



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**BASİTLEŞTİRİLMİŞ NEUTROSOPHİC ÇARPIMSAL KÜMELER ve KARAR
VERME METOTLARI**

DOKTORA TEZİ

Ali KÖSEOĞLU

ARALIK 2019
GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BASİTLEŞTİRİLMİŞ NEUTROSOPHİC ÇARPIMSAL KÜMELER ve KARAR
VERME METOTLARI

DOKTORA TEZİ

Ali KÖSEOĞLU

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

“Matematik Anabilim Dalı”

Doktora Programında Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12/12/2019

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 25/12/2019

ARALIK 2019



KABUL ve ONAY



Doç. Dr. Mehmet MERDAN danışmanlığında **Ali KÖSEOĞLU** tarafından hazırlanan **“BASİTLEŞTİRİLMİŞ NEUTROSOPHİC ÇARPIMSAL KÜMELER VE KARAR VERME METOTLARI”** isimli bu çalışma jürimiz tarafından Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **MATEMATİK** Anabilim Dalı’nda Doktora Tezi olarak Oy Birliği / Oy Çokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan

.....
Prof. Dr. Selçuk Han AYDIN

Üye (Danışman)

.....
Doç. Dr. Mehmet MERDAN

Üye

.....
Doç. Dr. Rıdvan ŞAHİN

Üye

.....
Dr. Öğr. Üyesi Onur ARAZ

Üye

.....
Dr. Öğr. Üyesi Pelin ŞENEL

ONAY

Bu tez 26/12/2019 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Ferkan SİPAHİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum "Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal Kümeler ve Karar Verme Metotları" isimli tez çalışmada; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim 26/12/2019



Ali KÖSEOĞLU

ÖZET
DOKTORA TEZİ

**BASİTLEŞTİRİLMİŞ NEUTROSOPHİC ÇARPIMSAL KÜMELER VE KARAR
VERME METOTLARI**

Ali KÖSEOĞLU

Gümüşhane Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet MERDAN

2019, 78 Sayfa

Bu çalışmanın amacı literatürde var olan sezgisel çarpımsal kümeleri neutrosophic kümelere genelleyerek basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal kümeleri tanımlamak ve tanımlanan bu kümeleri çok kriterli karar verme problemlerine uygulamaktır.

Bulanık kümeler, sezgisel bulanık kümeler ve neutrosophic kümeler belirsiz ve yetersiz bilgi içeren problemlerin çözümünde sıklıkla kullanılan kavramlardır. Bu kümelerin karakteristik fonksiyonlarının görüntüsü $[0, 1]$ aralığında tanımlanmıştır. Bu aralık, problem bilgileri sayısal değerlere atanırken düzgün dağılımlı ve simetrik olarak ölçeklendirilmektedir. Fakat günlük hayatta karşılaşılan problemler, düzgün dağılmayan ve simetrik olmayan bir biçimde belirlenmesi gereken bilgiler de içermektedir. Bu tip bilgileri günlük hayat problemlerine uygulayabilmek için ise problem bilgilerini simetrik olmayan

ve düzgün dağılmayan $\left[\frac{1}{9}, 9\right]$ aralığında değerlendiren çarpımsal tercih bağıntıları tanımlanmıştır. Daha sonra bu bağıntılar, sezgisel çarpımsal tercih bağıntılarına (SÇTB) genellenerek sezgisel çarpımsal küme (SÇK) kavramı tanımlanmıştır. SÇK gerçek hayat problemlerine uygulanabilir olsa da kümenin tereddüt derecesinin üyelik ve non-üyelik derecelerine bağlı olması, bu problemlerdeki değerlendirme bilgilerini sağlayan karar vericileri (KV) kısıtlamaktadır. Bu durumun üstesinden gelebilmek için bu çalışmada SÇK, basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal kümeye (BNÇK) genelleştirilmiştir. Bunu yapmak için ilk olarak BNÇK'ler ile onların bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca, basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal sayı (BNÇS) kavramı tanımlanarak, temel cebirsel işlemleri sunulmuştur. Daha sonra BNÇS işlemleri kullanılarak uzaklık ölçüleri ve ortalama operatörleri tanımlanmıştır. Önerilen BNÇK yaklaşımının çok kriterli karar verme (ÇKKV) problemlerindeki etkisini göstermek için BNÇS'ler TODIM metoduna uygulanarak BNÇ-TODIM metodu geliştirilmiştir. Ayrıca, ÇKKV problemlerinde kriter ağırlığını belirleyen için su dolum teorisi tabanlı bir metot sunulmuştur. Son olarak, tanımlanan kümenin SÇK'ye üstünlüğünü göstermek için sayısal bir örnek verilmiş, SÇK'ler kullanılarak bir karşılaştırma analizi yapılmış ve bütün sonuçlar detaylı bir şekilde yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal kümeler, Basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal sayılar, Uzaklık ölçüsü, Ortalama operatörleri, TODIM metodu

ABSTRACT
PHD THESIS

**SIMPLIFIED NEUTROSOPHIC MULTIPLICATIVE SETS and DECISION
MAKING METHODS**

Ali KÖSEOĞLU

Gümüşhane University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet MERDAN

2019, 78 Pages

The aim of this study is to define the simplified neutrosophic multiplicative sets by generalizing intuitionistic multiplicative sets to neutrosophic sets and to apply these sets to multicriteria decision making problems.

Fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and neutrosophic sets are frequently used concepts in solving problem that contain uncertain and incomplete information. The range of the characteristic functions of these sets is defined in the interval of $[0,1]$. This interval is scaled uniformly and symmetrically while assigning the problem information to numerical values. However, the problems encountered in real life also include information that must be taken into account as non-symmetrical and non-uniformly. In order to apply this type of information to real life problems, multiplicative preference relations are defined to evaluate

problem information in the interval of $\left[\frac{1}{9}, 9\right]$ which is an unsymmetrical and non-uniform interval. Then, these relations are generalized to intuitionistic multiplicative preference relations (IMPR) and the concept of intuitionistic multiplicative set (IMS) is defined. Although the IMS can be applied to real-life problems, since the hesitant information of these sets depends on membership and non-membership information, it restricts decision-makers (DMs) that provide the assessment information on these problems. To overcome this situation, in this work, the IMS is generalized to the simplified neutrosophic multiplicative set (SNMS). In order to do this, the SNMSs and some of their properties are given first. In addition, the concept of simplified neutrosophic multiplicative number (SNMN) is defined and basic algebraic operations are presented. Then, the distance measures and the aggregation operators are defined by using SNMN operations. In order to show the effect of the proposed SNMS approach on multi-criteria decision making problems (MCDM), the SNM-TODIM method is developed by applying SNMNs to the TODIM method. Furthermore, a method based on water filling theory is presented to determine the criterion weights in such problems. Finally, a numerical example is given to demonstrate the superiority of the defined set over the IMS, a comparison analysis is performed using IMS and all results are interpreted in detail.

Keywords: Simplified neutrosophic multiplicative sets, Simplified neutrosophic multiplicative numbers, Distance measure, Aggregation operators, TODIM method

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak hazırlanmıştır. Bu tez çalışmanın hazırlanma süreci boyunca fikirlerini ve yönlendirmelerini esirgemeyen, her konuda bana rehberlik eden danışman hocam sayın Doç. Dr. Mehmet MERDAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Doktora eğitimim boyunca bana yol gösteren, değerli görüş ve tavsiyeleri ile tarifi edilemez derecede katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocam sayın Doç. Dr. Rıdvan ŞAHİN'e en içten saygı ve minnetlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam boyunca her konuda desteklerini aldığım tez izleme jüri üyesi hocam sayın Dr. Öğr. Üye. Onur ARAZ'a teşekkür ederim.

Eğitim hayatımın her aşamasında maddi ve manevi desteklerini arkamda hissettiğim aileme, arkadaşlarıma, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Matematik Bölümündeki mesai arkadaşlarıma, özellikle doktora süresince hiçbir zaman yardımını esirgemeyen değerli arkadaşım Zafer BEKİRYAZICI'ya teşekkür ederim. Lisansüstü eğitimimin bütün aşamalarında yanımda olan ve beni hiç yalnız bırakmayan, her daim desteğini ve sevgisini derinden hissettiğim sevgili eşim Duygu KÖSEOĞLU'na ve oğlum Hüsnü Kağan KÖSEOĞLU'na sonsuz teşekkür ederim.

Ali KÖSEOĞLU

Gümüşhane, 2019

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET	IV
ABSTRACT	VI
TEŞEKKÜR	VIII
İÇİNDEKİLER	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
TABLolar DİZİNİ	XI
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Temel Kavramlar.....	7
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	15
2.1. Sezgisel Çarpımsal Kümeler ve Sezgisel Çarpımsal Sayılar	15
2.2. Sezgisel Çarpımsal Ortalama Operatörleri	19
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	21
3.1. Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal Kümeler, Sayılar ve Uzaklık	21
3.2. Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal Ortalama Operatörleri	37
3.3. Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal TODIM Metodu.....	46
3.3.1. Su Dolum Algoritması ile Kriter Ağırlığı Belirlenmesi	50
3.3.2. Önerilen TODIM Metodu	55
3.3.3. Sayısal Örnek	59
3.3.4. Azaltma Çarpanının Etkisi ve Karşılaştırma Analizi	61
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	67
5. KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1. $\lambda = [1,10]$ için BNÇ uzaklık değerleri	35
Şekil 3.2. $\lambda = [1,100]$ için BNÇ uzaklık değerleri	35
Şekil 3.3. $\lambda \in [1,100]$ için d_{WG} ve d_{IMS} değerlerinin kıyaslanması	36
Şekil 3.4. Beklenti teorisinin değer fonksiyonu	47
Şekil 3.5. Su dolum teorisinin grafik olarak gösterimi	51
Şekil 3.6. BNÇ-TODIM metodu akış şeması.....	58
Şekil 3.7. Alternatiflerin θ 'ya bağlı bar grafiği.....	62
Şekil 3.8. Alternatiflerin θ 'ya bağlı global değerleri.....	63
Şekil 3.9. SÇS ile alternatiflerin θ 'ya göre global değerleri.....	65

TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1.1. [1/9-9] Saaty ölçüsü ile [0-1] ölçüsünün kıyaslanması (Xia vd., 2013).....	6
Tablo 1.2. Alternatiflerin bulanık tercih dereceleri	8
Tablo 1.3. Alternatiflerin sezgisel bulanık tercih dereceleri	10
Tablo 1.4. Alternatiflerin neutrosophic tercih dereceleri	13
Tablo 1.5. Alternatiflerin çarpımsal tercih dereceleri	14
Tablo 2.1. Alternatiflerin sezgisel çarpımsal tercih dereceleri	16
Tablo 3.1. Alternatiflerin global değeri.....	61
Tablo 3.2. Alternatiflerin θ 'ya göre değerleri	62
Tablo 3.3. SÇS'ler ile alternatiflerin global değeri.....	64
Tablo 3.4. SÇS ile alternatiflerin θ 'ya göre değerleri	64
Tablo 3.5. BNÇ-TODIM ve SÇS'ler ile TODIM metodunun θ kıyaslaması	65

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

AHP	: Analitik Hiyerarşi Süreci.
ADNK	: Aralık Değerli Neutrosophic Küme.
BNAAO	: Basitleştirilmiş Neutrosophic Ağırlıklı Aritmetik Ortalama.
BNÇAAO	: Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal Ağırlıklı Aritmetik Ortalama.
BNÇAGO	: Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal Ağırlıklı Geometrik Ortalama.
BNÇAO	: Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal Aritmetik Ortalama.
BNÇGO	: Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal Geometrik Ortalama.
BNÇK	: Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal Küme.
BNÇS	: Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal Sayı.
BNK	: Basitleştirilmiş Neutrosophic Küme
ÇKGKV	: Çok Kriterli Grup Karar Verme.
ÇKKV	: Çok Kriterli Karar Verme.
COPRAS	: Complex Proportional Assessment.
ELECTRE	: Elimination Et Choix Traduisant la Réalité.
MultiMOORA	: The Multi-Objective Optimization by Ratio Analysis plus Full Multiplicative Form.
PROMETHE	: Preference Ranking Organization Method.
SBK	: Sezgisel Bulanık Küme.
SÇK	: Sezgisel Çarpımsal Küme.
SÇTB	: Sezgisel Çarpımsal Tercih Bağıntıları.
TDNK	: Tek Değerli Neutrosophic Küme
TODIM	: An Acronym In Portuguese For Iterative Multicriteria Decision Making.
TOPSIS	: Technique for Order Preference by Similarity to an Ideal Solution.
VIKOR	: Višekriterijumsko kompromisno rangiranje Resenje.
μ	: Üyelik fonksiyonu.
ν	: Non-üyelik fonksiyonu.
π	: Tereddüt fonksiyonu.
σ	: Çarpımsal Kümelerin Non-Üyelik Fonksiyonu.
τ	: Çarpımsal Kümelerin Tereddüt Fonksiyonu.

ρ	: Çarpımsal Kümelerin Üyelik Fonksiyonu.
$d(A, B)$: Uzaklık fonksiyonu.
$d_G(A, B)$: Genelleştirilmiş BNÇ Uzaklık Ölçüsü.
$d_H(A, B)$: BNÇ Hamming Uzaklık Ölçüsü.
$d_E(A, B)$: BNÇ Öklid Uzaklık Ölçüsü.
$d_{wG}(A, B)$: Genelleştirilmiş Ağırlıklı BNÇ Uzaklık Ölçüsü.
$d_{wH}(A, B)$: Normalleştirilmiş Ağırlıklı BNÇ Hamming Uzaklık Ölçüsü.
$d_{wE}(A, B)$: Normalleştirilmiş Ağırlıklı BNÇ Öklid Uzaklık Ölçüsü.
$d_{IMS}(A, B)$: Normalleştirilmiş Ağırlıklı Sezgisel Çarpım Uzaklık Ölçüsü
$\delta(A_i, A_j)$: A_i Alternatifinin A_j Alternatifine Olan Genel Baskınlık Skoru.
w	: Ağırlık Vektörü.
w_{cr}	: Göreceli Ağırlık.
$\Phi_c(A_i, A_j)$: c . Kriter Altında A_i Alternatifinin A_j Alternatifine Olan Kısmi Baskınlık Skoru.
θ	: Azaltma Çarpanı.
ξ_i	: i . Alternatifin Global Değeri.
α_i	: Kazanç.
P_i	: Alt Kanal i 'ye Tahsis Edilen Güç.
β_i	: Alt Kanal i 'nin Gürültü Farkı.
$\eta(\alpha)$: BNÇS α 'nın Normalleştirilmiş Skor Fonksiyonu.
ϕ	: Normalleştirilmiş BNÇ Ortalama.
ς	: BNÇS'lerin Standart Sapması.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Çok kriterli karar verme (ÇKKV) metotları yöneylem araştırmalarının en önemli alanlarından birisidir. Churchman vd. (1957) ile ellili yıllarda temelleri atılan bu konu, takip eden yıllarda büyük bir ilgiyle karşılanmış ve yoğun bir şekilde çalışılmaya başlanmıştır. Bu bilim dalı, belli sayıda alternatifi yine belli sayıda kriterlere göre inceleyerek, en iyi alternatifi seçmeye dayanır. Bir veya birden çok karar verici, alternatifleri kriterlere bağlı olarak değerlendirir ve her alternatife her bir kriter altında bir tercih değeri atayarak karar matrisi/matrisleri oluşturur. Bu matris/matrisler belli yöntemlerle değerlendirilerek alternatiflere karşılık gelen son değerler sıralanır ve en iyi alternatif bulunur. Bu süreç ÇKKV denir. Literatürde çok sayıda ÇKKV metodu olduğu bilinmesiyle beraber, günümüzde bu sayı hibrit metotlarla beraber katlanarak çoğalmıştır. Bu metotlardan en çok bilinenleri; AHP (Saaty, 1980), TOPSIS (Hwang ve Yoon, 1981), ELECTRE (Roy, 1968), PROMETHEE (Brans ve Vincke, 1985), VIKOR (S Opricovic, 1998), COPRAS (Zavadskas vd., 1994), MultiMOORA (Brauers ve Zavadskas, 2010) ve TODIM (Gomes ve Lima, 1991) metodudur. Bu çalışmalarda ortaya atılan metotlar birçok günlük hayat probleminde etkin olarak kullanılmaktadır. Tedarik zinciri (Wang vd., 2009) , stratejik planlama (Nasab ve Milani, 2012), yapı ve proje yönetimi (Zavadskas vd., 2012), ekonomi (Zavadskas ve Turskis, 2011), tıbbi teşhis (Uzoka vd., 2011) ve hava tahmini (Gong vd., 2011) gibi çalışmalar son yıllarda ÇKKV yöntemlerinin kullanıldığı bazı alanlardır.

Gerçek hayat problemleri, o günün şartlarının getirdiği çok karmaşık, göreceli ve belirsiz bilgi içermektedir. Klasik bir örnek olan “uzun insanlar” klasik mantığın kullanımının yetersiz kaldığı örneklerden biridir. Klasik küme kavramında bir insan ya uzundur ya da değildir. Ancak insanların boyunu değerlendirirken çok kısa, biraz kısa, orta boy, az uzun veya biraz uzun gibi birçok ifade vardır. Bu durumlar için karar verme metotlarında kullanılan klasik sayılar yani tek değerli sayılar ise bu belirsizlikleri ifade etmek için yetersiz kalmaktadır. Zadeh (1965), klasik kümeyi bulanık kümelerle genişleterek bu görecelilikleri ifade etmenin bir yolunu bulmuştur. Klasik kümede 0 veya 1 ile gösterilen aitlik derecesini $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlayarak, bir elemanın sonsuz aitlik derecesi almasına olanak sağlamıştır. Bunu klasik kümede bir X evrensel kümesi üzerinde bir A kümesi için matematiksel olarak $K_A: X \rightarrow \{0,1\}$ ile ifade edilen karakteristik fonksiyonunu,

$\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ olarak tanımlanan üyelik fonksiyonuna genişleterek yapmıştır. Yani bulanık küme teorisi, bir elemanın bir kümeye kısmi ait olmasına olanak verir. Böylece, “uzunlar” kümesi oluştururken içindeki elemanlar biraz uzun, uzun veya çok uzun gibi göreceli ifadelerin değerleri küme içinde yer alabilir.

Bulanık küme teorisinin literatürde bilindiği kadarıyla bulunan ilk uygulaması, 1974 yılında Mamdani (1974) tarafından buhar türbini tabanlı bir tesisatın bulanık mantık kullanılarak çalışmasını sağlayan bir şema kurulup, 1975 yılında bu şemayla bir deney yapılmasıdır (Mamdani ve Assilian, 1975). Bu uygulama bulanık kümelerin günlük hayatta karşılaşılan zorlukların çözümünde kullanılmasının yolunu açmıştır. Aynı zamanda ÇKKV yöntemlerinde de geniş bir kullanım alanı bulan bulanık kümeler, ilk olarak Saaty’nin AHP metodunun bulanıklaştırılmasına uygulanmıştır. Laarhoven ve Pedrycz (1983) üçgensel bulanık üyelik fonksiyonlarını kullanarak ilk bulanık AHP ortaya atmışlardır. Buckley (1985) AHP metodunu yamuk bulanık sayılar kullanarak bulanık AHP metoduna genişletmiştir. Chen ve Hwang (1992) bulanık TOPSIS metodunu, Montazer vd. (2009) bulanık ELECTRE III metodunu ve Goumas ile Lygerou (2000) bulanık PROMETHEE metodunu ortaya atmışlardır. Opricovic (2002) VIKOR metodunu bulanık sayıları kullanarak deprem sonrası sürdürülebilir restorasyon örneğine uygulamış, daha sonra karar verme problemlerinde bulanık uzlaşma çözümü adı altında bulanık VIKOR metodunu (Opricovic, 2007) vermiştir. Zavadskas ve Antucheviciene (2007) bulanık COPRAS metodunu, Brauers vd. (2011) bulanık MultiMOORA metodunu ve Krohling ve Souza (2012) bulanık TODIM metodunu literatüre katmışlardır. Kahraman vd. (2015) bulanık kümelerin ÇKKV problemlerinde kullanılmasıyla alakalı geniş bir literatür taraması yapmışlardır.

Atanassov (1986) bulanık kümelerde var olan kısmi aitlik olgusundan yola çıkarak, eğer bir eleman bir kümeye kısmi olarak ait olabiliyorsa, aynı elemanın aynı kümeye kısmi olarak ait olmama durumu da olması gerektiğini belirtmiştir. Bir A bulanık kümesinde üyelik derecesi $\mu_A(x)$ iken üye olmama derecesi $1 - \mu_A(x)$ olarak alınabilir. Bu durumun bir uygulaması olarak, 10 oturumlu bir oylamada 6 kabul ve 4 ret oyu çıkabilir. Yani, oylamanın kabulü için üyelik derecesi 0.6 iken reddi için de üye olmama derecesi 0.4’tür ve bu derecelerinin toplamı birdir. Fakat Atanassov bu oturumda 5 kabul ve 2 ret oyla beraber 3 de çekimser oy çıkması durumunda bulanık kümelerin bu örnekteki gibi problemlerde kullanımının yetersiz kalacağını belirtmiştir (Atanassov, 1999). Böylece, $1 - \mu_A(x)$ üye olmama derecesinin yerine, $\nu_A: X \rightarrow [0,1]$ non-üyelik fonksiyonu olmak üzere bu ikilinin

toplamlarını $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ aralığında alarak bulanık kümenin bir genellemesi olan sezgisel bulanık kümeyi (SBK) tanımlamıştır. Böylece bulanık küme ile yeterli seviyede ifade edilemeyen problemlerde, sezgisel bulanık küme daha hassas bir çözüm yolu ortaya koymuştur. $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) < 1$ olduğu durumlarda, küme tanımında direkt olarak verilmeyen fakat literatürdeki uygulamalarda var olan tereddüt derecesi $\pi_A(x) = 1 - (\mu_A(x) + \nu_A(x))$ olarak tanımlanır. Bir önceki problemde $\mu_A = 0.5, \nu_A = 0.2$ iken $\pi_A = 0.3$ 'tür. Bu sebeple sezgisel bulanık kümeler bu gibi durumlarda gerçek hayat problemlerini daha doğru bir şekilde ifade etmektedir.

Bulanık kümelerin ÇKKV problemlerinde kullanılması, sezgisel bulanık kümelerin de bu problemlerde kullanabilmesine olanak sağlamıştır. AHP metodunun sezgisel bulanık kümelere uygulanması için birçok yaklaşım olsa da (Nirmala ve Uthra, 2016; Zhang vd., 2011) ÇKKV yöntemlerinde uygulanabilirliği açısından sezgisel bulanık AHP metodu ilk olarak Xu ve Liao (2014) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Boran vd. (2009) sezgisel bulanık TOPSIS metodunu, Vahdani vd. (2013) sezgisel bulanık ELECTRE metodunu, Liao ve Xu (2014) sezgisel bulanık PROMETHEE metodunu, Devi (2011) sezgisel bulanık VIKOR metodunu, Razavi Hajiagha vd. (2013) aralık değerli sezgisel bulanık COPRAS metodunu, Zavadskas vd. (2015) sezgisel bulanık MultiMOORA metodunu ve Krohling vd. (2013) sezgisel bulanık TODIM metodunu literatüre sunmuşlardır. Szmidt ve Kacprzyk (2000), Szmidt ve Kacprzyk (2002), De vd. (2001), Xu (2007b), Xu ve Yager (2006) ve Xu (2007d) SBK'lerin ÇKKV problemlerinde kullanımının önemli örneklerindendir.

Sezgisel bulanık kümelerdeki tereddüt derecesinin, üyelik ve non-üyelik derecesine bağlı olmasının karar vericilerin tercihlerini kısıtladığı düşünen Smarandache (1998) üyelik, non-üyelik ve tereddüt derecelerini bağımsızlaştırarak sezgisel bulanık kümenin bir genellemesi olan neutrosophic kümeyi tanımlamıştır. Böylece her bir fonksiyon 0 ile 1 arasında değer alabilir ve karar verici her bir fonksiyon için birbirinden bağımsız daha objektif değerler kullanabilir. Örneğin bir oylama sürecinde toplam oy verecek kişilerin %30'u "evet", %20'si "hayır", %40'ı "çekimser" oy kullanıp, %10'u da oylamadan çekilmiş olsun. Bu durum açık bir şekilde SBK'lerin kapsamının dışındadır ve SBK ile ifade edilmekte yetersiz kalmaktadır (Liu ve Tang, 2016). Çünkü $\mu_A = 0.3$ ve $\nu_A = 0.2$ iken $\pi_A = 0.5$ olmak zorundadır ve çekimser oy kullanan ile oylamadan çekilen kişilerin problem değerleri net olarak ifade edilememektedir. Neutrosophic küme kavramı, bir bireyin bir konu için tam olarak bilgi sahibi olamayabileceğini ve belirsizlik içeren durumları da hesaba katarak problemlerin daha kararlı ve daha hassas ölçümlerle çözülmesinin yolunu açmıştır.

İlk başta filozofik bir kavram olarak ortaya atılan neutrosophic kümeler, standart olmayan $]0^-, 1^+[$ aralıklarla tanımlandığı için bilim ve mühendislik alanlarındaki uygulamalarda bazı zorluklarla karşılaşmıştır. Bu sebeple ilk olarak Wang vd. (2005) üyelik, non-üyelik ve tereddüt derecelerini, $[0,1]$ alt aralığını kullanarak aralık sayılara genişletmişler ve neutrosophic kümelerin özel bir durumu olan aralık değerli neutrosophic kümeleri (ADNK) literatüre kazandırmışlardır. Daha sonra, Wang vd. (2010) neutrosophic kümelerin yine bir örneği olan ve $[0,1]$ alt aralığında tanımlı tek değerli neutrosophic kümeleri (TDNK) tanımlanmışlardır. ADNK’de her bir derece belli bir aralıkta verilirken, TDNK’de ise her bir derece tek değer olarak verilmektedir. Ye (2014) sezgisel bulanık kümelerde tanımlanan ortalama operatörlerini neutrosophic kümelere taşıyabilmek için, neutrosophic kümelerin bir alt sınıfı olan ve küme elemanları reel $[0,1]$ standart aralığında üç reel sayı olarak ifade edilebilen basitleştirilmiş neutrosophic kümeleri (BNK) tanımlamıştır. Böylece neutrosophic kümelerin bilim ve mühendislik gibi birçok alana uygulanabilir olmasının önü açılmıştır. Peng vd. (2014), Peng vd. (2016), Wu vd. (2016), Luo vd. (2017), Ye (2017) ve Tian (2018) son yıllarda BNK’lerde önemli çalışmalara imza atmışlardır. Ayrıca, neutrosophic kümeler ile ilgili ortalama operatörleri (C. Liu ve Luo, 2016; P. Liu, vd., 2014; P. Liu ve Tang, 2016; P. Liu ve Wang, 2014; Peng vd., 2015; Şahin ve Liu, 2017; Ye, 2014), uzaklık, benzerlik ve korelasyon katsayıları (Broumi ve Smarandache, 2013; Huang, 2016; Karaaslan, 2017; Şahin ve Küçük, 2014, 2015; Şahin ve Liu, 2016, 2017a; Ye, 2015, 2014b, 2014c, 2014d), entropiler (Biswas vd., 2014; Şahin, 2017; Ye, 2014e) ve karar verme problemleri (Biswas vd., 2016; Bolturk ve Kahraman, 2018; Karaşan ve Kahraman, 2018; Şahin ve Liu, 2016) gibi birçok önemli çalışma yapılmıştır.

Neutrosophic kümelerle ÇKKV metotlarının kullanımı kümenin tanımında hemen sonra başlasa da AHP metodu için bilindiği kadarıyla hibrit bir metot ile Radwan vd. (2016) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Chi ve Liu (2013) aralık değerli neutrosophic TOPSIS metodunu, Peng vd. (2014) basitleştirilmiş neutrosophic ELECTRE metodunu, Wang ve Liu (2016) aralık değerli neutrosophic PROMETHEE metodunu, Bausys ve Zavadskas (2015) aralık değerli neutrosophic VIKOR metodunu, Bausys vd. (2015) tek değerli neutrosophic COPRAS metodunu, Stanujkic vd. (2017) tek değerli neutrosophic MultiMOORA metodunu ve Wang ve Li (2015) çok değerli neutrosophic TODIM metodunu geliştirmişlerdir.

Bulanık kümeler, sezgisel bulanık kümeler ve neutrosophic kümeler gerçek hayat problemlerinde kullanışlı kavramlar olmalarına rağmen bu kümeler problemlerde $[0,1]$

düzgün dağılan ve simetrik aralığı kullanmaktadır. Fakat gerçek hayatta birçok düzgün dağılmayan ve simetrik olmayan durumlar vardır. Buna en basit örnek üniversitelerin sınav puanlama sistemidir (Herrera vd., 2008). Genellikle puanlama 0 – 40 için F, 40 – 50 için D, 50 – 70 için C, 70 – 90 için B ve 90 – 100 için A olarak yapılır ki bu açık bir şekilde simetrik olmayan bir dağılımdır. Ayrıca ekonomide sıkça karşılaşılan azalan marjinal fayda yasası da simetrik olmayıp düzgün dağılmayan bir şekilde ele alınması gereken problemlerden biridir (Xia vd., 2013). Bu yasaya göre bir malın tüketimi aynı seviyede arttırılırsa, ilk başta toplam fayda artmasına rağmen sonrasında fayda giderek azalmaya başlar. Saaty'nin (Saaty, 1990) problem değişkenlerini atarken kullandığı simetrik olmayan ve düzgün dağılmayan $[1/9 - 9]$ ölçeği bu tip durumlar için oldukça kullanışlıdır. Bu ölçü, oran ölçeklerini içeren pozitif ve tersinir matrislerin oluşturduğu tercih bağıntıları olarak da adlandırılan karşılaştırma problemlerine dayanmaktadır. Oran ölçüleri çarpımsal tercih bağıntılarının kurulmasına öncülük etmiştir (Saaty, 1980). Böylece çarpımsal tercih bağıntıları, simetrik olmayan ve düzgün dağılmayan bir ölçek gerektiren problemlerde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu problemlerden hareketle Xia vd. (2013) sezgisel çarpımsal kümeyi (SÇK) ve sezgisel çarpımsal tercih bağıntılarını (SÇTB) literatüre kazandırmışlardır. Onlar kümeden hareket etmek yerine sezgisel tercih bağıntılarının özelliklerini inceleyip bu tercih bağıntıları üzerinden çalışmalar yapmışlardır. Bu bağıntılar kullanılarak birçok çalışma yapılmıştır (Garg, 2016, 2017, 2018; Jiang, Xu, ve Gao, 2015; Jiang, Xu, ve Yu, 2013; Xia ve Xu, 2013; Yu ve Xu, 2016). Xia vd. (2013)'nin verdiği $[0 - 1]$ ve $[1/9 - 9]$ ölçüleri arasındaki kıyaslama Tablo 1.1 de verilmiştir. SÇTB'ler alternatiflerin ikili olarak tercih derecelerini değerlendirir ve bu dereceleri karar matrisinde ÇKKV problemlerinde kullanılan alternatif-kriter şeklinde değil, alternatif-alternatif şeklinde oluşturur. Eğer problem kriter ve kriterler içeriyorsa bu bağıntılar tercih bağıntısı matrisinde direkt olarak kullanılamaz.

SBK'ye benzer olarak, SÇK ve doğal olarak SÇTB da karar verme problemlerinde belirsiz bilgi ile tam olarak başa çıkamaz. Bazı makalelerde aynı SBK'de olduğu gibi belirsiz bilgi için tereddüt derecesinin bahsi geçse de bu makalelerin büyük çoğunluğunda sayısal örneklerde hesaba katılmamıştır. Bu problemlerde kullanılmak istense bile, sezgisel çarpımsal küme için verilen tereddüt derecesi yine üyelik ve non-üyelik derecesine bağlı olduğundan karar vericilerin karar verme problemlerindeki hareketlerini kısıtlayacaktır. Bu kısıtlama, hem karar vericiler için hem de sonuç almak isteyenler için bir dezavantaj oluşturmaktadır. Neutrosophic kümelerin ortaya atılmasının altında yatan tereddüt

derecesindeki bağımsızlık fikrinden yola çıkılarak, bu çalışmada basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal kümeler tanımlanacaktır.

Tablo 1.1. $[1/9 - 9]$ Saaty ölçüsü ile $[0 - 1]$ ölçüsünün kıyaslanması (Xia vd., 2013).

1/9-9 Ölçeği	0.1-0.9 Ölçeği	Anlamı
1/9	0.1	Aşırı derecede tercih edilmez
1/7	0.2	Çok güçlü bir şekilde tercih edilmez
1/5	0.3	Güçlü bir şekilde tercih edilmez
1/3	0.4	Orta derecede tercih edilmez
1	0.5	Eşit şekilde tercih edilir
3	0.6	Orta derecede tercih edilir
5	0.7	Güçlü bir şekilde tercih edilir
7	0.8	Çok güçlü bir şekilde tercih edilir
9	0.9	Aşırı derecede tercih edilir
1/9 -9 arası diğer değerler	0-1 arası diğer değerler	Mevcut kıyaslamayı yapmak için aralığa uygun orta derecede değerler kullanılır

Bu tez çalışmasında sezgisel çarpımsal kümeler basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal kümelere genelleştirilerek elde edilecek yeni küme teorisinin özelliklerinin araştırılacaktır. Böylece, simetrik olmayan ve düzgün dağılmayan aralıklar kullanılarak tereddüt veya belirsizlik bilgilerinin daha hassas ölçülmesine ve gerçek hayat problemlerinde daha doğru ve kararlı seçimlerin yapılabilmesine olanak sağlanması beklenmektedir. Bu sebeple bu tezin ana başlıkları dört ana bölüme ayrılmıştır. Birinci bölümde, tezin konusuyla bağlantılı olan ve altyapısını oluşturan birçok temel kavram verilmiştir. İkinci bölümde BNÇK'lere genelleştirilecek olan SÇK kavramı ve sayı işlemleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, önce SÇK'nin bir genellemesi olan basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal küme (BNÇK) ve bazı önemli küme işlemleri verilmiştir. Bu kümenin elemanlarını oluşturan üyelik, tereddüt ve non-üyelik dereceleri bir üçlü olarak alınıp basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal sayı (BNÇS) olarak tanımlanmış ve sayı işlemleriyle alakalı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca iki BNÇK ve iki BNÇS arasındaki uzaklıkları belirlemek için uzaklık ölçüleri tanımlanmıştır. Daha sonra karar matrislerinin veya verilerinin anlamlı sonuçlar vermesi için kullanılan ortalama operatörleri

karar verme süreçlerinin önemli bir parçası olduğundan, basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal ağırlıklı ortalama operatörü ve basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal ağırlıklı geometrik ortalama operatörü tanımlanmış ve bazı önemli özellikleri ispatlanmıştır. Son olarak ise klasik TODIM metodu genişletilerek, basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal TODIM metodu geliştirilmiş, geliştirilen bu metot bir karar verme problemine uygulanmış ve bir karşılaştırma analizi yapılmıştır. Dördüncü bölümde yapılan çalışma ve örnek ile ilgili bulgular değerlendirilerek detaylı bir sonuç verilir, bu tez çalışmasında ortaya çıkan bilgiler ile neler yapılabileceği ve literatürde nasıl kullanılabileceği öneriler eşliğinde verilmiştir.

1.2. Temel Kavramlar

Bu kısımda çalışmanın sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bulanık kümeler, sezgisel bulanık kümeler ve neutrosophic kümeler kısaca ele alınmıştır. Bunlara ek olarak, çalışmanın temelini oluşturan sezgisel çarpımsal kümeler ile sezgisel çarpımsal tercih bağıntıları ayrıntılı şekilde verilmiştir.

Tanım 1.2.1. (Zadeh, 1965) X boştan farklı bir küme ve $x \in X$ olsun. X evrensel kümesi üzerinde bir bulanık A kümesi, $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen

$$A = \{\langle x, \mu_A(x) \rangle | x \in X\} \quad (1.1)$$

ile tanımlanır. Burada $\mu_A(x)$ değeri x 'in A kümesine üyelik(aitlik) derecesini gösterir. Bulanık küme kavramı bir elemanın bir kümeye kısmi üyeliğine olanak verir. Bir elemanın üyelik derecesi $\mu_A(x) = 1$ olması, o elemanın tamamen kümeye ait olduğunu gösterirken $\mu_A(x) = 0$ olması kümeye ait olmadığını gösterir. Klasik küme kavramı, bulanık küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış halidir. Eğer elemanın üyelik derecesi 0 ile 1 arasında ise bu eleman bulanık kümenin kısmi üyesidir.

Örnek 1.2.1. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi bir arabanın alımı için bakılabilecek markaları gösterebilir. Araba almak isteyen bir kişi, bu markalar için tercihlerini ifade eden bir A bulanık kümesini

$$A = \{\langle a, 0.5 \rangle, \langle b, 0.7 \rangle, \langle c, 0.2 \rangle, \langle d, 0.3 \rangle\}$$

şeklinde oluşturabilir. Kişi bu değerleri kendisine göre uygun olacak şekilde belirlemiştir ve incelediği arabalardan a markası için kararsız kalıp, b markasını beğenmiştir. Fakat c ve d markalarını pek beğenmediği söylenebilir. Birey e markasını almayı düşünmemektedir ve onun için hiçbir önemi yoktur. Bu sebeple " e " elemanı A bulanık kümesinde verilmemiştir. Burada " e " elemanın değeri 0 olduğu için kümede olmak zorunda değildir.

Tanım 1.2.2. (Orlovsky, 1978; Xu, 2007a) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $R = (r_{ij})_{n \times n} \subset X \times X$ tersinir bir matris olmak üzere $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ için

$$r_{ij} \geq 0, \quad r_{ij} + r_{ji} = 1, \quad r_{ii} = 0.5, \quad (1.2)$$

şartlarını sağlayan R 'ye bulanık tercih bağıntısı denir. r_{ij} , x_i alternatifinin x_j alternatifi üzerindeki tercih değerini gösterir. $r_{ij} = 0.5$, x_i ile x_j arasında tercih bakımından bir fark olmadığını, $r_{ij} > 0.5$ olması ise, x_i 'nin x_j 'ye tercih edilir olmasını gösterir. r_{ij} ne kadar büyükse, x_i alternatifinin x_j alternatifi üzerindeki tercih derecesi o kadar büyüktür. Eğer $r_{ij} = 1$ ise x_i kesin olarak x_j 'ye tercih edilir. $r_{ij} < 0.5$ ise x_j x_i 'ye göre daha çok tercih edilebilir. r_{ij} ne kadar küçükse x_j 'nin x_i üzerindeki tercih edilebilirliği o kadar yüksektir. Eğer $r_{ij} = 0$ ise x_j kesin olarak x_i 'ye tercih edilir.

Örnek 1.2.2. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi bir arabanın alımı için bakılabilecek markaları gösterebilir. Araba almak isteyen bir A kişisi için, markaların birbirlerine olan bulanık tercih dereceleri Tablo 1.2.'deki gibi verilebilir.

Tablo 1.2. Alternatiflerin bulanık tercih dereceleri

Markalar	a	b	c	d	e
a	0.5	0.6	0.8	0.9	1
b	0.4	0.5	0.6	0.8	1
c	0.2	0.4	0.5	0.6	1
d	0.1	0.2	0.4	0.5	1
e	0	0	0	0	0.5

Bu kişi için e markası diğer markalara göre kesinlikle tercih edilmez. d markası e markasına göre daha tercih edilebilirdir. a markasının ise diğer arabalara göre daha yüksek tercih edilebilirliği vardır. Ancak, bu tercih dereceleri göreceli olup kişiden kişiye değişebilir.

Tanım 1.2.3. (Atanassov, 1986) X boştan farklı bir küme ve $x \in X$ olsun. X üzerinde bir sezgisel bulanık A kümesi, $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ve $\nu_A: X \rightarrow [0,1]$ non-üyelik fonksiyonu olmak üzere $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ şartını sağlayan

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle | x \in X\} \quad (1.3)$$

ile tanımlanır. Sezgisel bulanık küme kavramı, bir elemanın bir kümeye üye olma ve üye olmama(non-üyelik) derecesini ele alır. Bir elemanın üyelik derecesi ile non-üyelik derecesinin toplamı birden küçük olabilir. Bu durumda $\pi_A = 1 - (\mu_A + \nu_A)$ değerine tereddüt derecesi denir. Eğer π_A değeri küçükse x elemanı hakkındaki bilgi daha kesin, büyükse daha belirsizdir. $\nu_A = 1 - \mu_A$ olması halinde, yani $\pi_A = 0$ için sezgisel bulanık küme, Zadeh (1965) tarafından tanımlanan bulanık kümeye indirgenir.

Örnek 1.2.3. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi bir arabanın alımı için bakılabilecek markaları gösterebilir. Araba almak isteyen bir kişi, bu markalar için tercihlerini ifade eden bir A sezgisel bulanık kümesini

$$A = \{\langle a, 0.5, 0.4 \rangle, \langle b, 0.7, 0.1 \rangle, \langle c, 0.2, 0.6 \rangle, \langle d, 0.3, 0.7 \rangle\}$$

şeklinde oluşturabilir. Birey a markasını almakla almamak arasında kararsızdır. b markasını almayı ciddi şekilde düşünürken, bu markayı almamayı neredeyse hiç düşünmemektedir. Burada $\pi_A(x) = 1 - (\mu_A(x) + \nu_A(x))$ denkleminde b markasını alıp almama konusu için 0.2 derecesinde tereddüt yaşamaktadır.

Tanım 1.2.4. (Xu, 2007c) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $B = (b_{ij})_{n \times n} \subset X \times X$ tersinir bir matris ve $b_{ij} = \langle (x_i, x_j), (\mu_i, \mu_j), (\nu_i, \nu_j) \rangle$ olmak üzere $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ için

$$0 \leq \mu_{ij} + \nu_{ij} \leq 1, \quad \mu_{ij} = \nu_{ji}, \quad \nu_{ij} = \mu_{ji}, \quad \mu_{ii} = \nu_{ii} = 0.5, \quad (1.4)$$

şartlarını sağlayan B 'ye sezgisel bulanık tercih bağıntısı denir. μ_{ij} , x_i 'nin x_j 'ye tercih edilme derecesini ve ν_{ij} , x_i 'nin x_j 'ye tercih edilmeme derecesini gösterir. Kullanımda rahatlık için sezgisel bulanık tercih bağıntısı $b_{ij} = (\mu_{ij}, \nu_{ij})$ ile gösterilir. $\pi_{ij} = 1 - (\mu_{ij} + \nu_{ij})$ ise x_i 'nin x_j 'ye tercih edilip edilmemesinin belirsizlik derecesi olarak yorumlanır.

Örnek 1.2.4. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi bir arabanın alımı için bakılabilecek markaları gösterebilir. Araba almak isteyen bir A kişisi için, markaların birbirlerine olan sezgisel bulanık tercih dereceleri Tablo 1.3'deki gibi verilebilir.

Tablo 1.3. Alternatiflerin sezgisel bulanık tercih dereceleri

Markalar	a	b	c	d	e
a	(0.5,0.5)	(0.6,0.3)	(0.7,0.2)	(0.9,0.1)	(1,0)
b	(0.3,0.6)	(0.5,0.5)	(0.6,0.4)	(0.8,0.1)	(1,0)
c	(0.2, 0.7)	(0.4,0.6)	(0.5,0.5)	(0.6,0.3)	(1,0)
d	(0.1,0.9)	(0.1,0.8)	(0.3,0.6)	(0.5,0.5)	(1,0)
e	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0.5,0.5)

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, $\mu_{ij} + \nu_{ij} \leq 1$ olduğu için tercih derecelerinin bulanık tercih bağıntısına göre daha objektif seçilebilmesidir. Örneğin a markasını b markası ile kıyaslarken birbirlerine olan tercih derecelerinde 0.1 tereddüt payı atanabilmektedir. Ancak bulanık tercih bağıntısı kullanılırsa, a markası b markasına 0.6 derecesinde tercih edilecektir ve herhangi bir tereddüt durumu olmayacaktır.

Tanım 1.2.5. (Smarandache, 1998) X boştan farklı bir noktalar (nesneler) uzayı ve x , X kümesi içinde tipine özgü (nokta, nesne, vb.) bir eleman olsun. X üzerinde bir A neutrosophic kümesi; $T_A: X \rightarrow]0^-, 1^+[$ üyelik fonksiyonu, $F_A: X \rightarrow]0^-, 1^+[$ non-üyelik fonksiyonu ve $I_A: X \rightarrow]0^-, 1^+[$ tereddüt fonksiyonu olmak üzere $0^- \leq \sup T_A(x) + \sup I_A(x) + \sup F_A(x) \leq 3^+$ şartını sağlayan

$$A = \{\langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle | x \in X\} \quad (1.5)$$

ile tanımlanır. Filozofik bir kavram olarak ortaya çıkan neutrosophic küme (NK) kavramı Smarandache'ın deyimiyle (2002, s.2):

“Bu küme, tarafsızlıkların kökenini, doğasını ve kapsamını çalışın ve farklı düşünsel çeşitliliklerle etkileşimini inceleyen felsefenin bir dalıdır”.

Neutrosophic kümeler $I_A(x) = \emptyset$ ve $T_A(x) + F_A(x) \leq 1$ için sezgisel bulanık kümeler indirgenir. Sezgisel bulanık kümelerden en büyük farkı tereddüt değerinin üyelik ve non-üyelik değerlerinden bağımsız olmasıdır, yani bu değer sezgisel bulanık kümelerde olduğu gibi kısıtlanmamıştır.

Standart olmayan aralıklar, bilim ve mühendislik problemlerine uygulamada güçlük çıkardığından, Wang vd. (2010) neutrosophic kümelerin bir durumu olan tek değerli neutrosophic kümeleri tanımlamışlardır.

Tanım 1.2.6. (Wang vd., 2010) X boştan farklı bir küme ve $x \in X$ olsun. X üzerinde bir A tek değerli neutrosophic kümesi (TDNK), T_A üyelik fonksiyonu, F_A non-üyelik fonksiyonu ve I_A tereddüt fonksiyonu ile karakterize edilir. $\forall x \in X$ için $T_A(x), I_A(x), F_A(x) \in [0,1]$ dir. X sürekli ise

$$A = \int_X \langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle | x \in X \quad (1.6)$$

ayrık ise

$$A = \sum_{i=1}^n \langle x_i, T_A(x_i), I_A(x_i), F_A(x_i) \rangle | x_i \in X \quad (1.7)$$

ile tanımlanır. Ye (2014a), neutrosophic kümenin bir durumu olan TDNK'nin yerine, neutrosophic kümenin bir alt sınıfı olan ve $[0,1]$ gerçel birim aralıkta tanımlı basitleştirilmiş neutrosophic kümeleri önermiştir.

Tanım 1.2.7. (Ye, 2014a) X boştan farklı bir küme ve $x \in X$ olsun. X üzerinde bir A neutrosophic kümesi, T_A üyelik fonksiyonu, F_A non-üyelik fonksiyonu ve I_A tereddüt

fonksiyonu ile karakterize edilir. Eğer $T_A(x), I_A(x)$ ve $F_A(x)$ reel standart $[0,1]$ aralığında tekil alt aralıklar/altkümeler, yani $T_A: X \rightarrow [0,1]$, $I_A: X \rightarrow [0,1]$ ve $F_A: X \rightarrow [0,1]$ ise, basitleştirilmiş neutrosophic küme (BNK)

$$A = \{\langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x) \rangle | x \in X\} \quad (1.8)$$

ile tanımlanır. Böylece BNK'deki her eleman $[0,1]$ reel standart aralığında üç reel sayıyla ifade edilebilir.

Örnek 1.2.5. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi bir arabanın alımı için bakılabilecek markaları gösterebilir. Araba almak isteyen bir kişi, bu markalar için tercihlerini ifade eden bir A basitleştirilmiş neutrosophic kümesini

$$A = \{\langle a, 0.5, 0.7, 0.4 \rangle, \langle b, 0.7, 0.2, 0.1 \rangle, \langle c, 0.2, 0.2, 0.6 \rangle, \langle d, 0.3, 0.3, 0.7 \rangle\}$$

şeklinde oluşturabilir. Birey a markasını almakta kararsızken almamakta da kararsızdır ve tereddüt düzeyi yüksektir. b markası için almaya yakinken, almama gibi bir isteği azdır ve neredeyse tereddüt etmemektedir. Görüldüğü üzere neutrosophic kümeler karar vericiye (bireye) daha özgürlükçü ve daha hassas bir seçim yaklaşımı sunmaktadır.

Tanım 1.2.8. (Yang vd., 2018) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $S = (s_{ij})_{n \times n} \subset X \times X$ tersinir bir matris ve $s_{ij} = \langle (x_i, x_j), (T_i, T_j), (I_i, I_j), (F_i, F_j) \rangle$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 \leq T_{ij} + I_{ij} + F_{ij} \leq 3, \quad T_{ij} &= F_{ji}, \quad T_{ji} = F_{ij}, \\ T_{ii} &= F_{ii} = 0.5 \text{ ve } I_{ii} = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

şartlarını sağlayan S 'ye neutrosophic tercih bağıntısı denir. Kullanımda rahatlık için $s_{ij} = (T_{ij}, I_{ij}, F_{ij})$ gösterimi ile kullanılır. T_{ij} ; x_i 'nin x_j 'ye tercih edilme derecesini, F_{ij} ; x_i 'nin x_j 'ye tercih edilme derecesini ve I_{ij} ; x_i 'nin x_j 'ye tercih edilip edilmemesinin belirsizlik derecesini gösterir.

Örnek 1.2.6. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi bir arabanın alımı için bakılabilecek markaları gösterebilir. Araba almak isteyen bir A kişisi için, markaların birbirlerine olan neutrosophic tercih dereceleri Tablo 1.4'deki gibi verebilir.

Tablo 1.4. Alternatiflerin neutrosophic tercih dereceleri

Markalar	a	b	c	d	e
a	(0.5,0,0.5)	(0.6,0.5,0.3)	(0.7,0.4,0.2)	(0.9,0.2,0.1)	(1,0,0)
b	(0.3,0.5,0.6)	(0.5,0,0.5)	(0.6,0.8,0.4)	(0.8,0.3,0.1)	(1,0,0)
c	(0.2,0.4,0.7)	(0.4,0.8,0.6)	(0.5,0,0.5)	(0.6,0.5,0.3)	(1,0,0)
d	(0.1,0.2,0.9)	(0.1,0.3,0.8)	(0.3,0.5,0.6)	(0.5,0,0.5)	(1,0,0)
e	(0,0,1)	(0,0,1)	(0,0,1)	(0,0,1)	(0.5,0,0.5)

Burada sezgisel bulanık tercih bağıntılarında olan $\mu_{ij} + \nu_{ij} \leq 1$ kısıtlaması olmadığı için tercih dereceleri daha objektif ve daha rahat seçilebilmektedir. Örneğin a markasını b markası ile kıyaslarken, sezgisel bulanık tercih bağıntılarında birbirlerine olan tercih derecelerinde 0.1 belirsizlik payı bırakılabilirken neutrosophic tercih bağıntılarında 0.5 belirsizlik payı bırakılabilmektedir.

1970'li yıllarda ABD Savunma bakanlığında karar verme alanında çalışan Thomas L. Saaty, dünyanın belki de en karmaşık kararlarından biri olabilecek, orta doğuda büyük bir sorun olan silah kontrol mekanizmaları için bir ulaşım-taşıma sisteminin geliştirilmesi problemiyle karşılaşmıştır. Bu tip karmaşık problemlerin çözümünde karmaşık bir matematik yerine sadece doğru bir matematiğe ihtiyaç duyulduğunu düşünen Saaty (1977), karmaşık durumları çözmede kullanabileceği basit ama etkili bir teknik geliştirmiştir; Analitik Hiyerarşi Yöntemi (AHP). O yıllarda, daha bulanık tercih bağıntıları literatürde yokken ikili karşılaştırmalar içeren AHP yöntemi için bir uygun bir oran ölçeği arayan Saaty, 20'den fazla ölçeği denedikten sonra AHP için en uygun olan 1 – 9 ölçeğinde karar kılmıştır (Zhang vd., 2009). Böylece, ikili karşılaştırmaların oranlarını hesaplamak için AHP (Saaty, 1980) yönteminde de kullanılan, düzgün dağılmayan ve simetrik olmayan $\left[\frac{1}{9} - 9\right]$ aralığında tanımlı çarpımsal tercih bağıntıları literatüre girmiştir.

Tanım 1.2.9. (Saaty, 1980) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $P = (p_{ij})_{n \times n} \subset X \times X$ tersinir bir matris olmak üzere

$$p_{ij} \geq 0, \quad p_{ii} = 1, \quad p_{ij} \cdot p_{ji} = 1, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1.10)$$

şartlarını sağlayan P 'ye çarpımsal tercih bağıntısı denir. Çarpımsal tercih bağıntılarında, p_{ij} tercihinin yoğunluğu Saaty'nin $\frac{1}{9} - 9$ ölçüsü ile ölçeklendirilir. Saaty'nin ölçeklendirmesine göre çarpımsal tercih bağıntılarında $p_{ij} = 1$; x_i ve x_j arasında bir farkın olmadığını ve $p_{ij} > 1$; x_i 'nin x_j 'ye göre daha tercih edilebilir olduğunu gösterir. p_{ij} ne kadar güçlüyse x_i 'nin x_j 'ye göre tercih edilebilirliği o derece artar. Özellikle $p_{ij} = 9$ ise x_i 'nin tercih edilmesi kesindir. $p_{ij} < 1$ ise x_j , x_i 'ye göre daha tercih edilebilirdir. p_{ij} ne kadar küçükse x_j 'nin x_i 'ye göre tercih edilebilirliği o derece artar. Özellikle $p_{ij} = \frac{1}{9}$ ise x_j 'nin tercih edilmesi kesindir.

Örnek 1.2.7. Saaty (1990), ABD'deki içecek tüketimini Tablo 1.5'deki gibi örneklendirmiştir. Bu örnekte bazı parametreler çıkarılmıştır.

Tablo 1.5. Alternatiflerin çarpımsal tercih dereceleri

İçecek tüketimi	Kahve	Çay	Meyve Suyu	Soda	Su
Kahve	1	5	2	1	1/2
Çay	1/5	1	1/3	1/4	1/9
Meyve Suyu	1/2	3	1	1/2	1/3
Soda	1	4	2	1	1/2
Su	2	9	3	2	1

Tablo 1.5'e göre, kahve çaya oranla güçlü derecede tercih edilirken, soda ile eşit derecede tercih edilmektedir. Benzer şekilde, meyve suyu çaya göre orta derecede tercih edilirken, suya göre ise orta derecede tercih edilmemektedir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, bu tez çalışmasına motivasyon kaynağı olan, literatüre kazandırıldığından itibaren büyük ilgi gören ve bir sonraki bölümde genellemesi yapılacak sezgisel çarpımsal küme kavramı verilmiştir.

2.1. Sezgisel Çarpımsal Kümeler ve Sezgisel Çarpımsal Sayılar

Tanım 2.1.1. (Xia vd., 2013) X boştan farklı bir küme olsun. Sezgisel çarpımsal küme

$$D = \{\langle x, \rho_D(x), \sigma_D(x) \rangle | x \in X\} \quad (2.1)$$

ile tanımlanır. $\rho_D(x)$ üyelik fonksiyonu ve $\sigma_D(x)$ non-üyelik fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{1}{9} \leq \rho_D(x), \sigma_D(x) \leq 9, \quad 0 < \rho_D(x)\sigma_D(x) \leq 1, \quad \forall x \in X \quad (2.2)$$

şartlarını sağlar. Burada sezgisel kümede olduğu gibi, tereddüt derecesi $\tau_D(x) = \frac{1}{\rho_D(x)\sigma_D(x)}$ ile tanımlanır (Jiang vd., 2015). Ayrıca, görüldüğü üzere $1 \leq \tau_D(x) \leq 9^2$ dir.

Örnek 2.1.1. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi bir arabanın alımı için bakılabilecek markaları gösterebilir. Araba almak isteyen bir kişi, bu markalar için tercihlerini ifade eden bir D sezgisel çarpımsal kümesini

$$D = \left\{ \langle a, 1, \frac{1}{2} \rangle, \langle b, 7, \frac{1}{8} \rangle, \langle c, \frac{1}{3}, 2 \rangle, \langle d, \frac{1}{7}, 6 \rangle, \langle e, \frac{1}{9}, 9 \rangle \right\}$$

şeklinde oluşturabilir.

Tanım 2.1.2. (Xia vd., 2013) X üzerinde bir sezgisel çarpımsal küme $D = \{\langle x, \rho_D(x), \sigma_D(x) \rangle | x \in X\}$ olsun. Yukarıdaki şartları sağlayan $(\rho_D(x), \sigma_D(x))$ ikilisine sezgisel çarpımsal sayı (SÇS) denir ve $\alpha = (\rho_\alpha, \sigma_\alpha)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.3. (Xia vd., 2013) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $\alpha_{ij} = (\rho_{ij}, \sigma_{ij})$ sezgisel çarpımsal bir sayı olmak üzere $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$, bir sezgisel çarpımsal tercih bağıntısı $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ için :

$$\frac{1}{9} \leq \rho_{ij}, \sigma_{ij} \leq 9, \quad \rho_{ij}\sigma_{ij} \leq 1, \quad \rho_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \rho_{ji} = \sigma_{ij} \quad (2.3)$$

şartları ile tanımlanır. Burada ρ_{ij} , x_i 'nin x_j 'ye tercih edilme derecesini ve σ_{ij} , x_i 'nin x_j 'ye tercih edilmeme derecesini gösterir.

Örnek 2.1.2. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi bir arabanın alımı için bakılabilecek markaları gösterebilir. Araba almak isteyen bir A kişisi için, markaların birbirlerine olan sezgisel çarpımsal tercih dereceleri Tablo 2.1'deki gibi verilebilir.

Tablo 2.1. Alternatiflerin sezgisel çarpımsal tercih dereceleri

Markalar	a	b	c	d	e
a	(1,1)	$(2, \frac{1}{2})$	$(5, \frac{1}{6})$	$(8, \frac{1}{8})$	$(9, \frac{1}{9})$
b	$(\frac{1}{2}, 1)$	(1,1)	$(3, \frac{1}{4})$	$(7, \frac{1}{8})$	$(9, \frac{1}{9})$
c	$(\frac{1}{6}, 5)$	$(\frac{1}{4}, 3)$	(1,1)	$(6, \frac{1}{6})$	$(9, \frac{1}{9})$
d	$(\frac{1}{8}, 8)$	$(\frac{1}{8}, 7)$	$(\frac{1}{6}, 6)$	(1,1)	$(9, \frac{1}{9})$
e	$(\frac{1}{9}, 9)$	$(\frac{1}{9}, 9)$	$(\frac{1}{9}, 9)$	$(\frac{1}{9}, 9)$	(1,1)

Burada eşitlik (1.10)'da verilenin aksine non-üyelik derecesi de olduğu için, sezgisel çarpımsal tercih bağıntısı, çarpımsal tercih bağıntısına göre daha objektif bir seçim yapılmasını sağlar.

Tanım 2.1.4. (Xia vd., 2013) X üzerinde bir sezgisel çarpımsal küme D ve bu kümeyi oluşturan ikili SÇS'ler $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i})$ olsun. SÇS'ler arasındaki sıralamayı sağlamak için skor ve tam fonksiyonu

- $s(\alpha) = \frac{\rho_\alpha}{\sigma_\alpha}$
- $h(\alpha) = \rho_\alpha \sigma_\alpha$

(2.4)

şeklinde tanımlanır. α_1 ve α_2 arasındaki sıralama ise;

1. $s(\alpha_1) > s(\alpha_2)$, ise $\alpha_1 > \alpha_2$.
2. $s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$, ise
 - i. $h(\alpha_1) > h(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$
 - ii. $h(\alpha_1) = h(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

algoritmasıyla yapılır.

Örnek 2.1.3. $\alpha_1 = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$ ve $\alpha_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ iki sezgisel bulanık çarpımsal sayı olsun. O halde bu iki sayıyı sıralamak istersek, $s(\alpha_1) = s(\alpha_2) = \frac{1}{2}$ olduğundan tamlık fonksiyonuna bakılır. $h(\alpha_1) = \frac{1}{32}$ ve $h(\alpha_2) = \frac{1}{18}$ olduğundan $\alpha_1 < \alpha_2$ dir.

Tanım 2.1.5. (Xia vd., 2013) $\alpha_1 = (\rho_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_1})$ ve $\alpha_2 = (\rho_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_2})$ iki SÇS olsun. O halde bu iki sayı arasındaki kısmi sıralama

$$\alpha_1 \geq_k \alpha_2 \Leftrightarrow \rho_{\alpha_1} \geq \rho_{\alpha_2} \text{ ve } \sigma_{\alpha_1} \leq \sigma_{\alpha_2} \quad (2.5)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \rho_{\alpha_1} = \rho_{\alpha_2}$ ve $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2}$ dir.

Bu tanıma göre $\alpha_1 \geq_k \alpha_2$ ise $s(\alpha_1) \geq s(\alpha_2)$ dir. Eğer $s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$ ise Eşitlik (2.4)'ten $\frac{\rho_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}} = \frac{\rho_{\alpha_2}}{\sigma_{\alpha_2}}$, ayrıca $\rho_{\alpha_1} \geq \rho_{\alpha_2}$ ve $\sigma_{\alpha_1} \leq \sigma_{\alpha_2}$ olduğundan $\rho_{\alpha_1} = \rho_{\alpha_2}$ ve $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2}$ bulunur. Yani $\alpha_1 \geq_k \alpha_2$ ise $\alpha_1 \geq \alpha_2$ dir.

Tanım 2.1.6. (Xia vd., 2013) $\alpha_1 = (\rho_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_1})$, $\alpha_2 = (\rho_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_2})$ ve $\alpha = (\rho_\alpha, \sigma_\alpha)$ üç SÇS ve $\lambda > 0$ olsun. O halde SÇS'ler için temel işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \alpha_1 \wedge \alpha_2 = (\min(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}), \max(\sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_2})) \\
2) \quad & \alpha_1 \vee \alpha_2 = (\max(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}), \min(\sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_2})) \\
3) \quad & \alpha_1 \oplus \alpha_2 = \left(\frac{(1+2\rho_{\alpha_1})(1+2\rho_{\alpha_2})-1}{2}, \frac{2\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}{(2+\sigma_{\alpha_1})(2+\sigma_{\alpha_2})-\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}} \right) \\
4) \quad & \alpha_1 \otimes \alpha_2 = \left(\frac{2\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}{(2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2})-\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}, \frac{(1+2\sigma_{\alpha_1})(1+2\sigma_{\alpha_2})-1}{2} \right) \\
5) \quad & \lambda\alpha = \left(\frac{(1+2\rho_{\alpha})^{\lambda}-1}{2}, \frac{2\sigma_{\alpha}^{\lambda}}{(2+\sigma_{\alpha})^{\lambda}-\sigma_{\alpha}^{\lambda}} \right) \\
6) \quad & \alpha^{\lambda} = \left(\frac{2\rho_{\alpha}^{\lambda}}{(2+\rho_{\alpha})^{\lambda}-\rho_{\alpha}^{\lambda}}, \frac{(1+2\sigma_{\alpha})^{\lambda}-1}{2} \right) \\
7) \quad & \alpha^c = (\sigma_{\alpha}, \rho_{\alpha})
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Teorem 2.1.1. (Xia vd., 2013) α , α_1 ve α_2 üç SÇS olsun. λ, λ_1 ve $\lambda_2 > 0$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \alpha_1 \oplus \alpha_2 = \alpha_2 \oplus \alpha_1, \\
2) \quad & \alpha_1 \otimes \alpha_2 = \alpha_2 \otimes \alpha_1, \\
3) \quad & \lambda(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \lambda\alpha_1 \oplus \lambda\alpha_2, \\
4) \quad & (\alpha_1 \otimes \alpha_2)^{\lambda} = \alpha_1^{\lambda} \otimes \alpha_2^{\lambda}, \\
5) \quad & \lambda_1\alpha \oplus \lambda_2\alpha = (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha, \\
6) \quad & \alpha^{\lambda_1} \otimes \alpha^{\lambda_2} = \alpha^{\lambda_1+\lambda_2}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Teorem 2.1.2. (Xia vd., 2013) α , α_1 ve α_2 üç SÇS olsun. $\lambda > 0$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \alpha_1^c \vee \alpha_2^c = (\alpha_1 \wedge \alpha_2)^c, \\
2) \quad & \alpha_1^c \wedge \alpha_2^c = (\alpha_1 \vee \alpha_2)^c, \\
3) \quad & (\alpha^c)^\lambda = (\lambda \alpha)^c, \\
4) \quad & \lambda(\alpha^c) = (\alpha^\lambda)^c, \\
5) \quad & \alpha_1^c \oplus \alpha_2^c = (\alpha_1 \otimes \alpha_2)^c, \\
6) \quad & \alpha_1^c \otimes \alpha_2^c = (\alpha_1 \oplus \alpha_2)^c,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2. Sezgisel Çarpımsal Ortalama Operatörleri

Tanım 2.2.1. (Xia vd., 2013) $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i})$ ($i = 1, 2, \dots, n$) SÇS'lerin koleksiyonu olsun. $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ α_i 'nin ağırlık vektörü, $w_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ olmak üzere sezgisel çarpımsal ağırlıklı aritmetik ortalama (SÇAO) operatörü

$$S\check{C}AAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \bigoplus_{i=1}^n (w_i \alpha_i) \tag{2.9}$$

ile tanımlanır ve temel işlemler yapılarak tümevarım ile

$$S\check{C}AAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\frac{\prod_{i=1}^n (1 + 2\rho_{\alpha_i})^{w_i} - 1}{2}, \frac{2 \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \sigma_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}} \right) \tag{2.10}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.2. (Xia vd., 2013) $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i})$ ($i = 1, 2, \dots, n$) SÇS koleksiyonu olsun. $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ α_i 'nin ağırlık vektörü, $w_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ olmak üzere sezgisel çarpımsal ağırlıklı geometrik ortalama (SÇAGO) operatörü

$$S\check{C}AGO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \bigotimes_{i=1}^n \alpha_i^{w_i} \tag{2.11}$$

ile tanımlanır ve temel işlemler yapılarak tümevarım ile

$$S\check{C}AGO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\frac{2 \prod_{i=1}^n \rho_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \rho_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \rho_{\alpha_i}^{w_i}}, \frac{\prod_{i=1}^n (1 + 2\rho_{\alpha_i})^{w_i} - 1}{2} \right) \quad (2.12)$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 1.2.10. $\alpha_1 = \left(9, \frac{1}{9}\right), \alpha_2 = \left(9, \frac{1}{9}\right), \alpha_3 = \left(9, \frac{1}{9}\right), \alpha_4 = \left(9, \frac{1}{9}\right), \alpha_5 = \left(9, \frac{1}{9}\right)$ ve $\alpha_6 = \left(\frac{1}{9}, 9\right)$ altı SÇS olsun. Bütün ağırlıklar eşit alınarak SÇAAO operatörü ile sayıların ortalaması

$$S\check{C}AAO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) = (5.5134, 0.1814)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde SÇAGO operatörü kullanarak da

$$S\check{C}AGO(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) = (2.1486, 0.4654)$$

olduğu görülür.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal Kümeler, Sayılar ve Uzaklık

Bu bölümde sezgisel çarpımsal kümelerin bir genellemesi olan BNÇK'ler tanımlanarak bu kümelerin bazı temel özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.1.1. X boştan farklı bir küme olsun. Basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal küme (BNÇK)

$$D = \{\langle x, \rho_D(x), \tau_D(x), \sigma_D(x) \rangle \mid x \in X\} \quad (3.1)$$

ile tanımlanır. Burada $\rho_D(x)$ üyelik fonksiyonu, $\sigma_D(x)$ non-üyelik fonksiyonu ve $\tau_D(x)$ tereddüt fonksiyonu olmak üzere Eşitlik (3.1)

$$\frac{1}{9} \leq \rho_D(x), \sigma_D(x) \leq 9, \quad 0 < \rho_D(x)\sigma_D(x) \leq 1, \quad \frac{1}{9} \leq \tau_D(x) \leq 9, \quad \forall x \in X \quad (3.2)$$

şartlarını sağlar.

Örnek 3.1.1. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi bir arabanın alımı için bakılabilecek markaları gösterebilir. Araba almak isteyen bir kişi, bu markalar için tercihlerini ifade eden bir D basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal kümesini

$$D = \left\{ \langle a, 1, 6, \frac{1}{2} \rangle, \langle b, 7, \frac{1}{5}, \frac{1}{8} \rangle, \langle c, \frac{1}{3}, 2, 2 \rangle, \langle d, \frac{1}{7}, 4, 6 \rangle, \langle e, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, 9 \rangle \right\}$$

ile oluşturabilir. Buradaki temel fark, tereddüt derecesi sezgisel çarpımsal kümede üyelik ve non-üyelik derecelerine bağlıken $\left(\tau_D(x) = \frac{1}{\rho_D(x)\sigma_D(x)} \right)$, neutrosophic kümenin tanımından basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal kümede diğer üyelik derecelerinden bağımsızdır. Yukarıdaki örnek tereddüt derecesinin diğer üyelik derecelerine bağlı olduğu sezgisel çarpımsal küme ile aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$A = \left\{ \langle a, 1, 2, \frac{1}{2} \rangle, \langle b, 7, \frac{8}{7}, \frac{1}{8} \rangle, \langle c, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, 2 \rangle, \langle d, \frac{1}{7}, \frac{7}{6}, 6 \rangle, \langle e, \frac{1}{9}, 1, 9 \rangle \right\}$$

SÇK’de a markasının üyelik derecesi 1 ve non-üyelik derecesi $\frac{1}{2}$ iken tereddüt derecesi 2 olmak zorundadır. Bu gibi birbirine çok yakın olan durumlarda karar verici BNÇK örneğinde olduğu gibi tereddüdü yüksek tutmak isteyebilir fakat SÇK’lerde bu durum mümkün değildir.

Tanım 3.1.2. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $\alpha_{ij} = (\rho_{ij}, \tau_{ij}, \sigma_{ij})$ BNÇK elemanları olmak üzere $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ bir basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal tercih bağıntısı $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ için :

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} < \rho_{ij}, \sigma_{ij} \leq 9, \quad 0 < \rho_{ij} \cdot \sigma_{ij} \leq 1, \quad \rho_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \sigma_{ij} = \rho_{ji}, \quad \rho_{ii} = \sigma_{ii} = 1 \\ \tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad \tau_{ii} = \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{9} < \tau_{ij} \leq 9 \end{aligned} \quad (3.3)$$

şartları ile tanımlanır. Burada ρ_{ij} ; x_i ’nin x_j ’ye tercih edilme derecesini, σ_{ij} ; x_i ’nin x_j ’ye tercih edilmeme derecesini ve τ_{ij} ; x_i ’nin x_j ’ye tercih edilip edilmemesinin belirsizlik derecesini gösterir.

Tanım 3.1.3. $X \neq \emptyset$ bir küme ve

$$\begin{aligned} A &= \{\langle x, \rho_A(x), \tau_A(x), \sigma_A(x) \rangle \mid x \in X\} \\ B &= \{\langle x, \rho_B(x), \tau_B(x), \sigma_B(x) \rangle \mid x \in X\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

iki BNÇK olsun. BNÇK’ler üzerindeki bazı temel küme işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\begin{aligned} 1) \quad A \subseteq B &\Leftrightarrow \rho_A(x) \leq \rho_B(x), \tau_A(x) \geq \tau_B(x), \sigma_A(x) \geq \sigma_B(x), \\ 2) \quad A = B &\Leftrightarrow A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A, \\ 3) \quad A \cap B &= \{\langle x, \min\{\rho_A(x), \rho_B(x)\}, \max\{\tau_A(x), \tau_B(x)\}, \max\{\sigma_A(x), \sigma_B(x)\} \rangle\}, \\ 4) \quad A \cup B &= \{\langle x, \max\{\rho_A(x), \rho_B(x)\}, \min\{\tau_A(x), \tau_B(x)\}, \min\{\sigma_A(x), \sigma_B(x)\} \rangle\}, \\ 5) \quad A^c &= \left\{ \langle x, \sigma_A(x), \frac{1}{\tau_A(x)}, \rho_A(x) \rangle \mid x \in X \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Teorem 3.1.1. A ve B iki BNÇK olsun. O halde BNÇK'ler için De Morgan kuralları sağlanır.

$$\begin{aligned} 1) \quad (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ 2) \quad (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \end{aligned} \quad (3.6)$$

İspat:

$\frac{1}{\min\{\tau_A(x), \tau_B(x)\}} = \max\left\{\frac{1}{\tau_A(x)}, \frac{1}{\tau_B(x)}\right\}$ eşitliği $\forall \tau(x) \in \mathbb{R}^+$ için sağlanıp, $\frac{1}{9} \leq \tau_D(x) \leq 9$ olduğundan

$$\begin{aligned} 1) \quad (A \cup B)^c &= \{\langle x, \max\{\rho_A(x), \rho_B(x)\}, \min\{\tau_A(x), \tau_B(x)\}, \min\{\sigma_A(x), \sigma_B(x)\} \rangle\}^c \\ &= \left\{ \langle x, \min\{\sigma_A(x), \sigma_B(x)\}, \frac{1}{\min\{\tau_A(x), \tau_B(x)\}}, \max\{\rho_A(x), \rho_B(x)\} \rangle \right\} \\ &= \left\{ \langle x, \min\{\sigma_A(x), \sigma_B(x)\}, \max\left\{\frac{1}{\tau_A(x)}, \frac{1}{\tau_B(x)}\right\}, \max\{\rho_A(x), \rho_B(x)\} \rangle \right\}. \end{aligned}$$

$A^c = \{\langle x, \sigma_A(x), \frac{1}{\tau_A(x)}, \rho_A(x) \rangle\}$ ve $B^c = \{\langle x, \sigma_B(x), \frac{1}{\tau_B(x)}, \rho_B(x) \rangle\}$ olduğundan,

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ dir.

2) Benzer işlemlerle ispatlanır.

Tanım 3.1.4. $D = \{\langle x, \rho_D(x), \tau_D(x), \sigma_D(x) \rangle \mid x \in X\}$ kümesi X üzerinde bir BNÇK olsun. D kümesi içindeki her bir elemanın üyelik, non-üyelik ve tereddüt değerleri üçlüler şeklinde yazılabilir. $\alpha = (\rho_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ üçlüsüne basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal sayı (BNÇS) denir.

Tanım 3.1.5. Bir $\alpha = (\rho_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ BNÇS'si için skor, tam ve kesinlik fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \bullet \quad s(\alpha) &= \frac{\rho_\alpha}{\tau_\alpha \sigma_\alpha} \\ \bullet \quad h(\alpha) &= \rho_\alpha \sigma_\alpha \\ \bullet \quad c(\alpha) &= \rho_\alpha \end{aligned} \quad (3.7)$$

α_1 ve α_2 iki BNÇS olmak üzere bu sayıların sıralaması aşağıdaki algoritma ile yapılır:

1. $s(\alpha_1) > s(\alpha_2)$ ise $\alpha_1 > \alpha_2$.
2. $s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$ ise,
 - i. $h(\alpha_1) > h(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$
 - ii. $h(\alpha_1) = h(\alpha_2)$ ise,
 - a) $c(\alpha_1) > c(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$.
 - b) $c(\alpha_1) = c(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

Örnek 3.1.1. $\alpha_1 = \left(1, 3, \frac{1}{2}\right)$ ve $\alpha_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right)$ iki BNÇS olsun. O halde

$s(\alpha_1) = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ ve $s(\alpha_2) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \cdot 1} = \frac{2}{3}$ olduğundan $s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$ dir. Tam fonksiyonu kullanarak $h(\alpha_1) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ve $h(\alpha_2) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ bulunur. $h(\alpha_1) = h(\alpha_2)$ olduğundan kesinlik fonksiyonunu ile $c(\alpha_1) = 1$ ve $c(\alpha_2) = \frac{1}{2}$ elde edilir. Böylece $\alpha_1 > \alpha_2$ dir.

Tanım 3.1.6. $\alpha_1 = (\rho_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_1})$ ve $\alpha_2 = (\rho_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_2})$ iki BNÇS olsun. O halde bu iki sayı arasındaki kısmi sıralama

$$\alpha_1 \geq_k \alpha_2 \Leftrightarrow \rho_{\alpha_1} \geq \rho_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_1} \leq \sigma_{\alpha_2} \text{ ve } \tau_{\alpha_1} \leq \tau_{\alpha_2} \quad (3.8)$$

ile tanımlanır. Ayrıca, $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \rho_{\alpha_1} = \rho_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2} \text{ ve } \tau_{\alpha_1} = \tau_{\alpha_2}$ dir.

Bu tanıma göre $\alpha_1 \geq_k \alpha_2$ ise, $\rho_{\alpha_1} \geq \rho_{\alpha_2}$ ve $\frac{1}{\tau_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_1}} \geq \frac{1}{\tau_{\alpha_2} \sigma_{\alpha_2}}$ olduğundan, $\frac{\rho_{\alpha_1}}{\tau_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_1}} > \frac{\rho_{\alpha_2}}{\tau_{\alpha_2} \sigma_{\alpha_2}}$, yani $s(\alpha_1) > s(\alpha_2)$ dir. Eğer $s(\alpha_1) > s(\alpha_2)$ ise $\frac{\rho_{\alpha_1}}{\tau_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_1}} > \frac{\rho_{\alpha_2}}{\tau_{\alpha_2} \sigma_{\alpha_2}}$ olduğundan $\rho_{\alpha_1} > \rho_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_1} < \sigma_{\alpha_2}$ ve $\tau_{\alpha_1} < \tau_{\alpha_2}$, yani $\alpha_1 > \alpha_2$ bulunur. Eğer $s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$ ise $\frac{\rho_{\alpha_1}}{\tau_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_1}} = \frac{\rho_{\alpha_2}}{\tau_{\alpha_2} \sigma_{\alpha_2}}$ dir. Ayrıca $\rho_{\alpha_1} \geq \rho_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_1} \leq \sigma_{\alpha_2}$ ve $\tau_{\alpha_1} \leq \tau_{\alpha_2}$ olduğundan $\rho_{\alpha_1} = \rho_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2}$ ve $\tau_{\alpha_1} = \tau_{\alpha_2}$ bulunur. Yani $\alpha_1 \geq_k \alpha_2$ ise $\alpha_1 \geq \alpha_2$ dir.

Tanım 3.1.7. $\alpha_1 = (\rho_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_1})$, $\alpha_2 = (\rho_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_2})$ ve $\alpha = (\rho_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ üç BNÇS olsun ve $\lambda > 0$. O halde temel sayı işlemleri aşağıdakiler gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \alpha_1 \wedge \alpha_2 = (\min(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}), \max(\tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_2}), \max(\sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_2})) \\
2) \quad & \alpha_1 \vee \alpha_2 = (\max(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}), \min(\tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_2}), \min(\sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_2})) \\
3) \quad & \alpha_1 \oplus \alpha_2 = \left(\frac{(1+2\rho_{\alpha_1})(1+2\rho_{\alpha_2})-1}{2}, \frac{2\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}{(2+\tau_{\alpha_1})(2+\tau_{\alpha_2})-\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}, \frac{2\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}{(2+\sigma_{\alpha_1})(2+\sigma_{\alpha_2})-\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}} \right) \\
4) \quad & \alpha_1 \otimes \alpha_2 = \left(\frac{2\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}{(2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2})-\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}, \frac{(1+2\tau_{\alpha_1})(1+2\tau_{\alpha_2})-1}{2}, \frac{(1+2\sigma_{\alpha_1})(1+2\sigma_{\alpha_2})-1}{2} \right) \\
5) \quad & \lambda\alpha = \left(\frac{(1+2\rho_\alpha)^\lambda-1}{2}, \frac{2\tau_\alpha^\lambda}{(2+\tau_\alpha)^\lambda-\tau_\alpha^\lambda}, \frac{2\sigma_\alpha^\lambda}{(2+\sigma_\alpha)^\lambda-\sigma_\alpha^\lambda} \right) \\
6) \quad & \alpha^\lambda = \left(\frac{2\rho_\alpha^\lambda}{(2+\rho_\alpha)^\lambda-\rho_\alpha^\lambda}, \frac{(1+2\tau_\alpha)^\lambda-1}{2}, \frac{(1+2\sigma_\alpha)^\lambda-1}{2} \right) \\
7) \quad & \alpha^c = \left(\sigma_\alpha, \frac{1}{\tau_\alpha}, \rho_\alpha \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Teorem 3.1.2. α , α_1 ve α_2 üç BNÇS, λ, λ_1 ve $\lambda_2 > 0$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \alpha_1 \oplus \alpha_2 = \alpha_2 \oplus \alpha_1 \\
2) \quad & \alpha_1 \otimes \alpha_2 = \alpha_2 \otimes \alpha_1 \\
3) \quad & \lambda(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \lambda\alpha_1 \oplus \lambda\alpha_2 \\
4) \quad & (\alpha_1 \otimes \alpha_2)^\lambda = \alpha_1^\lambda \otimes \alpha_2^\lambda \\
5) \quad & \lambda_1\alpha \oplus \lambda_2\alpha = (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha \\
6) \quad & \alpha^{\lambda_1} \otimes \alpha^{\lambda_2} = \alpha^{\lambda_1+\lambda_2}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

İspat:

1 ve 2 için ispat açıktır. 3, 4, 5 ve 6 için ispatlar aşağıdaki şekilde verilmiştir;

$$3) \quad \lambda(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \lambda \left(\frac{(1+2\rho_{\alpha_1})(1+2\rho_{\alpha_2})-1}{2}, \frac{2\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}{(2+\tau_{\alpha_1})(2+\tau_{\alpha_2})-\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}, \frac{2\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}{(2+\sigma_{\alpha_1})(2+\sigma_{\alpha_2})-\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\left(1+2\frac{(1+2\rho_{\alpha_1})(1+2\rho_{\alpha_2})-1}{2}\right)^\lambda - 1}{2}, \right. \\
&\quad \frac{2\left(\frac{2\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}{(2+\tau_{\alpha_1})(2+\tau_{\alpha_2})-\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}\right)^\lambda}{\left(2+\frac{2\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}{(2+\tau_{\alpha_1})(2+\tau_{\alpha_2})-\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}\right)^\lambda - \left(\frac{2\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}{(2+\tau_{\alpha_1})(2+\tau_{\alpha_2})-\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}\right)^\lambda}, \\
&\quad \left. \frac{2\left(\frac{2\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}{(2+\sigma_{\alpha_1})(2+\sigma_{\alpha_2})-\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}\right)^\lambda}{\left(2+\frac{2\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}{(2+\sigma_{\alpha_1})(2+\sigma_{\alpha_2})-\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}\right)^\lambda - \left(\frac{2\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}{(2+\sigma_{\alpha_1})(2+\sigma_{\alpha_2})-\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}\right)^\lambda} \right) \\
&= \left(\frac{\left((1+2\rho_{\alpha_1})(1+2\rho_{\alpha_2})\right)^\lambda - 1}{2}, \frac{2(\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2})^\lambda}{\left((2+\tau_{\alpha_1})(2+\tau_{\alpha_2})\right)^\lambda - (\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2})^\lambda}, \right. \\
&\quad \left. \frac{2(\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2})^\lambda}{\left((2+\sigma_{\alpha_1})(2+\sigma_{\alpha_2})\right)^\lambda - (\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2})^\lambda} \right) \\
\lambda\alpha_1 \oplus \lambda\alpha_2 &= \left(\frac{(1+2\rho_{\alpha_1})^\lambda - 1}{2}, \frac{2\tau_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\tau_{\alpha_1})^\lambda - \tau_{\alpha_1}^\lambda}, \frac{2\sigma_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\sigma_{\alpha_1})^\lambda - \sigma_{\alpha_1}^\lambda} \right) \oplus \\
&\quad \left(\frac{(1+2\rho_{\alpha_2})^\lambda - 1}{2}, \frac{2\tau_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\tau_{\alpha_2})^\lambda - \tau_{\alpha_2}^\lambda}, \frac{2\sigma_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\sigma_{\alpha_2})^\lambda - \sigma_{\alpha_2}^\lambda} \right) \\
&= \left(\frac{\left(1+2\frac{(1+2\rho_{\alpha_1})^\lambda - 1}{2}\right)\left(1+2\frac{(1+2\rho_{\alpha_2})^\lambda - 1}{2}\right) - 1}{2}, \right. \\
&\quad \frac{2\frac{\tau_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\tau_{\alpha_1})^\lambda - \tau_{\alpha_1}^\lambda} \cdot \frac{2\tau_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\tau_{\alpha_2})^\lambda - \tau_{\alpha_2}^\lambda}}{\left(2+\frac{2\tau_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\tau_{\alpha_1})^\lambda - \tau_{\alpha_1}^\lambda}\right)\left(2+\frac{2\tau_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\tau_{\alpha_2})^\lambda - \tau_{\alpha_2}^\lambda}\right) - \frac{2\tau_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\tau_{\alpha_1})^\lambda - \tau_{\alpha_1}^\lambda} \cdot \frac{2\tau_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\tau_{\alpha_2})^\lambda - \tau_{\alpha_2}^\lambda}}, \\
&\quad \frac{2\frac{\sigma_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\sigma_{\alpha_1})^\lambda - \sigma_{\alpha_1}^\lambda} \cdot \frac{2\sigma_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\sigma_{\alpha_2})^\lambda - \sigma_{\alpha_2}^\lambda}}{\left(2+\frac{2\sigma_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\sigma_{\alpha_1})^\lambda - \sigma_{\alpha_1}^\lambda}\right)\left(2+\frac{2\sigma_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\sigma_{\alpha_2})^\lambda - \sigma_{\alpha_2}^\lambda}\right) - \frac{2\sigma_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\sigma_{\alpha_1})^\lambda - \sigma_{\alpha_1}^\lambda} \cdot \frac{2\sigma_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\sigma_{\alpha_2})^\lambda - \sigma_{\alpha_2}^\lambda}} \right) \\
&= \left(\frac{\left((1+2\rho_{\alpha_1})(1+2\rho_{\alpha_2})\right)^\lambda - 1}{2}, \frac{2(\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2})^\lambda}{\left((2+\tau_{\alpha_1})(2+\tau_{\alpha_2})\right)^\lambda - (\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2})^\lambda}, \right. \\
&\quad \left. \frac{2(\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2})^\lambda}{\left((2+\sigma_{\alpha_1})(2+\sigma_{\alpha_2})\right)^\lambda - (\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2})^\lambda} \right)
\end{aligned}$$

Böylece $\lambda(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \lambda\alpha_1 \oplus \lambda\alpha_2$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
4) (\alpha_1 \otimes \alpha_2)^\lambda &= \left(\frac{2\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}{(2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2})-\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}, \frac{(1+2\tau_{\alpha_1})(1+2\tau_{\alpha_2})-1}{2}, \frac{(1+2\sigma_{\alpha_1})(1+2\sigma_{\alpha_2})-1}{2} \right)^\lambda \\
&= \left(\frac{2\left(\frac{2\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}{(2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2})-\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}\right)^\lambda}{\left(2+\frac{2\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}{(2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2})-\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}\right)^\lambda - \left(\frac{2\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}{(2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2})-\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}\right)^\lambda}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\left(1+2\frac{2(\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2})^\lambda}{((2+\tau_{\alpha_1})(2+\tau_{\alpha_2}))^\lambda - (\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2})^\lambda}\right)^\lambda - 1}{\frac{(1+2\frac{(1+2\sigma_{\alpha_1})(1+2\sigma_{\alpha_2})-1}{2})^\lambda - 1}{2}} \right) \\
&= \left(\frac{2(\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2})^\lambda}{((2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2}))^\lambda - (\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2})^\lambda}, \frac{((1+2\tau_{\alpha_1})(1+2\tau_{\alpha_2}))^\lambda - 1}{2}, \right. \\
&\quad \left. \frac{((1+2\sigma_{\alpha_1})(1+2\sigma_{\alpha_2}))^\lambda - 1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1^\lambda \otimes \alpha_2^\lambda &= \left(\frac{2\rho_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\rho_{\alpha_1})^\lambda - \rho_{\alpha_1}^\lambda}, \frac{(1+2\tau_{\alpha_1})^\lambda - 1}{2}, \frac{(1+2\sigma_{\alpha_1})^\lambda - 1}{2} \right) \otimes \\
&\quad \left(\frac{2\rho_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\rho_{\alpha_2})^\lambda - \rho_{\alpha_2}^\lambda}, \frac{(1+2\tau_{\alpha_2})^\lambda - 1}{2}, \frac{(1+2\sigma_{\alpha_2})^\lambda - 1}{2} \right) \\
&= \left(\frac{2\frac{2\rho_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\rho_{\alpha_1})^\lambda - \rho_{\alpha_1}^\lambda} \frac{2\rho_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\rho_{\alpha_2})^\lambda - \rho_{\alpha_2}^\lambda}}{\left(2+\frac{2\rho_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\rho_{\alpha_1})^\lambda - \rho_{\alpha_1}^\lambda}\right)\left(2+\frac{2\rho_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\rho_{\alpha_2})^\lambda - \rho_{\alpha_2}^\lambda}\right) - \frac{2\rho_{\alpha_1}^\lambda}{(2+\rho_{\alpha_1})^\lambda - \rho_{\alpha_1}^\lambda} \frac{2\rho_{\alpha_2}^\lambda}{(2+\rho_{\alpha_2})^\lambda - \rho_{\alpha_2}^\lambda}}, \right. \\
&\quad \frac{\left(1+2\frac{(1+2\tau_{\alpha_1})^\lambda - 1}{2}\right)\left(1+2\frac{(1+2\tau_{\alpha_2})^\lambda - 1}{2}\right) - 1}{2}, \\
&\quad \left. \frac{\left(1+2\frac{(1+2\sigma_{\alpha_1})^\lambda - 1}{2}\right)\left(1+2\frac{(1+2\sigma_{\alpha_2})^\lambda - 1}{2}\right) - 1}{2} \right) \\
&= \left(\frac{2(\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2})^\lambda}{((2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2}))^\lambda - (\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2})^\lambda}, \frac{((1+2\tau_{\alpha_1})(1+2\tau_{\alpha_2}))^\lambda - 1}{2}, \right. \\
&\quad \left. \frac{((1+2\sigma_{\alpha_1})(1+2\sigma_{\alpha_2}))^\lambda - 1}{2} \right)
\end{aligned}$$

Böylece $(\alpha_1 \otimes \alpha_2)^\lambda = \alpha_1^\lambda \otimes \alpha_2^\lambda$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
5) \lambda_1 \alpha \oplus \lambda_2 \alpha &= \left(\frac{(1+2\rho_\alpha)^{\lambda_1-1}}{2}, \frac{2\tau_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\tau_\alpha)^{\lambda_1} - \tau_\alpha^{\lambda_1}}, \frac{2\sigma_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\sigma_\alpha)^{\lambda_1} - \sigma_\alpha^{\lambda_1}} \right) \oplus \\
&\quad \left(\frac{(1+2\rho_\alpha)^{\lambda_2-1}}{2}, \frac{2\tau_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\tau_\alpha)^{\lambda_2} - \tau_\alpha^{\lambda_2}}, \frac{2\sigma_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\sigma_\alpha)^{\lambda_2} - \sigma_\alpha^{\lambda_2}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\left(1+2\frac{(1+2\rho_\alpha)^{\lambda_1}-1}{2}\right)\left(1+2\frac{(1+2\rho_\alpha)^{\lambda_2}-1}{2}\right)-1}{2}, \right. \\
&\quad \frac{2\frac{2\tau_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\tau_\alpha)^{\lambda_1}-\tau_\alpha^{\lambda_1}} \frac{2\tau_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\tau_\alpha)^{\lambda_2}-\tau_\alpha^{\lambda_2}}}{\left(2+\frac{2\tau_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\tau_\alpha)^{\lambda_1}-\tau_\alpha^{\lambda_1}}\right)\left(2+\frac{2\tau_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\tau_\alpha)^{\lambda_2}-\tau_\alpha^{\lambda_2}}\right)-\frac{2\tau_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\tau_\alpha)^{\lambda_1}-\tau_\alpha^{\lambda_1}} \frac{2\tau_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\tau_\alpha)^{\lambda_2}-\tau_\alpha^{\lambda_2}}}, \\
&\quad \frac{2\frac{2\sigma_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\sigma_\alpha)^{\lambda_1}-\sigma_\alpha^{\lambda_1}} \frac{2\sigma_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\sigma_\alpha)^{\lambda_2}-\sigma_\alpha^{\lambda_2}}}{\left(2+\frac{2\sigma_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\sigma_\alpha)^{\lambda_1}-\sigma_\alpha^{\lambda_1}}\right)\left(2+\frac{2\sigma_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\sigma_\alpha)^{\lambda_2}-\sigma_\alpha^{\lambda_2}}\right)-\frac{2\sigma_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\sigma_\alpha)^{\lambda_1}-\sigma_\alpha^{\lambda_1}} \frac{2\sigma_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\sigma_\alpha)^{\lambda_2}-\sigma_\alpha^{\lambda_2}}} \\
&= \left(\frac{(1+2\rho_\alpha)^{\lambda_1}(1+2\rho_\alpha)^{\lambda_2}-1}{2}, \frac{2\tau_\alpha^{\lambda_1}\tau_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\tau_\alpha)^{\lambda_1}(2+\tau_\alpha)^{\lambda_2}-\tau_\alpha^{\lambda_1}\tau_\alpha^{\lambda_2}}, \right. \\
&\quad \left. \frac{2\sigma_\alpha^{\lambda_1}\sigma_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\sigma_\alpha)^{\lambda_1}(2+\sigma_\alpha)^{\lambda_2}-\sigma_\alpha^{\lambda_1}\sigma_\alpha^{\lambda_2}} \right) \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha.
\end{aligned}$$

Böylece $\lambda_1\alpha \oplus \lambda_2\alpha = (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
6) \alpha^{\lambda_1} \otimes \alpha^{\lambda_2} &= \left(\frac{2\rho_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\rho_\alpha)^{\lambda_1}-\rho_\alpha^{\lambda_1}}, \frac{(1+2\tau_\alpha)^{\lambda_1}-1}{2}, \frac{(1+2\sigma_\alpha)^{\lambda_1}-1}{2} \right) \otimes \\
&\quad \left(\frac{2\rho_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\rho_\alpha)^{\lambda_2}-\rho_\alpha^{\lambda_2}}, \frac{(1+2\tau_\alpha)^{\lambda_2}-1}{2}, \frac{(1+2\sigma_\alpha)^{\lambda_2}-1}{2} \right) \\
&= \left(\frac{2\frac{2\rho_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\rho_\alpha)^{\lambda_1}-\rho_\alpha^{\lambda_1}} \frac{2\rho_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\rho_\alpha)^{\lambda_2}-\rho_\alpha^{\lambda_2}}}{\left(2+\frac{2\rho_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\rho_\alpha)^{\lambda_1}-\rho_\alpha^{\lambda_1}}\right)\left(2+\frac{2\rho_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\rho_\alpha)^{\lambda_2}-\rho_\alpha^{\lambda_2}}\right)-\frac{2\rho_\alpha^{\lambda_1}}{(2+\rho_\alpha)^{\lambda_1}-\rho_\alpha^{\lambda_1}} \frac{2\rho_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\rho_\alpha)^{\lambda_2}-\rho_\alpha^{\lambda_2}}}, \right. \\
&\quad \frac{\left(1+2\frac{(1+2\tau_\alpha)^{\lambda_1}-1}{2}\right)\left(1+2\frac{(1+2\tau_\alpha)^{\lambda_2}-1}{2}\right)-1}{2}, \\
&\quad \left. \frac{\left(1+2\frac{(1+2\sigma_\alpha)^{\lambda_1}-1}{2}\right)\left(1+2\frac{(1+2\sigma_\alpha)^{\lambda_2}-1}{2}\right)-1}{2} \right) \\
&= \left(\frac{2\rho_\alpha^{\lambda_1}\rho_\alpha^{\lambda_2}}{(2+\rho_\alpha)^{\lambda_1}(2+\rho_\alpha)^{\lambda_2}-\rho_\alpha^{\lambda_1}\rho_\alpha^{\lambda_2}}, \frac{(1+2\tau_\alpha)^{\lambda_1}(1+2\tau_\alpha)^{\lambda_2}-1}{2}, \right. \\
&\quad \left. \frac{(1+2\sigma_\alpha)^{\lambda_1}(1+2\sigma_\alpha)^{\lambda_2}-1}{2} \right) \\
&= \alpha^{\lambda_1+\lambda_2}
\end{aligned}$$

Böylece $\alpha^{\lambda_1} \otimes \alpha^{\lambda_2} = \alpha^{\lambda_1+\lambda_2}$ olduğu ispatlanır.

Teorem 3.1.3. α , α_1 ve α_2 üç BNÇS ve $\lambda > 0$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \alpha_1^c \vee \alpha_2^c = (\alpha_1 \wedge \alpha_2)^c \\
2) \quad & \alpha_1^c \wedge \alpha_2^c = (\alpha_1 \vee \alpha_2)^c \\
3) \quad & (\alpha^c)^\lambda = (\lambda\alpha)^c \\
4) \quad & \lambda(\alpha^c) = (\alpha^\lambda)^c \\
5) \quad & \alpha_1^c \oplus \alpha_2^c = (\alpha_1 \otimes \alpha_2)^c \\
6) \quad & \alpha_1^c \otimes \alpha_2^c = (\alpha_1 \oplus \alpha_2)^c
\end{aligned} \tag{3.11}$$

İspat: 1 ve 2 için ispat açıktır. 3, 4, 5 ve 6 için ispatlar şu şekilde verilmiştir;

$$\begin{aligned}
3) \quad & (\alpha^c)^\lambda = \left(\sigma_\alpha, \frac{1}{\tau_\alpha}, \rho_\alpha \right)^\lambda = \left(\frac{2\sigma_\alpha^\lambda}{(2+\sigma_\alpha)^\lambda - \sigma_\alpha^\lambda}, \frac{\left(1+2\frac{1}{\tau_\alpha}\right)^\lambda - 1}{2}, \frac{(1+2\rho_\alpha)^\lambda - 1}{2} \right) \\
& = \left(\frac{2\sigma_\alpha^\lambda}{(2+\sigma_\alpha)^\lambda - \sigma_\alpha^\lambda}, \frac{\frac{(\tau_\alpha+2)^\lambda}{\tau_\alpha^\lambda} - 1}{2}, \frac{(1+2\rho_\alpha)^\lambda - 1}{2} \right) \\
& = \left(\frac{2\sigma_\alpha^\lambda}{(2+\sigma_\alpha)^\lambda - \sigma_\alpha^\lambda}, \frac{(2+\tau_\alpha)^\lambda - \tau_\alpha^\lambda}{2\tau_\alpha^\lambda}, \frac{(1+2\rho_\alpha)^\lambda - 1}{2} \right) \\
& = \left(\frac{(1+2\rho_\alpha)^\lambda - 1}{2}, \frac{2\tau_\alpha^\lambda}{(2+\tau_\alpha)^\lambda - \tau_\alpha^\lambda}, \frac{2\sigma_\alpha^\lambda}{(2+\sigma_\alpha)^\lambda - \sigma_\alpha^\lambda} \right)^c = (\lambda\alpha)^c \\
4) \quad & \lambda(\alpha^c) = \lambda \left(\sigma_\alpha, \frac{1}{\tau_\alpha}, \rho_\alpha \right) = \left(\frac{(1+2\sigma_\alpha)^\lambda - 1}{2}, \frac{2\left(\frac{1}{\tau_\alpha}\right)^\lambda}{\left(2+\frac{1}{\tau_\alpha}\right)^\lambda - \left(\frac{1}{\tau_\alpha}\right)^\lambda}, \frac{2\rho_\alpha^\lambda}{(2+\rho_\alpha)^\lambda - \rho_\alpha^\lambda} \right) \\
& = \left(\frac{(1+2\sigma_\alpha)^\lambda - 1}{2}, \frac{2}{(1+2\tau_\alpha)^\lambda - 1}, \frac{2\rho_\alpha^\lambda}{(2+\rho_\alpha)^\lambda - \rho_\alpha^\lambda} \right) \\
& = \left(\frac{2\rho_\alpha^\lambda}{(2+\rho_\alpha)^\lambda - \rho_\alpha^\lambda}, \frac{(1+2\tau_\alpha)^\lambda - 1}{2}, \frac{(1+2\sigma_\alpha)^\lambda - 1}{2} \right)^c = (\alpha^\lambda)^c \\
5) \quad & \alpha_1^c \oplus \alpha_2^c = \left(\frac{(1+2\sigma_{\alpha_1})(1+2\sigma_{\alpha_2}) - 1}{2}, \frac{2\frac{1}{\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}}{\left(2+\frac{1}{\tau_{\alpha_1}}\right)\left(2+\frac{1}{\tau_{\alpha_2}}\right) - \frac{1}{\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}}, \frac{2\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}{(2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2}) - \rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}} \right) \\
& = \left(\frac{(1+2\sigma_{\alpha_1})(1+2\sigma_{\alpha_2}) - 1}{2}, \frac{\frac{2}{\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}}{\frac{(1+2\tau_{\alpha_1})(1+2\tau_{\alpha_2})}{\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}} - \frac{1}{\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}}, \frac{2\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}{(2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2}) - \rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}} \right) \\
& = \left(\frac{(1+2\sigma_{\alpha_1})(1+2\sigma_{\alpha_2}) - 1}{2}, \frac{2}{(1+2\tau_{\alpha_1})(1+2\tau_{\alpha_2}) - 1}, \frac{2\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}{(2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2}) - \rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}} \right) \\
& = \left(\frac{2\rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}{(2+\rho_{\alpha_1})(2+\rho_{\alpha_2}) - \rho_{\alpha_1}\rho_{\alpha_2}}, \frac{(1+2\tau_{\alpha_1})(1+2\tau_{\alpha_2}) - 1}{2}, \frac{(1+2\sigma_{\alpha_1})(1+2\sigma_{\alpha_2}) - 1}{2} \right)^c \\
& = (\alpha_1 \otimes \alpha_2)^c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad \alpha_1^c \otimes \alpha_2^c &= \left(\frac{2\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}{(2+\sigma_{\alpha_1})(2+\sigma_{\alpha_2})-\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}, \frac{\left(1+\frac{2}{\tau_{\alpha_1}}\right)\left(1+\frac{2}{\tau_{\alpha_2}}\right)-1}{2}, \frac{(1+2\rho_{\alpha_1})(1+2\rho_{\alpha_2})-1}{2} \right) \\
&= \left(\frac{2\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}{(2+\sigma_{\alpha_1})(2+\sigma_{\alpha_2})-\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}, \frac{(2+\tau_{\alpha_1})(2+\tau_{\alpha_2})-\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}{\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}, \frac{(1+2\rho_{\alpha_1})(1+2\rho_{\alpha_2})-1}{2} \right) \\
&= \left(\frac{(1+2\rho_{\alpha_1})(1+2\rho_{\alpha_2})-1}{2}, \frac{\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}{(2+\tau_{\alpha_1})(2+\tau_{\alpha_2})-\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}}, \frac{2\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}}{(2+\sigma_{\alpha_1})(2+\sigma_{\alpha_2})-\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}} \right)^c \\
&= (\alpha_1 \oplus \alpha_2)^c
\end{aligned}$$

Tanım 3.1.8. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $\Phi(X)$, X üzerindeki bütün basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal kümelerin kümesi ve $A, B \in \Phi(X)$ için $d: \Phi(X) \times \Phi(X) \rightarrow [0,1]$ bir fonksiyon olmak üzere, $d(A, B)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa bu fonksiyona A ile B arasındaki uzaklık denir.

- 1) $0 \leq d(A, B) \leq 1$,
- 2) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,
- 3) $d(A, B) = d(B, A)$,
- 4) $A \subseteq B \subseteq C$ ise $d(A, C) \geq d(A, B)$ ve $d(A, C) \geq d(B, C)$,

(3.12)

Tanım 3.1.9. $A, B \in X$ iki BNÇK olsun. $\lambda \geq 1$ için

$$d_G(A, B) = \left[\frac{1}{2^\lambda 3n} \sum_{i=1}^n \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right|^\lambda \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}} \quad (3.13)$$

fonksiyonuna A ile B arasındaki genelleştirilmiş BNÇ uzaklık denir.

Teorem 3.1.4. $A, B \in \Phi(X)$ iki BNÇK olsun. $d_G(A, B)$, A ile B arasında bir uzaklık ölçüsüdür.

İspat: 2 ve 3'ün sağlandığı açıktır. Aşağıda 1 ve 3'ün ispatı gösterilmiştir.

$\frac{1}{9} \leq \rho_A(x_i) \leq 9$ ve $\frac{1}{9} \leq \rho_B(x_i) \leq 9$ şartlarından, $\frac{1}{81} \leq \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \leq 81$ dir. Logaritma fonksiyonu artan ve $\lambda \geq 1$ olduğundan, $-2 \leq \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \leq 2$ buradan da

$0 \leq \left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right|^\lambda \leq 2^\lambda$ dir. Benzer işlemlerle $\tau_A(x_i)$ ve $\sigma_A(x_i)$ için aynı eşitsizlikler elde edilir. O halde

$$0 \leq \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right|^\lambda \right) \leq 3 \cdot 2^\lambda \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left[\frac{1}{2^{\lambda 3n}} \sum_{i=1}^n \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right|^\lambda \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2^{\lambda 3n}} \cdot n \cdot 3 \cdot 2^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \end{aligned}$$

$$0 \leq d_G(A, B) \leq 1^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Böylece, $\forall \lambda \geq 1$ için $0 \leq d_G(A, B) \leq 1$ sağlanır.

Şimdi $d_G(A, B)$ 'nin (4) şartını sağladığını gösterelim. Eşitlik (3.5) ile $A \subseteq B \subseteq C$ yi sağlayan her BNÇK için;

$$\rho_A(x) \leq \rho_B(x) \leq \rho_C(x), \tau_A(x) \geq \tau_B(x) \geq \tau_C(x), \sigma_A(x) \geq \sigma_B(x) \geq \sigma_C(x)$$

yazılabilir. Logaritma fonksiyonu $\left[\frac{1}{9}, 9 \right]$ aralığında artan ve $\lambda \geq 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \log_9 \rho_A(x_i) \leq \log_9 \rho_B(x_i) \leq \log_9 \rho_C(x_i) &\Rightarrow |\log_9 \rho_A(x_i) - \log_9 \rho_C(x_i)|^\lambda \\ &\geq |\log_9 \rho_A(x_i) - \log_9 \rho_B(x_i)|^\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_9 \tau_A(x_i) \geq \log_9 \tau_B(x_i) \geq \log_9 \tau_C(x_i) &\Rightarrow |\log_9 \tau_A(x_i) - \log_9 \tau_C(x_i)|^\lambda \\ &\geq |\log_9 \tau_A(x_i) - \log_9 \tau_B(x_i)|^\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_9 \sigma_A(x_i) \geq \log_9 \sigma_B(x_i) \geq \log_9 \sigma_C(x_i) &\Rightarrow |\log_9 \sigma_A(x_i) - \log_9 \sigma_C(x_i)|^\lambda \\ &\geq |\log_9 \sigma_A(x_i) - \log_9 \sigma_B(x_i)|^\lambda \end{aligned}$$

bulunur. $\frac{1}{2^{\lambda 3n}} > 0$ ve $\log_9 \rho_A(x_i) - \log_9 \rho_C(x_i) = \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_C(x_i)}$ olduğu için,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2^\lambda 3n} \sum_{i=1}^n \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_C(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_C(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_C(x_i)} \right|^\lambda \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}} \\ & \geq \left[\frac{1}{2^\lambda 3n} \sum_{i=1}^n w_i \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right|^\lambda \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Böylece $d_G(A, C) \geq d_G(A, B)$ elde edilir. Benzer şekilde $d_G(A, C) \geq d_G(B, C)$ olduğu da gösterilebilir.

Tanım 3.1.10. $A, B \in \Phi(X)$ iki BNÇK olsun $\lambda = 1$ için

$$d_H(A, B) = \frac{1}{6n} \sum_{i=1}^n \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right| + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right| + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right| \right) \quad (3.14)$$

fonksiyonuna BNÇ Hamming uzaklık ölçüsü denir..

Tanım 3.1.11. $A, B \in \Phi(X)$ iki BNÇK olsun. $\lambda = 2$ için

$$d_E(A, B) = \sqrt{\frac{1}{12n} \sum_{i=1}^n \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right|^2 + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right|^2 + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right|^2 \right)} \quad (3.15)$$

fonksiyonuna BNÇ Öklid uzaklık ölçüsü denir.

Tanım 3.1.12. $A, B \in \Phi(X)$ iki BNÇK olsun. $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ve $\lambda \geq 1$ için

$$d_{wG}(A, B) = \left[\frac{1}{2^\lambda 3n} \sum_{i=1}^n w_i \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right|^\lambda \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}} \quad (3.16)$$

fonksiyonuna genelleştirilmiş ağırlıklı BNÇ uzaklık ölçüsü denir.

Tanım 3.1.13. $A, B \in \Phi(X)$ iki BNÇK olsun. $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ve $\lambda = 1$ için

$$d_{wH}(A, B) = \frac{1}{6n} \sum_{i=1}^n w_i \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right| + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right| + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right| \right) \quad (3.17)$$

fonksiyonuna normalleştirilmiş ağırlıklı BNÇ Hamming uzaklık ölçüsü denir.

Tanım 3.1.14. $A, B \in \Phi(X)$ iki BNÇK olsun. $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ve $\lambda = 2$ için

$$d_{wE}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{12n} \sum_{i=1}^n w_i \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right|^2 + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right|^2 + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right|^2 \right)} \quad (3.18)$$

fonksiyonuna normalleştirilmiş ağırlıklı BNÇ Öklid uzaklık ölçüsü denir.

Tanım 3.1.15. a ve b iki BSÇS olsun. $\lambda \geq 1$ için, a ve b arasındaki uzaklık aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$d_G(a, b) = \left[\frac{1}{2^\lambda 3} \left(\left| \log_9 \frac{\rho_a}{\rho_b} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\tau_a}{\tau_b} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\sigma_a}{\sigma_b} \right|^\lambda \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}} \quad (3.19)$$

Örnek 3.2.2. $a = (9, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$ ve $b = (\frac{1}{9}, 9, 9)$ iki BNÇS olsun. Bu iki sayının Hamming uzaklık ölçüsü:

$$\begin{aligned} d_G(a, b) &= \left[\frac{1}{2 \cdot 3} \left(\left| \log_9 \frac{\rho_a}{\rho_b} \right| + \left| \log_9 \frac{\tau_a}{\tau_b} \right| + \left| \log_9 \frac{\sigma_a}{\sigma_b} \right| \right) \right] \\ &= \left[\frac{1}{6} (2 + 2 + 2) \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.1.3. $A, B \in \Phi(X)$ iki BNÇK olmak üzere aşağıdaki şekilde verilsin.

$$A = \left\{ \langle a_1, 6, \frac{1}{6}, \frac{1}{8} \rangle, \langle a_2, 2, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \rangle, \langle a_3, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, 6 \rangle, \langle a_4, 1, 1, \frac{1}{8} \rangle, \langle a_5, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2 \rangle \right\}$$

$$B = \left\{ \langle b_1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{9} \rangle, \langle b_2, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, 1 \rangle, \langle b_3, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, 4 \rangle, \langle b_4, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \rangle, \langle b_5, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, 4 \rangle \right\}$$

$w = (0.1, 0.1, 0.3, 0.2, 0.3)$ elemanların ağırlıkları olmak üzere, bu iki küme arasındaki ağırlıklandırılmış Hamming uzaklığı;

$$d_{wH}(A, B) = \frac{1}{6 \cdot 5} \sum_{i=1}^5 w_i \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right| + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right| + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right| \right)$$

$$= \frac{1}{6 \cdot 5} \cdot 1.0940 = 0.0365$$

olarak bulunur.

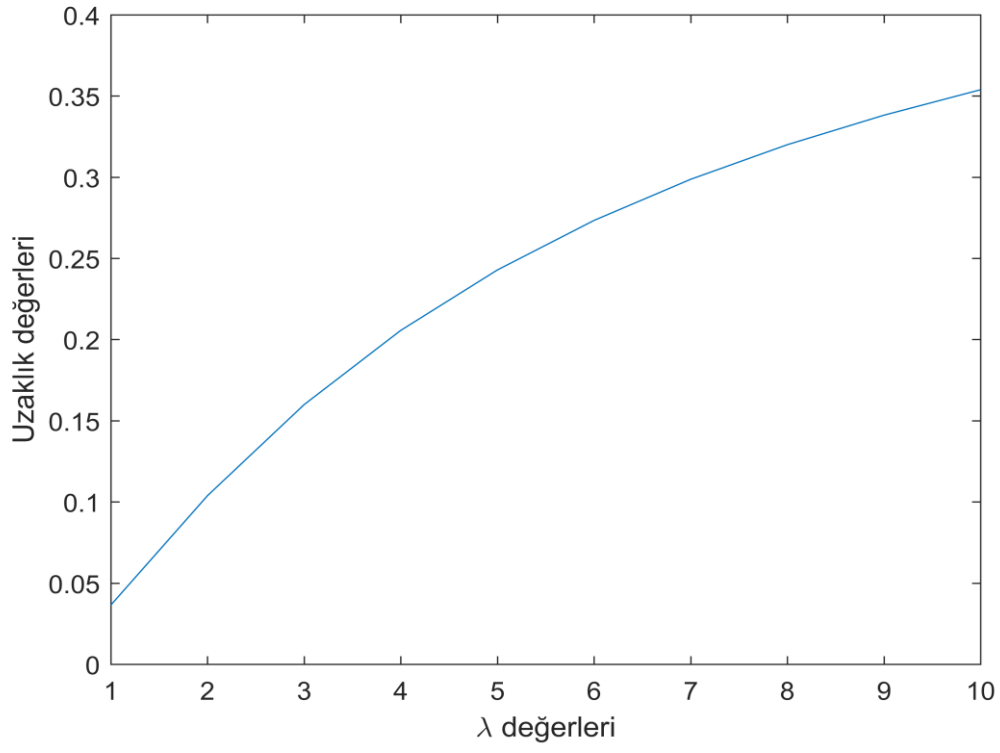
Aynı örnek $\lambda = 2$ için hesaplanırsa, bu iki küme arasındaki ağırlıklandırılmış Öklid uzaklığı

$$d_{wE}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{12 \cdot 5} \sum_{i=1}^5 w_i \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right|^2 + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right|^2 + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right|^2 \right)}$$

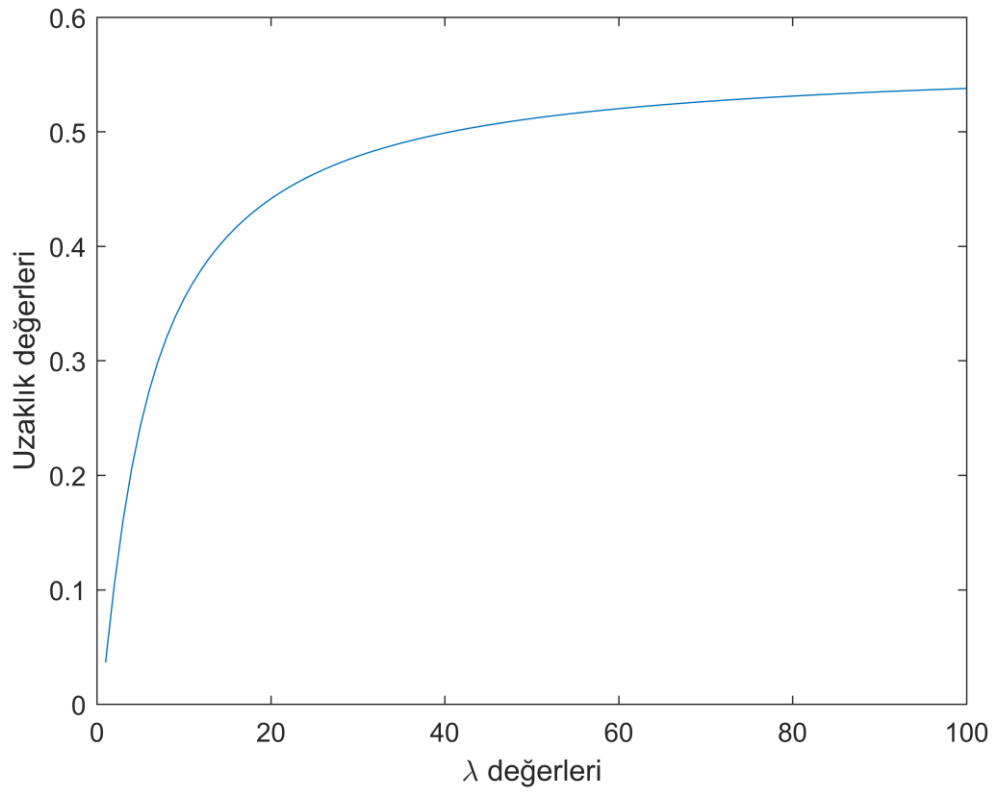
$$= \sqrt{\frac{1}{12 \cdot 5} \cdot 0.6467} = 0.1038$$

olarak bulunur.

Farklı λ 'lar için farklı uzaklıkların çıkması beklenmeyen bir durum değildir. Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 sırasıyla $\lambda \in [1, 10]$ ve $\lambda \in [1, 100]$ için normalleştirilmiş ağırlıklı BNÇ uzaklık değerlerini göstermektedir. $\lambda \in [1, 10]$ için grafik incelendiğinde uzaklık değerleri keskin artış gösterirken, $\lambda \in [1, 100]$ için incelendiğinde $\lambda \in [10, 30]$ için uzaklık değerlerinin artışında keskin bir azalma görülmektedir. $\lambda = 30$ 'dan sonra ise uzaklık değerlerindeki artış yavaşlarken, bir süre sonra nedeysa sabit gitmektedir.



Şekil 3.1. $\lambda = [1,10]$ için BNÇ uzaklık değerleri

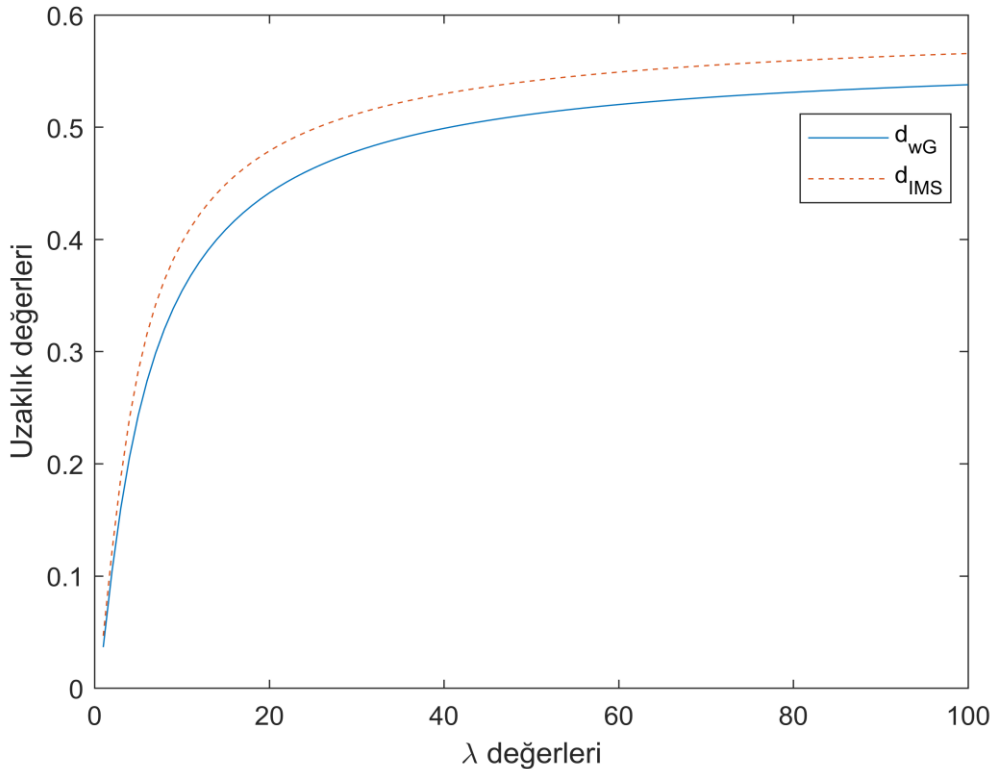


Şekil 3.2. $\lambda = [1,100]$ için BNÇ uzaklık değerleri

BNÇK’de tanımlanan uzaklık ölçülerini SÇK’de tanımlanan uzaklık ölçülerinden ayıran en önemli özellik tereddüt derecesinin bağımsızlığıdır. Aradaki farkı görmek için aynı örnek SÇK’de tanımlı olan uzaklık ölçüsüyle hesaplanmıştır. Jiang vd. (2015) tarafından tanımlanan ve Liao vd. (2019) tarafından ise ağırlıklandırılmış hali verilen genelleştirilmiş ağırlıklı sezgisel çarpımsal uzaklık aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$d_{IMS}(A, B) = \left[\frac{1}{2^{\lambda+1} \cdot n} \sum_{i=1}^n w_i \left(\left| \log_9 \frac{\rho_A(x_i)}{\rho_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\sigma_A(x_i)}{\sigma_B(x_i)} \right|^\lambda + \left| \log_9 \frac{\tau_A(x_i)}{\tau_B(x_i)} \right|^\lambda \right) \right]^{\frac{1}{\lambda}} \quad (3.20)$$

Burada $\tau_A(x_i) = \frac{1}{\rho_A(x_i) \cdot \sigma_A(x_i)}$ ve $\tau_B(x_i) = \frac{1}{\rho_B(x_i) \cdot \sigma_B(x_i)}$ dir. Bu uzaklık Örnek 3.1.3’e aynı ağırlıklar kullanılarak uygulandığında çıkan sonuçlar $\lambda = 1$ için $d_{IMS}(A, B) = 0.0465$ ve $\lambda = 2$ için $d_{IMS}(A, B) = 0.1217$ dir. Bu sonuçların ağırlıklı BNÇ uzaklık değerleri ile kıyaslanması için $d_{IMS}(A, B)$, $\lambda = 100$ ’e kadar alınarak hesaplanmıştır. Aradaki fark Şekil 3.3’te görülmektedir. SÇK’nin belirsizlik derecesinin bağımlı olması, uzaklık sonuçlarını belirgin şekilde etkilemektedir. $d_{IMS}(A, B)$ ve $d_{wG}(A, B)$ arasındaki bu farkın ÇKKV problemlerine etkisi oldukça büyük olacaktır.



Şekil 3.3. $\lambda \in [1,100]$ için d_{wG} ve d_{IMS} değerlerinin kıyaslanması

3.2. Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal Ortalama Operatörleri

Basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal bilgiyi gerçek hayat problemlerinde kullanabilmek için, bu bölümde, iki yeni basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal ortalama operatörü tanımlanmış ve bu operatörlerin bazı özellikleri gösterilmiştir. Metin içinde tekrarlardan kaçınmak için, bütün olabilecek BNÇK'lerin kümesi M olarak alınmıştır.

Tanım 3.2.1. $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i})$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ BNÇK'lerin bir koleksiyonu olsun. $M^n \rightarrow M$ olacak şekilde bir basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal ağırlıklı aritmetik ortalama (BNÇAAO) operatörü

$$\text{BNÇAAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \bigoplus_{i=1}^n (w_i \alpha_i) \quad (3.21)$$

ile tanımlanır. Burada α_i 'nin ağırlık vektörü $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $w_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ dir. Özel olarak, $w = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ ise BNÇAAO operatörü basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal aritmetik ortalama (BNÇAO) operatörüne indirgenir ve

$$\text{BNÇAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \bigoplus_{i=1}^n \alpha_i \quad (3.22)$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.2.1. $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i})$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ BNÇK'lerin bir koleksiyonu ve α_i 'lerin ağırlık vektörü $w_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ şartlarını sağlayan $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \text{BNÇAAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = & \\ \left(\frac{\prod_{i=1}^n (1 + 2\rho_{\alpha_i})^{w_i} - 1}{2}, \frac{2 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \tau_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i}}, \frac{2 \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \sigma_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}} \right). & \quad (3.23) \end{aligned}$$

İspat: Tümevarım yoluyla kolayca ispatlanır:

i) $n = 2$ için

$$w_1 \alpha_1 = \left(\frac{(1 + 2\rho_{\alpha_1})^{w_1} - 1}{2}, \frac{2\tau_{\alpha_1}^{w_1}}{(2 + \tau_{\alpha_1})^{w_1} - \tau_{\alpha_1}^{w_1}}, \frac{2\sigma_{\alpha_1}^{w_1}}{(2 + \sigma_{\alpha_1})^{w_1} - \sigma_{\alpha_1}^{w_1}} \right)$$

$$w_2 \alpha_2 = \left(\frac{(1 + 2\rho_{\alpha_2})^{w_2} - 1}{2}, \frac{2\tau_{\alpha_2}^{w_2}}{(2 + \tau_{\alpha_2})^{w_2} - \tau_{\alpha_2}^{w_2}}, \frac{2\sigma_{\alpha_2}^{w_2}}{(2 + \sigma_{\alpha_2})^{w_2} - \sigma_{\alpha_2}^{w_2}} \right)$$

olduğundan;

$$\text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2) = w_1 \alpha_1 \oplus w_2 \alpha_2$$

$$= \left(\frac{\left(1 + 2\frac{(1+2\rho_{\alpha_1})^{w_1}-1}{2}\right)\left(1 + 2\frac{(1+2\rho_{\alpha_2})^{w_2}-1}{2}\right) - 1}{2}, \right.$$

$$\frac{2\frac{\tau_{\alpha_1}^{w_1}}{(2+\tau_{\alpha_1})^{w_1}-\tau_{\alpha_1}^{w_1}} \cdot \frac{\tau_{\alpha_2}^{w_2}}{(2+\tau_{\alpha_2})^{w_2}-\tau_{\alpha_2}^{w_2}}}{\left(2 + \frac{2\tau_{\alpha_1}^{w_1}}{(2+\tau_{\alpha_1})^{w_1}-\tau_{\alpha_1}^{w_1}}\right)\left(2 + \frac{2\tau_{\alpha_2}^{w_2}}{(2+\tau_{\alpha_2})^{w_2}-\tau_{\alpha_2}^{w_2}}\right) - \frac{2\tau_{\alpha_1}^{w_1}}{(2+\tau_{\alpha_1})^{w_1}-\tau_{\alpha_1}^{w_1}} \cdot \frac{2\tau_{\alpha_2}^{w_2}}{(2+\tau_{\alpha_2})^{w_2}-\tau_{\alpha_2}^{w_2}}}},$$

$$\frac{2\frac{\sigma_{\alpha_1}^{w_1}}{(2+\sigma_{\alpha_1})^{w_1}-\sigma_{\alpha_1}^{w_1}} \cdot \frac{\sigma_{\alpha_2}^{w_2}}{(2+\sigma_{\alpha_2})^{w_2}-\sigma_{\alpha_2}^{w_2}}}{\left(2 + \frac{2\sigma_{\alpha_1}^{w_1}}{(2+\sigma_{\alpha_1})^{w_1}-\sigma_{\alpha_1}^{w_1}}\right)\left(2 + \frac{2\sigma_{\alpha_2}^{w_2}}{(2+\sigma_{\alpha_2})^{w_2}-\sigma_{\alpha_2}^{w_2}}\right) - \frac{2\sigma_{\alpha_1}^{w_1}}{(2+\sigma_{\alpha_1})^{w_1}-\sigma_{\alpha_1}^{w_1}} \cdot \frac{2\sigma_{\alpha_2}^{w_2}}{(2+\sigma_{\alpha_2})^{w_2}-\sigma_{\alpha_2}^{w_2}}}} \right)$$

$$= \left(\frac{(1+2\rho_{\alpha_1})^{w_1}(1+2\rho_{\alpha_2})^{w_2}-1}{2}, \frac{2\tau_{\alpha_1}^{w_1}\tau_{\alpha_2}^{w_2}}{(2+\tau_{\alpha_1})^{w_1}(2+\tau_{\alpha_2})^{w_2}-\tau_{\alpha_1}^{w_1}\tau_{\alpha_2}^{w_2}}, \frac{2\sigma_{\alpha_1}^{w_1}\sigma_{\alpha_2}^{w_2}}{(2+\sigma_{\alpha_1})^{w_1}(2+\sigma_{\alpha_2})^{w_2}-\sigma_{\alpha_1}^{w_1}\sigma_{\alpha_2}^{w_2}} \right)$$

ii) $n = k$ için;

$$\text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) =$$

$$\left(\frac{\prod_{i=1}^k (1 + 2\rho_{\alpha_i})^{w_i} - 1}{2}, \frac{2 \prod_{i=1}^k \tau_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^k (2 + \tau_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^k \tau_{\alpha_i}^{w_i}}, \frac{2 \prod_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^k (2 + \sigma_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i}^{w_i}} \right)$$

olsun.

iii) $n = k + 1$ için;

$$\text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \oplus w_{k+1} \alpha_{k+1} =$$

$$\left(\frac{\left(\frac{2 \prod_{i=1}^k (1+2\rho\alpha_i)^{w_i} - 1}{2} \right) \left(\frac{2 \prod_{i=1}^k (1+2\rho\alpha_{k+1})^{w_{k+1}} - 1}{2} \right) - 1}{2}, \right. \\ \left. \frac{2 \frac{\prod_{i=1}^k \tau_{\alpha_i}^{w_i}}{(2+\tau\alpha_i)^{w_i} - \prod_{i=1}^k \tau_{\alpha_i}^{w_i}} \frac{2 \tau_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}{(2+\tau\alpha_{k+1})^{w_{k+1}} - \tau_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}}{\left(2 + \frac{2 \prod_{i=1}^k \tau_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^k (2+\tau\alpha_i)^{w_i} - \prod_{i=1}^k \tau_{\alpha_i}^{w_i}} \right) \left(2 + \frac{2 \tau_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}{(2+\tau\alpha_{k+1})^{w_{k+1}} - \tau_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}} \right) - \frac{2 \prod_{i=1}^k \tau_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^k (2+\tau\alpha_i)^{w_i} - \prod_{i=1}^k \tau_{\alpha_i}^{w_i}} \frac{2 \tau_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}{(2+\tau\alpha_{k+1})^{w_{k+1}} - \tau_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}}, \right. \\ \left. \frac{2 \frac{\prod_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}{(2+\sigma\alpha_i)^{w_i} - \prod_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i}^{w_i}} \frac{2 \sigma_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}{(2+\sigma\alpha_{k+1})^{w_{k+1}} - \sigma_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}}{\left(2 + \frac{2 \prod_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^k (2+\sigma\alpha_i)^{w_i} - \prod_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i}^{w_i}} \right) \left(2 + \frac{2 \sigma_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}{(2+\sigma\alpha_{k+1})^{w_{k+1}} - \sigma_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}} \right) - \frac{2 \prod_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^k (2+\sigma\alpha_i)^{w_i} - \prod_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i}^{w_i}} \frac{2 \sigma_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}{(2+\sigma\alpha_{k+1})^{w_{k+1}} - \sigma_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}} \right)$$

$\sum_{i=1}^{k+1} w_i = 1$ olduğundan;

$$= \left(\frac{\prod_{i=1}^k (1+2\rho\alpha_i)^{w_i} (1+2\rho\alpha_{k+1})^{w_{k+1}} - 1}{2}, \frac{2 \prod_{i=1}^k \tau_{\alpha_i}^{w_i} \tau_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}{\prod_{i=1}^k (2+\tau\alpha_i)^{w_i} (2+\tau\alpha_{k+1})^{w_{k+1}} - \prod_{i=1}^k \tau_{\alpha_i}^{w_i} \tau_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}, \right. \\ \left. \frac{2 \prod_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i}^{w_i} \sigma_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}}{\prod_{i=1}^k (2+\sigma\alpha_i)^{w_i} (2+\sigma\alpha_{k+1})^{w_{k+1}} - \prod_{i=1}^k \sigma_{\alpha_i}^{w_i} \sigma_{\alpha_{k+1}}^{w_{k+1}}} \right) \\ = \left(\frac{\prod_{i=1}^{k+1} (1+2\rho\alpha_i)^{w_i} - 1}{2}, \frac{2 \prod_{i=1}^{k+1} \tau_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^{k+1} (2+\tau\alpha_i)^{w_i} - \prod_{i=1}^{k+1} \tau_{\alpha_i}^{w_i}}, \frac{2 \prod_{i=1}^{k+1} \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^{k+1} (2+\sigma\alpha_i)^{w_i} - \prod_{i=1}^{k+1} \sigma_{\alpha_i}^{w_i}} \right) \\ = \text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}).$$

Örnek 3.2.1. $\alpha_1 = (9, 9, \frac{1}{9}), \alpha_2 = (9, 9, \frac{1}{9}), \alpha_3 = (9, 9, \frac{1}{9}), \alpha_4 = (9, 9, \frac{1}{9}), \alpha_5 = (9, 9, \frac{1}{9})$ ve $\alpha_6 = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, 9)$ olsun. BNÇAAO operatörü kullanarak elde edilen aritmetik ortalama değeri

$$\text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) = (5.5134, 2.1486, 0.1814)$$

olarak bulunur. Eğer tereddüt derecesi sezgisel çarpımsal kümelerde tanımlandığı $\tau_D(x) = \frac{1}{\rho_D(x)\sigma_D(x)}$ şekliyle alınırsa, tereddüt derecesi üyelik ve non-üyelik derecesine bağlı olduğu için $\tau_D(x)=1$ olur ve aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\text{S}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) = (5.5134, 0.1814, 1)$$

SÇK'lerde bir α SÇS'si $\alpha = (\rho_D(x), \sigma_D(x), \tau_D(x))$ ile gösterilir. $\tau_D(x)=1$ olması, karar vericiyi tereddüt veya belirsiz durumlarda daha objektif veya daha derin bilgi vermesi açısından kısıtlar. Örneğin $\rho_D(x) = \frac{5}{2}$ ve $\sigma_D(x) = \frac{1}{3}$ olarak alınsa bile, $\tau_D(x) = \frac{6}{5}$ olacağından karar verici tereddüt bilgisini diğer iki bilgiye göre vermek zorunda kalacaktır. Bu da kendisinin kısıtlanmasına yol açmaktadır. BNÇK'lerde tereddüt derecesi bağımsız olduğundan karar verici istediği değeri atayabilecek ve sonuç daha objektif olacaktır. Benzer örnek neutrosophic kümeler için de verilebilir. Basitleştirilmiş neutrosophic kümelerdeki aritmetik ortalama operatörü uç değerlerde neutrosophic bilgiyi işlemek için yetersiz kalmaktadır.

Tanım 3.2.2. (Peng vd., 2016) $\alpha_i = (T_{\alpha_i}, I_{\alpha_i}, F_{\alpha_i}), (i = 1, 2, \dots, n)$ BNK'lerin bir koleksiyonu olsun. $M^n \rightarrow M$ olacak şekilde bir basitleştirilmiş neutrosophic ağırlıklı aritmetik ortalama (BNAAO) operatörü

$$\text{BNAAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \bigoplus_{i=1}^n (w_i \alpha_i) \quad (3.24)$$

ile tanımlanır ve

$$\text{BNAAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - T_{\alpha_i})^{w_i}, \prod_{i=1}^n (I_{\alpha_i})^{w_i}, \prod_{i=1}^n (F_{\alpha_i})^{w_i} \right) \quad (3.25)$$

ile gösterilebilir. Burada $w_i \in [0,1]$ ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ olmak üzere α_i 'nin ağırlık vektörü $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ dir.

Örnek 3.2.2. $\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (1,0,1), \alpha_3 = (1,0,1), \alpha_4 = (1,0,1), \alpha_5 = (1,0,1)$ ve $\alpha_6 = (0,1,0)$ olsun. BNAAO operatörü ile bütün ağırlıklar eşit alınarak aşağıdaki aritmetik ortalananmış değer elde edilir:

$$\text{BNAAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6) = (1, 0, 0)$$

Görüldüğü üzere, ilk beş sayı $\alpha_i = (1,0,1)$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) iken $\alpha_6 = (0,1,0)$ değerini aldığımda, BNAAO operatörü bu sayıların ortalamasını $(1, 0, 0)$ olarak vermektedir. İlk beş

α_i 'nin üyelik değerleri 1 ve α_6 'nın üyelik değeri 0 iken ortalama operatöründe üyelik kısmı için 0 değeri ortalamayı etkilememektedir. Benzer şekilde α_6 'nın non-üyelik değeri 0 ve diğer beş sayının 1 olmasına rağmen BNAAO operatörü non-üyelik değerlerinin ortalamasını 0 vermektedir. Bu durum aşağıdaki şekilde daha net görülebilir:

$$\alpha_i = \begin{cases} (1,0,1) \\ (1,0,1) \\ (1,0,1) \\ (1,0,1) \\ (1,0,1) \\ (0,1,0) \end{cases} \quad (i = 1,2, \dots, 6)$$

$$\text{BNAAO}(\alpha_i) = (1,0,0)$$

Ortalama operatörü $T_{\alpha_i} = 1$ ($i = 1,2, \dots, 5$) ve $T_{\alpha_6} = 0$ iken üyelik değerleri ortalamasını 1 verirken, aynı non-üyelik değerleri için non-üyelik ortalamasını 0 vermektedir. Bu durum BNAAO operatörünün bazı durumlarla doğru sonuçlar vermeyeceğini göstermektedir ve Örnek 3.2.1'de görüldüğü üzere uç değerlerde BNÇAAO operatörü daha makul ve daha kararlı sonuçlar vermektedir. Bu gibi durumlardan dolayı BNÇK kavramının karar verme problemlerinde daha etkili olacağı söylenebilir.

Tanım 3.2.3. $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i})$, ($i = 1,2, \dots, n$) BNÇK'lerin bir koleksiyonu olsun. $M^n \rightarrow M$ olacak şekilde bir basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal ağırlıklı geometrik ortalama (BNÇAGO) operatörü

$$\text{BNÇAGO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \bigotimes_{i=1}^n \alpha_i^{w_i} \quad (3.26)$$

ile tanımlanır. Burada α_i 'nin ağırlık vektörü $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $w_i \in [0,1]$ ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ dir. Özel olarak, $w = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ ise BNÇAGO operatörü basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal geometrik ortalama (BNÇGO) operatörüne indirgenir.

$$\text{BNÇGO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \bigotimes_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{1}{n}} \quad (3.27)$$

Teorem 3.2.2. $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i})$, ($i = 1,2, \dots, n$) BNÇK'lerin bir koleksiyonu, α_i 'lerin ağırlık vektörü de $w_i \in [0,1]$ ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ şartlarını sağlayan $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ olsun.

$$\text{BN}\check{\text{C}}\text{AGO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\frac{2 \prod_{i=1}^n \rho_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \rho_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \rho_{\alpha_i}^{w_i}}, \frac{\prod_{i=1}^n (1 + 2\tau_{\alpha_i})^{w_i} - 1}{2}, \frac{\prod_{i=1}^n (1 + 2\sigma_{\alpha_i})^{w_i} - 1}{2} \right) \quad (3.28)$$

Eşitlik (3.28)'nin ispatı Eşitlik (3.23)'de olduğu gibi tümevarım yöntemiyle kolaylıkla gösterilebilir. Genellikle ortalama operatörlerinin eş güçlülük, monotonluk ve sınırlılık özelliklerini sağlamaları beklenir. Bu çalışmada tanımlanan BNÇAAO operatörünün bu özellikleri sağladığı aşağıda gösterilmiştir.

Özellik 1 (Eş güçlülük): $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i}), (i = 1, 2, \dots, n)$ BNÇK'lerin bir koleksiyonu olsun. Eğer bütün α_i BNÇS'leri eşitse, yani $\forall i$ için, $\alpha_i = \alpha = (\rho_{\alpha}, \tau_{\alpha}, \sigma_{\alpha})$ ise;

$$\text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) = \bigoplus_{i=1}^n (w_i \alpha_i) = \alpha. \quad (3.29)$$

İspat: Eğer $\alpha_i = \alpha = (\rho_{\alpha}, \tau_{\alpha}, \sigma_{\alpha})$ ise

$$\begin{aligned} \text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) &= \left(\frac{\prod_{i=1}^n (1+2\rho_{\alpha})^{w_i-1}}{2}, \frac{2 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2+\tau_{\alpha})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha}^{w_i}}, \frac{2 \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2+\sigma_{\alpha})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha}^{w_i}} \right) \\ &= \left(\frac{(1+2\rho_{\alpha})^{\sum_{i=1}^n w_i - 1}}{2}, \frac{2\tau_{\alpha}^{\sum_{i=1}^n w_i}}{(2+\tau_{\alpha})^{\sum_{i=1}^n w_i} - \tau_{\alpha}^{\sum_{i=1}^n w_i}}, \frac{2\sigma_{\alpha}^{\sum_{i=1}^n w_i}}{(2+\sigma_{\alpha})^{\sum_{i=1}^n w_i} - \sigma_{\alpha}^{\sum_{i=1}^n w_i}} \right) \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^n w_i = 1$ olduğundan,

$$\text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) = \left(\frac{(1+2\rho_{\alpha})-1}{2}, \frac{2\tau_{\alpha}}{(2+\tau_{\alpha})-\tau_{\alpha}}, \frac{2\sigma_{\alpha}}{(2+\sigma_{\alpha})-\sigma_{\alpha}} \right) = (\rho_{\alpha}, \tau_{\alpha}, \sigma_{\alpha}) = \alpha \text{ bulunur.}$$

Özellik 2 (Monotonluk): $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i})$ ve $\bar{\alpha}_i = (\rho_{\bar{\alpha}_i}, \tau_{\bar{\alpha}_i}, \sigma_{\bar{\alpha}_i})$ BNÇS'lerin iki koleksiyonu olsun. Eğer $\forall i$ için $\alpha_i \leq \bar{\alpha}_i$ ise

$$\text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n). \quad (3.30)$$

İspat: BNÇS'ların iki koleksiyonu $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i})$ ve $\bar{\alpha}_i = (\rho_{\bar{\alpha}_i}, \tau_{\bar{\alpha}_i}, \sigma_{\bar{\alpha}_i})$ olsun. Eğer $\forall i$ için $\alpha_i \leq \bar{\alpha}_i$ ise, Eşitlik (3.8)'den $\rho_{\alpha_i} \leq \rho_{\bar{\alpha}_i}$, $\tau_{\alpha_i} \geq \tau_{\bar{\alpha}_i}$ ve $\sigma_{\alpha_i} \geq \sigma_{\bar{\alpha}_i}$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha_i} \leq \rho_{\bar{\alpha}_i} &\Rightarrow (1 + 2\rho_{\alpha_i}) \leq (1 + 2\rho_{\bar{\alpha}_i}) \Rightarrow (1 + 2\rho_{\alpha_i})^{w_i} \leq (1 + 2\rho_{\bar{\alpha}_i})^{w_i} \\ &\Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^n (1 + 2\rho_{\bar{\alpha}_i})^{w_i} - 1}{2} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1 + 2\rho_{\alpha_i})^{w_i} - 1}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

elde edilir.

$$\tau_{\alpha_i} \geq \tau_{\bar{\alpha}_i} \Rightarrow 2 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i} \geq 2 \prod_{i=1}^n \tau_{\bar{\alpha}_i}^{w_i} \text{ ve}$$

$\forall i$ için $2 + \tau_{\alpha_i} > \tau_{\alpha_i} \Rightarrow \prod_{i=1}^n (2 + \tau_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i} > 0$ olup benzer işlemler $\bar{\alpha}_i$ için de düşünüldüğünde

$$\Rightarrow \frac{2 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \tau_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i}} \geq \frac{2 \prod_{i=1}^n \tau_{\bar{\alpha}_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \tau_{\bar{\alpha}_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \tau_{\bar{\alpha}_i}^{w_i}} \quad (2)$$

elde edilir.

$$\sigma_{\alpha_i} \geq \sigma_{\bar{\alpha}_i} \Rightarrow 2 \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i} \geq 2 \prod_{i=1}^n \sigma_{\bar{\alpha}_i}^{w_i} \text{ ve}$$

$\forall i$ için $2 + \sigma_{\alpha_i} > \sigma_{\alpha_i} \Rightarrow \prod_{i=1}^n (2 + \sigma_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i} > 0$ olup benzer işlemler $\bar{\alpha}_i$ için de düşünüldüğünde

$$\Rightarrow \frac{2 \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \sigma_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}} \geq \frac{2 \prod_{i=1}^n \sigma_{\bar{\alpha}_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \sigma_{\bar{\alpha}_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \sigma_{\bar{\alpha}_i}^{w_i}} \quad (3)$$

elde edilir. (1),(2) ve (3)'ten $\text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)$ olduğu gösterilmiş olur.

Özellik 3 (Sınırlılık): $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i}), (i = 1, 2, \dots, n)$ BNÇK'lerin bir koleksiyonu olsun ve

$$\alpha^- = \left(\min_i \{\rho_{\alpha_i}\}, \max_i \{\tau_{\alpha_i}\}, \max_i \{\sigma_{\alpha_i}\} \right), \alpha^+ = \left(\max_i \{\rho_{\alpha_i}\}, \min_i \{\tau_{\alpha_i}\}, \min_i \{\sigma_{\alpha_i}\} \right)$$

ile tanımlansın. O halde

$$\alpha^- \leq \text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \alpha^+ \quad (3.31)$$

İspat: Eşitlik (3.23)'deki BNÇAAO operatörü, Özellik 2'deki monotonluk ve Eşitlik (3.8)'deki sıralama kullanılarak sadece $\alpha^- \leq \text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olduğu gösterilecektir. $\text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \alpha^+$ eşitsizliğinin ispatı benzer olduğundan tekrar yapılmayacaktır.

$i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\forall i$ için $\min_i \{\rho_{\alpha_i}\} \leq \rho_{\alpha_i} \leq \max_i \{\rho_{\alpha_i}\}, \min_i \{\tau_{\alpha_i}\} \leq \tau_{\alpha_i} \leq \max_i \{\tau_{\alpha_i}\}$ ve $\min_i \{\sigma_{\alpha_i}\} \leq \sigma_{\alpha_i} \leq \max_i \{\sigma_{\alpha_i}\}$ sıralamaları sağlanmaktadır.

$$i) \min_i \{\rho_{\alpha_i}\} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1+2\rho_{\alpha_i})^{w_i} - 1}{2} :$$

$$\min_i \{\rho_{\alpha_i}\} \leq \rho_{\alpha_i} \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^n (1+2\min_i \{\rho_{\alpha_i}\})^{w_i} - 1}{2} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1+2\rho_{\alpha_i})^{w_i} - 1}{2} \text{ dir.}$$

$\min_i \{\rho_{\alpha_i}\}$ tek bir eleman ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ olduğundan,

$$\frac{\prod_{i=1}^n (1+2\min_i \{\rho_{\alpha_i}\})^{\sum_{i=1}^n w_i} - 1}{2} = \min_i \{\rho_{\alpha_i}\} \text{ bulunur. Böylece,}$$

$$\min_i \{\rho_{\alpha_i}\} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1+2\rho_{\alpha_i})^{w_i} - 1}{2}$$

olduğu gösterilmiş olur.

$$ii) \max_i \{\tau_{\alpha_i}\} \geq \frac{2 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2+\tau_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i}} :$$

$\tau_{\alpha_i} \leq \max_i \{\tau_{\alpha_i}\} \Rightarrow 2 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i} \leq 2 \prod_{i=1}^n \left(\max_i \{\tau_{\alpha_i}\} \right)^{w_i}$ dir. $2 + \tau_{\alpha_i} > \tau_{\alpha_i}$ ise

$\prod_{i=1}^n (2 + \tau_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i} > 0$ bulunur. Benzer düşünceyle $\max_i \{\tau_{\alpha_i}\}$ için de hesaplanırsa,

$$\frac{2 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \tau_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i}} \leq \frac{2 \prod_{i=1}^n \left(\max_i \{\tau_{\alpha_i}\} \right)^{w_i}}{\prod_{i=1}^n \left(2 + \max_i \{\tau_{\alpha_i}\} \right)^{w_i} - \prod_{i=1}^n \left(\max_i \{\tau_{\alpha_i}\} \right)^{w_i}}$$

eşitsizliği elde edilir. $\max_i \{\tau_{\alpha_i}\}$ tek elemanlı olduğundan ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ olmasını kullanarak;

$$\frac{2 \prod_{i=1}^n \left(\max_i \{\tau_{\alpha_i}\} \right)^{w_i}}{\prod_{i=1}^n \left(2 + \max_i \{\tau_{\alpha_i}\} \right)^{w_i} - \prod_{i=1}^n \left(\max_i \{\tau_{\alpha_i}\} \right)^{w_i}} = \max_i \{\tau_{\alpha_i}\}$$

bulunur ve buradan da

$$\max_i \{\tau_{\alpha_i}\} \geq \frac{2 \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \tau_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \tau_{\alpha_i}^{w_i}}$$

olduğu ispatlanır.

$$\text{iii) } \max_i \{\sigma_{\alpha_i}\} \geq \frac{2 \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \sigma_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}} :$$

$\sigma_{\alpha_i} \leq \max_i \{\sigma_{\alpha_i}\} \Rightarrow 2 \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i} \leq 2 \prod_{i=1}^n \left(\max_i \{\sigma_{\alpha_i}\} \right)^{w_i}$ dir. $2 + \sigma_{\alpha_i} > \sigma_{\alpha_i}$ ise

$\prod_{i=1}^n (2 + \sigma_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i} > 0$ olduğu bulunur. Benzer düşünceyle $\max_i \{\sigma_{\alpha_i}\}$ için de hesaplanırsa,

$$\frac{2 \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \sigma_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}} \leq \frac{2 \prod_{i=1}^n (\max_i \{\sigma_{\alpha_i}\})^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \max_i \{\sigma_{\alpha_i}\})^{w_i} - \prod_{i=1}^n (\max_i \{\sigma_{\alpha_i}\})^{w_i}}$$

eşitsizliği elde edilir. $\max_i \{\sigma_{\alpha_i}\}$ tek elemanlı olduğundan ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ olmasını kullanarak,

$$\frac{2 \prod_{i=1}^n (\max_i \{\sigma_{\alpha_i}\})^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \max_i \{\sigma_{\alpha_i}\})^{w_i} - \prod_{i=1}^n (\max_i \{\sigma_{\alpha_i}\})^{w_i}} = \max_i \{\sigma_{\alpha_i}\}$$

bulunur ve buradan da

$$\max_i \{\sigma_{\alpha_i}\} \geq \frac{2 \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}{\prod_{i=1}^n (2 + \sigma_{\alpha_i})^{w_i} - \prod_{i=1}^n \sigma_{\alpha_i}^{w_i}}$$

olduğu gösterilir.

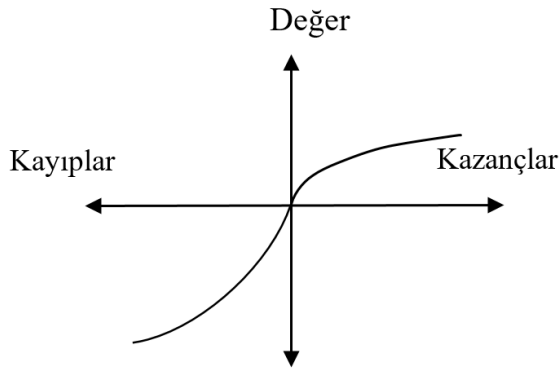
Böylece, i), ii) ve iii)'den $\alpha^- \leq \text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olduğu ispatlanmış olur. Benzer işlemler yapılarak $\text{BN}\check{\text{C}}\text{AAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \alpha^+$ olduğu gösterilebilir.

3.3. Basitleştirilmiş Neutrosophic Çarpımsal TODIM Metodu

Çok kriterli karar verme metodu olarak Gomis ve Lima (1991) tarafından geliştirilen ve Portekizcede etkileşimli çok kriterli karar vermenin kısaltılmışı olan TODIM yöntemi, iki psikolog olan Kahneman ve Tversky (1979) tarafından geliştirilen beklenti teorisine (Prospect Theory) dayanmaktadır. Bu iki psikolog, insanoğlunun kazançlar içeren durumlarda risk ile ilgili olan durumlara göre daha tutucu olma eğilimli olduklarını, diğer bir deyişle insanlar daha büyük risk almak yerine daha güvenli ve daha küçük bir kazancı seçmeyi tercih ettiklerini gözlemlemişlerdir. Diğer bir taraftan, insanların kayıp içeren durumlarda ise risk almaya daha yatkın olduklarını, yani daha küçük bir risk daha güvenli olmasına rağmen daha büyük kayıp riskini göze almayı tercih ettiklerini gözlemlemişlerdir (Rangel vd., 2011). Beklenti teorisi, karar verme işlemini risk durumları altında inceler ve

eşitlik (3.32)'de verilen α kazanç ve β kayıp olmak üzere kuvvet değerleriyle ifade edilir. θ kazanç durumunda yumuşak bir eğri karakteristiği gösterirken, kayıp durumunda ise dik bir eğri olma karakteristiği gösterir. Risk isteksizliğinin $\theta > 1$ olması durumunda, Şekil 3.4, beklenti değer fonksiyonunu S –şeklinde kazanç ve kayıplar için konkav ve konveks olarak göstermektedir (Krohling ve De Souza, 2012). x – eksenin üstünde kalan kısım kazanç durumundaki riske olan isteksizliği, x – eksininin altında kalan kısım ise kayıp durumundaki riske olan isteği göstermektedir:

$$v(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0 \\ -\theta(-x)^\beta, & x < 0 \end{cases} \quad (3.32)$$



Şekil 3.4. Beklenti teorisinin değer fonksiyonu

Diğer karar verme metotlarını kıyasla TODIM metodu karar vericinin davranışsal özelliklerini yansıtabilmektedir. Klasik TODIM metodu şu adımlarla verilmiştir (Gomes ve Lima, 1991):

$A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ alternatiflerin kümesi, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ kriterlerin kümesi ve a_{ij} , A_i alternatifinin C_j kriterine göre değerlendirme bilgisi olmak üzere:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{matrix} & \begin{matrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.33)$$

bir karar matrisi olsun.

Adım 1: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ karar matrisinin $R = (r_{ij})_{m \times n}$ matrisine normalize edilmesi

Karar matrisini elde etmek için

- Fayda kriteri için:

$$r_{ij} = \frac{a_{ij} - \min(a_{ij})}{\max(a_{ij}) - \min(a_{ij})} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.34)$$

- Zarar kriteri için:

$$r_{ij} = \frac{\max(a_{ij}) - a_{ij}}{\max(a_{ij}) - \min(a_{ij})} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.35)$$

denklemleri kullanılır ve elde edilen matrisin bütün elemanları $[0,1]$ değerler alır.

Adım 2: Göreceli ağırlığın hesaplanması

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ ağırlık vektörü ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ olmak üzere w_{cr} göreceli ağırlığı $w_{cr} = \frac{w_c}{w_r}$ ile hesaplanır. Burada $w_r = \max\{w_c \mid c = 1, 2, \dots, n\}$ dir.

Adım 3: Genel baskınlık skorlarının elde edilmesi

A_i alternatifinin A_j alternatifine olan genel baskınlık skoru (gbs)

$$\delta(A_i, A_j) = \sum_{c=1}^n \Phi_c(A_i, A_j) \quad (3.36)$$

ile hesaplanır. Örneğin A_1 in A_2 üzerindeki gbs hesaplanırken

$$\delta(A_1, A_2) = \Phi_1(A_1, A_2) + \Phi_2(A_1, A_2) + \dots + \Phi_n(A_1, A_2) \quad (3.37)$$

formülü kullanılır. Yani kriter sayısı kadar kısmi baskınlık skoru toplanır.

Baskınlık skoru hesaplanırken c . kriter altında A_i alternatifinin A_j alternatifine olan kısmi baskınlık skoru, başka bir deyişle A_i alternatifinin A_j alternatifine olan gbs'ye c . kriterin katkısı aşağıdaki denklemle hesaplanır:

$$\Phi_c(A_i, A_j) = \begin{cases} \sqrt{\frac{w_{cr}}{\sum_{c=1}^m w_{cr}}} \cdot d(r_{ic}, r_{jc}), & \text{if } r_{ic} > r_{jc} \\ 0, & \text{if } r_{ic} = r_{jc} \\ -\frac{1}{\theta} \sqrt{\frac{\sum_{c=1}^m w_{cr}}{w_{cr}}} \cdot d(r_{jc}, r_{ic}), & \text{if } r_{ic} < r_{jc} \end{cases} \quad (3.38)$$

Burada $d(r_{ic}, r_{jc}) = \sqrt{(r_{ic} - r_{jc})^2} = |r_{ic} - r_{jc}|$ (1 boyutta öklid) bilinen uzaklık formülüdür. Eğer $r_{ic} > r_{jc}$ ise $\delta(A_i, A_j)$ genel baskınlık skoru bir kazancı, $r_{ic} < r_{jc}$ ise $\delta(A_i, A_j)$ genel baskınlık skoru bir kaybı gösterir. Bu durum Şekil 3.4'de gösterilen değer fonksiyonunun beklenti teorisindeki bir uygulamasıdır. Buradaki θ , kayıpların azaltma çarpanı olarak adlandırılır. Burada Krohling ve De Souza (2012) ile Kahneman ve Tversky (1979) ideal değerlerin $\alpha = \beta = 0.88$ ve $\theta = 2.25$ olduğunu belirtmişlerdir. Qin vd., (2017), Krohling ve De Souza'nın ifadelerini destekleyerek azaltma çarpanı θ 'yı $[1, 2.5]$ aralığında incelemiş ve $\theta = 2.25$ değerinin karar verme problemlerinde optimal değer olduğunu doğrulamıştır. Ayrıca $\theta > 2$ için alternatiflerin sırasının değiştiğini göstermişlerdir.

Adım 4: Alternatiflerin global değerinin elde edilmesi

Her bir alternatifin diğerine olan genel baskınlık skorları bir matris oluşturur. Bu matristeki elemanları aşağıdaki formüle göre normalize edilerek her bir alternatifin global değerine ulaşılır:

$$\xi_i = \frac{\sum_{j=1}^n \delta(A_i, A_j) - \min_i (\sum_{j=1}^n \delta(A_i, A_j))}{\max_i (\sum_{j=1}^n \delta(A_i, A_j)) - \min_i (\sum_{j=1}^n \delta(A_i, A_j))} \quad (3.39)$$

Son olarak ξ_i değerlerinin sıralanmasıyla alternatiflerin sırası elde edilir. Global değeri büyük olan alternatifin seçimi daha önceliklidir.

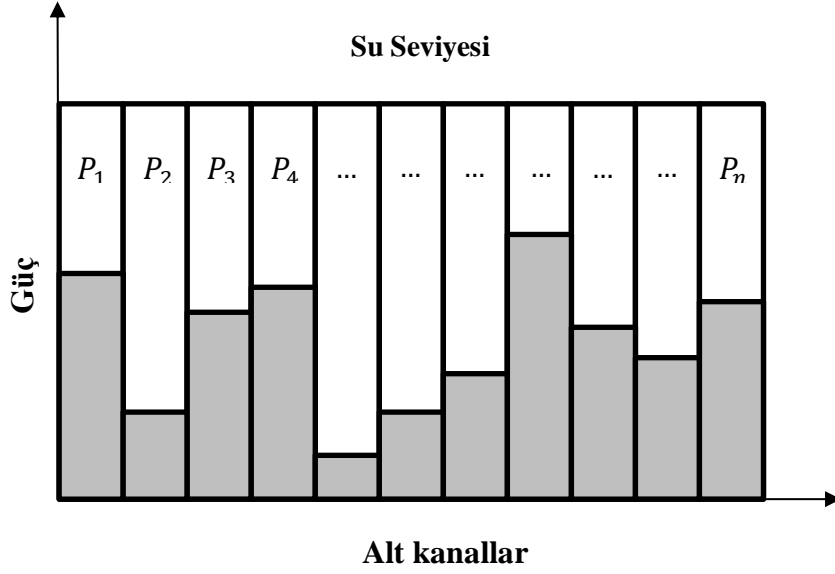
3.3.1. Su Dolum Algoritması ile Kriter Ağırlığı Belirlenmesi

Kriterler ağırlıkları karar verme sürecinde kullanılan en önemli parametrelerden biri olmakla beraber, hemen hemen bütün karar verme problemlerindeki alternatiflerin sıralanmasında çok etkili olduğu gösterilmiştir. ÇKKV problemlerindeki kriter ağırlıkları çoğunlukla karar vericiler tarafından verilmektedir fakat son yıllarda kriter ağırlıklarının karar matrislerinden elde edilmesine yönelik birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemler, tek değerli sayılar, bulanık sayılar ve sezgisel bulanık sayılar kullanılarak oluşturulan ÇKKV problemlerinde yeterli sayıda olsa da, bu yöntemlerin neutrosophic sayıların kullanıldığı problemlerde halen daha geliştirilmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaçla, bu bölümde BNÇK’de kriter ağırlıklarını belirlemek için Liu vd. (2018) tarafından verilen su dolum teorisi tabanlı kriter ağırlığı bulma metodu basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal sayılara genişletilmiştir.

Su dolum teorisi bilişim teorisi, iletişim sistemleri ve görüntü işleme teknikleri gibi bir çok alanda yaygın olarak kullanılan bir kavramdır (Carli ve Dotoli, 2017). Eğer bir havuz düzgün olmayan bir zemine sahipse, bu zemin su ile doldurulmaya başlandığında bir süre sonra düzgün olmayan yerlerdeki boş yerlerin de suyla dolduğu görülür. Bu basit fizik kuralı ağ problemlerine uygulanırsa, yani su yerine enerji kullanılırsa ağın her bir kanalı, bozulan veya limitine ulaşan alt kanalları boş durumda olanlarla eşitler (Boyd ve Vandenberghe, 2004). Teorinin ana fikri, sinyal/gürültü oranını kullanarak çok gürültülü kanalları bırakarak gürültüsü daha az olan kanallara gücü aktarmak ve böylece kanal kapasitesinin kullanımını en üst düzeye çıkarıp verimliliği arttırmaktır. Şekil 3.5’de verilen su dolum teorisi örneklendirmesinde kanal kapasitesinin formülü

$$T = \sum_{i=1}^n \log_2 \left(1 + \frac{\kappa_i^2 P_i}{\beta_i^2} \right) \quad (3.40)$$

ile verilmektedir. Burada κ_i kazanç, P_i alt kanal i ’ye tahsis edilen güç ve β_i alt kanal i ’nin gürültü farkıdır. Bu alt kanallar karar verme problemlerindeki kriter olarak kabul edilmesi durumunda, her bir alt kanala atanan güç kriter ağırlığı olarak alınabilir. Böylece, güç dağılım değerleri; ağırlıklar, kazanç; ortalama ve gürültü farkı; standart sapma olarak alınırsa, su dolum teorisi kriter ağırlıklarını belirlemek için kullanılabilir.



Şekil 3.5. Su dolum teorisinin grafik olarak gösterimi

Su dolum teorisini BNÇK evrenine uygulayabilmek için BNÇ standart ortalama ve BNÇ standart sapma gibi bazı tanımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Standart ortalama bilindik aritmetik ortalama olduğu için direkt olarak BNÇS'a uygulanabilir. Fakat çıkan sonuç bir BNÇS olacağından bu değer skor fonksiyonuyla tek değere düşürülmesi gerekmektedir. $\alpha = (\rho_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ bir BNÇS olmak üzere, ρ_α üyelik, τ_α tereddüt ve σ_α non-üyelik değerleri $\frac{1}{9} \leq \rho_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha \leq 9$ ve skor fonksiyonu $s(\alpha) = \frac{\rho_\alpha}{\tau_\alpha \cdot \sigma_\alpha}$ ile tanımlı olduğundan, bu değer

$$\frac{1}{9^3} \leq \frac{\rho_\alpha}{\tau_\alpha \cdot \sigma_\alpha} \leq 9^3$$

aralığındadır. Ortalamayı ve standart sapmayı bir arada kullanabilmek için bu aralığın BNÇK küme aralığı olan $\left[\frac{1}{9}, 9\right]$ aralığına indirgenmesi gerekmektedir. Bu ayarlamayla birlikte su dolum teorisinin BNÇS'a uygulanması daha doğru ve kararlı sonuçlar verecektir.

Tanım 3.3.1. $\eta: \left[\frac{1}{9}, 9\right] \times \left[\frac{1}{9}, 9\right] \times \left[\frac{1}{9}, 9\right] \rightarrow \left[\frac{1}{9}, 9\right]$ BNÇS üzerinde bir fonksiyon, $\alpha = (\rho_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ bir BNÇS ve $s(\alpha) = \frac{\rho_\alpha}{\tau_\alpha \cdot \sigma_\alpha}$ bu sayının skor fonksiyonu olmak üzere

$$\eta(\alpha) = \sqrt[3]{s(\alpha)} \quad (3.41)$$

fonksiyonuna bu α 'nın normalleştirilmiş skor fonksiyonu denir.

Tanım 3.3.2. $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i})$ BNÇS'lerin bir koleksiyonu olsun. O halde

$$\text{BNÇAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \oplus_{i=1}^n \alpha_i \quad (3.42)$$

olmak üzere, n tane α_i BNÇS'sinin ortalaması

$$\phi = \eta(\text{BNÇAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) = \sqrt[3]{s(\text{BNÇAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))} \quad (3.43)$$

ile tanımlanır ve normalleştirilmiş BNÇ ortalama olarak adlandırılır. BNÇS'nin diğer bir normalleştirilmiş ortalaması da BNÇAO operatörü kullanmak yerine eşitlik (3.27)'te verilen BNÇGO operatörü kullanılarak bulunabilir.

Tanım 3.3.3. $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\alpha_i = (\rho_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_i})$ BNÇS'in bir koleksiyonu olsun. O halde $\eta(\alpha_i)$ her bir α_i 'nin normalleştirilmiş skoru ve ϕ bu sayıların normalleştirilmiş BNÇ ortalaması olmak üzere α_i BNÇS'lerinin standart sapması,

$$\varsigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\eta(\alpha_i) - \phi]^2} \quad (3.44)$$

ile tanımlanır ve BNÇ standart sapma olarak adlandırılır.

Örnek 3.3.1. $\alpha_1 = (9, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}), \alpha_2 = (4, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}), \alpha_3 = (3, 1, \frac{1}{4}), \alpha_4 = (5, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}), \alpha_5 = (1, 1, \frac{1}{3}), \alpha_6 = (1, 3, 1)$ ve $\alpha_7 = (\frac{1}{5}, 2, \frac{1}{2})$ yedi tane BNÇS olsun. O halde bu sayıların normalleştirilmiş BNÇ ortalaması eşitlik (3.42)'de verilen BNÇAO operatörü ile

$$\phi = \eta(\text{BNÇAO}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7)) = \eta(2.2840, 0.7148, 0.2856)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2.2840}{(0.7148) \times (0.2856)}} = \sqrt[3]{11.1867} = 2.2365$$

olarak hesaplanır. Burada ortalaması alınmış sayıların skoru 11.1867 dir. Ayrıca bu sayıların standart sapması:

$$\begin{aligned} \varsigma &= \sqrt{\frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 [\eta(\alpha_i) - \phi]^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{7} \left((9 - 2.2365)^2 + (2.8845 - 2.2365)^2 + (2.2894 - 2.2365)^2 + (3.5569 - 2.2365)^2 \right. \\ &\quad \left. + (1.4422 - 2.2365)^2 + (0.6934 - 2.2365)^2 + (0.5848 - 2.2365)^2 \right)} \\ &= 2.7803 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Eğer bu örnekte normalleştirilmiş skor fonksiyonu kullanılsaydı ortalama 11.1867 olarak bulunurken standart sapma 271.8032 olarak hesaplanacaktı. Bu değerler, normalleştirme işleminin BNÇS’lerde ne kadar önemli ve gerekli olduğunu ortaya koymaktadır.

Bu tanımlarla birlikte, su dolum teorisi tabanlı kriter ağırlıklarının belirlenmesini sağlayan optimizasyon problemi aşağıdaki tanımda verilmiştir.

Tanım 3.3.4. $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere w_i , C_i kriterlerinin ağırlıkları olsun. O halde, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, ϕ_i BNÇ ortalama ve ς_i BNÇ standart sapma olmak üzere kriterlerin toplam kapasitesi T_w

$$T_w = \sum_{i=1}^n \log_2 \left(1 + \frac{\phi_i^2 w_i}{\varsigma_i^2} \right) \quad (3.45)$$

ile hesaplanır. Bu tanımdan yola çıkarak kriterlerin ağırlıklarını elde etmek için matematiksel model

$$\begin{cases} \max T_w = \sum_{i=1}^n \log_2 \left(1 + \frac{\phi_i^2 w_i}{\varsigma_i^2} \right), \\ s. t. \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ 0 \leq w_i \leq 1 \end{cases} \quad (3.46)$$

şeklinde kurulur. Bu optimizasyon probleminin çözümünde, eşitlik bulunduğu ve tanımlanan fonksiyonlar sürekli olduğundan Lagrange çarpan yöntemi kullanılabilir. Böylece $L(\lambda, w)$ Lagrange fonksiyonu ve $\lambda \geq 0$ Lagrange çarpanı olmak üzere problem

$$L(\lambda, w) = \sum_{i=1}^n \log_2 \left(1 + \frac{\phi_i^2 w_i}{\varsigma_i^2} \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) \quad (3.47)$$

formuna dönüşür. Lagrange fonksiyonunun w ve λ için kısmi türevleri alınarak

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_i} = \frac{1}{\ln 2 \cdot \left(1 + \frac{\phi_i^2}{\varsigma_i^2} w_i \right)} \cdot \frac{\phi_i^2}{\varsigma_i^2} + \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n w_i - 1 \end{cases}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem $\frac{\partial L}{\partial w_i} = 0$ için çözülürse;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln 2 \cdot \left(1 + \frac{\phi_i^2}{\varsigma_i^2} w_i \right)} \cdot \frac{\phi_i^2}{\varsigma_i^2} + \lambda &= 0 \Rightarrow \frac{1}{\ln 2 \cdot \left(1 + \frac{\phi_i^2}{\varsigma_i^2} w_i \right)} = -\lambda \cdot \frac{\varsigma_i^2}{\phi_i^2} \\ \Rightarrow \ln 2 \cdot \left(1 + \frac{\phi_i^2}{\varsigma_i^2} w_i \right) &= -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\phi_i^2}{\varsigma_i^2} \\ \Rightarrow 1 + \frac{\phi_i^2}{\varsigma_i^2} w_i &= -\frac{1}{\lambda \cdot \ln 2} \cdot \frac{\phi_i^2}{\varsigma_i^2} \\ \Rightarrow w_i = \frac{\varsigma_i^2}{\phi_i^2} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda \cdot \ln 2} \cdot \frac{\phi_i^2}{\varsigma_i^2} - 1 \right) &\text{ ve buradan da} \end{aligned}$$

$$w_i = \frac{1}{-\ln 2 \cdot \lambda} - \frac{\varsigma_i^2}{\phi_i^2} \quad (3.48)$$

olarak bulunur. Bu sonucu kullanılarak $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ için tekrar çözülürse,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i - 1 &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{-\ln 2 \cdot \lambda} - \frac{\varsigma_i^2}{\phi_i^2} \right) - 1 = 0 \\ \Rightarrow n \cdot \frac{1}{-\ln 2 \cdot \lambda} - \sum_{i=1}^n \frac{\varsigma_i^2}{\phi_i^2} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{-\ln 2 \cdot \lambda} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\varsigma_i^2}{\phi_i^2} = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\varsigma_i^2}{\phi_i^2} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradaki $\frac{1}{-\ln 2 \cdot \lambda}$ eşitlik (3.48)'te yerine yazılırsa,

$$w_i = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\varsigma_i^2}{\phi_i^2} \right) - \frac{\varsigma_i^2}{\phi_i^2} \quad (3.49)$$

elde edilir.

3.3.2. Önerilen TODIM Metodu

Bu bölümde, ÇKKV problemlerini BNÇK yardımıyla çözmek için klasik TODIM metodu basitleştirilmiş neutrosophic evrene genişletilerek basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal TODIM metodu inşa edilmiştir.

Herhangi bir çok kriterli grup karar verme (ÇKGKV) problemi için $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ alternatiflerin kümesi, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ kriterlerin kümesi ve $D = \{D_1, D_2, \dots, D_p\}$ karar vericilerin kümesi olsun. $D^k = (d_{ij}^k)_{m \times n}$ ($k = 1, 2, \dots, p$), ($i = 1, 2, \dots, m$), ($j = 1, 2, \dots, n$) karar vericiler tarafından belirlenen ve eşitlik (3.50)'da verilen karar matrisleri, ve $d_{ij}^k = (\rho_{a_{ij}}^k, \tau_{a_{ij}}^k, \sigma_{a_{ij}}^k)$ bu karar matrislerinin elemanları olsun.

$$D^k = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} d_{11}^k & d_{12}^k & \dots & d_{1n}^k \\ d_{21}^k & d_{22}^k & \dots & d_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}^k & d_{m2}^k & \dots & d_{mn}^k \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.50)$$

$k = 1, 2, \dots, p$ için $0 \leq \lambda_k \leq 1$ ve $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$ olmak üzere $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ karar verici ağırlıklarını gösterebilir. O halde akış şeması Şekil 3.6'da verilen BSC-TODIM metodunun adımları aşağıdaki gibi sunulmuştur:

Adım 1: Karar matrislerinin normalize edilmesi

$k = 1, 2, \dots, p$ olmak üzere, $D^k = (d_{ij}^k)_{m \times n} = (\rho_{ij}^k, \tau_{ij}^k, \sigma_{ij}^k)$ matrisleri aşağıdaki formül kullanılarak normalize edilir:

$$\begin{cases} (d_{ij}^k)_{m \times n} = (\rho_{ij}^k, \tau_{ij}^k, \sigma_{ij}^k), & \text{fayda tipi kriter için} \\ (d_{ij}^k)_{m \times n} = \left(\sigma_{ij}^k, \frac{1}{\tau_{ij}^k}, \rho_{ij}^k \right), & \text{zarar tipi kriter için} \end{cases} \quad (3.51)$$

Adım 2: Karar matrislerinin tek bir karar matrisine indirgenmesi

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ karar vericilerin ağırlık vektörü kullanılarak D^k karar matrisleri aşağıda verilen BNÇAAO veya BNÇAGO operatörleri ile $A = (d_{ij})_{m \times n} = (\rho_{ij}, \tau_{ij}, \sigma_{ij})$ matrisine, yani ÇKGKV matrisine aşağıdaki gibi indirgenir:

$$\text{BNÇAAO}(d_{ij}^1, d_{ij}^2, \dots, d_{ij}^p) = \begin{pmatrix} \frac{\prod_{k=1}^p (1 + 2\rho_{ij}^k)^{\lambda_k} - 1}{2}, \frac{2 \prod_{k=1}^p (\tau_{ij}^k)^{\lambda_k}}{\prod_{k=1}^p (2 + \tau_{ij}^k)^{\lambda_k} - \prod_{k=1}^p (\tau_{ij}^k)^{\lambda_k}}, \\ \frac{2 \prod_{k=1}^p (\sigma_{ij}^k)^{\lambda_k}}{\prod_{k=1}^p (2 + \sigma_{ij}^k)^{\lambda_k} - \prod_{k=1}^p (\sigma_{ij}^k)^{\lambda_k}} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

veya

$$BN\check{C}AGO(d_{ij}^1, d_{ij}^2, \dots, d_{ij}^p) = \left(\frac{2 \prod_{k=1}^p (\rho_{ij}^k)^{\lambda_k}}{\prod_{k=1}^p (2 + \rho_{ij}^k)^{\lambda_k} - \prod_{k=1}^p (\rho_{ij}^k)^{\lambda_k}}, \frac{\prod_{k=1}^p (1 + 2\tau_{ij}^k)^{\lambda_k} - 1}{2}, \frac{\prod_{k=1}^p (1 + 2\sigma_{ij}^k)^{\lambda_k} - 1}{2} \right) \quad (3.53)$$

Adım 3: Kriter ağırlıklarının hesaplanması

$A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ grup karar verme matrisi elde edildikten sonra eşitlik (3.43) ve (3.44) kullanılarak aşağıdaki formül yardımıyla w_j kriter ağırlıkları hesaplanır:

$$w_j = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\varsigma_j^2}{\phi_j^2} \right) - \frac{\varsigma_j^2}{\phi_j^2}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.54)$$

Adım 4: Göreceli ağırlığın hesaplanması

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ ağırlık vektörü ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ olmak üzere w_{cr} göreceli ağırlığı $w_{cr} = \frac{w_c}{w_r}$ formülü ile hesaplanır. Burada $w_r = \max\{w_c \mid c = 1, 2, \dots, n\}$ dir.

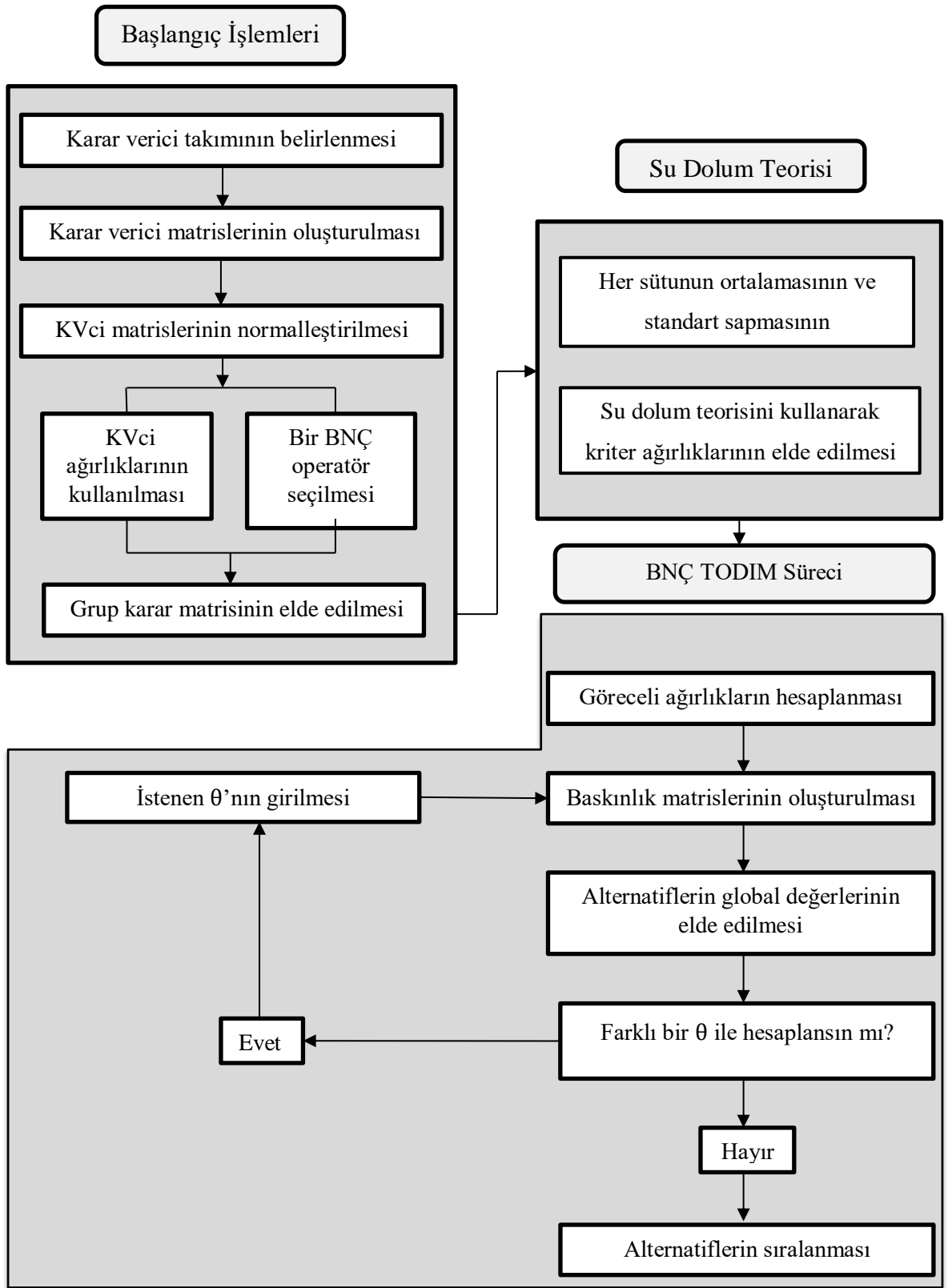
Adım 5: Genel baskınlık skorunun elde edilmesi

A_i alternatifinin A_j alternatifine olan genel baskınlık skoru (gbs)

$$\delta(A_i, A_j) = \sum_{c=1}^n \Phi_c(A_i, A_j) \quad (3.55)$$

ile elde edilir. Burada kısmi baskınlık skoru, eşitlik (3.16) de verilen d_{wG} ağırlıklı genelleştirilmiş BNÇ uzaklık ölçüsü ile aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\Phi_c(A_i, A_j) = \begin{cases} \sqrt{\frac{w_{cr}}{\sum_{c=1}^m w_{cr}}} \cdot d_{wG}(a_{ic}, a_{jc}), & \text{if } a_{ic} > a_{jc} \\ 0, & \text{if } a_{ic} = a_{jc} \\ -\frac{1}{\theta} \sqrt{\frac{\sum_{c=1}^m w_{cr}}{w_{cr}}} \cdot d_{wG}(a_{jc}, a_{ic}), & \text{if } a_{ic} < a_{jc} \end{cases} \quad (3.56)$$



Şekil 3.6. BNÇ-TODIM metodu akış şeması

Adım 6: Alternatiflerin global değerinin elde edilmesi

Bu adımda gelen baskınlık matrisi normalize edilerek her bir alternatifin global değeri

$$\xi_i = \frac{\sum_{j=1}^n \delta(A_i, A_j) - \min_i(\sum_{j=1}^n \delta(A_i, A_j))}{\max_i(\sum_{j=1}^n \delta(A_i, A_j)) - \min_i(\sum_{j=1}^n \delta(A_i, A_j))} \quad (3.57)$$

formülü ile bulunur. Bulunan ξ_i değerleri büyükten küçüğe sıralanarak en iyi alternatif elde edilir.

3.3.3. Sayısal Örnek

Bir otomobil servisi, tamir işlemlerinde kullanılmak üzere yedek parça tedarik etmek için 6 firma arasından en uygun tedarikçiyi seçmek istemektedir. Servis 4 ana kriter belirlemiştir. Bunlar C_1 : malzeme kalitesi; C_2 : stok kapasitesi; C_3 : teslim zamanı ve C_4 : servise uzaklık. Karar matrislerini belirlemek için ağırlıkları $\lambda = (0.3, 0.4, 0.3)$ olmak üzere 3 karar verici $\{D_1, D_2, D_3\}$ vardır. Karar vericiler tarafından belirlenen karar matrisleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$D^1 = \begin{pmatrix} \langle 1, 7, \frac{1}{9} \rangle & \langle 3, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \rangle & \langle \frac{1}{5}, 3, \frac{1}{9} \rangle & \langle 1, 5, \frac{1}{7} \rangle \\ \langle 5, \frac{1}{7}, \frac{1}{9} \rangle & \langle 5, \frac{1}{7}, \frac{1}{7} \rangle & \langle 4, \frac{1}{7}, \frac{1}{5} \rangle & \langle 7, \frac{1}{7}, \frac{1}{9} \rangle \\ \langle 3, 5, \frac{1}{7} \rangle & \langle 1, 5, \frac{1}{5} \rangle & \langle 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{9} \rangle & \langle 2, \frac{1}{5}, \frac{1}{3} \rangle \\ \langle 7, \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \rangle & \langle 3, 1, \frac{1}{3} \rangle & \langle \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7} \rangle & \langle 1, 3, \frac{1}{9} \rangle \\ \langle 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle & \langle \frac{1}{3}, 7, \frac{1}{9} \rangle & \langle 8, 1, \frac{1}{8} \rangle & \langle 1, 7, \frac{1}{7} \rangle \\ \langle 5, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \rangle & \langle 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \rangle & \langle 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \rangle & \langle \frac{1}{7}, 5, 3 \rangle \end{pmatrix} \quad D^2 = \begin{pmatrix} \langle 2, 6, \frac{1}{2} \rangle & \langle 1, 1, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, 2, 1 \rangle & \langle \frac{1}{3}, 4, 2 \rangle \\ \langle 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \rangle & \langle 7, \frac{1}{8}, \frac{1}{7} \rangle & \langle 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \rangle & \langle 8, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \rangle \\ \langle 2, 2, \frac{1}{6} \rangle & \langle 2, 4, \frac{1}{3} \rangle & \langle \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, 1, 1 \rangle \\ \langle 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \rangle & \langle 1, 3, 1 \rangle & \langle \frac{1}{2}, 3, 1 \rangle & \langle 4, 1, \frac{1}{8} \rangle \\ \langle 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \rangle & \langle 4, 2, \frac{1}{5} \rangle & \langle 8, 1, \frac{1}{8} \rangle & \langle 3, 5, \frac{1}{5} \rangle \\ \langle 3, \frac{1}{5}, \frac{1}{4} \rangle & \langle \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2} \rangle & \langle 5, 1, \frac{1}{5} \rangle & \langle \frac{1}{7}, 7, 7 \rangle \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} \langle 3, 5, \frac{1}{3} \rangle & \langle \frac{1}{2}, 2, 1 \rangle & \langle 2, 1, \frac{1}{3} \rangle & \langle 1, 2, \frac{1}{3} \rangle \\ \langle 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \rangle & \langle 6, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \rangle & \langle 4, 1, \frac{1}{6} \rangle & \langle 6, \frac{1}{2}, \frac{1}{7} \rangle \\ \langle 2, 1, \frac{1}{2} \rangle & \langle 3, 1, \frac{1}{5} \rangle & \langle 2, \frac{1}{5}, \frac{1}{3} \rangle & \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2 \rangle \\ \langle 4, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \rangle & \langle 2, 1, \frac{1}{2} \rangle & \langle 1, 1, \frac{1}{2} \rangle & \langle 2, 2, \frac{1}{5} \rangle \\ \langle 6, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \rangle & \langle 2, 2, \frac{1}{3} \rangle & \langle 7, \frac{1}{2}, \frac{1}{7} \rangle & \langle 2, 5, \frac{1}{3} \rangle \\ \langle 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \rangle & \langle 1, 3, \frac{1}{5} \rangle & \langle 2, 1, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{4}, 5, 4 \rangle \end{pmatrix}$$

Adım 1: Bütün kriterler fayda tipi olduğundan matrislerin normalleştirilmesine gerek yoktur.

Adım 2: BNÇAAO operatörü kullanılarak grup karar verme matrisi

$$A = \begin{pmatrix} \langle 1.8726, 5.9117, 0.2757 \rangle & \langle 1.2126, 0.6843, 0.4510 \rangle \\ \langle 4.5758, 0.3360, 0.1584 \rangle & \langle 6.0465, 0.1301, 0.1372 \rangle \\ \langle 2.2655, 1.9427, 0.2176 \rangle & \langle 1.8726, 2.4725, 0.2444 \rangle \\ \langle 5.1836, 0.2137, 0.1793 \rangle & \langle 1.7544, 1.4583, 0.5699 \rangle \\ \langle 4.5494, 0.2198, 0.1947 \rangle & \langle 1.7746, 2.6606, 0.1938 \rangle \\ \langle 4.0903, 0.1893, 0.1956 \rangle & \langle 0.9866, 1.3399, 0.3050 \rangle \\ \langle 0.6828, 1.7567, 0.3491 \rangle & \langle 0.6857, 3.3239, 0.4618 \rangle \\ \langle 3.5696, 0.4029, 0.2068 \rangle & \langle 7.0537, 0.1934, 0.1256 \rangle \\ \langle 0.8821, 0.4384, 0.2756 \rangle & \langle 0.7463, 0.4804, 0.8247 \rangle \\ \langle 0.5147, 0.9719, 0.4285 \rangle & \langle 2.2133, 1.6300, 0.1387 \rangle \\ \langle 7.6868, 0.8010, 0.1301 \rangle & \langle 1.9538, 5.4842, 0.2096 \rangle \\ \langle 3.2909, 0.8010, 0.3039 \rangle & \langle 0.1733, 5.6639, 4.3899 \rangle \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanmıştır.

Adım 3: Eşitlik (3.49) kullanılarak kriter ağırlıkları

$$w = (0.2651, 0.2548, 0.3221, 0.1580)$$

Şeklinde elde edilmiştir.

Adım 4: w_{cr} göreceli ağırlık

$$w_{cr} = (0.8231, 0.7910, 1.000, 0.4903)$$

olarak hesaplanmıştır.

Adım 5: Azaltma çarpanı $\theta = 1$ için genel baskınlık skoru eşitlik (3.18)'de verilen d_{wE} normalleştirilmiş ağırlıklı BNÇ Öklid uzaklığı ile

$$\delta(A_i, A_j) = \begin{matrix} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.0000 & -5.1526 & -2.5935 & -2.9071 & -1.9531 & -3.5059 \\ 1.2160 & 0.0000 & 1.0851 & 0.3629 & 0.3402 & 0.3052 \\ -0.2246 & -4.6247 & 0.0000 & -1.3649 & -1.7095 & -2.2849 \\ 0.0430 & -3.5062 & -1.6055 & 0.0000 & -0.6582 & -0.3071 \\ -1.3159 & -3.5852 & -1.3271 & -1.7577 & 0.0000 & -2.5965 \\ 0.2170 & -3.9384 & -0.9494 & -2.6810 & -0.1516 & 0.0000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

olarak elde edilmiştir.

Adım 6: Alternatiflerin global değeri eşitlik (3.57) kullanılarak Tablo 3.1'deki gibi hesaplanmıştır:

Tablo 3.1. Alternatiflerin global değeri

Alternatifler	ξ_i	Sıralama
A_1	0	6
A_2	1	1
A_3	0.3040	4
A_4	0.5189	2
A_5	0.2847	5
A_6	0.4433	3

Böylece global değerlere göre sıralama $A_2 > A_4 > A_6 > A_3 > A_5 > A_1$ olarak elde edilir ve en iyi alternatifin A_2 olduğu söylenebilir.

3.3.4. Azaltma Çarpanının Etkisi ve Karşılaştırma Analizi

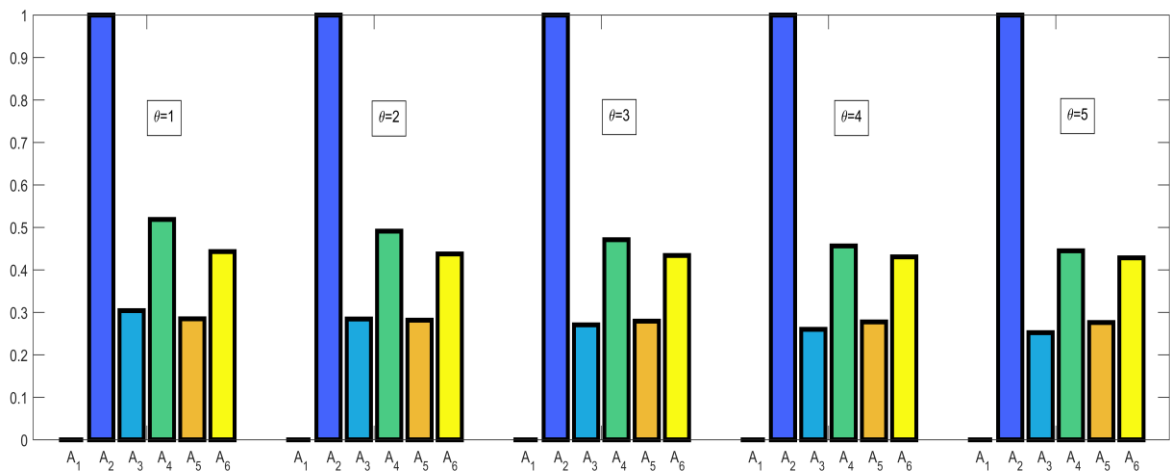
Kayıpların azaltma çarpanı olarak adlandırılan θ azaltma faktörü, karşılaştırılan elemanların farkının 0'dan küçük olması durumunda $\Phi_c(A_i, A_j)$ kısmi baskınlık skorları hesaplanırken devreye girer. θ ayarlanabilir ve karar vericiler tarafından karar verme problemlerinde genellikle $[1, 5]$ aralığında seçilir. Klasik TODIM' in 3. adımında da belirttiği üzere bazı araştırmacılar θ değerinin yaklaşık olarak 2.25 alınmasını önermişlerdir (Qin vd., 2017). Bu bilgilerden yola çıkarak, 3.3.3 Sayısal Örnek bölümünde eşitlik (3.56)'te yer alan

θ değeri 1’den 5’e kadar alınarak sonuçlar tekrar incelenmiştir ve çıkan sonuçlar Tablo 3.2 de verilmiştir.

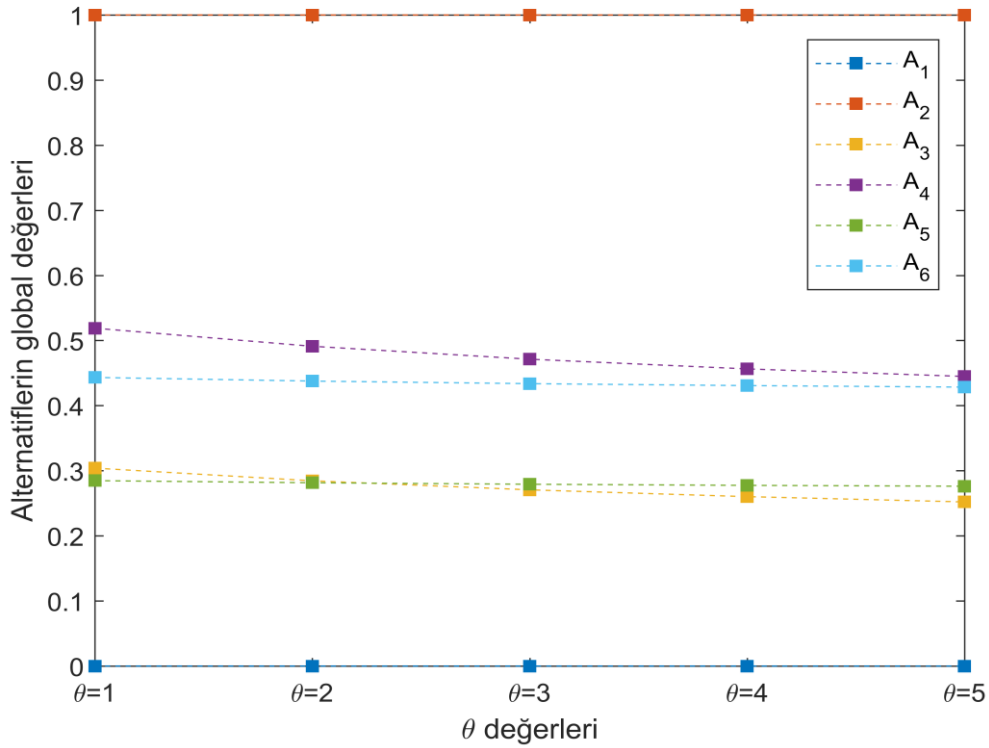
Tablo 3.2. Alternatiflerin θ 'ya göre değerleri

	$\theta = 1$		$\theta = 2$		$\theta = 3$		$\theta = 4$		$\theta = 5$	
	ξ_i	Sıralama	ξ_i	Sıralama	ξ_i	Sıralama	ξ_i	Sıralama	ξ_i	Sıralama
A_1	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
A_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_3	0.3040	4	0.2845	4	0.2706	5	0.2602	5	0.2521	5
A_4	0.5189	2	0.4911	2	0.4713	2	0.4564	2	0.4448	2
A_5	0.2847	5	0.2815	5	0.2792	4	0.2775	4	0.2762	4
A_6	0.4433	3	0.4377	3	0.4337	3	0.4307	3	0.4284	3

Bu sonuçlar, Qin vd. (2017) tarafından bahsedilen θ 'nın 2.25 civarında olmasıyla uyumlu çıkmıştır. $\theta = 2$ ile $\theta = 3$ arasında A_3 ve A_5 alternatiflerinin sırasının değiştiği gözlemlenmektedir. Ayrıca, θ arttıkça A_4 ve A_6 alternatiflerinin de değişmeye eğilimli oldukları görülmüştür. Alternatiflerin θ 'ya göre eğilimlerini içeren grafikler Şekil 3.7 ve Şekil 3.8’te verilmiştir.



Şekil 3.7. Alternatiflerin θ 'ya bağlı bar grafiği



Şekil 3.8. Alternatiflerin θ 'ya bağlı global değerleri

Bu grafikler, karar vericilerin θ seçiminin alternatiflerin sıralamasını etkileyebildiğini, hatta değiştirebildiğini göstermektedir. Bazı sayısal hesaplamalardan sonra $\theta = 2.2306$ için A_3 ve A_5 alternatiflerinin eşit sırada olduğu bulunmuştur. Bu sonuçlar θ değerinin 2.25 civarından seçilmesi gerektiğini desteklemektedir. Bu bilgiler ışığında, eğer alternatiflerin global değeri birbirine yeterince yakınsa, karar vericilerin davranışına bağlı olarak alternatiflerin sırasının değişebileceği sonucuna varılabilir. BNÇK'lerdeki belirsizlik değerinin bağımsız olarak seçilebilmesi ve BNÇ-TODIM' deki θ değerinin ayarlanabilir olması gerçek hayat problemlerinin daha doğru ve daha objektif çözülebilmesine olanak sağlamaktadır.

Bu çalışmada şimdiye kadar tereddüt derecesinin bağımsız olarak seçilmesi vurgulanmış ve SÇK'deki tereddüt derecesinin bağımlı olmasının karar vericileri kısıtladığından bahsedilmiştir. BNÇK'nin karar verme metotlarında kullanımının pozitif etkisini göstermek için aynı sayısal örnek SÇS'ler ile yeniden çözülmüştür.

SÇS'ler üyelik derecesi ve non-üyelik derecesi olmak üzere iki elemandan oluşur. Bu iki derece BNÇS'deki ile aynıdır. Bu sebeple BNÇS'den tereddüt derecesini çıkardığımızda SÇS elde edilir. Sayısal örnekteki karar matrislerinde $A^k = (\alpha_{ij}^k)_{m \times n} = (\rho_{a_{ij}}^k, \tau_{a_{ij}}^k, \sigma_{a_{ij}}^k)$

yerine $A^k = (\alpha_{ij}^k)_{m \times n} = (\rho_{a_{ij}}^k, \sigma_{a_{ij}}^k)$ alınırsa, aynı örnek TODIM metodu ile SÇS için çözülebilir. BNÇK, SÇK'nin bir genellemesi olduğu için BNÇ-TODIM direkt olarak SÇS'ye uygulanabilir. Aynı koşullar altında ve aynı ağırlık vektörü $w = (0.2651, 0.2548, 0.3221, 0.1580)$ alındığında, SÇS ile TODIM metoduyla çıkan sonuçlar Tablo 3.3'te verilmiştir.

Tablo 3.3. SÇS'ler ile alternatiflerin global değeri

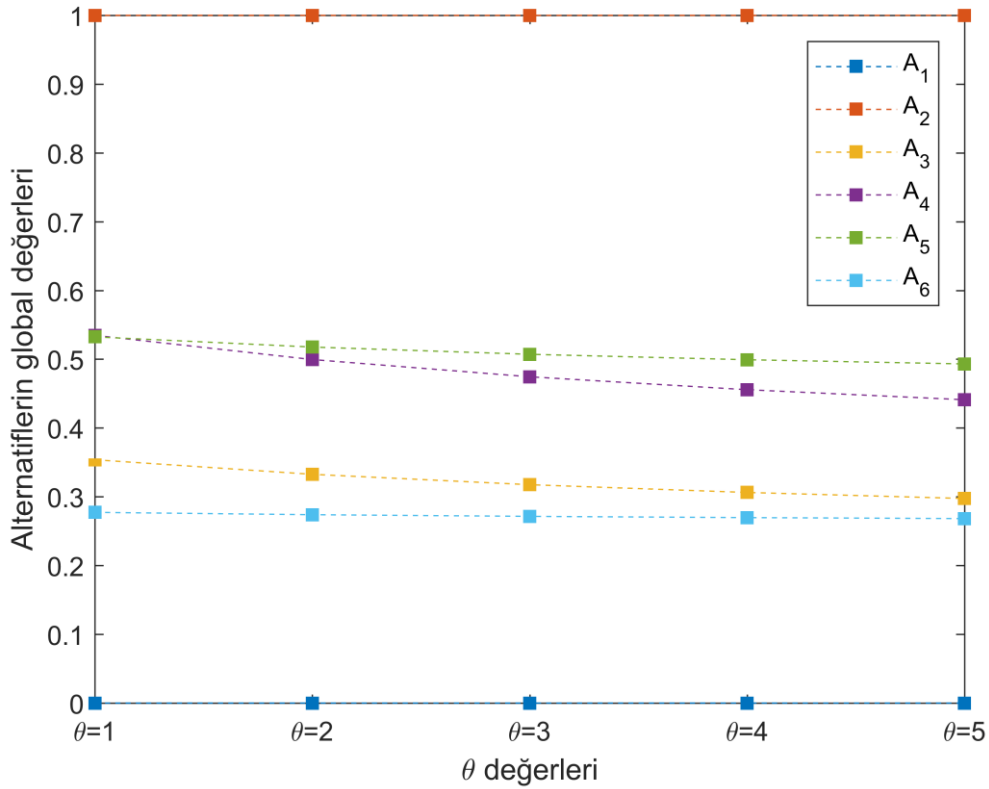
Alternatifler	ξ_i	Sıralama
A_1	0	6
A_2	1	1
A_3	0.3538	4
A_4	0.5347	2
A_5	0.5325	3
A_6	0.2773	5

ξ_i değerlerine göre alternatiflerin $A_2 > A_4 > A_5 > A_3 > A_6 > A_1$ sıralaması elde edilir. Açıkça, A_2 en iyi alternatiftir. Bu sonuçlar, Tablo 3.1'de verilen sonuçlar ile karşılaştırıldığında A_5 ile A_6 'nın yer değiştirmesi haricinde benzerdir. Ayrıca $\theta = 1, 2, \dots, 5$ alınarak problem tekrar çözülmüştür ve çıkan sonuçlar Tablo 3.4'te verilmiştir.

Tablo 3.4. SÇS ile alternatiflerin θ 'ya göre değerleri

$\theta = 1$		$\theta = 2$		$\theta = 3$		$\theta = 4$		$\theta = 5$	
ξ_i	Sıralama	ξ_i	Sıralama	ξ_i	Sıralama	ξ_i	Sıralama	ξ_i	Sıralama
A_1	0 6	0 6	0 6	0 6	0 6	0 6	0 6	0 6	0 6
A_2	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
A_3	0.3538 4	0.3326 4	0.3175 4	0.3063 4	0.2974 4	0.2974 4	0.2974 4	0.2974 4	0.2974 4
A_4	0.5347 2	0.4955 3	0.4744 3	0.4556 3	0.4411 3	0.4411 3	0.4411 3	0.4411 3	0.4411 3
A_5	0.5325 3	0.5177 2	0.5072 2	0.4993 2	0.4931 2	0.4931 2	0.4931 2	0.4931 2	0.4931 2
A_6	0.2773 5	0.2739 5	0.2715 5	0.2697 5	0.2683 5	0.2683 5	0.2683 5	0.2683 5	0.2683 5

Bu sonuçlar incelendiğinde θ değişiminin alternatiflerin sırasını değiştirdiği gözlemlenmiştir. Şekil 3.9’de verilen grafik incelendiğinde $\theta = 2$ için A_4 ve A_5 alternatifinin yer değiştirdiği görülmüştür. Hatta θ artıkça A_3 ve A_6 alternatiflerinin global değerlerinin birbirine yaklaştığı saptanmıştır.



Şekil 3.9. SÇS ile alternatiflerin θ 'ya göre global değerleri

Tablo 3.5. BNÇ-TODIM ve SÇS'ler ile TODIM metodunun θ kıyaslaması

	$\theta = 1$	$\theta = 2.25$
BNÇS ile TODIM	$A_2 > A_4 > A_6 > A_3 > A_5 > A_1$	$A_2 > A_4 > A_6 > A_5 > A_3 > A_1$
SÇS ile TODIM	$A_2 > A_4 > A_5 > A_3 > A_6 > A_1$	$A_2 > A_5 > A_4 > A_3 > A_6 > A_1$

SÇS ile TODIM ve BNÇ-TODIM metodunun karşılaştırılması Tablo 3.5’de verilmiştir. Klasik TODIM metodunun 3. adımında, alternatiflerin sıralaması için $\theta = 2.25$ optimal değer olduğu ve sıralamayı değiştirebildiği belirtilmişti. Bu örnekte de, $\theta = 2.25$

alındığında alternatiflerin sırasının değiştiği gözlemlenmiştir. En iyi ve en kötü alternatiflerin dışında diğer alternatiflerin sırasının tamamen değiştiği görölmüştür. Bu sonuçlar, optimal θ değeri için BNÇK'deki tereddüt derecesinin ne kadar etkili olduğunu ortaya koymaktadır. Bu durum açıkça göstermektedir ki ÇKKV problemlerinde BNÇS'nin kullanımı karar vericiler üzerindeki kısıtlamayı kaldırmakta ve karar matrisini belirlerken karar vericilere daha fazla özgürlük tanımaktadır. Böylece, gerçek hayat problemleri daha doğru ve objektif belirlenip çözümler daha hassas ve kararlı hesaplanabilmektedir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada sezgisel çarpımsal küme ve sezgisel çarpımsal tercih bağıntıları sırasıyla basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal küme ve basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal tercih bağıntılarına genelleştirilmiştir. Bunun yanında basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal sayılar, uzaklık ölçüleri ve ortalama operatörleri gibi önemli kavramlar özellikleriyle birlikte verilmiştir. Sezgisel çarpımsal kümelerin tereddüt derecesinin bağımlı olması sebebiyle ÇKKV metotlarında kullanımındaki dezavantajları ve tereddüt derecesinin bağımsız olduğu basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal kümelerin üstünlüğü detaylı bir şekilde incelenmiştir. Klasik TODIM metodu basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal kümelere uygulanmış ve basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal bilgiyle sunulan bir ÇKGKV probleminin çözümü için BNÇ-TODIM metodu geliştirilmiştir. Önerilen yaklaşımın kapasitesini ve etkisini göstermek için sayısal bir örnek verilmiştir. Bunun yanı sıra sayısal örnekte kullanılmak üzere su dolum teorisi tabanlı bir kriter ağırlığı bulma metodu geliştirilmiştir. Su dolum teorisini basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal kümelere adapte edebilmek için normalleştirilmiş ortalama ve normalleştirilmiş standart sapma kavramları tanımlanmıştır. Önerilen BNÇ-TODIM metodundaki azaltma çarpanının belli aralıklarda ayarlanabilir olduğu ve neutrosophic kümelerin bağımsızlık ilkesiyle uyumlu olduğu görülmüştür. Sezgisel çarpımsal küme ile basitleştirilmiş neutrosophic çarpımsal küme arasındaki farkın görülmesi için aynı sayısal örnek sezgisel çarpımsal sayılar kullanılarak çözülmüş ve çıkan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma tereddüt derecesi bağımsız alındığında alternatiflerin sıralamasının değiştiğini göstermiştir. Buna ek olarak BNÇ-TODIM metodunda eğer alternatiflerin global değerleri birbirine yeterince yakınsa azaltma çarpanı θ 'nın seçimi de alternatiflerin sırasını değiştirebilmektedir. BNÇK kavramının karar vericiler için problem bilgisinde bir kısıtlama olmadığından ÇKGKV problemlerinde daha hassas ve kapsamlı sonuçlar vermedeki üstünlüğü açıkça görülmüştür.

Bu çalışmadaki önerilen yaklaşımın sezgisel çarpımsal kümelere kıyasla birçok avantajı vardır:

- (1) Xia vd. (2013) SÇK'yi sadece bir tanım olarak bırakmış, SÇTB üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Bu bağıntıların eksik yönü, kriterler verilmiş olsa bile

direkt olarak ÇKKV problemlerinde kullanılamamasıdır. Problemlerde TOPSIS, TODIM ve VIKOR gibi bilinen karar verme metotları yerine skor fonksiyonları ve ortalama operatörleri kullanılmakta, bu da problemlerin daha kararlı sonuç vermesinin önüne geçmektedir. Önerilen BNÇK kavramı bu durumların üstesinden gelmektedir ve karar vericilerin bu gibi kısıtlamalarını ortadan kaldırmaktadır.

- (2) Jiang vd. (2015) SÇK’de aynı SBK’lerde olduğu gibi tereddüt derecesi tanımlanabileceğinden bahsetmiş ve bu derecenin üyelik ve non-üyelik derecelerine bağlı olduğunu söylemişlerdir. Hatta SÇK’lerdeki skor fonksiyonunun bazı eksikliklerini gösterirken tereddüt derecesini problemde vermelerine rağmen skor fonksiyonunda kullanmamışlardır. Tanımlanan tereddüt derecesinin diğer derecelere bağlı olması, problemlerde kullanılmasını zorlaştırmaktadır. BNÇK kavramında tereddüt derecesi bağımsız olduğundan, karar verme problemlerinde rahatça kullanılabilir.
- (3) Yine Jiang vd. (2015), SÇK’deki tereddüt derecesiyle Manhattan uzaklık ölçüsünü tanımlamışlar ve bu ölçüyü tereddüt derecesi içeren SÇS’leri sıralamak için kullanıp daha sonra da bir karar verme problemine uygulamışlardır. Fakat Şekil 3.3’de de görüldüğü üzere BNÇS’ler ile tanımlanan uzaklık fonksiyonu, tereddüt derecesinin bağımlı olduğu SÇS’ler ile tanımlanan uzaklık fonksiyonundan daha objektif bir sonuç vermektedir. Ayrıca SÇK ile kıyasla BNÇK üzerinde tanımlanan uzaklık fonksiyonları direkt olarak BNÇ-TODIM gibi ÇKKV problemlerinde kullanılabilir.
- (4) Karar verme problemlerinde kriter ağırlığı elde etmek için kullanılmak üzere su dolum teorisi BNÇK’ye entegre edilmiştir. Bu amaçla, normalleştirilmiş ortalama ve normalleştirilmiş standart sapma tanımları verilmiştir. Buna ek olarak, BNÇK SÇK’nin bir genellemesi olduğundan su dolum teorisi tabanlı kriter ağırlığı bulma yöntemi direkt olarak SÇK’ye de uygulanabilir.
- (5) BNÇ-TODIM metodundan tereddüt derecesi çıkarılarak aynı sayısal örnek SÇS ile çözülmüş ve çıkan sonuçlar kıyaslandığında alternatiflerin sırasının değiştiği ve tereddüt derecesinin önemi açıkça görülmüştür.

Önerilen BNÇK küme kavramının, ÇKKV problemlerinde önemli bir yer tutması belenmektedir. Yukarıdaki avantajların yanı sıra kümenin tanımlandığı aralığın simetrik

olmayan ve düzgün dağılmayan olduğu göz önüne alındığında bu kümenin uygulamasının sadece ÇKKV problemlerinde değil aynı zamanda ekonomi ve iktisat problemlerinde de kullanılabileceğini göstermektedir. Bu sebeple, önerilen bu yaklaşımın aşağıda belirtilen alanlarda yeni çalışmalara öncülük etmesi beklenmektedir:

- (1) Tanımlanan ortalama operatörleri literatürde var olan operatörlerin sayıca çok küçük bir kısmını oluşturmaktadır. Bu yüzden BNÇK üzerinde yeni ortalama operatörleri tanımlanabilir ve bunların özellikleri gösterilebilir.
- (2) Bu çalışmada tanımlanan uzaklık ölçüleri Minkowski tipi ölçüler olarak da adlandırılabilir. Fakat literatürde tanımlanmış olan Dice, Jaccardi, izdüşüm ve Hausdorf uzaklığı gibi birçok farklı uzaklık ölçüsüyle beraber bunların hibrit versiyonları BNÇS'ler ile tanımlanıp karar verme problemlerinde kullanılabilir.
- (3) Uzaklık ölçülerinden yola çıkarak BNÇK üzerinde birçok benzerlik ölçüsü tanımlanabilir ve bu ölçüler özellikle sağlık ve mühendislik alanlarındaki ÇKKV problemlerine uygulanabilir.
- (4) Korelasyon katsayıları, problem verilerinin ilişkilerini incelemeye literatürde önemli bir yer kaplamaktadır ve bilinen kadarıyla SÇK üzerindeki dahil tanımlanan bütün korelasyon katsayıları toplamsal olarak tanımlanmıştır. Bu sebeple, BNÇK'ler üzerinde korelasyon katsayıları kavramı kümenin çarpımsal olması sebebiyle çarpımsal olarak tanımlanabilir.
- (5) BNÇK'ler için verilen BNÇ tercih bağıntılarının özellikleri incelenebilir, bu bağıntıların oluşturduğu matrislerin kararlılığı araştırılabilir ve karar verme problemlerine uygulanabilir.
- (6) Önerilen BNÇK'ler üzerinde izdüşümü fonksiyonları ve entropiler gibi birçok yeni kavram çalışılabilir.
- (7) BNÇK kavramı aralık neutrosophic çarpımsal kümeye genellenerek yeni bir küme teorisi inşa edilebilir.
- (8) Yakın zamanda üçgensel neutrosophic kümeler için tanımlanan zaman serileri, BNÇK'lere taşınabilir.
- (9) BNÇK'lerde türev ve integral gibi matematiğin temellerini oluşturan ve çok geniş uygulama alanlarına sahip olan kavramlar çalışılabilir.
- (10) Neutrosophic kümelerde çalışılan lineer ve non-lineer optimizasyon problemleri BNÇK evrenine genişletilerek daha genel çözümler bulunabilir.

5. KAYNAKLAR

- Atanassov, K.T., 1986. Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20(1), 87–96.
- Atanassov, K.T., 1999. Intuitionistic fuzzy sets, In Intuitionistic fuzzy sets (pp. 1–137). Springer.
- Bausys, R. ve Zavadskas, E.K., 2015. Multicriteria decision making approach by Vikor under interval neutrosophic set environment, Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, 49(4), 33–48.
- Bausys, R., Zavadskas, E.K. ve Kaklauskas, A., 2015. Application of neutrosophic set to multicriteria decision making by COPRAS, Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, 49(2), 1–15.
- Biswas, P., Pramanik, S. ve Giri, B.C., 2014. Entropy Based Grey Relational Analysis Method for Multi- Attribute Decision Making under Single Valued Neutrosophic Assessments, Neutrosophic Sets and Systems, 2, 105–113.
- Biswas, P., Pramanik, S. ve Giri, B.C., 2016. TOPSIS method for multi-attribute group decision-making under single-valued neutrosophic environment, Neural Computing and Applications, 27(3), 727–737.
- Bolturk, E. ve Kahraman, C., 2018. A novel interval-valued neutrosophic AHP with cosine similarity measure, Soft Computing, 22(15), 4941–4958.
- Boran, F.E., Genç, S., Kurt, M. ve Akay, D., 2009. A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method, Expert Systems with Applications, 36(8), 11363–11368.
- Boyd, S. ve Vandenberghe, L., 2004. Convex optimization, Cambridge university press.
- Brans, J.P. ve Vincke, P., 1985. Note-A Preference Ranking Organisation Method, Management Science, 31(6).
- Brauers, W.K.M. Baležentis, A. ve Baležentis, T., 2011. Multimoora for the EU member States updated with fuzzy number theory, Technological and Economic Development of Economy, 17(2), 259–290.
- Brauers, W.K.M. ve Zavadskas, E.K., 2010. Project management by multimoora as an instrument for transition economies. Technological and Economic Development of Economy, 16(1), 5–24.
- Broumi, S. ve Smarandache, F., 2013. Correlation coefficient of interval neutrosophic set, Applied Mechanics and Materials, 436, 511–517.

- Buckley, J.J., 1985. Fuzzy hierarchical analysis, Fuzzy Sets and Systems, 17(3), 233–247.
- Carli, R. ve Dotoli, M., 2017. A distributed control algorithm for waterfilling of networked control systems via consensus, IEEE Control Systems Letters, 1(2), 334–339. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2017.2716190>
- Chen, S.J. ve Hwang, C.L., 1992. Fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods, In Fuzzy multiple attribute decision making (pp. 289–486). Springer, Berlin.
- Chi, P. ve Liu, P., 2013. An extended TOPSIS method for the multiple attribute decision making problems based on interval neutrosophic set, Neutrosophic Sets and Systems, 1(1), 63–70.
- Churchman, C.W., Ackoff, R.L. ve Arnoff, E.L., 1957. Introduction to operations research. Retrieved from <https://psycnet.apa.org/record/1957-05210-000>
- De, S.K., Biswas, R. ve Roy, A.R., 2001. An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis, Fuzzy Sets and Systems, 117(2), 209–213.
- Devi, K., 2011. Extension of VIKOR method in intuitionistic fuzzy environment for robot selection, Expert Systems with Applications, 38(11), 14163–14168. <https://doi.org/10.1016/J.ESWA.2011.04.227>
- Garg, H., 2016. Generalized intuitionistic fuzzy multiplicative interactive geometric operators and their application to multiple criteria decision making, International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 7(6), 1075–1092. <https://doi.org/10.1007/s13042-015-0432-8>
- Garg, H. 2017. Distance and similarity measures for intuitionistic multiplicative preference relation and its applications, International Journal for Uncertainty Quantification, 7(2), 117–133. <https://doi.org/10.1615/Int.J.UncertaintyQuantification.2017018981>
- Garg, H., 2018. Generalized interaction aggregation operators in intuitionistic fuzzy multiplicative preference environment and their application to multicriteria decision-making, Applied Intelligence, 48(8), 2120–2136. <https://doi.org/10.1007/s10489-017-1066-1>
- Gomes, L.F.A.M. ve Lima, M.M.P.P., 1991. Todim: Basic and application to multicriteria ranking of projects with environmental impacts, Foundations of Computing and Decision Sciences, 16(4), 113–127.
- Gong, Z.W., Li, L.S., Forrest, J. ve Zhao, Y., 2011. The optimal priority models of the intuitionistic fuzzy preference relation and their application in selecting industries with higher meteorological sensitivity, Expert Systems with Applications, 38(4), 4394–4402. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.09.109>
- Goumas, M. ve Lygerou, V., 2000. An Extension of the PROMETHEE method for decision making in fuzzy environment: Ranking of alternative energy exploitation

- projects, European Journal of Operational Research, 123(3), 606–613.
- Herrera, F., Herrera-Viedma, E. ve Martínez, L., 2008. A fuzzy linguistic methodology to deal with unbalanced linguistic term sets, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 16(2), 354–370. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2007.896353>
- Hosseini Nasab, H. ve Milani, A. S., 2012. An improvement of quantitative strategic planning matrix using multiple criteria decision making and fuzzy numbers, Applied Soft Computing, 12(8), 2246–2253. <https://doi.org/10.1016/J.ASOC.2012.03.010>
- Huang, H. L., 2016. New Distance Measure of Single-Valued Neutrosophic Sets and Its Application, International Journal of Intelligent Systems, 31(10), 1021–1032. <https://doi.org/10.1002/int.21815>
- Hwang, C. L. ve Yoon, K., 1981. Methods for Multiple Attribute Decision Making, In Multiple Attribute Decision Making (pp. 58–191).
- Jiang, Y., Xu, Z. ve Gao, M., 2015. Methods for ranking intuitionistic multiplicative numbers by distance measures in decision making, Computers and Industrial Engineering, 88, 100–109. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.06.015>
- Jiang, Y., Xu, Z. ve Yu, X., 2013. Compatibility measures and consensus models for group decision making with intuitionistic multiplicative preference relations, Applied Soft Computing, 13(4), 2075–2086. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2012.11.007>
- Kahneman, D. ve Tversky, A., 1979. An analysis of decision under risk, In Econometrica, 47, 263–292). World Scientific.
- Kahraman, C., Onar, S.C. ve Oztaysi, B., 2015. Fuzzy Multicriteria Decision-Making: A Literature Review, International Journal of Computational Intelligence Systems, 8(4), 637–666. <https://doi.org/10.1080/18756891.2015.1046325>
- Karaaslan, F. 2017. Correlation coefficients of single-valued neutrosophic refined soft sets and their applications in clustering analysis, Neural Computing and Applications, 28(9), 2781–2793. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2209-8>
- Karaşan, A. ve Kahraman, C., 2018. A novel interval-valued neutrosophic EDAS method: prioritization of the United Nations national sustainable development goals, Soft Computing, 22(15), 4891–4906. <https://doi.org/10.1007/s00500-018-3088-y>
- Krohling, R.A. ve De Souza, T.T.M., 2012. Combining prospect theory and fuzzy numbers to multi-criteria decision making, Expert Systems with Applications, 39(13), 11487–11493. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2012.04.006>
- Krohling, R.A., Pacheco, A.G.C. ve Siviero, A.L.T., 2013. IF-TODIM: An intuitionistic fuzzy TODIM to multi-criteria decision making, Knowledge-Based Systems, 53, 142–146. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2013.08.028>

- Liao, H. ve Xu, Z., 2014. Multi-criteria decision making with intuitionistic fuzzy PROMETHEE, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 27(4), 1703–1717. <https://doi.org/10.3233/IFS-141137>
- Liao, H., Zhang, C., Luo, L., Xu, Z., Yang, J.B. ve Xu, D.L., 2019. Distance-based intuitionistic multiplicative multiple criteria decision-making methods for healthcare management in West China Hospital, Expert Systems, e12479. <https://doi.org/10.1111/exsy.12479>
- Liu, C. ve Luo, Y., 2016. Correlated aggregation operators for simplified neutrosophic set and their application in multi-attribute group decision making, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 30(3), 1755–1761. <https://doi.org/10.3233/IFS-151886>
- Liu, P., Chu, Y., Li, Y. ve Chen, Y., 2014. Some generalized neutrosophic number hamacher aggregation operators and their application to group decision making, International Journal of Fuzzy Systems, 16(2), 242–255.
- Liu, P. ve Tang, G., 2016. Some power generalized aggregation operators based on the interval neutrosophic sets and their application to decision making, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 30(5), 2517–2528. <https://doi.org/10.3233/IFS-151782>
- Liu, P. ve Wang, Y., 2014. Multiple attribute decision-making method based on single-valued neutrosophic normalized weighted Bonferroni mean, Neural Computing and Applications, 25(7–8), 2001–2010. <https://doi.org/10.1007/s00521-014-1688-8>
- Liu, X., Wang, Z. ve Zhang, S., 2018. A New Methodology for Hesitant Fuzzy Emergency Decision Making with Unknown Weight Information, Complexity. <https://doi.org/10.1155/2018/5145348>
- Luo, S.Z., Cheng, P.F., Wang, J.Q. ve Huang, Y.J., 2017. Selecting project delivery systems based on simplified neutrosophic linguistic preference relations, Symmetry, 9(8), 151. <https://doi.org/10.3390/sym9080151>
- Mamdani, E.H., 1974. Application of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant, Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 121(12), 1585–1588.
- Mamdani, E.H. ve Assilian, S., 1975. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, International Journal of Man-Machine Studies, 7(1), 1–13.
- Montazer, G.A., Saremi, H.Q. ve Ramezani, M., 2009. Design a new mixed expert decision aiding system using fuzzy ELECTRE III method for vendor selection, Expert Systems with Applications, 36(8), 10837–10847.
- Nirmala, G. ve Uthra, G., 2016. Intuitionistic fuzzy analytic hierarchy process based on possibility degree, International Journal of Pure and Applied Mathematics,

109(9 Special Issue), 184–192.

- Opricovic, S., 1998. Multicriteria optimization of civil engineering systems, Faculty of Civil Engineering, Belgrade, 2(1), 5–21.
- Opricovic, S., 2007. A fuzzy compromise solution for multicriteria problems, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 15(3), 363–380. <https://doi.org/10.1142/S0218488507004728>
- Opricovic, S. ve Tzeng, G.H., 2002. Multicriteria planning of post-earthquake sustainable reconstruction, Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 17(3), 211–220. <https://doi.org/10.1111/1467-8667.00269>
- Orlovsky, S.A., 1978. Decision-making with a fuzzy preference relation, Fuzzy Sets and Systems, 1(3), 155–167. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(78\)90001-5](https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90001-5)
- Peng, J.J., Wang, J.Q., Wang, J., Zhang, H.Y. ve Chen, X. H., 2016. Simplified neutrosophic sets and their applications in multi-criteria group decision-making problems, International Journal of Systems Science, 47(10), 2342–2358. <https://doi.org/10.1080/00207721.2014.994050>
- Peng, J.J., Wang, J.Q., Zhang, H.Y. ve Chen, X.H., 2014. An outranking approach for multi-criteria decision-making problems with simplified neutrosophic sets, Applied Soft Computing, 25, 336–346.
- Peng, J.J., Wang, J.Q., Wu, X.H., Wang, J. ve Chen, X. H., 2015. Multi-valued Neutrosophic Sets and Power Aggregation Operators with Their Applications in Multi-criteria Group Decision-making Problems, International Journal of Computational Intelligence Systems, 8(2), 345–363. <https://doi.org/10.1080/18756891.2015.1001957>
- Qin, Q., Liang, F., Li, L., Chen, Y.W. ve Yu, G.F., 2017. A TODIM-based multi-criteria group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers, Applied Soft Computing, 55, 93–107. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.01.041>
- Radwan, N.M., Senousy, M.B. ve Riad, A.E.D.M., 2016. Neutrosophic AHP Multi Criteria Decision Making Method Applied on the Selection of Learning Management System, International Journal of Advancements in Computing Technology (IJACT), 8(5), 95–105.
- Rangel, L.A.D., Gomes, L.F.A.M. ve Cardoso, F.P., 2011. An application of the TODIM method to the evaluation of Broadband Internet plans, Pesquisa Operacional, 31(2), 235–249. <https://doi.org/10.1590/S0101-74382011000200003>
- Razavi Hajiagha, S.H., Hashemi, S.S. ve Zavadskas, E.K., 2013. A complex proportional assessment method for group decision making in an interval-valued intuitionistic fuzzy environment, Technological and Economic Development of Economy, 19(1), 22–37. <https://doi.org/10.3846/20294913.2012.762953>

- Roy, B., 1968. Classement et choix en présence de points de vue multiples, RAIRO-Operations Research - Recherche Opérationnelle, 2(V1), 57–75.
- Saaty, T. L., 1977. A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, Journal of Mathematical Psychology. Vol. 15.-№ 3.
- Saaty, T. L., 1980. The Analytic Hierarchy Process, In Decision Analysis.
- Saaty, T. L., 1990. How to make a decision: The analytic hierarchy process, European Journal of Operational Research, 48(1), 9–26.
- Şahin, R. ve Küçük, A., 2014. On similarity and entropy of neutrosophic soft sets, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 27(5), 2417–2430. <https://doi.org/10.3233/IFS-141211>
- Şahin, R. ve Küçük, A., 2015. Subsethood measure for single valued neutrosophic sets, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 29(2), 525–530. <https://doi.org/10.3233/IFS-141304>
- Şahin, R., 2017. Cross-entropy measure on interval neutrosophic sets and its applications in multicriteria decision making, Neural Computing and Applications, 28(5), 1177–1187. <https://doi.org/10.1007/s00521-015-2131-5>
- Şahin, R. ve Liu, P., 2016. Maximizing deviation method for neutrosophic multiple attribute decision making with incomplete weight information, Neural Computing and Applications, 27(7), 2017–2029. <https://doi.org/10.1007/s00521-015-1995-8>
- Şahin, R. ve Liu, P., 2017a. Correlation coefficient of single-valued neutrosophic hesitant fuzzy sets and its applications in decision making, Neural Computing and Applications, 28(6), 1387–1395. <https://doi.org/10.1007/s00521-015-2163-x>
- Şahin, R. ve Liu, P., 2017b. Possibility-induced simplified neutrosophic aggregation operators and their application to multi-criteria group decision-making, Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence, 29(4), 769–785. <https://doi.org/10.1080/0952813X.2016.1259266>
- Smarandache, F., 1998. Neutrosophy. Neutrosophic Probability, Set, and Logic, ProQuest Information and Learning, Ann Arbor, Michigan, USA, 105, 118–123.
- Smarandache, F., 2002. Neutrosophy, a new Branch of Philosophy, Multiple Valued Logic, 8(3), 297–384.
- Stanujkic, D., Zavadskas, E.K., Smarandache, F., Brauers, W.K.M. ve Karabasevic, D., 2017. A neutrosophic extension of the MULTIMOORA method, Informatica, 28(1), 181–192.
- Szmidt, E. ve Kacprzyk, J., 2000. Distances between intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 114(3), 505–518. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(98\)00244-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00244-9)

- Szmidt, E. ve Kacprzyk, J., 2002. Using intuitionistic fuzzy sets in group decision making, Control and Cybernetics, 31(4), 1037–1053.
- Tian, Z.P., Wang, J., Zhang, H.Y. ve Wang, J.Q., 2018. Multi-criteria decision-making based on generalized prioritized aggregation operators under simplified neutrosophic uncertain linguistic environment, International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 9(3), 523–539. <https://doi.org/10.1007/s13042-016-0552-9>
- Uzoka, F.M.E., Osuji, J. ve Obot, O., 2011. Clinical decision support system (DSS) in the diagnosis of malaria: A case comparison of two soft computing methodologies, Expert Systems with Applications, 38(3), 1537–1553. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.07.068>
- Vahdani, B., Mousavi, S. M., Tavakkoli-Moghaddam, R. ve Hashemi, H., 2013. A new design of the elimination and choice translating reality method for multi-criteria group decision-making in an intuitionistic fuzzy environment, Applied Mathematical Modelling, 37(4), 1781–1799. <https://doi.org/10.1016/J.APM.2012.04.033>
- Van Laarhoven, P. J. M. ve Pedrycz, W., 1983. A fuzzy extension of Saaty's priority theory, Fuzzy Sets and Systems, 11(1–3), 229–241.
- Wang, H., Smarandache, F., Sunderraman, R. ve Zhang, Y.Q., 2010. Single valued neutrosophic sets, Multispace and Multistructure, 4, 410–413.
- Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y.Q. ve Sunderraman, R., 2005. Interval Neutrosophic Sets and Logic: Theory and Applications in Computing (Vol. 5).
- Wang, J.Q. ve Li, X.E., 2015. TODIM method with multi-valued neutrosophic sets, Kongzhi Yu Juece/Control and Decision, 30(6), 1139–1142. <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.0467>
- Wang, J.W., Cheng, C.H. ve Huang, K.C., 2009. Fuzzy hierarchical TOPSIS for supplier selection, Applied Soft Computing, 9(1), 377–386. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2008.04.014>
- Wang, Z. ve Liu, L., 2016. Optimized PROMETHEE based on interval neutrosophic sets for new energy storage alternative selection, Revista Tecnica de La Facultad de Ingenieria Universidad Del Zulia, 39(9), 69–77. <https://doi.org/10.21311/001.39.9.10>
- Wu, X. H., Wang, J.Q., Peng, J.J. ve Chen, X.H., 2016. Cross-Entropy and Prioritized Aggregation Operator with Simplified Neutrosophic Sets and Their Application in Multi-Criteria Decision-Making Problems, International Journal of Fuzzy Systems, 18(6), 1104–1116. <https://doi.org/10.1007/s40815-016-0180-2>
- Xia, M. ve Xu, Z., 2013. Group decision making based on intuitionistic multiplicative aggregation operators, Applied Mathematical Modelling, 37(7), 5120–5133. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.10.029>

- Xia, M., Xu, Z. ve Liao, H., 2013. Preference relations based on intuitionistic multiplicative information IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 21(1), 113–133. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2012.2202907>
- Xu, Z., 2007a. A survey of preference relations, International Journal of General Systems, 36(2), 179–203. <https://doi.org/10.1080/03081070600913726>
- Xu, Z., 2007b. Intuitionistic fuzzy aggregation operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15(6), 1179–1187.
- Xu, Z., 2007c. Intuitionistic preference relations and their application in group decision making, Information Sciences, 177(11), 2363–2379. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2006.12.019>
- Xu, Z., 2007d. Some similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and their applications to multiple attribute decision making, Fuzzy Optimization and Decision Making, 6(2), 109–121. <https://doi.org/10.1007/s10700-007-9004-z>
- Xu, Z. ve Liao, H., 2014. Intuitionistic fuzzy analytic hierarchy process, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 22(4), 749–761. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2013.2272585>
- Xu, Z. ve Yager, R. R., 2006. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets, International Journal of General Systems, 35(4), 417–433. <https://doi.org/10.1080/03081070600574353>
- Yang, Y., Hu, J., Sun, R. ve Chen, X., 2018. Medical tourism destinations prioritization using group decision making method with neutrosophic fuzzy preference relations, Scientia Iranica, 25(6E), 3744–3764. <https://doi.org/10.24200/sci.2017.4514>
- Ye, J., 2014a. A multicriteria decision-making method using aggregation operators for simplified neutrosophic sets, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 26(5), 2459–2466. <https://doi.org/10.3233/IFS-130916>
- Ye, J., 2014b. Clustering methods using distance-based similarity measures of single-valued neutrosophic sets, Journal of Intelligent Systems, 23(4), 379–389. <https://doi.org/10.1515/jisys-2013-0091>
- Ye, J., 2014c. Improved correlation coefficients of single valued neutrosophic sets and interval neutrosophic sets for multiple attribute decision making, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 27(5), 2453–2462. <https://doi.org/10.3233/IFS-141215>
- Ye, J., 2014d. Similarity measures between interval neutrosophic sets and their applications in multicriteria decision-making, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 26(1), 165–172. <https://doi.org/10.3233/IFS-120724>

- Ye, J., 2014e. Single valued neutrosophic cross-entropy for multicriteria decision making problems, Applied Mathematical Modelling, 38(3), 1170–1175. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.07.020>
- Ye, J., 2015. Improved cosine similarity measures of simplified neutrosophic sets for medical diagnoses, Artificial Intelligence in Medicine, 63(3), 171–179. <https://doi.org/10.1016/j.artmed.2014.12.007>
- Ye, J., 2017. Simplified neutrosophic harmonic averaging projection-based method for multiple attribute decision-making problems, International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 8(3), 981–987. <https://doi.org/10.1007/s13042-015-0456-0>
- Yu, S. ve Xu, Z., 2016. Definite integrals of multiplicative intuitionistic fuzzy information in decision making, Knowledge-Based Systems, 100, 59–73. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2016.02.007>
- Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. Information and Control, 8(3), 338–353.
- Zavadskas, E.K. ve Antucheviciene, J., 2007. Multiple criteria evaluation of rural building's regeneration alternatives, Building and Environment, 42(1), 436–451. <https://doi.org/10.1016/J.BUILDENV.2005.08.001>
- Zavadskas, E.K., Antucheviciene, J., Razavi Hajiagha, S.H. ve Hashemi, S.S., 2015. The interval-valued intuitionistic fuzzy MULTIMOORA method for group decision making in engineering, Mathematical Problems in Engineering, 2015. <https://doi.org/10.1155/2015/560690>
- Zavadskas, E.K. ve Turskis, Z., 2011. Multiple criteria decision making (MCDM) methods in economics: An overview, Technological and Economic Development of Economy, 17(2), 397–427. <https://doi.org/10.3846/20294913.2011.593291>
- Zavadskas, E.K., Vainiūnas, P., Turskis, Z. ve Tamošaitienė, J., 2012. Multiple criteria decision support system for assessment of projects managers in construction, International Journal of Information Technology and Decision Making, 11(2), 501–520. <https://doi.org/10.1142/S0219622012400135>
- Zavadskas, E., Kaklauskas, A. ve Sarka, V., 1994. The new method of multicriteria complex proportional assessment of projects, Technological and Economic Development of Economy, 1(3), 131–139.
- Zhang, C., Li, W. ve Wang, L., 2011. AHP under the Intuitionistic Fuzzy environment, Proceedings - 2011 8th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, FSKD 2011, 1, 583–587. <https://doi.org/10.1109/FSKD.2011.6019593>
- Zhang, Z., Liu, X. ve Yang, S., 2009. A Note on the 1-9 Scale and Index Scale in AHP, International Conference on Multiple Criteria Decision Making, 630–634.

ÖZGEÇMİŞ

Ali KÖSEOĞLU, 1985 yılında Muğla ilinin Yatağan ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Mehmet Akif Ersoy İlkokulu'nda orta ve lise öğrenimini Yatağan Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2003-2007 yılları arasında Ege Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimi bilgisayar opsiyonlu matematik alanında yaptı.

2005-2008 yılları arasında İzmir'de dershanelerde matematik stajyerliği ve öğretmenliği yaptı. 2008 yılında 1416 sayılı kanun kapsamında Milli Eğitim Bakanlığı tarafından Amerika Birleşik Devletleri'nde dil eğitimi ve yüksek lisans eğitimi almak üzere burs kazandı. 2008-2009 yılları arasında University of St. Thomas English Language Center' da dil eğitimi tamamladı. 2009 yılında University of Pittsburgh Matematik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı ve 2011 yılında mezun oldu. 2011 yılının Aralık ayında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim dalına araştırma görevlisi olarak atandı. Halen Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim dalındaki görevine araştırma görevlisi olarak devam etmektedir.

Ali KÖSEOĞLU evli ve bir çocuk sahibidir. İyi düzeyde İngilizce bilmektedir.

Tez Çalışmasından Elde Edilen Yayınlar

Köseoğlu A., Şahin R., Merdan M., A Simplified Neutrosophic Multiplicative Set-Based TODIM Using Water Filling Algorithm for the Determination of Weights, Expert Systems, 2019;e12515. <https://doi.org/10.1111/exsy.12515>