



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**NEUMANN TİPİ ÇOK NOKTALI ÜST BELİRLİ KARIŞIK SINIR
DEĞER PROBLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Suzan KARABEY

ARALIK 2019
GÜMÜŞHANE

**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**NEUMANN TİPİ ÇOK NOKTALI ÜST BELİRLİ KARIŞIK SINIR DEĞER
PROBLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Suzan KARABEY

**Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
“Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı”
Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17.12.2019
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 22.01.2020**

ARALIK 2019



KABUL ve ONAY



Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV danışmanlığında **Suzan KARABEY** tarafından hazırlanan “**NEUMANN TİPİ ÇOK NOKTALI ÜST BELİRLİ KARIŞIK SINIR DEĞER PROBLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**” isimli bu çalışma jürimiz tarafından Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Mühendisliği** Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak Oy Birliği/Oy Çokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan

.....
Dr. Öğretim Üyesi Mutlu DEDETÜRK

Üye (Danışman)

.....
Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

Üye

.....
Dr. Öğretim Üyesi Zafer BEKİRYAZICI

ONAY

Bu tez 19.02/2020 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Ferkan SİPAHİ .Y

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum “**NEUMANN TİPİ ÇOK NOKTALI ÜST BELİRLİ KARIŞIK SINIR DEĞER PROBLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**” isimli tez çalışmasında; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 17/12/2019



Suzan KARABEY

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEUMANN TİPİ ÇOK NOKTALI ÜST BELİRLİ KARIŞIK SINIR DEĞER
PROBLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Suzan KARABEY

Gümüşhane Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

2019, 77 sayfa

Bu çalışmada, eliptik diferansiyel denklemler için Neumann tipi çok noktalı üst belirli Dirichlet-Neumann ve Neumann-Dirichlet karışık sınır değer problemleri ele alınmıştır. Problemlerin çözümleri için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Sabit katsayılı denklemler için çok noktalı karışık sınır değer problemlere karşılık gelen örneklerin çözümleri Fourier seri yöntemiyle, Fourier ve Laplace integral dönüşüm yöntemleriyle elde edilmiştir.

Üst belirli çok noktalı Dirichlet-Neumann ve Neumann-Dirichlet karışık sınır değer problemler için birinci ve ikinci mertebeden doğruluk sonlu fark şemaları sunulmuştur. Fark şemaların çözümü için kararlılık kestirimleri gösterilmiştir.

İki değişkenli eliptik denklem için Neumann tipi çok noktalı Dirichlet-Neumann ve

Neumann-Dirichlet karışık sınır değer problemlerin çözümlerini bulmak için algoritma verilmiştir ve MATLAB kodları eklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çok noktalı koşul, Fark şeması, Kararlılık kestirimi, Karışık sınır değer problemi, Üst belirli eliptik problemi, Yaklaşım

ABSTRACT
MS THESIS

**NUMERICAL SOLUTIONS OF NEUMANN TYPE OVERDETERMINED
MULTIPOINT MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS**

Suzan KARABEY

Gümüşhane University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

2019, 77 pages

In this study, for elliptic differential equations Neumann type overdetermined multipoint Dirichlet-Neumann and Neumann-Dirichlet mixed boundary value problems have been investigated. Stability estimates for solutions of problems are obtained.

By using Fourier series method, Fourier and Laplace integral transformation methods solutions of examples which correspond to multipoint mixed boundary value problems for equations with constant coefficients are obtained.

First and second order of accuracy finite difference schemes to find approximate solutions of overdetermined multi-point Dirichlet-Neumann and Neumann-Dirichlet mixed boundary value problems are proposed. Stability estimates for the solution of difference schemes are presented.

Algorithm of solving of Neumann type over determined multi - point Dirichlet -

Neumann and Neumann-Dirichlet mixed boundary value problems for two-dimensional elliptic equation are given. MATLAB codes are attached.

Key Words: Multi - point condition, Difference scheme, Stability estimate, Mixed boundary value problem, Overdetermined elliptic problem, Approximation

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunun belirlenmesi ve bu tezin hazırlanması için geçen süre zarfında her aşamasında yol gösterici olan, bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her türlü görüş ve önerilerini esirgemeyen çok kıymetli danışmanım Sayın Prof. Dr. Charyyar ASHERYRALYYEV'e, lisans ve yüksek lisans eğitim ve öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan Matematik Mühendisliği bölümündeki tüm hocalarıma; emekleri ve sevgileriyle beni bu zamana kadar yetiştiren ve hiçbir zaman desteklerini eksik etmeyen her zaman yanımda olan annem Türkan Karabey ve babam Sunay Karabey olmak üzere tüm aileme teşekkür ederim.

Suzan KARABEY

Gümüşhane, 2019

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	VI
TEŞEKKÜR.....	VIII
İÇİNDEKİLER.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
TABLolar DİZİNİ.....	XI
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Temel Kavramlar.....	1
1.2. Literatür Taraması.....	7
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	10
2.1. Üst Belirli Neumann Tipi Çok Noktalı Lokal Olmayan Sınır Değer Problemi...	10
2.2. İki Boyutlu Neumann Tipi Çok Noktalı Karışık Sınır Değer Problemlerin Analitik Çözümleri.....	17
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	42
3.1. Üst Belirli Çok Noktalı Neumann-Dirichlet Sınır Değer Eliptik Problemi İçin Birinci ve İkinci Mertebeden Doğruluk Fark Şemaları.....	42
3.2. Üst Belirli Çok Noktalı Dirichlet-Neumann Sınır Değer Eliptik Problemi İçin Birinci ve İkinci Mertebeden Doğruluk Fark Şemaları.....	48
3.3. Sayısal Hesaplamalar.....	50
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	72
5. KAYNAKLAR.....	75
6. EKLER.....	78
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1 (3.3.1) Problemin BMDFS'nın yaklaşık çözüm grafiği	57
Şekil 3.2 (3.3.1) Problemin İMDFS'nın yaklaşık çözüm grafiği.....	62
Şekil 3.3 (3.3.17) Problemin BMDFS'nın yaklaşık çözüm grafiği.....	67
Şekil 3.4 (3.3.17) Problemin İMDFS'nın yaklaşık çözüm grafiği.....	71

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1 (3.3.3) BMDFŞ'nin hata analizi	56
Tablo 3.2 (3.3.12) İMDFŞ'nin hata analizi.....	61
Tablo 3.3 (3.3.19) BMDFŞ'nin hata analizi	66
Tablo 3.4 (3.3.21) İMDFŞ'nin hata analizi.....	70

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

H	:	Hilbert uzayı
$A : H \rightarrow H$:	Sınırlı öz eşlenik pozitif tanımlı operatör
A^{-1}	:	A operatörünün tersi
$B = A^{\frac{1}{2}}$:	Sınırlı öz eşlenik pozitif tanımlı operatörün karekökü
Q	:	Operatör
D	:	Operatör
$G(t, s)$:	Green fonksiyon
$f(\cdot)$:	Fonksiyon
φ, ψ, ζ	:	Hilbert uzayının elemanları
$D(A)$:	A operatörünün tanım bölgesi
$C(H)$:	$u : [0, T] \rightarrow H$ düzgün fonksiyonlardan oluşan ve her u fonksiyonunun normu $\ u\ _{C(H)} = \max_{0 \leq t \leq T} \ u(t)\ _H$ ile tanımlanan Banach uzayı
$C^\alpha(H)$:	$[0, T]$ aralığında tanımlanan H değerli düzgün $u(t)$ fonksiyonlardan oluşan ve u fonksiyonunun normu $\ u\ _{C^\alpha(H)} = \ u\ _{C(H)} + \sup_{0 \leq t \leq t+s \leq T} s^{-\alpha} \ u(t+s) - u(t)\ $ ile tanımlanan bir Banach uzayı
$C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$:	$C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ $0 < \alpha < 1$, H Hilbert uzay olmak üzere tüm $u : [0, T] \rightarrow H$ düzgün fonksiyonların oluşturduğu ve u fonksiyonu $\ u\ _{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} = \ u\ _{C(H)} + \sup_{0 \leq t \leq t+s \leq T} (t+s)^\alpha (T-t)^\alpha s^{-\alpha} \ u(t+s) - u(t)\ _H$ ile tanımlanan Banach uzayı
Ω	:	$\{(x_1, \dots, x_n) \in R_n, 0 < x_i < 1, 1 \leq i \leq n\}$ ile verilen birim açık küp
$\overline{\Omega}$:	Birim açık küpün kapanışı
S	:	Küpün sınırı
S_1	:	$\{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i = 0, x_j \in [0, 1], j \neq i, 1 \leq i, j \leq n\}$ küpün sınırının bir kısmı
S_2	:	$\{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i = 1, x_j \in (0, 1], j \neq i, 1 \leq i, j \leq n\}$ küpün sınırının bir kısmı
$L_2(\overline{\Omega})$:	$\overline{\Omega}$ kümesinde tanımlanan kuadratik integrallenebilen ve

		$\ u\ _{L_2(\bar{\Omega})} = \left\{ \int_{x \in \Omega} u(x) ^2 dx_1 \dots dx_n \right\}^{1/2}$ ile tanımlanan normlu u
$C(L_2(\bar{\Omega}))$:	fonksiyonlarından oluşan Hilbert uzayı Banach uzayı
$[\cdot]$:	En büyük tam sayı fonksiyonu
$W_2^2(\bar{\Omega})$:	$\bar{\Omega}$ kümesinde tanımlanan 2. mertebeden kısmi türevlerine sahip ve kuadratik anlamda integrallenebilen fonksiyonların oluşturduğu Sobolev uzayı
$ h $:	$ h = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$ küçük pozitif sayı
τ	:	Küçük pozitif sayı
$C_\tau(L_{2h})$:	$\{\omega_k^h\}_0^N$ grid fonksiyonlardan oluşan Banach uzayı
$M(\delta)$:	Sadece δ değere bağlı bir pozitif sabit
$\tilde{\Omega}_h$:	Grid noktalar kümesi
$L_{2h} = L_{2h}(\tilde{\Omega}_h)$:	$\tilde{\Omega}_h$ grid noktalar kümesi üzerinde tanımlanan $v(h_1 m_1, \dots, h_n m_n)$ grid fonksiyonlardan oluşan Hilbert uzayı
BMDFS	:	Birinci mertebeden doğruluk fark şeması
İMDFS	:	İkinci mertebeden doğruluk fark şeması
ÖEPTO	:	Öz eşlenik pozitif tanımlı operatör

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda, vektör uzayı, normlu uzay, iç çarpım uzayı, Banach uzayı, Hilbert uzayı, sınırlı lineer operatörler ve öz-eşlenik operatörle ile ilgili kısa bilgiler verilmektedir. Gerçek sayılar kümesini R ve karmaşık sayılar kümesini ise C ile gösterelim.

Tanım 1.1.1. X gerçel vektör uzayı, X bir küme, $+$ ve \cdot ikili işlemler olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(X, +, \cdot)$ şeklindeki bir üçlüdür. (Cheney, 2001) :

- 1) Eğer x ve y X 'in elemanları ise $x + y$ 'de X 'in elemanıdır;
- 2) $\forall x, y \in X, x + y = y + x$;
- 3) $\forall x, y, z \in X, x + (y + z) = (x + y) + z$;
- 4) X 'in her x elemanı için $x + 0 = 0 + x = x$ olacak şekilde bir 0 elemanı vardır;
- 5) X 'in her x elemanı için $x + (-x) = 0$ olacak şekilde tek bir $-x$ elemanı vardır;
- 6) Eğer $x \in X$ ve $\lambda \in R$ ise $\lambda \cdot x \in X$ 'dir;
- 7) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ ($\lambda \in R$);
- 8) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ ($\lambda, \mu \in R$);
- 9) $\lambda \cdot (\mu x) = (\lambda \mu) \cdot x$;
- 10) $1 \cdot x = x$ ($1 \in R$).

Tanım 1.1.2. X bir vektör uzayı olsun. X üzerindeki $\|\cdot\|$ ile gösterilen norm aşağıdaki üç aksiyomu sağlayan bir gerçek değerli fonksiyondur (Cheney, 2001):

- 1) $\|x\| \geq 0$,
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ($\lambda \in R, x \in X$),
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($x, y \in X$)

vektör uzayına tanımlanan normu ile birlikte *normlu lineer uzay* denir.

Örnek 1.1.1.

$X = \mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi olsun. x karmaşık sayısının mutlak değeri $|x|$ ile gösterilirse, $\|x\| = |x|$ ile norm tanımlanabilir. Buna göre, a ve b gerçek sayılar olmak üzere $x = a + ib$ karmaşık sayısı için $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$ olur.

Tanım 1.1.3. X vektör uzayına \mathbb{C} karmaşık sayılar grubu üzerinde tanımlanan $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ iç çarpımı ile birlikte *iç çarpım uzayı* denir. Her $x, y, z \in X$ için iç çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir (Cheney, 2001):

- 1) $\langle x, y \rangle$ değeri karmaşık sayıdır;
- 2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- 3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{C}$;
- 4) Eğer $x \neq 0$ ise $\langle x, x \rangle > 0$;
- 5) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in X$.

Örnek 1.1.2.

$X, [a, b]$ aralığında tanımlanan sürekli karmaşık değerli fonksiyonların oluşturduğu küme olsun. Bu durumda, iç çarpım, her $x, y \in X$ için $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$ ile tanımlanır.

Her iç çarpım uzayları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. $\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle, \forall x, y \in X$;
- ii. $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle, \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}$;
- iii. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, \forall x, y, z \in X$;
- iv. $\left\langle \sum_{i=1}^n x_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, y \rangle, \forall x_1, x_2, \dots, x_n, y \in X$.

İç çarpım uzayındaki her x elemanı için norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.4. Tam normlu lineer uzay Banach uzayıdır (Kreyszig, 1978).

Tanım 1.1.5. Tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir (Cheney, 2001).

Tanım 1.1.6. E ve F iki vektör uzayı verilmiş olsun. Eğer her bir $x \in D$ elemanına karşılık $y = Ax \in F$ elemanı alınırsa, $D \subset E$ de tanımlanan ve değeri F de olan A operatörü verilmiş olsun. D alt kümesine A operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(A)$ ile gösterilir (Krein, 1972).

Tanım 1.1.7. H_1 ve H_2 Hilbert uzaylar olmak üzere $A: H_1 \rightarrow H_2$ dönüşümüne, $\forall x, y \in H_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ ifadesi geçerli ise lineer operatör denir (Krein, 1972).

Tanım 1.1.8. Eğer E ve F iki normlu uzay olmak üzere $A: E \rightarrow F$ lineer operatörü için $\|Ax\|_F \leq C \|x\|_E$ eşitliğini sağlayan $C > 0$ reel sayısı varsa A operatörüne *sınırlı lineer operatör* denir. En küçük C sayısına A operatörünün $\|A\|_{E \rightarrow F}$ ile gösterilen *normu* denir (Krein, 1971).

Tanıma göre, $\|A\|_{E \rightarrow F}$ normu $\sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}$ formunda yazılabilir.

Örnek 1.1.3.

$E = L_2[0,1], A: E \rightarrow E, \|x\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, Ax = \int_0^1 x(s) ds$ olsun. Buna göre, $\|A\|$

normu araştırılsın.

Çözüm:

Her $x \in L_2[0,1]$ için,

$$\forall t \in [0,1], |Ax(t)| \leq \int_0^1 |1 \cdot x(s)| ds \leq \left(\int_0^1 |1|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \|x\|_{L_2[0,1]} \text{ olduğundan}$$

$|Ax(t)| \leq \|x\|_{L_2[0,1]}$. Buna göre,

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{L_2[0,1]} &= \left(\int_0^1 |Ax(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \|x\|_{L_2[0,1]}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|_{L_2[0,1]} \left(\int_0^1 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{L_2[0,1]} \end{aligned}$$

olduğundan $\|A\| \leq 1$.

Şimdi, $x_0(t) = 1$ fonksiyonu göz önüne alınsın.

$$\|x_0\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |x_0(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$Ax_0(t) = \int_0^1 x_0(s) ds = \int_0^1 1 ds = 1, \forall t \in [0,1].$$

Böylece,

$$\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|_{L_2[0,1]}}{\|x\|_{L_2[0,1]}} \geq \frac{\|Ax_0\|_{L_2[0,1]}}{\|x_0\|_{L_2[0,1]}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\|A\| \geq 1.$$

Sonuçta, $\|A\| = 1$.

Tanım 1.1.9. H bir Hilbert uzay olmak üzere $A: H \rightarrow H$ lineer sınırlı operatör olsun.

$A^*: H \rightarrow H$ operatörü $\forall x, y \in H, \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ şartını sağlarsa, A^* operatörü A operatörünün *eşleniği* denir (Krein, 1972).

Tanım 1.1.10. H bir Hilbert uzay olmak üzere $A: H \rightarrow H$ lineer sınırlı operatör olsun.

$A: H \rightarrow H$ operatörü için $A^* = A$ ise yani, A operatörü $\forall x, y \in H, \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ şartını sağlarsa *öz eşlenik operatördür* denir (Krein, 1972).

Örnek 1.1.4.

$H = L_2[0,1]$, $Ax = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$ ile A operatörünü tanımlansın. A operatörünün öz

eşlenik olması durumu incelensin.

Çözüm:

$$\langle Ax, y \rangle = \int_0^1 Ax(t) \overline{y(t)} dt = \int_0^1 \int_0^1 K(t,s) x(s) ds \overline{y(t)} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^1 K(t,s) x(s) \overline{y(t)} dt ds = \int_0^1 x(s) \int_0^1 K(t,s) \overline{y(t)} dt ds \\
&= \int_0^1 x(s) \int_0^1 \overline{K(t,s)} y(t) dt ds = \int_0^1 x(s) \int_0^1 \overline{K(t,s)} y(t) dt ds \\
&= \langle x, A^* y \rangle.
\end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
A^* y(s) &= \int_0^1 \overline{K(t,s)} y(t) dt \\
A^* y(t) &= \int_0^1 \overline{K(s,t)} y(s) ds.
\end{aligned}$$

Böylece,

$$A = A^* \Leftrightarrow \overline{K(s,t)} = K(t,s)$$

olduğu görülür.

Tanım 1.1.11. A öz eşlenik bir operatör olsun. Eğer H Hilbert uzayının her $x \neq 0$ elemanı için

$\langle Ax, x \rangle \geq \delta \langle x, x \rangle$ ($\delta > 0$) eşitsizliği doğru ise A operatörüne *pozitif tanımlı* operatör denir.

ÖEPTO olan A operatörün $f(A)$ fonksiyonunun normu için

$$\|f(A)\| \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} |f(\lambda)|$$

kestirim geçerlidir (Krein, 1972).

n herhangi bir doğal sayı olmak üzere R^n Öklid uzayında $\Omega = (0,1)^n$ birim açık küpü ele alınsın.

$$S_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n)^t \mid x_k = 0, x_m \in [0, 1], k \neq m, 1 \leq k, m \leq n\}$$

$$S_2 = \{x = (x_1, \dots, x_n)^t \mid x_k = 1, x_m \in (0, 1], k \neq m, 1 \leq k, m \leq n\}$$

olmak üzere küpün sınırını $\partial\Omega = S = S_1 \cup S_2$ ve kapanışını $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ ile belirlensin. $\bar{\Omega}$ kümesinde tanımlanan kuadratik integrallenebilen fonksiyonlardan oluşan $H = L_2(\bar{\Omega})$ Hilbert uzayında her u fonksiyonu için norm,

$$\|u\|_{L_2(\bar{\Omega})} = \left\{ \int_{x \in \Omega} |u(x)|^2 dx_1 \dots dx_n \right\}^{1/2}$$

formundadır.

Sobolev genelleştirilmiş kısmi türev operatörü $D_{ij}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ ile gösterilir. Buna göre,

$W_2^2(\bar{\Omega})$ Sobolev uzayındaki fonksiyonların normu

$$\|v\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} = \|v\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \left\{ \int_{x \in \bar{\Omega}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |D_{ij}^2 v(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

şeklinde alınacaktır.

q bir doğal sayı, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q \in (0, 1), k_1, k_2, \dots, k_q, \sigma > 0$ gerçekte sayılar ve $\sum_{i=1}^q k_i \leq 1$

olmak üzere $\psi: \bar{\Omega} \rightarrow R^1, \varphi: \bar{\Omega} \rightarrow R^1, p: \Omega \rightarrow R^1, f: (0, T) \times \Omega \rightarrow R^1, a_r: \Omega \rightarrow R^+ (1 \leq r \leq n)$ fonksiyonları verilmiş olsun.

$[0, 1] \times \Omega$ bölgesinde tanımlanan u fonksiyonu

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) \right) + \sigma u(t, x) = p(x) + f(t, x), \quad 0 < t < 1, x \in \Omega, \quad (1.1.1)$$

eliptik diferansiyel denklemi sağlamış olsun. u fonksiyonunun kısmi türevleri

$$u_t(0, x) = \varphi(x) \quad (1.1.2)$$

$$u_i(1, x) = \sum_{i=1}^q k_i u_i(\lambda_i, x) + \psi(x) \quad (1.1.3)$$

sınır koşullarını sağlamış olsun. Bu tip koşullara *Neumann tipindeki* veya *2. tip çok noktalı lokal olmayan koşullar* denir.

$0 \leq t \leq 1, x \in \partial\Omega$, \vec{n} normal vektör olmak üzere u fonksiyonunun (t, x) noktasındaki normal \vec{n} vektöre göre kısmi türevi $\frac{\partial u(t, x)}{\partial \vec{n}}$ ile belirlenir. u fonksiyonu için

$$u(t, x) = 0, x \in \partial\Omega, 0 \leq t \leq 1 \quad (1.1.4)$$

koşuluna *Dirichlet koşulu*,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t, x) = 0, x \in \partial\Omega, 0 \leq t \leq 1 \quad (1.1.5)$$

koşuluna *Neumann koşulu* denir. u fonksiyonu için

$$u(t, x) = 0, x \in S_1, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t, x) = 0, x \in S_2, 0 \leq t \leq 1 \quad (1.1.6)$$

koşuluna *Dirichlet-Neumann karışık sınır koşulu* ve

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t, x) = 0, x \in S_1, u(t, x) = 0, x \in S_2, 0 \leq t \leq 1 \quad (1.1.7)$$

koşuluna *Neumann-Dirichlet karışık sınır koşulu* denir.

1.2. Literatür Taraması

Ek koşullarla birlikte verilen matematiksel fizik denklemleri kurtarma problemleri mühendisliğin ve fiziğin farklı uygulamalı alanlarında geniş olarak kullanılmaktadır.

Üst belirli eliptik sınır değer problemlerini araştırmak için Fourier serileri yöntemi, Fourier ve Laplace integral yöntemleri gibi klasik yöntemler sabit katsayılı durumlarda uygulanabilir.

Kısmi diferansiyel denklemler için ters problemler için yaklaşım yöntemlerinden en çok kullanılan yöntem operatör yaklaşımını uygulayan sonlu farklar yöntemi olduğu bilinmektedir (Kabanikhin, 2011).

Eliptik denklemler için farklı üst belirli sınır değer problemler ve onların yaklaşımları Orlovsky, 2013; Ashyralyyev ve Dedetürk, 2013; Ashyralyyev, 2014; Ashyralyyev ve Dedetürk, 2015; Ashyralyyev ve Akyüz, 2016; Ashyralyyev, 2017; Ashyralyyev, Akyüz ve Dedetürk, 2017; makalelerde incelenmiştir.

Neumann tipi lokal olmayan sınır değer problemlerin iyi tanımlılığı Ashyralyyev ve Tetikoglu, 2012; Ashyralyyev ve Tetikoglu, 2013; Ashyralyyev, 2017; Ashyralyyev ve Çay, 2018 makalelerde araştırılmıştır.

Ashyralyyev, 2014 makalesinde, bilinmeyen $p \in H$ eleman ve $u(\cdot)$ fonksiyonu için

$$\begin{cases} -u_{tt}(t) + Au(t) = f(t) + p, & 0 < t < T, \\ u_t(0) = \varphi, \quad u_t(T) = \psi, \quad u_t(\lambda) = \zeta, & \lambda \in (0, T) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Neumann tipindeki ters eliptik problemin çözümü için kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiş. Bu makalede, (1.2.1) probleminin yaklaşımı için BMDFŞ ve İMDFŞ sunulmuştur. Fark şemaların çözümleri için kararlılık analizi yapılmıştır.

Ashyralyyev ve Akkan, 2015 makalede, çok boyutlu eliptik denklemler için karışık sınır değer koşullarıyla ters problemin yaklaşımları araştırılmıştır.

Ashyralyyev, 2017 makalede, $\varphi, \psi, \zeta \in H$ verilen elemanlar ve $f(\cdot)$ bilinen sürekli fonksiyon olmak üzere bilinmeyen $p \in H$ eleman ve $u(\cdot)$ fonksiyon için

$$\begin{cases} -u_{tt}(t) + Au(t) = p + f(t), & 0 < t < T, \\ u_t(0) = \varphi, \quad u(\lambda_0) = \zeta, \\ u_t(T) = \psi + \sum_{i=1}^q k_i u_t(\lambda_i) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

ikinci tür sınır şartlı ve Neumann tipi ek şartlı ters problem araştırılmıştır. (1.2.2) problemin çözümü için kararlılık eşitsizlikleri sunulmuştur. BMDFŞ'nın çözümü için kararlılık ve koersif kararlılık eşitsizlikleri kanıtlanmıştır.

Ashyralyyev ve Çay, 2018 makalede ve Çay, 2018 Yüksek Lisans tezinde $\varphi, \psi, \zeta \in H$ verilen elemanlar ve $\alpha(\cdot), f(\cdot)$ bilinen sürekli fonksiyonlar olmak üzere bilinmeyen $p \in H$ elemanı ve $u(\cdot)$ fonksiyonu için

$$\left\{ \begin{array}{l} -u''(t) + Au(t) = p + f(t), \quad 0 < t < T, \\ u_t(0) = \varphi, \quad u(\lambda_0) = \zeta, \\ u_t(T) = \int_0^T \alpha(\lambda) u_\lambda(\lambda) d\lambda + \psi \end{array} \right.$$

integral koşullu Neumann tipindeki eliptik üst belirli sınır değer problemin iyi tanımlılığı araştırılmıştır. Yaklaşık çözüm için BMDFŞ sunulmuştur. Fakat integral koşulu ile verilen Neumann tipindeki sınır değer problemlerin iyi tanımlılığı incelenmiştir. Ama Neumann tipi üst belirli problemler yeterince araştırılmamıştır. Karışık sınır değer problemlerin çözümleri ve yaklaşık çözümleri için kararlılık soruları açıktır. Tezde alınacak sonuçlar bu boşluğu doldurulmasına yönlendirilecektir.

Bu iste, eliptik kısmi diferansiyel denklemler için Neumann tipi çok noktalı Dirichlet-Neumann ve Neumann-Dirichlet karışık sınır değer problemleri ele alınmıştır. Problemlerin çözümleri için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Sabit katsayılı örneklerde Fourier seri yöntemiyle, Fourier ve Laplace integral dönüşüm yöntemleriyle çok noktalı karışık sınır değer problemleri örneklerin çözümleri bulunmuştur.

Üst belirli çok noktalı Dirichlet-Neumann ve Neumann-Dirichlet karışık sınır değer problemlerin yaklaşımları için BMDFŞ ve İMDFŞ kurulmuştur. Fark şemaların çözümü için kararlılık kestirimleri oluşturulmuştur.

İki değişkenli eliptik denklem için Neumann tipi çok noktalı Dirichlet-Neumann ve Neumann-Dirichlet karışık sınır değer problemlerinin çözümlerini belirlemek için bir algoritma ve MATLAB programındaki kodlar verilmiştir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Üst Belirli Neumann Tipi Çok Noktalı Lokal Olmayan Sınır Değer Problemi

H Hilbert uzayı ve $A: H \rightarrow H$ bir sınırlı ÖEPTO ve $D(A)$ onun tanım bölgesi olsun.

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q \in (0, T), T > 0$ ve k_1, k_2, \dots, k_q gerçekte sayılar verildiğini,

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_q < T$ ve

$$\sum_{i=1}^q k_i \leq 1 \quad (2.1.1)$$

şartlarını sağlandığı kabul edilsin. $C(H)$ Banach uzayındaki $u: [0, T] \rightarrow H$ düzgün fonksiyonun normu

$$\|u\|_{C(H)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H$$

ile tanımlanır. Şimdi $C^\alpha(H)$ ve $C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ ile belirlenen Banach uzaylarını tanımlansın.

$[0, T]$ kapalı aralıkta tanımlanan düzgün H değerli $u(t)$ fonksiyonların normları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\|u\|_{C^\alpha(H)} = \|u\|_{C(H)} + \sup_{0 \leq t \leq T} s^{-\alpha} \|u(t+s) - u(t)\|$$

$$\|u\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} = \|u\|_{C(H)} + \sup_{0 \leq t \leq T} (t+s)^\alpha (T-t)^\alpha s^{-\alpha} \|u(t+s) - u(t)\|_H.$$

A sınırlı ÖEPTO olduğuna göre $B = A^{\frac{1}{2}}$ operatörü aynı özelliklere sahiptir.

Önerme 2.1.1. Aşağıdaki kestirimler geçerlidir (Ashyralyev ve Sobolevski, 2004).

$$\|Be^{-tB}\|_{H \rightarrow H} \leq t^{-\alpha}, 0 \leq \alpha \leq 1, t > 0, \left\| (I - e^{-2TB})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta)$$

$$\begin{aligned} \left\| B^\beta \left(e^{-tB} - e^{-(t+\tau)B} \right) \right\|_{H \rightarrow H} &\leq M(\delta) \frac{\tau^\alpha}{(t+\tau)^{\alpha+\beta}}, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1, 0 < t \leq t+\tau \leq T \\ \left\| (I + e^{-\lambda B})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} &\leq M(\lambda), \left\| (I - e^{-\lambda B})^{-1} \right\|_{H \rightarrow H} \leq M(\lambda), 0 < \lambda \leq T. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Ashyralyyev, 2017 makalede, $\varphi, \psi, \zeta \in D(A^{\frac{1}{2}})$ ve $f(\cdot)$ sürekli fonksiyon olmak üzere bilinmeyen $p \in H$ eleman ve $u(\cdot) \in C^2([0, T], H) \cap C([0, T], D(A))$ fonksiyon için

$$\begin{cases} -u_t(t) + Au(t) = p + f(t), 0 < t < T, \\ u_t(0) = \varphi, u(\lambda_0) = \zeta \\ u_t(T) = \sum_{i=1}^q k_i u_t(\lambda_i) + \psi \end{cases} \quad (2.1.3)$$

üst belirli lokal olmayan çok noktalı sınır değer problemi incelenmiştir. (2.1.3) üst belirli lokal olmayan çok noktalı sınır değer problemin çözümünün varlığı ve çözüm için kararlılık, koersitif kararlılık teoremleri Ashyralyyev, 2017 makalede sunulmuştur.

Teorem 2.1.1.

A sınırlı öz eşlenik pozitif tanımlı bir operatör, $\varphi, \psi, \zeta \in D(A) \cap D(A^{\frac{1}{2}})$, $f(t) \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ ($0 < \alpha < 1$) ve k_1, k_2, \dots, k_q katsayılar (2.1.1) şartı altında olduğu varsayılın. $M(\delta)$ pozitif sabit $\alpha, \varphi, \psi, \zeta, f(t)$ ’e bağlı olmamak üzere (2.1.3) üst belirli problemin çözümü için

$$\|u\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \|\zeta\|_H + \|f\|_{C(H)} + \|B^{-1}\varphi\|_H + \|B^{-1}\psi\|_H + \|B^{-1}\zeta\|_H \right] \quad (2.1.4)$$

$$\|A^{-1}p\|_H \leq M(\delta) \left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \|\zeta\|_H + \|f\|_{C(H)} \right] \quad (2.1.5)$$

$$\|p\|_H \leq M(\delta) \left[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \|A\zeta\|_H + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} \right] \quad (2.1.6)$$

kestirimleri doğrudur (Ashyralyyev, 2017).

İspat:

$Q = (I - e^{-2TB})^{-1}$ olmak üzere,

$$G(t, s) = -(2B)^{-1} Q \left[e^{-(2T-t-s)B} + e^{-(t+s)B} + e^{-(2T-|t-s|)B} + e^{-|t-s|B} \right]$$

fonksiyonu

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = f(t), & t \in (0, T), \\ v_t(0) = \varphi, \quad v_t(T) = \zeta \end{cases} \quad (2.1.7)$$

şeklindeki ikinci tip sınır değer koşullu eliptik problemin Green fonksiyonudur. Eğer $\varphi, \zeta \in D(B), f(\cdot) \in C^1([0, T], H)$ ise, (2.1.7) problemin çözümü,

$$v(t) = -Q \left[e^{-tB} + e^{-(2T-t)B} \right] B^{-1} \varphi + Q \left[e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right] B^{-1} \zeta + \int_0^T G(t, s) f(s) ds$$

şeklinde bulunur (Orlovsky, 2013). Ayrıca,

$$\begin{aligned} v_t(t) &= Q \left[e^{-tB} - e^{-(2T-t)B} \right] \varphi + Q \left[e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B} \right] \zeta + F(B, f | t) \\ F(B, f | t) &= \frac{Q}{2} \int_0^T e^{-(t+s)B} f(s) ds - \frac{Q}{2} \int_0^T e^{-(2T-t-s)B} f(s) ds \\ &\quad + \frac{Q}{2} \int_0^t e^{-(t-s)B} f(s) ds - \frac{Q}{2} \int_0^t e^{-(2T-t+s)B} f(s) ds \\ &\quad - \frac{Q}{2} \int_t^T e^{-(s-t)B} f(s) ds + \frac{Q}{2} \int_t^T e^{-(2T+t-s)B} f(s) ds \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

olur. (2.1.3) probleminin çözümü,

$$u(t) = A^{-1}(p) + v(t)$$

biçiminde aranır. Burada $v(\cdot)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} -v_{tt}(t) + Av(t) = f(t), & t \in (0, T), \\ v_t(T) = \sum_{i=1}^q k_i v_t(\lambda_i) + \psi, v_t(0) = \varphi \end{cases} \quad (2.1.9)$$

şeklindeki yardımcı lokal olmayan sınır değer problemin çözümüdür. (2.1.8) formülünü (2.1.9) koşuluna uygulandığında bilinmeyen $v_t(T)$ için,

$$\begin{aligned} & \left\{ I - \sum_{i=1}^q k_i Q \left[e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right] \right\} v_t(T) \\ &= \sum_{i=1}^q k_i \left\{ Q \left[e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B} \right] \varphi + F(B, f | \lambda_i) \right\} + \psi \end{aligned}$$

denklem elde edilir.

Ashyrayev ve Öztürk, 2012 makalesinde,

$$D = I - \sum_{i=1}^q k_i Q \left(e^{-(T-\lambda_i)B} - e^{-(T+\lambda_i)B} \right)$$

ile tanımlanan operatörün tersinin varlığı ve onun normu için

$$\|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta)$$

kestirimi ispatlanmıştır. (2.1.3) problemin çözümü

$$\begin{aligned}
v(t) = & -Q \left[e^{-tB} + e^{-(2T-t)B} \right] B^{-1} \varphi - Q \left[e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right] \\
& \times D^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^q k_i \left[Q \left(e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B} \right) B^{-1} \varphi + B^{-1} F(B, f | \lambda_i) \right] + B^{-1} \psi \right\} \\
& + \int_0^T G(t, s) f(s) ds = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t)
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= -Q \left[e^{-tB} + e^{-(2T-t)B} \right] B^{-1} \varphi \\
I_2(t) &= -Q \left[e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right] D^{-1} \sum_{i=1}^q k_i Q \left(e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B} \right) B^{-1} \varphi \\
I_3(t) &= -Q \left[e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right] D^{-1} \sum_{i=1}^q k_i B^{-1} F(B, f | \lambda_i) \\
I_4(t) &= -Q \left[e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right] D^{-1} B^{-1} \psi.
\end{aligned}$$

Operatör normunun tanımını (2.1.2) ve üçgen eşitsizlikleri (2.1.10)'nun 1.terimine kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|I_1(t)\|_{C(H)} &\leq \left\| Q \left[e^{-tB} + e^{-(2T-t)B} \right] \right\|_{C(H)} \|B^{-1} \varphi\|_H \\
&\leq \|Q\|_{C(H)} \left[\|e^{-tB}\|_{C(H)} + \|e^{-(2T-t)B}\|_{C(H)} \right] \|B^{-1} \varphi\|_H \\
&\leq M(\delta) \|B^{-1} \varphi\|_H
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

elde edilir. Benzer şekilde 2. terimi için

$$\begin{aligned}
\|I_2(t)\|_{C(H)} &\leq \left\| Q \left[e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right] D^{-1} \right\|_{C(H)} \left\| \sum_{i=1}^q k_i Q \left(e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B} \right) B^{-1} \varphi \right\|_H \\
&\leq \|Q\|_{C(H)} \left[\|e^{-(T-t)B}\|_{C(H)} + \|e^{-(T+t)B}\|_{C(H)} \right] \|D^{-1}\|_{C(H)} \\
&\quad \times \sum_{i=1}^q |k_i| \left\| Q \left(e^{-\lambda_i B} - e^{-(2T-\lambda_i)B} \right) \right\|_{H \rightarrow H} \|B^{-1} \varphi\|_H
\end{aligned}$$

$$\leq M_1(\delta) \sum_{i=1}^q |k_i| \|B^{-1}\phi\|_H \leq M(\delta) \|B^{-1}\phi\|_H. \quad (2.1.12)$$

Şimdi,

$$\begin{aligned} \|F(B, f | t)\|_{C(H)} &\leq \left\| \frac{Q}{2} \right\|_{C(H)} \int_0^T \left[\|e^{-(t+s)B}\|_{C(H)} + \|e^{-(2T-t-s)B}\|_{C(H)} \right] \|f\|_{C(H)} ds \\ &\quad + \left\| \frac{Q}{2} \right\|_{C(H)} \int_0^t \left[\|e^{-(t-s)B}\|_{C(H)} + \|e^{-(2T-t+s)B}\|_{C(H)} \right] \|f\|_{C(H)} ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \|Q\|_{C(H)} \int_t^T \left[\|e^{-(s-t)B}\|_{C(H)} + \|e^{-(2T+t-s)B}\|_{C(H)} \right] \|f\|_{C(H)} ds \\ &\leq M(\delta) \|f\|_{C(H)} \end{aligned}$$

kestirim alınır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \|I_3(t)\|_{C(H)} &\leq \left\| Q \left[e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right] D^{-1} \right\|_{C(H)} \left\| \sum_{i=1}^q k_i B^{-1} F(B, f | \lambda_i) \right\|_H \\ &\leq \|Q\|_{C(H)} \left[\|e^{-(T-t)B}\|_{C(H)} + \|e^{-(T+t)B}\|_{C(H)} \right] \|D^{-1}\|_{C(H)} \\ &\quad \times \|B^{-1}\|_H \sum_{i=1}^q |k_i| \|F(B, f | \lambda_i)\|_H \leq M(\delta) \|f\|_{C(H)} \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

olur. (2.1.2) ve üçgen eşitsizlikleri kullanırsa,

$$\begin{aligned} \|I_4(t)\|_{C(H)} &\leq \left\| Q \left[e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right] \right\|_{C(H)} \|D^{-1} B^{-1} \psi\|_H \\ &\leq \|Q\|_{C(H)} \left[\|e^{-(T-t)B}\|_{C(H)} + \|e^{-(T+t)B}\|_{C(H)} \right] \|D^{-1}\|_H \|B^{-1} \psi\|_H \\ &\leq M(\delta) \|B^{-1} \psi\|_H \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^T G(t,s) f(s) ds \right\|_{C(H)} &\leq \int_0^T \|G(t,s)\|_{C(H)} \cdot \|f\|_{C(H)} ds \\
&\leq \int_0^T \|e^{-(t+s)B}\|_{C(H)} \cdot \|f\|_{C(H)} ds + \int_0^T \|e^{-(2T-t-s)B}\|_{C(H)} \cdot \|f\|_{C(H)} ds \\
&\quad + \int_0^T \|e^{-(2T-|t-s|)B}\|_{C(H)} \cdot \|f\|_{C(H)} ds + \int_0^T \|e^{-|t-s|B}\|_{C(H)} \cdot \|f\|_{C(H)} ds \\
&\leq M(\delta) \cdot \|f\|_{C(H)}
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

kestirimler elde edilir. Böylece, (2.1.10) formülünden, (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14), (2.1.15) eşitsizliklerinden ve üçgen eşitsizliğinden (2.1.4) kestirimin gerçekliğine ulaşılır.

$$A^{-1}(p) = u(\lambda_0) - v(\lambda_0) = \zeta - v(\lambda_0)$$

formülü, (2.1.4) ve üçgen eşitsizliğinden (2.1.5) alınır. (2.1.6) eşitsizliğinin ispatı

$$\begin{aligned}
p &= A\zeta + Qe^{-\lambda_0 B} \left[I + e^{-2(T-\lambda_0)B} \right] B\varphi - Qe^{-(T-\lambda_0)B} \left[I + e^{-2\lambda_0 B} \right] D^{-1} \\
&\quad \times \left\{ BF(B, f | \lambda_i) + \sum_{i=1}^q k_i \left[Qe^{-\lambda_i B} \left(I - e^{-2(T-\lambda_i)B} \right) B\varphi \right] + B\psi \right\} \\
&\quad + A \int_0^T G(t,s) f(s) ds
\end{aligned}$$

formülüne ve (2.1.2) eşitsizliklerine dayanır.

Teorem 2.1.2. A sınırlı öz eşlenik pozitif tanımlı bir operatör, $\varphi, \psi, \zeta \in D(A) \cap D(A^{\frac{1}{2}})$, $f(t) \in C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)$ ($0 < \alpha < 1$) ve k_1, k_2, \dots, k_q katsayılar (2.1.1) şartı altında olduğunu varsayalım. $M(\delta)$ pozitif sabit $\alpha, \varphi, \psi, \zeta, f(t)$ 'e bağlı olmamak üzere (2.1.3) üst belirli problemin çözümü için

$$\|u''\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|Au\|_{C_{0T}^{\alpha, \alpha}(H)} + \|p\|_H$$

$$\leq M(\delta) \left[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \|A\zeta\|_H + \left\| A^{\frac{1}{2}}\varphi \right\|_H + \left\| A^{\frac{1}{2}}\psi \right\|_H + \left\| A^{\frac{1}{2}}\zeta \right\|_H + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_{0T}^{\alpha,\alpha}(H)} \right]$$

koersitif eşitsizlik geçerlidir.

Ashyralyyev, 2017 makalede (2.1.3) ters eliptik problemin yaklaşımı için BMDFŞ ve İMDFŞ kurulmuştur. Fark şemalar için kararlılık hem de koersif kararlılık eşitsizlikleri kanıtlanmıştır. Çok boyutlu eliptik denklemler için birinci ve ikinci tip sınır değer problemlere yukarıdaki ifade edilen soyut teoremler uygulanmıştır.

2.2. İki Boyutlu Neumann Tipi Çok Noktalı Karışık Sınır Değer Problemlerin Analitik Çözümleri

Bu kısımda, sabit katsayılı lineer eliptik denklem için Neumann tipi çok noktalı karışık sınır değer problemlerin çözümleri Fourier serileri metodu, Fourier integral yöntemi ve Laplace integral yöntemi uygulanarak çözülecektir.

İlk olarak, Fourier serileri metodu kullanılarak bir problemin çözümü ele alınsın.

Örnek 2.2.1.

Bilinmeyen iki değişkenli w ve bir değişkenli p fonksiyonlar için aşağıdaki Neumann tipi lokal olmayan şartlı Neumann-Dirichlet karışık sınır değer problemin çözümü Fourier serileri metodu kullanılarak bulunsun:

$$\left\{ \begin{array}{l} -w_{tt} - w_{xx} + w = e^{-\pi t} \cos \frac{3\pi x}{2} \left(\frac{5\pi^2}{4} + 1 \right) + p(x), \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < 1, \\ w_t(0, x) = -\pi \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ w_t(1, x) = \frac{1}{5} w_t\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{2}{5} w_t\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{2}{5} w_t\left(\frac{3}{4}, x\right) \\ + \left(-e^{-\pi} + \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{5} + \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}}}{5} + \frac{2e^{-\frac{3\pi}{4}}}{5} \right) \pi \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ w\left(\frac{1}{2}, x\right) = \left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 \right) \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ w_x(t, 0) = 0, \quad w_x(t, 1) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1. \end{array} \right. \quad (2.2.1)$$

Çözüm:

Problemın çözümünü $w(t, x) = u(t, x) + A^{-1}p$ şeklinde aranacaktır. Burada A operatördür ve $Au(t, x) = -u_{xx}(t, x) + u(t, x)$ şeklindedir. $u(t, x)$ fonksiyonu iki kısma ayrılır.

$$u(t, x) = v(t, x) + q(t, x) \quad (2.2.2)$$

Burada $v(t, x)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} -v_{tt} - v_{xx} + v = 0, & 0 < t < 1, 0 < x < 1, \\ v_t(0, x) = -\pi \cos \frac{3\pi x}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ v_t(1, x) = \frac{1}{5}v_t\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{2}{5}v_t\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{2}{5}v_t\left(\frac{3}{4}, x\right) \\ + \pi \left(-e^{-\pi} + \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{5} + \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}}}{5} + \frac{2e^{-\frac{3\pi}{4}}}{5} \right) \cos \frac{3\pi x}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ v_x(t, 0) = 0, \quad v(t, 1) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

problemın çözümü ve $q(t, x)$ fonksiyonu,

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q = e^{-\pi t} \cos \frac{3\pi x}{2} \left(\frac{5\pi^2}{4} + 1 \right), & 0 < t < 1, 0 < x < 1, \\ q_t(0, x) = 0, & 0 < x < 1, \\ q_t(1, x) = \frac{1}{5}q_t\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{2}{5}q_t\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{2}{5}q_t\left(\frac{3}{4}, x\right), & 0 < x < 1, \\ q_x(t, 0) = 0, \quad q(t, 1) = 0, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.2.4)$$

problemın çözümüdür. Değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak (2.2.3) problemi çözülür. $v(t, x) = T(t).X(x) \neq 0$ ifadesi formunda çözüm aranır. Kısmi türev alarak ve (2.2.3) 'deki ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{-T''(t)+T(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0 \text{ veya}$$

$$\frac{-T''(t)+T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (2.2.5)$$

elde edilir.

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X'(0) = 0, X(1) = 0 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

şeklindeki Sturm-Liouville problemi elde edilmiş olur.

Eğer $\lambda \geq 0$ ise (2.2.6) sınır-değer probleminin sadece $X(x) = 0$ aşıkâr çözümü vardır. Bu durumda öz değer ve öz fonksiyon yoktur.

Eğer $\lambda < 0$ ise (2.2.6) sınır-değer probleminin aşıkâr olmayan çözümü,

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{-\lambda}x$$

şeklindedir.

$$X'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow \cos \sqrt{-\lambda} = 0 \quad \lambda_k = -\frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2, k=1,2,\dots$$

$C_1 = 1$ olarak alınsın. Böylece, $\lambda_k = -\frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2, k=1,2,\dots$ öz değerler vardır. Öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonları

$$X_k(x) = \cos \frac{\pi(2k+1)}{2}x, \quad k=1,2,\dots$$

şeklindedir. Şimdi (2.2.5) te öz değerleri yerine yazılsın. O halde,

$$-T''(t) + T(t)(1 - \lambda_k) = 0$$

olur. Adi diferansiyel denklem için karakteristik denklemi

$$-\mu^2 + \left(1 + \frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2\right) = 0$$

olduğuna göre, karakteristikler

$$\mu_{k,1} = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2}, \mu_{k,2} = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2}$$

şeklindedir. Genel çözüm A_k ve B_k keyfi sabitler olmak üzere

$$T_k(t) = A_k e^{\mu_{k,1}t} + B_k e^{\mu_{k,2}t}$$

formunda yazılabilir. Buna göre, (2.2.3) problemin çözümü

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x)$$

olur. $T_k(t)$ ve $X_k(x)$ değerleri yerine yazılarak,

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\mu_{k,1}t} + B_k e^{\mu_{k,2}t} \right) \cos \frac{\pi(2k+1)}{2} x$$

elde edilir. Türev alınırsa,

$$v_t(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\mu_{k,1}t} \mu_{k,1} - B_k e^{-\mu_{k,1}t} \mu_{k,1} \right) \cos \frac{\pi(2k+1)x}{2}$$

olur.

$$v_t(0, x) = -\pi \cos \frac{3\pi}{2} x$$

koşulu ve

$$v_t(1, x) = \frac{1}{5} v_t\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{2}{5} v_t\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{2}{5} v_t\left(\frac{3}{4}, x\right) - \pi \left(-e^{-\pi} + \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{5} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{5} + \frac{2e^{-\frac{3\pi}{4}}}{5} \right) \cos \frac{3\pi x}{2}$$

lokal olmayan koşulu kullanılarak,

$$A_k = B_k = 0, k = 2, 3, \dots$$

elde edilir. $k = 1$ ve $t = 0$ için

$$v_t(0, x) = \left(A_1 \sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2} - B_1 \sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2} \right) \cos \frac{3\pi}{2} x = -\pi \cos \frac{3\pi}{2} x$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2} (A_1 - B_1) = -\pi$$

olur. $L = \sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2}$ olarak alınsın.

$$A_1 - B_1 = -\frac{\pi}{L}$$

$$A_1 = B_1 - \frac{\pi}{L}$$

olur. Lokal olmayan koşula göre,

$$\begin{aligned}
v_t(1, x) &= (A_1 e^L L - B_1 e^{-L} L) \cos \frac{3\pi x}{2} \\
&= \frac{1}{5} \left(A_1 e^{\frac{L}{4}} L - B_1 e^{-\frac{L}{4}} L \right) \cos \frac{3\pi x}{2} \\
&\quad + \frac{2}{5} \left(A_1 e^{\frac{L}{2}} L - B_1 e^{-\frac{L}{2}} L \right) \cos \frac{3\pi x}{2} \\
&\quad + \frac{1}{5} \left(A_1 e^{\frac{3L}{4}} L - B_1 e^{-\frac{3L}{4}} L \right) \cos \frac{3\pi x}{2} \\
&\quad + \left(-e^{-\pi} + \frac{1}{5} e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{3\pi}{4}} \right) \pi \cos \frac{3\pi x}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sadeleştirme yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&A_1 L \left[e^L - \frac{1}{5} e^{\frac{L}{4}} - \frac{2}{5} e^{\frac{L}{2}} - \frac{2}{5} e^{\frac{3L}{4}} \right] - B_1 L \left[e^{-L} - \frac{1}{5} e^{-\frac{L}{4}} - \frac{2}{5} e^{-\frac{L}{2}} - \frac{2}{5} e^{-\frac{3L}{4}} \right] \\
&= - \left(-e^{-\pi} + \frac{1}{5} e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{3\pi}{4}} \right) (-\pi)
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
q_0 &= e^L - \frac{1}{5} e^{\frac{L}{4}} - \frac{2}{5} e^{\frac{L}{2}} - \frac{2}{5} e^{\frac{3L}{4}}, \\
q_1 &= e^{-L} - \frac{1}{5} e^{-\frac{L}{4}} - \frac{2}{5} e^{-\frac{L}{2}} - \frac{2}{5} e^{-\frac{3L}{4}}, \\
q_3 &= - \left(-e^{-\pi} + \frac{1}{5} e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{3\pi}{4}} \right) (-\pi)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A_1 L q_0 - B_1 L q_1 = q_3$$

veya

$$A_1 q_0 - B_1 q_1 = \frac{q_3}{L}$$

elde edilir. Şimdi,

$$A_1 - B_1 = -\frac{\pi}{L} \text{ ifadesi kullanılırsa,}$$

$$B_1 q_0 - \frac{\pi q_0}{L} - B_1 q_1 = \frac{q_3}{L} \quad B_1 (q_0 - q_1) = \frac{1}{L} (q_3 + \pi q_0)$$

olur. Buna göre, A_1 ve B_1 katsayıları

$$B_1 = \frac{1}{q_0 - q_1} \frac{q_3 + \pi q_0}{L} \quad A_1 = \frac{1}{q_0 - q_1} \frac{q_3 + \pi q_0}{L} - \frac{\pi}{L}$$

$$A_1 = \frac{1}{q_0 - q_1} \frac{\pi (q_0 - 1) + q_3}{L}$$

şeklinde bulunur. Sonuçta, $v(t, x)$ fonksiyonu

$$v(t, x) = \left[\left(\frac{1}{q_0 - q_1} \frac{\pi (q_0 - 1) + q_3}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2}} \right) e^{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2} t} + \left(\frac{1}{q_0 - q_1} \frac{q_3 + \pi q_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2}} \right) e^{-\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2} t} \right] \cos \frac{3\pi}{2} x$$

şeklinde elde edilir.

(2.2.4) probleminin çözümüne geçilirse, problemin çözümü, $C_k(t)$ keyfi t 'ye bağlı fonksiyonlar olmak üzere

$$q(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) \cos \frac{\pi(2k+1)}{2} x$$

şeklinde aranır. Birinci ve ikinci mertebeden türev alınarak (2.2.4) problemin diferansiyel

denkleminde yerine yazılırsa,

$$-q_{tt} - q_{xx} + q = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-C_k''(t) + C_k(t) \left(\frac{\pi(2k+1)}{2} \right)^2 + C_k(t) \right) \cos \frac{\pi(2k+1)}{2} x = e^{-\pi t} \cos \frac{3\pi}{2} x \left(\frac{5\pi^2}{4} + 1 \right)$$

elde edilir. Buna göre, $k \neq 1$ indis için

$$-C_k''(t) + C_k(t) \left(\frac{\pi(2k+1)}{2} \right)^2 + C_k(t) = 0$$

alınır. Yani,

$$-C_k''(t) + C_k(t) \left(1 + \left(\frac{\pi(2k+1)}{2} \right)^2 \right) = 0$$

İkinci mertebeden adi diferansiyel denkleminin çözümü, n_1 ve n_2 keyfi sabitler ve

$$\mu_k = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi(2k+1)}{2} \right)^2}$$

olmak üzere

$$C_k(t) = n_1 e^{\mu_k t} + n_2 e^{-\mu_k t}$$

şeklindedir. Türev alınarak,

$$C_k'(t) = n_1 e^{\mu_k t} \mu_k - n_2 e^{-\mu_k t} \mu_k$$

elde edilir. Sınır şartı kullanılırsa,

$$C_k'(0) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece,

$$n_1 - n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = n_2$$

elde edilir.

$$q_t(1, x) = \frac{1}{5} q_t\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{2}{5} q_t\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{2}{5} q_t\left(\frac{3}{4}, x\right), \quad 0 < x < 1$$

şeklindeki lokal olmayan sınır şartına göre,

$$C_k'(1) = \frac{1}{5} C_k'\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{2}{5} C_k'\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{2}{5} C_k'\left(\frac{3}{4}, x\right)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} C_k'(1) &= n_1 e^{\mu_k} \mu_k - n_2 e^{-\mu_k} \mu_k = \frac{1}{5} \left(n_1 e^{\frac{\mu_k}{4}} \mu_k - n_2 e^{-\frac{\mu_k}{4}} \mu_k \right) \\ &\quad + \frac{2}{5} \left(n_1 e^{\frac{\mu_k}{2}} \mu_k - n_2 e^{-\frac{\mu_k}{2}} \mu_k \right) + \frac{2}{5} \left(n_1 e^{\frac{3\mu_k}{4}} \mu_k - n_2 e^{-\frac{3\mu_k}{4}} \mu_k \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Sadeleştirmeler ve

$$a = \mu_k \left[e^{\mu_k} - \frac{1}{5} e^{\frac{\mu_k}{4}} - \frac{2}{5} e^{\frac{\mu_k}{2}} - \frac{2}{5} e^{\frac{3\mu_k}{4}} \right]$$

$$b = \mu_k \left[e^{-\mu_k} - \frac{1}{5} e^{-\frac{\mu_k}{4}} - \frac{2}{5} e^{-\frac{\mu_k}{2}} - \frac{2}{5} e^{-\frac{3\mu_k}{4}} \right]$$

notasyonlar yapılırsa,

$$n_1 a - n_2 b = 0$$

alınır. Yani,

$$n_1 a - n_1 b = 0 \Rightarrow n_1 (a - b) = 0 \Rightarrow n_1 = 0, n_2 = 0$$

bulunur. Dolayısıyla, $k \neq 1$ için $C_k(t) = 0$ olur.

$k = 1$ için ise

$$-C_1''(t) + C_1(t) \left(1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 \right) = e^{-\pi t} \left(\frac{5\pi^2}{4} + 1 \right)$$

olur. Homojen olmayan ikinci mertebeden adi diferansiyel denkleminin çözümü, $C_{1h}(t)$ homojen denkleminin genel çözümü ve $C_{1\phi}(t)$ homojen olmayan denklemin bir özel çözümü olmak üzere $C_1(t) = C_{1h}(t) + C_{1\phi}(t)$ şeklindedir. $C_{1\phi}(t) = d_3 e^{-\pi t}$ formunda özel çözüm aranır. Birinci ve ikinci mertebeden türev alınarak denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} C_{1\phi}'(t) &= -d_3 \pi e^{-\pi t} & C_{1\phi}''(t) &= d_3 \pi^2 e^{-\pi t} \\ -d_3 \pi^2 e^{-\pi t} + d_3 e^{-\pi t} \left(1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 \right) &= e^{-\pi t} \left(\frac{5\pi^2}{4} + 1 \right) \\ d_3 \left(1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 - \pi^2 \right) &= \left(\frac{5\pi^2}{4} + 1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $d_3 = 1$ olduğu görülür. Böylece, özel çözüm, $C_{1\phi}(t) = e^{-\pi t}$ şeklinde olur. Homojen denklemin çözümü eklenerek çözüm,

$$\begin{aligned} C_1(t) &= d_1 e^{Lt} + d_2 e^{-Lt} + e^{-\pi t} \\ L &= \sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Türev alınırsa,

$$C_1'(t) = d_1 e^{Lt} L - d_2 e^{-Lt} L - \pi e^{-\pi t}$$

olur. Sınır koşulu kullanılarak,

$$C_1'(0) = 0 \Rightarrow L(d_1 - d_2) = \pi \Rightarrow d_1 - d_2 = \frac{\pi}{L}$$

elde edilir. Buna göre,

$$d_1 = d_2 + \frac{\pi}{L}$$

bulunur. Şimdi,

$$C_1'(1) = \frac{1}{5}C_1'\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{2}{5}C_1'\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{2}{5}C_1'\left(\frac{3}{4}, x\right)$$

lokal olmayan sınır koşulu kullanılarak,

$$\begin{aligned} C_1'(1) &= d_{1h}e^L L - d_{2h}e^{-L} L - \pi e^{-\pi} = \frac{1}{5} \left(d_1 e^{\frac{L}{4}} L - d_2 e^{-\frac{L}{4}} L - \pi e^{-\frac{\pi}{4}} \right) \\ &\quad + \frac{2}{5} \left(d_1 e^{\frac{3L}{4}} L - d_2 e^{-\frac{3L}{4}} L - \pi e^{-\frac{3\pi}{4}} \right) + \frac{2}{5} \left(d_1 e^{\frac{L}{2}} L - d_2 e^{-\frac{L}{2}} L - \pi e^{-\frac{\pi}{2}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Düzenlemeler yapılırsa,

$$d_1 L q_0 - d_2 L q_1 = -\pi \left(-e^{-\pi} + \frac{1}{5} e^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{3\pi}{4}} \right)$$

$$L(d_1 q_0 - d_2 q_1) = -q_3$$

$$d_1 q_0 - d_2 q_1 = -\frac{q_3}{L}$$

$$d_2 q_0 + \frac{\pi q_0}{L} - d_2 q_1 = -\frac{q_3}{L}$$

$$d_2 (q_0 - q_1) = \frac{-\pi q_0 - q_3}{L}$$

elde edilir. Böylece, d_1 ve d_2 katsayıları

$$d_2 = \frac{1}{q_0 - q_1} \frac{(-\pi q_0 - q_3)}{L}$$

$$d_1 = \frac{1}{q_0 - q_1} \frac{\pi(1 - q_0) - q_3}{L}$$

olarak bulunur. Bulunan katsayılar yerine yazılırsa,

$$C_1(t) = \left(\frac{1}{q_0 - q_1} \frac{\pi(1 - q_0) - q_3}{L} \right) e^{Lt} + \left(\frac{1}{q_0 - q_1} \frac{(-\pi q_0 - q_3)}{L} \right) e^{-Lt} + e^{-\pi t}$$

elde edilir. Buna göre, (2.2.4) 'ün çözümü,

$$q(t, x) = \left[\left(\frac{1}{q_0 - q_1} \frac{\pi(1 - q_0) - q_3}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}} \right) e^{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} t} + \left(\frac{1}{q_0 - q_1} \frac{(-\pi q_0 - q_3)}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}} \right) e^{-\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} t} + e^{-\pi t} \right] \cos \frac{3\pi}{2} x$$

şeklinde olur.

$u(t, x)$ fonksiyonu $u(t, x) = v(t, x) + q(t, x)$ şeklindeydi. Şimdi bulunan $v(t, x)$ ve $q(t, x)$ yerine yazılırsa,

$$u(t, x) = \left[\left(\frac{1}{q_0 - q_1} \frac{\pi(q_0 - 1) + q_3}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}} \right) e^{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} t} + \left(\frac{1}{q_0 - q_1} \frac{\pi q_0 + q_3}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}} \right) e^{-\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} t} \right] \cos \frac{3\pi}{2} x$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{q_0 - q_1} \frac{\pi(1 - q_0) - q_3}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}} \right) e^{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} t} + \left(\frac{1}{q_0 - q_1} \frac{(-\pi q_0 - q_3)}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}} \right) e^{-\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} t} + e^{-\pi t} \right] \cos \frac{3\pi}{2} x$$

veya

$$u(t, x) = e^{-\pi t} \cos \frac{3\pi}{2} x$$

elde edilir.

$w(t, x)$ (2.2.1) problemin çözümü olmak üzere, her x için p fonksiyonun değeri,

$$p(x) = Aw\left(\frac{1}{2}, x\right) - Au\left(\frac{1}{2}, x\right)$$

formülü ile bulunur. (2.2.1) probleminde

$$w\left(\frac{1}{2}, x\right) = \left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right) \cos \frac{3\pi}{2} x$$

şeklindeydi. Birinci ve ikinci mertebeden türev alınarak,

$$w_x\left(\frac{1}{2}, x\right) = -\frac{3\pi}{2} \left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right) \sin \frac{3\pi}{2} x \quad w_{xx}(t, x) = -\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right) \cos \frac{3\pi}{2} x$$

elde edilir.

$$u(t, x) = e^{-\pi t} \cos \frac{3\pi}{2} x$$

fonksiyonunun x değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri alınırsa,

$$u_x(t, x) = -\frac{3\pi}{2} e^{-\pi t} \sin \frac{3\pi}{2} x \quad u_{xx}(t, x) = -\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 e^{-\pi t} \cos \frac{3\pi}{2} x$$

olur. $Aw\left(\frac{1}{2}, x\right)$ değeri,

$$Aw\left(\frac{1}{2}, x\right) = -w_{xx}\left(\frac{1}{2}, x\right) + w\left(\frac{1}{2}, x\right)$$

formülü ile bulunur. Yani,

$$Aw\left(\frac{1}{2}, x\right) = \left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right) \cos \frac{3\pi}{2} x \left(1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$Au(t, x) = -u_{xx}(t, x) + u(t, x)$$

olduğuna göre,

$$Au\left(\frac{1}{2}, x\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} \cos \frac{3\pi}{2} x \left(1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)$$

bulunur. Böylece, p fonksiyonun değeri,

$$p(x) = \cos \frac{3\pi}{2} x \left(1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\right)$$

şeklindedir. Buna göre,

$$A^{-1}p = w\left(\frac{1}{2}, x\right) - u\left(\frac{1}{2}, x\right) = \left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right) \cos \frac{3\pi}{2} x - e^{-\frac{\pi}{2}} \cos \frac{3\pi}{2} x = \cos \frac{3\pi}{2} x$$

elde edilir. Son olarak, (2.2.1) problemin $w(t, x)$ çözümü

$$w(t, x) = u(t, x) + A^{-1}p = e^{-\pi t} \cos \frac{3\pi}{2} x + \cos \frac{3\pi}{2} x$$

bulunur. Böylece çözüm,

$$w(t, x) = \left(e^{\pi t} + 1 \right) \cos \frac{3\pi}{2} x \text{ ve } p(x) = \cos \frac{3\pi}{2} x \left(1 + \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 \right)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Şimdi, sabit katsayılı lineer eliptik denklem için Neumann tipi çok noktalı karışık sınır değer problemin çözümü Fourier integral yöntemi uygulanarak bir örnekte ele alınsın.

Örnek 2.2.2.

Bilinmeyen iki değişkenli w ve bir değişkenli p fonksiyonlar için aşağıdaki Neumann tipi lokal olmayan şartlı sınır değer probleminin çözümü Fourier integral dönüşüm metodu kullanılarak çözüm bulunsun:

$$\left\{ \begin{array}{l} -w_{tt} - w_{xx} + w = 2e^{-t-x^2} - 4x^2 e^{-t-x^2} + p(x), \quad 0 < t < 1, -\infty < x < \infty, \\ w_t(0, x) = -e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \\ w_t(1, x) = \frac{1}{5} w_t\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{2}{5} w_t\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{2}{5} w_t\left(\frac{3}{4}, x\right) \\ - e^{-x^2} \left(\frac{1}{5} e^{-\frac{1}{4}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{3}{4}} - e^{-1} \right), \quad -\infty < x < \infty, \\ w\left(\frac{1}{2}, x\right) = e^{-\frac{1}{2}-x^2} + e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty \end{array} \right. \quad (2.2.7)$$

Çözüm:

A operatörü $Au(t, x) = -u_{xx}(t, x) + u(t, x)$ şeklinde olmak üzere (2.2.7) probleminin çözümünü, $w(t, x) = u(t, x) + A^{-1}p$ şeklinde aranır. Burada, $u(t, x)$ fonksiyonu,

$$\begin{cases} -u_{tt} - u_{xx} + u = 2e^{-t-x^2} - 4x^2 e^{-t-x^2}, & 0 < t < 1, -\infty < x < \infty, \\ u_t(0, x) = -e^{-x^2}, & -\infty < x < \infty, \\ u_t(1, x) = \frac{1}{5}u_t\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{2}{5}u_t\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{2}{5}u_t\left(\frac{3}{4}, x\right) \\ -e^{-x^2}\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{4}} + \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}e^{-\frac{3}{4}} - e^{-1}\right), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (2.2.8)$$

sınır-değer probleminin çözümüdür. x değişkenine göre Fourier dönüşümü $v(t, s) = F\{u(t, x)\}$ şeklinde ifade edilsin. (2.2.8) denkleminde her iki taraftan Fourier dönüşümü alınarak,

$$v_{tt}(t, s) - (1 + s^2)v(t, s) = F\{-2e^{-t-x^2} + 4x^2 e^{-t-x^2}\} = e^{-t}F\{(e^{-x^2})''\} = -e^{-t}s^2F\{e^{-x^2}\}$$

elde edilir. Buna göre,

$$v_{tt}(t, s) - (1 + s^2)v(t, s) = -e^{-t}s^2F\{e^{-x^2}\}$$

homojen olmayan denklem alınır. Homojen olmayan denklemin özel çözümü, $v_{\partial}(t) = ce^{-t}$ şeklinde aranır. t değişkene göre birinci ve ikinci mertebeden türev alınırsa,

$$v_{\partial}'(t) = -ce^{-t} \quad v_{\partial}''(t) = ce^{-t}$$

elde edilir. Bunlar denklemde yerine yazılırsa,

$$ce^{-t} - (1 + s^2)ce^{-t} = -e^{-t}s^2F\{e^{-x^2}\} \quad -s^2ce^{-t} = -e^{-t}s^2F\{e^{-x^2}\}$$

$$c = F\{e^{-x^2}\},$$

$$v_{\partial}(t) = F\{e^{-x^2}\}e^{-t}$$

elde edilir. Homojen denklemin çözümü ekleyerek,

$$v(t, s) = C_1 e^{\sqrt{1+s^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{1+s^2}t} + e^{-t} F \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

elde edilir.

(2.2.8) problemindeki sınır ve lokal olmayan sınır şartlara da Fourier dönüşümü uygulansın. Birinci sınır şartı Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$v_t(0, s) = -F \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

elde edilir. Lokal olmayan koşula Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$v_t(1, s) = \frac{1}{5} v_t \left(\frac{1}{4}, x \right) + \frac{2}{5} v_t \left(\frac{1}{2}, x \right) + \frac{2}{5} v_t \left(\frac{3}{4}, x \right) - F \left\{ e^{-x^2} \right\} \left(\frac{1}{5} e^{-\frac{1}{4}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{3}{4}} - e^{-1} \right)$$

olur.

$$v_t(t, s) = C_1 e^{\sqrt{1+s^2}t} \sqrt{1+s^2} - C_2 e^{-\sqrt{1+s^2}t} \sqrt{1+s^2} - e^{-t} F \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

olduğuna göre,

$$v_t(0, s) = C_1 \sqrt{1+s^2} - C_2 \sqrt{1+s^2} - F \left\{ e^{-x^2} \right\} = -F \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

alınır. Buna göre,

$$\sqrt{1+s^2} (C_1 - C_2) = 0 \Rightarrow C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2$$

elde edilir. Diğer yandan lokal olmayan sınır şartı kullanılırsa,

$$V_t(1, s) = C_1 e^{\sqrt{1+s^2}} \sqrt{1+s^2} - C_2 e^{-\sqrt{1+s^2}} \sqrt{1+s^2} - e^{-1} F \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \left(C_1 e^{\sqrt{1+s^2} \frac{1}{4}} \sqrt{1+s^2} - C_2 e^{-\sqrt{1+s^2} \frac{1}{4}} \sqrt{1+s^2} - e^{-\frac{1}{4}} F \left\{ e^{-x^2} \right\} \right) \\
&+ \frac{2}{5} \left(C_1 e^{\sqrt{1+s^2} \frac{1}{2}} \sqrt{1+s^2} - C_2 e^{-\sqrt{1+s^2} \frac{1}{2}} \sqrt{1+s^2} - e^{-\frac{1}{2}} F \left\{ e^{-x^2} \right\} \right) \\
&+ \frac{2}{5} \left(C_1 e^{\sqrt{1+s^2} \frac{3}{4}} \sqrt{1+s^2} - C_2 e^{-\sqrt{1+s^2} \frac{3}{4}} \sqrt{1+s^2} + e^{-\frac{3}{4}} F \left\{ e^{-x^2} \right\} \right) \\
&- F \left\{ e^{-x^2} \right\} \left(-e^{-1} + \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{4}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{3}{4}} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sadeleştirmelerden sonra,

$$\begin{aligned}
&C_1 \sqrt{1+s^2} \left(e^{\sqrt{1+s^2}} - \frac{1}{5} e^{\sqrt{1+s^2} \frac{1}{4}} - \frac{2}{5} e^{\sqrt{1+s^2} \frac{1}{2}} - \frac{2}{5} e^{\sqrt{1+s^2} \frac{3}{4}} \right) \\
&- C_2 \sqrt{1+s^2} \left(e^{-\sqrt{1+s^2}} - \frac{1}{5} e^{-\sqrt{1+s^2} \frac{1}{4}} - \frac{2}{5} e^{-\sqrt{1+s^2} \frac{1}{2}} - \frac{2}{5} e^{-\sqrt{1+s^2} \frac{3}{4}} \right) \\
&- F \left\{ e^{-x^2} \right\} \left(-e^{-1} + \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{4}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{3}{4}} \right) - F \left\{ e^{-x^2} \right\} \left(e^{-1} - \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{4}} - \frac{2}{5} e^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{5} e^{-\frac{3}{4}} \right) = 0
\end{aligned}$$

olur. Buna göre,

$$C_1 \sqrt{1+s^2} q_0 - C_2 \sqrt{1+s^2} q_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{1+s^2} (C_1 q_0 - C_2 q_1) = 0$$

$$C_1 = C_2 \Rightarrow \sqrt{1+s^2} (C_1 q_0 - C_1 q_1) = 0 \Rightarrow \sqrt{1+s^2} C_1 (q_0 - q_1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = 0.$$

Yani, $C_1 = C_2 = 0$ elde edilir. O halde,

$$v(t, s) = e^{-t} F \left\{ e^{-x^2} \right\}$$

olur. Şimdi, ters Fourier dönüşümü kullanılırsa,

$$u(t, x) = F^{-1} \left\{ v(t, s) \right\} = F^{-1} \left\{ e^{-t} F \left\{ e^{-x^2} \right\} \right\} = e^{-t} F^{-1} \left\{ F \left\{ e^{-x^2} \right\} \right\} = e^{-t} e^{-x^2}$$

alınır. Buna göre,

$$u(t, x) = e^{-t-x^2}$$

olur. $p(x)$ fonksiyonunun değerini,

$$p(x) = Aw\left(\frac{1}{2}, x\right) - Au\left(\frac{1}{2}, x\right)$$

ile bulunur.

$$w\left(\frac{1}{2}, x\right) = e^{\frac{1}{2}-x^2} + e^{-x^2}$$

şeklindedir. x değişkene göre birinci ve ikinci mertebeden türev alınırsa,

$$w_x\left(\frac{1}{2}, x\right) = -2xe^{\frac{1}{2}-x^2} - 2xe^{-x^2}, \quad w_{xx}\left(\frac{1}{2}, x\right) = -2e^{\frac{1}{2}-x^2} + 4x^2e^{\frac{1}{2}-x^2} - 2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

elde edilir.

$u(t, x)$ fonksiyonun x değişkene göre birinci ve ikinci mertebeden türev alınırsa,

$$u_x(t, x) = -2xe^{-t-x^2} \quad u_{xx}(t, x) = -2e^{-t-x^2} + 4x^2e^{-t-x^2}$$

elde edilir. $Aw(t, x)$ ifadesi

$$Aw(t, x) = -w_{xx}(t, x) + w(t, x)$$

formülü ile hesaplanabilir. $Aw\left(\frac{1}{2}, x\right)$ değeri

$$Aw\left(\frac{1}{2}, x\right) = 3e^{\frac{1}{2}-x^2} - 4x^2 e^{\frac{1}{2}-x^2} + 3e^{-x^2} - 4x^2 e^{-x^2}$$

şeklinde olur. $Au\left(\frac{1}{2}, x\right)$ değeri

$$Au\left(\frac{1}{2}, x\right) = 3e^{\frac{1}{2}-x^2} - 4x^2 e^{\frac{1}{2}-x^2}$$

olarak bulunur. O halde, $p(x) = (3 - 4x^2)e^{-x^2}$ şeklindedir.

$$A^{-1}p(x) = w\left(\frac{1}{2}, x\right) - u\left(\frac{1}{2}, x\right) = e^{\frac{1}{2}-x^2} + e^{-x^2} - e^{\frac{1}{2}-x^2} = e^{-x^2}$$

elde edilir. Böylece,

$$w(t, x) = e^{-t-x^2} + e^{-x^2} \text{ ve } p(x) = (3 - 4x^2)e^{-x^2}$$

şeklinde çözüm bulunmuş olur.

Son olarak, sabit katsayılı lineer eliptik denklem için Neumann tipi çok noktalı karışık sınır değer problemin çözümü Laplace integral dönüşüm metodu uygulanarak bir örnekte incelenir.

Örnek 2.2.3.

Bilinmeyen iki değişkenli w ve bir değişkenli p fonksiyonlar için aşağıdaki Neumann tipi lokal olmayan şartlı Dirichlet- Neumann karışık sınır değer probleminin çözümü Laplace dönüşüm metodu kullanılarak bulunsun:

$$\begin{cases}
-w_{tt} - w_{xx} + w = -e^{-t-x} + p(x) & 0 < t < 1, \quad 0 < x < \infty, \\
w_t(0, x) = -e^{-x}, & 0 < x < \infty, \\
w_t(1, x) = \frac{1}{5} w_t\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{2}{5} w_t\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{2}{5} w_t\left(\frac{3}{4}, x\right) + \left(\frac{1}{5} e^{-\frac{1}{4}-x} + \frac{2}{5} e^{-\frac{1}{2}-x} + \frac{2}{5} e^{-\frac{3}{4}-x}\right) \\
-e^{-1-x}, & 0 < x < \infty, \\
w\left(\frac{1}{2}, x\right) = e^{-\frac{1}{2}-x} + x^2, & 0 < x < \infty, \\
w(t, 0) = e^{-t} \quad w_x(t, 0) = -e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1.
\end{cases}$$

(2.2.9)

Çözüm:

A operatörü her t için $u(t, x)$ fonksiyonuna uygulanırsa $Au(t, x) = -u_{xx}(t, x) + u(t, x)$

olur. $u(t, x)$ fonksiyonu,

$$\begin{cases}
-u_{tt} - u_{xx} + u = -e^{-t-x}, & 0 < t < 1, \quad 0 < x < \infty, \\
u_t(0, x) = -e^{-x}, & 0 < x < \infty, \\
u_t(1, x) = \frac{1}{5} u_t\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{2}{5} u_t\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{2}{5} u_t\left(\frac{3}{4}, x\right) \\
+ \left(\frac{1}{5} e^{-\frac{1}{4}-x} + \frac{2}{5} e^{-\frac{1}{2}-x} + \frac{2}{5} e^{-\frac{3}{4}-x}\right) - e^{-1-x}, & 0 < x < \infty, \\
u(t, 0) = e^{-t} \quad u_x(t, 0) = -e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1
\end{cases}$$

(2.2.10)

sınır-değer problemin çözümü olmak üzere (2.2.9) problemin çözümünü, $w(t, x) = u(t, x) + A^{-1}p$ formunda aransın. x değişkenine göre Laplace dönüşümü,

$$L\{u(t, x)\} = v(t, s)$$

şeklinde göz önüne alınsın. Laplace dönüşümünün özelliklerini kullanılarak, (2.2.9) denkleminde,

$$-v_{tt}(t, s) + (1 - s^2)v(t, s) = -e^{-t} \frac{s^2}{s+1}$$

homojen olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. Homojen olmayan denklemin özel

çözümünü $v_{\partial}(t) = ce^{-t}$ şeklinde aransın. Birinci ve ikinci mertebeden türev alarak bunları diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} v_{\partial}'(t) &= -ce^{-t}, v_{\partial}''(t) = ce^{-t} \\ -ce^{-t} + (1-s^2)ce^{-t} &= -e^{-t} \frac{s^2}{s+1} \\ -s^2ce^{-t} &= -e^{-t} \frac{s^2}{s+1} \\ c &= \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

bulunur. Yani, özel çözüm

$$v_{\partial}(t) = e^{-t} \frac{1}{s+1}$$

şeklinde elde edilir.

Homojen kısmın çözümü eklenerek, C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere, adi diferansiyel denklemin çözümü

$$v(t, s) = C_1 e^{\sqrt{1-s^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{1-s^2}t} + e^{-t} \frac{1}{s+1}$$

şeklinde yazılır.

(2.2.10) problemindeki sınır ve lokal olmayan sınır şartlarına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} v_t(0, s) &= -\frac{1}{s+1} \\ v_t(1, s) &= \frac{1}{5}v_t\left(\frac{1}{4}, s\right) + \frac{2}{5}v_t\left(\frac{1}{2}, s\right) + \frac{2}{5}v_t\left(\frac{3}{4}, s\right) + \left(-e^{-1} + \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{4}} + \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}e^{-\frac{3}{4}}\right) \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$v_t(t, s) = C_1 e^{\sqrt{1-s^2}t} \sqrt{1-s^2} - C_2 e^{-\sqrt{1-s^2}t} \sqrt{1-s^2} - e^{-t} \frac{1}{s+1}$$

olduğuna göre, sınır şartı kullanılarak,

$$\begin{aligned} v_t(0, s) &= C_1 \sqrt{1-s^2} - C_2 \sqrt{1-s^2} - \frac{1}{s+1} = -\frac{1}{s+1} \\ \Rightarrow \sqrt{1-s^2} (C_1 - C_2) &= 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Diğer yandan lokal olmayan sınır şartına Laplace dönüşümü kullanırsa,

$$\begin{aligned} v_t(1, s) &= \left(C_1 e^{\sqrt{1-s^2}} \sqrt{1-s^2} - C_2 e^{-\sqrt{1-s^2}} \sqrt{1-s^2} - e^{-1} \frac{1}{s+1} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(C_1 e^{\sqrt{1-s^2} \frac{1}{4}} \sqrt{1-s^2} - C_2 e^{-\sqrt{1-s^2} \frac{1}{4}} \sqrt{1-s^2} - e^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{s+1} \right) \\ &\quad + \frac{2}{5} \left(C_1 e^{\sqrt{1-s^2} \frac{1}{2}} \sqrt{1-s^2} - C_2 e^{-\sqrt{1-s^2} \frac{1}{2}} \sqrt{1-s^2} - e^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{s+1} \right) \\ &\quad + \frac{2}{5} \left(C_1 e^{\sqrt{1-s^2} \frac{3}{4}} \sqrt{1-s^2} - C_2 e^{-\sqrt{1-s^2} \frac{3}{4}} \sqrt{1-s^2} - e^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{s+1} \right) \\ &\quad + \left(-e^{-1} + \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{4}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} e^{-\frac{3}{4}} \right) \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler ve

$$\begin{aligned} q_0 &= e^{\sqrt{1-s^2}} - \frac{1}{5} e^{\frac{\sqrt{1-s^2}}{4}} - \frac{2}{5} e^{\frac{\sqrt{1-s^2}}{2}} - \frac{2}{5} e^{\frac{3\sqrt{1-s^2}}{4}} \\ q_1 &= e^{-\sqrt{1-s^2}} - \frac{1}{5} e^{-\frac{\sqrt{1-s^2}}{4}} - \frac{2}{5} e^{-\frac{\sqrt{1-s^2}}{2}} - \frac{2}{5} e^{-\frac{3\sqrt{1-s^2}}{4}} \end{aligned}$$

notasyonlar yapılırsa,

$$C_1\sqrt{1-s^2}q_0 - C_2\sqrt{1-s^2}q_1 + \frac{1}{s+1}\left(-e^{-1} + \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{4}} + \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}e^{-\frac{3}{4}} + e^{-1} - \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{4}} - \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}e^{-\frac{3}{4}}\right) = 0$$

elde edilir. Buna göre,

$$C_1\sqrt{1-s^2}q_0 - C_2\sqrt{1-s^2}q_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{1-s^2}(C_1q_0 - C_2q_1) = 0$$

alınır.

$$C_1 = C_2 \Rightarrow \sqrt{1-s^2}(C_1q_0 - C_1q_1) = 0 \Rightarrow \sqrt{1-s^2}C_1(q_0 - q_1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = 0.$$

Yani, $C_1 = C_2 = 0$ olur. O halde, $v(t, s) = e^{-t} \frac{1}{s+1}$ olur.

Ters Laplace dönüşümü kullanılırsa,

$$u(t, x) = L^{-1}\{v(t, s)\} = L^{-1}\left\{e^{-t} \frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t-x}$$

alınır. Böylece, $u(t, x) = e^{-t-x}$ olur. fonksiyonun değeri,

$$p(x) = Aw\left(\frac{1}{2}, x\right) - Au\left(\frac{1}{2}, x\right) \quad p(x)$$

ile bulunur.

$$w\left(\frac{1}{2}, x\right) = e^{-\frac{1}{2}-x} + x^2$$

şeklindedir. x değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden türev alınırsa,

$$w_x(t, x) = -e^{-\frac{1}{2}-x} + 2x \quad w_{xx}(t, x) = e^{-\frac{1}{2}-x} + 2$$

elde edilir. x değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden türev alınırsa,

$$u_x(t, x) = -e^{-t-x} \quad u_{xx}(t, x) = e^{-t-x}$$

elde edilir.

$$Aw\left(\frac{1}{2}, x\right) = -w_{xx}\left(\frac{1}{2}, x\right) + w\left(\frac{1}{2}, x\right)$$

olduğuna göre, $Aw\left(\frac{1}{2}, x\right)$ değeri,

$$Aw\left(\frac{1}{2}, x\right) = -e^{-\frac{1}{2}-x} - 2 + e^{-\frac{1}{2}-x} + x^2 = -2 + x^2$$

şeklinde olur. Ayrıca,

$$Au\left(\frac{1}{2}, x\right) = -e^{-\frac{1}{2}-x} + e^{-\frac{1}{2}-x} = 0$$

olur. O halde $p(x) = -2 + x^2$ şeklindedir.

$$A^{-1}p(x) = w\left(\frac{1}{2}, x\right) - u\left(\frac{1}{2}, x\right) = e^{-\frac{1}{2}-x} + x^2 - e^{-\frac{1}{2}-x} = x^2$$

elde edilir. Buna göre bulunan ifadeler $w(t, x)$ çözümünde yerine yazılırsa,

$$w(t, x) = e^{-t-x} + x^2 \text{ olur.}$$

Sonuç olarak, $w(t, x) = e^{-t-x} + x^2$ ve $p(x) = -2 + x^2$ şeklinde çözüm bulunur.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Üst Belirli Çok Noktalı Neumann- Dirichlet Sınır Değer Eliptik Problemi İçin Birinci ve İkinci Mertebeden Doğruluk Fark Şemaları

n herhangi bir doğal sayı olmak üzere R^n Öklid uzayında $\Omega = (0,1)^n$ birim açık küp ele alınsın. Bu küpün sınırını $\partial\Omega = S = S_1 \cup S_2$ ile belirlensin. Burada,

$$S_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n)^t \mid x_i = 0, x_j \in [0,1], j \neq i, 1 \leq i, j \leq n\}$$

$$S_2 = \{x = (x_1, \dots, x_n)^t \mid x_i = 1, x_j \in (0,1], j \neq i, 1 \leq i, j \leq n\}$$

$$\sum_{i=1}^q k_i \leq 1 \quad (3.1.1)$$

olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q \in (0,1), k_1, k_2, \dots, k_q, \sigma > 0$ sayılar ve

$$a_r : \Omega \rightarrow R^+ \quad (1 \leq r \leq n)$$

$$\psi : \bar{\Omega} \rightarrow R^1, \zeta : \bar{\Omega} \rightarrow R^1$$

$$f : (0,T) \times \Omega \rightarrow R^1$$

fonksiyonlar verilmiş olsun. $[0,1] \times \Omega$ bölgesinde, bilinmeyen $u(t,x)$ ve $p(x)$ fonksiyonlar için

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) \right) + \sigma u(t,x) = p(x) + f(t,x), & 0 < t < 1, x \in \Omega, \\ u_t(0,x) = \varphi(x), u(\lambda_0,x) = \zeta(x), \\ u_t(1,x) = \sum_{i=1}^q k_i u_t(\lambda_i, x) + \psi(x), x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(t,x) = 0, x \in S_1, u(t,x) = 0, x \in S_2, 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Neumann tipi üst belirli çok noktalı Neumann- Dirichlet sınır değer eliptik problemi ele alınsın.

$\bar{\Omega}$ kümesinde tanımlanan kuadratik integrallenebilen fonksiyonlardan oluşan Hilbert uzayı $L_2(\bar{\Omega})$ ile gösterilsin. Bu uzaydaki her v fonksiyon için norm,

$$\|v\|_{L_2(\bar{\Omega})} = \left\{ \int_{x \in \Omega} |v(x)|^2 dx_1 \dots dx_n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir. $\bar{\Omega}$ 'da ikinci mertebeden kısmi türevlerine sahip olan ve kuadratik anlamında integrallenebilen fonksiyonların oluşturduğu Sobolev uzayını $W_2^2(\bar{\Omega})$ ile gösterilsin. Her w fonksiyon için norm,

$$\|w\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} = \left\{ \int_{x \in \Omega} \left(|w(x)|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |w_{x_i x_j}(x)|^2 \right) dx_1 \dots dx_n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

formundadır.

$$D(A^x) = \left\{ u \in W_2^2(\bar{\Omega}) : \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = 0, x \in S_1, u(x) = 0, x \in S_2 \right\}$$

olmak üzere (3.1.2) problemin diferansiyel operatörü

$$A^x u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) + \sigma u \quad (3.1.3)$$

formunda yazılabilir. (3.1.2) problemin çözümü için kararlılık eşitsizlikleri elde edilsin.

$C(L_2(\bar{\Omega}))$ Banach uzayında $\rho : [0,1] \rightarrow L_2(\bar{\Omega})$ fonksiyonun normu

$$\|\rho\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} = \max_{0 \leq t \leq 1} \|\rho(t)\|_{L_2(\bar{\Omega})}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.1.1. k_1, k_2, \dots, k_q katsayıları (3.1.1) koşulu sağladığını, $\varphi, \psi, \zeta \in D(A^x)$ ve $f \in C(L_2(\bar{\Omega}))$ olduğunu varsayalım. O halde, $M(\delta)$ değeri φ, ζ, ψ ve f fonksiyonlardan bağımsız bir pozitif sabit olmak üzere (3.1.2) Neumann tipi üst belirli çok noktalı karışık sınır değer problemin (u, p) çözümü için

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} &\leq M(\delta) \left[\|f\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} + \|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\zeta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right] \\ \|(A^x)^{-1} p\|_{L_2(\bar{\Omega})} &\leq M(\delta) \left[\|f\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} + \|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\zeta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right] \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

kararlılık eşitsizlikleri doğrudur.

Teoremin ispatı $H = L_2(\bar{\Omega})$ için (2.1.4) ve (2.1.5) eşitsizliklerinden elde edilir. Fark şemasını oluşturmak için ağ noktalar uzayları

$$\begin{aligned} [0, 1]_\tau &= \{t_k = k\tau, 0 \leq k \leq N, N\tau = 1\}, \\ \tilde{\Omega}_h &= \{x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n); m = (m_1, \dots, m_n), m_r = \overline{0, M_r}, h_r M_r = 1, r = \overline{1, n}\} \end{aligned}$$

ile gösterilir. Şimdi,

$$S_h^1 = \tilde{\Omega}_h \cap S_1, S_h^2 = \tilde{\Omega}_h \cap S_2, S_h = S_h^1 \cup S_h^2$$

notasyonları kabul edilsin.

$\tilde{\Omega}_h$ grid noktalar uzayındaki $D^h u^h(x) = 0, x \in S_h^1$ ve $u(x) = 0, x \in S_h^2$ koşullarını sağlamış olan $u^h(x)$ grid fonksiyonlarına uygulanılacak

$$A^x u^h = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u^h \right) + \sigma u^h \quad (3.1.5)$$

şeklindeki operatörü A_h^x ile belirlensin. İlk önce bilinmeyen $u^h(t, x)$ ve $p^h(x)$ fonksiyonlar için

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u^h}{dt^2}(t, x) + A_h^x u^h(t, x) = p^h(x) + f^h(t, x), (t, x) \in (0, 1) \times \Omega_h, \\ \frac{du^h}{dt}(0, x) = \varphi^h(x), \\ \frac{du^h}{dt}(1, x) - \sum_{i=1}^q k_i \frac{du^h}{dt}(\lambda_i, x) = \psi^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h \end{cases} \quad (3.1.6)$$

şeklindeki adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$\tilde{\Omega}_h$ grid noktalar kümesi üzerinde tanımlanan $v(h_1 m_1, \dots, h_n m_n)$ grid fonksiyonlardan oluşan $L_{2h} = L_{2h}(\tilde{\Omega}_h)$ Hilbert uzayında her v^h fonksiyonun normunu

$$\|v^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} |v^h(x)|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

biçiminde tanımlansın. Şimdi, $[\cdot]$ en büyük tam sayı fonksiyonu olmak üzere her $i = 0, 1, \dots, q$ indisler için

$$l_i = \left[\frac{\lambda_i}{\tau} \right], \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i$$

sayıları ele alınsın. (3.1.2) problemin yaklaşık çözümü için BMDFS

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u_k^h(x) = p^h(x) + f^h(t_k, x), \\ 1 \leq k \leq N-1, x \in \Omega_h, \\ \frac{u_1^h(x) - u_0^h(x)}{\tau} = \varphi^h(x), \frac{u_N^h(x) - u_{N-1}^h(x)}{\tau} - \sum_{i=1}^q k_i \frac{u_{l_i+1}^h(x) - u_{l_i}^h(x)}{\tau} = \psi^h(x), \\ u_{l_0}^h(x) = \zeta^h(x), x \in \bar{\Omega}_h \end{cases} \quad (3.1.7)$$

formundadır. τ ve $|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$ küçük pozitif sayılar oldukları kabul edilsin.

Şimdi, $\{\omega_k^h\}_0^N$ grid fonksiyonlardan oluşan $C_\tau(L_{2h})$ Banach uzayında grid fonksiyonun normu

$$\left\| \{\omega_k^h\}_0^N \right\|_{C_\tau(L_{2h})} = \max_{0 \leq k \leq N} \|\omega_k^h\|_{L_{2h}}$$

formundadır.

Teorem 3.1.2. k_1, k_2, \dots, k_q katsayılar için (3.1.1) eşitsizliğin doğruluğu varsayalım. O halde, (3.1.7) fark şemasının çözümü için

$$\begin{aligned} \left\| \{u_k^h\}_1^{N-1} \right\|_{C_\tau(L_{2h})} &\leq M(\lambda_1, \dots, \lambda_q, \delta) \left[\left\| \{f_k^h\}_1^{N-1} \right\|_{C_\tau(L_{2h})} + \|\phi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\zeta^h\|_{L_{2h}} \right] \\ \|(A^x)^{-1} p^h\|_{L_{2h}} &\leq M(\lambda_1, \dots, \lambda_q, \delta) \left[\left\| \{f_k^h\}_1^{N-1} \right\|_{C_\tau(L_{2h})} + \|\phi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\zeta^h\|_{L_{2h}} \right] \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

kararlılık kestirimleri geçerlidir.

Burada $M(\lambda_1, \dots, \lambda_q, \delta)$ pozitif sayısı $\tau, h, \phi^h, \psi^h, \zeta^h, \{f_k^h\}_0^N$ değerlerinden bağımsızdır.

Teoremin ispatı A_h^x operatörün L_{2h} Hilbert uzayındaki simetri özelliğine sahipliğinden ve aşağıdaki eliptik fark şemasının çözümü için koersiv kararlılık eşitsizliğinin doğru olduğundan elde edilir.

Teorem 3.1.3. (Sobolevskii, 1975)

$$\begin{cases} A_h^x u^h(x) = \omega^h(x), & x \in \tilde{\Omega}_h, \\ Du^h(x) = 0, & x \in S_h^1, \\ u^h(x) = 0, & x \in S_h^2 \end{cases}$$

eliptik fark problemin çözümü, ω ve h değerlerinden bağımsız bir pozitif M sabit için

$$\sum_{r=1}^n \left\| (u_k^h)_{\bar{x}_r, \bar{x}_r, j_r} \right\|_{L_{2h}} \leq M \left\| \omega^h \right\|_{L_{2h}}$$

şeklindeki koersiv kararlılık eşitsizliğini sağlar. Şimdi,

$$\begin{aligned} \frac{-3u_0^h(x) + 4u_1^h(x) - u_2^h(x)}{2\tau} &= u_t(0, x) + o(\tau^2) \\ \frac{3u_N^h(x) - 4u_{N-1}^h(x) + u_{N-2}^h(x)}{2\tau} &= u_t(1, x) + o(\tau^2) \\ \frac{3u_{l_i+1}^h(x) - 4u_{l_i}^h(x) + u_{l_i-1}^h(x)}{2\tau} + \frac{\mu_i(u_{l_i+1}^h(x) - 2u_{l_i}^h(x) + u_{l_i-1}^h(x))}{\tau} &= u_t(\lambda_i, x) + o(\tau^2) \\ u_{l_0}^h(x) + \mu_0(u_{l_0+1}^h(x) - u_{l_0}^h(x)) &= u(\lambda_0, x) + o(\tau^2) \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

yaklaşık formülleri kullanılarak, (3.1.2) problemine karşılık gelen İMDFŞ yazılırsa,

$$\left\{ \begin{aligned} &-\frac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u_k^h(x) = p^h(x) + f^h(t_k, x), \\ &t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, \\ &\frac{-3u_0^h(x) + 4u_1^h(x) - u_2^h(x)}{2\tau} = \varphi^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \frac{3u_N^h(x) - 4u_{N-1}^h(x) + u_{N-2}^h(x)}{2\tau} \\ &-\sum_{i=1}^q \frac{k_i}{2\tau} \left[(3 + 2\mu_1)u_{l_i+1}^h(x) - (4 + 4\mu_1)u_{l_i}^h(x) + (1 + 2\mu_1)u_{l_i-1}^h(x) \right] = \psi^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ &(1 - \mu_0)u_{l_0}^h(x) + \mu_0 u_{l_0+1}^h(x) = \zeta^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h \end{aligned} \right. \quad (3.1.10)$$

şeklinde olur.

Teorem 3.1.4. k_1, k_2, \dots, k_q katsayılar için (3.1.1) eşitsizliğin doğruluğu varsayılınsın O halde,

(3.1.10) fark şemasının çözümü için

$$\begin{aligned} \left\| \{u_k^h\}_1^{N-1} \right\|_{C_\tau(L_{2h})} &\leq M(\lambda_1, \dots, \lambda_q, \delta) \left[\left\| \varphi^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \psi^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \zeta^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_1^{N-1} \right\|_{C_\tau(L_{2h})} \right] \\ \left\| (A^x)^{-1} p^h \right\|_{L_{2h}} &\leq M(\lambda_1, \dots, \lambda_q, \delta) \left[\left\| \varphi^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \psi^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \zeta^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_1^{N-1} \right\|_{C_\tau(L_{2h})} \right] \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

kararlılık kestirimleri geçerlidir.

Burada $M(\lambda_1, \dots, \lambda_q, \delta)$ pozitif sayısı $\tau, h, \varphi^h, \psi^h, \zeta^h, \{f_k^h\}_0^N$ değerlerinden bağımsızdır.

3.2. Üst Belirli Çok Noktalı Dirichlet-Neumann Sınır Değer Eliptik Problemi İçin Birinci ve İkinci Mertebeden Doğruluk Fark Şemaları

$[0,1] \times \Omega$ bölgesinde, bilinmeyen $u(t, x)$ ve $p(x)$ fonksiyonlar için,

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial x_r} \left(a_r(x) \frac{\partial u}{\partial x_r}(t, x) \right) + \sigma u(t, x) = p(x) + f(t, x), & 0 < t < 1, x \in \Omega, \\ u_t(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(1, x) = \sum_{i=1}^q k_i u_t(\lambda_i, x) + \psi(x), \\ u(\lambda_0, x) = \zeta(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, \quad x \in S_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t, x) = 0, \quad x \in S_2, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

çok noktalı Neumann tipi üst belirli Dirichlet- Neumann karışık sınır değer problemi ele alınsın.

$$D(A^x) = \left\{ u \in W_2^2(\bar{\Omega}) : u(x) = 0, x \in S_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = 0, x \in S_2 \right\}$$

olmak üzere (3.2.1) problemin diferansiyel operatörü (3.1.3) şeklindedir.

Teorem 3.2.1. k_1, k_2, \dots, k_q katsayıları (3.1.1) koşulunu sağladığını, $\varphi, \psi, \zeta \in D(A^x)$

ve $f \in C(L_2(\bar{\Omega}))$ ($0 < \alpha < 1$) olduğunu varsayalım. O halde, $M(\delta)$ değeri φ, ζ, ψ ve f fonksiyonlardan bağımsız bir pozitif sayı olmak üzere (3.2.1) sınır değer problemin (u, p) çözümü için

$$\|u\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} \leq M(\delta) \left[\|f\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} + \|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\zeta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right] \quad (3.2.2)$$

$$\|(A^x)^{-1} p\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leq M(\delta) \left[\|f\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} + \|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\zeta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right] \quad (3.2.3)$$

kararlılık kestirimleri doğrudur. Şimdi (3.2.1) problemin fark şemaları ele alınsın. $\tilde{\Omega}_h$ grid noktalar uzayındaki $u^h(x) = 0, x \in S_h^1$ ve $D^h u(x) = 0, x \in S_h^2$ koşullar altındaki $u^h(x)$ grid fonksiyonlarına uygulanmış olan A_h^x operatörü (3.1.5) biçimindedir. İlk önce bilinmeyen $u^h(t, x)$ ve $p^h(x)$ fonksiyonlar için (3.1.6) adi diferansiyel denklem sistemi alınır. Daha sonra, (3.2.1) problemin yaklaşık çözümü için BMDFŞ

$$\begin{cases} -\frac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u_k^h(x) = p^h(x) + f^h(t_k, x), \\ 1 \leq k \leq N-1, x \in \Omega_h, \\ \frac{u_1^h(x) - u_0^h(x)}{\tau} = \phi^h(x), \frac{u_N^h(x) - u_{N-1}^h(x)}{\tau} - \sum_{i=1}^q k_i \frac{u_{i+1}^h(x) - u_i^h(x)}{\tau} = \psi^h(x), \\ u_{l_0}^h(x) = \zeta^h(x), x \in \bar{\Omega}_h \end{cases} \quad (3.2.5)$$

şeklinde yazılır. Bu taktirde, BMDFŞ'nin çözümü için kararlılık kestirimleri ifade edilebilir.

Teorem 3.2.2. k_1, k_2, \dots, k_q katsayılar için (3.1.1) eşitsizliğin doğruluğunu varsayılınsın. O halde, (3.1.5) BMDFŞ'nin çözümü için aşağıdaki kararlılık eşitsizlikleri doğrudur (Ashyralyev ve Karabey, 2019 makale):

$$\begin{aligned} \left\| \{u_k^h\}_1^{N-1} \right\|_{C_\tau(L_{2h})} &\leq M(\delta, \lambda_1, \dots, \lambda_q) \left[\|\phi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\zeta^h\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_1^{N-1} \right\|_{C_\tau(L_{2h})} \right] \\ \|(A^x)^{-1} p^h\|_{L_{2h}} &\leq M(\delta, \lambda_1, \dots, \lambda_q) \left[\|\phi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\zeta^h\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_1^{N-1} \right\|_{C_\tau(L_{2h})} \right] \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Teoremin ispatı A_h^x operatörü L_{2h} Hilbert uzayındaki simetri özelliğine sahipliğinden ve aşağıdaki eliptik fark şemasının çözümü için koersiv kararlılık eşitsizliğinden elde edilir.

Teorem 3.2.3. (Sobolevskii, 1975)

$$\begin{cases} A_h^x u^h(x) = \omega^h(x), x \in \tilde{\Omega}_h, \\ u^h(x) = 0, x \in S_h^1, \\ Du^h(x) = 0, x \in S_h^2 \end{cases}$$

eliptik fark problemin çözümü , ω ve h değerlerinden bağımsız bir pozitif M sabit için

$$\sum_{r=1}^n \left\| \left(u_k^h \right)_{\bar{x}_r, \bar{x}_r, j_r} \right\|_{L_{2h}} \leq M \left\| \omega^h \right\|_{L_{2h}}$$

şeklindeki koersiv kararlılık eşitsizliğini sağlar. Şimdi, (3.1.9) yaklaşık formülleri kullanılarak, (3.2.1) problemine karşılık gelen İMDFŞ yazılırsa,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u_k^h(x) = f^h(t_k, x) + p^h(x), \\ t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, \\ \frac{-3u_0^h(x) + 4u_1^h(x) - 2u_2^h(x)}{2\tau} = \varphi^h(x), \frac{3u_N^h(x) - 4u_{N-1}^h(x) + 2u_{N-2}^h(x)}{2\tau} \\ -\sum_{i=1}^q \frac{k_i}{2\tau} \left[(3 + 2\mu_1)u_{l_i+1}^h(x) - (4 + 4\mu_1)u_{l_i}^h(x) + (1 + 2\mu_1)u_{l_i-1}^h(x) \right] = \psi^h(x), \\ (1 - \mu_0)u_{l_0}^h(x) + \mu_0 u_{l_0+1}^h(x) = \zeta(x), x \in \tilde{\Omega}_h. \end{array} \right. \quad (3.2.7)$$

şeklinde olur.

Teorem 3.2.4. k_1, k_2, \dots, k_q katsayılar için (3.1.1) eşitsizliğin doğruluğunu varsayalım. O halde, (3.1.7) fark şemasının çözümü için (3.1.11) kararlılık kestirimleri geçerlidir.

3.3. Sayısal Hesaplamalar

Bu bölümde Neumann tipi üst belirli çok noktalı Neumann - Dirichlet ve Dirichlet-Neumann sınır değer eliptik problemlerin sayısal çözümleri ele alınacaktır. Örneklerde BMDFŞ ve İMDFŞ'ları kurulacaktır. Fark şemalarının sayısal çözümleri MATLAB programı kullanılarak ele alınacaktır.

Örnek 3.3.1.

İki değişkenli eliptik denklem için $[0,1] \times [0,1]$ bölgesinde,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left((2 + \sin \pi x + \cos \pi x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right) + u(t, x) = p(x) + f(t, x), \\ 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \\ u_t(1, x) - 0.25u_t(0.25, x) - 0.25u_t(0.5, x) - 0.25u_t(0.75, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(0, x) = \varphi(x), \quad u(0.4, x) = \zeta(x), \\ u(t, 0) = 0, \quad u_x(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

Neumann tipi üst belirli çok noktalı Dirichlet-Neumann sınır değer problemine bakılacaktır. Burada bilinen fonksiyonlar,

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} t \sin \frac{\pi}{2} x + (\cos \frac{\pi}{2} t + 3t) \left(-\frac{\pi^2}{2} \cos \frac{\pi}{2} x \cos \pi x + \frac{\pi^2}{2} \cos \frac{\pi}{2} x \sin \pi x \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{2} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} x \sin \pi x + \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} x \cos \pi x + \sin \frac{\pi}{2} x \right), \\ \varphi(x) &= 0, \quad \zeta(x) = \left(\frac{2}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{16}{5} \right) \sin \frac{\pi}{2} x, \\ \psi(x) &= \left(\left(-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + 3 \right) + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} \left(9 + \frac{3\pi}{4} \right) \right) \sin \frac{\pi}{2} x \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \left(\cos \frac{\pi}{2} t + 3t + 2 \right) \sin \frac{\pi}{2} x \quad \text{ve} \\ p(x) &= -\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} x (\cos \pi x - \sin \pi x) + \frac{\pi^2}{2} \sin \frac{\pi}{2} x (2 + \sin \pi x + \cos \pi x) + 2 \sin \frac{\pi}{2} x \end{aligned}$$

fonksiyonlar çifti (3.3.1) Neumann tipi üst belirli çok noktalı Dirichlet-Neumann sınır değer probleminin çözümü olduğu açıktır. (3.3.1) problemine karşılık gelen yardımcı problem,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left((2 + \sin \pi x + \cos \pi x) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \right) + v(t, x) = f(t, x), \\ 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \\ v_t(1, x) - 0.25v_t(0.25, x) - \frac{1}{4}v_t(0.5, x) - \frac{1}{4}v_t(0.75, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ v_t(0, x) = \varphi(x), \\ v(t, 0) = 0, \quad v_x(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.3.2)$$

olarak yazılır. $h = \frac{1}{M}$ ve $\tau = \frac{1}{N}$ olmak üzere (3.3.1) probleminin yaklaşık çözümü için

$$x_n = nh, \quad 0 \leq n \leq M, \quad \text{ve} \quad t_k = k\tau, \quad 0 \leq k \leq N$$

şeklinde ağ noktaları belirlenir.

$$\lambda_0 = 0.4, \lambda_1 = 0.25, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.75; l_i = \left[\frac{\lambda_i}{\tau} \right], \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i, i = 0, 1, 2, 3$$

notasyonlar yapılır. İlk önce yaklaşık çözüm için (3.1.7) formüllerini kullanılarak,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + \pi(\cos(\pi x_n) - \sin(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} \\ -(2 + \sin(\pi x_n) + \cos(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - u_n^k + p_n = -f(t_k, x_n), \\ k = 1, \dots, N-1, \quad n = 1, \dots, M-1, \\ u_0^k = 0, \quad u_M^k - u_{M-1}^k = 0, \quad k = 0, \dots, N, \quad u_n^1 - u_n^0 = \tau\varphi(x_n), \\ u_n^N - u_n^{N-1} - 0.25(u_n^{l_1+1} - u_n^{l_1}) - 0.25(u_n^{l_2+1} - u_n^{l_2}) - 0.25(u_n^{l_3+1} - u_n^{l_3}) = \tau\psi(x_n), \\ u_n^{l_0} = \zeta_n, \quad n = 0, \dots, M \end{array} \right. \quad (3.3.3)$$

formundaki BMDFŞ ele alınır. (3.3.2) yardımcı problem için BMDFŞ

$$\begin{cases}
\frac{v_n^{k+1} - 2v_n^k + v_n^{k-1}}{\tau^2} + \pi(\cos(\pi x_n) - \sin(\pi x_n)) \frac{v_{n+1}^k - v_{n-1}^k}{2h} \\
-(2 + \sin(\pi x_n) + \cos(\pi x_n)) \frac{v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k}{h^2} - v_n^k = -f(t_k, x_n), \\
k = 1, \dots, N-1, \quad n = 1, \dots, M-1, \\
v_0^k = 0, \quad v_M^k - v_{M-1}^k = 0, \quad k = 0, \dots, N, \quad v_n^1 - v_n^0 = \tau \varphi(x_n), \\
v_n^N - v_n^{N-1} - \frac{1}{4}(v_n^{l_1+1} - v_n^{l_1}) - \frac{1}{4}(v_n^{l_2+1} - v_n^{l_2}) - \frac{1}{4}(v_n^{l_3+1} - v_n^{l_3}) = \tau \psi(x_n), \quad n = 0, \dots, M
\end{cases} \quad (3.3.4)$$

şeklindedir. (3.3.4) fark şemasını

$$v_s = (v_s^0, v_s^1, \dots, v_s^{N-1}, v_s^N)^t, s = n-1, n, n+1$$

vektörler cinsinden,

$$\begin{cases}
A_n v_{n+1} + B_n v_n + C_n v_{n-1} = I \theta_n, \quad n = 1, \dots, M-1, \\
v_0 = \vec{0}, \quad v_M = v_{M-1}
\end{cases} \quad (3.3.5)$$

matris formunda yazılabilir. Burada A_n, B_n ve C_n , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matrisler olup, θ_n , $(N+1) \times 1$ tipinde bir sütun matris ve I , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde birim matristir.

$$A_n = \text{diag}\{0, a_n, a_n, \dots, a_n, 0\} \quad (3.3.6)$$

$$B_n = \begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\
d & b_n & d & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\
0 & d & b_n & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\
M & M & M & M & M & M & M & M & M & M & M & M & M & M & M & M \\
0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & b_n & d & 0 \\
0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & d & b_n & d \\
0 & 0 & 0 & L & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & K & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & L & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & L & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

$$C_n = \text{diag}\{0, c_n, c_n, \dots, c_n, 0\} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2 + \sin \pi x_n + \cos \pi x_n}{h^2} + \frac{\pi(-\sin \pi x_n + \cos \pi x_n)}{2h} \\
b_n &= -\frac{2}{\tau^2} - \frac{2(2 + \sin \pi x_n + \cos \pi x_n)}{h^2} - 1 \\
c_n &= \frac{2 + \sin \pi x_n + \cos \pi x_n}{h^2} - \frac{\pi(-\sin \pi x_n + \cos \pi x_n)}{2h} \\
d &= \frac{1}{\tau^2}
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

$$\theta_n = (\theta_n^0, \theta_n^1, \dots, \theta_n^{N-1}, \theta_n^N)^t, n = \overline{1, M-1}$$

$$\theta_n^0 = \tau \varphi_n, \theta_n^N = \tau \psi_n, n = \overline{1, M-1}$$

$$\theta_n^k = -f(t_k, x_n), k = \overline{1, N-1}, n = \overline{1, M-1}.$$

(3.3.4) denklem sisteminin çözümü her $n = 1, \dots, M-1$ için

$$v_n = \alpha_{n+1} v_{n+1} + \beta_{n+1} \tag{3.3.10}$$

şeklinde aranır (Samarskii ve Nikolaev, 1989). Burada $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{M-1}$ kare $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu matrisler, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{M-1}$ ise $(N+1) \times 1$ boyutlu sütun matrislerdir. $\alpha_1, (N+1) \times (N+1)$ tipindeki sıfır elemanlardan oluşan kare matris ve $\beta_1, (N+1) \times 1$ boyutlu elemanlarının hepsi sıfır olan sütun vektörü olmak üzere $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ matrisleri için,

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= -(B_n + C_n \alpha_n)^{-1} A_n, \\
\beta_{n+1} &= (B_n + C_n \alpha_n)^{-1} (I \theta_n - C_n \beta_n), n = \overline{1, M-1}
\end{aligned}$$

formülleri geçerlidir ve

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0_{(N+1) \times (N+1)}, \beta_1 = 0_{(N+1) \times 1} (\vec{v}_0 = 0), \\
\alpha_M &= I_{(N+1) \times (N+1)}, \beta_M = 0_{(N+1) \times 1} (v_{M-1} = v_M)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Şimdi, (3.3.10) formülünün kullanılması için v_M değerinin bulunması gerekir. Bu nedenle,

$$A_{M-1}v_M + B_{M-1}v_{M-1} + C_{M-1}v_{M-2} = I\theta_{M-1}$$

$$v_M = v_{M-1}$$

$$v_{M-2} = \alpha_{M-1}v_{M-1} + \beta_{M-1}$$

denklem sisteminin çözümü bulunur. İlk önce 1. denklemde 3.denklemden v_{M-2} 'nin değeri yerine yazılırsa

$$A_{M-1}v_M + B_{M-1}v_{M-1} + C_{M-1}(\alpha_{M-1}v_{M-1} + \beta_{M-1}) = I\theta_{M-1}$$

elde edilir. Daha sonra 2. denklem kullanılırsa,

$$v_M = (A_{M-1} + B_{M-1} + C_{M-1}\alpha_{M-1})^{-1} (I\theta_{M-1} - C_{M-1}\beta_{M-1})$$

bulunur. (3.3.2) problemin çözümünü bulduktan sonra p_n değeri

$$p_n = -(2 + \sin \pi x_n + \cos \pi x_n) \left(\frac{\zeta_{n+1} - 2\zeta_n + \zeta_{n-1}}{h^2} - \frac{v_{n+1}^0 - 2v_n^0 + v_{n-1}^0}{h^2} \right) \\ - \pi(-\sin \pi x_n + \cos \pi x_n) \left(\frac{\zeta_{n+1} - \zeta_{n-1}}{2h} - \frac{v_{n+1}^0 - v_{n-1}^0}{2h} \right) + (\zeta_n - v_n^0)$$

formülü ile hesaplanır Şimdi, (3.3.3) fark şemasının çözümü

$$u_n^k = v_n^k - v_n^0 + \zeta_n, k = 0, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M$$

olarak hesaplanabilir.

MATLAB programı kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiştir. Farklı (N,M) = (40,40), (80,80), (160,160), (320,320) değerleri için yaklaşık sayısal çözümün hata analizi (3.3.1.) tablosunda gösterilmiştir.

(3.3.1) ve (3.3.2) problemlerinin gerçek çözümlerinin (t_k, x_n) grid noktasındaki değerleri $u(t_k, x_n)$ ve $v(t_k, x_n)$ olarak alınmıştır. Sayısal çözümler sırasıyla u_n^k ve v_n^k ile belirlenmiştir.

(3.3.1) probleminde belirsiz p fonksiyonunun x_m noktadaki yaklaşık değeri p_m olarak ifade edilmiştir. Gerçek çözümlerin karşılaştırılması için

$$Hata - u_M^N = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left(\sum_{m=1}^{M-1} |u(t_i, x_m) - u_m^i|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Hata - v_M^N = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left(\sum_{m=1}^{M-1} |v(t_i, x_m) - v_m^i|^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.11)$$

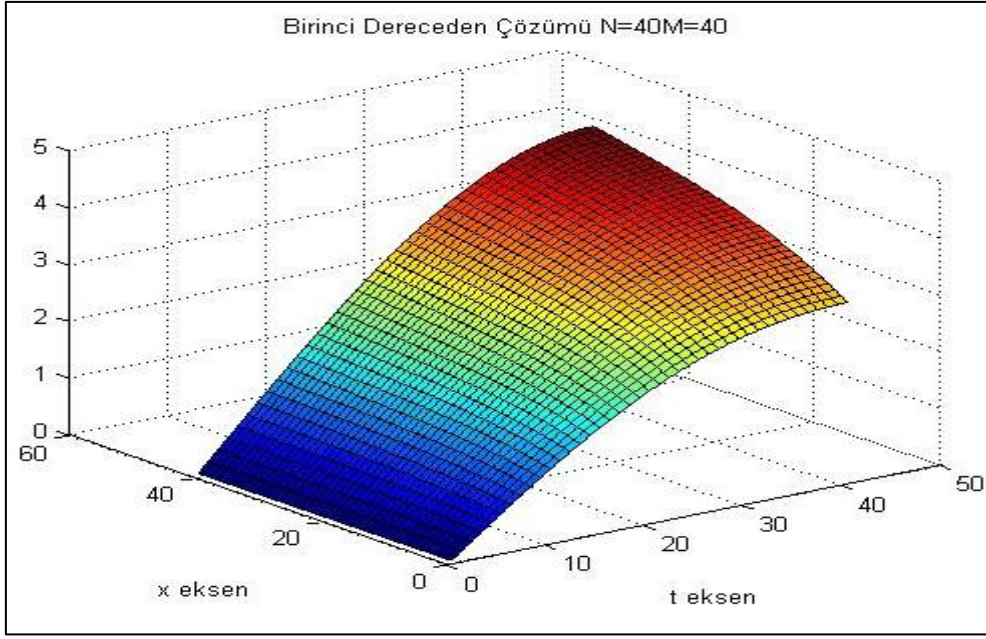
$$Hata - p_M = \left(\sum_{n=1}^{M-1} |p(x_m) - p_m|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

formülleri kullanılmıştır.

Tablo 3.1.'de görüldüğü gibi N ve M değerleri iki katına çıkarsa, BMDFŞ'nın hata değerleri yaklaşık $\frac{1}{2}$ civarında azalmaktadır.

Tablo 3.1. (3.3.3) BMDFŞ'nın hata analizi

	v için hatalar	p için hatalar	u için hatalar
N=40, M=40	0.0204	0.0301	0.0051
N=80, M=80	0.0099	0.0148	0.0024
N=160, M=160	0.0049	0.0073	0.0012
N=320, M=320	0.0024	0.0036	0.0006



Şekil 3.1. (3.3.1) Problemin BMDFŞ'nın yaklaşık çözüm grafiği

(3.1.10) formülleri kullanılarak (3.3.1) problemin yaklaşık çözümü için İMDFŞ

$$\begin{cases}
 \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + \pi(\cos(\pi x_n) - \sin(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} \\
 - (2 + \sin(\pi x_n) + \cos(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - u_n^k - p_n = -f(t_k, x_n), \\
 k = 1, \dots, N-1, \quad n = 1, \dots, M-1, \\
 u_0^k = 0, \quad -3u_M^k + 4u_{M-1}^k - u_{M-2}^k = 0, \quad k = 0, \dots, N, \\
 \frac{-3u_n^0 + 4u_n^1 - u_n^2}{2\tau} = \varphi(x_n), \\
 \frac{u_n^N - u_n^{N-1}}{\tau} - \frac{1}{4\tau} (u_n^{l_1+1} - u_n^{l_1}) - \frac{1}{4\tau} (u_n^{l_2+1} - u_n^{l_2}) - \frac{1}{4\tau} (u_n^{l_3+1} - u_n^{l_3}) = \psi(x_n), \\
 (1 - \mu_0)u_n^{l_0} + \mu_0 u_n^{l_0+1} = \zeta_n, \frac{3u_n^N - 4u_n^{N-1} + u_n^{N-2}}{2\tau} \\
 - \frac{1}{8\tau} ((3 + 2\mu_1)u_n^{l_1+1} - (4 + 4\mu_1)u_n^{l_1} + (1 + 2\mu_1)u_n^{l_1}) \\
 - \frac{1}{8\tau} ((3 + 2\mu_2)u_n^{l_2+1} - (4 + 4\mu_2)u_n^{l_2} + (1 + 2\mu_2)u_n^{l_2}) \\
 - \frac{1}{8\tau} ((3 + 2\mu_3)u_n^{l_3+1} - (4 + 4\mu_3)u_n^{l_3} + (1 + 2\mu_3)u_n^{l_3}) = \psi(x_n), n = 0, \dots, M
 \end{cases} \quad (3.3.12)$$

şeklinde yazılabilir. (3.3.2) yardımcı problem için İMDFŞ

$$\begin{cases}
 \frac{v_n^{k+1} - 2v_n^k + v_n^{k-1}}{\tau^2} + \pi(\cos(\pi x_n) - \sin(\pi x_n)) \frac{v_{n+1}^k - v_{n-1}^k}{2h} \\
 -(2 + \sin(\pi x_n) + \cos(\pi x_n)) \frac{v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k}{h^2} - v_n^k = -f(t_k, x_n), \\
 k = 1, \dots, N-1, \quad n = 1, \dots, M-1, \\
 v_0^k = 0, \quad -3v_M^k + 4v_{M-1}^k - v_{M-2}^k = 0, \quad k = 0, \dots, N, \\
 \frac{-3v_n^0 + 4v_n^1 - v_n^2}{2\tau} = \varphi(x_n), \\
 \frac{3v_n^N - 4v_n^{N-1} + v_n^{N-2}}{2\tau} - \frac{1}{8\tau} \left((3 + 2\mu_1)v_n^{l_1+1} - (4 + 4\mu_1)v_n^{l_1} + (1 + 2\mu_1)v_n^{l_1} \right) \\
 - \frac{1}{8\tau} \left((3 + 2\mu_2)v_n^{l_2+1} - (4 + 4\mu_2)v_n^{l_2} + (1 + 2\mu_2)v_n^{l_2} \right) \\
 - \frac{1}{8\tau} \left((3 + 2\mu_3)v_n^{l_3+1} - (4 + 4\mu_3)v_n^{l_3} + (1 + 2\mu_3)v_n^{l_3} \right) = \psi(x_n)
 \end{cases} \quad (3.3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre, fark şeması,

$$\begin{cases}
 A_n v_{n+1} + B_n v_n + C_n v_{n-1} = I\theta_n, \quad n = 1, \dots, M-1, \\
 v_0 = 0, \quad -3v_M + 4v_{M-1} - v_{M-2} = 0
 \end{cases} \quad (3.3.14)$$

matris formunda gösterilebilir. Burada A_n (3.3.6), C_n (3.3.8) şeklindedir. B_n matrisi ise aşağıdaki formdadır:

$$B_n = \begin{bmatrix}
 -3 & 4 & -1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\
 d & b_n & d & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\
 0 & d & b_n & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 \\
 M & M & M & M & M & M & M & M & M & M & 0 & L & 0 & 0 & 0 & L & d & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & L & b_n & d & 0 \\
 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & L & d & b_n & d \\
 0 & 0 & 0 & L & e_{11} & e_{12} & e_{13} & L & e_{21} & e_{22} & e_{23} & L & e_{31} & e_{32} & e_{33} & L & 1 & -4 & 3
 \end{bmatrix} \quad (3.3.15)$$

B_n matrisindeki b_n ve d (3.3.9) ile aynıdır.

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{1+2\mu_1}{4}, e_{12} = 2 + \mu_1, e_{13} = -\frac{3+2\mu_1}{4}, \\ e_{21} &= -\frac{1+2\mu_2}{4}, e_{22} = 1 + \mu_2, e_{23} = -\frac{3+2\mu_2}{4}, \\ e_{31} &= -\frac{1+2\mu_3}{4}, e_{32} = 2 + \mu_3, e_{33} = -\frac{3+2\mu_3}{4} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{M-1}$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{M-1}$ kare $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu matrisler olup, $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{M-2}$ ise $(N+1) \times 1$ boyutlu sütun matrisler olmak üzere (3.3.13) probleminin çözümü

$$v_n = \alpha_n v_{n+1} + \beta_n v_{n+2} + \mathcal{G}_n, \quad n = M-1, \dots, 1 \quad (3.3.16)$$

formülü ile elde edilir.

O elemanları sıfırdan oluşan matris olmak üzere α_n , β_n ve \mathcal{G}_n için

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -(B_n + C_n \alpha_{n-1})^{-1} (A_n + C_n \beta_{n-1}) \\ \beta_n &= O \\ \mathcal{G}_n &= (B_n + C_n \alpha_n)^{-1} (I\theta_n - C_n \mathcal{G}_{n-1}) \quad n = 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

formülleri geçerlidir. Burada,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= O, \quad \beta_1 = O, \quad \mathcal{G}_1 = \vec{0} \\ \alpha_{M-1} &= 4I, \quad \beta_{M-1} = -3I, \quad \mathcal{G}_{M-1} = \vec{0} \\ \alpha_{M-2} &= \frac{8}{3}I, \quad \beta_{M-2} = -\frac{5}{3}I, \quad \mathcal{G}_{M-2} = \vec{0}. \end{aligned}$$

(3.3.16) formülünün hesaplanmasında kullanılması için v_M ve v_{M-1} değerleri bulunmalıdır.

v_M ve v_{M-1} değerleri için

$$A_{M-2}v_{M-1} + B_{M-2}v_{M-2} + C_{M-2}v_{M-3} = I\theta_{M-2}$$

$$A_{M-3}v_{M-2} + B_{M-3}v_{M-3} + C_{M-3}v_{M-4} = I\theta_{M-3}$$

$$v_{M-4} = \alpha_{M-4}v_{M-3} + \beta_{M-4}v_{M-2} + \gamma_{M-4}$$

$$v_{M-2} = -3v_M + 4v_{M-1}$$

$$v_{M-3} = 10v_M - 15v_{M-1} + 6v_{M-2}$$

denklem sistemi yazılabilir. Üçüncü, dördüncü ve beşinci ifadeleri birinci ve ikinci denklemlerde yerine yazıp sadeleştirme işlemleri yapılırsa bilinmeyen v_M ve v_{M-1} için,

$$Q_{11}v_M + Q_{12}v_{M-1} = G_1$$

$$Q_{21}v_M + Q_{22}v_{M-1} = G_2$$

denklem sistemi alınır. Burada,

$$Q_{11} = -3A_{M-2} - 8B_{M-2} - 8C_{M-2}\alpha_{M-3} - 3C_{M+2}\beta_{M-3}$$

$$Q_{12} = 4A_{M-2} + 9B_{M-2} + 9C_{M-2}\alpha_{M-3} + 4C_{M+2}\beta_{M-3}$$

$$Q_{21} = -3B_{M-1} - 8C_{M-1}$$

$$Q_{22} = A_{M-1} + 4B_{M-1} + 9C_{M-1}$$

$$G_1 = I\theta_{M-2} - C_{M-2}g_{M-3}$$

$$G_2 = I\theta_{M-1}.$$

Sonuçta, v_M ve v_{M-1} için,

$$v_M = (Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21})^{-1}(G_1 - Q_{12}Q_{22}^{-1}G_2)$$

$$v_{M-1} = Q_{22}^{-1}(G_2 - Q_{21}v_M)$$

değerler elde edilir. Bu problemin çözümü bulunduğundan sonra p_n değeri

$$\begin{aligned}
p_n = & -\frac{(2 + \sin \pi x_n + \cos \pi x_n)}{h^2} \left\{ \zeta_{n+1} - (\mu_0 v_{n+1}^{l_0+1} - (\mu_0 - 1)v_{n+1}^{l_o} + \zeta_{n-1} \right. \\
& \left. - (\mu_0 v_{n-1}^{l_0+1} - (\mu_0 - 1)v_{n-1}^{l_o}) - 2(\zeta_n - \mu_0 v_n^{l_0+1} - (\mu_0 - 1)v_n^{l_o}) \right\} \\
& - \frac{\pi(-\sin \pi x_n + \cos \pi x_n)}{2h} \left\{ \zeta_{n+1} - (\mu_0 v_{n+1}^{l_0+1} - (\mu_0 - 1)v_{n+1}^{l_o} - \zeta_{n-1} \right. \\
& \left. + (\mu_0 v_{n-1}^{l_0+1} - (\mu_0 - 1)v_{n-1}^{l_o}) \right\} + \zeta_n - \mu_0 v_n^{l_0+1} - (\mu_0 - 1)v_n^{l_o}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir. Daha sonra, (3.3.12) fark şemasının çözümü

$$u_n^k = v_n^k - (\mu_0 v_n^{l_0+1} - (\mu_0 - 1)v_n^{l_o}) + \zeta_n, \quad k = 0, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M$$

olarak belirlenir.

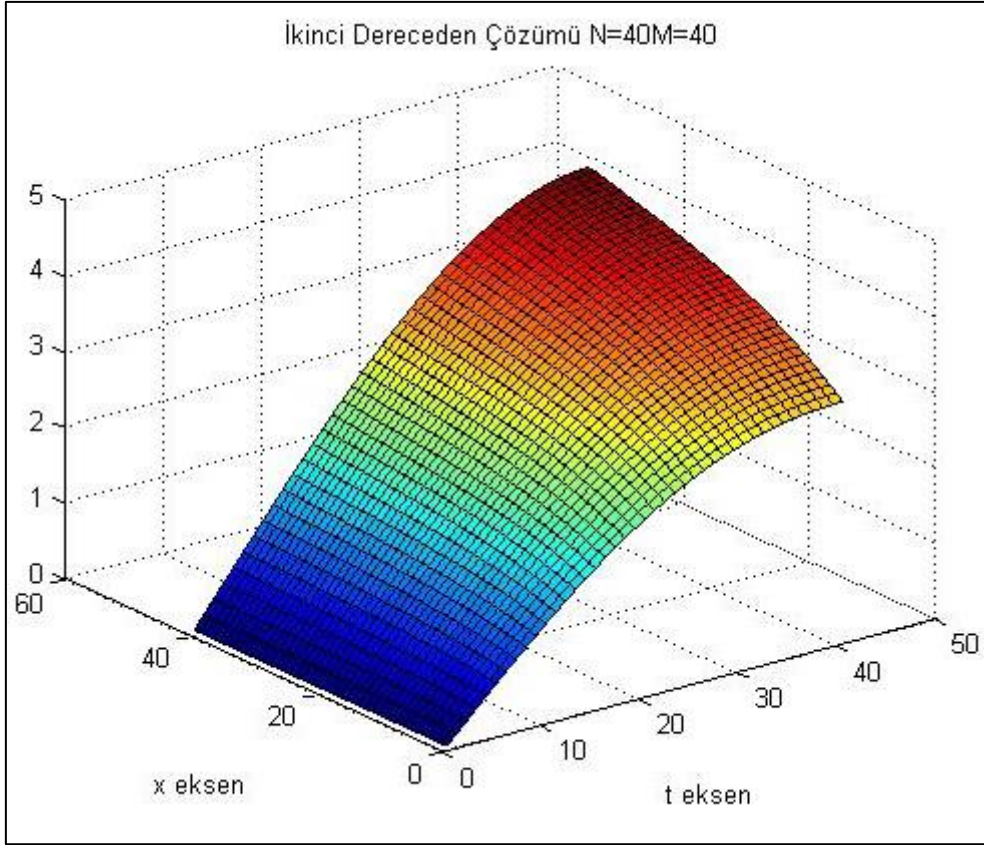
MATLAB programı kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiştir. Farklı (N,M) = (40,40), (80,80), (160,160), (320,320) değerleri için yaklaşık sayısal çözümün hata analizi (3.2.) tablosunda gösterilmiştir.

Hata hesaplaması için (3.3.11) formüller kullanılmıştır.

Tablo 3.2.'de görüldüğü gibi N ve M değerleri iki katına çıkarsa, İMDFŞ'nin hata değerleri yaklaşık ¼ civarında azalmaktadır.

Tablo 3.2. (3.3.12) İMDFŞ'nin hata analizi

	v için hatalar	p için hatalar	u için hatalar
$N = 40, M = 40$	4.12×10^{-4}	1.84×10^{-3}	1.38×10^{-4}
$N = 80, M = 80$	1.23×10^{-4}	3.25×10^{-4}	3.75×10^{-5}
$N = 160, M = 160$	3.39×10^{-5}	5.99×10^{-5}	9.73×10^{-6}
$N = 320, M = 320$	8.91×10^{-6}	1.15×10^{-5}	2.47×10^{-6}



Şekil 3.2. (3.3.1) Problemin İMDFŞ'nın yaklaşık çözüm grafiği

Örnek 3.3.2.

İki değişkenli eliptik denklem için $[0,1] \times [0,1]$ bölgesinde,

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left((2 + \sin \pi x + \cos \pi x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right) + u(t, x) = f(t, x) + p(x), \\ 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \\ u_t(1, x) - 0.25u_t(0.25, x) - 0.25u_t(0.5, x) - \frac{1}{4}u_t(0.75, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(0, x) = \varphi(x), \quad u(0.4, x) = \zeta(x), \\ u_x(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (3.3.17)$$

şeklindeki Neumann tipi üst belirli çok noktalı Neumann-Dirichlet karışık sınır değer problemi ele alınsın.

Burada verilen fonksiyonlar,

$$\begin{aligned}
f(t, x) &= \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} t + \left(\sin \frac{\pi}{2} t + 3t \right) \\
&\times \left[\left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x \right) (\pi \cos \pi x - \sin \pi x) \right. \\
&\left. + \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} x (2 + \cos \pi x + \sin \pi x) + \cos \frac{\pi}{2} x \right] \\
\varphi(x) &= \left(\frac{\pi}{2} + 3 \right) \cos \frac{\pi}{2} x, \quad \zeta(x) = \left(\sin \frac{\pi}{5} + \frac{16}{5} \right) \cos \frac{\pi}{2} x \\
\psi(x) &= \left(\frac{9}{4} - \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{8} \right) \right) \cos \frac{\pi}{2} x
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu durumda,

$$u(t, x) = \left(\sin \frac{\pi}{2} t + 3t + 2 \right) \cos \frac{\pi}{2} x \quad \text{ve}$$

$$p(x) = \pi \sin \frac{\pi}{2} x (\pi \cos \pi x - \sin \pi x) + \frac{\pi^2}{2} \cos \frac{\pi}{2} x (2 + \cos \pi x + \sin \pi x) + 2 \cos \frac{\pi}{2} x$$

fonksiyonlar çifti Neumann tipi üst belirli çok noktalı Dirichlet-Neumann sınır değer probleminin çözümü olduğu açıktır. (3.3.17) probleme karşılık gelen yardımcı problemi

$$\begin{cases}
-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left((2 + \sin \pi x + \cos \pi x) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \right) + v(t, x) = f(t, x), \\
0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \\
v_t(1, x) - 0.25v_t(0.25, x) - 0.25v_t(0.5, x) - 0.25v_t(0.75, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\
v_t(0, x) = \varphi(x), \\
v_x(t, 0) = 0, \quad v(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1
\end{cases} \quad (3.3.18)$$

şeklinde yazılabilir. $h = \frac{1}{M}, \tau = \frac{1}{N}$ olmak üzere (3.3.17) problemin fark şemalarını kurmak için $x_n = nh, 0 \leq n \leq M$ ve $t_k = k\tau, 0 \leq k \leq N$ ağ noktaları belirlenir.

$$\lambda_0 = 0.4, \lambda_1 = 0.25, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.75; l_i = \left\lceil \frac{\lambda_i}{\tau} \right\rceil, \mu_i = \frac{\lambda_i}{\tau} - l_i, i = 0, 1, 2, 3$$

notasyonları yapılır. İlk önce yaklaşık çözüm için (3.1.7) formülleri kullanılarak,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + \pi(\cos(\pi x_n) - \sin(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} \\ -(2 + \sin(\pi x_n) + \cos(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - u_n^k + p_n = -f(t_k, x_n), \\ k = 1, \dots, N-1, \quad n = 1, \dots, M-1, \\ u_1^k - u_0^k = 0, \quad u_M^k = 0, \quad k = 0, \dots, N, \quad u_n^1 - u_n^0 = \tau \varphi(x_n), \\ u_n^N - u_n^{N-1} - 0.25(u_n^{l_1+1} - u_n^{l_1}) - 0.25(u_n^{l_2+1} - u_n^{l_2}) - 0.25(u_n^{l_3+1} - u_n^{l_3}) = \tau \psi(x_n), \\ u_n^{l_0} = \zeta_n, \quad n = 0, \dots, M \end{array} \right. \quad (3.3.19)$$

formundaki BMDFS ele alınır. (3.3.18) yardımcı problemi için BMDFS,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_n^{k+1} - 2v_n^k + v_n^{k-1}}{\tau^2} + \pi(\cos(\pi x_n) - \sin(\pi x_n)) \frac{v_{n+1}^k - v_{n-1}^k}{2h} \\ -(2 + \sin(\pi x_n) + \cos(\pi x_n)) \frac{v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k}{h^2} - v_n^k = -f(t_k, x_n), \\ k = 1, \dots, N-1, \quad n = 1, \dots, M-1, \\ v_n^1 - v_n^0 = \tau \varphi(x_n), \\ v_1^k - v_0^k = 0, \quad v_M^k = 0, \quad k = 0, \dots, N, \\ v_n^N - v_n^{N-1} - 0.25(v_n^{l_1+1} - v_n^{l_1}) - 0.25(v_n^{l_2+1} - v_n^{l_2}) \\ - 0.25(v_n^{l_3+1} - v_n^{l_3}) = \tau \psi(x_n), \quad n = 0, \dots, M \end{array} \right. \quad (3.3.20)$$

şeklindedir. (3.3.20) fark şemasını

$$v_s = (v_s^0, v_s^1, \dots, v_s^{N-1}, v_s^N)^t, \quad s = n-1, n, n+1$$

notasyonu kullanılarak,

$$\begin{cases} A_n v_{n+1} + B_n v_n + C_n v_{n-1} = I \theta_n, n = 1, \dots, M-1 \\ v_1 - v_0 = \vec{0}, \quad v_M = \vec{0} \end{cases}$$

matris formunda yazılabilir. Burada A_n, B_n ve C_n , $(N+1) \times (N+1)$ tipindeki (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8) kare matrisler olup, θ_n , $(N+1) \times 1$ tipinde bir sütun matris ve I , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde birim matristir.

$$\begin{aligned} \theta_n &= (\theta_n^0, \theta_n^1, \dots, \theta_n^{N-1}, \theta_n^N)^t, n = \overline{1, M-1} \\ \theta_n^0 &= \tau \varphi_n, \theta_n^N = \tau \psi_n, n = \overline{1, M-1} \\ \theta_n^k &= -f(t_k, x_n), k = \overline{1, N-1}, n = \overline{1, M-1}. \end{aligned}$$

(3.3.20) denklem sisteminin çözümünü $v_M = \vec{0}$ olmak üzere

$$v_n = \alpha_{n+1} v_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \dots, 1$$

şeklinde aranır. Burada $\alpha_n (n = 1, \dots, M-1)$, $(N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matrisler, $\beta_n (n = 1, \dots, M-1)$ ise $(N+1) \times 1$ tipinde sütun matrislerdir. α_1 , $(N+1) \times (N+1)$ tipindeki birim kare matris ve β_1 , $(N+1) \times 1$ tipindeki tüm elemanları sıfır olan sütun vektörü olmak üzere α_{n+1} , β_{n+1} matrisleri için,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= -(B_n + C_n \alpha_n)^{-1} A_n \\ \beta_{n+1} &= (B_n + C_n \alpha_n)^{-1} (I \theta_n - C_n \beta_n) \quad n = 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

formülleri geçerlidir.

(3.3.20) problemin çözümünü bulduktan sonra p_n değeri

$$\begin{aligned} p_n &= -(2 + \sin \pi x_n + \cos \pi x_n) \left(\frac{\zeta_{n+1} - 2\zeta_n + \zeta_{n-1}}{h^2} - \frac{v_{n+1}^0 - 2v_n^0 + v_{n-1}^0}{h^2} \right) \\ &\quad - \pi(-\sin \pi x_n + \cos \pi x_n) \left(\frac{\zeta_{n+1} - \zeta_{n-1}}{2h} - \frac{v_{n+1}^0 - v_{n-1}^0}{2h} \right) + (\zeta_n - v_n^0) \end{aligned}$$

formülü ile hesaplanır. Şimdi, (3.3.19) fark şemasının çözümü

$$u_n^k = v_n^k - v_n^0 + \zeta_n, k = 0, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M$$

olarak hesaplanabilir.

MATLAB programı kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiştir. Farklı (N,M) = (40,40), (80,80), (160,160), (320,320) değerleri için yaklaşık sayısal çözümün hata analizi (3.3.) tablosunda gösterilmiştir.

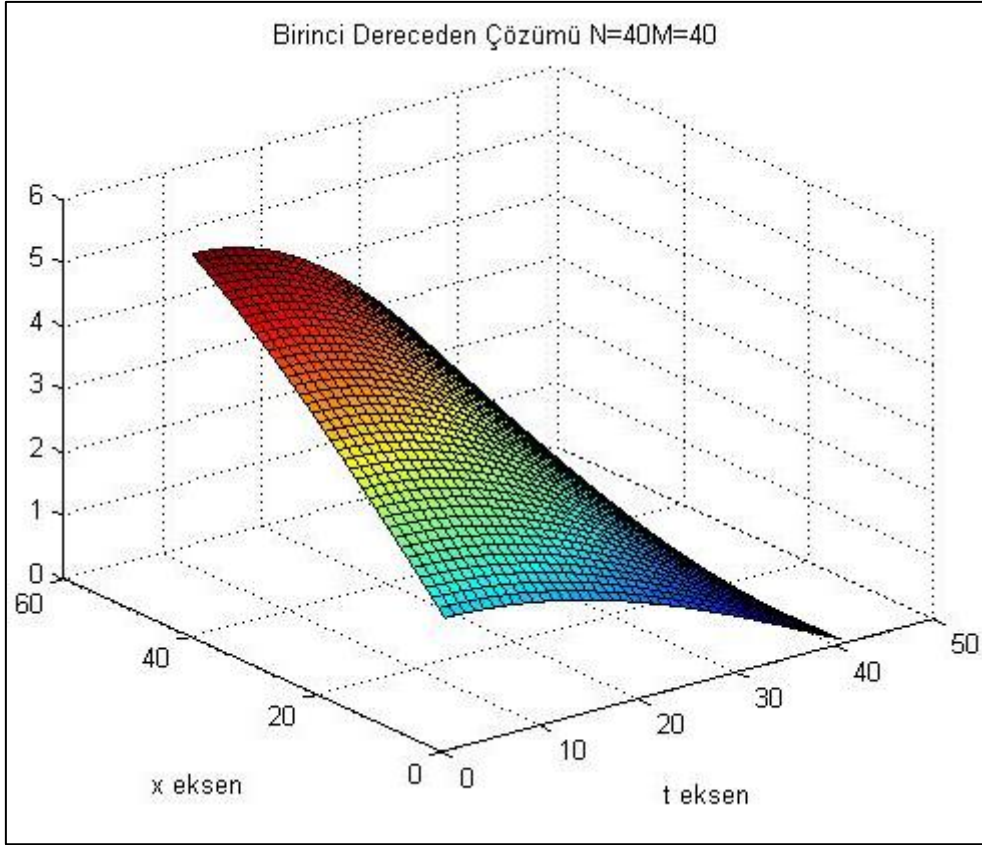
(3.3.17) ve (3.3.18) problemlerinin gerçek çözümlerinin (t_k, x_n) ağ noktasındaki değerleri $u(t_k, x_n)$ ve $v(t_k, x_n)$ olarak alınmıştır. Sayısal çözümler sırasıyla u_n^k ve v_n^k ile belirlenmiştir.

(3.3.17) probleminde belirsiz p fonksiyonunun x_n noktadaki sayısal çözümü p_n olarak ifade edilmiştir. Gerçek çözümlerin karşılaştırılması için (3.3.11) formüller kullanılmıştır.

Tablo 3.3. (3.3.19) BMDFŞ'nin hata analizi

	v için hatalar	p için hatalar	u için hatalar
N=40, M=40	0.093775	0.073708	0.040918
N=80, M=80	0.046148	0.036138	0.02016
N=160, M=160	0.02289	0.017893	0.010006
N=320, M=320	0.011399	0.0089031	0.0049844

Tablo 3.3.'de görüldüğü gibi N ve M değerleri iki katına çıkarsa, BMDFŞ'nin hata değerleri yaklaşık $\frac{1}{2}$ civarında azalmaktadır.



Şekil 3.3. (3.3.17) Problemin BMDFŞ'nın yaklaşık çözüm grafiği

Daha sonra (3.1.10) formülleri uygulanarak (3.3.17) problemin yaklaşık çözümü için İMDFŞ

$$\begin{cases}
 \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + \pi(\cos(\pi x_n) - \sin(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} \\
 -(2 + \sin(\pi x_n) + \cos(\pi x_n)) \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} - u_n^k - p_n = -f(t_k, x_n), \\
 k = 1, \dots, N-1, \quad n = 1, \dots, M-1, \\
 -3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k = 0, \quad u_M^k = 0, \quad k = 0, \dots, N, \\
 -3u_n^0 + 4u_n^1 - u_n^2 = 2\tau\varphi(x_n), \\
 u_n^N - u_n^{N-1} - 0.25(u_n^{l_1+1} - u_n^{l_1}) - 0.25(u_n^{l_2+1} - u_n^{l_2}) - 0.25(u_n^{l_3+1} - u_n^{l_3}) = \tau\psi(x_n), \\
 u_n^{l_0} + \mu_0(u_n^{l_0+1} - u_n^{l_0}) = \zeta_n, 3u_n^N - 4u_n^{N-1} + u_n^{N-2} \\
 -0.25((3+2\mu_1)u_n^{l_1+1} - (4+4\mu_1)u_n^{l_1} + (1+2\mu_1)u_n^{l_1}) \\
 -0.25((3+2\mu_2)u_n^{l_2+1} - (4+4\mu_2)u_n^{l_2} + (1+2\mu_2)u_n^{l_2}) \\
 -0.25((3+2\mu_3)u_n^{l_3+1} - (4+4\mu_3)u_n^{l_3} + (1+2\mu_3)u_n^{l_3}) = 2\tau\psi(x_n), n = 0, \dots, M
 \end{cases} \quad (3.3.21)$$

şeklinde yazılabilir. (3.3.18) yardımcı problem için İMDFŞ

$$\begin{cases}
 \frac{v_n^{k+1} - 2v_n^k + v_n^{k-1}}{\tau^2} + \pi(\cos(\pi x_n) - \sin(\pi x_n)) \frac{v_{n+1}^k - v_{n-1}^k}{2h} \\
 -(2 + \sin(\pi x_n) + \cos(\pi x_n)) \frac{v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k}{h^2} - v_n^k = -f(t_k, x_n), \\
 k = 1, \dots, N-1, \quad n = 1, \dots, M-1, \\
 -3v_n^0 + 4v_n^1 - v_n^2 = 2\tau\varphi(x_n), \\
 -3v_M^k + 4v_{M-1}^k - v_{M-2}^k = 0, \quad v_0^k = 0, \quad k = 0, \dots, N, \\
 v_n^N - v_n^{N-1} - 0.25(v_n^{l_1+1} - v_n^{l_1}) - 0.25(v_n^{l_2+1} - v_n^{l_2}) - 0.25(v_n^{l_3+1} - v_n^{l_3}) = \tau\psi(x_n), \\
 n = 0, \dots, M, \\
 3v_n^N - 4v_n^{N-1} + v_n^{N-2} - 0.25((3 + 2\mu_1)v_n^{l_1+1} - (4 + 4\mu_1)v_n^{l_1} + (1 + 2\mu_1)v_n^{l_1}) \\
 - 0.25((3 + 2\mu_2)v_n^{l_2+1} - (4 + 4\mu_2)v_n^{l_2} + (1 + 2\mu_2)v_n^{l_2}) \\
 - 0.25((3 + 2\mu_3)v_n^{l_3+1} - (4 + 4\mu_3)v_n^{l_3} + (1 + 2\mu_3)v_n^{l_3}) = 2\tau\psi(x_n)
 \end{cases} \quad (3.3.22)$$

formundadır. Fark şeması,

$$\begin{cases}
 A_n v_{n+1} + B_n v_n + C_n v_{n-1} = I\theta_n, \quad n = 1, \dots, M-1, \\
 -3v_0 + 4v_1 - v_2 = 0, \quad v_M = \vec{0}
 \end{cases}$$

matris formunda yazılabilir. Burada A_n (3.3.6), C_n (3.3.8) ve B_n matrisi ise (3.3.15) şeklindedir. B_n matrisindeki b_n ve d (3.3.9) ile aynıdır.

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= -\frac{1+2\mu_1}{4}, e_{12} = 2 + \mu_1, e_{13} = -\frac{3+2\mu_1}{4} \\
 e_{21} &= -\frac{1+2\mu_2}{4}, e_{22} = 1 + \mu_2, e_{23} = -\frac{3+2\mu_2}{4} \\
 e_{31} &= -\frac{1+2\mu_3}{4}, e_{32} = 2 + \mu_3, e_{33} = -\frac{3+2\mu_3}{4}
 \end{aligned}$$

biçimindedir.

α_n, β_n , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde kare matris olup, \mathcal{G}_n ise $(N+1) \times 1$ ($n = 0, \dots, M-2$) sütun

matris olmak üzere (3.3.22) probleminin çözümü

$$v_n = \alpha_n v_{n+1} + \beta_n v_{n+2} + \mathcal{G}_n, \quad n = M-2, \dots, 1 \quad (3.3.23)$$

formülü ile elde edilir. Bu durumda α_n , β_n ve \mathcal{G}_n için,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -(B_n + C_n \alpha_{n-1})^{-1} (A_n + C_n \beta_{n-1}) \\ \beta_n &= 0 \\ \mathcal{G}_n &= (B_n + C_n \alpha_n)^{-1} (I\theta_n - C_n \mathcal{G}_{n-1}) \quad n = 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

formülleri geçerlidir. Burada,

$$\alpha_1 = \frac{4}{3}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{3}, \quad \mathcal{G}_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{8}{5}I, \quad \beta_2 = -\frac{3}{5}I, \quad \mathcal{G}_2 = \vec{0}.$$

(3.3.23) formülünün kullanılmasını sağlamak için v_M ve v_{M-1} için değerler hesaplanır.

$$\begin{aligned} A_{M-1}v_M + B_{M-1}v_{M-1} + C_{M-1}v_{M-2} &= I\theta_{M-1} \\ v_M &= \vec{0} \\ v_{M-2} &= \alpha_{M-1}v_{M-1} + \beta_{M-1}v_M + \mathcal{G}_{M-2} \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Üçüncü denkleme ikinci denklemi ve onların her ikisini birinci denklemde yerine yazılırsa,

$$A_{M-1}v_M + B_{M-1}v_{M-1} + C_{M-1}(\alpha_{M-1}v_{M-1} + \beta_{M-1}v_M + \mathcal{G}_{M-2}) = I\theta_{M-1}$$

alınır. Buna göre,

$$v_{M-1} = (B_{M-1} + C_{M-1}\alpha_{M-1})^{-1} (I\theta_{M-1} - C_{M-1}\mathcal{G}_{M-2})$$

elde edilir.

Bu problemin çözümü bulunduktan sonra p_n değeri,

$$\begin{aligned}
p_n = & -\frac{(2 + \sin \pi x_n + \cos \pi x_n)}{h^2} \left\{ \zeta_{n+1} - (\mu_0 v_{n+1}^{l_0+1} - (\mu_0 - 1) v_{n+1}^{l_0} + \zeta_{n-1} \right. \\
& \left. - (\mu_0 v_{n-1}^{l_0+1} - (\mu_0 - 1) v_{n-1}^{l_0}) - 2(\zeta_n - (\mu_0 v_n^{l_0+1} - (\mu_0 - 1) v_n^{l_0})) \right\} \\
& - \frac{\pi(-\sin \pi x_n + \cos \pi x_n)}{2h} \left\{ \zeta_{n+1} - (\mu_0 v_{n+1}^{l_0+1} - (\mu_0 - 1) v_{n+1}^{l_0} - \zeta_{n-1} \right. \\
& \left. + (\mu_0 v_{n-1}^{l_0+1} - (\mu_0 - 1) v_{n-1}^{l_0})) \right\} + \zeta_n - \mu_0 v_n^{l_0+1} - (\mu_0 - 1) v_n^{l_0}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir. Daha sonra (3.3.21) fark şemasının çözümü

$$u_n^k = v_n^k - (\mu_0 v_n^{l_0+1} - (\mu_0 - 1) v_n^{l_0}) + \zeta_n, \quad k = 0, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M$$

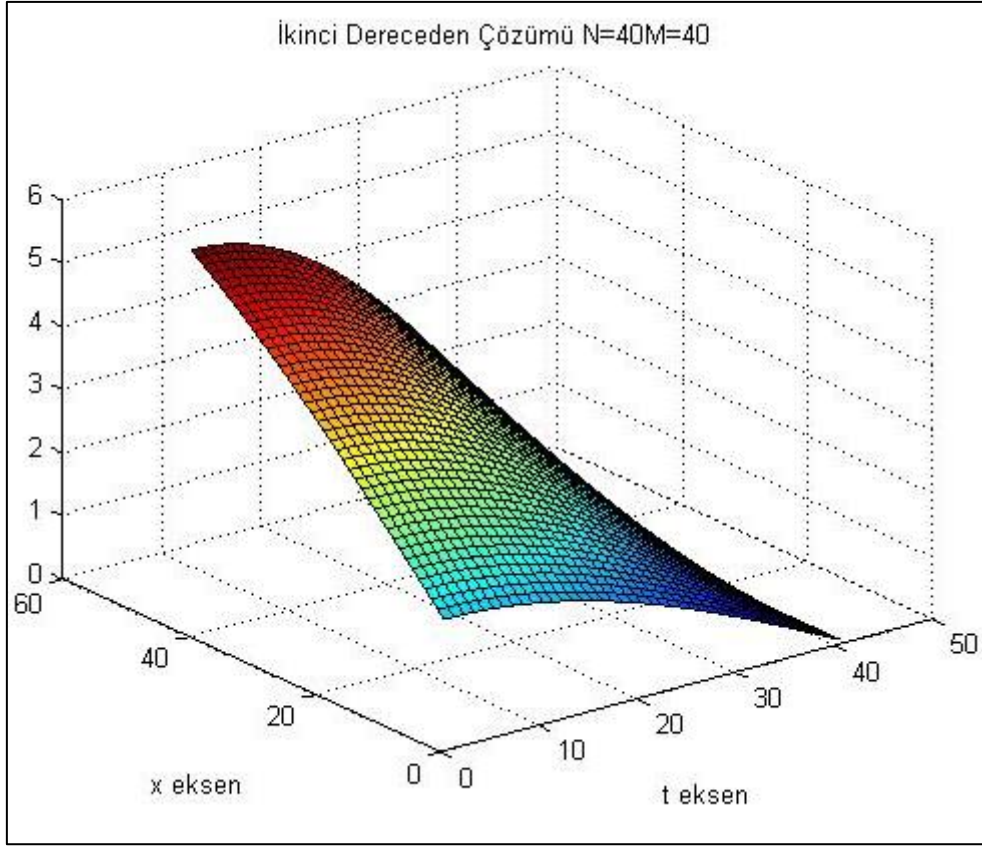
olarak belirlenir.

Sayısal çözüm MATLAB programında elde edilmiştir. Farklı (N,M) =(40,40), (80,80), (160,160), (320,320) değerleri için yaklaşık sayısal çözümün hata analizi 3.4. tablosunda gösterilmiştir. Hata hesaplaması için (3.3.11) formüller uygulanılmıştır.

Tablo 3.4.'de görüldüğü gibi N ve M değerleri iki katına çıkarsa, İMDFŞ'nin hata değerleri yaklaşık 1/4 civarında azalmaktadır.

Tablo 3.4. (3.3.21) İMDFŞ'nin hata analizi

	v için hatalar	p için hatalar	u için hatalar
N=40, M=40	0.00048856	0.0048348	0.00020678
N=80, M=80	6.30×10^{-5}	0.00085298	4.05×10^{-5}
N=160, M=160	2.15×10^{-5}	0.00015451	8.80×10^{-6}
N=320, M=320	6.09×10^{-6}	2.89×10^{-5}	2.03×10^{-6}



Şekil 3.4. (3.3.17) Problemin İMDFŞ'nın yaklaşık çözüm grafiği

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, eliptik diferansiyel denklemler için Neumann tipi çok noktalı karışık sınır değer problemlerinin çözümlerinin ve yaklaşık çözümler için kurulmuş olan birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemalarının kararlılık analizi araştırılmıştır.

n, q herhangi bir doğal sayılar olmak üzere R^n Öklid uzayında $\Omega = (0,1)^n$ birim açık küpün sınırı $\partial\Omega = S = S_1 \cup S_2$, $a_r(x), \varphi(x), \psi(x), \zeta(x) (x \in L_2(\bar{\Omega}))$, $f(t, x) (t \in (0,1), x \in \Omega)$ bilinen düzgün fonksiyonlar, $\sigma > 0$ ve $\lambda_i \in (0,1)$, k_1, k_2, \dots, k_q verilen reel sayılar ve $\sum_{j=1}^q k_j \leq 1$ oldukları varsayılınsın. Tezde elde edilen özgün sonuçlar aşağıdaki gibidir:

1. $[0,1] \times \Omega$ bölgesinde,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial x_r} \left(a_r(x) \frac{\partial u}{\partial x_r}(t, x) \right) + \sigma u(t, x) = p(x) + f(t, x), \\ 0 < t < 1, x \in \Omega, \\ u_t(0, x) = \varphi(x), u_t(1, x) = \sum_{i=1}^q k_i u_t(\lambda_i, x) + \psi(x), u(\lambda_0, x) = \zeta(x), x \in \bar{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, x \in S_1, \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(t, x) = 0, x \in S_2, 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

şeklindeki bilinmeyen u ve p fonksiyonlu çok noktalı Neumann tipi üst belirli Dirichlet-Neumann karışık sınır değer probleminin çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

2. $[0,1] \times \Omega$ bölgesinde,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial x_r} \left(a_r(x) \frac{\partial u}{\partial x_r}(t, x) \right) + \sigma u(t, x) = p(x) + f(t, x), \\ 0 < t < 1, x \in \Omega, \\ u_t(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(1, x) = \sum_{i=1}^q k_i u_t(\lambda_i, x) + \psi(x), \\ u(\lambda_0, x) = \zeta(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t, x) = 0, \quad x \in S_1, \quad u(t, x) = 0, \quad x \in S_2, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

şeklindeki bilinmeyen u ve p fonksiyonlu çok noktalı Neumann tipi üst belirli Neumann-Dirichlet sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problemin çözümü için kararlılık eşitsizlikleri kanıtlanmıştır.

3. Karışık sınır değer koşulları ile verilen Neumann tipi (4.1) ve (4.2) çok boyutlu eliptik üst belirli problemler için

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u_k^h(x) = p^h(x) + f^h(t_k, x), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, x \in \Omega_h, \\ \frac{u_1^h(x) - u_0^h(x)}{\tau} = \varphi^h(x), \quad \frac{u_N^h(x) - u_{N-1}^h(x)}{\tau} - \sum_{i=1}^q \frac{k_i}{\tau} (u_{i+1}^h(x) - u_i^h(x)) = \psi^h(x), \\ u_{i_0}^h(x) = \zeta^h(x), \quad x \in \tilde{\Omega}_h \end{array} \right.$$

şeklindeki BMDFŞ incelenmiştir.

4. Karışık sınır değer koşulları ile verilen (4.1) ve (4.2) Neumann tipi çok boyutlu eliptik üst belirli problemler için

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u_k^h(x) = p^h(x) + f^h(t_k, x), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, x \in \Omega_h, \\ \frac{-3u_0^h(x) + 4u_1^h(x) - 2u_2^h(x)}{2\tau} = \varphi^h(x), \quad \frac{3u_N^h(x) - 4u_{N-1}^h(x) + 2u_{N-2}^h(x)}{2\tau} \\ - \sum_{i=1}^q \frac{k_i}{2\tau} \left[(3 + 2\mu_i) u_{i+1}^h(x) - (4 + 4\mu_i) u_i^h(x) + (1 + 2\mu_i) u_{i-1}^h(x) \right] = \psi^h(x), \\ (1 - \mu_i) u_{i_0}^h(x) + \mu_i u_{i_0+1}^h(x) = \zeta(x), \quad x \in \tilde{\Omega}_h \end{array} \right.$$

şeklindeki İMDFŞ araştırılmıştır.

5.İki değişkenli eliptik denklem için Neumann tipi çok noktalı Dirichlet-Neumann sınır değer probleminin çözümü için algoritma sunulmuştur ve MATLAB programı kullanılarak sayısal çözümler hesaplanmıştır. BMDFŞ ve İMDFŞ'lerinin sayısal deneyleri elde edilmiş olan teorik ifadeleri desteklemektedir.

6. Eliptik denklem için Neumann tipi çok noktalı Neumann- Dirichlet sınır değer probleminin sayısal çözümünün algoritması verilmiştir ve sayısal çözümler hesaplanmıştır. Sayısal sonuçlar elde edilmiş olan teorik ifadeleri desteklemektedir.

7. Sonuçların karışık sınır değer koşullarıyla eliptik kısmi diferansiyel denklemleri içeren modelleri incelemekte katkısı olacaktır.

5.KAYNAKLAR

- Akyüz, G., 2017. Dirichlet koşullu Bitsadze - Samarskii tipi üstbelirli eliptik probleminin kararlılık analizi, Yüksek Lisans Tezi, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gümüşhane, 132 s.
- Ashyralyev, A., 2008. A note on the Bitsadze - Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space, Journal of Mathematical Analysis and Applications 344, 1, 557-573.
- Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P.E., 2004. New Difference Schemes for Partial Differential Equations, Operator Theory Advances and Applications, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 443p.
- Ashyralyev, A. ve Tetikoglu, F.S.O., 2012. FDM for Elliptic Equations with Bitsadze-Samarskii - Dirichlet Conditions, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 454831.
- Ashyralyev, A. ve Tetikoglu, F.S.O. , 2013. A note on Bitsadze - Samarskii type nonlocal boundary problems: well-posednesss, Numer. Funct. Anal. Optim. 34(9), 939- 975.
- Ashyralyev, A. ve Tetikoglu, F.S.O., 2014. On well – posedness of nonclassical problems for elliptic equations. Math. Methods Appl. Sci. 37(17), 2663-2676, 2014.
- Ashyralyyev , C., 2014. High Order Approximation of the Inverse Elliptic Problem with Dirichlet-Neumann Conditions, Filomat 28:5, 947–962.
- Ashyralyev , A. ve Öztürk, E., 2012. On Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundarr value problems for elliptic differential and difference equations.Well-posedness. Appl. Comput. Math.219(3),1093-1107.
- Ashyralyyev, C., 2014. Inverse Neumann problem for an equation of elliptic type, In: Ashyralyev, A., Malkowsky, E. (Eds.), 2nd International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), AIP Conference Proceedings, 1611,46-52
- Ashyralyyev , C., 2017. Stability Estimates for Solution of Neumann Type Overdetermined Elliptic Problem, Numerical Functional Analysis and Optimization 38(10), 1226-1243.
- Ashyralyyev, C., 2017. Numerical Solution to Bitsadze - Samarskii Type Elliptic Overdetermined Multipoint NBVP, Boundary Value Problems, 2017,74, 1-22.
- Ashyralyyev , C. ve Akkan, Y., 2015. Numerical solution to inverse elliptic problem with Neumann type overdetermination and mixed boundary conditions, Electronic Journal of Differential Equations, 2015,188, 1-15.

- Ashyralyyev, C., Akyüz, G. ve Dedetürk, M., 2017, Approximate solution for an inverse problem of multidimensional elliptic equation with multipoint nonlocal and Neumann boundary conditions, Electronic Journal of Differential Equations, 2017, 197, 1-16.
- Ashyralyyev, C. ve Akyüz, G., 2016. Stability estimates for solution of Bitsadze-Samarskii type inverse elliptic problem with Dirichlet conditions, AIP Conference Proceedings, 1759, 020129.
- Ashyralyyev, C. ve Çay, A., 2018. Well – posedness of Neumann - type elliptic overdetermined problem with integral condition, AIP Conference Proceedings, 1997, 020026.
- Ashyralyyev, C. ve Dedetürk, M., 2013. Approximate solution of inverse problem for elliptic equation with overdetermination, Abstract and Applied Analysis, 2013 Article ID 548017.
- Ashyralyyev, C. ve Karabey, S., 2019. Numerical solution of Neumann type elliptic overdetermined multipoint mixed boundary value problem AIP Conference Proceedings, 2183, 070020.
- Bitsadze, A.V. ve Samarskii, A.A., 1969. On some simplest generalizations of linear elliptic problems. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 185, 139–159.
- Cheney, W., 2001. Analysis for Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 444p
- Çay, A., 2018. İntegral koşullu Neumann tipi eliptik ters problemin iyi tanımlılığı, Yüksek Lisans Tezi, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gümüşhane, 68 s.
- Kabanikhin, S.I., 2011. Inverse and III-posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter, Berlin, 456p.
- Krein, S.G., 1971. Linear Differential Equations in Banach Space, Translation of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 390p.
- Krein, S.G., 1972. Functional Analysis, Wolters - Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 380p.
- Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York, 390p.
- Orlovsky, D.G., 2013. Inverse problem for elliptic equation in a Banach space with Bitsadze - Samarsky boundary value conditions, Journal of Inverse and III-Posed Problems, 2013, 21, 1, 141-157.
- Orlovsky, D.G. ve Piskarev, S., 2013. Approximation of the Bitsadze-Samarskii inverse problem for an elliptic equation with the dirichlet conditions, Differential Equations, 49, 7, 895-907.

- Orlovsky, D. G. ve Piskarev, S.I., 2018. On Approximation of Coefficient Inverse Problems for Differential Equations in Functional Spaces, Journal of Mathematical Sciences, Springer.
- Samarskii, A. A. ve Nikolaev, E.S., 1989. Numerical methods for grid equations, vol 2, Birkhauser, Basel, Switzerland, 1989.
- Samarskii, A. A. ve Vabishchevich, P.N., 2007. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics, Inverse and Ill-Posed Problems Series, Walter de Gruyter, Berlin.

6.EKLER

6.1. Ek 1. (3.3.1) Problemin MATLAB Program Kodları

```
function equation3(N,M,lam0,lam1,lam2,lam3)
if nargin<1;end;
close;close;
T=1;tau=T/N;h=1/M;
lbt0=lam0/tau;l0=floor(lbt0);mu0=lbt0-l0;lbt1=lam1/tau;l1=floor(lbt1);mu1=lbt1-l1;
lbt2=lam2/tau;l2=floor(lbt2);mu2=lbt2-l2;lbt3=lam3/tau;l3=floor(lbt3);mu3=lbt3-l3;
lbtl0=lbt0-l0;
A=zeros(N+1,N+1,M+1);B=zeros(N+1,N+1,M+1);C=zeros(N+1,N+1,M+1);
for n=1:M+1
for k=2:N
x=(n-1)*h;
A(k,k,n)=(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2+pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x))/(2*h);
C(k,k,n)=(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2-pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x))/(2*h);
B(k,k,n)=-2/tau^2-2*(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2-1;
B(k,k+1,n)=1/tau^2;B(k,k-1,n)=1/tau^2;
End
B(1,1,n)=-1;B(1,2,n)=1;B(N+1,N+1,n)=1;B(N+1,N,n)=-1;
B(N+1,l1+2,n)=-1/4;B(N+1,l1+1,n)=1/4;B(N+1,l2+2,n)=-1/4;B(N+1,l2+1,n)=1/4;
B(N+1,l3+2,n)=-1/4;B(N+1,l3+1,n)=1/4;
end
R=eye(N+1,N+1);fii=zeros(N+1,M+1);
for n=1:M+1
x=(n-1)*h;
for k=2:N
t=(k-1)*tau;fii(k,n)=-rsf(t,x);
end
fii(1,n)=tau*ksii(0,x);
fii(N+1,n)=tau*(ksii(T,x)-(1/4)*ksii(lam1,x)-(1/4)*ksii(lam2,x)-(1/4)*ksii(lam3,x));
```

```

end
alphaf{1}=zeros(N+1,N+1);bethaf{1}=zeros(N+1,1);
for j=2:M
Q=inv(B(:,j)+C(:,j)*alphaf{j-1});
alphaf{j}=-Q*A(:,j);bethaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-(C(:,j)*bethaf{j-1}));
end
U=zeros(N+1,M+1);alphaf{M}=R; bethaf{M}=zeros(N+1,1);
QZ=A(:,M)+B(:,M)+C(:,M)*alphaf{M-1}; Q=inv(QZ);
U(:,M+1)=Q*(R*(fii(:,M))-C(:,M)*bethaf{M-1});
for j=M:-1:1
U(:,j)=alphaf{j}*U(:,j+1)+bethaf{j};
end
p1=zeros(M+1,1);
for n=2:M
x=(n-1)*h;
uxx=-(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))*(-2*U(l0+1,n)+U(l0+1,n+1)+U(l0+1,n-1))/h^2;
ux=-(U(l0+1,n+1)-U(l0+1,n-1))/(2*h)*pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x));
Au=uxx+ux+U(l0+1,n);p1(n,1)=aksii(lam0,x)-Au;
end
p1(1,1)=exactp(0); p1(M+1,1)=exactp(1);
V=zeros (N+1,M+1);
for n=1:M+1
x=(n-1)*h;
for k=1:N+1
t=(k-1)*tau; V(k,n)=U(k,n)+exact(lam0,x)-U(l0+1,n);
end end
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;x=(n-1)*h;es(k,n)=exact(t,x);esu(k,n)=exactu(t,x);
end end
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;esp(n,1)=exactp(x);
end

```

```

maxerrorp=0;
for n=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(n,1)-p1(n,1))^2;
end
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2);
pu=U;ftf=esu-pu;fmat1=abs(ftf);fmat2=fmat1.*fmat1*h;fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);maxerroru=max(fmat4);
pf=V;ftf=es-pf;fmat1=abs(ftf);fmat2=fmat1.*fmat1*h;fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);maxerror=max(fmat4);
format('shortG');Grids=[N,M];
cevapFirstAccuracy=[maxerroru,maxerrorp,maxerror];
str1=strcat('Birinci Dereceden Çözüm N=',num2str(N),'M=',num2str(M));
figure;surf(pf);title(str1);xlabel('t eksen');
ylabel('x eksen');rotate3d;
A=zeros(N+1,N+1,M+1);B=zeros(N+1,N+1,M+1);C=zeros(N+1,N+1,M+1);
for n=1:M+1
for k=2:N;
x=(n-1)*h;
A(k,k,n)=(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2+pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x))/(2*h);
C(k,k,n)=(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2-pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x))/(2*h);
B(k,k,n)=-2/tau^2-2*(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2-1;
B(k,k+1,n)=1/tau^2; B(k,k-1,n)=1/tau^2;
end;
B(1,1,n)=-3;B(1,2,n)=4;B(1,3,n)=-1;
B(N+1,N+1,n)=3;B(N+1,N,n)=-4;B(N+1,N-1,n)=1;
B(N+1,l1+1,n)=-1/4*(3+2*mu1);B(N+1,l1,n)=1/4*(4+4*mu1);
B(N+1,l1-1,n)=-1/4*(1+2*mu1);B(N+1,l2+1,n)=-1/4*(3+2*mu2);
B(N+1,l2,n)=1/4*(4+4*mu2);B(N+1,l2-1,n)=-1/4*(1+2*mu2);
B(N+1,l3+1,n)=-1/4*(3+2*mu3);B(N+1,l3,n)=1/4*(4+4*mu3);
B(N+1,l3-1,n)=-1/4*(1+2*mu3);
end;
R=eye(N+1,N+1);fii=zeros(N+1,M+1);
for n=1:M+1;

```

```

x=(n-1)*h;
for k=2:N;
t=(k-1)*tau;
fii(k,n)=-rsf(t,x);
end;
fii(1,n)=2*tau*ksii(0,x);
fii(N+1,n)=2*tau*(ksii(T,x)-(1/4)*ksii(lam1,x)-(1/4)*ksii(lam2,x)-(1/4)*ksii(lam3,x));
end;
U=zeros(N+1,M+1);
alpha{1} = zeros(N+1,N+1); betha{1} = zeros(N+1,N+1); gamma{1} = zeros(N+1,1) ;
Q=inv(B(:,2));
betha{2} = - Q*A(:,2); alpha{2} = - Q*B(:,2); gamma{2} = Q*R*fii(:,2);
for j=2:M-1;
Q=inv(B(:,j)+C(:,j)*alpha{j-1});
alpha{j}=-Q*(A(:,j)+C(:,j)*betha{j-1});betha{j}=zeros(N+1,N+1);
gamma{j} = Q*(R*(fii(:,j)) - C(:,j)*gamma{j-1});
end;
alpha{M-1} = 4*R; betha{M-1} = -3*R;
gamma{M-1}= zeros(N+1,1) ; alpha{M-2} = (8/3)*R;
betha{M-2} = (-5/3)*R; gamma{M-2} = zeros(N+1,1);
A12=4*A(:,M-2)+9*B(:,M-2)+C(:,M-2)*(9*alpha{M-3}+4*betha{M-3});
A11=-3*A(:,M-2)-8*B(:,M-2)-C(:,M-2)*(8*alpha{M-3}+3*betha{M-3});
A21=-3*B(:,M-1)-8*C(:,M-1); A22=A(:,M-1)+4*B(:,M-1)+9*C(:,M-1);
F1=R*(fii(:,M-2))-C(:,M-2)*gamma{M-3}; F2=R*(fii(:,M-1)); Q=inv(A22);
QZ=A11-A12*Q*A21;F=inv(QZ);
U(:,M+1)=F*(F1-A12*Q*F2); U(:,M)=Q*(F2-A21*U(:,M+1));
for j=M-1:-1:1;
U(:,j)=alpha{j}*U(:,j+1)+betha{j}*U(:,j+2)+gamma{j};
end;
p2=zeros(M+1,1);
for n=2:M
x=(n-1)*h;
uxx=(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))*(-2*(lbt10*U(l0+2,n)-(lbt10-1)*U(l0+1,n))

```

```

+lbtl0*U(l0+2,n+1)-(lbtl0-1)*U(l0+1,n+1)+lbtl0*U(l0+2,n-1)-(lbtl0-1)*U(l0+1,n-1))/h^2;
ux=(lbtl0*U(l0+2,n+1)-(lbtl0-1)*U(l0+1,n+1)-lbtl0*U(l0+2,n-1)+(lbtl0-1)
*U(l0+1,n-1))/(2*h)*pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x));
Au=-uxx-ux+lbtl0*U(l0+2,n)-(lbtl0-1)*U(l0+1,n);
p2(n,1)=aksii(lam0,x)-Au;
end
p2(1,1)=exactp(0); p2(M+1,1)=exactp(1); maxp=0;
for n=2:M;
maxp=maxp+(abs(esp(n,1)-p2(n,1)))^2;
end;
maxp=maxp^(1/2)*h^(1/2);V=zeros(N+1,M+1);
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
V(k,n)=U(k,n)+exact(lam0,x)-lbtl0*U(l0+2,n)+(lbtl0-1)*U(l0+1,n);
end;end;
pu=U;maxerroru=max(max(abs(esu-pu)));
pf=V;ftf=es-pf;
fmat1=abs(ftf);fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);fmat4=fmat3.^(1/2);maxerror=max(fmat4);
format('shortG');
cevapSecondAccuracy=[maxerroru,maxp,maxerror];
cevap=[cevapFirstAccuracy,cevapSecondAccuracy]
str1=strcat('İkinci Dereceden Çözümü N=',num2str(N),'M=',num2str(M));
figure; surf(pf); title(str1); xlabel('t eksen');ylabel('x eksen'); rotate3d;
function estx=exact(t,x)
estx=(cos(pi/2*t)+3*t+2)*sin(pi/2*x);
function estxu=exactu(t,x)
estxu=(cos(pi/2*t)+3*t)*sin(pi/2*x);
function estxp=exactp(x)
st=sin(pi/2*x);ct=cos(pi/2*x); sa=sin(pi*x);cb=cos(pi*x);
estxp=-(pi^2)*ct*cb+pi^2*ct*sa+pi^2*st+pi^2/2*st*sa+pi^2/2*st*cb+2*st;

```



```

function ksi=ksii(t,x)
ksi=(-pi/2*sin(pi/2*t)+3)*sin(pi/2*x);
function aksi=aksii(t,x)
st=sin(pi/2*x);ct=cos(pi/2*x); sa=sin(pi*x);cb=cos(pi*x);at=cos(pi/2*t);
aksi=(at+3*t+2)*(-pi^2/2*ct*cb+pi^2/2*ct*sa+pi^2/2*st+pi^2/4*st*sa+.....
pi^2/4*st*cb+st); function rsftx=rsf(t,x)
st=sin(pi/2*x);ct=cos(pi/2*x); sa=sin(pi*x);cb=cos(pi*x);at=cos(pi/2*t);
rsftx=pi^2/4*at*st+(at+3*t)*(-pi^2/2*ct*cb+pi^2/2*ct*sa+pi^2/2*st+pi^2/4*st*sa+.....
pi^2/4*st*cb+st);

```

6.2. Ek 2. (3.3.17) Problemin MATLAB Program Kodları

```

function equation4(N,M,lam0,lam1,lam2,lam3)
if nargin<1;end;close;close;T=1;tau=T/N;h=1/M;
lbt0=lam0/tau;l0=floor(lbt0);mu0=lbt0-l0;lbt1=lam1/tau;l1=floor(lbt1);mu1=lbt1-l1;
lbt2=lam2/tau;l2=floor(lbt2);mu2=lbt2-l2;lbt3=lam3/tau;l3=floor(lbt3);mu3=lbt3-l3;
lbtl0=lbt0-l0;
A=zeros(N+1,N+1,M+1);B=zeros(N+1,N+1,M+1);C=zeros(N+1,N+1,M+1);
for n=1:M+1
for k=2:N
x=(n-1)*h;
A(k,k,n)=(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2+pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x))/(2*h);
C(k,k,n)=(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2-pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x))/(2*h);
B(k,k,n)=-2/tau^2-2*(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2-1;
B(k,k+1,n)=1/tau^2;B(k,k-1,n)=1/tau^2;
End
B(1,1,n)=-1;B(1,2,n)=1;B(N+1,N+1,n)=1;B(N+1,N,n)=-1;
B(N+1,l1+2,n)=-1/4;B(N+1,l1+1,n)=1/4;B(N+1,l2+2,n)=-1/4;B(N+1,l2+1,n)=1/4;
B(N+1,l3+2,n)=-1/4;B(N+1,l3+1,n)=1/4;
end
R=eye(N+1,N+1);fii=zeros(N+1,M+1);
for n=1:M+1

```

```

x=(n-1)*h;
for k=2:N
t=(k-1)*tau;
fii(k,n)=-rsf(t,x);
end
fii(1,n)=tau*ksii(0,x);
fii(N+1,n)=tau*(ksii(T,x)-(1/4)*ksii(lam1,x)-(1/4)*ksii(lam2,x)-(1/4)*ksii(lam3,x));
end
alphaf{1}=R;bethaf{1}=zeros(N+1,1);
for j=2:M
Q=inv(B(:,j)+C(:,j)*alphaf{j-1});
alphaf{j}=-Q*A(:,j);bethaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-(C(:,j)*bethaf{j-1}));
end
U=zeros(N+1,M+1);
for j=M:-1:1
U(:,j)=alphaf{j}*U(:,j+1)+bethaf{j};
end
p1=zeros(M+1,1);
for n=2:M
x=(n-1)*h;
uxx=-(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))*(-2*U(l0+1,n)+U(l0+1,n+1)+U(l0+1,n-1))/h^2;
ux=-(U(l0+1,n+1)-U(l0+1,n-1))/(2*h)*pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x));
Au=uxx+ux+U(l0+1,n);p1(n,1)=aksii(lam0,x)-Au;
end
p1(1,1)=exactp(0); p1(M+1,1)=exactp(1); V=zeros (N+1,M+1);
for n=1:M+1
x=(n-1)*h;
for k=1:N+1
t=(k-1)*tau;V(k,n)=U(k,n)+exact(lam0,x)-U(l0+1,n);
End End
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;

```

```

x=(n-1)*h;
es(k,n)=exact(t,x);esu(k,n)=exactu(t,x);
end end
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;
esp(n,1)=exactp(x);
end
pu=U;ftf=esu-pu;
fmat1=abs(ftf);fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerroru=max(fmat4);maxerrorp=0;
for n=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(n,1)-p1(n,1))^2;
End
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2);pf=V;ftf=es-pf;
fmat1=abs(ftf);fmat2=fmat1.*fmat1*h;fmat3=sum(fmat2,2);fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerror=max(fmat4);
format('shortG'); Grids=[N,M];
cevapFirstAccuracy=[maxerroru,maxerrorp,maxerror];
str1=strcat('Birinci Dereceden Çözümü N=',num2str(N),'M=',num2str(M));
figure;surf(pf);title(str1);xlabel('t eksen');
ylabel('x eksen');rotate3d;
A=zeros(N+1,N+1,M+1);B=zeros(N+1,N+1,M+1);C=zeros(N+1,N+1,M+1);
for n=1:M+1
for k=2:N;
x=(n-1)*h;
A(k,k,n)=(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2+pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x))/(2*h);
C(k,k,n)=(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2-pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x))/(2*h);
B(k,k,n)=-2/tau^2-2*(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))/h^2-1;
B(k,k+1,n)=1/tau^2;B(k,k-1,n)=1/tau^2;
end;
B(1,1,n)=-3;B(1,2,n)=4;B(1,3,n)=-1;
B(N+1,N+1,n)=3;B(N+1,N,n)=-4;B(N+1,N-1,n)=1;B(N+1,1+1,n)=-1/4*(3+2*mu1);

```

```

B(N+1,l1,n)=1/4*(4+4*mu1);B(N+1,l1-1,n)=-1/4*(1+2*mu1);
B(N+1,l2+1,n)=-1/4*(3+2*mu2);B(N+1,l2,n)=1/4*(4+4*mu2);
B(N+1,l2-1,n)=-1/4*(1+2*mu2);B(N+1,l3+1,n)=-1/4*(3+2*mu3);
B(N+1,l3,n)=1/4*(4+4*mu3);B(N+1,l3-1,n)=-1/4*(1+2*mu3);
end;
R=eye(N+1,N+1);fii=zeros(N+1,M+1);
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;
for k=2:N;
t=(k-1)*tau;
fii(k,n)=-rsf(t,x);
end;
fii(1,n)=2*tau*ksii(0,x);
fii(N+1,n)=2*tau*(ksii(T,x)-(1/4)*ksii(lam1,x)-(1/4)*ksii(lam2,x)-(1/4)*ksii(lam3,x));
end;
U=zeros(N+1,M+1);
alphaf{1}=4/3*R;bethaf{1}=-1/3*R;gammaf{1}=zeros(N+1,1);
Q=inv(B(:,2));
alphaf{2}=8/5*R;bethaf{2}=-3/5*R; gammaf{2}=zeros(N+1,1);
for j=3:M;
Q=inv(B(:,j)+C(:,j)*alphaf{j-1});
alphaf{j}=-Q*(A(:,j)+C(:,j)*bethaf{j-1});bethaf{j}=zeros(N+1,N+1);
gammaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-C(:,j)*gammaf{j-1});
end;
QZ=B(:,M)+C(:,M)*alphaf{M-1}; F=inv(QZ);
U(:,M)=Q*(R*(fii(:,M))-C(:,M)*gammaf{M-1});
for j=M-1:-1:1;
U(:,j)=alphaf{j}*U(:,j+1)+bethaf{j}*U(:,j+2)+gammaf{j};
end;
p1=zeros(M+1,1);
for n=2:M
x=(n-1)*h;
uxx=(2+sin(pi*x)+cos(pi*x))*(-2*(lbt10*U(l0+2,n)-(lbt10-1)

```

```

*U(l0+1,n))+lbtl0*U(l0+2,n+1)-(lbtl0-1)*U(l0+1,n+1)+lbtl0*U(l0+2,n-1)-(lbtl0-1)
*U(l0+1,n-1))/h^2;
ux=(lbtl0*U(l0+2,n+1)-(lbtl0-1)*U(l0+1,n+1)-lbtl0*U(l0+2,n-1)+(lbtl0-1)
*U(l0+1,n-1))/(2*h)*pi*(-sin(pi*x)+cos(pi*x));
Au=-uxx-ux+lbtl0*U(l0+2,n)-(lbtl0-1)*U(l0+1,n);
p1(n,1)=aksii(lam0,x)-Au;
end
p1(1,1)=exactp(0); p1(M+1,1)=exactp(1); maxp=0;
for n=2:M;
maxp=maxp+(abs(esp(n,1)-p1(n,1)))^2;
end;
maxp=maxp^(1/2)*h^(1/2);V=zeros(N+1,M+1);
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
V(k,n)=U(k,n)+exact(lam0,x)-lbtl0*U(l0+2,n)+(lbtl0-1)*U(l0+1,n);
end;end;
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;x=(n-1)*h;
es(k,n)=exact(t,x);esu(k,n)=exactu(t,x);
end;end;
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;esp(n)=exactp(x);
end;
pu=U;maxesu=max(max(esu));maxappu=max(max(pu));
maxerroru=max(max(abs(esu-pu)));relativeerroru=max(max((abs(esu-
pu)))/max(max(abs(pu)))); maxerrorp=0;
for n=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(n)-p1(n))^2;
end;
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2); pf=V;ftf=es-pf;

```

```

fmat1=abs(ftf);fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerror=max(fmat4);format('shortG');
cevapSecondAccuracy=[maxerroru,maxp,maxerror];
cevap=[cevapFirstAccuracy,cevapSecondAccuracy]
str1=strcat('İkinci Dereceden Çözümü N=',num2str(N),'M=',num2str(M));
figure; surf(pf); title(str1); xlabel('t eksen');
ylabel('x eksen'); rotate3d;function estx=exact(t,x)
estx=(sin(pi/2*t)+3*t+2)*cos(pi/2*x);    function estxu=exactu(t,x)
estxu=(sin(pi/2*t)+3*t)*cos(pi/2*x);      function estxp=exactp(x)
st=sin(pi/2*x);ct=cos(pi/2*x); sa=sin(pi*x);cb=cos(pi*x);
estxp=(pi*st)*(pi*cb-pi*sa)+(pi^2/2*ct)*(2+sa+cb)+2*ct;
function ksi=ksii(t,x) ksi=(pi/2*cos(pi/2*t)+3)*cos(pi/2*x);function aksi=aksii(t,x)
st=sin(pi/2*x);ct=cos(pi/2*x); sa=sin(pi*x);cb=cos(pi*x);at=sin(pi/2*t);
aksi=(at+3*t+2)*[(pi/2*st)*(pi*cb-pi*sa)+(pi^2/4*ct)*(2+sa+cb)+ct];
function rsftx=rsf(t,x)
st=sin(pi/2*x);ct=cos(pi/2*x); sa=sin(pi*x);cb=cos(pi*x);at=sin(pi/2*t);
rsftx=pi^2/4*at*ct+(at+3*t)*[(pi/2*st)*(pi*cb-pi*sa)+(pi^2/4*ct)*(2+sa+cb)+ct];

```

ÖZGEÇMİŞ

Aslen Bulgaristan göçmeni olan Suzan KARABEY, 10.08.1993'te İstanbul'da doğdu. İlkokulu ve ortaokulu İstanbul'da Prof. Dr. Ahat Andican İlköğretim Okulu'nda 1999-2007 yılları arasında bitirdi. Liseyi 2007-2011 yılları arasında Başakşehir Lisesi'nde tamamladı. Lisans eğitimini 2012-2016 yılları arasında Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümünde onur öğrencisi olarak bitirdi. Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü bünyesinde tezli yüksek lisans eğitimine 2017 yılında başlayıp 2020 yılı itibarıyla tamamladı. Orta derecede İngilizce bilmektedir.