(t) + S^{-1} \left[u^3 \left(-\frac{76779A}{16384} u^9 - \frac{171A}{32} u^6 + 6Au^3 + 6A \right) \right] \\
&= v_2(t) + S^{-1} \left[-\frac{76779A}{16384} u^{12} + \frac{171A}{32} u^9 + 6Au^6 + 6Au^3 \right]
\end{aligned}$$

$$v_3(t) = -\frac{76779A}{16384} \frac{t^{12}}{12!} - \frac{19A}{1290240} t^9 + \frac{1A}{120} t^6 + At^3 \quad (3.300)$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılımına sahip X rastgele değişkeninin monent çıkaran fonksiyonu:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2)}. \quad (3.301)$$

(3.301) monent çıkaran fonksiyonundan $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkenin birinci, ikinci momentleri ve varyansı hesaplanırsa:

$$E[t] = \mu, E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2, Var[X] = \sigma^2 \quad (3.302)$$

elde edilir (Feller, 1968). Beklenen değer ve varyans:

$$\begin{aligned}
 E(v_3(t)) &= E\left(-\frac{76779A}{16384} \frac{t^{12}}{12!} - \frac{19A}{1290240} t^9 + \frac{1A}{120} t^6 + At^3\right) \\
 &= \left(-\frac{76779}{16384} \frac{t^{12}}{12!} - \frac{19}{1290240} t^9 + \frac{1}{120} t^6 + t^3\right) E(A) \\
 &= \left(-\frac{76779}{16384} \frac{t^{12}}{12!} - \frac{19}{1290240} t^9 + \frac{1}{120} t^6 + t^3\right) \mu
 \end{aligned} \tag{3.303}$$

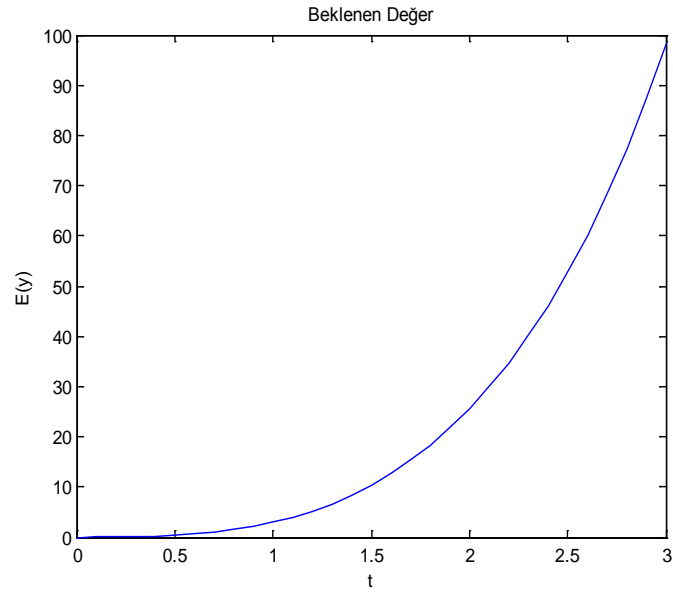
$$\begin{aligned}
 Var(v_3(t)) &= E(v_3(t)^2) - E(v_3(t))^2 \\
 &= Var\left(-\frac{76779A}{16384} \frac{t^{12}}{12!} - \frac{19A}{1290240} t^9 + \frac{1A}{120} t^6 + At^3\right) \\
 &= \left(-\frac{76779}{16384} \frac{t^{12}}{12!} - \frac{19}{1290240} t^9 + \frac{1}{120} t^6 + t^3\right)^2 Var(A) \\
 &= \left(-\frac{76779}{16384} \frac{t^{12}}{12!} - \frac{19}{1290240} t^9 + \frac{1}{120} t^6 + t^3\right)^2 \sigma^2
 \end{aligned} \tag{3.304}$$

elde edilir. (3.303) beklenen değer ve (3.304) varyans $A \sim N(3,4)$ parametre değerleri için hesaplanırsa,

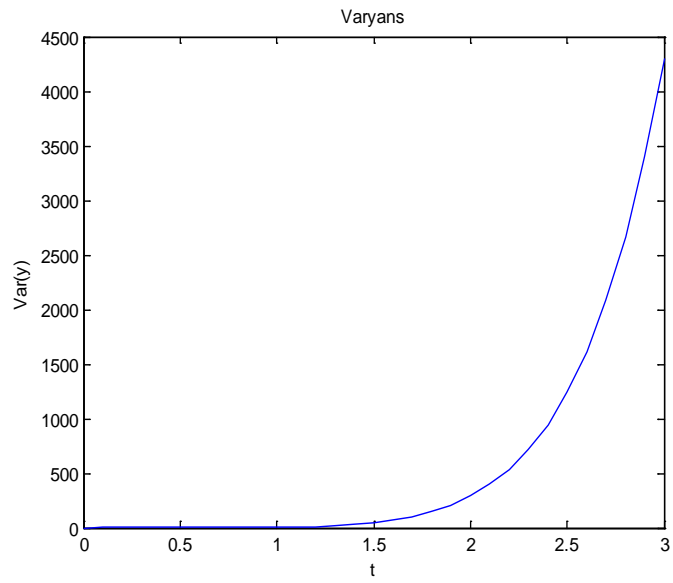
$$E(v_3(t)) = \left(-\frac{8531}{290665267200} t^{12} - \frac{19}{430080} t^9 + \frac{1}{40} t^6 + 3t^3\right) \tag{3.305}$$

$$\begin{aligned}
 &Var(v_3(t)) \\
 &= \frac{t^6(8531t^9 - 12840960t^6 + 7266631680t^3 + 871995801600)^2}{190094169502006640640000}
 \end{aligned} \tag{3.306}$$

elde edilir. Beklenen değer ve varyans verilen parametre değerleri için Matlab' de çizidrilirse aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 3.24. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değeri için $v_3(t)$ 'in beklenen değeri



Şekil 3.25. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değeri için $v_3(t)$ 'in varyans değeri

Örnek 3.6.5.3.

$$v''(t) = A - \frac{2}{A} v^2\left(\frac{t}{2}\right) \quad (3.307)$$

başlangıç koşulları $v(0) = A, v'(0) = 0$ olmak üzere $A \sim G(p, q)$, A geometrik dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere rastgele oransal gecikmeli diferensiyel denkleminin Sumudu VİM yöntemi ile yaklaşık analitik çözümünü ve olasılık karakteristiklerini elde ediniz.

Çözüm :

$$S[v''(t)] = \frac{v(u)}{u^2} - \frac{v(0)}{u^2} - \frac{v'(0)}{u} \quad (3.308)$$

(3.307) denkleminde Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$v_{n+1}(u) = v_n(u) + \lambda(u) \left[\frac{v(u)}{u^2} - \frac{v(0)}{u^2} - \frac{v'(0)}{u} - S \left(A - \frac{2}{A} v^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right] \quad (3.309)$$

(3.309) ifadesi elde edilir.

$$\lambda(u) = -u^2 \rightarrow \text{lagrange çarpanı} \quad (3.310)$$

elde edilir. Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + S^{-1} \left[u^2 \left[S \left(A - \frac{2}{A} v_n^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right] \right] \quad (3.311)$$

$$v_0(t) = A \quad (3.312)$$

ifadesi elde edilir. $n = 0$ için;

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v_0(t) + S^{-1} \left[u^2 \left[S \left(A - \frac{2}{A} v_0^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right] \right] \\ v_1(t) &= A + S^{-1} \left[u^2 \left[S \left(A - \frac{2}{A} v_0^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right] \right] \\ &= A + S^{-1} \left[u^2 \left[S \left(A - \frac{2}{A} A^2 \right) \right] \right] \\ &= A + S^{-1} [u^2 [-A]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A + S^{-1}[-Au^2] \\
&= A - \frac{At^2}{2!} \\
&= A \left(1 - \frac{t^2}{2!}\right)
\end{aligned}$$

$$v_1\left(\frac{t}{2}\right) = A \left(1 - \frac{t^2}{8}\right) \quad (3.313)$$

elde edilir. $n = 1$ için;

$$\begin{aligned}
v_2(t) &= v_1(t) + S^{-1} \left[u^2 \left[S \left[A - \frac{2}{A} v_1^2\left(\frac{t}{2}\right) \right] \right] \right] \\
&= A \left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) + S^{-1} \left[u^2 \left[S \left[A - \frac{2}{A} \left[A^2 \left(1 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{64}\right) \right] \right] \right] \right] \\
&= A \left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) + S^{-1} \left[u^2 \left[S \left[A - 2A \left(1 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{64}\right) \right] \right] \right] \\
&= A \left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) + S^{-1} \left[u^2 \left[S \left[-A + \frac{At^2}{4} - \frac{At^4}{64} \right] \right] \right] \\
&= A \left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) + S^{-1} \left[-Au^2 + \frac{Au^4 2!}{4} - \frac{Au^6 4!}{64} \right] \\
&= A \left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) + S^{-1} \left[-Au^2 + \frac{Au^4}{2} - \frac{3}{8} Au^6 \right] \\
v_2(t) &= A \left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) - \frac{At^2}{2!} + \frac{At^4}{2 \cdot 4!} - \frac{3A}{8} \frac{t^6}{6!}
\end{aligned}$$

$$v_2(t) = A - At^2 + \frac{At^4}{48} - \frac{A}{1920} t^6 \quad (3.314)$$

elde edilir. $X \sim G(p, q)$ geometrik dağılıma sahip rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{pe^t}{1 - qe^t} \quad (3.315)$$

Birinci moment ve varyansı

$$E[X] = \frac{1}{p}, Var[X] = \frac{q}{p^2} \quad (3.316)$$

dir (Feller, 1968). Bu sonuçlar kullanılarak,

$$\begin{aligned} E(v_2(t)) &= \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{48} - \frac{t^6}{1920}\right) E(A) \\ &= \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{48} - \frac{t^6}{1920}\right) \frac{1}{p} \end{aligned} \quad (3.317)$$

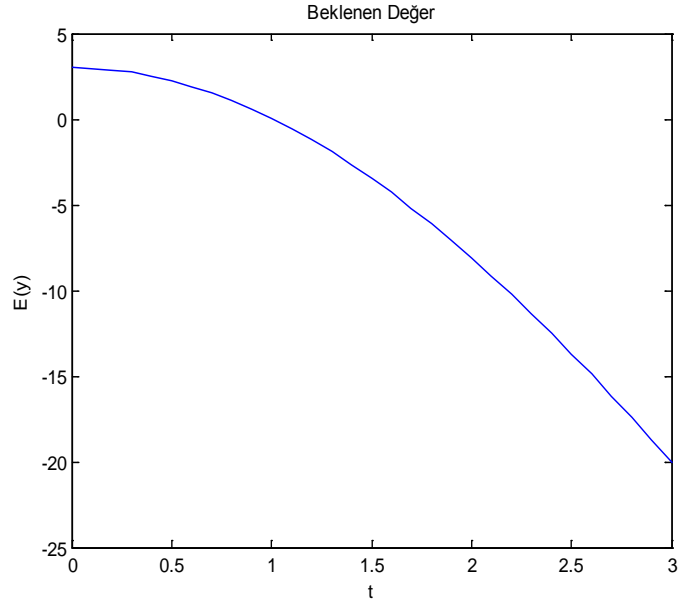
$$\begin{aligned} Var(v_2(t)) &= E(v_2(t)^2) - E(v_2(t))^2 \\ &= \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{48} - \frac{t^6}{1920}\right)^2 Var(A) \\ &= \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{48} - \frac{t^6}{1920}\right)^2 \frac{q}{p^2} \end{aligned} \quad (3.318)$$

(3.317) beklenen değer (3.317) varyans elde edilir. (3.317) beklenen değer ve (3.318) varyans $A \sim G(p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3})$ parametre değerleri için hesaplanırsa,

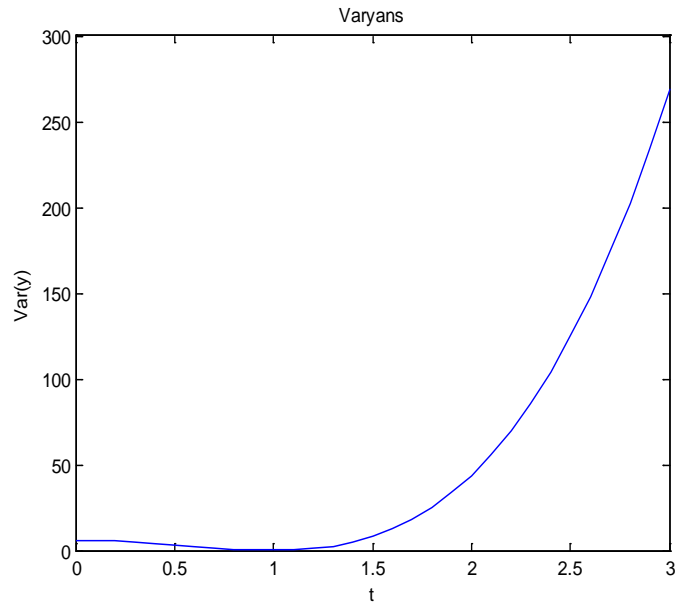
$$E(v_2(t)) = \left(3 - 3t^2 + \frac{t^4}{16} - \frac{t^6}{640}\right) \quad (3.319)$$

$$Var(v_2(t)) = 6 \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{48} - \frac{t^6}{1920}\right)^2 \quad (3.320)$$

elde edilir. Beklenen değer ve varyans, verilen paremetre değerleri için Matlab’ de izidirilirse aşağıdaki grafikler elde edilir.



şekil 3.26. $A \sim G(p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3})$ özel değeri için $v_2(t)$ ‘in beklenen değeri



şekil 3.27. $A \sim G(p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3})$ özel değeri için $v_2(t)$ ‘in varyans değeri

4.İRDELEME

Bu tez çalışmasından elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuca göre, deterministik gecikmeli diferansiyel denklemler ile rastgele gecikmeli diferansiyel denklemlerin uyumlu olduğu görülmektedir. Rastgele diferansiyel denklemler ile ilgili literatürde türkçe kaynağın çok az olduğu görülmektedir. Bu tez çalışması ile bu boşluk bir nebze de olsa doldurulacaktır. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılar için yol gösterici olacağı düşünülmektedir. Son zamanlarda rastgele ve stokastik diferansiyel denklemler konuları yoğun bir şekilde araştırmacılar tarafından ele alınmaktadır.

5.ÖNERİLER

Bu çalışmada sabit ve oransal gecikmeli adi diferansiyel denklemler, rastgele hale dönüştürülerek olasılık karakteristikleri araştırılmıştır. Benzer şekilde değişken gecikmeli adi diferansiyel denklemlerde rastgele hale getirilerek araştırılabilir. Buna ilaveten gecikmeli Volterra ve Fredholm integral denklemlerde rastgele hale getirilerek incelenebilir. Ayrıca lineer ve lineer olmayan gecikmeli kısmi diferansiyel denklemler rastgele hale getirilerek olasılık karakteristikleri araştırılabilir. Lineer olmayan gecikmeli rastgele diferansiyel denklemler literatürde mevcut olan Homotopi Analiz ve Homotopi Perturbasyon yaklaşık analitik yöntemler kullanılarakta çözülebilirler.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada sabit ve oransal gecikmeli adi diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları ya da katsayıları, sürekli zamanlı olasılık dağılımları olan, düzgün, geometrik, normal, beta, üçgensel, laplace ve gamma dağılımlarından herhangi biri seçilerek denklemler rastgele hale dönüştürülmüşlerdir. Bu dönüştürülen denklemlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer ve varyansı hesaplanmıştır. Rastgele gecikmeli diferansiyel denklemleri çözmek için yaklaşık analitik çözüm yöntemlerinden literatürde en sık kullanılan DDY olan, varyasyonel iterasyon yöntemi ve sumudu dönüşüm yöntemlerinden faydalanılmıştır. Ayrıca lineer rastgele gecikmeli diferansiyel denklemleri çözmek için adımlar yöntemi kullanılmıştır. Lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemleri çözmek için ise hibrit yöntem olan Sumudu VIM yönteminden yararlanılmıştır. Buna ilaveten elde edilen çözümlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer ve varyans grafikleri MATLAB (2013a) ve MAPLE 13 paket programı yardımıyla çizdirilmiştir.

7. KAYNAKLAR

- Abassy, T.A., El-Tawil, M.A. ve El-Zoheiry, H., 2007. Exact Solutions of some Nonlinear Partial Differential Equations Using the Variational Iteration Method Linked With Laplace Transforms and the Pade Technique, Computers and Mathematics with Applications, 54, 940-954.
- Akdeniz, F., 2014. Olasılık ve İstatistik, Akademisyen Kitabevi, Ankara, 602s.
- Aksoy, Y. ve Pakdemirli, M., 2010. New Perturbation-Iteration Solutions for Bratu-Type Equations, Computers & Mathematics with Applications, 59, 8, 2802-2808.
- Aksoy, Y. ve Pakdemirli, M., 2016. Perturbation Iteration Method Solutions of a Nonlinear Fin Equation, AIP Conference Proceedings, AIP Publishing, 1738, 1.
- Aksoy, Y., Göktaş, Ü., Pakdemirli, M. ve Dolapçı, İ.T., 2016. Application of Perturbation-Iteration Method to Lotka-Volterra Equations, Alexandria Engineering Journal, 55, 2, 1661-1666.
- Aliyev, R., 2010. Stokastik Süreçler Teorisine Giriş, KTÜ Matbaası, Trabzon.
- Anakira, N.R., Alomari A.K. ve Hashim, I., 2013. Optimal Homotopy Asymptotic Method for Solving Delay Differential Equations, Mathematical Problems in Engineering, 2013, 498902.
- Asai, Y. ve Kloeden, P.E., 2019. Numerical Schemes for Ordinary Delay Differential Equations with Random Noise, Applied Mathematics and Computation, 347, 306-318.
- Asl, F.M. ve Ulsoy A.G., 2003. Analysis of a System of Linear Delay Differential Equations, Transactions-American Society of Mechanical Engineering Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 125, 2, 215-223.
- Bahşı, M.M., Çevik, M. ve Sezer, M., 2015. Orthoexponential Polynomial Solutions of Delay Pantograph Differential Equations with Residual Error Estimation, Applied Mathematics and Computation, 271, 11-21.
- Bahşı M.M. ve Çevik M., 2015. Numerical Solution of Pantograph-Type Delay Differential Equations Using Perturbation-Iteration Algorithms, Journal of Applied Mathematics, 2015, 139821.
- Bahşı, M.M. ve Çevik, M., 2017. Troesch Probleminin Perturbasyon İterasyon Yöntemi ile Analizi, XX. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 2017, Bursa, Türkiye, s. 722-726.
- Bahşı, M.M., 2019. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Perturbasyon-İterasyon Metodu ile Analizi. Doktora Tezi, Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa, 117s.

- Baker, C., Bocharov, G. ve Rihan, A., 1999. A Report on the Use of Delay Differential Equations in Numerical Modelling in the Biosciences. Numerical Analysis Report 343, Manchester Centre for Computational Mathematics, Department of Mathematics, Manchester.
- Becker, L.C., 2009. Constant Delay Differential Equations and the Method of Steps, Scientific Research Publishing.
- Belgacem, F.B.M., Karaballi, A.A. ve Kalla, S.L., 2003. Analytical Investigations of the Sumudu transform and Applications to Integral Production Equations, Mathematical Problems in Engineering, 3-4, 103-118.
- Belgacem, F.B.M. ve Karaballi, A.A., 2006. Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations and Applications, International Journal of Stochastic Analysis, 2006, 91083.
- Belgacem, F.B.M., 2006. Introducing and Analysing Deeper Sumudu Properties, Nonlinear Studies, 13, 1, 23-41.
- Berezansky, L. ve Braverman, E., 2020. Solution Estimates for Linear Differential Equations with Delay, Applied Mathematics and Computation, 372, 124962.
- Beuter, A., Glass, L., Mackey, M. ve Titcombe, M., 2003. Eds., Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine, Springer-Verlag, New York.
- Biazar, J. ve Ghanbari, B., 2012. The Homotopy Perturbation Method for Solving Neutral Functional-Differential Equations with Proportional Delays, Journal of King Saud University-Science, 2012, 24, 33-37.
- Bildik, N. ve Deniz, S., 2018a. Comparative Study between Optimal Homotopy Asymptotic Method and Perturbation-Iteration Technique for Different Types of Nonlinear Equations, Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 42, 647- 654.
- Bildik, N. ve Deniz, S., 2018b. Solving the Burgers and Regularized Long Wave Equations Using the New Perturbation Iteration Technique, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 34, 5, 1489-1501.
- Bildik, N. ve Deniz, S., 2020. New Approximate Solutions to the Nonlinear Klein-Gordon Equations Using Perturbation Iteration Techniques, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, 13, 3, 503-518.
- Bocharov, G.A. ve Rihan, F.A., 2000. Numerical Modelling in Biosciences Using Delay Differential Equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 125, 1-2, 183-199.
- Boucekkine, R., Licandro, O. ve Paul, C., 1997. Differential-Difference Equations in Economics: On the Numerical Solutions of Vintage Capital Growth Models, Journal of Economic Dynamics and Control, 21, 2-3, 347-362.

- Britton, N.F., 2003. Essential Mathematical Biology, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, London,.
- Burova, I.G. ve Abdurakhimova, A.S., 2015. Third Order Splines and Solution of Delay Differential Equation, IFAC-PapersOnLine, 48-11, 883-886.
- Caberlin, M.D. 2002. Stiff Ordinary and Delay Differential Equations in Biological Systems, Phd. thesis, McGill University, Department of Mathematics and Statistics, Montreal.
- Çelenkli, S. 2019. Genelleştirilmiş Tümör-Bağışıklık Gözetimi Modelinin Deterministik ve Stokastik Analizi. Yüksek Lisans Tezi, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gümüşhane, 118s.
- Çevik, M., Bahşı, M.M. ve Sezer, M., 2014. Solution of the Delayed Single Degree of Freedom System Equation by Exponential Matrix Method, Applied Mathematics and Computation, 242, 444-453.
- Çapar, U., 2013. Ölçü Kuramsal Olasılık ve Stokastik Kalkülüse Giriş, ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş ODTÜ yayıncılık, Çankaya/Ankara, 410s.
- Dehghan, M. ve Salehi, R., 2010. Solution for a Nonlinear Time-Delay Model in Biology Via Semi-Analytical Approaches, Computer Physics Computations, 181, 7, 1255-1265.
- Dolapçı İ.T., Şenol M. ve Pakdemirli M., 2013. New Perturbation Iteration Solutions for Fredholm and Volterra Integral Equations, Journal Applied Mathematics, 2013, 682537.
- Eugene, N., Lee, C. ve Femoye, F., 2002. Beta-Normal Distribution and Its Applications, Communications in Statistics-Theory and Methods, 31, 4, 497-512.
- Elbeleze, A.A., Kılıçman, A. ve Taib, B.M., 2012. Application of Homotopy Perturbation and Variational Iteration Methods for Fredholm Integro Differential Equation of Fractional Order, Advanced Theoretical and Applied Studies of Fractional Differential Equations, 2012, 763139.
- Elbeleze, A.A., Kılıçman, A. ve Taib, B.M., 2013. Fractional Variational Iteration Method and Its Application to Fractional Partial Differential Equation, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, 2013, 543848.
- Elsaid, A., 2010. The Variational Iteration Method for Solving Riesz Fractional Partial Differential Equations, Computer and Mathematics with Applications, 2010, 60, 1940-1947.
- Erneux, T., 2009. Applied Delay Differential Equations, Springer, Brüksel, 204p.

- Evans, D.J. ve Raslan K.R., 2005. The Adomian Decomposition Method for Solving Delay Differential Equations, International Journal of Computer Mathematics, 82, 1, 49-54.
- Erdem, K. ve Yalçınbaş S., 2012. Bernoulli Polynomial Approach to High-Order Linear Differential-Difference Equations, AIP Conference Proceedings, 1479 ,360-364.
- Erman, S., 2016. Durum Değişkenine Bağlı Gecikme Terimi İçeren Diferansiyel Denklemlerinin Analizi. Doktora Tezi, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli, 75s.
- Epstein, I.R. ve Pojman, J.A., 1998. An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics, Oxford University Press, Oxford.
- Fall, C.P., Marland, E.S., Wagner, J.M. ve Tyson, J.J., 2002. Eds. Computational Cell Biology, Springer-Verlag, New York, 468p.
- Fakharzadeh J., Hesamaedini E. ve Soleimanivareki M., 2015. Multi-step Stochastic Differential Transformation Method for Solving Some Class of Random Differential Equations, Applied Mathematics in Engineering, Management and Technology, 3, 3, 115-123.
- Fabiano, R.H. ve Payne, C., 2018. Spline Approximation for Systems of Linear Neutral Delay-Differential Equations, Applied Mathematics and Computation, 338, 789-808.
- Fowler, A.C., 1997. Mathematical Models in the Applied Sciences, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 402p.
- Fowler, A.C., 1982. An Asymptotic Analysis of the Delayed Logistic Equation when the Delay is Large, IMA J. of Appl. Mathematics, 28, 41-49.
- Fowler, A.C., 2005. Asymptotic Methods for Delay Equations, J. Eng. Math., 53, 271-290.
- Feller W., 1968. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Wiley and Sons, New York.
- Stépán, G., 1989. Retarded Dynamical Systems, Longman, London.
- Ganji, D.D., Karimpour, S. ve Ganji S., 2009. He's Iteration Perturbation Method to Nonlinear Oscillations of Mechanical Systems with Single-Degree-of Freedom, International Journal of the Modern Physics B, 23, 11, 2469-2477.
- Gökmen, E. ve Sezer, M., 2013. Taylor Collocation Method for Systems of High-Order Linear Differential-Difference Equations with Variable Coefficients, Ain Shams Engineering Journal, 4, 1, 117-125.

- Gülsu, M. ve Sezer, M., 2005. A method for the Approximate Solution of the High-Order Linear Difference Equations in Terms of Taylor Polynomials, International Journal of Computer Mathematics, 82, 5, 629-642.
- Gülsu, M. ve Sezer, M., 2006. A Taylor Polynomial Approach for Solving Differential Difference Equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 186, 2, 349-364.
- Gülsu, M., Sezer, M. ve Tanay, B., 2006. A Matrix Method for Solving High-Order Linear Difference Equations with Mixed Argument Using Hybrid Legendre and Taylor Polynomials, Journal of the Franklin Institute, 343, 6, 647-659.
- Gülsu, M., Yalman, H., Öztürk, Y. ve Sezer, M., 2011. A New Hermite Collocation Method for Solving Differential Difference Equations, Applications and Applied Mathematics, 6, 1, 116-129.
- Gülsu, M., Öztürk, Y. ve Sezer, M., 2012. A New Chebyshev Polynomial Approximation for Solving Delay Differential Equations, Journal of Difference Equations and Applications, 18, 6, 1043-1065.
- Golmankhaneh A.K., Porghoveh N.A. ve Baleanu D., 2013. Mean Square Solutions of Second-Order Random Differential Equations by Using Homotopy Analysis Method, Romanian Reports in Physics, 65, 2, 350-362.
- He, J.H., 1998. Approximate Analytical Solution for Seepage Flow with Fractional Derivatives in Porous Media, J. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 167, 1-2, 57-58.
- He, J.H., 1999. Variational Iteration Method-A Kind of Nonlinear Analytical Technique: Some Examples, International Journal of Nonlinear Mechanics, 34, 4, 699-708.
- He, J.H., 2001. Iteration Perturbation Method for Strongly Nonlinear Oscillations, Journal of Vibration Control, 7, 631-642.
- He, J.H., 2007. Variational Iteration Method Some Recent Results and New Interpretations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 207, 1, 3-17.
- He, J.H., Wu, G.C. ve Austin, F., 2010. The Variational Iteration Method which should be Followed, Nonl. Sci. Lett. A., 1, 1, 1-30.
- Hong, B. ve Lu, D., 2014. Modified Fractional Variational Iteration Method for Solving the Generalized Time-Space Fractional Schrödinger Equation, The Scientific World Journal, 2014, 964643, 6.
- Inokuti, M., Sekine, H. ve Mura, T., 1978. General Use of the Lagrange Multiplier in Non-Linear Mathematical Physics, Variational Method in the Mechanics of Solid, Pergamon Press, pp. 156-162, Oxford, UK.
- Inspurger, T. ve Stépán G., 2002. Semi-Discretization Method for Delayed Systems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 55, 5, 503-518.

- İbiş, B. ve Bayram, M., 2014. Analytical Approximate Solution of Time-Fractional Fornberg-Whitham Equation by the Fractional Variational Iteration Method, Alexandria engineering journal, 53, 4, 911-915.
- Jafari, H. ve Tajadodi, H., 2010. He's Variational Iteration Method for Solving Fractional Riccati Differential Equation, International journal of differential equations, 2010, 764738, 1-8.
- Karaaslan, G., 2019. Biyokimyasal Reaksiyon Modelinin Rastgele Özelliklerinin Farklı Olasılık Dağılımları ile İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 67s.
- Kadem, A. ve Kılıçman, A., 2012. The Approximate Solution of Fractional Fredholm Integro-differential Equations by Variational Iteration and Homotopy Perturbation Methods, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, 2012, 486193, 10p.
- Kermack, W.O. ve McKendrick, A.G., 1927. Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics (Part I), Proc. Roy. Soc., A, 115, 772, 700-721.
- Khudair, A.R., Ameen, A.A. ve Khalaf, S.L., 2011a. Mean Square Solutions of Second-Order Random Differential Equations by Using Adomian Decomposition Method, Applied Mathematical Sciences, 5, 51, 2521-2535.
- Khudair, A.R., Ameen, A.A. ve Khalaf, S.L., 2011b. Mean Square Solutions of Second-Order Random Differential Equations by Using Variational Iteration Method, Applied Mathematical Sciences, 5, 51, 2505-2519.
- Khaniyev T., Ünver İ., Küçük Z. ve Kesemen T., 2017. Olasılık Kuramında Çözümlü Problemler, Nobel Akademik Yayıncılık, İstanbul.
- Kovacic, I., Richard, R. ve Sah, S.M., 2018. Mathieu's Equation and Its Generalizations: Overview of Stability Charts and their Features, Applied Mechanics Reviews, 70, 2, 1-22.
- Komori, Y., Eremin, A. ve Burrage K., 2019. S-ROCK Methods for Stochastic Delay Differential Equations with One Fixed Delay, Journal of Computational and Applied Mathematics 353, 345-354.
- Kolmogorov, A.N., 1956. Foundations of the Theory of Probability, Chelsea Publishing Co., New York.
- Kuang, Y., 1993. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, Mathematics in Science and Engineering, 191, Academic Press, New York.
- Kurt, A., Yalçınbaş, S. ve Sezer, M., 2013. Fibonacci Collocation Method or Solving Linear Differential-Difference Equations, Mathematical and Computational Applications, 18, 3, 448-458.

- Küçük, S., 2017. Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir, 36s.
- Lenz, S.M., Schlöder, J.P. ve Bock, H.G., 2014. Numerical Computation of Derivatives in Systems of Delay Differential Equations, Mathematics and Computers in Simulation, 96, 124-156.
- Li, X. ve Yuan, X., 2012. Quasi-Periodic Solutions for Perturbed Autonomous Delay Differential Equations, Xiaoping Yuan, J. of Differential Equations, 252, 6, 3752-3796.
- Liu, H., Xiao A. ve Su L., 2013. Convergence of Variational Iteration Method for Second Order Delay Differential Equations, Journal of Applied Mathematics, 2013, 634670.
- Liu, B., Zhou, X. ve Du Q., 2015. Differential Transform Method for Some Delay Differential Equations, Scientific Research Publishing, Applied Mathematics, 6, 3, 585-593.
- Liu, X. ve Zeng, Y.M., 2018. Linear Multistep Methods for Impulsive Delay Differential Equations, Applied Mathematics and Computation, 321, 555-563.
- Mitchell, D.G. ve Klyde, D.H., 2006. Identifying a PIO Signature - New Techniques Applied to An Old Problem, AIAA Atm. Flight Mech. Conf., Keystone, Colorado.
- Marinca, V. ve Herisanu N., 2006. A Modified Iteration Perturbation Method for some Nonlinear Oscillation Problems, Acta Mechanica, 184, 231-242.
- Merdan, M., 2010. A New Application of Modified Differential Transformation Method for Modelling the Pollution of a System of Lakes, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 11, 2, 27-40.
- Merdan, M., 2012a. On the Solutions Fractional Riccati Differential Equation with Modified Riemann-Liouville Derivative, International Journal of Differential Equations, 2012, 346089.
- Merdan, M., Gökdoğan, A., Yıldırım, A. ve Mohyud-Din, S.T., 2012b. Numerical Simulation of Fractional Fornberg-Whitham Equation by Differential Transformation Method, Abstract and Applied Analysis, 2012, 965367.
- Mickens, R.E., 2006. Iteration Method Solutions for Conservative and Limit-Cycle $x^{1/3}$ Force Oscillators, Journal of Sound and Vibrations, 292, 3-5, 964-968.
- Molliq, R.Y., Noorani, M.S.M., Ahmad, R.R. ve Alomari, A.K., 2011. Modified Step Variational Iteration Method for Solving Fractional Biochemical Reaction Model, International journal of differential equations, 2011, 514384.

- Molliq, R.Y. ve Noorani, M.S.M., 2012. Solving the Fractional Rosenau-Hyman Equation Via Variational Iteration Method and Homotopy Perturbation Method, International Journal of Differential Equations, 2012, 472030.
- Momani, S., Odibat, Z. ve Alawneh, A., 2008. Variational Iteration Method for Solving the Space and Time Fractional KdV Equation, Wiley Periodicals Inc., Numerical Methods for Partial Differential Eq., 24, 262-271.
- Murray, J.D., 2002. Mathematical Biology I: An Introduction, Inter. Appl. Mathematics, 17, Springer, Berlin, Third Edition.
- MacDonald, N., 1989. Biological Delay Systems: Linear Stability Theory, Cambridge University Press, New York.
- Nasırova T., Khaniyev T., Yapar C., Ünver İ. ve Küçük Z., 2009. Olasılık, KTÜ Matbaası, Trabzon.
- Nayfeh, A. H., 1981. Introduction to Perturbation Techniques. John Wiley and Sons, New York, USA, 533.
- Neamah, A.A., 2014. Local Fractional Variational Iteration Method for Solving Volterra Integro-Differential Equations Within Local Fractional Operators, Journal of mathematics and statistic, 10, 3, 401-407.
- Odibat, Z., Bertelle, C., Aziz-Alaoui, M. ve Duchamp, G., 2010. A Multi-Step Differential Transform Method and Application to Non-Chaotic or Chaotic Systems, Computers & Mathematics with Applications, 59, 4, 1462-1472.
- Öziş T. ve Yıldırım A., 2009, Generating the Periodic Solutions for Forcing Van Der Pol Oscillators by the Iteration Perturbation Method, Nonlinear Analysis: Real World Application, 10, 4, 1984-1989.
- Pakdemirli, M., Karahan, M.M.F. ve Boyacı, H., 2009. A New Perturbation Algorithm with Better Convergence Properties: Multiple Scales Lindstedt Poincare Method, Mathematical and Computational Applications, 14, 1, 31-44.
- Pakdemirli M., 2013. Review of the New Perturbation-Iteration Method, Mathematical and Computational Applications, 18, 3, 139-151.
- Pakdemirli, M. ve Boyacı H., 2007. Generation of Root Finding Algorithms Via Perturbation Theory and some Formulas, Applied Mathematics and Computation, 184, 2, 783-788.
- Pakdemirli, M., Boyacı, H. ve Yurtsever H.A., 2007, Perturbative Derivation and Comparisons of Root-Finding Algorithms with Fourth Order Derivatives, Mathematical and Computational Applications, 12, 2, 117-124.
- Pakdemirli, M., Boyacı H. ve Yurtsever H.A., 2008. A Root Finding Algorithm with Fifth Order Derivatives, Mathematical and Computational Applications, 13, 2, 123-128.

- Goswami, P. ve Alqahtani, R.T., 2016. Solutions of Fractional Diferential Equations by Sumudu Transform and Variational Iteration Method, Journal of Nonlinear Science and Applications, 9, 4, 1944-1951.
- Saeed, R.K. ve Rahman, B.M., 2010. Adomian Decomposition Method for Solving System of Delay Differential Equations, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 4, 8, 3613-3621.
- Sakar, M.G., Erdogan, F. ve Yıldırım, A., 2012. Variational Iteration Method for the Time-Fractional Fornberg-Whitham Equation, Computers and Mathematics with Applications, 63, 9, 1382–1388.
- Shampine, L.F. ve Thompson S., 2009. Numerical Solution of Delay Differential Equations, Delay Differential Equations, Ed.: Gillsinn, D. E., Nagy, T K., Balachandran B, Springer, US, 1-27.
- Shakeri, F. ve Dehghan, M., 2008. Solution of Delay Differential Equations Via a Homotopy Perturbation Method, Mathematical and Computer Modelling, 48, 3-4, 486-498.
- Şencan, H., 2001. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, 65s.
- Ünlü, C., 2014. Kesirli Türevli Diferansiyel Denklemler ve Çözüm Yöntemleri. Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 87s.
- Tatari, M. ve Dehghan, M., 2007. On the Convergence of He's Variational Iteration Method, Journal of computational and applied mathematics, 207, 1, 121-128.
- Vanani, S. K. ve Aminataei, A., 2008. On the Numerical Solution of Neutral Delay Differential Equations Using Multiquadric Approximation Scheme, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 45, 4, 663-670.
- Vilu, S., Ahmad, R. R. ve Din, U. K. S., 2019. Variational Iteration Method and Sumudu Transform for Solving Delay Differential Equation, Hindawi Internal Journal of Differential Equations, 2019, 6306120.
- Wang, H. ve Hu H., 2003. Remarks on the Perturbation Methods in Solving the Second Order Delay Differential Equations, Nonlinear Dynamics, 33, 4, 379-398.
- Wang, Z. Q. ve Wang, L.L., 2010. A Legendre-Gauss Collocation Method for Nonlinear Delay Differential Equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems-B, 13, 3, 685-708.
- Watugala, G.K., 1993. Sumudu Transform: A New Integral Transform to Solve Differential Equations and Control Engineering Problems, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24, 1, 35-43.

- Wu, G.C. ve Lee, E.W.M., 2010. Fractional Variational Iteration Method and Its Application, Physics Letter A, 374, 25, 2506-2509.
- Wu, G.C. ve Baleanu, D., 2013. Variational Iteration Method for Fractional Calculus-A Universal Approach by Laplace Transform, Advances in Difference Equations, 18, 1-9.
- Winston E., 1970. Uniqueness of the Zero Solution for Delay Differential Equations With State Dependence, J. Differential Equations, 7, 2, 395-405.
- Xu, X., Hu, H.Y. ve Wang H.L., 2007. Stability, Bifurcation and Chaos of Delayed Oscillator with Negative Damping and Delayed Feedback Control, Nonlinear Dynamics, 49, 117-129.
- Yu, Z.H., 2008. Variational Iteration Method for Solving the Multi-Pantograph Delay Equation, Physics Letters A, 372, 43, 6475-6479.
- Yüzbaşı, Ş., 2011. A Numerical Approach for Solving the High-Order Linear Singular Differential-Difference Equations. Computers & Mathematics with Applications, 62, 5, 2289-2303.
- Yüzbaşı, Ş., 2012. On the Solutions of a System of Linear Retarded and Advanced Differential Equations by the Bessel Collocation Approximation, Computers & Mathematics with Applications, 63, 10, 1442-1455.
- Yüzbaşı, Ş. ve Sezer, M., 2013a. Exponential Collocation Method for Solutions of Singularly Perturbed Delay Differential Equations, Abstract and Applied Analysis, 2013, 493204.
- Yüzbaşı, Ş. ve Sezer, M., 2013b. An Exponential Approximation for Solutions of Generalized Pantograph-Delay Differential Equations, Applied Mathematical Modelling, 37, 22, 9160-9173.
- Yüzbaşı, Ş., Gök, E. ve Sezer, M., 2014. Laguerre Matrix Method with the Residual Error Estimation for Solutions of a Class of Delay Differential equations, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 37, 4, 453-463.
- Yüzbaşı, Ş. ve Sezer, M., 2015. Shifted Legendre Approximation with the Residual Correction to Solve Pantograph-Delay Type Differential Equations, Applied Mathematical Modelling, 39, 21, 6529-6542.
- Yıldız, V., Pakdemirli, M. ve Aksoy, Y., 2016. Parallel Plate Flow of a Third-Grade Fluid and a Newtonian Fluid with Variable Viscosity, Zeitschrift für Naturforschung A, 71, 7, 595-606.

ÖZGEÇMİŞ

Abdullah AYDEMİR 1988 yılında Yozgat'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul/Üsküdar Lütfi Erçin İlköğretim okulunda ve lise öğrenimini Beylerbeyi Hacı Sabancı Lisesinde tamamladı. 2017 yılında Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümünden mezun oldu. 2017 yılında Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünden Matematik Mühendisliği alanında Yüksek Lisansa başlamıştır.

