



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



**İKİNCİ TİP SINIR DEĞER VE İNTEGRAL KOŞULLARI İLE LOKAL
OLMAYAN TERS PARABOLİK PROBLEM İÇİN FARK ŞEMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahmet GÖNENÇ

TEMMUZ 2021
GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**İKİNCİ TİP SINIR DEĞER VE İNTEGRAL KOŞULLARI İLE LOKAL
OLMAYAN TERS PARABOLİK PROBLEM İÇİN FARK ŞEMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ahmet GÖNENÇ

Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
“Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı”
Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25/05/2021
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 02/07/2021

TEMMUZ 2021

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum **“İkinci Tip Sınır Değer ve İntegral Koşulları ile Lokal Olmayan Ters Parabolik Problem için Fark Şemaları”** isimli tez çalışmada; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

21/05/2021

Ahmet GÖNENÇ

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İKİNCİ TİP SINIR DEĞER VE İNTEGRAL KOŞULLARI İLE LOKAL
OLMAYAN TERS PARABOLİK PROBLEM İÇİN FARK ŞEMALARI**

Ahmet GÖNENÇ

Gümüşhane Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

2021, 81 sayfa

Bu işte, ters parabolik diferansiyel denklemler için ikinci tip sınır değer ve integral koşulları ile lokal olmayan problem ele alınmıştır.

Lokal olmayan problemin yaklaşık çözümünü bulmak için birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark şemaları kurulmuştur. İntegral koşullu Neumann tipi sınır değer problemi için birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark şemalarının kararlılığı gösterilmiştir.

Ayrıca, Neumann şartları ile verilen çok boyutlu ters parabolik kısmi diferansiyel denklem için birinci ve ikinci mertebeden doğrulukla fark şemalar ele alınmıştır.

Test örneklerde Neumann şartlı integral tipindeki lokal olmayan ters parabolik sınır değer probleminin sayısal çözümünü bulmak için MATLAB kodları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Crank-Nicholson şeması, Fark şeması, İntegral koşulu, İyi tanımlılık, Kararlılık tahmini, Sınır değer problemi, Ters parabolik denklem, Yaklaşık çözüm

ABSTRACT

MS THESIS

DIFFERENCE SCHEMES FOR NONLOCAL REVERSE PARABOLIC PROBLEM WITH SECOND KIND BOUNDARY AND INTEGRAL CONDITIONS

Ahmet GÖNENÇ

Gümüşhane University
The Graduate School of Education
Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

2021, 81 pages

In this work, second kind boundary and integral conditions for reverse parabolic differential equations and nonlocal problem are studied.

In order to find the approximate solution of the nonlocal problem, first and second order finite difference schemes are constructed. The stability of the first and second order finite difference schemes for the Neumann type boundary value problem with integral conditions are proved.

In addition, the difference schemes with the first and second order accuracy for the multidimensional reverse parabolic partial differential equation given by Neumann conditions are discussed.

MATLAB codes to find numerical solution of the integral type nonlocal reverse parabolic boundary value problem with Neumann condition in test examples are given.

Keywords: Crank-Nicholson scheme, Difference scheme, Integral condition, Well posedness, Stability estimates, Boundary value problem, Reverse parabolic equation, Approximate solution

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunun belirlenmesi, bu tezin hazırlanmasının her aşamasında yol gösterici olan, bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her türlü görüş ve önerilerini esirgemeyen çok kıymetli danışmanım Sayın Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV’ e teşekkür ederim.

Ayrıca bu zor süreçte her zaman yanımda olan annem Tülay GÖNENÇ’ e, beni her zaman yüreklendiren ablam Özgen GÖNENÇ ÇEKİÇ’ e, aileme ve yakın çevreme çok teşekkür ederim.

Ahmet GÖNENÇ

Gümüşhane, 2021

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	VI
TEŞEKKÜR.....	VIII
İÇİNDEKİLER.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
TABLolar DİZİNİ.....	XI
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Temel Kavramlar.....	1
1.2. Giriş.....	15
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	20
2.1. Sabit Katsayılı Ters Parabolik Denklemler için İntegral Koşullu Sınır Değer Probleminin Çözümlerinin Klasik Yöntemlerle Bulunması.....	20
2.2. Ters Parabolik Denklem için İntegral Koşullu Lokal Olmayan Problemin Çözümünün Kararlılığı.....	35
2.3. Birinci Mertebeden Fark Şeması.....	37
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	43
3.1. İkinci Mertebeden Fark Şeması.....	43
3.2. Crank-Nicholson Fark Şeması.....	45
3.2.1 Soyut Problem için Fark Şeması.....	45
3.2.2 Çok Boyutlu Problem için Fark Şeması.....	52
3.3. Sayısal Sonuçlar.....	54
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	76
5. KAYNAKLAR.....	79
6. EKLER.....	82
6.1. Ek 1. Örnek 3.1' in Sayısal Çözümü için MATLAB Program Kodları.....	82
6.2. Ek 2. Örnek 3.2' nin Sayısal Çözümü için MATLAB Program Kodları.....	84
6.3. Ek 3. Örnek 3.3' ün Sayısal Çözümü için MATLAB Program Kodları.....	86
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1. N=20, M=20 için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözüm grafiği.....	58
Şekil 3.2. N=20, M=20 için (3.20) probleminin gerçek çözüm grafiği.....	58
Şekil 3.3. N=10, M=10 için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	59
Şekil 3.4. N=20, M=20 için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	59
Şekil 3.5. N=40, M=40 için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	60
Şekil 3.6. N=80, M=80 için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	60
Şekil 3.7. N=160, M=160 için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	61
Şekil 3.8. N=320, M=320 için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	61
Şekil 3.9. N=20, M=20 için (3.28) İMDCNFŞ' nin yaklaşık çözüm grafiği.....	71
Şekil 3.10. N=20, M=20 için (3.27) probleminin gerçek çözüm grafiği.....	72
Şekil 3.11. N=10, M=10 için (3.28) İMDCNFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	72
Şekil 3.12. N=20, M=20 için (3.28) İMDCNFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	73
Şekil 3.13. N=40, M=40 için (3.28) İMDCNFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	73
Şekil 3.14. N=80, M=80 için (3.28) İMDCNFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	74
Şekil 3.15. N=160, M=160 için (3.28) İMDCNFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	74
Şekil 3.16. N=320, M=320 için (3.28) İMDCNFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği.....	75

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1. (3.21) BMDFŞ' nin hata analizi.....	57
Tablo 3.2. (3.24) İMDFŞ' nin hata analizi.....	66
Tablo 3.3. (3.28) İMDCNFS' nin hata analizi.....	71

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$M(\delta)$: Pozitif gerçek sayı
δ	: Pozitif gerçek sayı
α	: $(0,1)$ aralığındaki bir sayı
σ	: Pozitif gerçek sayı
τ, h	: Pozitif gerçek sayılar olmak üzere ağ noktaları belirleyen adımlar
N, M	: Doğal sayılar olmak üzere ağ (grid) noktaların sayısını belirler
H	: Hilbert uzayı
$A: H \rightarrow H$: Bir H Hilbert uzayında öz eşlenik pozitif tanımlı bir operatör.
$A^x v = -\sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v$: Operatör
Q	: Operatör
D	: Operatör
A^{-1}	: A operatörünün tersi
$C(H) = C([0,1], H)$: Değerleri H Hilbert uzayında olan ve $[0,1]$ aralığında tanımlı tüm sürekli fonksiyonlardan oluşan bir Banach uzayı
$\ v\ _{C(H)}$: Bir $v(t)$ fonksiyonun $C(H)$ Banach uzayındaki normu
$C_1^\alpha(H)$: Değerleri H Hilbert uzayında olan ve $[0,1]$ aralığında tanımlı tüm birinci mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonlardan oluşan bir Banach uzayı
$C^\alpha(H)$: Banach uzayı
$\ f\ _{C^\alpha(H)}$: f fonksiyonun $C^\alpha(H)$ Banach uzayındaki normu
$\ v\ _{C_1^\alpha(H)}$: Bir $v(t)$ fonksiyonun $C_1^\alpha(H)$ Banach uzayındaki normu
$\ p\ _H$: H Hilbert uzayındaki p elemanın normu
$\ A\psi\ _H$: H Hilbert uzayındaki $A\psi$ elemanın normu
$\Omega = (0,1)^n$: R^n Öklid uzayındaki açık birim küp
$\overline{\Omega}$: Açık birim küpün kapanışı
S	: Küpün sınırı
$C(\overline{\Omega})$: $\overline{\Omega}$ bölgesinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların oluşturduğu bir Banach uzayı
$\ u\ _{C(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) $: u fonksiyonun $C(\overline{\Omega})$ Banach uzayındaki normu
$L_2(\overline{\Omega})$: $\overline{\Omega}$ üzerinde tanımlı ve kuadratik integrallenebilir fonksiyonların kümesi
$D(A)$: A operatörünün tanım bölgesi

$C(L_2(\bar{\Omega}))$: Bir Banach uzayı
$W_2^2(\bar{\Omega})$: $\bar{\Omega}$ kümesinde tanımlı ve sürekli, hem de 1. ve 2. mertebeden kısmi türevlerine sahip, kendisi, 1. ve 2. mertebeden kısmi türevleri kuadratik integrallenebilen fonksiyonların oluşturduğu Sobolev uzayı
$[0,1]_\tau$: $\{t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, N, N\tau = 1\}$: eşit aralıklı grid noktalarından oluşan bir küme
$q^\tau = \{q_k\}_1^N$: Ağ (grid) fonksiyonlar
$C_\tau(H)$: Ağ (grid) fonksiyonlardan oluşan bir lineer uzay
$\ q^\tau\ _{C_\tau(H)} = \max_{1 \leq k \leq N} \ q_k\ _H$: $C_\tau(H)$ Banach uzayındaki q^τ ağ (grid) fonksiyonların normu
$R = (I + \tau A)^{-1}$: Rezolvent operatörü
$P = \left(I + \frac{A\tau}{2}\right)^{-1} \left(I - \frac{A\tau}{2}\right)$: Operatör
$C = \left(I + \frac{A\tau}{2}\right)^{-1}$: Operatör
A_n, B_n, C_n	: $(N+1) \times (N+1)$ kare matrisler
$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$: Matrisler
$Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}, G_1, G_2$: Matrisler
Eu_M^N, E_1, E_2	: Hata gösterimi
ψ_n	: $(N+1) \times 1$ tipinde sütun matris
I_n	: $(N+1) \times (N+1)$ tipinde birim matris
$v(t, s) = F\{u(t, x)\}$: u fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$v(t, s) = L\{u(t, x)\}$: u fonksiyonunun Laplace dönüşümü
BMDFS	: Birinci mertebeden doğrulukla fark şeması
İMDFS	: İkinci mertebeden doğrulukla fark şeması
İMDCNFS	: İkinci mertebeden doğrulukla Crank-Nicholson fark şeması
ÖEPTO	: Öz eşlenik pozitif tanımlı operatör

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda tez içerisinde kullanılan temel kavramları ve tanımları vereceğiz. Ayrıca, lineer uzay, normlu lineer uzay, metrik uzay, Banach uzayı, Hilbert uzayı, fonksiyonel, lineer operatör, öz eşlenik pozitif tanımlı operatör, Cauchy probleminin yaklaşık çözümü için Rothe fark şeması, lokal olmayan integral sınır koşulu, Dirichlet koşulu, Neumann koşulu tanımları verilecektir. Bu tanımlarla ilgili örnek ve çözümler incelenecektir.

Tanım 1.1. (Yosida, 1980) X aşağıdaki şartları sağlıyorsa K alanı üzerinde bir lineer uzaydır. X değişmeli (abelyen) bir gruptur. Her $x, y \in X$ ve her bir $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere αx şeklinde X 'in elemanı olan bir vektörün skalerle çarpımı tanımlanır.

- 1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
- 2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- 3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
- 4) $1.x = x$.

Burada 1, K alanının birim elemanıdır.

Tanım 1.2. (Maddox, 1970) X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \rightarrow R$ bir metrik fonksiyon olmak üzere her $x, y, z \in X$ elemanlar için

- 1) $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$, durumunda olur,
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$,
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanırsa (X, d) ikilisine metrik uzay denir. $d(x, x) = 0$ olduğunda ise yarı metrik uzay denir.

Tanım 1.3. (Maddox, 1970) X kompleks veya reel bir lineer uzay ve $\| \cdot \|: X \rightarrow R$ bir norm olmak üzere:

- 1) $\|x\| = 0$ yalnızca $x = \theta$ olduğunda,
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzaydır. $\|\theta\| = 0$ ve tüm $x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ olduğunu belirtelim.

Tanım 1.4. (Maddox, 1970) X tam normlu lineer uzayına bir Banach uzayı denir. Burada uzayın tam olmasının anlamı: $x_n \in X$ olmak üzere $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty$ ise $\|x_n - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanının var olmasıdır.

Örnek 1.1. L_p 'nin elemanları, x öyle ki $|x|^p$ olacak şekilde $[0,1]$ üzerinde Lebesque integrallenebilir fonksiyonlardır. Buradan $x \in L_p$ ancak ve ancak $\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$ 'dur.

L_p içindeki doğal yarı norm

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklindedir. Bu uzay, $p > 1$ için $L_p[0,1]$ ile gösterilir.

Tanım 1.5. (Krein, 1971) H Hilbert uzayı, bir iç çarpım kullanarak normu $\|x\|^2 = (x, x)$ ile oluşturulan Banach uzayıdır. İç çarpım ise $x, y \in H$ için (x, y) formundaki fonksiyonel olmak üzere:

- 1) $x \neq 0$ ise $(x, x) > 0$,
- 2) $(x, y) = (y, x)$,
- 3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

$$4) (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

özelliklerine sahiptir.

Tanım 1.6. (Krein, 1971) n boyutlu Öklid uzayında $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ ve $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ vektörlerinin skaler çarpımı genellikle

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$$

formülü ile bulunur.

n boyutlu üniter (kompleks Öklid) uzayı

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \overline{\eta_i}$$

formülü ile bulunur.

Örnek 1.2. Eğer l_2 kompleks uzayı için

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}$$

oluşturulursa, bu Hilbert uzayı olur.

Örnek 1.3. Eğer kompleks değerli fonksiyonların $L_2(a, b)$ uzayı için

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$$

kurulursa, bu Hilbert uzayı olur.

Örnek 1.4. Hilbert uzayında

$$\forall x, y \in H \text{ için } \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

paralelkenar kuralı geçerlidir.

Çözüm: $\forall x, y \in H$ için

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

paralelkenar kuralı Banach uzayında geçerli değildir.

Tanım 1.7. (Naimark, 1968) H uzayının bazı alt kümelerinde tanımlanan ve fonksiyon değerleri olarak gerçekte veya kompleks sayıları alan herhangi bir F fonksiyonuna H içinde bir fonksiyonel denir.

F fonksiyoneline, H uzayının tüm elemanlarında tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde lineer fonksiyonel denir.

$$1) F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y),$$

$$2) \text{ Tüm } x \in H \text{ ve } C \text{ sabiti için } |F(x)| \leq C\|x\|.$$

E üzerinde tanımlanan A operatörün tanım bölgesini $D(A)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.8. (Krein, 1971) $D(A)$, E içinde bir lineer manifold olursa ve keyfî $x_1, x_2 \in D(A)$ elemanlar için

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$$

ise A operatörüne lineer operatör denir.

Birim (özdeşlik) operatör I her $x \in E$ eleman için $Ix = x$ olacak şekilde tanımlanır.

Örnek 1.5. (Maddox, 1970) İntegral denklemler teorisinde

$$(Ax)(s) = \int_0^1 a(s, t)x(t)dt$$

ile tanımlanan şekilde A operatörü oluşur.

Bu denklemde $a(s,t)$, $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $x = x(t)$, $[0,1]$ üzerinde süreklidir. Buradan, Ax , $s \in [0,1]$ 'nin sürekli bir fonksiyonudur.

Böylece,

$$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$$

olur.

Örnek 1.6. (Krein, 1966)

$$A^x v = - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v$$

diferansiyel ifadesi $D(A^x) = \{u \in W_2^2(\bar{\Omega}), u(x) = 0, x \in S\}$ etkisi ile $L_2(\bar{\Omega})$ üzerinde hareket eden A^x , öz eşlenik pozitif tanımlı operatörü tanımlar.

Tanım 1.9. (Maddox, 1970) $A: X \rightarrow Y$ lineer operatörü ancak ve ancak tüm $x \in X$ elemanları için $\|A(x)\| \leq M \|x\|$ olacak şekilde bir M sabiti mevcut ise sınırlı denir. $B(X, Y)$ ile lineer sınırlı operatörlerin kümesini göstereceğiz.

Tanım 1.10. (Maddox, 1970) $A \in B(X, Y)$ olsun. O zaman A operatörünün normu

$$\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} < \infty$$

şeklinde tanımlanır. Supremumun sınırlı olması her $A \in B(X, Y)$ için $\|A(x)\| \leq M \|x\|$ sağlandığından elde edilir.

Tanım 1.11. (Krein, 1971) H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan A , lineer sınırlı operatörünün normu

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{(x,x)=1} \sqrt{(Ax, Ax)} = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq O}} \sqrt{\frac{(Ax, Ax)}{(x, x)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer (Ax, y) skaler çarpımında y bir sabit ise bir x ' e bağlı lineer fonksiyonel

$$f(x) = (Ax, y)$$

olarak elde edilir.

Burada,

$$|f(x)| = |(Ax, y)| \leq \|A\| \|x\| \|y\|.$$

Bu fonksiyonel,

$$(Ax, y) = (x, u), \quad u \in H$$

formunda yazılabilir.

$y \rightarrow u$ karşılaştırması $u = A^*y$ sınırlı lineer operatörünü tanımlar. Tanıma göre,

$$(Ax, y) = (x, A^*y)$$

olur. A^* operatörüne, A operatörünün eşleniği (adjointi) denir.

Örnek 1.7. $H = L_2[0,1]$ ve $Ax = tx(t)$ olduğuna göre $A = A^*$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \int_0^1 Ax(t) \overline{y(t)} dt = \int_0^1 tx(t) \overline{y(t)} dt \\ &= \int_0^1 Ax(t) \overline{ty(t)} dt = \int_0^1 x(t) \overline{Ay(t)} dt \\ &= \langle x, Ay \rangle \Leftrightarrow A = A^*. \end{aligned}$$

Tanım 1.12. (Krein, 1971) A , E üzerinde tanımlı lineer bir operatör olsun. Eğer,

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$$

ise A sınırlıdır. Burada C , $x \in E$ elemanlarından bağımsızdır.

Bu eşitsizlikteki en küçük C sayılarına A operatörünün normu denir ve $\|A\|_{E \rightarrow F}$ ile gösterilir. Bu tanıma göre,

$$\|A\|_{E \rightarrow F} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_F \quad (1.1)$$

olduğu görülür.

Eğer, $F = E$ ise norm, $\|A\|$ şeklinde yazılır.

Örnek 1.8. $E_1 = E_2 = C[0,1]$, $A: E \rightarrow E$ olmak üzere:

$$Ax = \int_0^1 x(s) ds. \|A\|$$

eşitliğini gösterelim.

Çözüm: Her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} |Ax(t)| &\leq \int_0^1 |x(s)| ds \leq \int_0^1 \max_{0 \leq s \leq 1} |x(s)| ds \\ &= \max_{0 \leq s \leq 1} |x(s)| \int_0^1 ds = \|x\|_{C[0,1]} \end{aligned}$$

doğrudur. Buna göre:

$$\|Ax\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leq s \leq 1} |Ax(s)| = |Ax(t_0)| \leq \|x\|_{C[0,1]}$$

$$\|Ax\|_{C[0,1]} \leq \|x\|_{C[0,1]}, \forall x \in C[0,1]$$

şeklindeki eşitsizlikler elde edilir.

(1.1) formülüne göre:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{C[0,1]}=1} \|Ax\|_{C[0,1]} \leq \sup_{\|x\|_{C[0,1]}=1} \|x\|_{C[0,1]} = 1$$

bulunur.

Buradan, $\|A\| \leq 1$ olur.

Şimdi, $x_0(t) \equiv 1$ fonksiyonunu ele alalım. O zaman,

$$\|x_0\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leq s \leq 1} |x_0(s)| = \max_{0 \leq s \leq 1} |1| = 1$$

ve

$$Ax_0(t) = \int_0^1 x_0(s) ds = \int_0^1 1 ds = 1, \quad |Ax_0(t)| = 1$$

olur. Buna göre,

$$\|Ax_0\|_{C[0,1]} = |Ax_0(t_0)|,$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{C[0,1]}=1} \|Ax\|_{C[0,1]} \geq \|Ax_0\|_{C[0,1]} = 1.$$

Böylece

$$\|A\| \geq 1$$

elde edilir.

Sonuçta $\|A\| \leq 1$ ve $\|A\| \geq 1$ olduğuna göre, $\|A\| = 1$ olur.

Tanım 1.13. (Krein, 1971) Sınırlı lineer bir A operatör kendisinin eşleniğine eşit, $A = A^*$ ise öz eşleniktir.

Öz eşlenik operatör için

$$(Ax, y) = (x, Ay) = \overline{(Ay, x)}$$

eşitliği vardır.

Tanım 1.14. (Krein, 1971) A öz eşlenik operatörünü alt ve üst sınırları sırasıyla,

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

ve

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

şeklindedir.

A operatörünün normu $|m|$ ve $|M|$ sayılarının en büyüğüne eşittir:

$$\|A\| = \max(|m|, |M|) = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Eğer, alt sınır negatif değilse, yani bir başka deyişle, her $x \in H$ ve $A \neq 0$ için

$$(Ax, x) \geq 0$$

ve

$$\langle Ax, x \rangle \geq \delta \langle x, x \rangle, \delta > 0$$

olursa, A operatörüne pozitif operatör denir. Öz eşlenik pozitif tanımlı A operatörünün $f(A)$ fonksiyonunun normu için

$$\|f(A)\| \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} |f(\lambda)|$$

kestirimi geçerlidir.

Örnek 1.9. e^{-tA} , Ae^{-tA} , $t \geq 0$ olmak üzere operatörün normlarını gösterelim.

Çözüm:

$$\|f(A)\| \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} |f(\lambda)|$$

formülünü kullanarak

$$\|e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} |e^{-t\lambda}| = |e^{-\delta t}|$$

olduğuna göre;

$$\|e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \leq |e^{-\delta t}|$$

elde edilir.

$$\|Ae^{-tA}\|_{H \rightarrow H}$$

normunu değerlendirmek için önce $\psi(\lambda) = \lambda e^{-t\lambda}$ fonksiyonunu inceleyelim.

$$\psi(0) = \psi(\infty) = 0,$$

$$\psi'(\lambda) = e^{-t\lambda} - t\lambda e^{-t\lambda} = 0,$$

$$1 - t\lambda e^{-t\lambda} = 0, \quad \lambda = \frac{1}{t}.$$

Buna göre,

$$\|Ae^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} |\lambda e^{-t\lambda}| = \frac{1}{et}.$$

Tanım 1.15. (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994) N bir doğal sayı olmak üzere $[0,1]_h = \{t_k : t_k = kh, 0 \leq k \leq N, Nh = 1\}$ grid noktalar kümesinde tanımlanan $\varphi^h = \{\varphi_k\}_0^N$ mesh fonksiyonların kümesini ele alalım. $H = L_{2h}$ uzayı, $[0,1]_h$ grid noktalar kümesinde tanımlanan $\{\varphi_k\}_0^N$ mesh fonksiyonların aşağıdaki normu ile bir uzay olsun.

$$\|\varphi^h\| = \left(\sum_{k=0}^N |\varphi_k|^2 h \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\langle \varphi^h, \psi^h \rangle = \sum_{k=0}^N \varphi_k \psi_k h.$$

Örnek 1.10. $A_h \varphi^h = \left\{ \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{h} \right\}_{k=1}^N$, $\varphi_0 = 0$ operatörünün öz eşlenik ve pozitif olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \langle A_h \varphi^h, \varphi^h \rangle &= \sum_{k=1}^N (A \varphi^h)_k \varphi_k h \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{h} \varphi_k h \\ &= \sum_{k=1}^N \varphi_k (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2 + \varphi_N^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

$$\langle A_h \varphi^h, \psi^h \rangle = \sum_{k=0}^N \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{h} \psi_k h = \sum_{k=0}^N (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \psi_k,$$

$$\langle \varphi^h, A_h \psi^h \rangle = \sum_{k=0}^N \varphi_k \frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{h} h = \sum_{k=0}^N (\psi_k - \psi_{k-1}) \varphi_k,$$

$$\langle A_h \varphi^h, \psi^h \rangle \neq \langle \varphi^h, A_h \psi^h \rangle.$$

A_h kendisine eşlenik değildir ama pozitif operatördür.

Örnek 1.11. $A_h \varphi^h = \left\{ -\frac{\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1}}{h^2} \right\}_{k=1}^N$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_N = 0$ olmak üzere operatörün öz

eşlenik ve pozitif olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \langle A_h \varphi^h, \psi^h \rangle &= - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1}}{h^2} \psi_k h \\ &= - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{h} - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{h}}{h} \psi_k h \\ &= - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{h} \psi_k + \sum_{k=0}^N \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{h} \psi_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\varphi_{k+1} - \varphi_k)(\psi_{k+1} - \psi_k)}{h} \end{aligned}$$

$$\langle A_h \varphi^h, \psi^h \rangle = \langle \varphi^h, A_h \psi^h \rangle.$$

$$\begin{aligned} \langle A_h \varphi^h, \varphi^h \rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\varphi_{k+1} - \varphi_k)(\varphi_{k+1} - \varphi_k)}{h} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2}{h} \geq 0. \end{aligned}$$

A_h kendisine eşlenik ve pozitif operatördür.

Tanım 1.16. (Naimark, 1968) Eğer λ kompleks sayısı için H uzayı üzerinde $R_\lambda = (A - \lambda 1)^{-1}$ tersi varsa ve sınırlı operatörü temsil ediyorsa A operatörünün regüler noktasıdır denir. R_λ operatörüne ise A operatörünün rezolventi denir.

Keyfi bir E Banach uzayında parabolik denklem için

$$v'(t) + Av(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad v(0) = v_0 \quad (1.2)$$

şeklindeki Cauchy problemini ele alalım. Burada $v(t)$ bilinmeyen ve $f(t)$ verilen bir $[0,1]$ üzerinde tanımlanmış E değerli fonksiyonlardır. $v'(t)$ türevi ise karşılıklı farklılık oranının

E normundaki limiti olarak anlaşılır. $A, D(A)$ etki alanında ve E üzerinde tanımlanan bir lineer operatör olsun. Ayrıca, v_0, E 'nin verilen bir elemanıdır.

Tanım 1.17. (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994)

Eğer $v(t)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa (1.2) problemin çözümüdür denir.

1) $v(t), [0,1]$ segmenti üzerinde sürekli bir türevlenebilir. Segmentin uç noktalarındaki türev uygun tek taraflı türevler olarak anlaşılır.

2) $v(t)$ elementi tüm $t \in [0,1]$ için $D(A)$ 'ya aittir ve $Av(t)$ fonksiyonu, $[0,1]$ üzerinde sürekli'dir.

3) $v(t), (1.2)$ eşitliğini ve sınır şartlarını sağlar.

(1.2) Cauchy problemini, ona karşılık gelen

$$Du_k + Au_k = \varphi_k, 1 \leq k \leq N, u_0 = u_0(\tau) \quad (1.3)$$

şeklindeki fark problemi ile ilişkilendireceğiz.

Burada N pozitif bir tam sayı, $\tau = \frac{1}{N}$, $Du_k = \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau}$, ve $u^\tau = \{u_k\}_1^N$, $\varphi^\tau = \{\varphi_k\}_1^N$

vektörleri E Banach uzayının elemanlarından oluşan sırasıyla bilinmeyen ve verilen ağ (grid) fonksiyonlarıdır. φ^τ fonksiyonu ve $u_0(\tau)$ elemanları sırasıyla, belirli bir şekilde, $f(t)$ ve v_0 değerlerin yaklaşımlarıdır.

Örneğin: Eğer $f(t) \in C(E)$ ise $\varphi_k = f(t_k)$, $t_k = k\tau$, $k = 1, \dots, N$, $u_0 = v_0$ belirleyebiliriz.

Burada, $f(t) \in L_1(E)$ ise

$$\varphi_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s) ds$$

olur. (1.3) fark problemine, (1.2) Cauchy probleminin yaklaşık çözümü için *Rothe fark şeması* denir.

Eğer $u_k \in D(A)$, $k = 1, \dots, N$, komponentleri (1.3) denklem sistemini sağlarsa u^τ ağ (grid) fonksiyonuyla birlikte τ sabitine, (1.3) fark probleminin çözümüdür denir.

Şimdi $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyon için

$$\int_a^b f(t)dt$$

şeklindeki belirli integralin birinci ve ikinci mertebeden yaklaşım formüllerini verelim.

$\tau = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$ için $t_i = a + i\tau$ noktaları belirleyelim.

Birinci mertebeden yaklaşım formülü

$$\int_a^b f(t)dt = \tau \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) + o(\tau)$$

biçimindedir.

$f \in C^2[a, b]$ olsun. Yamuk kuralı olarak adlandırılan ikinci mertebeden yaklaşım formülü:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{\tau}{2} \left[f(t_0) + f(t_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \right] + o(\tau^2)$$

şeklindedir (Cheney ve Kincaid, 2008).

Tanım 1.18. (Ashyralyyev vd, 2012a) $\Omega = (0, 1)^n \subset R^n$ birim açık küp, $S = \partial\Omega$ onun sınırı ve $\bar{\Omega} = S \cup \Omega$ kapanışı olsun. Şimdi, $f = (0, 1) \times \Omega \rightarrow R$, $a_r : \Omega \rightarrow R$, $r = 1, \dots, M$, $\mu : [0, 1] \rightarrow R$, $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow R$ verilen fonksiyonlar olduğunu varsayalım. Ayrıca σ bilinen bir pozitif sayı, her $x \in \Omega$ ve r indis için $a_r(x) \geq a_0 > 0$ olsun.

$[0, 1] \times \Omega$ bölgesinde tanımlı u fonksiyonu denklem için çok boyutlu ters parabolik kısmi diferansiyel denklemi

$$u_t(x, t) + \sum_{r=1}^n \left(a_r(x) u_{x_r}(x, t) \right)_{x_r} - \sigma u(x, t) = f(x, t), \quad 0 < t < 1, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$$

şeklindedir.

Bu denklemi sağlayan u fonksiyonu

$$u(x,1) = \int_0^1 \mu(s)u(x,s)ds + \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega} \quad (1.4)$$

sınır koşuluna uyumlu olsun. (1.4) koşuluna lokal olmayan integral sınır koşulu denir.

$x \in S, t \in [0,1]$ olmak üzere u fonksiyonun (x,t) noktasındaki normal \vec{n} vektörüne göre

kısmi türevi $\frac{\partial u(x,t)}{\partial \vec{n}}$ ile gösterilir.

u fonksiyonu için

$$u(x,t) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq 1$$

koşuluna *Dirichlet koşulu*,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq 1$$

koşuluna *Neumann koşulu* denir.

1.2. Giriş

Son dönemlerde ters parabolik kısmi diferansiyel denklemler konusundaki araştırmalar özellikle lokal olmayan başlangıç koşullarıyla verilen matematiksel fizik denklemlerin mühendisliğin, fiziğin farklı uygulamalı alanlarında ve temel bilimlerin birçok dalında ortaya çıkmasıyla bu konuda bilimsel araştırma yapılması daha önem kazanmıştır.

Ters parabolik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemleri biyolojik, fiziksel, sistem mühendisliği, ekonomi ve sosyolojik süreçleri modellemek için kullanılır ve birçok kişi tarafından incelenmiştir.

Stewartson (1974), Stewartson (1981), Martin-Vaquero (2009), Martin-Vaquero ve Vigo-Aguiar (2009), Klimsiak (2012) makalelerde ters parabolik denklem, akışkan dinamiği, plazma fiziği, bir elektron ışınının güneş koronası boyunca yayılmasının incelenmesi gibi birçok uygulamada ortaya çıktığı görülmüştür.

LaRosa (1986) makalede ekonomide ortalama alan dengesinin hesaplanması ters parabolik denklemlerle model kullanılarak yapılmıştır.

Ashyralyev vd (2008), Ashyralyev vd (2009), Ashyralyev vd (2012), Ashyralyev (2018), Ashyralyev (2020), Ashyralyev vd (2012a), Ashyralyev vd (2012b) makalelerde çeşitli sınır koşulları ile ters parabolik denklem için klasik olmayan sınır değer problemlerinin iyi tanımlılığı ve yaklaşık çözümleri için fark şemaları incelenmiştir.

Ayrıca, Ashyralyev vd (2008) makalede ters parabolik denklemler için çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemlerinin iyi tanımlılığı gösterilmiştir.

Ashyralyev vd (2009), Ashyralyev vd (2012a) makalelerde ters parabolik denklemler için çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümü için BMDFŞ ve İMDFŞ incelenmiştir.

Ashyralyev ve Akkan (2020) makalede Dirichlet sınır koşulları ile çok boyutlu ters parabolik denklemler için çok noktalı lokal olmayan problemlerin yaklaşık çözümü için İMDFŞ' ler incelenmiştir.

Ters parabolik denklemler için farklı lokal olmayan Neumann koşullu sınır değer problemler ve onların yaklaşımları Ashyralyev vd (2008), Ashyralyev vd (2012b), Ashyralyev (2018), Ashyralyev (2020) makalelerde araştırılmıştır.

Ashyralyev vd (2012a) ve Ashyralyev (2018) makalelerde ters parabolik denklemler için çok noktalı ve integral tipindeki lokal olmayan sınır değer problemlerin iyi tanımlılığı araştırılmıştır.

Ashyralyev (2020) makalede lokal olmayan ters parabolik problemi integral koşullu çözmek için sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır, ters parabolik problemin yaklaşımı için İMDFŞ oluşturulmuştur, bu fark şemasının çözümleri için kararlılık tahminleri gösterilmiştir. Ayrıca, çok boyutlu ters parabolik sınır değer probleminin birinci tür sınır koşulu ile yaklaşımı için İMDFŞ ve onun çözümü için kararlılık tahminleri incelenmiştir. Bu makalede, basit test problemleri için sayısal gösterim verilmiştir.

Ancak ters parabolik denklemler için ikinci tip Neumann koşullu lokal olmayan sınır değer şartlarıyla Crank-Nicholson fark şemaları problemleri incelenmemiştir. Bu problemler için kararlılık analizi yapılmamıştır. Yaklaşık çözüm için de kararlılık sonuçları açıktır. Tezde alınacak sonuçlar bu boşluğu doldurmayı hedeflemektedir.

İkinci tip sınır değer ve integral koşulları ile lokal olmayan ters parabolik problemleri araştırmak için klasik yöntemler (Fourier serileri, Fourier ve Laplace integral yöntemler) sabit katsayılı durumlarda uygulanabilir. H , herhangi bir Hilbert uzayı olsun. $I : H \rightarrow H$,

birim operatör olmak üzere $A: H \rightarrow H'$ 'nın ÖEPTO olduğunu varsayalım. Bu durumda $\delta > 0$ bir pozitif sabit için $A > \delta I$ ifade doğrudur. $\psi \in H$ ve f, μ düzgün fonksiyonları verilmiş olsun. Ters parabolik denklem için

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u(1) = \int_0^1 \mu(s)u(s)ds + \varphi \end{cases} \quad (1.5)$$

şeklindeki integral koşullu sınır değer probleminin iyi tanımlılığı Ashyralyyev (2018) makalede incelenmiştir.

Ashyralyyev (2020) makalede bu problemin yaklaşık çözümü için Rothe fark şeması incelenmiştir. İkinci mertebeden doğrulukla yaklaşık çözüm için

$$\begin{cases} \frac{u_k(x) - u_{k-1}(x)}{\tau} - \frac{1}{2}(Au_k + Au_{k-1}) = \theta_k, \quad \theta_k = f\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\tau\right), \\ t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad \tau = \frac{1}{N}, \\ -\frac{\tau}{2}\mu\left(\frac{\tau}{2}\right)u_0 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tau}{2} \left[\mu\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right) + \mu\left(t_{j+1} + \frac{\tau}{2}\right) \right] u_j + \left(1 - \frac{\tau}{2}\mu\left(t_N - \frac{\tau}{2}\right)\right) u_N = \varphi \end{cases} \quad (1.6)$$

Crank-Nicholson fark şemasını kullanacağız.

Crank-Nicholson fark şemasının çözümü için kararlılık ve koersiv eşitsizlikleri kanıtlanacaktır.

$\Omega = (0,1)^n \subset R^n$ birim açık küp, $S = \partial\Omega$, $\bar{\Omega} = S \cup \Omega$ ve $f = (0,1) \times \Omega \rightarrow R$, $a_r: \Omega \rightarrow R$, $r = 1, \dots, M$, $\mu: [0,1] \rightarrow R$, $\varphi: \bar{\Omega} \rightarrow R$ verilen fonksiyonlar, σ bilinen bir pozitif sayı, her $x \in \Omega$ ve r indis için $a_r(x) \geq a_0 > 0$ olduğunu varsayalım.

Çok boyutlu ters parabolik kısmi diferansiyel denklem için

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x,t) + \sum_{r=1}^n \left(a_r(x) u_{x_r}(x,t) \right)_{x_r} - \sigma u(x,t) = f(x,t), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < 1, \\ u(x,1) = \int_0^1 \mu(s) u(x,s) ds + \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (1.7)$$

şeklindeki lokal olmayan integral koşullu Neumann sınır değer probleminin birinci mertebeden yaklaşık çözümü araştırılacaktır. Neumann koşullu lokal olmayan ters parabolik sınır değer probleminde yaklaşık çözümü bulabilmek için BMDFŞ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} - A_h^x u_{k-1}^h(x) = f^h(t_k, x), \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in \Omega_h, \\ u_N^h(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \mu(t_j) u_j^h(x) \tau + \varphi^h(x), \quad x \in \Omega_h \end{array} \right. \quad (1.8)$$

ele alınacaktır ve çözümün kararlılık tahminleri incelenecektir.

Ağ (grid) noktalar kümesi:

$$\Omega_h = \{x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n), \quad m = (m_1, \dots, m_n), \quad m_r = 0, \dots, M_r, \quad h_r M_r = l, \quad r = 1, \dots, n\},$$

$$\Omega_h = \Omega \cap \Omega_h, \quad S_h = \Omega_h \cap S$$

şeklindedir.

$$\tau \text{ ve } |h| = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2} \text{ küçük pozitif gerç k sayılardır ve } \tau N = 1, \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Her $x \in S$ için $u^h(x) = 0$ şartını sağlayan

$$A_h^x u^h = - \sum_{r=1}^N \left(a_r u_{x_r}^h \right)_{x_r, j_r} + \sigma u^h \quad (1.9)$$

şeklindeki operatörü A_h^x ile göstereceğiz.

Neumann şartı ile verilen ters parabolik kısmi diferansiyel denklemin lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için İMDFS oluşturulacaktır.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} - \frac{1}{2} (A_h^x u_k^h(x) + A_h^x u_{k-1}^h(x)) = \theta_k(x), \\ \theta_k(x) = f^h\left(t_{k-\frac{\tau}{2}}, x\right), \quad t_k = k\tau, \quad k = 1, \dots, N, \quad N\tau = 1, \quad x \in \Omega_h, \\ u_N^h(x) = \sum_{j=1}^N \mu\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right) \frac{\tau}{2} [u_j^h(x) + u_{j-1}^h(x)] + \varphi^h(x), \quad x \in \Omega_h \end{array} \right. \quad (1.10)$$

fark şemasının çözümü için kararlılık ve koersiv kararlılık eşitsizlikleri elde edilecektir.

Test örneklerde ters parabolik lokal olmayan sınır değer probleminin çözümünü bulmak için algoritma ve MATLAB kodları verilecektir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Sabit Katsayılı Ters Parabolik Denklemler için İntegral Koşullu Sınır Değer Probleminin Çözümlerinin Klasik Yöntemlerle Bulunması

Bu kısımda, sabit katsayılı ters parabolik kısmi diferansiyel denklemler için integral koşullu sınır değer problemleri Fourier serileri, Fourier integral dönüşüm ve Laplace integral dönüşüm yöntemleri uygulanarak çözülecektir.

İlk olarak, Fourier serileri yöntemi uygulayarak Örnek 2.1' deki integral koşullu sınır değer problemin çözümünü ele alalım.

Örnek 2.1. $[0,1] \times [0,\pi]$ bölgesinde ters parabolik denklem için

$$\begin{cases} u_t(t, x) = -u_{xx}(t, x) + u(t, x) - 3e^{-t} \cos x, \\ 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ u(1, x) = \int_0^1 e^{-\tau} u(\tau, x) d\tau + \left(\frac{1}{e} + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(t, 0) = 0, \quad u_x(t, \pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklindeki integral koşullu lokal olmayan sınır değer problemin çözümünü Fourier seri yöntemi ile bulalım.

Çözüm: Çözümü,

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x) \quad (2.2)$$

biçiminde arayacağız. Burada $v(t, x)$ ve $w(t, x)$ fonksiyonları sırasıyla homojen denklem

$$\begin{cases} v_t(t, x) = -v_{xx}(t, x) + v(t, x), \\ 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ v(1, x) = \int_0^1 e^{-\tau} v(\tau, x) d\tau, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ v_x(t, 0) = 0, \quad v_x(t, \pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

için sınır değer problemin ve homojen olmayan denklem için

$$\begin{cases} w_t(t, x) = -w_{xx}(t, x) + w(t, x) - 3e^{-t} \cos x, \\ 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ w(1, x) = \int_0^1 e^{-\tau} w(\tau, x) d\tau + \left(\frac{1}{e} + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ w_x(t, 0) = 0, \quad w_x(t, \pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

sınır değer problemin çözümü olarak alınır.

Öncelikle (2.3) problemin çözümünü elde edelim.

Çözümü,

$$v(t, x) = X(x) \cdot T(t) \quad (2.5)$$

şeklinde arayalım. (2.3) problemin çözümünü değişkenlere ayırma yöntemiyle arayacağız.

$v(t, x)$ fonksiyonunun x ve t değişkenlerine göre türevleri alınarak (2.3) problemin diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa,

$$T'(t) \cdot X(x) = -T(t) \cdot X''(x) - T(t) \cdot X(x)$$

veya

$$(T'(t) + T(t)) \cdot X(x) = -T(t) \cdot X''(x)$$

ifadesi elde edilir. Buna göre ifade, λ bir sabit olmak üzere

$$\frac{T'(t) + T(t)}{T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

biçiminde olur.

(2.3) problemin sınır değer koşullarını kullanırsak

$$X_x(0) = 0, X_x(\pi) = 0 \quad (2.6)$$

alınır. Şimdi,

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, 0 < x < 1 \quad (2.7)$$

denklemini için (2.6) sınır değer şartları ile sınır değer problemini inceleyelim.

(2.7) adi diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için $m^2 + \lambda = 0$ karakteristik denklemini yazalım. $\lambda \leq 0$ için sadece trivial çözüm vardır.

O zaman $\lambda > 0$ duruma bakalım. O zaman

$$X(x) = a_1 \cdot \cos \sqrt{\lambda} x + a_2 \cdot \sin \sqrt{\lambda} x$$

ifadesi (2.7) denkleminin çözümüdür. Burada x' e göre türev alınırsa,

$$X_x(x) = -a_1 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \sin \sqrt{\lambda} x + a_2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \cos \sqrt{\lambda} x$$

olur.

Sonrasında sınır değerleri yerine yazılırsa,

$$X_x(0) = 0 \Rightarrow a_2 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \cos \sqrt{\lambda} x = 0 \Rightarrow a_2 = 0,$$

$$X_x(\pi) = 0 \Rightarrow -a_1 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$$

alınır. Buna göre,

$$\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$$

olur. $k = 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\sqrt{\lambda} = k \Rightarrow \lambda = k^2$$

elde edilir. Böylelikle,

$$\lambda_k = k^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

öz değerler elde edilmiş olur. (2.8) öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar

$$X_k(x) = \cos kx, \quad k = 1, 2, \dots$$

şeklindedir. Şimdi $T_k(t)$ fonksiyonlarını bulalım.

$$\frac{T'(t) + T(t)}{T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2$$

olduğuna göre

$$T'(t) + (1 + k^2)T(t) = 0 \quad (2.9)$$

(2.9) denklemin çözümü c_k , $k = 1, 2, \dots$ keyfi sabitler olmak üzere

$$T_k(t) = c_k e^{-(1+k^2)t}$$

biçimindedir. Sonuçta, (2.3) problemin çözümü

$$v(t, x) = \sum_1^{\infty} c_k e^{-(1+k^2)t} \cos kx$$

olarak elde edilir. Şimdi integral koşulundan

$$\sum_1^{\infty} c_k e^{-(1+k^2)t} \cos kx = \int_0^1 e^{-\tau} \sum_1^{\infty} c_k e^{-(1+k^2)\tau} \cos kx d\tau,$$

$$\sum_1^{\infty} c_k e^{-(1+k^2)} \cos kx = \sum_1^{\infty} \int_0^1 e^{-\tau} c_k e^{-(1+k^2)\tau} d\tau \cos kx,$$

$$\sum_1^{\infty} c_k e^{-(1+k^2)} \cos kx = \sum_1^{\infty} \frac{e^{-(2+k^2)} - 1}{2+k^2} \cos kx$$

elde edilir. Buna göre $k = 1, 2, \dots$ için

$$c_k = 0$$

olur.

Yani çözümü

$$v(t, x) = 0$$

olarak buluruz.

Şimdi (2.4) problemin çözümünü $A_k(t)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$w(t, x) = \sum_1^{\infty} A_k(t) \cdot \cos kx \tag{2.10}$$

şeklinde arayacağız. Buradan (2.10) ifadesinin t ve x değişkenlere göre türevlerini alıp (2.4) kısmi diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_1^{\infty} (A'_k(t) - k^2 A_k(t) - A_k(t)) \cdot \cos kx = -3e^{-t} \cos x$$

elde edilir. $k \neq 1$ indisler için

$$A'_k(t) - (1+k^2)A_k(t) = 0$$

olur. b_k keyfi sabit olmak üzere

$$A_k(t) = b_k e^{(1+k^2)t}$$

elde edilir. Buna göre,

$$w(t, x) = \sum_1^{\infty} b_k e^{(1+k^2)t} \cdot \cos kx$$

sonucuna ulaşılır.

$$w(1, x) = \int_0^1 e^{-\tau} w(\tau, x) d\tau + \left(\frac{1}{e} + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \cos x \quad (2.11)$$

integral koşulunu kullanırsak

$$\sum_1^{\infty} b_k e^{(1+k^2)} \cdot \cos kx = \sum_1^{\infty} \left(\int_0^1 e^{-\tau} b_k e^{(1+k^2)\tau} d\tau \right) \cos kx + \left(\frac{1}{e} + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \cos x$$

olur. Böylelikle,

$$b_k e^{(1+k^2)} = b_k \int_0^1 e^{-\tau} e^{(1+k^2)\tau} d\tau$$

eşitliği gösterilir. Buradan $k \neq 1$ indisler için

$$b_k = 0$$

olduğu görülür.

$k = 1$ durumunda,

$$A_1'(t) - 2A_1(t) = -3e^{-t} \quad (2.12)$$

denkleme ulaşılır. (2.12) denklemin çözümü

$$A_1(t) = A_1(0)e^{2t} - 3 \int_0^t e^{2(t-s)} e^{-s} ds$$

şeklindedir. Yine (2.11) integral koşulunu kullanırsak

$$\begin{aligned} w(t, x) &= A_1(t) \cos x = \left[(A_1(0) - 1)e^{2t} + e^{-t} \right] \cos x, \\ \left[(A_1(0) - 1)e^2 + e^{-1} \right] \cos x &= \int_0^1 e^{-\tau} \left[(A_1(0) - 1)e^{2\tau} + e^{-\tau} \right] d\tau \cos x + \left(\frac{1}{e} + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \cos x, \\ \left[(A_1(0) - 1)e^2 + e^{-1} \right] &= \int_0^1 e^{-\tau} \left[(A_1(0) - 1)e^{2\tau} + e^{-\tau} \right] d\tau + \left(\frac{1}{e} + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{2} \right), \\ \left[(A_1(0) - 1)e^2 + e^{-1} \right] &= (A_1(0) - 1)(e - 1) - \frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{e} + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{2} \right), \\ (A_1(0) - 1)(e^2 - e + 1) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, $A_1(0) = 1$ olduğu görülür.

O halde, (2.4) problemin çözümü

$$w(t, x) = A_1(t) \cdot \cos x = \left[(A_1(0) - 1)e^{2t} + e^{-t} \right] \cos x = e^{-t} \cos x$$

şeklindedir.

(2.2) ifadesini kullanırsak, (2.1) problemin çözümü

$$u(t, x) = e^{-t} \cos x$$

şeklinde bulunur.

Şimdi, sabit katsayılı ters parabolik denklemler için integral koşullu sınır değer probleminin çözümünü Örnek 2.2' de Fourier integral dönüşüm yöntemi kullanarak elde edelim.

Örnek 2.2. $[0,1] \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde ters parabolik denklem için

$$\begin{cases} u_t(t, x) = -u_{xx}(t, x) + u(t, x) + e^{-x^2}(1 + 4x^2t - 3t), \\ u(1, x) = \int_0^1 u(\tau, x) d\tau + \frac{1}{2}e^{-x^2}, \quad 0 < t < 1, \quad -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (2.13)$$

biçimindeki integral koşullu lokal olmayan sınır değer problemin çözümünü Fourier integral dönüşümü yöntemiyle bulalım.

Çözüm: (2.13) problemde diferansiyel denklemin her iki yanına x değişkenine göre Fourier integral dönüşümü uygulayalım.

$$v(t, s) = F\{u(t, x)\} \quad (2.14)$$

notasyonu göz önüne alalım. Fourier dönüşümün özelliklerine göre:

$$\begin{aligned} F\{u_{xx}(t, x)\} &= (is)^2 F\{u(t, x)\} = (is)^2 v(t, s), \\ (F\{u_{xx}(t, x)\})_t &= v_t(t, s), \\ F\{e^{-x^2}(1 + 4x^2t - 3t)\} &= F\{e^{-x^2}\} - F\{te^{-x^2}\} + F\{t(4x^2 - 2)e^{-x^2}\}, \\ &= F\{e^{-x^2}\} - tF\{e^{-x^2}\} + tF\{(e^{-x^2})''\} = (1 - t + (is)^2 t)F\{e^{-x^2}\}, \\ &= (1 - t - s^2 t)F\{e^{-x^2}\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (2.13) diferansiyel denkleminde

$$\begin{aligned} F\{u_t\} &= -F\{u_{xx}\} + F\{u\} + F\{e^{-x^2}(1 + 4x^2t - 3t)\}, \\ v_t(t, s) + (-s^2 - 1)v(t, s) &= (1 - t - s^2 t)F\{e^{-x^2}\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

elde edilir. (2.15) denklemini çözmek için ilk önce

$$v_t^h(t, s) + (-s^2 - 1)v^h(t, s) = 0,$$

homojen denklemi ele alalım. Onun çözümü

$$v^h(t, s) = v(1, s)e^{(s^2+1)(t-1)}$$

olarak bulunur. Bu durumda, homojen olmayan (2.15) denklemin çözümü

$$v(t, s) = v(0, s)e^{(s^2+1)t} + \int_0^t e^{(s^2+1)(t-\tau)}(1-\tau-s^2\tau)d\tau F\left\{e^{-x^2}\right\} \quad (2.16)$$

şeklindedir.

İlk önce

$$I(t) = \int_0^t e^{-(s^2+1)\tau} \tau d\tau$$

integrali hesaplayalım. Kısmi integrasyon kullanarak aşağıdaki işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} I(t) &= \left\{ u = \tau, e^{-(s^2+1)\tau} d\tau = dv, du = d\tau, v = -\frac{1}{(s^2+1)} e^{(s^2+1)\tau} \right\}, \\ &= \frac{1}{(s^2+1)} \left(-\tau e^{-(s^2+1)\tau} \right)_0^t + \frac{1}{(s^2+1)} \int_0^t e^{-(s^2+1)\tau} d\tau, \\ &= -\frac{te^{-(s^2+1)t}}{(s^2+1)} - \frac{e^{-(s^2+1)t}}{(s^2+1)^2} (e^{-(s^2+1)t} - 1), \\ &= -\frac{te^{-(s^2+1)t}}{(s^2+1)} - \frac{e^{-(s^2+1)t}}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{(s^2+1)^2} \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi,

$$J(t) = \int_0^t e^{(s^2+1)(t-\tau)} (1-\tau-s^2\tau) d\tau = e^{(s^2+1)t} \int_0^t e^{-\tau(s^2+1)} (1-\tau-s^2\tau) d\tau$$

integralini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} J(t) &= e^{(s^2+1)t} \left\{ \int_0^t e^{-\tau(s^2+1)} d\tau - (1+s^2) \int_0^t e^{-\tau(s^2+1)} \tau d\tau \right\}, \\ &= e^{(s^2+1)t} \left\{ \left(-\frac{e^{-(s^2+1)\tau}}{(s^2+1)} \right)_0^t - (1+s^2) I(t) \right\}, \\ &= \frac{e^{(s^2+1)t}}{(s^2+1)} (-e^{-(s^2+1)t} + 1) - (1+s^2) e^{(s^2+1)t} \left\{ -\frac{te^{-(s^2+1)t}}{(s^2+1)} - \frac{e^{-(s^2+1)t}}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\}, \\ &= -\frac{1}{(s^2+1)} + \frac{e^{(s^2+1)t}}{(s^2+1)} + t + \frac{1}{(s^2+1)} - \frac{e^{(s^2+1)t}}{(s^2+1)} = t \end{aligned}$$

(2.16) çözümünü kullanırsak

$$v(t, s) = v(0, s) e^{(s^2+1)t} + J(t) F \left\{ e^{-x^2} \right\} = v(0, s) e^{(s^2+1)t} + t F \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

elde edilir. Buna göre $t=1$ için

$$\begin{aligned} v(1, s) &= v(0, s) e^{(s^2+1)} + J(1) F \left\{ e^{-x^2} \right\}, \\ &= v(0, s) e^{(s^2+1)} + F \left\{ e^{-x^2} \right\} \end{aligned}$$

olur.

Şimdi (2.13) problemin integral koşuluna bakalım:

$$v(1, s) = \int_0^1 v(\tau, s) d\tau + \frac{1}{2} F \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

eşitliğinden

$$v(0,s)e^{(s^2+1)} + F\left\{e^{-x^2}\right\} = v(0,s)\int_0^1 e^{(s^2+1)\tau} d\tau + \int_0^1 \tau d\tau F\left\{e^{-x^2}\right\} + \frac{1}{2}F\left\{e^{-x^2}\right\}$$

elde edilir. Buna göre,

$$v(0,s)e^{(s^2+1)} + F\left\{e^{-x^2}\right\} = v(0,s)\left[\frac{e^{(s^2+1)}}{(s^2+1)} - \frac{1}{(s^2+1)}\right] + \frac{1}{2}F\left\{e^{-x^2}\right\} + \frac{1}{2}F\left\{e^{-x^2}\right\}$$

olur.

Buradan,

$$v(0,s)e^{(s^2+1)} = v(0,s)\left[\frac{e^{(s^2+1)}}{(s^2+1)} - \frac{1}{(s^2+1)}\right]$$

veya

$$v(0,s) = 0$$

olduğu görülür. Böylece,

$$v = v(0,s)e^{(s^2+1)t} + tF\left\{e^{-x^2}\right\} = tF\left\{e^{-x^2}\right\} \quad (2.17)$$

elde edilir. (2.17) ifadesinin her iki yanında ters Fourier dönüşümü alınırsa

$$u(t,x) = F^{-1}\{v(t,s)\} = F^{-1}\left\{tF\left\{e^{-x^2}\right\}\right\} = te^{-x^2}$$

şeklinde çözüm bulunur.

Son olarak, sabit katsayılı ters parabolik denklemler için integral koşullu sınır değer probleminin çözümünü Örnek 2.3 üzerinde Laplace integral dönüşüm yöntemi kullanarak ele alalım.

Örnek 2.3. $[0,1] \times [0,\infty)$ bölgesinde ters parabolik denklem için

$$\begin{cases} u_t(t,x) = -u_{xx}(t,x) + u(t,x) + 1 - t - e^{-x} - xe^{-x} + 2e^{-x}t, \\ 0 < t < 1, \quad 0 < x < \infty, \\ u(1,x) = \int_0^1 u(\tau,x) d\tau + \frac{1}{2} \left[1 - (1+x)e^{-x} \right], \quad 0 < x < \infty \\ u(t,0) = 0, \quad u_x(t,0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

şeklinde lokal olmayan problemin çözümünü Laplace integral dönüşüm yöntemi ile bulalım.

Çözüm: (2.18) problemin diferansiyel denkleminde x değişkenine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} L\{u_t(t,x)\} &= -L\{u_{xx}(t,x)\} + L\{u(t,x)\} + L\{1 - t - e^{-x} - xe^{-x} + 2e^{-x}t\}, \\ (L\{u(t,x)\})_t &= -s^2 L\{u(t,x)\} + su(t,0) + u_x(t,0) \\ &\quad + L\{u(t,x)\} + \frac{1-t}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2t}{s+1} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $u(t,x)$ fonksiyonunun x değişkene göre Laplace dönüşümünü

$$v(t,s) = L\{u(t,x)\}$$

ile gösterelim. Buna göre,

$$\begin{aligned} v_t(t,s) + s^2 v(t,s) - v(t,s) &= \frac{1-t}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2t}{s+1}, \\ v_t(t,s) + (s^2 - 1)v(t,s) &= \frac{1-t}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2t}{s+1} \end{aligned}$$

olur.

$$v_t^h(t, s) + (s^2 - 1)v^h(t, s) = 0$$

şeklindeki homojen denklemin genel çözümü c keyfi sabit olmak üzere

$$v^h(t, s) = e^{-(s^2-1)t} c$$

olarak bulunur.

Homojen olmayan denklemin özel çözümünü

$$v_t^o(t, s) = a(s)t + b(s)$$

formunda arayalım. Buradan,

$$v_t^o(t, s) = a(s)t,$$

$$a(s) + (s^2 - 1)a(s)t + (s^2 - 1)b(s) = t \left(-\frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} \right) + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right),$$

$$(s^2 - 1)a(s) = \left(-\frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} \right),$$

$$a(s) + (s^2 - 1)b(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right)$$

elde edilir. Sonuçta,

$$a(s) = -\frac{1}{s(s^2 - 1)} + \frac{2}{(s+1)(s^2 - 1)},$$

$$b(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} \right) \frac{1}{(s^2 - 1)}$$

bulunur. Elde edilen $a(s)$ ve $b(s)$ fonksiyonlarını yerine yazarsak, özel çözüm

$$v^o(t, s) = \frac{1}{s^2 - 1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2} \left(-\frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} \right) \right),$$

$$+ \frac{1}{s^2 - 1} \left(-\frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} \right) t = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right) t$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$v(t, s) = e^{-(s^2-1)t} c + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right) t$$

elde edilir. Şimdi (2.18) problemin integral koşuluna Laplace dönüşümünü uygulayalım.

$$L \left\{ \frac{1}{2} \left[(1 - (1+x)e^{-x}) \right] \right\} = \frac{1}{2} \left\{ L\{1\} - L\{e^{-x}\} - L\{xe^{-x}\} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right\}$$

olduğuna göre, integral koşulunu

$$v(1, s) = \int_0^1 v(\tau, s) d\tau + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right\}$$

formunda yazabiliriz. Buna göre,

$$e^{-(s^2-1)t} c + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
v(1,s) &= \int_0^1 \left\{ e^{-(s^2-1)\tau} c + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right) \tau \right\} d\tau + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right\} \\
&= c \frac{\left(-e^{-(s^2-1)} + 1 \right)}{(s^2-1)} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$e^{-(s^2-1)}c = c \frac{\left(-e^{-(s^2-1)} + 1 \right)}{(s^2-1)}$$

ve $c = 0$ olduğu görülür. Böylece,

$$v(t,s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right) t \quad (2.19)$$

çözümüne ulaşırız.

(2.19) eşitliğin her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygularsak

$$u(t,x) = L^{-1} \{v(t,s)\} = \left(L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} \right) t = (1 - e^{-x} - xe^{-x})t$$

elde ederiz. (2.18) problemin çözümü

$$u(t,x) = (1 - e^{-x} - xe^{-x})t$$

olur.

2.2. Ters Parabolik Denklem için İntegral Koşullu Lokal Olmayan Problemin Çözümünün Kararlılığı

H , herhangi bir Hilbert uzayında $A: H \rightarrow H$ ÖEPTO verilmiş olsun. Ters parabolik denklem için

$$\frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.20)$$

$$u(1) = \int_0^1 \mu(s)u(s)ds + \varphi \quad (2.21)$$

şeklindeki integral koşullu lokal olmayan sınır değer probleminin iyi tanımlılığı Ashyralyyev (2018) makalede incelenmiştir.

Burada, verilen sürekli gerçekteğerli skaler bir μ fonksiyonunun

$$\int_0^1 |\mu(s)| ds \leq 1 \quad (2.22)$$

şartı altında olduğunu varsayalım.

Aşağıdaki üç koşul geçerliyse $u: [0,1] \rightarrow H$ fonksiyonunun (2.20) ve (2.21) probleminin çözümü olduğu söylenebilir:

1. $u(t)$, $[0,1]$ üzerinde tanımlanan sürekli türevlenebilir fonksiyondur.
2. $\forall t \in [0,1]$ için $u(t)$, elemanı $D(A)$ kümesine aittir ve $Au(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde sürekli fonksiyondur.
3. $u(t)$, (2.20) denklemini ve (2.21) lokal olmayan koşulu sağlar.

$v: [0,1] \rightarrow H$ sürekli fonksiyonlardan oluşan $C(H)$ ve $C_1^\alpha(H)$ Banach uzayları aşağıdaki karşılıklı normları ile tanımlanır

$$\|v\|_{C(H)} = \max_{0 \leq t \leq 1} \|v(t)\|_H,$$

$$\|v\|_{C_1^\alpha(H)} = \|v\|_{C(H)} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq 1} \left(\frac{1-t}{\tau} \right)^\alpha \|v(t+\tau) - v(t)\|_H.$$

Teorem 2.1. $\varphi \in D(A)$, $f(t) \in C_1^\alpha(H)$ ve (2.22) şartının geçerli olduğunu varsayalım. O halde (2.20), (2.21) probleminin tek çözümü vardır ve $C_1^\alpha(H)$ uzayında iyi tanımlıdır. Çözüm için

$$\|u'\|_{C_1^\alpha(H)} + \|Au\|_{C_1^\alpha(H)} \leq M(\delta) \left(\|A\varphi\|_H + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_1^\alpha(H)} \right)$$

koersiv tahmini geçerlidir. Burada $M(\delta)$ değeri φ ve f ' den bağımsızdır.

Şimdi,

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \sum_{r=1}^n \left(a_r(x) u_{x_r}(x,t) \right)_{x_r} - \sigma u(x,t) = f(x,t), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < 1, \\ u(x,1) = \int_0^1 \mu(s) u(x,s) ds + \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

şeklindeki çok boyutlu parabolik denklem için Dirichlet şartıyla başlangıç sınır değer problemini ele alalım. Diferansiyel denklemin operatörü

$$A^x v = - \sum_{r=1}^n (a_r(x) v_{x_r})_{x_r} + \sigma v \quad (2.24)$$

formundaki diferansiyel ifade ile gösterilmiştir.

Teorem 2.2. $\varphi \in W_2^2(\overline{\Omega})$, $f \in C_1^\alpha(L_2(\overline{\Omega}))$ olsun ve (2.22) şartının geçerli olduğunu varsayalım. O zaman (2.23) çok boyutlu sınır değer probleminin çözümü için M sabiti f ve φ ' ye bağlı olmamak üzere:

$$\|u_t\|_{C_1^\alpha(L_2(\overline{\Omega}))} + \|u\|_{C_1^\alpha(W_2^2(\overline{\Omega}))} \leq M \left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_1^\alpha(L_2(\overline{\Omega}))} + \|\varphi\|_{W_2^2(\overline{\Omega})} \right) \quad (2.25)$$

kararlılık tahmini doğrudur (Ashyralyyev, 2018).

Şimdi, çok boyutlu parabolik denklem için

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \sum_{r=1}^n (a_r(x) u_{x_r}(x,t))_{x_r} - \sigma u(x,t) = f(x,t), \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < 1; \\ u(x,1) = \int_0^1 \mu(s) u(x,s) ds + \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial \bar{n}} = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

Neumann sınır koşulu ile sınır değer problemini ele alalım.

(2.24) diferansiyel ifadesi $D(A^x) = \{u \in W_2^2(\bar{\Omega}), u(x) = 0, x \in S\}$ etkisi ile $L_2(\bar{\Omega})$ üzerinde hareket eden A^x , ÖEPTO'yu tanımlar (Krein, 1966). Bu nedenle soyut Teorem 2.1, (2.26) ters parabolik problemin iyi tanımlılığını gösterir.

Teorem 2.3. $\varphi \in W_2^2(\bar{\Omega})$, $f \in C_1^\alpha(L_2(\bar{\Omega}))$ ve (2.22) şartı geçerli olsun. O zaman çok boyutlu (2.26) sınır değer probleminin çözümü için $M(\delta)$ değeri φ ve f 'den bağımsız olmak üzere (2.25) kararlılık tahmini geçerlidir.

2.3. Birinci Mertebeden Fark Şeması

N büyük bir doğal sayı olmak üzere $\tau = \frac{1}{N}$ için düzgün ağ noktalar uzayını $[0,1]_\tau = \{t_i \mid t_i = i\tau, 0 \leq i \leq N\}$ şeklinde göstereceğiz. H Hilbert uzayında $v^\tau = \{v_i\}_{i=0}^N = \{v(t_i)\}_{i=0}^N$ değerlerine sahip ağ (grid) fonksiyonlardan oluşan ve $\|v^\tau\|_{C_\tau(H)} = \max_{0 \leq i \leq N} \|v_i\|_H$ şeklindeki normu ile birlikte lineer Banach uzayını $C_\tau(H) = C([0,1]_\tau, H)$ ile göstereceğiz.

Ayrıca, $C_\tau^\alpha(H) = C^\alpha([0,1]_\tau, H)$ ve $C_{1,\tau}^\alpha(H) = C_{1,\tau}^\alpha([0,1]_\tau, H)$ Banach uzaylarının sınırlı ağ (grid) fonksiyonlarının

$$\|v^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} = \|v^\tau\|_{C_\tau(H)} + \max_{0 \leq i < i+j \leq N} (j\tau)^{-\alpha} \|v_{i+j} - v_i\|_H, \quad (2.27)$$

$$\|v^\tau\|_{C_{1,\tau}^\alpha(H)} = \|v^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} + \max_{0 \leq i < i+j \leq N} (N-i)^\alpha j^{-\alpha} \|v_{i+j} - v_i\|_H$$

karşılıklı uygun normları olarak tanımlanır. Bu bölümdeki odak noktamız (2.20) ve (2.21) ters problemlerin yaklaşık çözümleri için

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\tau} - Au_{i-1} = f(t_i), \quad t_i = i\tau, \quad 1 \leq i \leq N, \quad \tau = \frac{1}{N}, \quad (2.28)$$

$$u_N = \sum_{j=0}^{N-1} \mu(t_j) u_j \tau + \varphi \quad (2.29)$$

Rothe fark şemasını incelemektir.

μ fonksiyonu için verilen

$$\sum_{j=0}^{N-1} |\mu(t_j)| \tau < 1 \quad (2.30)$$

şartı bu bölüm boyunca gerekli olacaktır. A 'nın rezolventi (çözücü çekirdeği) $R = (I + \tau A)^{-1}$ şeklindedir.

Lemma 2.1. ÖEPTO A için aşağıdaki tahminler doğrudur:

$$\|t^k A^k e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \leq M, \quad \forall t > 0, \quad k \geq 0, \quad (2.31)$$

$$\|R^k\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{(1 + \delta\tau)^k}, \quad (2.32)$$

$$\|\tau A R^k\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1, \quad (2.33)$$

$$\|A^\beta (R^{k+r} - R^k)\|_{H \rightarrow H} \leq M \frac{(r\tau)^\gamma}{(k\tau)^{\beta+\gamma}}, \quad 1 \leq k < k+r \leq N, \quad \beta \in \{0,1\}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (2.34)$$

burada bazı M değerleri δ ' ya bağlı fakat küçük pozitif sayı olan τ ' dan bağımsızdır (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994).

Teorem 2.4. $\varphi \in D(A)$, $f^\tau \in C_\tau(H)$ ve (2.30) varsayımları altında (2.28) ve (2.29) fark problemlerinin bir çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kararlılık tahmini

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|u_i\|_H \leq M(\delta, \mu) \left(\|\varphi\|_H + \|f^\tau\|_{C_\tau(H)} \right) \quad (2.35)$$

geçerlidir. Burada $M(\delta, \mu)$ pozitif sayısı δ, μ ' ye bağlı fakat τ, φ, f^τ ' dan bağımsızdır.

Teorem 2.5. $\varphi \in D(A)$, $f^\tau \in C_{1,\tau}^\alpha(H)$ ve (2.30) varsayımları altında (2.28) ve (2.29) fark problemlerinin çözümü aşağıdaki kararlılık tahminini

$$\left\| \left\{ \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau} \right\}_1^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} + \left\| \{Au_{i-1}\}_1^N \right\|_{C_{1,\tau}^\alpha(H)} \leq M(\delta, \mu) \left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f^\tau\|_{C_{1,\tau}(H)} + \|A\varphi\|_H \right) \quad (2.36)$$

sağlar. Burada $M(\delta, \mu)$ pozitif sayısı δ, μ ' ye bağlı fakat τ, φ, f^τ ' dan bağımsızdır.

Çok boyutlu parabolik kısmi diferansiyel denklem için integral ve Dirichlet sınır koşulları ile oluşturulan lokal olmayan sınır değer problemin yaklaşık çözümü Rothe fark şemasıyla önceki bölümün soyut sonuçlarını uygulayarak ele alınmıştır.

İntegral ve birinci tür sınır koşulları ile verilen aşağıdaki ters parabolik denklem için çok boyutlu sınır değer problemin

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \sum_{r=1}^n \left(a_r(x) u_{x_r}(x,t) \right)_{x_r} - \sigma u(x,t) = f(x,t), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < 1, \\ u(x,1) = \int_0^1 \mu(s) u(x,s) ds + \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.37)$$

iyi tanımlılığı Ashyralyev (2018) makalede araştırılmıştır.

Burada, $\Omega = (0,1)^n \subset R^n$ birim açık küp, $S = \partial\Omega$, $\bar{\Omega} = S \cup \Omega$ ve $f = (0,1) \times \Omega \rightarrow R^1$, $a_r : \Omega \rightarrow R^1$, $\mu : [0,1] \rightarrow R^1$, $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow R^1$ verilen fonksiyonlar, σ bilinen pozitif bir sayı, $\forall x \in \Omega$, $\forall r = 1, \dots, n$, $a_r(x) \geq a_0 > 0$.

Şimdi, ağ noktalar (grid) uzayını

$$\Omega_h = \{x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n), m = (m_1, \dots, m_n), m_r = 0, \dots, N_r, h_r N_r = l, r = 1, \dots, n\}$$

ile göstereceğiz.

Ayrıca,

$$\Omega_h = \Omega_h \cap \Omega, S_h = \Omega_h \cap S$$

notasyonlarını kullanacağız.

$x \in S_h$ üzerinde $u^h(x) = 0$ koşulunu sağlayan $u^h(x)$ ağ (grid) fonksiyonu üzerinde hareket eden

$$A_h^x u^h = - \sum_{r=1}^N \left(a_r(x) u_{\bar{x}_r}^h \right)_{x_r, j_r} + \sigma u^h(x)$$

operatörünü A_h^x şeklinde göstereceğiz.

A_h^x operatörünü kullanarak çok boyutlu parabolik denklem için (2.37) sınır değer problemin Rothe fark şeması ile yeniden düzenlenebilir

$$\begin{cases} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} - A_h^x u_{k-1}^h(x) = f^h(t_k, x), 1 \leq k \leq N, x \in \Omega_h, \\ u_N^h(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \mu(t_j) u_j^h(x) \tau + \varphi^h(x), x \in \Omega_h. \end{cases} \quad (2.38)$$

Ω_h üzerinde tanımlanan $\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1 m_1, \dots, h_n m_n)\}$ ağ (grid) fonksiyonların normları sırasıyla,

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \Omega_h} |\varphi^h(x)|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} = \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \Omega_h} \sum_{r=1}^n \left| (\varphi^h(x))_{x_r, \bar{x}_r, m_r} \right|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir. Ağ (grid) fonksiyonlar uzaylarını L_{2h} ve W_{2h}^2 şeklinde göstereceğiz. Bu

bölümde τ ve $h = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$ değerleri yeterince küçük pozitif sayılar olsun.

Teorem 2.6. (2.38) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kararlılık tahmini

$$\left\| \{u_k^h\}_1^N \right\|_{C_\tau(L_{2h})} \leq M(\delta, \mu) \left[\|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_1^N \right\|_{C_\tau(L_{2h})} \right]$$

geçerlidir. Burada bazı pozitif $M(\delta, \mu)$ sayıları δ, μ ' ye bağlı fakat $\tau, \varphi^h(x)$ ve $f_h^k(x)$, $k = 1, \dots, N-1$ değerlerinden bağımsızdır.

Teorem 2.7. (2.38) fark problemin çözümü aşağıdaki koersiv kararlılık tahminini

$$\left\| \tau^{-1} \{u_k^h - u_{k-1}^h\}_2^N \right\|_{C_1^\alpha(L_{2h})} \leq M(\delta, \mu) \left[\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} + \left\| \{f_k^h\}_1^N \right\|_{C_1^\alpha(L_{2h})} \right]$$

sağlar. Burada bazı pozitif $M(\delta, \mu)$ sayıları δ, μ ' ye bağlı fakat $\tau, \varphi^h(x)$ ve $f_h^k(x)$, $k = 1, \dots, N-1$ değerlerinden bağımsızdır.

2.6 ve 2.7 teoremlerinin ispatı, L_{2h} ' deki eliptik fark problemi için (2.35) ve (2.36) tahminlerine ve aşağıdaki koersiv eşitsizlik teoremine dayanmaktadır.

Teorem 2.8. Bir pozitif M değeri h ve w^h ' ye bağlı olmamak üzere:

$$\begin{cases} A_h^x u^h(x) = w^h(x), & x \in \Omega_h, \\ u^h(x) = 0, & x \in S_h \end{cases}$$

eliptik fark problemin çözümü için

$$\sum_{i=1}^n \left\| \left(u_i^h \right)_{\bar{x}_i \bar{x}_i, j_i} \right\|_{L_{2h}} \leq M \|w^h\|_{L_{2h}}$$

kararlılık eşitsizliği geçerlidir (Sobolevskii, 1975).

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, ters parabolik denklem için integral koşullu lokal olmayan problem için İMDFS' ler kurulacaktır ve problemin çözümünün kararlılığı incelenecektir.

3.1. İkinci Mertebeden Fark Şeması

(2.20) ve (2.21) ters parabolik denklemi için integral koşullu sınır değer probleminde İMDFS' nin yaklaşımı Ashyralyev (2020) makalede incelenmiştir. Bu çalışmada

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\tau} - A \left(I + \frac{\tau}{2} A \right) u_{i-1} = \left(I + \frac{\tau}{2} A \right) f \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \tau \right), \quad (3.1)$$

$$t_i = i\tau, \quad 1 \leq i \leq N, \quad \tau = \frac{1}{N},$$

$$u_N = \sum_{j=1}^N \mu \left(t_j - \frac{\tau}{2} \right) \left(\frac{u_j + u_{j-1}}{2} \right) \tau + \varphi \quad (3.2)$$

fark şeması için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Tez boyunca aşağıdaki varsayıma ihtiyaç duyulacaktır

$$\sum_{j=1}^N \left| \mu \left(t_j - \frac{\tau}{2} \right) \right| \tau < 1. \quad (3.3)$$

Teorem 3.1. $\theta^\tau \in C_\tau(H)$, $\varphi \in D(A)$ ve (3.3) şartının sağlandığını varsayalım. O zaman (3.1), (3.2) fark problemi çözüme sahiptir ve çözüm için kararlılık tahmini

$$\max_{0 \leq j \leq N} \|u_j\|_H \leq M(\delta, \mu) \left(\|\varphi\|_H + \|\theta^\tau\|_{C_\tau(H)} \right) \quad (3.4)$$

geçerlidir. Burada bazı pozitif gerçek $M(\delta, \mu)$ sabit değeri τ , φ , θ^τ ' dan bağımsız fakat δ , μ ' ye bağlıdır.

Teorem 3.2. $\varphi \in D(A)$, $\theta^\tau \in C_1^\alpha(H)$ ve (3.3) şartının geçerli olduğunu varsayalım. O zaman (3.1) ve (3.2) fark şemalarının çözümü koersiv kararlılık tahmini için

$$\left\| \left\{ \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau} \right\}_1^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} + \left\| \left\{ A \left(I + \frac{\tau A}{2} \right) u_{i-1} \right\}_1^N \right\|_{C_1^\alpha(H)} \leq M(\delta, \mu) \left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\theta^\tau\|_{C_1^\alpha(H)} + \|A\varphi\|_H \right) \quad (3.5)$$

sağlar. Burada bazı pozitif gerçek $M(\delta, \mu)$ sabit değeri τ , φ , θ^τ ’ dan bağımsız fakat δ ve μ ’ ye bağlıdır.

A_h^x notasyonunu kullanarak (2.37) problemi integral koşullu sonsuz adi diferansiyel denklem sistemi için aşağıdaki (3.6) lokal olmayan sınır değer problemine indirgenir

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u^h(x, t) - A u^h(x, t) = f^h(x, t), \quad t \in (0, 1), \quad x \in \Omega_h, \\ u^h(x, 1) = \int_0^1 \mu(s) u^h(x, s) ds + \varphi^h(x), \quad x \in \Omega_h. \end{cases} \quad (3.6)$$

Sonrasında (2.37) sınır değer problemi ile İMDFŞ yeniden oluşturulur

$$\begin{cases} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} - A_h^x B_h^x u_{k-1}^h(x) = \theta_k(x), \\ \theta_k(x) = B_h^x f^h\left(t_{k-\frac{\tau}{2}}, x\right), \quad B_h^x = I + \frac{\tau A_h^x}{2}, \\ tk = k\tau, \quad k = 1, \dots, N, \quad N\tau = 1, \quad x \in \Omega_h, \\ u_N^h(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\mu\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right) \tau}{2} [u_j^h(x) + u_{j-1}^h(x)] + \varphi^h(x), \quad x \in \Omega_h. \end{cases} \quad (3.7)$$

Ω_h , ağ (grid) uzayı üzerinde tanımlanan $\varphi^h(x)$ ağ (grid) fonksiyonlarının normları sırasıyla

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \Omega_h} |\varphi^h(x)|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} = \left(\sum_{x \in \Omega_h} \sum_{r=1}^n \left| (\varphi^h(x))_{x_r, \bar{x}_r, m_r} \right|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir. Ağ (grid) fonksiyonlarının uzaylarını L_{2h} ve W_{2h}^2 ile gösteririz. Bu bölüm

boyunca $|h| = \left(\sum_{r=1}^n h_r^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ve τ sayıları yeterince küçük pozitif sayılar olsun.

Teorem 3.3. (3.7) fark şemasının çözümü için kararlılık tahmini aşağıdaki şart

$$\left\| \{u_k^h\}_1^N \right\|_{C_\tau(L_{2h})} \leq M(\delta, \mu) \left(\|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left\| \{\theta_k^h\}_1^N \right\|_{C_\tau(L_{2h})} \right)$$

ile sağlanır. Burada $M(\delta, \mu)$ değeri τ , $\varphi^h(x)$ ve $\{\theta_k^h\}_1^N$, den bağımsızdır.

Teorem 3.3.' ün ispatı (3.4) tahmini, (3.3) varsayımı ve aşağıdaki L_{2h} içinde eliptik fark probleminin çözümünün koersiv kararlılık özelliklerine dayanmaktadır.

Teorem 3.4. (3.7) fark probleminin çözümü aşağıdaki koersiv kararlılık tahmini için

$$\left\| \tau^{-1} \{u_k^h - u_{k-1}^h\}_1^N \right\|_{C_1^\alpha(L_{2h})} \leq M(\delta, \mu, \alpha) \left[\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{\theta_k^h\}_1^N \right\|_{C_1^\alpha(W_{2h}^2)} \right]$$

sağlanır. Burada $M(\delta, \mu, \alpha)$ değeri τ , $\{\theta_k^h\}_1^N$ ve $\varphi^h(x)$, den bağımsızdır.

3.2. Crank-Nicholson Fark Şeması

3.2.1 Soyut Problem için Fark Şeması

H keyfi bir Hilbert uzayı olsun. $A: H \rightarrow H$, birim operatör $I: H \rightarrow H$ için $A > \delta I$ ve pozitif sayı $\delta > 0$ olmak üzere ÖEPTO olsun. $\mu: [0,1] \rightarrow R$, $f: [0,1] \rightarrow H$ verilen fonksiyonlar ve $\psi \in H$ olduğu bilinmektedir.

Şimdi, integral koşullu lokal olmayan ters parabolik problemin

$$\begin{cases} u_t(t) - Au(t) = f(t), 0 \leq t \leq 1, \\ u(1) = \int_0^1 \mu(s)u(s)ds + \varphi \end{cases} \quad (3.8)$$

yaklaşımı için fark şemasını inceleyeceğiz.

Ashyralyyev (2020) makalesinde, ters parabolik (3.8) probleminin yaklaşık çözümü için Rothe fark şemasının çözümü için kararlılık tahminleri, integral ve Dirichlet koşullarıyla çok boyutlu ters parabolik problemi için Rothe fark şemasının kararlılığı oluşturulmuştur. Ashyralyyev (2020) makalede A^2 kullanılarak İMDFŞ incelendi. Bu çalışmada, ters parabolik (3.8) probleminin yaklaşık çözümü için Crank-Nicholson fark şemasını inceleyeceğiz ve çözümü için kararlılık tahminleri oluşturacağız.

$$N \text{ doğal sayı olmak üzere düzgün ağ (grid) uzayını } [0,1]_\tau = \left\{ t_i \mid t_i = i\tau, \tau = \frac{1}{N} \right\}$$

şeklinde göstereceğiz. H Hilbert uzayında $v^\tau = \{v_i\}_{i=1}^N$ değerlerine sahip ve $\|v^\tau\|_{C_\tau(H)} = \max_{1 \leq i \leq N} \|v_i\|_H$ normu ile birlikte verilen $v^\tau = \{v_i\}_{i=1}^N$ ağ (grid) fonksiyonlarının Banach uzayını $C_\tau(H) = C([0,1]_\tau, H)$ ile göstereceğiz. Ayrıca $C_\tau^\alpha(H) = C^\alpha([0,1]_\tau, H)$ ve $C_1^\alpha(H) = C_1^\alpha([0,1]_\tau, H)$ ile v^τ ağ (grid) fonksiyonlarının Banach uzaylarına karşılık gelen normları

$$\|v^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} = \|v^\tau\|_{C_\tau(H)} + \max_{1 \leq i < j \leq N} (j\tau)^{-\alpha} \|v_{i+j} - v_i\|_H, \quad (3.9)$$

$$\|v^\tau\|_{C_1^\alpha(H)} = \|v^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} + \max_{1 \leq i < i+j \leq N} (j\tau)^{-\alpha} ((N-i)\tau)^\alpha \|v_{i+j} - v_i\|_H \quad (3.10)$$

ile tanımlanmıştır. $t_{j-\frac{1}{2}} = t_j - \frac{\tau}{2}$, $j = 1, \dots, N$ olmak üzere;

$$\tau \left| \mu \left(t_{N-\frac{1}{2}} \right) \right| + \tau \left| \mu \left(\frac{\tau}{2} \right) \right| + \tau \sum_{j=1}^{N-1} \left| \mu \left(t_{j-\frac{1}{2}} \right) + \mu \left(t_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| < 2 \quad (3.11)$$

olduğunu varsayalım.

Lemma 3.1. (3.11) varsayımı altında

$$P = \left(I + \frac{A\tau}{2} \right)^{-1} \left(I - \frac{A\tau}{2} \right)$$

olduğunda

$$T_\tau = \left(1 - \frac{\tau}{2} \mu \left(t_{N-\frac{1}{2}} \right) \right) I - \frac{\tau}{2} \mu \left(\frac{\tau}{2} \right) P^N - \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\mu \left(t_{j-\frac{1}{2}} \right) + \mu \left(t_{j+\frac{1}{2}} \right) \right] P^{N+j}$$

operatörü için sınırlı ters $Q_\tau = T_\tau^{-1}$ eşitliği bulunur.

İspat: $\|P\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ olduğu açıktır (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994).

$$q_1 = \frac{\tau}{2} \left| \mu \left(\frac{\tau}{2} \right) \right| \left(\frac{1 - \frac{\tau\lambda}{2}}{1 + \frac{\tau\lambda}{2}} \right)^N,$$

$$q_2 = \frac{\tau}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\mu \left(t_{j-\frac{1}{2}} \right) + \mu \left(t_{j+\frac{1}{2}} \right) \right] \left(\frac{1 - \frac{\tau\lambda}{2}}{1 + \frac{\tau\lambda}{2}} \right)^{N+j}$$

notasyonları ve ÖEPTO için fonksiyon normun tanımını kullanarak Ashyralyev (2020) makalede

$$\begin{aligned} \|Q_\tau\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{\lambda \geq \delta} \frac{1}{\left| 1 - \frac{\tau}{2} \mu \left(t_{N-\frac{1}{2}} \right) \right| - q_1 - q_2}, \\ &\leq \sup_{\lambda \geq \delta} \frac{1}{\left| 1 - \frac{\tau}{2} \mu \left(t_{N-\frac{1}{2}} \right) \right| - \frac{\tau}{2} \left| \mu \left(\frac{\tau}{2} \right) \right| - \sum_{j=1}^{N-1} \left| \mu \left(t_{j-\frac{1}{2}} \right) + \mu \left(t_{j+\frac{1}{2}} \right) \right| \frac{\tau}{2}} \leq M \end{aligned} \quad (3.12)$$

eşitsizlikleri elde edilmiştir. (3.8) problemin lokal olmayan integral koşulu ikinci mertebeden yaklaşımla

$$u_N = \sum_{j=1}^N t_{j-\frac{1}{2}} \mu \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{2} \right) \tau + \varphi$$

şeklinde yazılabilir. O zaman, (3.8) problemin yaklaşık çözümü için

$$\begin{cases} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2}(Au_k + Au_{k-1}) = \theta_k, \quad \theta_k = f\left(t_{k-\frac{1}{2}}\right), \quad k = 1, \dots, N, \\ -\frac{\tau}{2}\mu\left(\frac{\tau}{2}\right)u_0 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tau}{2} \left[\mu\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right) + \mu\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) \right] u_j + \left(1 - \frac{\tau}{2}\mu\left(t_{N-\frac{1}{2}}\right) \right) u_N = \varphi \end{cases} \quad (3.13)$$

formundaki Crank-Nicholson fark şeması elde edilir.

Teorem 3.5. $\theta^\tau \in C_\tau(H)$, $\varphi \in D(A)$ ve (3.11) ifadesinin sağlandığını kabul edelim. O zaman, (3.13) fark şemasının çözümü vardır ve çözümü için

$$\max_{0 \leq j \leq N} \|u_j\|_H \leq M(\delta, \mu) \left(\|\varphi\|_H + \|\theta^\tau\|_{C_\tau(H)} \right) \quad (3.14)$$

kararlılık tahmini geçerlidir. Burada $M(\delta, \mu)$ pozitif gerçekte sabiti δ, μ değerlerine bağlıdır fakat $\tau, \varphi, \theta^\tau$ değerlerinden bağımsızdır.

İspat: $C = \left(I + \frac{A\tau}{2} \right)^{-1}$ olsun. (3.13) fark şemasından

$$\begin{aligned} \left(I + \frac{A}{2} \right) u_{k-1} &= \left(I - \frac{A\tau}{2} \right) u_k - \tau \theta_k, \quad u_{k-1} = Pu_k - \tau C \theta_k, \quad k = 1, \dots, N \\ u_{k-1} &= \left(I + \frac{A\tau}{2} \right)^{-1} \left(I - \frac{A\tau}{2} \right) u_k - \tau \left(I + \frac{A\tau}{2} \right)^{-1} \theta_k \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$$u_{N-1} = Pu_N - \tau C\theta_N$$

denklemini kullanarak

$$q = N - 2 \text{ için}$$

$$\begin{aligned} u_{N-2} &= Pu_{N-1} - \tau C\theta_{N-1}, \\ &= P(Pu_N - \tau C\theta_N) - \tau C\theta_{N-1}, \\ &= P^2u_N - \tau PC\theta_N - \tau C\theta_{N-1} \end{aligned}$$

$$q = N - 3 \text{ için}$$

$$\begin{aligned} u_{N-3} &= Pu_{N-2} - \tau C\theta_{N-2}, \\ &= P(P^2u_N - \tau PC\theta_N - \tau C\theta_{N-1}) - \tau C\theta_{N-2}, \\ &= P^3u_N - \tau P^2C\theta_N - \tau PC\theta_{N-1} - \tau C\theta_{N-2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece,

$$u_q = P^{N-q}u_N - \tau \sum_{i=N}^{q+1} P^{i-q-1}C\theta_i, \quad q = N-1, \dots, 0 \quad (3.15)$$

sonucuna varılır.

(3.13) fark şemasının lokal olmayan koşulunda (3.15) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} & -\frac{\tau}{2}\mu\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(P^Nu_N - \tau \sum_{i=N}^1 P^{i-1}C\theta_i\right) + \left(1 - \frac{\tau}{2}\mu\left(t_{N-\frac{1}{2}}\right)\right)u_N \\ & - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tau}{2} \left[\mu\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right) + \mu\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) \right] \left(P^{N-j}u_N - \tau \sum_{i=N}^{j+1} P^{i-j-1}C\theta_i\right) = \varphi \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece,

$$u_N = Q_\tau \left\{ \varphi - \frac{\tau^2}{2} \mu\left(\frac{\tau}{2}\right) \sum_{i=N}^1 P^{i-1} C \theta_i - \frac{\tau^2}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\mu\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right) + \mu\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) \right] \sum_{i=N}^{j+1} P^{i-j-1} C \theta_i \right\} \quad (3.16)$$

formülüyle u_N değerini bulabiliriz.

$$S_1 = \sum_{i=N}^1 P^{i-q-1} C \theta_i \text{ ve } S_{2,j} = \sum_{i=N}^{j+1} P^{i-q-1} C \theta_i$$

notasyonları kullanılarak (3.16) u_N formülünü

$$u_N = Q_\tau \varphi - \frac{\tau^2}{2} \mu\left(\frac{\tau}{2}\right) S_1 - \frac{\tau^2}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\mu\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right) + \mu\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) \right] S_{2,j}$$

biçiminde yazabiliriz. Cauchy-Schwartz eşitsizliğin uygularsak

$$\|S_1\|_{H \rightarrow H} \leq \sum_{i=N}^1 \|P^{i-q-1}\|_{H \rightarrow H} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\theta_i\|_H \leq M_1 \|\theta^\tau\|_{C_\tau(H)}$$

ve

$$\|S_{2,j}\|_{H \rightarrow H} \leq \sum_{i=N}^{j+1} \|P^{i-q-1}\|_{H \rightarrow H} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\theta_i\|_H \leq M_2 \|\theta^\tau\|_{C_\tau(H)}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Cauchy-Schwartz ve üçgen eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|u_N\|_H &\leq \|Q_\tau\|_{H \rightarrow H} \|\varphi\|_H + \frac{\tau^2}{2} \left| \mu\left(\frac{\tau}{2}\right) \right| \|S_1\|_{H \rightarrow H} + \frac{\tau^2}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\left| \mu\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right) \right| + \left| \mu\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) \right| \right] \|S_{2,j}\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq M_3 \|\varphi\|_H + \frac{\tau^2}{2} \left| \mu\left(\frac{\tau}{2}\right) \right| M_1 \|\theta^\tau\|_{C_\tau(H)} + \frac{\tau^2}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\left| \mu\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right) \right| + \left| \mu\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) \right| \right] M_2 \|\theta^\tau\|_{C_\tau(H)} \\
&\leq M_4 \left[\|\varphi\|_H + \|\theta^\tau\|_{C_\tau(H)} \right]
\end{aligned}$$

alınır. (3.15), Cauchy-Schwartz ve üçgen eşitsizliklerinden her q indisi için

$$\begin{aligned}
\|u_q\|_H &\leq \|P^{N-q}\|_{H \rightarrow H} + \|u_N\|_H + \tau \sum_{i=N}^{q+1} \|P^{i-q-1}\|_{H \rightarrow H} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\theta_i\|_H \\
&\leq M_4 \left[\|\varphi\|_H + \|\theta^\tau\|_{C_\tau(H)} \right] + M_5 \|\theta^\tau\|_{C_\tau(H)} \\
&\leq M_6 \left[\|\varphi\|_H + \|\theta^\tau\|_{C_\tau(H)} \right]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre,

$$\max_{0 \leq q \leq N} \|u_q\|_H \leq M_6(\delta, \mu) \left(\|\varphi\|_H + \|\theta^\tau\|_{C_\tau(H)} \right)$$

elde edilir. Teorem 3.5' in ispatı yapılmıştır.

Teorem 3.6. (Ashyralyyev ve Gönenç, 2021b) $\varphi \in D(A)$, $\theta^\tau \in C_1^\alpha(H)$ ve (3.11) geçerli olsun. O zaman (3.13) fark şemasının çözümü

$$\begin{aligned}
&\left\| \left\{ \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau} \right\}_1^N \right\|_{C_1^\alpha(H)} + \left\| \left\{ \frac{1}{2} (Au_i + Au_{i-1}) \right\}_1^N \right\|_{C_1^\alpha(H)} \\
&\leq M(\delta, \mu) \left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|\theta^\tau\|_{C_1^\alpha(H)} + \|A\varphi\|_H \right)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

koersiv kararlılık tahminini sağlar. Burada $M(\delta, \mu)$ pozitif gerçekte sabiti τ, φ, θ^r değerlerinden bağımsız fakat δ, μ değerlerine bağlıdır.

Teorem 3.6' nın ispatı (3.12) eşitsizliğine, (3.15) ve (3.16) formüllerine dayanır.

3.2.2 Çok Boyutlu Problem için Fark Şeması

Bu bölümde $\Omega = (0, l)^n \subset R^n$ birim açık küp, $S = \partial\Omega$, $\bar{\Omega} = S \cup \Omega$ ve $f = (0, 1) \times \Omega \rightarrow R$, $a_r : \Omega \rightarrow R$, $\mu : [0, 1] \rightarrow R$, $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow R$ verilen fonksiyonlar, σ bilinen pozitif bir sayı, $\forall r = 1, \dots, n$, $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $a_r(x) \geq a_0 > 0$.

$[0, 1] \times \bar{\Omega}$ bölgesinde, ters parabolik denklem için integral ve ikinci tür sınır koşulları ile verilen

$$\begin{cases} u_t(t, x) + \sum_{r=1}^n (a_r(x) u_{x_r}(t, x))_{x_r} - \sigma u(t, x) = f(t, x), \\ t \in (0, 1), x \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial n}(t, x) = 0, x \in S, t \in [0, 1], \\ u(1, x) = \int_0^1 \mu(s) u(s, x) ds + \varphi(x), x \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (3.18)$$

şeklindeki çok boyutlu sınır değer problemin yaklaşık çözümünü belirleyen İMDCNFS' yi araştıracağız. (3.18) sınır değer problemin iyi tanımlılığı Ashyralyev (2020) makalede araştırılmıştır.

Şimdi, (3.18) sınır değer problemini çözmek için İMDFŞ oluşturacağız. Ağ (grid) noktalar uzayını

$$\Omega_h = \{x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n), m = (m_1, \dots, m_n), m_r = 0, \dots, N_r, h_r N_r = l, r = 1, \dots, n\},$$

$$\Omega_h = \Omega \cap \Omega_h, S_h = \Omega_h \cap S$$

şeklinde gösteriyoruz.

$x \in S_h$ üzerinde $Du^h(x) = 0$ şartını sağlayan $u^h(x)$ ağ (grid) fonksiyonları üzerinde hareket eden $A_h^x u^h = -\sum_{r=1}^n \left(a_r u_{\bar{x}_r}^h \right)_{x_r, j_r} + \sigma u^h$ operatörü A_h^x ile gösterilir. Daha sonra (3.18) problemi

$$\begin{cases} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} - \frac{1}{2} \left(A_h^x u_k^h(x) + A_h^x u_{k-1}^h(x) \right) = \theta_k(x), \\ \theta_k(x) = f^h \left(t_{k-\frac{\tau}{2}}, x \right), \quad t_k = k\tau, \quad k=1, \dots, N, \quad N\tau=1, \quad x \in \Omega_h, \\ u_N^h(x) = \sum_{j=1}^N \mu \left(t_{j-\frac{1}{2}} \right) \frac{\tau}{2} \left[u_j^h(x) + u_{j-1}^h(x) \right] + \varphi^h(x), \quad x \in \Omega_h \end{cases} \quad (3.19)$$

İMDFS'ye indirgenir.

Ω_h ağ (grid) uzayı üzerinde tanımlanan $\varphi^h(x)$ ağ (grid) fonksiyonlarının normları sırasıyla,

$$\begin{aligned} \|\varphi^h\|_{L_{2h}} &= \left(\sum_{x \in \Omega_h} |\varphi^h(x)|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} &= \left(\sum_{x \in \Omega_h} \sum_{r=1}^n \left| (\varphi^h(x))_{x_r, \bar{x}_r, m_r} \right|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

şeklindedir. Ağ (grid) fonksiyonlarının uzaylarını L_{2h} ve W_{2h}^2 ile gösteririz. Bu bölüm

boyunca, $|h| = \left(\sum_{r=1}^n h_r^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ve τ sayıları yeterince küçük pozitif sayılar olsun.

Teorem 3.7. (3.19) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kararlılık tahmini

$$\left\| \{u_k^h\}_1^N \right\|_{C_\tau(L_{2h})} \leq M(\delta, \mu) \left[\|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left\| \{\theta_k^h\}_1^N \right\|_{C_\tau(L_{2h})} \right]$$

geçerlidir. Burada $M(\delta, \mu)$ ifadesi τ , $\varphi^h(x)$ ve $\theta_k^h(x)$ değerlerden bağımsızdır.

Teorem 3.8. (3.19) diferansiyel probleminin çözümü aşağıdaki koersiv kararlılık tahminini

$$\begin{aligned} & \left\| \tau^{-1} \{u_k^h - u_{k-1}^h\}_1^N \right\|_{C_1^\alpha(L_{2h})} + \left\| \left\{ \frac{1}{2} (A_h^x u_k^h(x) + A_h^x u_{k-1}^h(x)) \right\} \right\| \\ & \leq M(\delta, \mu, \alpha) \left[\left\| \varphi^h \right\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \{\theta_k^h\}_1^N \right\|_{C_1^\alpha(W_{2h}^2)} \right] \end{aligned}$$

sağlar. Burada $M(\delta, \mu, \alpha)$ ifadesi τ , $\{\theta_k^h\}_1^N$ ve $\varphi^h(x)$ değerlerinden bağımsızdır.

3.7 ve 3.8 teoremlerinin ispatları L_{2h} içindeki eliptik fark probleminin çözümü için (3.14), (3.17) tahminlerine, (3.11) varsayımına ve Lachapelle vd (2010) makaledeki koersiv kararlılık özelliğine dayanmaktadır.

3.3. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde lokal olmayan ters parabolik sınır değer probleminin çözümünü bulmak için birinci mertebeden doğrulukla Rothe fark şeması ve ikinci mertebeden doğrulukla iki tane fark şeması kullanılacaktır ve test örneklerde sayısal çözümleri ele alınacaktır. Fark şemalarının çözümleri ise MATLAB kodları kullanılarak ele alınacaktır.

Örnek 3.1. Ters parabolik denklem için integral tipindeki lokal olmayan şartlı ve Neumann sınır koşullu

$$\begin{cases} u_t(x, t) + (1 + 2x)^2 u_{xx}(x, t) + 4(1 + 2x)u_x(x, t) - u(x, t) = f(x, t), \\ f(x, t) = -4e^{-2t} \cos x(1 + x + x^2) - 4(1 + 2x)e^{-2t} \sin x, \\ 0 < x < \pi, \quad 0 < t < 1, \\ u(x, 1) = \int_0^1 e^{-2\gamma} u(\gamma, x) d\gamma + \psi(x), \quad \psi(x) = \cos x \left(e^{-2} + \frac{e^{-4}}{4} - \frac{1}{4} \right), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

şeklindeki sınır değer problemine bakılacaktır.

Çözüm: $u(x, t) = e^{-2t} \cos x$ fonksiyonu (3.20) sınır değer problemin gerçek çözümüdür.

(3.20) problemin yaklaşık çözümü için (2.38) fark şemasını kullanırsak,

$$\begin{cases} \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} + (1 + 2x_n)^2 \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} + 4(1 + 2x_n) \frac{u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}}{2h} - u_n^{k-1} = f(x_n, t_k), \\ k = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, M-1, \\ u_n^N = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2t_j} u_n^j \tau + \cos x_n \left(e^{-2} + \frac{e^{-4}}{4} - \frac{1}{4} \right), \quad n = 0, \dots, M, \\ u_1^k = u_0^k, \quad u_M^k = u_{M-1}^k, \quad k = 0, \dots, N \end{cases} \quad (3.21)$$

elde edilir.

$$u_{n-1} = \begin{bmatrix} u_{n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{n-1}^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad u_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{n+1}^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad u_n = \begin{bmatrix} u_n^0 \\ \vdots \\ u_n^N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

olmak üzere (3.21) denklem sistemi aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} A_n u_{n+1} + B_n u_n + C_n u_{n-1} &= I_n \psi_n, \quad n = 1, \dots, M-1, \\ u_0 &= u_1, \quad u_M = u_{M-1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

matris formunda yazılabilir.

Burada ψ_n , $(N+1) \times 1$ tipinde sütun matris, I_n , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde birim matris, A_n ,

B_n , C_n , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matrisler olmak üzere:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_n = \begin{bmatrix} -e^{-2t_0}\tau & -e^{-2t_1}\tau & -e^{-2t_2}\tau & \cdots & -e^{-2t_{N-2}}\tau & -e^{-2t_{N-1}}\tau & 1 \\ b_n & s & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_n & s & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & b_n & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & s \end{bmatrix},$$

$$a_n = \frac{(1+2x_n)^2}{h^2} + \frac{2(1+2x_n)}{h},$$

$$b_n = -\frac{1}{\tau} - \frac{2(1+2x_n)^2}{h^2} - 1,$$

$$c_n = \frac{(1+2x_n)^2}{h^2} - \frac{2(1+2x_n)}{h},$$

$$s = \frac{1}{\tau},$$

$$\psi_n = \begin{bmatrix} \psi_n^0 \\ \vdots \\ \psi_n^N \end{bmatrix},$$

$$\psi_n^0 = \cos x_n \left(e^{-2} + \frac{e^{-4}}{4} - \frac{1}{4} \right), \quad n = 1, \dots, M-1,$$

$$\psi_n^k = f(x_n, t_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, M-1.$$

Şimdi (3.21) fark denklemlerini nümerik çözümü için düzenlenmiş Gauss eliminasyon metodunu kullanacağız (Samarskii, 2001).

Yani,

$\alpha_1 = I$, β_1 , $(N+1) \times 1$ tipinde sıfır sütun vektörü, a_n , $(n=2, \dots, M-1)$, $(N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matris ve β_n , $(n=2, \dots, M-1)$, $(N+1) \times 1$ tipinde sütun matrisi olmak üzere: (3.22) denklem sistemin çözümünü

$$u_n = \alpha_{n+1} u_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 1$$

şeklinde arayacağız.

Buna göre,

$$\alpha_{n+1} = -(B_n + C_n \alpha_n)^{-1} A_n,$$

$$\beta_{n+1} = (B_n + C_n \alpha_n)^{-1} (I_n \psi_n - C_n \beta_n), n = 1, \dots, M - 1$$

ve

$$u_M = u_{M-1} = (A_{M-1} + B_{M-1} + C_{M-1} \alpha_{M-1})^{-1} (I_{M-1} \psi_{M-1} - C_{M-1} \beta_{M-1})$$

olur.

(N,M) farklı değerleri için Tablo 3.1' deki mevcut hata

$$Eu_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} (u(x_n, t_k) - u_n^k)^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

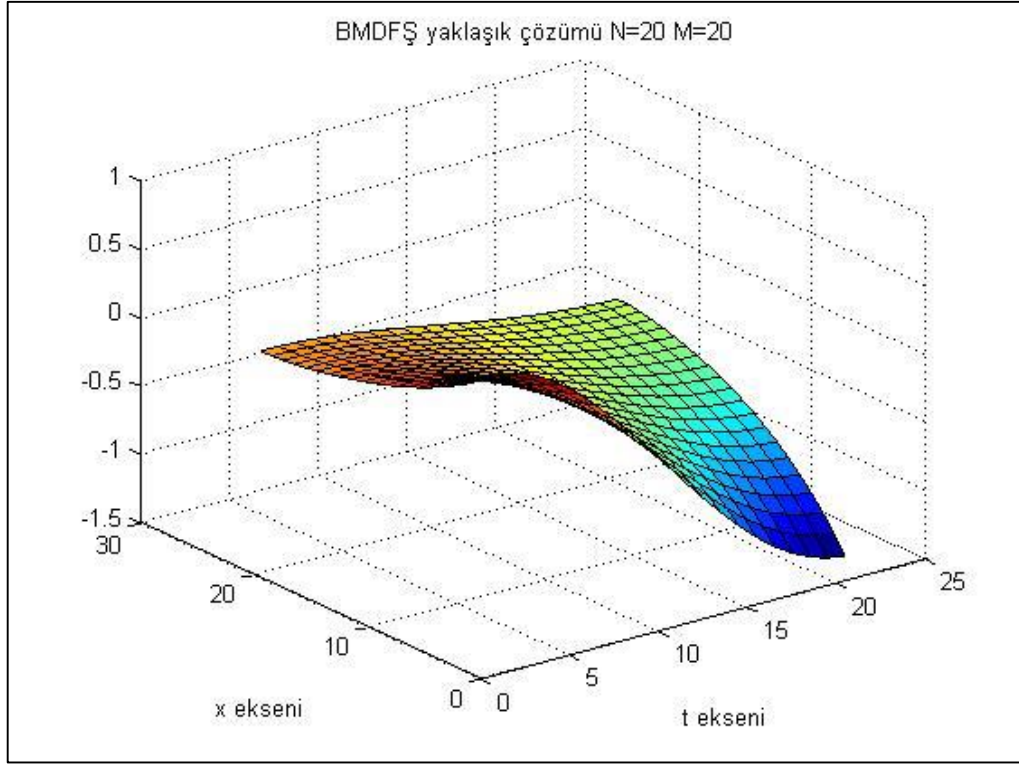
normu ile hesaplanır.

Tablo 3.1. (3.21) BMDFŞ' nin hata analizi

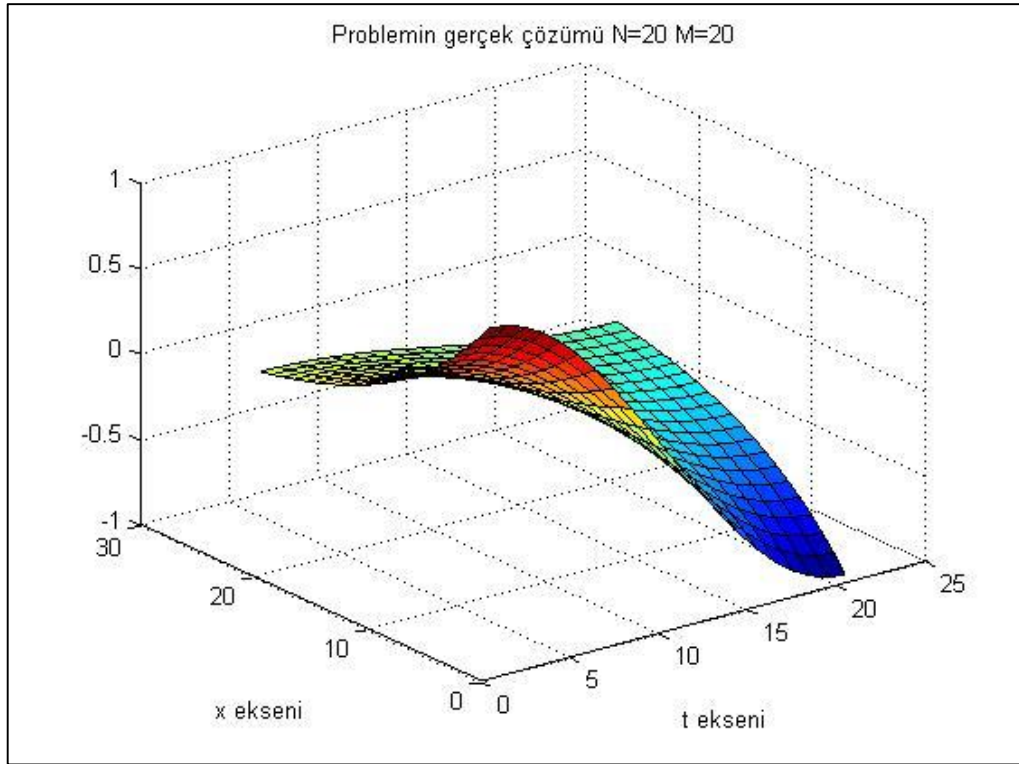
Hata/(N,M)	(10,10)	(20,20)	(40,40)	(80,80)	(160,160)	(320,320)
Eu_M^N	0.6194	0.3819	0.2264	0.1218	0.0630	0.0320

Tablo 3.1' de gördüğümüz gibi N ve M değerleri iki kat arttığında hata değerleri yaklaşık olarak $\frac{1}{2}$ oranında azalır.

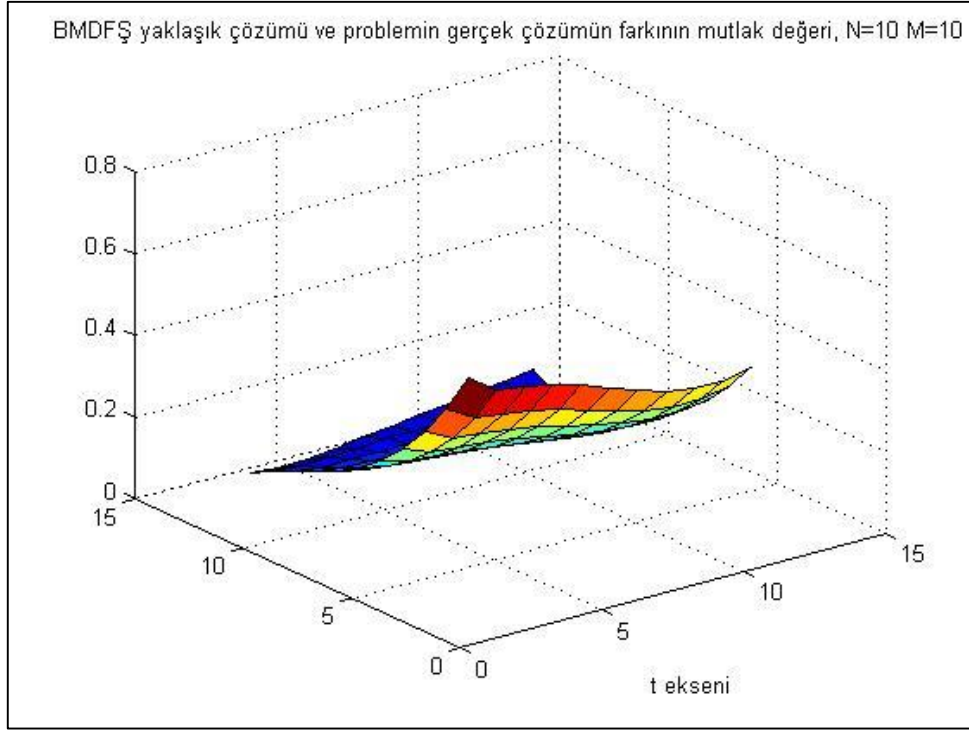
Tablodaki N ve M değerleri kullanılarak, (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözüm grafiği, (3.20) problemi için gerçek çözüm grafiği ve (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümün farkının mutlak değerinin grafiği verilen farklı değerlere göre sırasıyla, Şekil 3.1, Şekil 3.2, Şekil 3.3, Şekil 3.4, Şekil 3.5, Şekil 3.6, Şekil 3.7 ve Şekil 3.8' de gösterilmiştir.



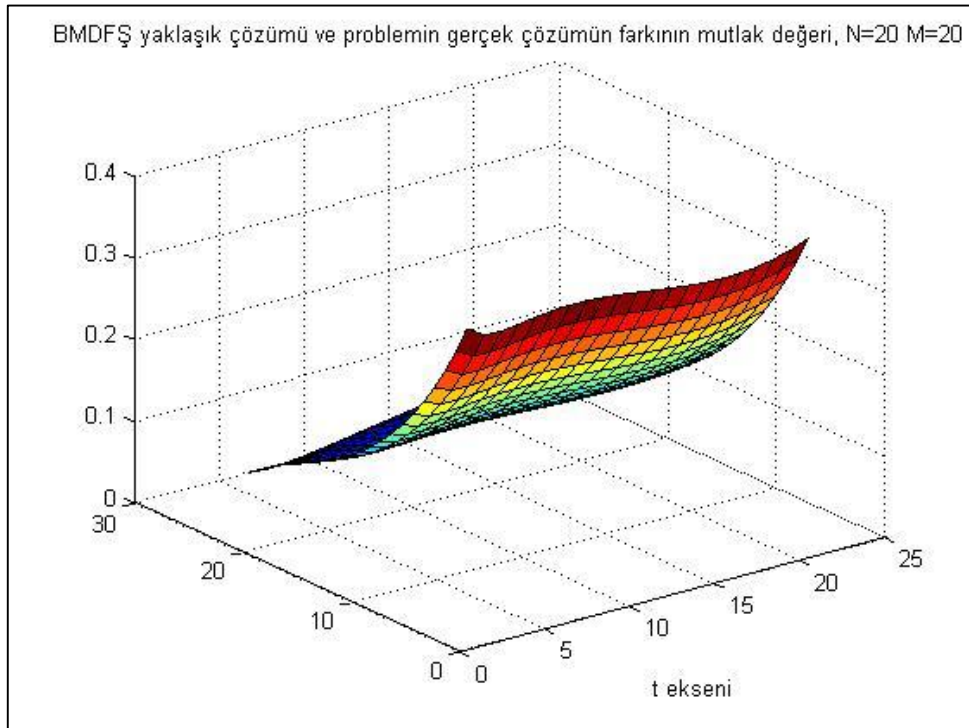
Şekil 3.1. $N=20$, $M=20$ için (3.21) BMDFS' nin yaklaşık çözüm grafiği



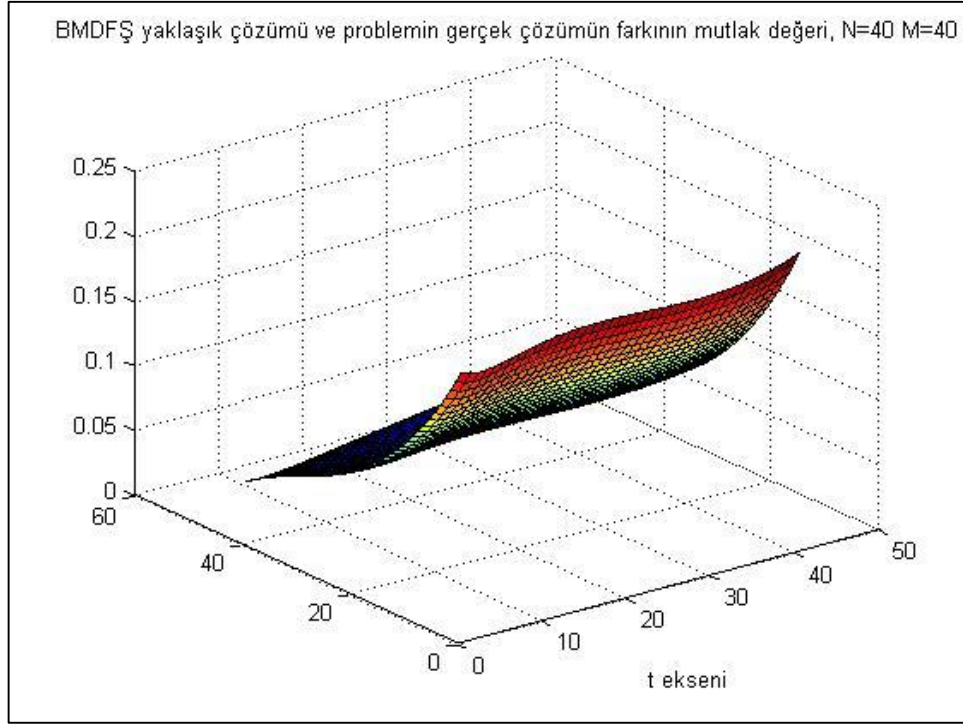
Şekil 3.2. $N=20$, $M=20$ için (3.20) probleminin gerçek çözüm grafiği



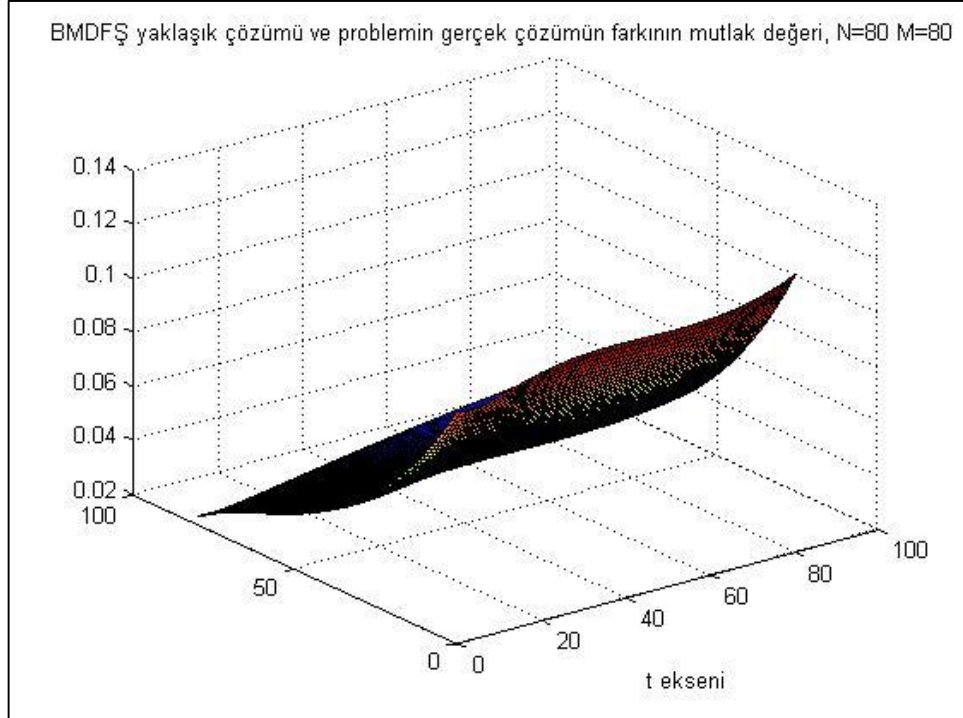
Şekil 3.3. $N=10$, $M=10$ için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği



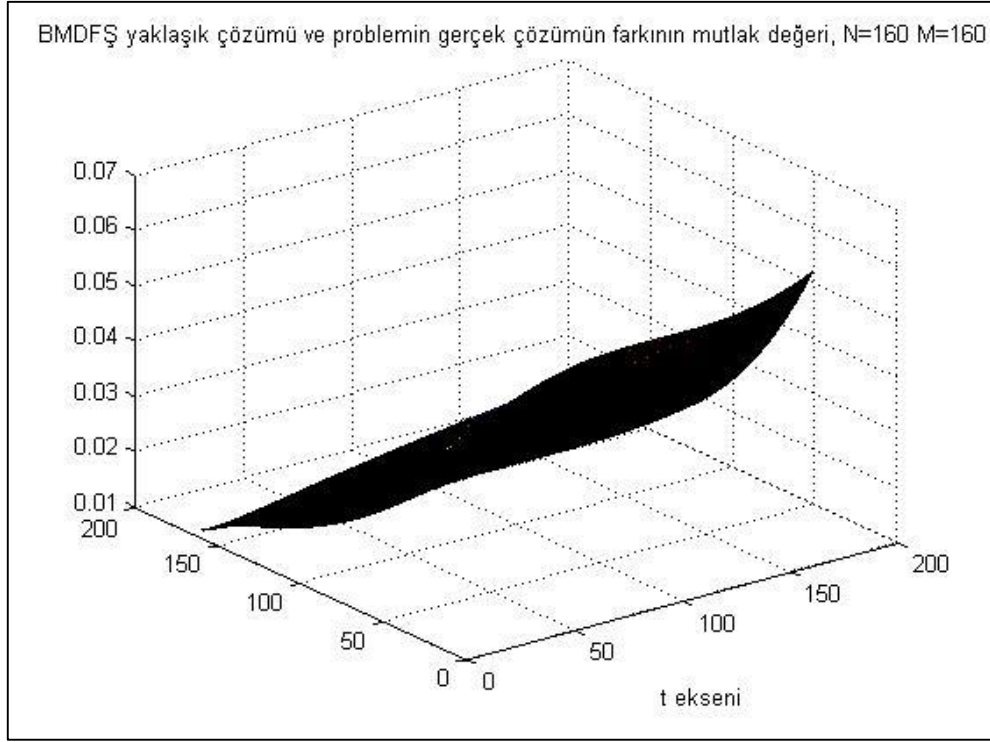
Şekil 3.4. $N=20$, $M=20$ için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği



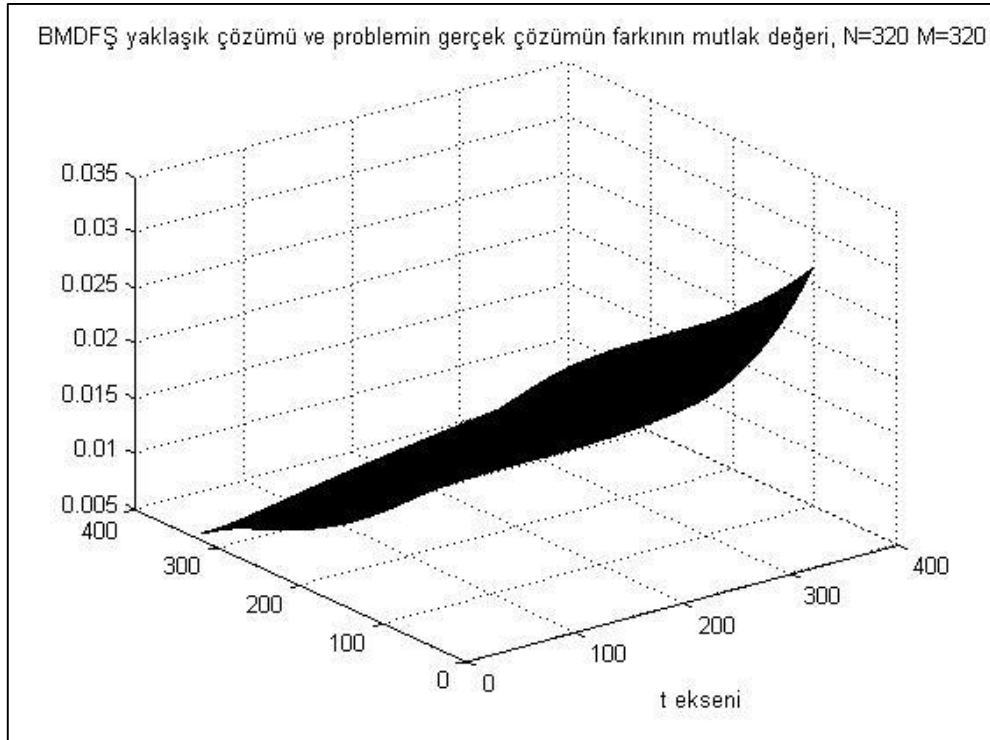
Şekil 3.5. $N=40$, $M=40$ için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği



Şekil 3.6. $N=80$, $M=80$ için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği



Şekil 3.7. $N=160$, $M=160$ için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği



Şekil 3.8. $N=320$, $M=320$ için (3.21) BMDFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.20) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği

Örnek 3.2. Şimdi ters parabolik diferansiyel denklem için

$$\begin{cases} u_t(t, x, y) + (1 + 2x)^2 u_{xx}(t, x, y) + 4(1 + 2x)u_x(t, x, y) + u_{yy}(t, x, y) - u(t, x, y) \\ = f(t, x, y), \\ f(t, x, y) = -(4 + (1 + 2x)^2)e^{-2t} \cos x \cos y - 4(1 + 2x)e^{-2t} \sin x \cos y, \\ 0 < x, y < \pi, \quad 0 < t < 1, \\ u(1, x, y) = \int_0^1 e^{-2\gamma} u(\gamma, x, y) d\gamma + \psi(x, y), \\ \psi(x, y) = \cos x \cos y \left(e^{-2} + \frac{e^{-4}}{4} - \frac{1}{4} \right), \quad 0 \leq x, y \leq \pi, \\ u_x(t, 0, y) = 0, \quad u_x(t, \pi, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u_y(t, x, 0) = 0, \quad u_y(t, x, \pi) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

şeklindeki iki boyutlu Neumann koşullu ve lokal olmayan sınır değer problemini inceleyeceğiz.

Çözüm: $u(t, x, y) = e^{-2t} \cos x \cos y$ fonksiyonu (3.23) problemin gerçek çözümüdür.

$$\psi_{m,n} = \psi(x_m, y_n), \quad n = \overline{0, M}, \quad m = \overline{0, M},$$

$$f_{m,n}^k = f(t_k, x_m, y_n), \quad k = \overline{0, N}, \quad n = \overline{0, M}, \quad m = \overline{0, M}$$

notasyonları verilmiş olsun.

(3.23) lokal olmayan ters parabolik sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için (2.38) fark şemasını kullanırsak

$$\begin{cases} \frac{u_{m,n}^k - u_{m,n}^{k-1}}{\tau} + (1 + 2x_m)^2 \frac{u_{m+1,n}^{k-1} - 2u_{m,n}^{k-1} + u_{m-1,n}^{k-1}}{h^2} + 2(1 + 2x_n) \frac{u_{m+1,n}^{k-1} - u_{m-1,n}^{k-1}}{h} \\ + \frac{u_{m,n+1}^{k-1} - 2u_{m,n}^{k-1} + u_{m,n-1}^{k-1}}{h^2} - u_{m,n}^{k-1} = f_{m,n}^k, \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq n, m \leq M-1, \\ u_{0,n}^k = 0, \quad u_{M,n}^k = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ u_{m,0}^k = 0, \quad u_{m,M}^k = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq n, m \leq M-1, \\ u_{m,n}^N = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2t_j} u_{m,n}^j \tau + \cos x_n \cos y_m \left(e^{-2} + \frac{e^{-4}}{4} - \frac{1}{4} \right), \quad 1 \leq n, m \leq M-1 \end{cases} \quad (3.24)$$

elde edilir.

(3.24) fark problemi, (3.22) matris formunda

$$\begin{cases} A_n u_{n+1} + B_n u_n + C_n u_{n-1} = I f^{(n)}, & n=1, \dots, M-1, \\ u_0 = u_1, & u_M = u_{M-1} \end{cases} \quad (3.25)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Burada $K = (N+1)(M+1)$ olmak üzere: A_n, B_n, C_n, I , $K \times K$ tipinde kare matrisler ve I birim matris, $f^{(n)}, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}$, $K \times 1$ tipinde sütun matrisleri

$$f^{(n)} = \begin{bmatrix} f_{0,n}^0 \\ \vdots \\ f_{0,n}^N \\ f_{1,n}^0 \\ \vdots \\ f_{1,n}^N \\ \vdots \\ f_{M,n}^0 \\ \vdots \\ f_{M,n}^N \end{bmatrix}_{K \times 1}, \quad u_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{0,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n+1}^N \\ u_{1,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n+1}^N \\ \vdots \\ u_{M,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n+1}^N \end{bmatrix}_{K \times 1}, \quad u_n = \begin{bmatrix} u_{0,n}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n}^N \\ u_{1,n}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n}^N \\ \vdots \\ u_{M,n}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n}^N \end{bmatrix}_{K \times 1}, \quad u_{n-1} = \begin{bmatrix} u_{0,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n-1}^N \\ u_{1,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n-1}^N \\ \vdots \\ u_{M,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n-1}^N \end{bmatrix}_{K \times 1},$$

ve

$$A_n = C_n = \begin{bmatrix} O & O & \dots & O & O \\ O & D & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & D & O \\ O & O & \dots & O & O \end{bmatrix}_{K \times 1},$$

$$B_n = \begin{bmatrix} R & O & O & \cdots & O & O & O \\ O & E & O & \cdots & O & O & O \\ O & O & E & \cdots & O & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & \cdots & E & O & O \\ O & O & O & \cdots & O & E & O \\ O & O & O & \cdots & O & O & R \end{bmatrix}_{K \times 1},$$

$$a = \frac{1}{h^2},$$

$$b = -\frac{1}{\tau} - \frac{4}{h^2} - 1,$$

$$r = \frac{1}{\tau},$$

$$e_{i,i} = b, \quad e_{i,i+1} = r, \quad e_{i,j} = 0$$

diğer durumlar için $i = \overline{2, N}$,

$$e_{1,N+1} = 1, \quad e_{1,k} = -t_k \tau, \quad k = 1, \dots, N,$$

$$f_{m,n}^k(t_k, x_n, y_m), \quad k = 1, \dots, N+1,$$

$$f_{m,n}^0 = \psi_{m,n}, \quad n, m = 1, \dots, M-1,$$

$$D = \text{diag}(0, a, a, \dots, a, 0), \quad O = O_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$R = I_{(N+1) \times (N+1)}.$$

Bu matrisler için

$$A_n u_{n+1} + B_n u_n + C_n u_{n-1} = I f^{(n)} \tag{3.26}$$

ifadesi açıkça

$$\begin{bmatrix} O & O & \cdots & O & O \\ O & D & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & D & O \\ O & O & \cdots & O & O \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{0,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n+1}^N \\ u_{1,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n+1}^N \\ u_{M,n+1}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n+1}^N \end{bmatrix}_{K \times 1} + \begin{bmatrix} R & O & O & \cdots & O & O & O \\ O & E & O & \cdots & O & O & O \\ O & O & E & \cdots & O & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & \cdots & E & O & O \\ O & O & O & \cdots & O & E & O \\ O & O & O & \cdots & O & O & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,n}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n}^N \\ u_{1,n}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n}^N \\ u_{M,n}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n}^N \end{bmatrix}_{K \times 1}$$

$$+ \begin{bmatrix} O & O & \cdots & O & O \\ O & D & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & D & O \\ O & O & \cdots & O & O \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{0,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{0,n-1}^N \\ u_{1,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{1,n-1}^N \\ u_{M,n-1}^0 \\ \vdots \\ u_{M,n-1}^N \end{bmatrix}_{K \times 1} = \begin{bmatrix} f_{0,n}^0 \\ \vdots \\ f_{0,n}^N \\ f_{1,n}^0 \\ \vdots \\ f_{1,n}^N \\ f_{M,n}^0 \\ \vdots \\ f_{M,n}^N \end{bmatrix}_{K \times 1}$$

şeklinde yazılır. Çözümü yine de

$$u_n = \alpha_{n+1} u_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 1,$$

şeklinde arayacağız.

Buna göre,

$$\alpha_{n+1} = -(B_n + C_n \alpha_n)^{-1} A_n,$$

$$\beta_{n+1} = (B_n + C_n \alpha_n)^{-1} (I_n \psi_n - C_n \beta_n), \quad n = 1, \dots, M-1$$

ve

$$u_M = u_{M-1} = (A_n + B_n + C_n \alpha_{M-1})^{-1} (I_{M-1} f_{M-1} - C_n \beta_{M-1})$$

olur.

(3.24) fark probleminin çözümünü hesaplamak için MATLAB programı üzerinden düzenlenmiş Gauss eliminasyon metodu kullanılır.

(3.24) fark problemi için

$$Eu_M^N = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} (u(x_n, y_m, t_k) - u_{n,m}^k)^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

formülü ile hesaplanan hata çıktıları (N,M)' nin farklı değerleri için kaydedilmiştir.

Tablo 3.2. (3.24) İMDFŞ' nin hata analizi

Hata/(N,M)	(10,10)	(20,20)	(40,40)
Eu_M^N	0.6075	0.2957	0.1655

Tablo 3.2' de görüldüğü üzere N ve M değerleri iki katına çıktığında hata değerleri yaklaşık olarak $\frac{1}{2}$ oranında azalır.

Örnek 3.3. Şimdi Neumann sınır şartlı integral koşullu

$$\begin{cases} u_t(t, x) + (1+x)^2 u_{xx}(t, x) + 2(1+x)u_x(t, x) - u(t, x), \\ = -4e^{-3t} \{ (x^2 + 2x + 2) \cos 2x + (1+x) \sin 2x \}, \\ 0 \leq t \leq 1, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \\ u(1, x) = \int_0^1 \mu(s) u(s, x) ds + \varphi(x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \\ \varphi(x) = \left(\frac{e^{-4} + 4e^{-3} - 1}{4} \right) \cos 2x, \mu(t) = e^{-t}, \\ u_x(t, 0) = 0, u_x\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = 0, t \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.27)$$

şeklindeki lokal olmayan ters parabolik sınır değer problemini inceleyelim.

Çözüm: Burada $u(t, x) = e^{-3t} \cos 2x$, (3.27) problemin gerçek çözümüdür.

Şimdi (3.27) sınır değer problemi için (3.19) Crank-Nicholson fark şemasını uygularsak

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_n^k(x) - u_n^{k-1}(x)}{\tau} - \frac{1}{2} \left(-(1+x_n)^2 \frac{(u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k)}{h^2} - 2(1+x_n) \frac{(u_{n+1}^k - u_{n-1}^k)}{2h} + u_n^k \right. \\ \left. -(1+x_n)^2 \frac{(u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1})}{h^2} - 2(1+x_n) \frac{(u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k-1})}{2h} + u_n^{k-1} \right) \\ = f\left(t_{k-\frac{1}{2}}\right) \\ -3u_1^k + 4u_2^k - u_3^k = 0, \\ 10u_1^k - 15u_2^k + 6u_3^k - u_4^k = 0, \\ -3u_{M+1}^k + 4u_M^k - u_{M-1}^k = 0, \\ 10u_{M+1}^k - 15u_M^k + 6u_{M-1}^k - u_{M-2}^k = 0, \\ k = 0, \dots, N, \\ -\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\tau}{2} \right) \tau u_n^0 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\mu \left(t_j - \frac{\tau}{2} \right) + \mu \left(t_{j+1} - \frac{\tau}{2} \right) \right] \tau u_n^j \\ + \left(1 - \frac{1}{2} \mu \left(t_N - \frac{\tau}{2} \right) \tau \right) u_n^N = \varphi_n, \quad n = \overline{0, M}, \end{array} \right. \quad (3.28)$$

t ve x cinsinden İMDFŞ' yi elde ederiz. Şimdi (3.28) fark şemasını

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n u_{n+1} + B_n u_n + C_n u_{n-1} = R \psi_n, \quad n = 3, \dots, M-3, \\ -3u_1 + 4u_2 - u_3 = 0, \\ 10u_1 - 15u_2 + 6u_3 - u_4 = 0, \\ -3u_{M+1} + 4u_M - u_{M-1} = 0, \\ 10u_{M+1} - 15u_M + 6u_{M-1} - u_{M-2} = 0 \end{array} \right. \quad (3.29)$$

matris formunda yazabiliriz.

Burada R , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde birim matris, ψ_n , u_s , $s = n-1, n, n+1$, $(N+1) \times 1$ tipinde sütun matrisleri

$$\psi_n = \begin{bmatrix} \psi_n^0 \\ \psi_n^1 \\ \vdots \\ \psi_n^{N-1} \\ \psi_n^N \end{bmatrix}, u_n = \begin{bmatrix} u_n^0 \\ u_n^1 \\ \vdots \\ u_n^{N-1} \\ u_n^N \end{bmatrix}, u_{n-1} = \begin{bmatrix} u_{n-1}^0 \\ u_{n-1}^1 \\ \vdots \\ u_{n-1}^{N-1} \\ u_{n-1}^N \end{bmatrix}, u_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1}^0 \\ u_{n+1}^1 \\ \vdots \\ u_{n+1}^{N-1} \\ u_{n+1}^N \end{bmatrix},$$

$A_n, B_n, C_n, (N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matrisler

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & a_n \end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d_n & d_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & d_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_n & d_n \end{bmatrix},$$

$$B_n = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{N-1} & s_N \\ b_n & c_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & c_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_n & c_n \end{bmatrix}$$

$$a_n = \frac{(1+x_n)^2}{2h^2} + \frac{(1+x_n)}{2h},$$

$$b_n = \frac{1}{\tau} - \frac{(1+x_n)^2}{h^2} - \frac{1}{2},$$

$$c_n = -\frac{1}{\tau} - \frac{(1+x_n)^2}{h^2} - \frac{1}{2},$$

$$d_n = \frac{(1+x_n)^2}{2h^2} - \frac{(1+x_n)}{2h}, n=0, \dots, M,$$

$$s_0 = -\frac{\tau}{2} \mu\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

$$s_N = 1 - \frac{\tau}{2} \mu\left(t_N - \frac{\tau}{2}\right),$$

$$s_j = -\frac{\tau}{2} \left[\mu\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right) + \mu\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) \right], j=1, \dots, N-1.$$

Şimdi, çözümü düzenlenmiş Gauss eliminasyon yöntemini kullanarak

$$u_n = \alpha_n u_{n+1} + \beta_n u_{n+2} + \gamma_n$$

şeklinde arayalım.

$$u_1 = \frac{4}{3}Ru_2 - \frac{1}{3}Ru_3 = \alpha_1 u_2 + \beta_1 u_3 + \gamma_1,$$

$$u_2 = \frac{8}{5}u_3 - \frac{3}{5}u_4 = \alpha_2 u_3 + \beta_2 u_4 + \gamma_2$$

olduğuna göre,

$$\alpha_1 = \frac{4}{3}, \beta_1 = -\frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{8}{5}, \beta_2 = -\frac{3}{5}$$

bulunur.

$$u_{n-1} = \alpha_{n-1} u_n + \beta_{n-1} u_{n+1} + \gamma_{n-1},$$

$$u_n = -\left(B_n + C_n \alpha_{n-1}\right)^{-1} \left(A_n + C_n \beta_{n-1}\right) u_{n+1} + \left(B_n + C_n \alpha_{n-1}\right)^{-1} \left(R\psi_n - C_n \gamma_{n-1}\right)$$

buna göre,

$$\alpha_n = -\left(B_n + C_n \alpha_{n-1}\right)^{-1} \left(A_n + C_n \beta_{n-1}\right),$$

$$\beta_n = 0,$$

$$\gamma_n = \left(B_n + C_n \alpha_{n-1}\right)^{-1} \left(R\psi_n - C_n \gamma_{n-1}\right), n = 3, \dots, M-1$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} (B_M + 4C_M)u_M + (A_M - 3C_M)u_{M+1} &= R\psi_M, \\ (4\alpha_{M-2} + \beta_{M-2} - 9R)u_M + (-3\alpha_{M-2} + 8R)u_{M+1} &= -R\gamma_{M-2} \end{aligned} \tag{3.30}$$

denklemleri oluştururuz.

Buradan,

$$Q_{11} = B_M + 4C_M,$$

$$Q_{12} = A_M - 3C_M,$$

$$Q_{21} = 4\alpha_{M-2} + \beta_{M-2} - 9R,$$

$$Q_{22} = -3\alpha_{M-2} + 8R,$$

$$G_1 = R\psi_M, \quad G_2 = -R\gamma_{M-2}$$

olmak üzere, (3.30) denklemleri

$$Q_{11}u_M + Q_{12}u_{M+1} = G_1,$$

$$Q_{21}u_M + Q_{22}u_{M+1} = G_2$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$u_M = (Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21})^{-1} (G_1 - Q_{12}Q_{22}^{-1}G_2)$$

ve

$$u_{M+1} = Q_{22}^{-1} (G_2 - Q_{21}u_M)$$

bulunur. Hata hesaplamak için

$$E_2 = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} (u(x_n, t_k) - u_n^k)^2 h \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$E_1 = \max_{1 \leq k \leq N-1} \max_{0 \leq n \leq M} |u(x_n, t_k) - u_n^k|$$

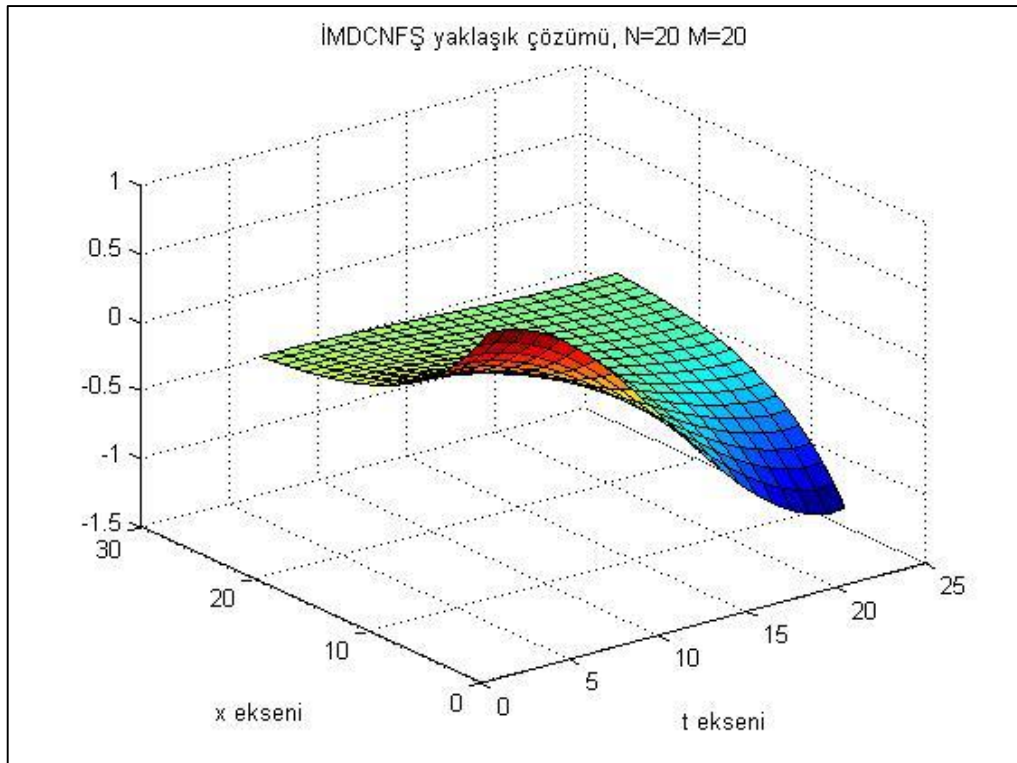
normları kullanacağız. MATLAB programında hesaplamalar yapılmıştır.

Tablo 3.3. (3.28) İMDCNFŞ' nin hata analizi

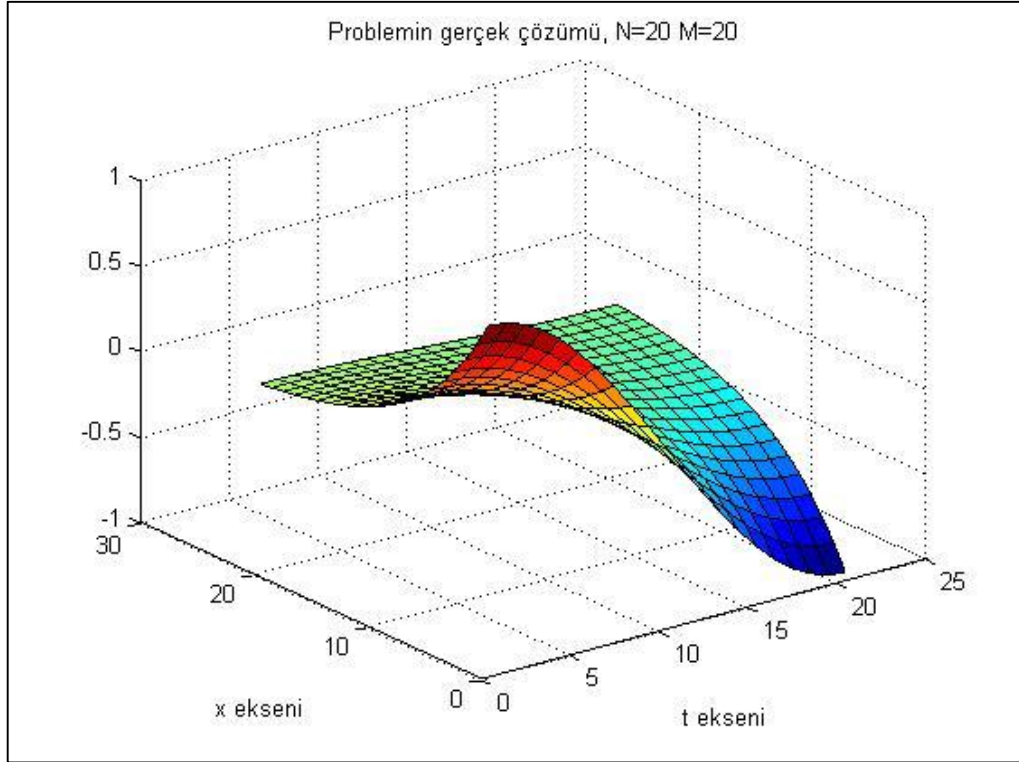
Hata/(N,M)	(10,10)	(20,20)	(40,40)	(80,80)	(160,160)	(320,320)
E_1	0.13019	0.02412	0.00437	0.00085	0.00021	0.00005
E_2	0.12041	0.02384	0.00437	0.00085	0.00021	0.00005

N ve M için Tablo 3.3' teki değerler elde edilir. Tablodan N ve M değerleri iki katına çıktığında hata oranının yaklaşık olarak $\frac{1}{4}$ oranında azaldığı görülür.

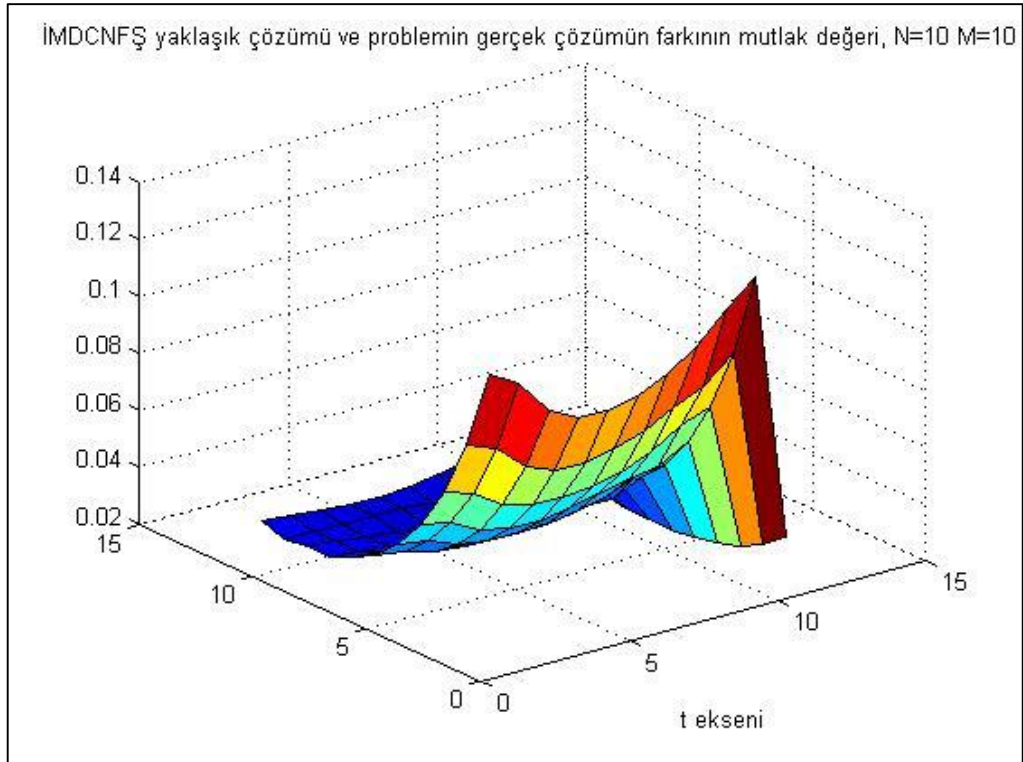
Tablodaki N ve M değerleri kullanılarak, (3.28) İMDCNFŞ' nin yaklaşık çözüm grafiği, (3.27) probleminin gerçek çözüm grafiği ve (3.28) İMDCNFŞ' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği verilen farklı değerlere göre sırasıyla, Şekil 3.9, Şekil 3.10, Şekil 3.11, Şekil 3.12, Şekil 3.13, Şekil 3.14, Şekil 3.15 ve Şekil 3.16' da gösterilmiştir.



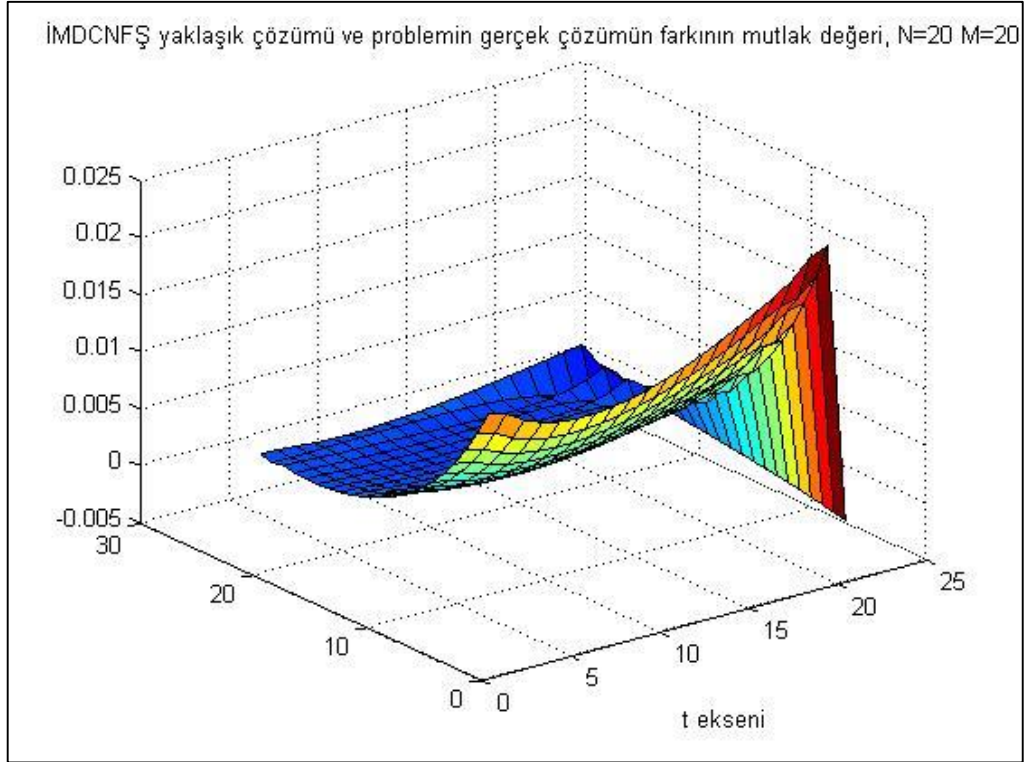
Şekil 3.9. N=20, M=20 için (3.28) İMDCNFŞ' nin yaklaşık çözüm grafiği



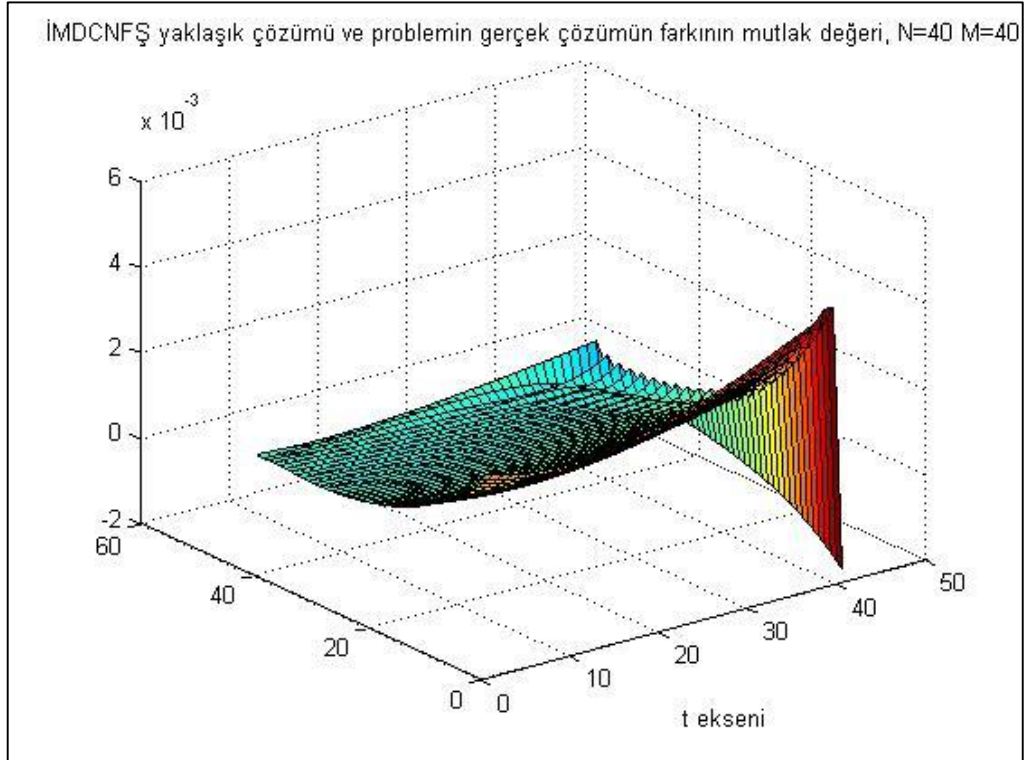
Şekil 3.10. $N=20$, $M=20$ için (3.27) probleminin gerçek çözüm grafiği



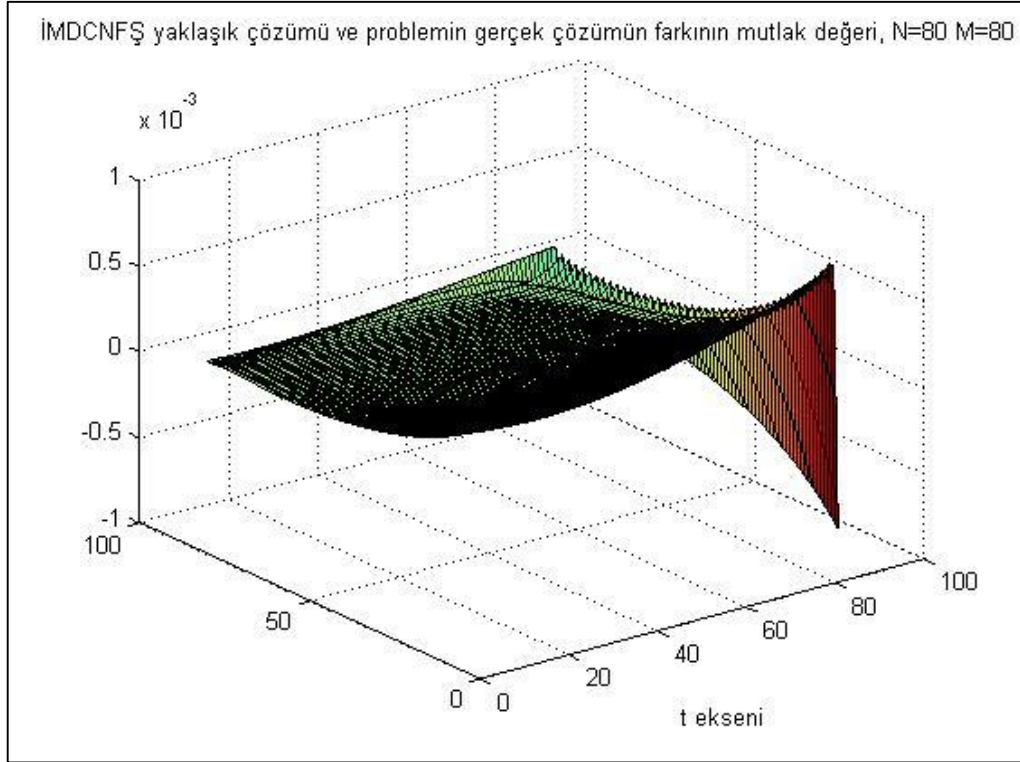
Şekil 3.11. $N=10$, $M=10$ için (3.28) İMDCNFS' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği



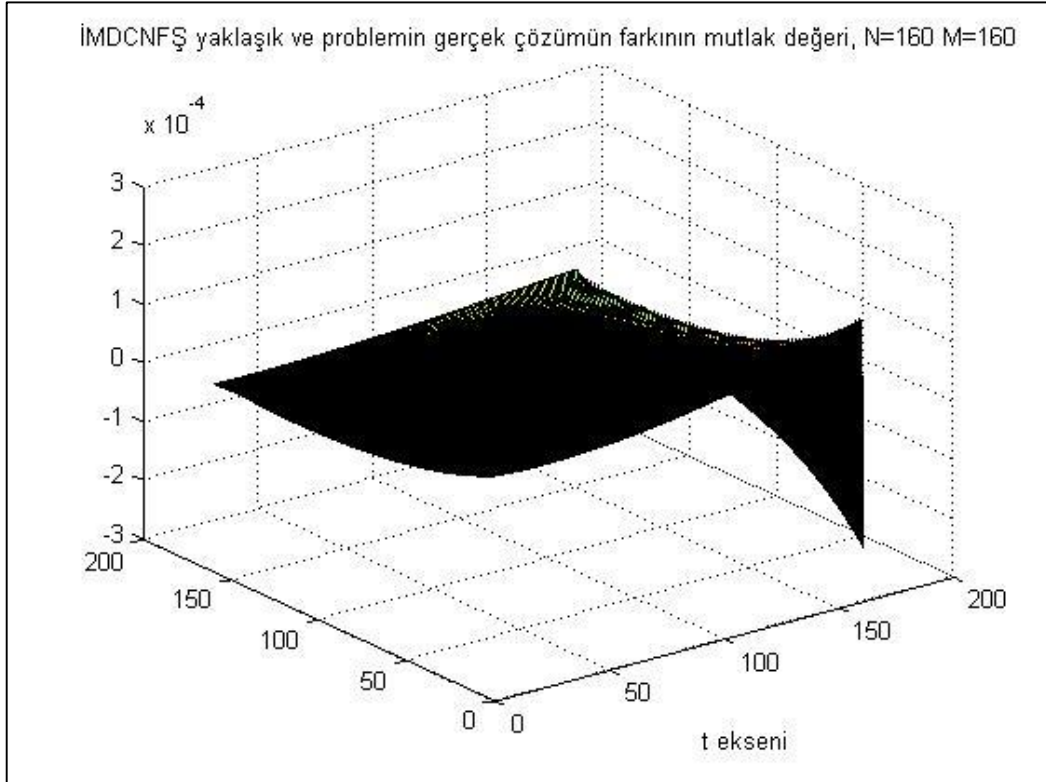
Şekil 3.12. N=20, M=20 için (3.28) İMDCNFS' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği



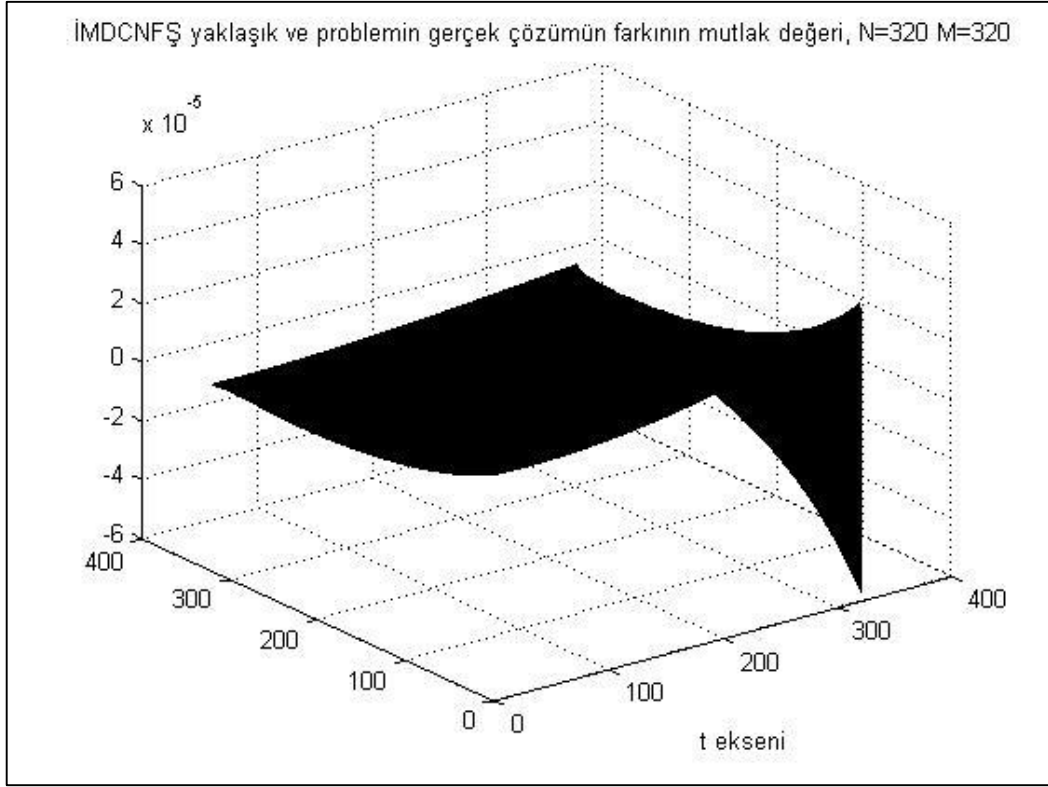
Şekil 3.13. N=40, M=40 için (3.28) İMDCNFS' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değerinin grafiği



Şekil 3.14. $N=80$, $M=80$ için (3.28) İMDCNFS' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçık çözümünün farkının mutlak değeri grafiğı



Şekil 3.15. $N=160$, $M=160$ için (3.28) İMDCNFS' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçık çözümünün farkının mutlak değeri grafiğı



Şekil 3.16. $N=320$, $M=320$ için (3.28) İMDCNFS' nin yaklaşık çözümü ve (3.27) problemin gerçek çözümünün farkının mutlak değeri grafiğı

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, ters parabolik diferansiyel denklemler için ikinci tip sınır değer ve integral koşulları ile lokal olmayan problem ele alınmıştır. Lokal olmayan problemin yaklaşık çözümünü bulmak için birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark şemaları kurulmuştur. İntegral koşullu Neumann tipi sınır değer problemi için birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark şemalarının kararlılığı gösterilmiştir.

Sonuç 1. H , herhangi bir Hilbert uzayı olsun. $I : H \rightarrow H$, birim operatör olmak üzere $A : H \rightarrow H$ öz eşlenik pozitif tanımlı operatör olduğunu varsayalım. Bu durumda $\delta > 0$ bir pozitif sabit için $A > \delta I$ ifadesi doğrudur. $\psi \in H$ ve f, μ düzgün fonksiyonları verilmiş olsun. Ters parabolik denklem için

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u(1) = \int_0^1 \mu(s)u(s)ds + \varphi \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklindeki integral koşullu sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için Rothe fark şeması ele alınmıştır.

İkinci mertebeden doğrulukla yaklaşık çözüm için Crank-Nicholson fark şeması kullanılmıştır:

$$\begin{cases} \frac{u_k(x) - u_{k-1}(x)}{\tau} - \frac{1}{2}(Au_k + Au_{k-1}) = \theta_k, \quad \theta_k = f\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\tau\right), \\ t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad \tau = \frac{1}{N}, \\ -\frac{\tau}{2}\mu\left(\frac{\tau}{2}\right)u_0 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tau}{2} \left[\mu\left(t_j - \frac{\tau}{2}\right) + \mu\left(t_{j+1} + \frac{\tau}{2}\right) \right] u_j + \left(1 - \frac{\tau}{2}\mu\left(t_N - \frac{\tau}{2}\right)\right) u_N = \varphi. \end{cases}$$

Crank-Nicholson fark şemasının çözümü için kararlılık ve koersiv eşitsizlikleri kanıtlanmıştır.

Sonuç 2. $\Omega = (0,1)^n \subset R^n$ birim açık küp, $S = \partial\Omega$, $\bar{\Omega} = S \cup \Omega$ ve $f = (0,1) \times \Omega \rightarrow R$, $a_r : \Omega \rightarrow R$, $r = 1, \dots, M$, $\mu : [0,1] \rightarrow R$, $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow R$, verilen fonksiyonlar, σ bilinen bir pozitif sayı, her $x \in \Omega$ ve r indis için $a_r(x) \geq a_0 > 0$ olduğunu varsayalım.

Çok boyutlu ters parabolik kısmi diferansiyel denklem için

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \sum_{r=1}^n \left(a_r(x) u_{x_r}(x,t) \right)_{x_r} - \sigma u(x,t) = f(x,t), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < 1, \\ u(x,1) = \int_0^1 \mu(s) u(x,s) ds + \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklindeki lokal olmayan integral koşullu Neumann sınır değer probleminin birinci mertebeden yaklaşık çözümü araştırılmıştır.

Ağ noktalar kümesi

$$\Omega_h = \{x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n), \quad m = (m_1, \dots, m_n), \quad m_r = 0, \dots, M_r, \quad h_r M_r = l, \quad r = 1, \dots, n\},$$

$$\Omega_h = \Omega \cap \Omega_h, \quad S_h = \Omega_h \cap S$$

şeklindedir.

$$\tau \text{ ve } |h| = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2} \text{ küçük pozitif gerçel sayılardır, } \tau N = 1, \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Her $x \in S$ için $u^h(x) = 0$ şartını sağlayan $A_h^x u^h = -\sum_{r=1}^N \left(a_r u_{x_r}^h \right)_{x_r, j_r} + \sigma u^h$ şeklindeki operatörü A_h^x ile gösterilmiştir.

Neumann koşullu lokal olmayan ters parabolik sınır değer probleminde yaklaşık çözüm bulabilmek için BMDFŞ,

$$\begin{cases} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} - A_h^x u_{k-1}^h(x) = f^h(t_k, x), \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in \Omega_h, \\ u_N^h(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \mu(t_j) u_j^h(x) \tau + \varphi^h(x), \quad x \in \Omega_h \end{cases}$$

ele alınmıştır ve çözümün kararlılık tahminleri incelenmiştir.

Sonuç 3. Neumann şartı ile verilen ters parabolik kısmi diferansiyel denklem için lokal olmayan sınır değer problemin çözümünün İMDFS oluşturulacaktır.

$$\begin{cases} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} - \frac{1}{2} (A_h^x u_k^h(x) + A_h^x u_{k-1}^h(x)) = \theta_k(x), \\ \theta_k(x) = f^h\left(t_{k-\frac{\tau}{2}}, x\right), \quad t_k = k\tau, \quad k = 1, \dots, N, \quad N\tau = 1, \quad x \in \Omega_h, \\ u_N^h(x) = \sum_{j=1}^N \mu\left(t_{j-\frac{1}{2}}\right) \frac{\tau}{2} [u_j^h(x) + u_{j-1}^h(x)] + \varphi^h(x), \quad x \in \Omega_h \end{cases}$$

fark şemasının çözümü için kararlılık ve koersiv kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Sonuç 4. Test örneklerde ters parabolik lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için algoritma, MATLAB kodları verilmiştir.

Sonuç 5. BMDFS, İMDFS ve İMDCNFS' nin yaklaşık çözümlerinin, problemlerin gerçek çözümlerinin ve fark şemalarının yaklaşık çözümü ile problemlerin gerçek çözümünün farkının mutlak değerlerinin grafikleri verilmiştir. Bulunan sayısal sonuçlar elde edilmiş olan teorik ifadeleri desteklemektedir.

Elde edilen bu sonuçların farklı sınır koşullarıyla ters parabolik kısmi diferansiyel denklemleri içeren modelleri incelemekte katkısı olacaktır.

5. KAYNAKLAR

- Aldulaimi, R. K. M., 2019. An Innovative Receiver Design for a Parabolic Trough Solar Collector Using Overlapped and Reverse Flow: An Experimental Study, Arabian Journal for Science and Engineering, 44, 9, 7529-7539.
- Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., 1994. Well-posedness of Parabolic Difference Equations, (Vol. 69 of Operator Theory: Advances and Applications). Birkhäuser Basel, Switzerland, 355p.
- Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P., 2004. New Difference Schemes for Partial Differential Equations, Operator Theory Advances and Applications, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 443p.
- Ashyralyev, A., Dural, A. ve Sozen, Y., 2008. Multipoint Nonlocal Boundary Value Problems for Reverse Parabolic Equations: Well-posedness, Vestnik of Odessa National University: Mathematics and Mechanics, 13, 18, 1-12.
- Ashyralyev, A., Dural, A. ve Sozen, Y., 2009. Well-posedness of the Rothe Difference Scheme for Reverse Parabolic Equations, Iranian Journal of Optimization, 1, 2-3, 1-25.
- Ashyralyev, A., Dural, A. ve Sozen, Y., 2012. On Well-posedness of the Second Order Accuracy Difference Scheme for Reverse Parabolic Equation, Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 6(S), 91-109.
- Ashyralyev, C., 2018. Well-posedness of Boundary Value Problems for Reverse Parabolic Equation with Integral Condition. e-Journal of Analysis and Applied Mathematics, 2018, 1, 11-20.
- Ashyralyev, C., 2020. Stability of Rothe Difference Scheme for the Reverse Parabolic Problem with Integral Boundary Condition. Math Meth Appl Sci., 43, 8, 5369-5379.
- Ashyralyev, C., 2020. The Second Order of ADS for Reverse Parabolic Boundary Value Problem with Integral Condition. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 46, 2, 346-359.
- Ashyralyev, C. ve Akkan, P., 2020. Source Identification Problem for a Parabolic Equation with Multipoint Nonlocal Boundary Condition, Numerical Functional Analysis and Optimization, 41, 16, 1913-1935.
- Ashyralyev, C. ve Gönenç, A., 2021. Numerical Solution of the Nonlocal Reverse Parabolic Problem with Second Kind Boundary and Integral Conditions, AIP Conference Proceedings, 2325, 1, 020005-1-020005-5.

- Ashyralyyev, C. ve Gönenç, A., 2021. Crank-Nicolson Difference Scheme for Reverse Parabolic Nonlocal Problem with Integral and Neumann Boundary Conditions, International Journal of Applied Mathematics, 34, 2, 273-282.
- Ashyralyyev, C., Dural, A. ve Sozen, Y., 2012. Finite Difference Method for the Reverse Parabolic Problem, Abstr. Appl. Anal., Special Issue, 2012, 294154, 1-17.
- Ashyralyyev, C., Dural, A. ve Sozen, Y., 2012. Finite Difference Method for the Reverse Parabolic Problem with Neumann Condition, AIP Conference Proceedings, 1470, 102-105.
- Cheney, W. ve Kincaid, D., 2008. Numerical Mathematics and Computing, Sixth Edition, Thomson Brooks/Cole, USA, 763p.
- Gerçek, O., 2006. Eliptik-Parabolik Diferansiyel Ve Fark Denklemleri için Lokal Olmayan Sınır Değer Problemleri, Yüksek Lisans Tezi, Fatih Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 74s.
- Hao, D. N., Duc, N. V. ve Thang, N. V., 2018. Backward Semi-linear Parabolic Equations with Time-Dependent Coefficients and Local Lipschitz Source, Inverse Problems, 34, 5.
- Ijacu, D. ve Marinescu, M., 2014. Filtering for Non-markovian SDEs Involving Nonlinear SPDEs and Backward Parabolic Equations, Applied Mathematics and Optimization, 70, 3, 395-409.
- Karatay, İ., 2004. Lokal Olmayan Parabolik Sınır Değer Fark Problemlerinin İyi Konumlanmışlığı, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 111s.
- Klimsiak, T., 2012. Strong Solutions of Semilinear Parabolic Equations with Measure Data and Generalized Backward Stochastic Differential Equation, Potential Analysis, 36, 2, 373-404.
- Krein, S. G., 1966. Linear Differential Equations in Banach Space. Nauka, Moscow, Russia.
- Krein, S. G., 1971. Linear Differential Equations in Banach Space, Translation of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, United States of America, Vol. 29, 390p.
- Lachapelle, A., Salomon, J. ve Turinici, G., 2010. Computation of Mean Field Equilibria in Economics, Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, 20, 4, 567-588.
- LaRosa, T., 1986. The Propagation of an Electron Beam Through the Solar Corona, Ph.D. Thesis, University of Maryland, Department of Physics and Astronomy, United States, 141p.

- Maddox, I. J., 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge at the University Press, Cambridge, 208p.
- Martin-Vaquero, J., 2009. Two-Level Fourth-order Explicit Schemes for Diffusion Equations Subject to Boundary Integral Specifications, Chaos Solitons Fractals, 42, 2364-2372.
- Martin-Vaquero, J. ve Vigo-Aguiar, J., 2009. On the Numerical Solution of the Heat Conduction Equations Subject to Nonlocal Conditions, Appl. Numer. Math., 59, 10, 2507-2514.
- Naimark, M. A., 1968. Linear Differential Operators. Part II: Linear Differential Operators in Hilbert Space, Harrap, London.
- Samarskii, A., 2001. The Theory of Difference Schemes, Dekker, New York.
- Sobolevskii, P., 1975. Difference Methods for the Approximate Solution of Differential Equations, Voronezh State University Press, Voronezh, Russia.
- Stewartson, K., 1974. Multistructural Boundary Layers on Flat Plates and Related Bodies, Advances in Applied Mechanics, 14, 145-239.
- Stewartson, K., 1981. D'Alembert's Paradox, SIAM Review, 23, 3, 308-343.
- Thanh, B. L. T., Smarrazzo, F. ve Tesei, A., 2014. Sobolev Regularization of a Class of Forward Backward-Parabolic Equations, Journal of Differential Equations, 257, 5, 1403-1456.
- Yagola, A. G. ve Klibanov, M. V., 2019. Convergent Numerical Methods for Parabolic Equations with Reversed Time via a New Carleman Estimate, Inverse Problems, 35, 11.
- Yosida, K., 1980. Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 624p.

6. EKLER

6.1. Ek 1. Örnek 3.1' in Sayısal Çözümü için MATLAB Program Kodları

```
function reverse1_int(N,M)
% Computers numerical solution of the equation
%  $u_t + (1+2x)^2 * u_{xx} + 4(1+2x)u_x - u = f(x)$ ;
%  $u(x,1) = \int_0^1 (\exp(-2\gamma) * u(\gamma, x) + \psi(x))$ 
%  $u_x(0,t) = 0, u_x(\pi, t) = 0$ 
if nargin < 1; end;
close; close;
% first order
tau = 1/N; h = pi/M;
A = zeros(N+1, N+1, M+1); B = zeros(N+1, N+1, M+1); C = zeros(N+1, N+1, M+1);
for k = 1:N+1
t(k) = (k-1)*tau;
end;
for n = 1:M+1,
for k = 1:N;
x = (n-1)*h;
A(k+1, k, n) = (1+2*x)^2/h^2 + 2*(1+2*x)/h; C(k+1, k, n) = (1+2*x)^2/h^2 - 2*(1+2*x)/h;
B(k+1, k, n) = -1/tau - 2*(1+2*x)^2/h^2 - 1; B(k+1, k+1, n) = 1/tau;
end;
B(1, N+1, n) = 1;
for j = 1:N;
B(1, j, n) = -alf(t(j))*tau;
end;
end
R = eye(N+1, N+1); fii = zeros(N+1, M+1);
for n = 1:M+1;
x = (n-1)*h;
for k = 2:N+1;
fii(k, n) = rsf(t(k), x);
end
fii(1, n) = rox(x);
end
alphaf{1} = R;
bethaf{1} = zeros(N+1, 1);
for j = 2:M;
Q = inv(B(:, :, j) + C(:, :, j)*alphaf{j-1});
alphaf{j} = -Q*A(:, :, j);
bethaf{j} = Q*(R*(fii(:, j)) - (C(:, :, j)*bethaf{j-1}));
end;
U = zeros(N+1, M+1);
Q1 = inv(A(:, :, M) + B(:, :, M) + C(:, :, M)*alphaf{M});
U(:, M+1) = Q1*(R*fii(:, M) - C(:, :, M)*bethaf{M});
for j = M:-1:1;
```

```

U(:,j)=alphaf{j}*U(:,j+1)+bethaf{j};
end;
pf=U;
%%\%\%'EXACT SOLUTION' %\%\%
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
x=(n-1)*h;
es(k,n)=exact(t(k),x);
end;
end;
fark=es-pf;
% Output;
format('shortG');
maxes=max(max(es)) ;maxapp=max(max(pf)) ;maxerror=max(max(abs(es-pf)));
relativeerror=max(max((abs(es-pf)))/max(max(abs(pf)) ));
display(['N=',num2str(N),' M=',num2str(M)])
cevapf=[maxerror,relativeerror]
%GRAPH OF THE SOLUTION for first order;
str1=strcat('BMDFŞ yaklaşık çözümü N=',num2str(N),' M=',num2str(M));
figure; surf(pf); title(str1);xlabel('t eksen');
str2=strcat('Problemin gerçek çözümü N=',num2str(N),' M=',num2str(M));
ylabel('x eksen'); rotate3d ;
figure; surf(es); title(str2); xlabel('t eksen'); ylabel('x eksen');rotate3d ;
str3=strcat('BMDFŞ yaklaşık çözümü ve problemin gerçek çözümün farkının mutlak
değeri, N=',num2str(N),' M=',num2str(M));
figure; surf(fark); title(str3);xlabel('t eksen');
%% % SUB FUNCTIONS % % %
function rx=rox(x)
rx=cos(x)*(exp(-2)+exp(-4)/4-1/4);
function al=alf(x)
al=exp(-2*x);
function estx=exact(t,x)
estx=exp(-2*t)*cos(x);
function rsftx=rsf(t,x)
rsftx=-4*exp(-2*t)*cos(x)*(1+x+x^2)-4*(1+2*x)*exp(-2*t)*sin(x);

```

6.2. Ek 2. Örnek 3.2' nin Sayısal Çözümü için MATLAB Program Kodları

```
function reverse1_int_3d(N,M)
% Computers numerical solution of the equation
%  $u_t(t,x,y) + (1+2*x)^2 u_{xx}(t,x,y) + 4*(1+2*x)u_x(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y) - u = ftx(t,x)$ ;
%  $u(1,x,y) = \text{int}[0:1] (\exp(-2\text{gam}) * u(\text{gam},x,y) + \text{ksi}(x,y))$ 
%  $u_x(t,0,y) = 0, u_x(t,\pi,y) = 0$ 
%  $u_y(t,0,y) = 0, u_y(t,\pi,y) = 0$ 
if nargin < 1; end;
close;close;
%%% first order %%%
T=1;
tau=T/N; h=pi/M;
%%% First step FIRST ORDER ACCURACY %%% %%% Calculation V
NK=(N+1)*(M+1);
A=zeros(NK,NK);B=eye(NK,NK);C=A;
a=1/h^2;b=-1-1/tau-4/h^2;r=1/tau;
for j=2:M;
x=(j-1)*h;
ii=(N+1)*(j-1);
for i=ii+2:ii+N+1;
A(i,i)=1/h^2;C(i,i)=1/h^2;B(i,i)=-1/tau-(2*(1+2*x)^2+2)/h^2-1;
B(i,i-1)=r;B(i,i+M+1)=(1+2*x)^2/h^2+2*(1+2*x)/h;
B(i,i-M-1)=(1+2*x)^2/h^2-2*(1+2*x)/h;
end;
B(ii+1,ii+N+1)=1;
for k=1:N;
t=(k-1)*tau;
B(ii+1,ii+k)=-alf(t)*tau;
end;
end;
R=eye(NK,NK);
fii=zeros(NK,M+1);
for m=1:M+1;
x=(m-1)*h;
for j=1:M+1;
ii=(N+1)*(j-1);
y=(j-1)*h;
for k=2:N+1;
t=(k-1)*tau;
fii(ii+k,j)=rsf(t,x,y);
end;
fii(ii+1,j)=ksii(x,y);
end;
end;
alphaf{1}=R;bethaf{1}=zeros(NK,1);
for j=2:M
Q=inv(B+C*alphaf{j-1});
alphaf{j}=-Q*A;
```

```

bethaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-C*bethaf{j-1});
end;
V=zeros(NK,M+1);
Q1=inv(A(:,:)+B(:,:)+C(:,:)*alphaf{M});
V(:,M+1)=Q1*(R*fii(:,M)-C(:,:)*bethaf{M});
for j=M:-1:1
V(:,j)=alphaf{j}*V(:,j+1)+bethaf{j};
end
Vf=zeros(N+1,M+1,M+1);
Ve=zeros(N+1,M+1,M+1);
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;
for j=1:M+1;
ii=(N+1)*(j-1);
y=(j-1)*h;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
Vf(k,n,j)=V(ii+k,n);Ve(k,n,j)=exactu(t,x,y);
end;
end;
end;
ftv=Vf-Ve;
fv=zeros(N+1,1);
for k=1:N+1;
s=0;
for n=1:M+1;
for j=1:M+1;
sv=ftv(k,n,j);
s=s+sv*sv;
end;
end;
fv(k,1)=s^(1/2)*h*h;
end;
maxerrorv=max(fv);
cevap1=[maxerrorv]
%%% SUB FUNCTIONS %%%
function ksi=ksii(x,y)
ksi=cos(x)*cos(y)*(exp(-2)+exp(-4)/4-1/4);
function extxu=exactu(t,x,y)
extxu=exp(-2*t)*cos(x)*cos(y);
function al=alf(t)
al=exp(-2*t);
function rsftx=rsf(t,x,y)
rsftx=-(4+(1+2*x)^2)*exp(-2*t)*cos(x)*cos(y)-4*(1+2*x)*exp(-2*t)*sin(x)*cos(y);

```

6.3. Ek 3. Örnek 3.3' ün Sayısal Çözümü için MATLAB Program Kodları

```

function reverseCN_int_2d_A(N,M)
% Computers numerical solution of the equation
%  $u_t(t,x) + (1+x)^2 u_{xx}(t,x) + 2(1+x)u_x(t,x) - u(t,x) = f(x,t,x)$ ;
%  $u(1,x) = \int_{0-1}^1 \alpha(s)u(s,x)ds + \kappa(x)$ 
% Crank-Nikolson
%  $u_x(t,0) = 0, u_x(t,\pi/2) = 0$ 
if nargin < 1; end;
close;close;
% second order %
T=1;
tau=T/N; h=pi/(2*M);
%%% Second ORDER ACCURACY %%% Calculation V
A=zeros(N+1,N+1,M+1);C=A;
B=A;
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;a=(1+x)^2/(2*h^2)+(1+x)/(2*h);b=1/tau-(1+x)^2/(h^2)-(1/2);
c=-1/tau-(1+x)^2/(h^2)-(1/2);d=(1+x)^2/(2*h^2)-(1+x)/(2*h);
for i=2:N+1;
A(i,i,n)=a;A(i,i-1,n)=a;B(i,i,n)=b;B(i,i-1,n)=c;C(i,i,n)=d;C(i,i-1,n)=d;
end;
B(1,N+1,n)=1-alf(1-tau/2)*tau/2;B(1,1,n)=-alf(tau/2)*tau/2;
for k=2:N;
t=(k-1)*tau;
B(1,k,n)=-(alf(t-tau/2)+alf(t+tau/2))*tau/2;
end;
end;
R=eye(N+1,N+1);fii=zeros(N+1,M+1);
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;
for k=2:N+1;
t=(k-1)*tau-tau/2;
fii(k,n)=rsf(t,x);
end;
fii(1,n)=ksii(x);
end;
alpha{1}=(4/3)*R;beta{1}=-(1/3)*R;gamma{1}=zeros(N+1,1);
alpha{2}=(8/5)*R;beta{2}=-(3/5)*R;gamma{2}=zeros(N+1,1);
for j=3:M;
Q=inv(B(:,j)+C(:,j)*alpha{j-1});
alpha{j}=-Q*(A(:,j)+C(:,j)*beta{j-1});
beta{j}=zeros(N+1,N+1);
gamma{j}=Q*(R*fii(:,j)-C(:,j)*gamma{j-1});
end;
U=zeros(N+1,M+1);
Q11=B(:,M)+4*C(:,M);Q12=A(:,M)-3*C(:,M);
Q21=4*alpha{M-2}+beta{M-2}-9*R;Q22=-3*alpha{M-2}+8*R;
G1=R*fii(:,M);G2=-R*gamma{M-2};Q=inv(Q22);

```

```

U(:,M+1)=inv(Q11-Q12*Q*Q21)*(G1-Q12*Q*G2);U(:,M)=Q*(G2-Q21*U(:,M+1));
for j=M-1:-1:1;
U(:,j)=alpha{j}*U(:,j+1)+beta{j}*U(:,j+2)+gamma{j};
end;
pf=U;
%%\%\%\%\%\%'EXACT SOLUTION' \%\%\%\%\%\%\%\%
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
x=(n-1)*h;t=(k-1)*tau;
es(k,n)=exactu(t,x);
end;
end;
fark=es-pf;
% Output;
format('shortG');
maxes=max(max(es)) ;
maxapp=max(max(pf)) ;
maxerror=max(max(abs(es-pf)));
relativeerror=max(max((abs(es-pf)))/max(max(abs(pf)) ));
display(['N=',num2str(N),' M=',num2str(M)])
cevapf=[maxerror,relativeerror]
%GRAPH OF THE SOLUTION for second order CN;
str1=strcat('İMDCNFS yaklaşık çözümü N=',num2str(N),' M=',num2str(M));
figure; surf(pf); title(str1);xlabel('t eksen');
str2=strcat('Problemin gerçek çözümü N=',num2str(N),' M=',num2str(M));
ylabel('x eksen'); rotate3d ;
figure; surf(es); title('Gerçek çözüm'); xlabel('t eksen'); ylabel('x eksen');rotate3d ;
str3=strcat('İMDCNFS yaklaşık çözümü ve problemin gerçek çözümün farkının mutlak
değeri, N=',num2str(N),' M=',num2str(M));
figure; surf(fark); title(str3);xlabel('t eksen');
%% % SUB FUNCTIONS % % %
function ksi=ksii(x)
ksi=((exp(-4)+4*exp(-3)-1)/4)*cos(2*x);
function extxu=exactu(t,x)
extxu=exp(-3*t)*cos(2*x);
function al=alf(t)
al=exp(-t);
function rsftx=rsf(t,x)
rsftx=-4*exp(-3*t)*((x^2+2*x+2)*cos(2*x)+(1+x)*sin(2*x));

```

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet GÖNENÇ, ilk ve ortaöğrenimini Trabzon Yavuz Selim İlköğretim Okulunda tamamladı. Lise öğrenimini Trabzon Kanuni Anadolu Lisesinde bir yıl da İngilizce hazırlık eğitimi alarak bitirdi. 2008 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümünden 2012 yılında mezun oldu. 2014' ten itibaren MEB' de Matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.